Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Ф. Х. Ахметова, Т. А. Ласковая, И. Н. Пелевина

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

В трех частях

Часть 3

Методические указания к решению задач
по теме «Предел и непрерывность функций»
дисциплины «Математический анализ»

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2014

УДК 517.1
ББК 22.161
А95

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/122/book207.html

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Математическое моделирование»

Рекомендовано Учебно-методической комиссией
Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки»
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Рецензент
канд. техн. наук, доцент *А. В. Котович*

Ахметова, Ф. Х.

А95 Введение в анализ. Теория пределов : методические указания к решению задач по теме «Предел и непрерывность функций» дисциплины «Математический анализ» : в 3 ч. Ч. 3 / Ф. Х. Ахметова, Т. А. Ласковая, И. Н. Пелевина. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 24, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3998-0

Приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения типовых задач, большое количество примеров с подробными объяснениями и иллюстрациями, а также задачи для самоконтроля с ответами.

Для студентов младших курсов МГТУ им. Н. Э. Баумана всех специальностей.

УДК 517.1
ББК 22.161

ISBN 978-5-7038-3998-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

С понятием предела функции, которое было рассмотрено ранее в частях 1 и 2, тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Известно, что во многих физических процессах и явлениях изменения происходят постепенно. Например, в процессе нагрева воды с течением времени температура воды повышается. Но как? Постепенно, без резких скачков, непрерывно, т. е. за малый промежуток времени температура воды изменяется мало. С математической точки зрения можно сказать, что в этом случае температура нагреваемой воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) изменение функции (температуры) тоже мало. Можно привести множество других примеров, в которых мы сталкиваемся с подобным свойством, на математическом языке называемым свойством непрерывности функций.

При построении математических моделей многих физических процессов используют функции с различным характером поведения и разными свойствами. Они могут обладать свойством непрерывности или нет, но в любом случае интуитивных представлений о понятии непрерывности недостаточно для точного решения математической задачи. Необходимо дать четкое определение непрерывных функций, изучить их свойства и уметь использовать их на практике.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, причем известно, что в самой точке a значение функции равно $f(a)$.

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* $a \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

Подчеркнем, что, согласно данному определению, в точке $a \in \mathbb{R}$ существует конечный предел функции, и он совпадает с ее значением $f(a)$. С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$(\exists \lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}) \wedge \left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \right).$$

Как и в случае определения предела, можно дать определение непрерывности функции в точке по Коши (на «языке $\varepsilon - \delta$») и по Гейне (на «языке последовательностей»). Сформулируем эти определения.

Определение 2 **(по Коши).** Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* $a \in \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Используя логическую символику, определение 2 можно переписать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

***Определение 3* (по Гейне).** Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* $a \in \mathbb{R}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x \in \mathbb{R}$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $f(a)$. Используя логическую символику, определение 3 можно записать в виде

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Наконец, в равенстве $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ можно перенести $f(a)$ в левую часть и внести его под знак предела. Замечая, что обозначение $x \to a$ при пределе функции равносильно обозначению $x - a \to 0$, получаем:

$$\lim_{x-a\to 0} \left[f(x) - f(a) \right] = 0.$$

Разность $x - a$ называют приращением аргумента и обозначают Δx, а разность $f(x) - f(a)$ — приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначают Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a).$$

В этих обозначениях равенство (1) можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, мы получили еще одну формулировку определения непрерывности:

Определение 4. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* $a \in \mathbb{R}$, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0.$$

Определения $1-4$ эквивалентны.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin x$.

Решение. Функция $y = \sin x$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Для исследования функции на непрерывность воспользуемся определением 4. Возьмем произвольную точку x и найдем приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Заметим, что функция $y = \cos x$ является ограниченной, следовательно, $\left|\cos(x + \Delta x / 2)\right| \le 1,$ при этом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x / 2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Тогда по свойствам б.м.ф. следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos(x + \Delta x / 2)\sin\frac{\Delta x}{2} = 0$$

(так как произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция). Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$ (согласно определению 4).

Аналогично доказывается непрерывность функции $y = \cos x$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$, то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $f(x) / g(x)$ (при условии, что $g(a) \ne 0$) являются функциями, непрерывными в точке $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$, а это по определению 1 означает, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a); \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Докажем, например, непрерывность произведения $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Применив теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a) = F(a).$$

Итак, $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$, что означает (согласно определению 1) непрерывность функции $f(x) \cdot g(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$.

