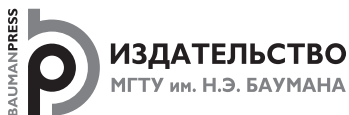


Ф.Х. Ахметова, А.В. Косова, И.Н. Пелевина

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Часть 1

*Методические указания
к выполнению домашнего задания*



Москва
2014

УДК 517
ББК 22.161
А95

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/122/book109.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

*Рекомендовано Учебно-методической комиссией Научно-учебного
комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана*

Рецензент канд. техн. наук, доцент *А.В. Котович*

Ахметова Ф. Х.

А95 Введение в анализ. Теория пределов : метод. указания к выполнению домашнего задания / Ф. Х. Ахметова, А. В. Косова, И. Н. Пелевина. — Ч. 1. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 33, [3] с.

ISBN 978-5-7038-3795-5

Кратко изложен материал по теории пределов числовых последовательностей и пределов функций. Рассмотрены основные понятия, свойства пределов, способы их вычислений. Материал сопровождается решением типовых примеров.

Для самостоятельного изучения темы «Теория пределов» студентами первого курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517
ББК 22.161

Учебное издание

Ахметова Фания Харисовна
Косова Анна Владимировна
Пелевина Ирина Николаевна

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Часть 1

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *О.Ю. Соколова*
Компьютерная верстка *С.Ю. Ахмакова*

Подписано в печать 24.06.2014. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,09. Тираж 100 экз. Изд. № 123. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул. д. 5, стр. 1.

ISBN 978-5-7038-3795-5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Бесконечной числовой последовательностью называется функция $a_n = f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на множестве натуральных чисел.

Обозначается она следующим образом: $\{a_n\}$.

Пример 1. $\left\{\frac{n+1}{2n}\right\}: \{1; 2; 3; 4; \dots\} \rightarrow \left\{1; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; \frac{5}{8}; \dots; \frac{n+1}{2n}; \dots\right\}$.

Определение 2. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для каждого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Запишем определение, используя логические символы:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\right) := \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N\right) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon),$$

где знак $:=$ – равенство по определению.

Рассмотрим неравенство из определения

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ для } \forall n > N.$$

Таким образом, вне интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ окажется только конечное число членов последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N-1}, a_N$. Начиная с номера $n = N + 1$, все члены последовательности попадают в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Определение 3. Если предел числовой последовательности существует и конечен, то числовая последовательность называется *сходящейся*. Если предел последовательности не существует (в частности равен ∞), то числовая последовательность называется *расходящейся*.

В задачах 1, 2 доказать $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, определить для каждого значения ε ($\varepsilon=0,1$; $\varepsilon=0,01$; $\varepsilon=0,001$) число $N=N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$, где a_n и a заданы.

Задача 1. $a_n = \frac{n+1}{2n}$, $a = \frac{1}{2}$.

Вычислим предел заданной числовой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем $N=N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, т. е.

$$\left| \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{n+1-n}{2n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2n} \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Поскольку } n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n > 0, \quad \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{2\varepsilon},$$

$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ — целая часть числа, так как $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

При $\varepsilon_1 = 0,1$ $N = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot 0,1} \right\rceil = 5$. Тогда, при $n > 5$

$$\{a_6, a_7, \dots\} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}, \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = (0,4; 0,6).$$

При $\varepsilon_2 = 0,01$ $N = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot 0,01} \right\rceil = 50$. Следовательно, при $n > 50$

$$\{a_{51}, a_{52}, \dots\} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \right) = (0,49; 0,51).$$

При $\varepsilon_3 = 0,001$ $N = \left\lceil \frac{1}{2 \cdot 0,001} \right\rceil = 500$. Таким образом, при $n > 500$

$$\{a_{501}, a_{502}, \dots\} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1000} \right) = (0,499; 0,501).$$

Задача 2. $a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\frac{3}{5}$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3n^2}{4+5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 3 \right)}{n^2 \left(\frac{4}{n^2} + 5 \right)} = -\frac{3}{5}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Найдем $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, т. е.

$$\left| \frac{2-3n^2}{4+5n^2} + \frac{3}{5} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{22}{5(4+5n^2)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{22}{5(4+5n^2)} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$4+5n^2 > \frac{22}{5\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{22}{25\varepsilon} - \frac{4}{5}} \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{1}{5} \sqrt{\frac{22}{\varepsilon} - 20}.$$

Таким образом, $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{5} \sqrt{\frac{22}{\varepsilon} - 20} \right\rceil$.

