Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Ф.Х. Ахметова, С.Н. Ефремова, Т.А. Ласковая

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Часть 2

Методические указания к выполнению домашнего задания

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2014

УДК 517
ББК 22.161
А95

Рецензент канд. техн. наук, доц. *А.В. Котович*

Ахметова Ф. Х.

А95 Введение в анализ. Теория пределов : метод. указания к выполнению домашнего задания / Ф. Х. Ахметова, С. Н. Ефремова, Т. А. Ласковая. — Ч. 2. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. — 28, [4] с.

ISBN 978-5-7038-3796-2

Кратко изложен теоретический материал по теории пределов функций, выделению главных частей бесконечно малых (или бесконечно больших) функций, сравнению бесконечно малых (или бесконечно больших) функций. Рассмотрены основные понятия, свойства пределов, способы их вычислений с типовыми примерами.

Для самостоятельного изучения темы «Теория пределов» студентами первого курса всех специальностей МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-7038-3796-2

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Введем понятие бесконечно малой функции (б.м.ф.).

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Это определение можно записать с помощью логической символики:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon\right).$$

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$ при данных стремлениях аргумента.

Бесконечно малые функции часто называются бесконечно малыми величинами или просто бесконечно малыми; обозначаются они обычно греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т. д.

Примеры б.м.ф.:

$y = x^2$ при $x \to 0$ (так как $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$);

$y = x - 2$ при $x \to 2$ (так как $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$);

$y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in Z$ (так как $\lim\limits_{x \to \pi k} \sin x = 0$).

СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Перечислим свойства б.м.ф. в виде основных теорем.

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа б.м.ф. при $x \to x_0$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$.

Теорема 2. Произведение б.м.ф. при $x \to x_0$ на ограниченную функцию есть б.м.ф. при $x \to x_0$.

Из теоремы 2 вытекают два следствия.

Следствие 1. Произведение б.м.ф. при $x \to x_0$ на число есть б.м.ф. при $x \to x_0$.

Следствие 2. Произведение двух б.м.ф. при $x \to x_0$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$ (так как всякая б.м.ф. при $x \to x_0$ является ограниченной).

Теорема 3. Функция имеет предел, равный a, при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы числа a и некоторой б.м.ф. $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$

Рассмотрим два предела, которые неоднократно будут встречаться в дальнейшем.

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

называется ***первым замечательным пределом***.

Он часто используется при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 1.

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x}$.

В нашем случае имеем неопределенность вида $\left\{ \dfrac{0}{0} \right\}$, поэтому теорема о пределе дроби здесь неприменима. Чтобы вычислить этот предел, воспользуемся теоремой о замене переменной:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{5}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\left\{\begin{matrix}\text{замена } 2x=t,\\ t\to 0 \quad \text{при } x\to 0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Равенства

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

называют ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов в случае неопределенности вида $\left\{1^{\infty}\right\}$.

Пример 3.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\left\{\begin{matrix}\text{замена } \frac{x}{2}=t,\\ t\to\infty \ \text{ при } x\to\infty\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot 2}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{2}=e^{2}.$$

Пример 4.

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

Выполним необходимые преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-2)+10}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x-2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{x-2}{10}\cdot\frac{10}{x-2}x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{10}}\right)^{\frac{x-2}{10}}\right]^{\frac{10x}{x-2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x}{x-2}}=e^{10}.$$

СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Сравним две б.м.ф. между собой с помощью их отношения. Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Этого нельзя сказать об их частном. Отношение двух б.м.ф. может вести себя по-разному. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть две б.м.ф. при одном и том же стремлении аргумента $x\to x_0$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x\to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x)=\boldsymbol{o}\big(\beta(x)\big),\ x\to x_0.$$

(Читается так: $\alpha(x)$ есть $\boldsymbol{o}$ малое от $\beta(x)$ при x, стремящемся к x_0.)

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2x=0\Rightarrow 2x^3=\boldsymbol{o}\left(x^2\right),\ x\to 0$.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$ при $x\to x_0$, т. е. $\beta(x)=\boldsymbol{o}\left(\alpha(x)\right),\ x\to x_0$.