Аналогично доказываются и остальные утверждения теоремы.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ и $f(a) \neq 0$, то существует некоторая окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, в которой функция сохраняет знак числа $f(a)$.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, доказательство этого факта основано на том, что непрерывность функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$ означает, что существует предел этой функции при $x \to a$ и он равен $f(a)$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \neq 0$. Таким образом, утверждение теоремы вытекает непосредственно из определения 1 непрерывности функции и соответствующего свойства предела функции (а именно из теоремы о сохранении функцией знака своего предела).

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y = b = f(a)$, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке $x = a$.

Запишем утверждение теоремы, используя логическую символику:

$$\left(\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b\right) \wedge \left(\exists \lim_{y \to b} g(y) = g(b)\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g\big(f(a)\big).$$

Доказательство. По условию теоремы функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y = b = f(a)$, что по определению 1 означает

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a); \quad \lim_{y \to b} g(y) = g(b).$$

Тогда, согласно теореме о пределе сложной функции, имеем:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to b} g(y) = g(b) = g\big(f(a)\big).$$

Последнее равенство доказывает непрерывность сложной функции $g\big(f(x)\big)$ в точке $x = a$.

Отметим, что теорему 2 можно обобщить и на случай суперпозиции (операции взятия функции от функции) нескольких функций.

Теорема 4. Операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции, т. е.

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 2, левая часть выражения (2) равна $g\big(f(a)\big)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Следовательно, и правая часть этого выражения также равна $g\big(f(a)\big)$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a,\, b]$ оси Ox, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $\big[f(a), f(b)\big]$ оси Oy (эту теорему оставим без доказательства).

Известно, что такие функции, как постоянная $y = C$, степенная $y = x^n$, показательная $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, логарифмическая $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называют *основными элементарными функциями*. На основании определения и сформулированных выше теорем можно доказать непрерывность всех этих функций. Так, на основании теоремы 1 можно доказать непрерывность многочленов $P_n(x)$, рациональных функций $P_n(x)/Q_m(x)$ (в тех точках, где $Q_m(x) \neq 0$), а также функций $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ (в тех точках, где $\cos x \neq 0$) и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ (в тех точках, где

$\sin x \neq 0$), а в силу теоремы 5 можно говорить о непрерывности таких функций, как $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Любую функцию, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называют *элементарной*. Поэтому из приведенных выше теорем и рассуждений вытекает следующее важное утверждение.

Утверждение 1. Любая элементарная функция непрерывна в своей области определения. Таким образом, если точка $x = a$ принадлежит области определения элементарной функции, то значение предела этой функции при $x \to a$ совпадает с ее значением $f(a)$ в этой точке. Например, $\lim\limits_{x \to a} 3^{\frac{x}{4-x^2}} = 3^{\frac{a}{4-a^2}}$, если $a \neq 2$ и $a \neq -2$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления пределов функций, опираясь на сказанное выше.

Пример 2. Вычислим следующие пределы:

$$\text{а)} \lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = \left| \begin{array}{l} g(y) = e^y \text{ непрерывная } \forall y \in \mathbb{R}, \\ y = \dfrac{\sin x}{x} \Rightarrow \text{по теореме } 4 \Rightarrow \end{array} \right| = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^1 = e;$$

$$\text{б)} \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left| \begin{array}{l} g(y) = e^y \text{ непрерывная } \forall y \in \mathbb{R}, \\ y = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \text{по теореме } 4 \Rightarrow \end{array} \right| =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \left\{ e^{-\infty} \right\} = 0;$$

$$\text{в)} \lim_{x \to 0} \ln (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} g(y) = \ln y \text{ непрерывная } \forall y > 0, \\ y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \text{по теореме } 4 \Rightarrow \end{array} \right| =$$

$$= \ln \left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

ОДНОСТОРОННЯЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть функция $y = f(x)$ определена, по крайней мере, в правой (левой) полуокрестности точки $a \in \mathbb{R}$ числовой прямой.

Определение 5. Функцию $f(x)$ называют *непрерывной справа* (*слева*) *в точке a*, если в этой точке существует конечный правый (левый) предел функции, и он совпадает со значением $f(a)$ в этой точке.