При $\varepsilon_1 = 0,1$ $N = \left\lceil \frac{1}{5} \sqrt{200} \right\rceil = [2,82] = 2$.

При $\varepsilon_2 = 0,01$ $N = \left\lceil \frac{1}{5} \sqrt{2180} \right\rceil = [9,3] = 9$.

При $\varepsilon_3 = 0,001$ $N = \left\lceil \frac{1}{5} \sqrt{21980} \right\rceil = [29,65] = 29$.

Пример 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty \Rightarrow \left\{ \frac{n^2 + 1}{n} \right\}$ — расходящаяся чис-

ловая последовательность.

Определение 4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что для любого n выполняется неравенство $a_n \leq M$.

Определение 5. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что для любого n выполняется неравенство $a_n \geq m$.

Определение 6. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т. е. для любого n выполняется неравенство $m \leq a_n \leq M$.

Пример 3. Последовательность $\{-1; -4; -9; \dots; -n^2; \dots\}$ ограничена сверху и не ограничена снизу, так как $a_n \leq -1 \Rightarrow M \geq -1$.

Пример 4. Последовательность $\left\{1; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{3^2}; \dots; \frac{1}{n^2}; \dots\right\}$ ограничена, так как $0 \leq a_n \leq 1$.

Пример 5. Последовательность $\{1; 2; 1; 3; \dots; 1; n; 1; n+1; \dots\}$ ограничена снизу, поскольку $a_n \geq 1$.

Определение 7. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Определение 8. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей (неубывающей)*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n \leq a_{n+1}$).

Определение 9. Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*. Неубывающие и невозрастающие числовые последовательности называются *монотонными*.

Пример 6. Последовательность $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{n}{n+1}; \dots\right\}$ — возрастающая.

Последовательность $\{1; 1; 2; 2; \dots; n; n; \dots\}$ — неубывающая.

Последовательность $\left\{1; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots\right\}$ — невозрастающая.

Последовательность $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\right\}$ — убывающая.

Определение 10. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, т. е. для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Пример 7. $\left\{\frac{1}{n}\right\}; \left\{\frac{1}{n^2}\right\}; \left\{\frac{1}{n^3}\right\}; \dots; \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}; \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ — бесконечно малые числовые последовательности.

Определение 11. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, т. е. для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется такой номер $N = N(M)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Пример 8. $\{\sqrt{n}\}; \{n\}; \{n^2\}; \{n^3\}; \dots; \{2^n\}; \{3^n\}$ — бесконечно большие числовые последовательности.

Теорема 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, где c — постоянная.

Теорема 2. (арифметические операции над сходящимися числовыми последовательностями). Если существуют и конечны $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то существуют и конечны:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Следствие. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, где c — постоянная.

Теорема 3. (об ограниченности сходящейся последовательности). Любая сходящаяся числовая последовательность ограничена.

Замечание. Не всякая ограниченная числовая последовательность является сходящейся.

Пример 9. $\{0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots; 0; 1; \dots\}$ — последовательность ограничена, но не имеет предела, т. е. не является сходящейся.

Рассмотрим некоторые приемы, которые помогут при решении задач.

При вычислении пределов вида $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ нужно в числителе и в знаменателе «главное» слагаемое (растущее быстрее

всех) вынести за скобки. Если слагаемое, выносимое за скобки, выбрано верно, то предел скобки равен константе, не равной нулю.