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x}=\infty\Rightarrow 2x^3=\boldsymbol{o}(x^2),\ x\to 0.$

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$ и $A\neq 0$ ($A\in\boldsymbol{R}$), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x\to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x)=\boldsymbol{O}\left(\beta(x)\right)\ \text{или}\ \beta(x)=\boldsymbol{O}\left(\alpha(x)\right).$$

(Читается так: $\alpha(x)$ есть $\boldsymbol{O}$ большое от $\beta(x)$ при x, стремящемся к x_0.)

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\boldsymbol{O}(2x),\ x\to 0.$

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x\to x_0$. При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x)\sim\beta(x),\ x\to x_0.$$

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{tg}x\sim x,\ x\to 0.$

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми.

Например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, а так как этот предел не существует, то $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x)=x$ – несравнимые б.м.ф. при $x\to 0$.

Определение 2. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой ***k***-го порядка относительно бесконечно малой $\beta(x)$ при $x\to x_0$, если существует такое число $\boldsymbol{k}>0$, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=A,$$

где $A\neq 0$, $A\in\boldsymbol{R}$.

При этом используется следующая запись:

$$\alpha(x)=\boldsymbol{O}\left(\left(\beta(x)\right)^k\right),\ x\to x_0.$$

Пример 5.

Найти порядок малости б.м.ф. $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ при $x\to 0$, если $\alpha(x)=1-\cos x$, $\beta(x)=x$.

Рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^k\cdot 2^k}=\{\text{при } k=2\}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $k=2$ б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ сравнимы и одного порядка.

(Читается так: $\alpha(x)=1-\cos x$ – б.м.ф. 2-го порядка малости относительно $\beta(x)$, т. е. $1-\cos x=\boldsymbol{O}(x^2)$ при $x\to 0$.)

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ И ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НИХ

Среди бесконечно малых одного порядка особую роль играют так называемые ***эквивалентные*** бесконечно малые. Еще раз напомним это определение.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными б.м.ф.*** при $x\to x_0$.

Обозначается это так: $\alpha(x)\sim\beta(x),\ x\to x_0$.

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0,$ так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$

$\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0,$ так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$

Теорема 4. Для эквивалентности двух б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой большего порядка малости, чем каждая из этих бесконечно малых:

$$\begin{pmatrix}\alpha(x)\sim\beta(x),\\ x\to x_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\big(\alpha(x)-\beta(x)=\boldsymbol{o}\big(\alpha(x)\big)\big)\ \Lambda\big(\alpha(x)-\beta(x)=\boldsymbol{o}\big(\beta(x)\big)\big)$$

при $x\to x_0$.

Теорема 5. Сумма конечного числа бесконечно малых разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Например, $3x^3+7x^2+4x\sim 4x$ при $x\to 0,$ так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+7x^2+4x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+1\right)}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+1\right)=1.$$

Теорема 6. Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Данная теорема о замене функций на эквивалентные широко используется при вычислении пределов, в частности для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Например, задачу, уже рассмотренную ранее в примере 1, можно решить следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\left\{\sin 2x \sim 2x \text{ при } x\to 0\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Пример 6.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+7x^2+4x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{2x}=2,$ поскольку $3x^3+7x^2 + 4x\sim 4x$; $\sin 2x \sim 2x$ при $x\to 0$.

Приведем еще примеры эквивалентных б.м.ф.

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=1\cdot 1=1\Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$

при $x\to 0$.

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=\left\{\begin{matrix}\text{замена } \arcsin x=t\\ \\ t\to 0 \text{ при } x\to 0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow \arcsin x\sim x \text{ при } x\to 0.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{поскольку функция } \log_a x - \text{ непрерывная,}\\ \text{можно использовать теорему о пределе}\\ \text{непрерывной функции}\end{matrix}\right\}=$$

$$= \log_a \left[\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e \Rightarrow \begin{cases} \log_a (1+x) \sim x \log_a e \\ \ln(1+x) \sim x \end{cases}$$

при $x \to 0$.