В логической символике

$f(x)$ непрерывна справа в точке $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \in \mathbb{R}\right) \wedge \left(f(a+0) = f(a)\right);$$

$f(x)$ непрерывна слева в точке $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\exists \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) \in \mathbb{R}\right) \wedge \left(f(a-0) = f(a)\right).$$

Например, если функция определена на отрезке $[a,\ b]$, то по отношению к граничным точкам отрезка a и b можно говорить лишь о непрерывности функции справа в точке a и слева в точке b.

Мы знаем, что предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и правый, и левый пределы и они равны. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в некоторой внутренней точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была одновременно непрерывна и справа, и слева в точке a.

Точку, в которой функция непрерывна, называют *точкой непрерывности* этой функции. Таким образом, в точке a непрерывности функции $f(x)$ должны быть выполнены следующие условия:

1) функция определена в самой точке a (т. е. существует $f(a)$) и в некоторой ее окрестности;

2) существуют односторонние конечные пределы функции: $f(a+0)$ и $f(a-0)$;

3) эти односторонние пределы совпадают, т. е. $f(a+0)=$ $=f(a-0)$;

4) совпадающие односторонние пределы функции равны значению функции в точке a, т. е. $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$.

Пример 3. Рассмотрим функцию, определенную на всей числовой прямой и для каждого числа x равную наибольшему целому числу, не превосходящему x. Эта функция имеет специальное обозначение $y=[x]$, которое читается так: «y является целой частью числа x» (например $[2,\ 7]=2$, $[-2,\ 7]=-3$, $[2]=2$ и т. д.). График этой функции показан на рис. 1.

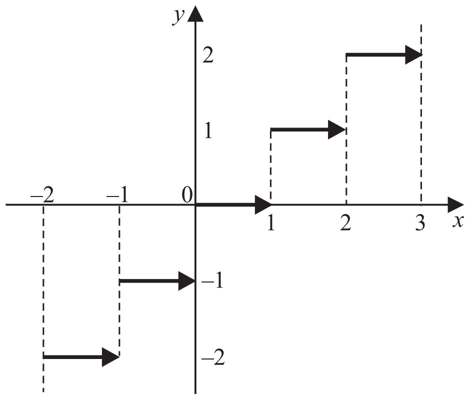

Рис. 1

Решение. Сначала рассмотрим точку $x=a$, где a не является целым числом, например $a=1,5$. В этой точке функция $y=[x]$ непрерывна, так как выполнены все четыре условия:

1) функция определена в точке $a=1,5$, т. е. существует $f(1,5)=1$;

2) существуют односторонние конечные пределы функции, т. е. $\left(\exists \lim\limits_{x\to 1,5+0}[x]=f(1,5+0)=1\right)\wedge\left(\exists \lim\limits_{x\to 1,5-0}[x]=f(1,5-0)=1\right)$;

3) эти односторонние пределы совпадают, т. е. $f(1,5+0)=$ $=f(1,5-0)$;

4) совпадающие односторонние пределы функции равны значению функции в точке $a = 1{,}5$, т. е. $f(1{,}5+0) = f(1{,}5-0) = f(1{,}5) = 1$.

Теперь рассмотрим точки вида $x = n$, где n является целым числом, например $x = 5$. Очевидно, что первые два условия выполнены:

1) функция определена в точке $x = 5$, т. е. существует $f(5) = 5$;

2) существуют односторонние конечные пределы функции, т. е. $\left(\exists \lim\limits_{x\to 5+0}[x] = f(5+0) = 5\right) \wedge \left(\exists \lim\limits_{x\to 5-0}[x] = f(5-0) = 4\right)$;

Теперь очевидно, что условие 3 для точки $x = 5$ не выполняется, так как значения правого и левого пределов не совпадают: $5 \neq 4$. Следовательно, не выполняется и условие 4.

Таким образом, функция $y = [x]$ не является непрерывной в точке $x = 5$ (а также и во всех целых точках). Однако, согласно определению 5, можно утверждать, что функция $y = [x]$ непрерывна *справа* в точке $x = 5$. Действительно,

$$\left(\exists \lim_{x\to 5+0}[x] = f(5+0) = 5\right) \wedge \left(f(5+0) = f(5) = 5\right).$$

Согласно тому же определению 5, можно сказать, что $y = [x]$ не является непрерывной *слева* в точке $x = 5$, так как, несмотря на то что существует предел $\lim\limits_{x\to 5-0}[x] = f(5-0) = 4$, не выполнено условие 4: $f(5-0) = 4 \neq f(5) = 5$.