Задача 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{7-14n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{-14n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)} = -\frac{1}{7}.$ В приведен-

ном примере функции $f(n)$ и $g(n)$ — многочлены, поэтому «главными» будут слагаемые, содержащие старшие степени многочленов.

Задача 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{95n^2 + 39n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - n^3 + 6n^2 - 12n + 8}{95n^2 + 39n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 16}{95n^2 + 39n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(12 + \frac{16}{n^2}\right)}{n^2 \left(95 + \frac{39}{n}\right)} = \frac{12}{95}.$$

Если неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ связана с отношением двух многочленов, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \dots + A_k}{B_0 n^m + B_1 n^{m-1} + \dots + B_m} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, & \text{если } k = m; \\ 0, & \text{если } k < m; \\ \infty, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

Задача 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 5n}}{n^{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sqrt{1 + \frac{5}{n^3}}}{n^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{12}{5}}}\right)} = \infty.$

Задача 6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)} = \left| \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n}{\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = -1.$$

Раскрытие неопределенности вида $[\infty - \infty]$ обычно сводится к неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ преобразованием разности двух последовательностей к дроби. Это можно сделать, например, приведя слагаемые к общему знаменателю или домножив имеющуюся разность на сопряженное выражение.

$$\begin{aligned} \text{Задача 7. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0. \end{aligned}$$

Задача 8.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \dots \\ \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$.

Определение 12. δ -окрестностью конечной точки x_0 называется интервал с центром в точке x_0 длиной 2δ .

Обозначается она так:

$$\begin{aligned} U_\delta(x_0) &= (x_0 - \delta; x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} \end{aligned}$$

Определение 13. Проколотой δ -окрестностью конечной точки x_0 называется окрестность этой точки без самой точки x_0 .

Обозначается следующим образом:

$$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Определение 14. Окрестностью бесконечно удаленной точки называется объединение следующих интервалов:

$$\overset{\circ}{U}(\infty) = (-\infty; -M) \cup (M; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > M\},$$

где $M > 0$; $M \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим различные стремления аргумента и соответствующие им проколотые окрестности. Результаты запишем в виде таблицы.

Тип стремления	Проколотая окрестность
$x \rightarrow a$	$\mathring{U}_\delta(a) = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta) = \{0 < x - a < \delta\}$
$x \rightarrow a^+ = x \rightarrow a + 0$ ($x \rightarrow a, x > a$)	$\mathring{U}_\delta^+(a) = (a; a + \delta) = \{a < x < a + \delta\}$
$x \rightarrow a^- = x \rightarrow a - 0$ ($x \rightarrow a, x < a$)	$\mathring{U}_\delta^-(a) = (a - \delta; a) = \{a - \delta < x < a\}$
$x \rightarrow \infty$	$\mathring{U}(\infty) = (-\infty; -M) \cup (M; +\infty) = \{ x > M\}$
$x \rightarrow +\infty$	$\mathring{U}(+\infty) = (M; +\infty) = \{x > M\}$
$x \rightarrow -\infty$	$\mathring{U}(-\infty) = (-\infty; -M) = \{x < -M\}$

Приведем определения пределов функции $f(x)$ при разных стремлениях аргумента x .

Определение 15. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого числа

$\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ (или для всех x : $0 < |x - a| < \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или

с помощью логических символов: $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A\right) :=$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 16. Число A называется *правым пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого

числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in U_{\delta}^+(a)$ (или для всех $x: a < x < a + \delta$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \right) :=$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U_{\delta}^+(a)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 17. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого

числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in U_{\delta}^-(a)$ (или для всех $x: a - \delta < x < a$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \right) :=$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U_{\delta}^-(a)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 18. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в бесконечно удаленной точке ($x \rightarrow \infty$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $M = M(\varepsilon) > 0$,

что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(\infty)$ (или для всех $x: |x| > M$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \right) :=$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0: \forall x \in \overset{\circ}{U}(\infty)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 19. Число A называется *правым пределом функции* $f(x)$ в бесконечно удаленной точке ($x \rightarrow +\infty$), если для

любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(+\infty)$ (или для всех $x: x > M$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или с помощью логических символов: $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \right) :=$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0: \forall x \in \overset{\circ}{U}(+\infty)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 20. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ в бесконечно удаленной точке $(x \rightarrow -\infty)$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(-\infty)$ (или для всех $x: x < -M$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или с помощью логических символов: $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \right) :=$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) > 0: \forall x \in \overset{\circ}{U}(-\infty)) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Определение 21. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если для сколь угодно большого числа $K > 0$ найдется такое $\delta = \delta(K) > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| > K$ или с помощью логических символов: $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \right) :=$

$$(\forall K > 0 \exists \delta = \delta(K) > 0: \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)) \Rightarrow (|f(x)| > K).$$

Определение 22. $\left(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty \right) :=$

$$(\forall K > 0 \exists \delta = \delta(K) > 0: \forall x \in U_{\delta}^{+}(a)) \Rightarrow (f(x) < -K).$$

Определение 23. $\left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty \right) :=$

$$(\forall K > 0 \exists \delta = \delta(K) > 0: \forall x \in U_{\delta}^{-}(a)) \Rightarrow (f(x) > K).$$

Определение 24. $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \right) :=$

$$(\forall K > 0 \exists M = M(K) > 0: \forall x \in U(\infty)) \Rightarrow (|f(x)| > K).$$

Определение 25. $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \right) :=$

$$(\forall K > 0 \exists M = M(K) > 0: \forall x \in U(+\infty)) \Rightarrow (f(x) < -K).$$

Пределы 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25 называют *односторонними*. Все рассмотренные определения – определения предела функции по Коши.

Задача 9. Доказать по определению: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|2x + 1 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ такое, что для

$\forall x: |x - 1| < \delta$ выполняется неравенство $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$. Например, для $\varepsilon = 0,1 \exists \delta = 0,05$.

Задача 10. Доказать по определению $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 3 - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \varepsilon = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ такое, что для $\forall x: 3 < x < 3 + \delta$ выполняется неравенство $\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon$.

Задача 11. Доказать по определению $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x} = \frac{2}{3}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $M = M(\varepsilon) > 0$:

$$\left| \frac{2x + 1}{3x} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2x + 1 - 2x}{3x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3|x|} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{3\varepsilon} = M(\varepsilon).$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = \frac{1}{3\varepsilon} > 0$ такое, что для $\forall x: |x| > M$ выполняется неравенство $\left| \frac{2x + 1}{3x} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$.

Рассмотрим определение конечного предела функции по Гейне.

Определение 26. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой такой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$ при любых $n \in \mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A).

Иными словами с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right) := \\ \left(\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \ x_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N} \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right).$$

Определение 27. Число A называется *правым пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой такой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n > a$ при любых $n \in \mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A) или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \right) := \\ \left(\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \ x_n > a \ \forall n \in \mathbb{N} \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right).$$

Определение 28. Число A называется *левым пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой такой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n < a$ при любых $n \in \mathbb{N}$, соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции сходятся к одному и тому же A (имеют один и тот же предел, равный A) или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \right) := \\ \left(\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \ x_n < a \ \forall n \in \mathbb{N} \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right).$$

Определение 29. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любой бесконечно большой последо-

вательности $\{x_n\}$ значений аргумента соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции имеют один и тот же предел, равный A или с помощью логических символов:

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A\right) := \\ \left(\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A\right).$$

Теорема 4. Определения конечного предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.

Задача 12. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ не существует.

Для доказательства, что функция $f(x)$ не имеет предела, удобно пользоваться определением предела функции по Гейне, для чего достаточно показать, что существуют две последовательности $\{x_n^{(1)}\}$ и $\{x_n^{(2)}\}$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n^{(1)}\} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n^{(2)}\} = a$, но соответствующие последовательности $f(x_n^{(1)})$ и $f(x_n^{(2)})$ не имеют одинаковых пределов.

