

Интегралы

@stewkk

5 марта 2021 г.

1. Неопределенные интегралы

Задачей дифференцирования являлось нахождение для функции ее производной. Поставим обратную задачу. Для каждой функции $f(x)$ найдем $F(x)$, $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^5 \\F(x) &= \frac{x^6}{6} + 5 \\F'(x) &= f(x)\end{aligned}$$

Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Т.е. первообразная для любой функции $f(x)$ существует с точностью до постоянного слагаемого.

Th 1. *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}&f(x), F_1(x), F_2(x) \\&\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) \\&\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' \\&\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \\&\Phi'(x) = f(x) - f(x) \\&\Phi'(x) = 0 \\&(F_1(x) - F_2(x))' = 0 \\&\Phi(x) = \text{const} \\&\Phi(x) = c \\&c = F_1(x) - F_2(x) \\&F_1(x) = c + F_2(x)\end{aligned}$$

□

Определение. если мы рассмотрим множество всех первообразных, то можно вести речь о неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Свойства неопределенного интеграла:

- 1) производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению:

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)'$$

$$(\int f(x)dx)' = F'(x) + c'$$

$$(\int f(x)dx)' = f(x) + 0$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$