З а м е ч а н и е. Подчеркнем еще раз, что непрерывность функции в любой точке ее области определения гарантируется лишь для элементарных функций. Рассмотренная в примере 3 функция $y = [x]$ не является элементарной и, хотя и определена на всей числовой прямой, разрывна во всех целых точках $x = n$.

Определение 6. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, то эту точку называют *точкой разрыва* функции $f(x)$, а функцию $f(x)$ — *разрывной* в этой точке.

Точки разрыва можно подразделить на группы, в соответствии с причинами, вызвавшими разрыв. Рассмотрим классификацию точек разрыва.

Определение 7. Точку разрыва a называют *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x).$

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке. Величину $\Delta f(a) = f(a+0) - f(a-0)$ называют *скачком функции в точке* x_0.

В примере 3 точка $x = 5$ (а также и все целые точки) является точкой разрыва первого рода, поскольку в этой точке существуют левой и правый пределы $f(5+0) = 5$ и $f(5-0) = 4$, но $f(5-0) \neq f(5) = 5$. Скачок функции в этой точке $\Delta f(5) =$ $= f(5+0) - f(5-0) = 1$.

Определение 8. Точку разрыва a называют *точкой устранимого разрыва*, если в ней существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a+0) = f(a-0)$, но в точке a функция $f(x)$ либо не определена, либо имеет значение $f(a)$, отличное от значения предела в этой точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Это название оправдано тем, что в этой точке можно видоизменить или доопределить (если функция не была определена в точке a) функцию $f(x)$, положив $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$. Видоизмененная таким образом функция будет непрерывной в точке a, и в этом случае говорят, что разрыв в точке a можно устранить.

Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв, так как функция в нуле не определена. Поскольку существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Доопределим функцию до непрерывной:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доопределенная таким образом функция будет непрерывной на всей числовой оси.

Определение 9. Точку разрыва a называют *точкой разрыва второго рода*, если в ней хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует. Например, функция $f(x) = 1/x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв, так как функция в нуле не определена. Поскольку

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4}.$$

Решение. Данная функция является элементарной и поэтому непрерывна во всех точках своей области определения. Точкой разрыва является точка $x = 4$, так как в ней функция не определена. Чтобы определить вид точки разрыва, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(4-0) = \lim_{x \to 4-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \{\operatorname{arctg}(-\infty)\} = -\frac{\pi}{2};$$

$$f(4+0) = \lim_{x \to 4+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} = \{\operatorname{arctg}(+\infty)\} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, при $x \to 4$ функция имеет конечные левый и правый пределы, причем эти пределы различны. Следовательно, по определению, точка $x = 4$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке

$$\Delta f(4) = f(4+0) - f(4-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

График функции $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-4}$ в окрестности точки $x = 4$ приведен на рис. 2.

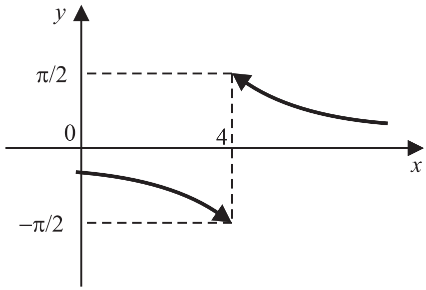

Рис. 2

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Данная функция является основной элементарной и поэтому непрерывна во всех точках своей области определения. Следовательно, точками разрыва будут точки $x_k = \pi/2 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, так как в них функция не определена. Чтобы определить вид точек разрыва, вычислим односторонние пределы функции в этих точках:

$$f(x_k - 0) = \lim_{x \to x_k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty; \quad f(x_k + 0) = \lim_{x \to x_k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Согласно определению 9, точки $x_k = \pi/2 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются точками разрыва второго рода.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ при } -1 \le x \le 2, \\ 2 - x \text{ при } 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Решение. Поскольку линейные функции $y = x - 1$ и $y = 2 - x$ непрерывны при всех $x \in \mathbb{R}$, единственной точкой возможного разрыва этой функции является точка $x = 2$. Вычислим пределы функции в этой точке:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} (x - 1) = 1; \quad f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (2 - x) = 0.$$

Следовательно, при $x \to 2$ функция имеет конечные левый и правый пределы, причем эти пределы различны. Таким образом, точка $x = 2$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке

$$\Delta f(2) = f(2+0) - f(2-0) = 0 - 1 = -1.$$

График функции представлен на рис. 3.