Пример 10.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$$

при $x \to 0$.

Ниже приведем ***важнейшие эквивалентности***, используемые при вычислении пределов. Все они выполняются *только при* $x \to 0$:

$\sin x \sim x$,	$a^x - 1 \sim x \ln a$;
$\operatorname{tg} x \sim x$,	$e^x - 1 \sim x$;
$\arcsin x \sim x$,	$\ln(1+x) \sim x$;
$\operatorname{arctg} x \sim x$,	$\log_a (1+x) \sim x \log_a e$;
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,	$(1+x)^k - 1 \sim kx,\ k > 0$ (в частности, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$).

Пример 11.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \left\{ \begin{matrix} \arcsin(x-1) \sim (x-1), \text{ так как} \\ \text{при } x \to 1 \Rightarrow (x-1) \to 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-4)} = -\frac{1}{3}.$$

Пример 12.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-4}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{\sin 3x}} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-4}{x^2-2}\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}=\{\sin 3x\sim 3x \text{ при } x\to 0\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$$

Пример 13.

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sin x}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{x-4}}=\left\{\begin{array}{c}\text{имеем неопределенность вида } \{1^{\infty}\},\\ \text{так как } \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin x}{\sin 4}=1,\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}=\infty\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{замена } t=x-4\\ t\to 0 \text{ при } x\to 4\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\,(t+4)}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{t}}=$$

$$=\{\text{используем 2-й замечательный предел}\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\left(\frac{\sin\,(t+4)}{\sin 4}-1\right)\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin\,(t+4)-\sin 4}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\right)^{\frac{\sin 4}{2\cos\frac{t+8}{2}\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\frac{1}{t}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin 4}\frac{1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t+8}{2}\frac{t}{2}}{\sin 4}\frac{1}{t}}=e^{\frac{\cos 4}{\sin 4}}=e^{\operatorname{ctg} 4}.$$

Пример 14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}=\left\{\begin{array}{c}\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x,\ x\to 0\\ \sin 4x\sim 4x,\ x\to 0\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

Пример 15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\frac{1}{\cos x}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Важное замечание. Замена функций на эквивалентные подчиняется правилам, которые изложены в теоремах 5 и 6. Одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в разности). Например, если в данном примере сразу воспользоваться эквивалентностями $\sin x \sim x$ и $\operatorname{tg} x \sim x$ (при $x\to 0$) и заменить функции $\operatorname{tg}x$ и $\sin x$ на эквивалентную им при $x\to 0$ функцию x, то в числителе получим нуль. Было бы ошибкой на основании этого делать вывод, что предел тоже равен нулю.

Пример 16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)(1-x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}=\left\{\ln\left(1-x^2\right)=\ln\left(1+\left(-x^2\right)\right)\sim\left(-x^2\right)\text{ при } x\to 0\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-1.$$

(В этом примере также нельзя сразу воспользоваться эквивалентностями $\ln(1+x)\sim x$ и $\ln(1-x)\sim -x.$)

Пример 17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\left(1+\sin x^2\right)}=$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(1+\sin x^2\right) \sim \sin x^2 \sim x^2,\ x \to 0 \\ \ln\cos x = \ln\left(1+(-1+\cos x)\right) \sim -(1-\cos x) \sim -\dfrac{x^2}{2},\ x \to 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ФУНКЦИИ

Определение 4. Если функция $\beta(x)$ представима в виде $\beta(x) = \alpha(x) + \boldsymbol{o}\left(\alpha(x)\right)$, то функция $\alpha(x)$ называется ***главной частью*** функции $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Рассмотрим **выделение главной части бесконечно малой функции**. Для начала выделим главную часть суммы б.м.ф. Возьмем сумму *n* бесконечно малых функций $\alpha_k(x)$, определенных в окрестности точки x_0:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) = \alpha_1(x) + \cdots + \alpha_n(x)$$

