

Интегралы

@stewkk

6 марта 2021 г.

1. Неопределенные интегралы

1.1. Первообразные функции и неопределенные интегралы

Задачей дифференцирования являлось нахождение для функции ее производной. Поставим обратную задачу. Для каждой функции $f(x)$ найти $F(x)$, $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^5 \\F(x) &= \frac{x^6}{6} + 5 \\F'(x) &= f(x)\end{aligned}$$

Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Т.е. первообразная для любой функции $f(x)$ существует с точностью до постоянного слагаемого.

Th 1. *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}f(x), F_1(x), F_2(x) \\ \Phi(x) &= F_1(x) - F_2(x) \\ \Phi'(x) &= (F_1(x) - F_2(x))' \\ \Phi'(x) &= F_1'(x) - F_2'(x) \\ \Phi'(x) &= f(x) - f(x) \\ \Phi'(x) &= 0 \\ (F_1(x) - F_2(x))' &= 0 \\ \Phi(x) &= const \\ \Phi(x) &= C \\ C &= F_1(x) - F_2(x) \\ F_1(x) &= C + F_2(x)\end{aligned}$$

□

Определение. если мы рассмотрим множество всех первообразных, то можно вести речь о неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

- 1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)'$$

$$\left(\int f(x)dx \right)' = F'(x) + C'$$

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x) + 0$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\left(\int kf(x)dx \right)' = \left(k \int f(x)dx \right)' = k \left(\int f(x)dx \right)' = kf(x)$$

3) Неопределенный интеграл суммы или разности нескольких выражений равен сумме или разности интегралов этих выражений:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx \right)' = \left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx \right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = \left(\int f(x)dx \right)' \pm \left(\int g(x)dx \right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = f(x) \pm g(x)$$

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1) \int kdx = kx + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$5) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$6) \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$$

$$7) \int e^x dx = e^x + C$$

$$8) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$9) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Пример вывода(8):

Доказательство.

$$\int (\log_a x)' dx = \int \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log_a x * \ln a = \int \frac{1}{x} dx$$

□

1.3. Примеры

$$(i) \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$(ii) \int (7x^6 + \frac{3}{x^2}) dx = 7 \int x^6 dx + 3 \int x^{-2} dx = 7 * \frac{x^7}{7} + 3 * \frac{x^{-1}}{-1} + C = x^7 - \frac{3}{x} + C$$

$$(iii) \int (\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}) dx = \sqrt{2} \int x^{1/2} dx + \sqrt{2} \int x^{-1/2} dx = \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{2}x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$(iv) \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(v) \int e^{6-2x} dx = \int \frac{e^{6-2x} d(6-2x)}{-2} = -\frac{1}{2} e^{6-2x} + C$$

2. Методы вычисления интегралов

2.1. Замена или подведение под дифференциал

2.1.1. замена

$$\int 3^{\frac{x}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t \\ x = 4t \\ dx = 4dt \end{array} \right| = \int 3^t 4dt = 4 \int 3^t dt = 4 * \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{4 * 3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

Под знаком интеграла необходимо увидеть функцию и ее производную с точностью до постоянного множителя(слагаемого). Тогда на данную функцию вводим замену.

2.1.2. подведение под дифференциал

$$\int x^{\frac{x}{4}} dx = \int 4 * 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 \int 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 * \frac{3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

2.2. Метод интегрирования по частям

Метод основан на интегрировании произведения двух функций:

$$\begin{aligned} d(uv) &= u dv + v du \\ \int d(uv) &= \int (u dv + v du) \\ uv &= \int u dv + \int v du \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned} \tag{1}$$

Метод интегрирования по частям не позволяет выразить интеграл за одно применение, но позволяет перейти к более простому.

Пример:

$$\int x * e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \int e^{2x} dx = \int \frac{e^{2x} 2x}{2} = \frac{1}{2} * \frac{e^{2x}}{\ln e} = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

Примечание. *Промежуточные действия в замене обычно не пишут.*

$$= x * \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}d2x}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Примечание. *"C " в промежуточных действиях обычно не пишут.*