Выберем две числовые последовательности: $\{x_n^{(1)}\} = \{\pi n\}$ и $\{x_n^{(2)}\} = \left\{\frac{\pi(4n+1)}{2}\right\}$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)\pi}{2} = +\infty,$$

но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi(4n+1)}{2} = 1$.

Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Теорема 5 (о единственности предела). Если предел функции в точке существует, то он единственный.

Определение 30. Функция $y = f(x)$ называется *локально ограниченной*, если она ограничена при $x \rightarrow a$: существуют такое $c > 0$ и такая $\overset{\circ}{U}(a)$, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq c$.

Пример 10. Функция $y = x^2 + 2$ локально ограничена при $x \rightarrow 0$.

Теорема 6 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $y = f(x)$ имеет конечный предел в точке $x = a$, то она локально ограничена.

Теорема 7 (о пределе промежуточной функции). Если существуют конечный $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, конечный $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ и такая

$\overset{\circ}{U}(a)$, что для любых $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то существует конечный $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

Теорема 8 (арифметические операции с функциями, имеющими конечные пределы). Если существуют конечный $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и конечный $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то:

1) существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B;$$

2) существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B;$$

3) существует конечный

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при условии, что } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0.$$

Теорема 9 (о замене переменной в пределе или о пределе сложной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значение b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c , то сложная функция $g(f(x))$ имеет предел в точке a и он равен c .

Задача 13. Вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x} - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} \text{замена:} \\ 1+x = y^k \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 1 \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^k - 1} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{(y-1)(y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{причем } y \neq 1 \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{U}(0) \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y^{k-1} + y^{k-2} + \dots + y + 1} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Если точка $x = a$ принадлежит области определения элементарной функции $f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Задача 14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin 3x = \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

Рассмотрим задачи на вычисление пределов, когда $f(a)$ не существует. Решение любого примера начинаем с подстановки вместо x его предельного значения. Лишь убедившись, что получается неопределенность $\left(\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [\infty - \infty]\right)$, решаем, как преобразовать функцию, чтобы эту неопределенность раскрыть.

В случае неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \rightarrow a$ в числителе и знаменателе дроби необходимо выделить «критический» множитель вида $(x - a)^k$, на который затем дробь сократить.

Задача 15. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

При подстановке $x = -1$ в числитель и знаменатель получаем $\left[\frac{0}{0} \right]$. Это значит, что и в числителе и в знаменателе есть общий множитель $(x+1)$. Разложим на множители многочлены числителя и знаменателя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 (x^2 - 2)}{(x+1)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2}{x + 1} = \left[\frac{-1}{0} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Задача 16. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$.

Снова имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для выделения «критического» множителя в этом случае удобно использовать замену переменной, выбрав ее так, чтобы избавиться от иррациональностей в числителе и знаменателе: $\sqrt{x} = t$. При $x \rightarrow 64$ $t \rightarrow \sqrt{64} = 2$;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^3 - 8}{t^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t^2 + 2t + 4)}{(t-2)(t+2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 2t + 4}{t + 2} = \frac{12}{4} = 3. \end{aligned}$$

Задача 17. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10}$.

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ снова можно воспользо-

зоваться заменой переменной $\sqrt{x-1}=t$, устранив при этом иррациональность. Но мы рассмотрим другой способ: перевод иррациональности из числителя в знаменатель. Для этого домножим числитель на сопряженное. Для того чтобы равенство не нарушилось, знаменатель будем домножать на то же выражение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{\sqrt{x-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{10-1}+3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Задача 18. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$. Как видим,

здесь неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$, но в условии присутствуют корни с

разными подкоренными выражениями, а значит, метод замены переменной не подойдет. Числитель будем домножать на сопряженное, а знаменатель — до формулы суммы кубов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \left(\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-1 \cdot (4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x}+3} = \\ &= \frac{-(4+4+4)}{3+3} = -2. \end{aligned}$$

Правила раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [\infty - \infty]$

такие же, как при вычислении пределов числовых последовательностей.