и

$$\lim_{x \to x_0} \alpha_k(x) = 0,\ \forall k = \overline{1,n}.$$

Согласно теореме 1, алгебраическая сумма конечного числа б.м.ф. есть б.м.ф. Пусть при этом выполняется условие $\alpha_k(x) = \boldsymbol{o}\left(\alpha_1(x)\right)$, $k = \overline{2,n}$ при $x \to x_0$, т. е. $\forall \alpha_k(x)$ (при $k = \overline{2,n}$) имеет больший порядок малости по сравнению с $\alpha_1(x)$. В свою очередь, $\alpha_1(x)$ имеет наименьший порядок малости по сравнению со всеми остальными слагаемыми. Тогда, согласно теореме 5, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sim \alpha_1(x), \text{если } \alpha_k(x) = \boldsymbol{o}\left(\alpha_1(x)\right),\ k = \overline{2,n} \text{ при } x \to x_0$$

$$\Rightarrow \left\{\text{по теореме 4}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) = \alpha_1(x) + \boldsymbol{o}\left(\alpha_1(x)\right)$$

$\Rightarrow \{\text{по определению 4}\}$ $\alpha_1(x)$ является *главной частью* этой суммы.

Таким образом, доказано утверждение, приведенное ниже.

Утверждение 1. Главная часть суммы конечного числа б.м.ф. разного порядка малости – это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

Очевидно, что если в сумме есть несравнимые слагаемые, то выделить главную часть нельзя.

Пример 18.

а) Главной частью суммы б.м.ф. $8x^3+7x^2+3x$ при $x\to 0$ является функция $3x$, так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{8x^3+7x^2+3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{8}{3}x^2+\frac{7}{3}x+1\right)=1.$$

б) У суммы б.м.ф. $8x^3+7x^2+x\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ главной части не существует, поскольку в последнее слагаемое в качестве множителя входит функция $y=\sin\frac{1}{x}$, предел которой при $x\to 0$ не существует.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

В общем случае можно говорить о выделении главной части не только у алгебраической суммы конечного числа б.м.ф., но и у произвольной б.м.ф. при $x\to 0$.

Согласно определению 4 и теореме 4, любая функция $\alpha(x)$, эквивалентная данной $\beta(x)$, является ее главной частью. Однако если задаваться *определенным видом* этой части, то главную часть можно определить однозначно. Обычно главную часть б.м.ф. (при $x\to x_0$) ищут в виде $C(x-x_0)^k$.

Представим в виде таблицы возможные варианты выделения главной части б.м.ф. при различном стремлении аргумента и рассмотрим примеры для каждого случая.

x_0	Вид главной части	Выделение главной части б.м.ф. $f(x)$
$x \to x_0$, $x_0 = 0$	Cx^k	Если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k} = C$, где $C \neq 0$, $\Rightarrow f(x) = Cx^k + o(x^k)$ $\Rightarrow f(x) \sim Cx^k$
$x \to x_0$, $x_0 = \text{const} \neq 0$	$C(x-x_0)^k$	Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k} = C$, где $C \neq 0$, $\Rightarrow f(x) = C(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right)$ $\Rightarrow f(x) \sim C(x-x_0)^k$
$x \to \infty$	$C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^k} = C$, где $C \neq 0$, $\Rightarrow f(x) = C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k + o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ $\Rightarrow f(x) \sim C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$

Пример 19.

Выделить главную часть б.м.ф. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^3}$, $x \to 0$.

Главную часть данной функции при $x \to 0$ ищем в виде Cx^k. Для определения чисел C и k рассмотрим предел отношения

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(1-x^3\right)x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(1-x^3\right)}\frac{x}{x^k} = \{\text{при } k=1\} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^3} = 2,$$

$$\Rightarrow \text{при } k=1,\ C=2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{1-x^3} \sim 2x \text{ при } x \to 0.$$

Пример 20.

Выделить главную часть б.м.ф. $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $x \to -2$. Поскольку $x \to -2$, для этой функции главную часть ищем в виде $C(x+2)^k$.