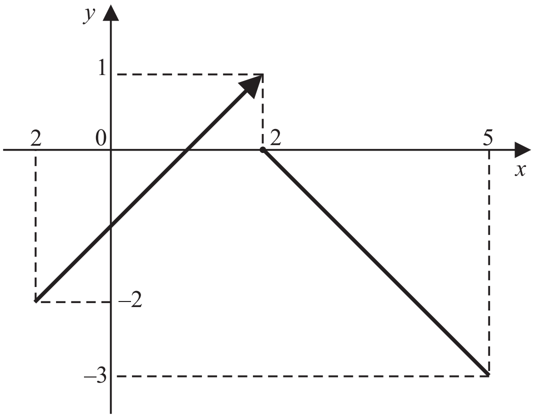

Рис. 3

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Решение. Данная функция не определена при $x = 3$, поэтому $x = 3$ является точкой разрыва. Раскроем знак модуля:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } x < 3, \\ 1 \quad \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Вычислим односторонние пределы:

$$f(3-0) = -1; \quad f(3+0) = 1.$$

Следовательно, точка $x=3$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке

$$\Delta f(3) = f(3+0) - f(3-0) = 1-(-1) = 2.$$

График функции изображен на рис. 4.

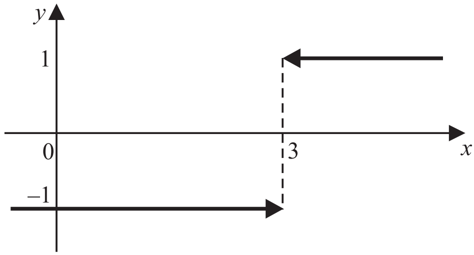

Рис. 4

Пример 8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку данная функция определена на всей числовой прямой, точка $x=0$ является единственной точкой возможного разрыва. Имеем:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким образом, у функции существуют односторонние конечные пределы в точке $x=0$, они равны между собой, но не равны значению функции $f(0)=2$. Следовательно, $x=0$ является точкой устранимого разрыва. График функции в окрестности точки $x=0$ изображен на рис. 5.

Если видоизменить функцию, положив $f(0)=1$ (вместо $f(0)=2$), то она станет непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$.

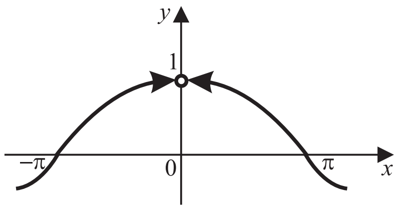

Рис. 5

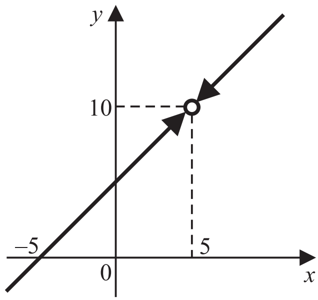

Рис. 6

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}.$$

Решение. Эта элементарная функция определена, а следовательно и непрерывна всюду, кроме точки $x=5$. Значит, точка $x=5$ является точкой разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$f(5-0)=\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5-0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5-0}(x+5)=10;$$

$$f(5+0)=\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5+0}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to 5+0}(x+5)=10.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 5-0}f(x)=\lim_{x\to 5+0}f(x)=\lim_{x\to 5}f(x)=10.$$

Следовательно, при $x=5$ функция имеет устранимый разрыв. График функции показан на рис. 6.

Доопределим функцию в точке $x=5$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{при } x\neq 5,\\ 10 & \text{при } x=5.\end{cases}$$

Доопределенная таким образом функция будет непрерывной при всех $x\in\mathbb{R}$.