$$\begin{aligned}
 \text{Задача 19. } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3}) &= [\infty - \infty] = \\
 &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sqrt[3]{1-x^3}) \left(x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2} \right)}{x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Для сведения выражения к дроби мы домножили числитель на неполный квадрат разности (до формулы разности кубов), поэтому и в знаменателе появился тот же множитель.

$$\begin{aligned}
 \text{Задача 20. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right) &= [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{замена:} \\ x = t^6 \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 1 \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-t^3} - \frac{2}{1-t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3(1+t) - 2(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1+t-2t^2}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t)(2t+1)}{(1-t)(1+t)(1+t+t^2)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t+1}{(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{2+1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Задача 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^3 9x^2 \left(1 - \frac{2}{3x}\right)^2}{x^5 \left(1 + \frac{5}{x^5}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 \cdot 9x^2}{x^5} = 72.$$

Далее рассмотрим односторонние пределы.

Задача 22. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{x-3}{|x-3|}$.

Раскрывая модуль, получим

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x-3}{x-3} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x-3}{-(x-3)} = -1.$$

Задача 23. $\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-2-0}} = \lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{-\frac{1}{0}} = \lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{-\infty} = 0;$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-2+0}} = \lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{0}} = \lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{+\infty} = +\infty.$$

Задача 24. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ (по графику функции видно, что

при $x \rightarrow -\infty$ $\operatorname{arctg} x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$); $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Задача 25. $\lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{1}{(x+3)(x-4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{1}{7(4-0-4)}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{\frac{1}{-7}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} e^{-\frac{1}{7}} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} e^{\frac{1}{(x+3)(x-4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} e^{\frac{1}{7(4+0-4)}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} e^{\frac{1}{7}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} e^{+\frac{1}{7}} = +\infty.$$

Задача 26. Вычислить $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right).$

В приведенной задаче существует неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Чтобы раскрыть ее, необходимо свести выражение, стоящее под знаком предела, к дроби. Сделаем это, домножив на сопряженное. В результате тип неопределенности сменится на $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Раскроем эту неопределенность, вынося самые «весомые» слагаемые числителя и знаменателя за скобки:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right) \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right)}{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 5x + 1 - 4x^2 + 5x - 1}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} \right)} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{напомним, что} \\ \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{2|x| \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{-2x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x}{-2x \cdot 2} = -\frac{5}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right) = \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right) \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right)}{\left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1} \right)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 5x + 1 - 4x^2 + 5x - 1}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \sqrt{4x^2 - 5x + 1}} = \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{\sqrt{4x^2} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} \right)} = \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{2|x| \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} + \sqrt{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{4x^2}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{2x \cdot 2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 1
(для самостоятельной работы)

№ задания	Вычислить	Ответ
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 1}{0,001n^4 - 2n^3}$	0
2	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{16n+7}}$	∞
3	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4 + n^2 + 1}$	0
4	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[5]{n^7+3n^2+1}}$	0
5	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n-1)^2}{(2n+1)^2 + (n-1)^2}$	$\frac{3}{5}$
6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$	∞
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 + 6n^5 + 2}}$	1

№ задания	Вычислить	Ответ
8	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 \sqrt{n^2 + 1}} + 3n}{n}$	4
9	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right)$	1
10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$	$\frac{7}{2}$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 2

№ задания	Вычислить	Ответ
1	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$	0
2	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$	0
3	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$	0
4	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$	$\frac{1}{3}$
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$	2
6	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 4x^2 - 4x - 1}$	$\frac{16}{7}$
7	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$	0

№ задания	Вычислить	Ответ
8	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$	$-\frac{1}{3}$
9	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - 6x^2 + 32}$	∞
10	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 8x + 4}$	$\frac{5}{8}$
11	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 4x - 8}$	$\frac{9}{28}$
12	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$	2
13	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 5x + 6}$	81
14	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x - 6}$	$\frac{3}{11}$
15	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$	2
16	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}$	-1
17	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 - 9}$	0
18	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 12x + 20}$	$-\frac{7}{8}$
19	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$	∞
20	$\lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{2}{x+2} + \frac{x^3}{x^2 - 4} \right)$	$-\frac{5}{2}$
21	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

