Интегралы

@stewkk

12 марта 2021 г.

Конспект будет дополняться, актуальная версия на GitHub.

1. Неопределенные интегралы

1.1. Первообразные функции и неопределенные интегралы

Задачей дифференциорования являлось нахождение для функции ее производной. Поставим обратную задачу. Для каждой функции $f(x)$ найти $F(x)$, $F'(x) = f(x)$

$$f(x) = x^5$$
$$F(x) = \frac{x^6}{6} + 5$$
$$F'(x) = f(x)$$

Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Т.е. первообразная для любой функции $f(x)$ существует с точностью до постоянного слагаемого.

Th 1. *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.*

Доказательство.

$$f(x),\ F_1(x),\ F_2(x)$$
$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$$
$$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))'$$
$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x)$$
$$\Phi'(x) = f(x) - f(x)$$
$$\Phi'(x) = 0$$
$$(F_1(x) - F_2(x))' = 0$$
$$\Phi(x) = const$$
$$\Phi(x) = C$$
$$C = F_1(x) - F_2(x)$$
$$F_1(x) = C + F_2(x)$$

□

Определение. если мы рассмотрим множество всех первообразных, то можно вести речь о неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = \big(F(x) + C\big)'$$

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = F'(x) + C'$$

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = f(x) + 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\Big(\int kf(x)dx\Big)' = \Big(k\int f(x)dx\Big)' = k\Big(\int f(x)dx\Big)' = kf(x)$$

3) Неопределенный интеграл суммы или разности нескольких выражений равен сумме или разности интегралов этих выражений:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\Big(\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx\Big)' = \Big(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\Big)'$$

$$f(x) \pm g(x) = \Big(\int f(x)dx\Big)' \pm \Big(\int g(x)dx\Big)'$$

$$f(x) \pm g(x) = f(x) \pm g(x)$$

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\displaystyle\int kdx = kx + C$

2) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

4) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

6) $\displaystyle\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$

7) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

9) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Пример вывода(8):

Доказательство.

$$\int (\log_a x)' dx = \int \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log_a x * \ln a = \int \frac{1}{x} dx$$

$\square$

1.3. Примеры

(i) $\int \sqrt[3]{x} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$

(ii) $\int (7x^6 + \frac{3}{x^2}) dx = 7 \int x^6 dx + 3 \int x^{-2} dx = 7 * \frac{x^7}{7} + 3 * \frac{x^{-1}}{-1} + C =$
$= x^7 - \frac{3}{x} + C$

(iii) $\int (\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}) dx = \sqrt{2} \int x^{1/2} dx + \sqrt{2} \int x^{-1/2} dx =$
$= \frac{\sqrt{2} x^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{2} x^{1/2}}{1/2} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

(v) $\int e^{6-2x} dx = \int \frac{e^{6-2x} d(6-2x)}{-2} = -\frac{1}{2} e^{6-2x} + C$

2. Методы вычисления интегралов

2.1. Замена или подведение под дифференциал

2.1.1. замена

$$\int 3^{\frac{x}{4}} dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x}{4} = t \\ x = 4t \\ dx = 4dt \end{array} \right| = \int 3^t 4dt = 4 \int 3^t dt = 4 * \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{4 * 3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

Под знаком интеграла необходимо увидеть функцию и ее производную с точностью до постоянного множителя(слагаемого). Тогда на данную функцию вводим замену.

2.1.2. подведение под дифференциал

$$\int x^{\frac{x}{4}} dx = \int 4 * 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 \int 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 * \frac{3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

2.2. Метод интегрирования по частям

Метод основан на интегрировании произведения двух функций:

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$\int d(uv) = \int \big(udv + vdu\big)$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1}$$

Метод интегрирования по частям не позволяет выразить интеграл за одно применение, но позволяет перейти к более простому.

Пример:

$$\int x * e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \displaystyle\int e^{2x} dx = \int \frac{e^{2x} 2x}{2} = \frac{1}{2} * \frac{e^{2x}}{\ln e} = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

Примечание. *Промежуточные действия в замене обычно не пишут.*

$$= x * \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}d2x}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Примечание. *"C" в промежуточных действиях обычно не пишут.*

Пример 2:

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \ln x * \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} * \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3}) + C$$

Формула (1) называется формулой интегрирования по частям. Подынтегральное выражние в формуле (1) представляет собой произведение двух множителей: u и dv каждый из которых подбирается так, чтобы от выражения dv можно было получить интеграл, а du уменьшало степень выражения, или хотя бы ее не увеличивала. Метод интегрирования по частям применяется при нахождении интеграла вида, где подытнтегральные функции имеют вид:

1 группа:

1) $P(x) * e^{kx}dx$
2) $P(x) * \sin kx\ dx$
3) $P(x) * \cos kx\ dx$

2 группа:

1) $P(x) * \ln x\ dx$
2) $P(x) * \arcsin x\ dx$
3) $P(x) * \arccos x\ dx$
4) $P(x) * \mathrm{arctg}\, x\ dx$
5) $P(x) * \mathrm{arcctg}\, x\ dx$

В которых $P(x)$ - это многочлен n-ой степени (не применять при большом n). Применяя (1) к интегралам 1-ой группы за u принимают $P(x)$, за dv - остальное. При многочленах высокой степени (n) - формула может применяться n-кратное число раз.

