

Интегралы

@stewkk

11 марта 2021 г.

Конспект будет дополняться, актуальная версия на [GitHub](#).

1. Неопределенные интегралы

1.1. Первообразные функции и неопределенные интегралы

Задачей дифференцирования являлось нахождение для функции ее производной. Поставим обратную задачу. Для каждой функции $f(x)$ найти $F(x)$, $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^5 \\F(x) &= \frac{x^6}{6} + 5 \\F'(x) &= f(x)\end{aligned}$$

Функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Т.е. первообразная для любой функции $f(x)$ существует с точностью до постоянного слагаемого.

Th 1. *если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} & f(x), F_1(x), F_2(x) \\ & \Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) \\ & \Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' \\ & \Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \\ & \Phi'(x) = f(x) - f(x) \\ & \Phi'(x) = 0 \\ & (F_1(x) - F_2(x))' = 0 \\ & \Phi(x) = \text{const} \\ & \Phi(x) = C \\ & C = F_1(x) - F_2(x) \\ & F_1(x) = C + F_2(x) \end{aligned}$$

□

Определение. если мы рассмотрим множество всех первообразных, то можно вести речь о неопределенном интеграле:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

- 1) производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)'$$

$$\left(\int f(x)dx \right)' = F'(x) + C'$$

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x) + 0$$

- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\left(\int kf(x)dx \right)' = \left(k \int f(x)dx \right)' = k \left(\int f(x)dx \right)' = kf(x)$$

3) Неопределенный интеграл суммы или разности нескольких выражений равен сумме или разности интегралов этих выражений:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\left(\int (f(x) \pm g(x))dx \right)' = \left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx \right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = \left(\int f(x)dx \right)' \pm \left(\int g(x)dx \right)'$$

$$f(x) \pm g(x) = f(x) \pm g(x)$$

1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1) \int kdx = kx + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$3) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$5) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$6) \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{ctg} x + C$$

$$7) \int e^x dx = e^x + C$$

$$8) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$9) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

Пример вывода(8):

Доказательство.

$$\int (\log_a x)' dx = \int \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{1}{x} dx$$

$$\log_a x * \ln a = \int \frac{1}{x} dx$$

□

1.3. Примеры

$$(i) \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$(ii) \int (7x^6 + \frac{3}{x^2}) dx = 7 \int x^6 dx + 3 \int x^{-2} dx = 7 * \frac{x^7}{7} + 3 * \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ = x^7 - \frac{3}{x} + C$$

$$(iii) \int (\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}) dx = \sqrt{2} \int x^{1/2} dx + \sqrt{2} \int x^{-1/2} dx = \\ = \frac{\sqrt{2}x^{3/2}}{3/2} + \frac{\sqrt{2}x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$(iv) \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(v) \int e^{6-2x} dx = \int \frac{e^{6-2x} d(6-2x)}{-2} = -\frac{1}{2} e^{6-2x} + C$$

2. Методы вычисления интегралов

2.1. Замена или подведение под дифференциал

2.1.1. замена

$$\int 3^{\frac{x}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t \\ x = 4t \\ dx = 4dt \end{array} \right| = \int 3^t 4dt = 4 \int 3^t dt = 4 * \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{4 * 3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

Под знаком интеграла необходимо увидеть функцию и ее производную с точностью до постоянного множителя(слагаемого). Тогда на данную функцию вводим замену.

2.1.2. подведение под дифференциал

$$\int x^{\frac{x}{4}} dx = \int 4 * 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 \int 3^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = 4 * \frac{3^{\frac{x}{4}}}{\ln 3} + C$$

2.2. Метод интегрирования по частям

Метод основан на интегрировании произведения двух функций:

$$\begin{aligned} d(uv) &= u dv + v du \\ \int d(uv) &= \int (u dv + v du) \\ uv &= \int u dv + \int v du \\ \int u dv &= uv - \int v du \end{aligned} \tag{1}$$

Метод интегрирования по частям не позволяет выразить интеграл за одно применение, но позволяет перейти к более простому.

Пример:

$$\int x * e^{2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \int e^{2x} dx \end{array} \right| = \int \frac{e^{2x} 2x}{2} = \frac{1}{2} * \frac{e^{2x}}{\ln e} = \frac{1}{2} e^{2x} \Big| =$$

Примечание. Промежуточные действия в замене обычно не пишут.

$$= x * \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}d2x}{2} = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Примечание. "C" в промежуточных действиях обычно не пишут.