Пример 10. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\frac{x}{x-4}.$$

Решение. Как любая элементарная функция, данная функция непрерывна во всех точках своей области определения, следовательно, $x=4$ — единственная точка разрыва. Рассмотрим односторонние пределы в этой точке:

$$f(4-0)=\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=-\infty;$$

$$f(4+0)=\lim_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, при $x\to 4$ оба предела бесконечны, следовательно, $x=4$ является точкой разрыва второго рода. График функции в окрестности точки разрыва приведен на рис. 7.

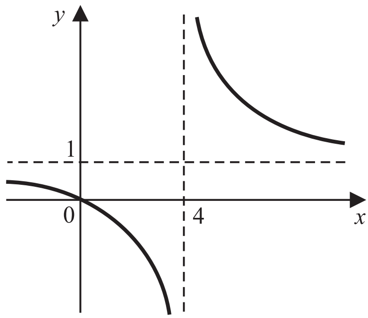

Рис 7

Пример 11. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}.$$

Решение. Функция определена, а следовательно, и непрерывна всюду, кроме точки $x=0$. Поскольку наша функция при $x\to 0$ не имеет ни правого, ни левого предела, $x=0$ — точка разрыва второго рода. График функции изображен на рис. 8.

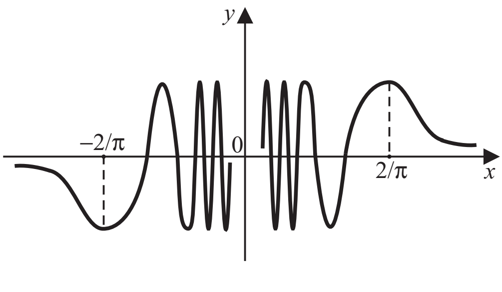

Рис. 8

Пример 12. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4^x-2}{2x-1},\ x\le 1,\\ \sqrt{x+3},\ x>1.\end{cases}$$

Указать все точки разрыва и определить их характер. Дать графическую иллюстрацию.

Решение. Сразу отметим, что точками разрыва будут точки, в которых не определены функции, входящие в выражение, задающее функцию. Кроме того, точкой возможного разрыва будет точка $x=1$, поскольку в этой точке правый и левый пределы могут не совпадать.

Таким образом, имеем две точки: $x_1=1/2$ — точка разрыва функции и $x_2=1$ — точка возможного разрыва функции.

Определим характер разрыва в точке $x_1=1/2,$ для этого вычислим односторонние пределы:

$$f\left(\frac{1}{2}-0\right)=f\left(\frac{1}{2}+0\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4^x-2}{2x-1}=\left|\begin{array}{l}\text{Замена: } t=x-\dfrac{1}{2},\\ x\to\dfrac{1}{2}\Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4^{t+\frac{1}{2}}-2}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2(4^t-1)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln 4}{t}=\ln 4.$$

Поскольку пределы равны, при $x=1/2$ функция имеет устранимый разрыв.

Теперь определим характер разрыва в точке $x_2=1.$ Для этого вычислим односторонние пределы, не забывая о том, что слева и справа от этой точки функции определены по-разному:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{4^x-2}{2x-1}=2;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}\sqrt{x+3}=2.$$

Оба предела конечны и совпадают; кроме того, они равны значению функции в этой точке: $f(1-0)=$ $=f(1+0)=f(1)=2.$ Следовательно, согласно определению 1, функция непрерывна в точке $x_2=1$. Функцию можно видоизменить так, чтобы она стала непрерывной:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4^x-2}{2x-1} & \text{при } x\le 1,\ x\ne 1/2,\\ \ln 4 & \text{при } x=1/2,\\ \sqrt{x+3} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

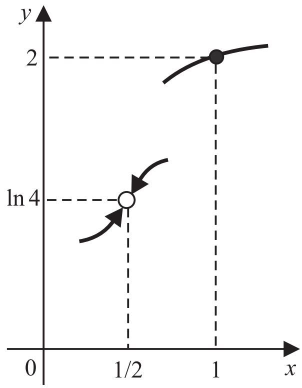

Рис. 9

График функции в окрестности точки разрыва показан на рис. 9.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Определение 10. Функцию $y=f(x)$ называют *непрерывной на интервале* $(a,\ b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 11. Функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a,\ b]$, если она непрерывна на интервале $(a,\ b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Теорема 6 (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция ограничена на нем, т. е. существуют числа m и M, такие, что $m\le f(x)\le M,\quad \forall x\in[a,\ b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, функция $y=\operatorname{tg}x$ непрерывна на интервале $(0,\ \pi/2)$, но не ограничена на нем.