В интегралах 2 группы за u принимают $\ln x, \arccos x, ...$; за dv: $P(x)dx$.

2.3. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены и $Q(x) \neq 0$. Рациональная дробь может быть неправильной, когда степень числителя больше степени знаменателя; а правильной, когда степень числителя меньше степени знаменателя.

Поэтому, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию только правильных дробей.

Все правильные дроби разложим на виды:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \pm a} = \int \frac{d(x \pm a)}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + C$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = (*)$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x-a} * \frac{1}{x+a}$$

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{x(A+B) + a(A-B)}{(x-a)(x+a)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ a(A - B) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ a(-2B) = 1 \end{cases}$$

$$B = -\frac{1}{2a}$$

$$A = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$$

$$(*) = \int \Big(\frac{dx}{2a(x-a)} = \frac{dx}{2a(x+a)}\Big) = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big| + C$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \int \frac{d|x \pm a|}{(x \pm a)^2} = -(x \pm a)^{-1} + C$

4) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x \pm a)^2} = \int \frac{x \pm a \mp a}{(x \pm a)^2}dx = \int \frac{1}{x \pm a}d(x \pm a) \mp \int \frac{a}{(x \pm a)^2}dx =$

$$\ln|x \pm a| \mp a(\frac{-1}{x \pm a}) + C = \ln|x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C$$

5) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \int \frac{xd(x^2 + a^2)}{x^2 \pm a^2} * \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2 \pm a^2}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a^2| + C$

6)

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\begin{vmatrix}x=at\\dx=adt\end{vmatrix}=\int\frac{a\ dt}{a^2t^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

Итого:

1) $\int\frac{dx}{x\pm a}=\ln|x\pm a|+C$

2) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$

3) $\int\frac{dx}{(x\pm a)^2}=-(x\pm a)^{-1}+C$

4) $\int\frac{xdx}{(x\pm a)^2}=\ln|x\pm a|\pm\frac{a}{x\pm a}+C$

5) $\int\frac{xdx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+C$

6) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$

2.3.1. примеры

1) $t=x+3$
$\int\frac{dx}{x^2+6x-7}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2-16}=\int\frac{dt}{t^2-4^2}=\frac{1}{8}\ln|\frac{t-4}{t+4}|+C=$
$=\frac{1}{8}\ln|\frac{x-1}{x+7}|+C$

2) $t=x-3$
$\int\frac{6x+1}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{6x+1}{(x-3)^2-1^2}=6\int\frac{(x-3)+3\frac{1}{6}}{(x-3)^2-1^2}d(x-3)=$
$=6\int\frac{(x-3)d(x-3)}{(x-3)^2-1}+19*\int\frac{1}{x-3^2-1^2}d(x-3)=$
$=6\int\frac{t\ dt}{t^2-1}+16\int\frac{dt}{t^2-1}$

3) $\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{x+3}{(x-3)^2+9}dx=\int\frac{x-4+7}{(x-4)^2+9}dx$

2.4. Интегрирование некоторых видов иррациональности

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{vmatrix} x = at \\ dx = adt \end{vmatrix} = \int \frac{adt}{a^2-a^2t^2} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$
$$= \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$$
$$t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$$
$$dt = 1 + \frac{1*2x}{2\sqrt{x^2 \pm a}} dx = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx + C$$
$$= \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a} + x}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx$$
$$dt = \frac{t}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx$$
$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{2^2}}} =$$
$$= \int \frac{d(x-\frac{5}{2})}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}} = \begin{vmatrix} t = (x-\dfrac{5}{2}) + \sqrt{(x-\dfrac{5}{2})^2-\dfrac{1}{4}} \\ dt = 1 + \dfrac{x-\frac{5}{2}}{\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}} \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{dt}{t}} =$$
$$= \ln|t| + C = \ln\left|(x-\frac{5}{2}) + \sqrt{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}\right| + C$$

2.5. Интегрирование тригонометрических функций

$$\int \sin mx * \cos mx \int \cos mx * \cos mx \int \sin mx * \sin mx$$

Для вычисления интегралов данного вида используют тригонометрические формулы данных тригонометрических функций.

Рассмотрим интегралы от тригонометрических функций содержащих степени

2.5.1. нечетная + четная степень

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

при интегрировании таких функций используют основное тригонометрическое тождество для выражения четной степени, а оставшуюся нечетную можно представить в виде дифференциала. Применяется если m и n - одна четная, другая нечетная.

$$\int \cos^6 x \cos^3 x dx = \int \sin^6 x * (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

$$= \int (\sin^6 x - \sin^8 x) d \sin x = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \end{matrix} \right| = \int (t^6 - t^8) dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

2.5.2. нечетная + нечетная

$$\int \sin^7 x \cos^3 x dx = \int \sin^7 x (1 - sin^2 x) * \frac{\cos x \ d(\sin x)}{\cos x}$$

2.5.3. четная + четная

выносим произодную функции в наименьшей из степеней (можно воспользоваться формулой синуса двойного угла или понижения степени)

$$\int \sin^6 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int (2 \sin x \cos x)^2 * \sin^4 x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x (\frac{1 - \cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos^2 2x)(1 - \cos 2x)^2 dx = \Bigg| ...$$

3. Определенные интегралы