Пример 2:

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \ln x * \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} * \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3} (\ln x - \frac{1}{3}) + C$$

Формула (1) называется формулой интегрирования по частям. Подынтегральное выражение в формуле (1) представляет собой произведение двух множителей: u и dv каждый из которых подбирается так, чтобы от выражения dv можно было получить интеграл, а du уменьшало степень выражения, или хотя бы ее не увеличивала. Метод интегрирования по частям применяется при нахождении интеграла вида, где подынтегральные функции имеют вид:

1 группа:

- 1) $P(x) * e^{kx} dx$
- 2) $P(x) * \sin kx dx$
- 3) $P(x) * \cos kx dx$

2 группа:

- 1) $P(x) * \ln x dx$
- 2) $P(x) * \arcsin x dx$
- 3) $P(x) * \arccos x dx$
- 4) $P(x) * \operatorname{arctg} x dx$
- 5) $P(x) * \operatorname{arcctg} x dx$

В которых $P(x)$ - это многочлен n -ой степени (не применять при большом n). Применяя (1) к интегралам 1-ой группы за u принимают $P(x)$, за dv - остальное. При многочленах высокой степени (n) - формула может применяться n -кратное число раз.

В интегралах 2 группы за u принимают $\ln x, \arccos x, \dots$; за dv : $P(x)dx$.

2.3. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены и $Q(x) \neq 0$. Рациональная дробь может быть неправильной, когда степень числителя больше степени знаменателя; а правильной, когда степень числителя меньше степени знаменателя.

Поэтому, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию только правильных дробей.

Все правильные дроби разложим на виды:

$$1) \int \frac{dx}{x \pm a} = \int \frac{d(x \pm a)}{x \pm a} = \ln |x \pm a| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = (*)$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x - a} * \frac{1}{x + a}$$

$$\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} = \frac{A(x + a) + B(x - a)}{(x - a)(x + a)} = \frac{x(A + B) + a(A - B)}{(x - a)(x + a)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ a(A - B) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ a(-2B) = 1 \end{cases}$$

$$B = -\frac{1}{2a}$$

$$A = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a(x - a)} - \frac{1}{2a(x + a)}$$

$$(*) = \int \left(\frac{dx}{2a(x - a)} - \frac{dx}{2a(x + a)} \right) = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} =$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln |x - a| - \ln |x + a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \int \frac{d|x \pm a|}{(x \pm a)^2} = -(x \pm a)^{-1} + C$$

$$4) \int \frac{xdx}{(x \pm a)^2} = \int \frac{x \pm a \mp a}{(x \pm a)^2} dx = \int \frac{1}{x \pm a} d(x \pm a) \mp \int \frac{a}{(x \pm a)^2} dx =$$

$$\ln |x \pm a| \mp a \left(\frac{-1}{x \pm a} \right) + C = \ln |x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C$$

$$5) \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \int \frac{xd(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} * \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 \pm a^2)}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + C$$

6)

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \left| \begin{array}{l} x = at \\ dx = a dt \end{array} \right| = \int \frac{a dt}{a^2 t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Итого:

$$1) \int \frac{dx}{x \pm a} = \ln |x \pm a| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = -(x \pm a)^{-1} + C$$

$$4) \int \frac{x dx}{(x \pm a)^2} = \ln |x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C$$

$$5) \int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + C$$

$$6) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

2.3.1. примеры

1) $t = x + 3$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7} &= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 - 16} = \int \frac{dt}{t^2 - 4^2} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t-4}{t+4} \right| + C = \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-1}{x+7} \right| + C \end{aligned}$$

2) $t = x - 3$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+1}{x^2-6x+8} dx &= \int \frac{6x+1}{(x-3)^2-1^2} = 6 \int \frac{(x-3)+3\frac{1}{6}}{(x-3)^2-1^2} d(x-3) = \\ &= 6 \int \frac{(x-3)d(x-3)}{(x-3)^2-1} + 19 * \int \frac{1}{x-3^2-1^2} d(x-3) = \\ &= 6 \int \frac{t dt}{t^2-1} + 16 \int \frac{dt}{t^2-1} \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{x+3}{(x-3)^2+9} dx = \int \frac{x-4+7}{(x-4)^2+9} dx$$

2.4. Интегрирование некоторых видов иррациональности

2.5. Интегрирование тригонометрических функций

3. Определенные интегралы