Теорема 7 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает на нем свое наибольшее и наименьшее значение.

Отметим, что здесь, так же как и в теореме 6, условие непрерывности именно на отрезке, а не на промежутке другого типа, является существенным. Например, функция $y = x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$ и даже ограничена на нем, но не достигает своих наибольших и наименьших значений.

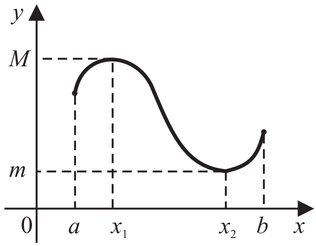

Рис. 10

На рис. 10 приведена функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и принимающая свое наибольшее значение M в точке x_1 и наименьшее значение m в точке x_2. Для любого $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $m \le f(x) \le M$, т. е. функция ограничена на $[a, b]$.

Теорема 8 (первая теорема Больцано — Коши). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0$. Геометрический смысл теоремы иллюстрирует рис. 11.

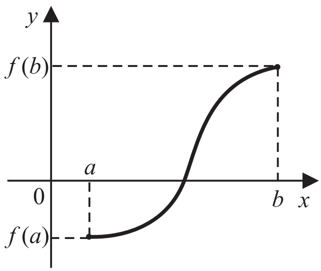

Рис. 11

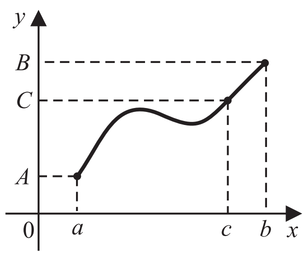

Рис. 12

Теорема 8 лежит в основе так называемого метода половинного деления, который применяют для нахождения корня уравнения $f(x)=0$.

Теорема 9 (вторая теорема Больцано — Коши). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$, то для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $c\in[a,\ b]$, в которой $f(c)=C$. Другими словами, непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.

Геометрический смысл теоремы иллюстрирует рис. 12. Прямая $y=C$ пересекает график функции $y=f(x)$ по крайней мере в одной точке.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Найти точки разрыва функции и определить их характер.

№ п/п	Функция	Ответ
1	$y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$	$x=1,\ \ x=5$ — точки разрыва второго рода
2	$y=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}$	$x=1$ — точка разрыва второго рода
3	$y=\dfrac{\sin x}{x(x-1)}$	$x=0$ — точка устранимого разрыва, $x=1$ — точка разрыва второго рода
4	$y=\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}}{x(x-5)}$	$x=0$ — точка устранимого разрыва, $x=3$ — точка разрыва первого рода, $x=5$ — точка разрыва второго рода, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ — точки разрыва второго рода
5	$y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$	$x=-2,\ \ x=-3$ — точки разрыва второго рода, $x=-1$ — точка устранимого разрыва
6	$y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$	Функция непрерывна для всех $x\in\mathbb{R}$

ЛИТЕРАТУРА

Ильин В.А., *Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: в 2 т. Т. 1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2001. 646 с.

Ильин В.А., *Садовничий В.А.*, *Сендов Б.Х.* Математический анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. 660 с.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. 3-е изд., стер. СПб.: Лань, 2008. 399 с.

Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 408 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для втузов: в 2 т. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006. 416 с.

Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа: в 3 т. Т. 1 / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1993. 478 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель, 2003. 472 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Непрерывность функции в точке 4
Свойства функций, непрерывных в точке 6
Односторонняя непрерывность. Точки разрыва 10
Свойства функций, непрерывных на отрезке 21
Задачи для самоконтроля 24
Литература 25

Учебное издание

Ахметова Фаина Харисовна
Ласковая Татьяна Алексеевна
Пелевина Ирина Николаевна

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

В трех частях
Часть 3

Редактор *С.А. Серебрякова*
Корректор *Н.А. Фетисова*
Компьютерная верстка *С.А. Серебряковой*

Подписано в печать 26.09.2014. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,63. Тираж 500 экз. Изд. № 29. Заказ

В оформлении обложки использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Сертификат соответствия № РОСС RU. АЕ51. Н 16228 от 18.06.2012.

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

ДЛЯ ЗАМЕТОК