№ задания	Вычислить	Ответ
22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}\sqrt{1+2x}-1}{x}$	$\frac{3}{2}$
23	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	$-\frac{1}{16}$
24	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	$\frac{12}{5}$
25	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0
26	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$	$-\frac{4}{3}$
27	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$	$\frac{1}{4}$
28	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$	$-\frac{1}{3}$
29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$	-1
30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$	$\frac{2}{27}$
31	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt[3]{9+x^3} + \sqrt[3]{7-x^3} \right)$	$\frac{16}{3}$
32	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	12
33	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x^3+1}$	$\frac{1}{6}$
34	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	$\frac{1}{144}$
35	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	$\frac{4}{3}$

№ задания	Вычислить	Ответ
36	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} - 1}$	$\frac{2}{3}$
37	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$	$\frac{3}{4}$
38	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x}}$	$3 \cdot 2^{-\frac{5}{6}}$
39	$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$	0

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ № 3

№ задания	Вычислить	Ответ
1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{16x^4 - x}\sqrt{x}}{3x^2 + 1}$	$\frac{5}{3}$
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x^2+1} + 3x}{x}$	4
3	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt[3]{4x^4 - x^7}\sqrt{x}}{2x^2 - 3x + 5}$	$+\infty$
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{8x^7} - 1}$	0
5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3\sqrt[3]{9x^4 - x^6}}{\sqrt{2x^3 + 9x^4}}$	$\frac{5}{3}$
6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{x} + \sqrt{1+9x^3} + x}{3x\sqrt{x+10}}$	$\frac{5}{3}$

№ задания	Вычислить	Ответ
7	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2 - \sqrt[3]{x^4+4}}{\sqrt{x}(2-x) - x\sqrt{x+2}}$	$-\infty$
8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^3+1} - \sqrt[3]{5x^2+2}}{4x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2+1}}$	1
9	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x^2+1)\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{16x^3+x}}$	1
10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sqrt[3]{1-8x^4}}{1 - 3\sqrt[5]{x^6}}$	$+\infty$
11	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 3\sqrt{x^4+1} + 7x^2}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}}$	4
12	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{1+9x^4}}{(\sqrt{x}+1)^2 (\sqrt[3]{x}-2)^3}$	5
13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4+3} - \sqrt[3]{x^6+1}}{x^2+100x}$	2
14	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+100x\sqrt{x}}{(x+2)\sqrt{x^3+8x}+7}$	0
15	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+3} - \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^5}}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$	0
16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^4+2\sqrt[3]{x^{16}-4x}}}{\sqrt[3]{x^8+x^2}-1}$	$\sqrt{2}$
17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2\sqrt[4]{x^8-8x}}{\sqrt{x^4+12} - 4x^2}$	$-\frac{1}{3}$
18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \sqrt{x^8+9x^5+x^4}}{3x^4-2x^3}$	$\frac{2}{3}$

№ задания	Вычислить	Ответ
19	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 2x^2\sqrt{x^6 - x^3 + 1}}{\left(\sqrt[3]{x^4 + 4} - \sqrt{x^5}\right)^2}$	2
20	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt[3]{x^6 + x} + \sqrt{1 + x^4}}$	$\frac{3}{2}$

ЛИТЕРАТУРА

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель, 2003.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 т. Т. 1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ: в 2 т. Т. 1. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1985.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. М.: Наука, 1970.

Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие для вузов: в 2 т. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006.

Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: в 3 т. Т. 1/ под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1993.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предел числовой последовательности	3
Пределы функций	11
Основные теоремы о пределах функций	19
Вычисление пределов функций.....	21
Контрольное задание № 1 (для самостоятельной работы)	28
Контрольное задание № 2	29
Контрольное задание № 3	32
Литература.....	35