Интегралы

@stewkk

10 марта 2021 г.

Конспект будет дополняться, актуальная версия на GitHub.

1. Неопределенные интегралы

1.1. Первообразные функции и неопределенные интегралы

Задачей дифференциорования являлось нахождение для функции ее производной. Поставим обратную задачу. Для каждой функции $f(x)$ найти $F(x)$, $F'(x) = f(x)$

$$f(x) = x^5$$
$$F(x) = \frac{x^6}{6} + 5$$
$$F'(x) = f(x)$$

Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Т.е. первообразная для любой функции $f(x)$ существует с точностью до постоянного слагаемого.

Th 1. *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.*

Доказательство.

$$f(x),\ F_1(x),\ F_2(x)$$
$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$$
$$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))'$$
$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$$
$$\Phi'(x) = f(x) - f(x)$$
$$\Phi'(x) = 0$$
$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0$$
$$\Phi(x) = const$$
$$\Phi(x) = C$$
$$C = F_1(x) - F_2(x)$$
$$F_1(x) = C + F_2(x)$$

□

Определение. если мы рассмотрим множество всех первообразных, то можно вести речь о неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = \big(F(x) + C\big)'$$

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = F'(x) + C'$$

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = f(x) + 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\Big(\int kf(x)dx\Big)' = \Big(k\int f(x)dx\Big)' = k\Big(\int f(x)dx\Big)' = kf(x)$$

3) Неопределенный интеграл суммы или разности нескольких выражений равен сумме или разности интегралов этих выражений:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\left(\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx\right)' = \left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = f(x) \pm g(x)$$

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int kdx = kx + C$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4) $\int \cos x dx = \sin x + C$

5) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

6) $\int -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

9) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Пример вывода(8):

Доказательство.

$$\int (\log_a x)' dx = \int \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log_a x * \ln a = \int \frac{1}{x} dx$$

$\square$

1.3. Примеры

(i) $\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

(ii) $\int (7x^6 + \frac{3}{x^2}) dx = 7 \int x^6 dx + 3 \int x^{-2} dx = 7 * \frac{x^7}{7} + 3 * \frac{x^{-1}}{-1} + C =$
$= x^7 - \frac{3}{x} + C$

(iii) $\int (\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}) dx = \sqrt{2} \int x^{1/2} dx + \sqrt{2} \int x^{-1/2} dx =$
$= \frac{\sqrt{2} x^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{2} x^{1/2}}{1/2} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

(v) $\int e^{6-2x} dx = \int \frac{e^{6-2x} d(6-2x)}{-2} = -\frac{1}{2} e^{6-2x} + C$

2. Методы вычисления интегралов

2.1. Замена или подведение под дифференциал

2.1.1. замена

$$\int 3^{\frac{x}{4}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x}{4} = t \\ x = 4t \\ dx = 4dt \end{matrix} \right| = \int 3^t 4dt = 4 \int 3^t dt = 4 * \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{4 * 3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

Под знаком интеграла необходимо увидеть функцию и ее производную с точностью до постоянного множителя(слагаемого). Тогда на данную функцию вводим замену.

2.1.2. подведение под дифференциал

$$\int x^{\frac{x}{4}} dx = \int 4 * 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 \int 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 * \frac{3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

2.2. Метод интегрирования по частям

Метод основан на интегрировании произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$\int d(uv) = \int \big(udv + vdu\big)$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1}$$

Метод интегрирования по частям не позволяет выразить интеграл за одно применение, но позволяет перейти к более простому.

Пример:

$$\int x * e^{2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \int e^{2x} dx = \int \frac{e^{2x} 2x}{2} = \frac{1}{2} * \frac{e^{2x}}{\ln e} = \frac{1}{2} e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

Примечание. *Промежуточные действия в замене обычно не пишут.*

$$= x * \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}d2x}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Примечание. *"C" в промежуточных действиях обычно не пишут.*

Пример 2:

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \ln x * \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} * \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$$

Формула (1) называется формулой интегрирования по частям. Подынтегральное выражние в формуле (1) представляет собой произведение двух множителей: u и dv каждый из которых подбирается так, чтобы от выражения dv можно было получить интеграл, а du уменьшало степень выражения, или хотя бы ее не увеличивала. Метод интегрирования по частям применяется при нахождении интеграла вида, где подытнтегральные функции имеют вид:

1 группа:

1) $P(x) * e^{kx}dx$
2) $P(x) * \sin kx \ dx$
3) $P(x) * \cos kx \ dx$

2 группа:

1) $P(x) * \ln x \ dx$
2) $P(x) * \arcsin x \ dx$
3) $P(x) * \arccos x \ dx$
4) $P(x) * \operatorname{arctg} x \ dx$
5) $P(x) * \operatorname{arcctg} x \ dx$

В которых $P(x)$ - это многочлен n-ой степени (не применять при большом n). Применяя (1) к интегралам 1-ой группы за u принимают $P(x)$, за dv - остальное. При многочленах высокой степени (n) - формула может применяться n-кратное число раз.

В интегралах 2 группы за u принимают $\ln x, \arccos x, ...$; за dv: $P(x)dx$.

2.3. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены и $Q(x) \neq 0$. Рациональная дробь может быть неправильной, когда степень числителя больше степени знаменателя; а правильной, когда степень числителя меньше степени знаменателя.

Поэтому, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию только правильных дробей.

Все правильные дроби разложим на виды:

2.3.1. примеры

2.4. Интегрирование некоторых видов иррациональности

2.5. Интегрирование тригонометрических функций

3. Определенные интегралы