Вычислим предел:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{(x+2)^k}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x+4}{(x+2)^k}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)^k}=\{\text{при } k=2\}=1$$

$$\Rightarrow \text{при } k=2,\ C=1 \Rightarrow f(x)=x^2+4x+4 \sim (x+2)^2 \text{ при } x\to -2.$$

Пример 21.

Выделить главную часть б.м.ф. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x},\ x\to\infty.$

Главную часть ищем в виде $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$. Найдем C и k, вычислив предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x},\ \text{так как}\\ \frac{1}{x}\to 0\ \text{ при } x\to\infty\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\{\text{при } k=3\}=1$$

$$\Rightarrow \text{при } k=3,\ C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\sim\left(\frac{1}{x}\right)^3 \text{ при } x\to\infty.$$

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Введем понятие бесконечно большой (б.б.ф.) функции.

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа $M>0$ существует такое число $\delta=\delta(M)>0,$ что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta,$ выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

В логической символике:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \Big(\big(\forall M>0\ \ \exists\delta=\delta(M)>0,\ \forall x: 0<\left|x-x_0\right|<\delta\big)\Rightarrow \left|f(x)\right|>M\Big).$$

Например, функция $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-5}$ есть б.б.ф. при $x\to 5.$

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ есть две б.б.ф. при одном и том же стремлении аргумента $x\to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} B(x)=\infty.$

Сравним две б.б.ф. между собой с помощью их отношения (аналогично б.м.ф.) и рассмотрим все возможные случаи.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=0,$ то $A(x)$ называется бесконечно большой более низкого порядка роста, чем $B(x)$ при $x\to x_0$, т. е. $A(x)=\boldsymbol{o}\big(B(x)\big),\ x\to x_0.$

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=\infty,$ то $A(x)$ называется бесконечно большой более высокого порядка роста, чем $B(x)$ при $x\to x_0$, т. е. $B(x)=\boldsymbol{o}\big(A(x)\big),\ x\to x_0.$

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=C,$ где $C\neq 0$ ($C\in\boldsymbol{R}$), то $A(x)$ и $B(x)$ называются бесконечно большими одного порядка роста при $x\to x_0$, т. е. $A(x)=\boldsymbol{O}\big(B(x)\big)$ или $B(x)=\boldsymbol{O}\big(A(x)\big),\ x\to x_0.$

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=1,$ то бесконечно большие $A(x)$ и $B(x)$ называются эквивалентными при $x\to x_0$, т. е. $A(x)\sim B(x),\ x\to x_0.$

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ не существует, то $A(x)$ и $B(x)$ называются несравнимыми бесконечно большими.

Например: функции $A(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ и $B(x)=x$ при $x\to\infty$ являются эквивалентными б.б.ф., так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\,\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1,$$

а функции $A(x)=x(2+\cos x)$ и $B(x)=x$ – несравнимые б.б.ф. при $x\to\infty,$ поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2+\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x)$ — не существует.

Определение 6. Б.б.ф. $A(x)$ называется бесконечно большой *k*-го порядка относительно бесконечно большой $B(x)$ при $x\to x_0,$ если существует такое число $k>0$, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{\left(B(x)\right)^k}=C,$$

где $C\neq 0$ ($C\in \boldsymbol{R}$).

При этом используется следующая запись: $A(x)=\boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^k\right),$ $x\to x_0.$

Пример 22.

Найти порядок роста б.б.ф. $A(x)$ относительно $B(x)$ при $x\to\infty,$ если

$$A(x)=\frac{5x^6}{3x^4+x^3+2},\quad B(x)=x.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\left(B(x)\right)^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{x^k(3x^4+x^3+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^{4+k}+x^{3+k}+2x^k}=$$

$$=(k=2)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^6+x^5+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}}=\frac{5}{3}\neq 0$$

$\Rightarrow A(x)$ — б.б.ф. 2-го порядка роста относительно $B(x)$ при $x\to\infty,$ $\Rightarrow A(x)=\boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^2\right),$ $x\to\infty.$

Далее рассмотрим **выделение главной части бесконечно большой функции.** Для начала выделим главную часть суммы б.б.ф.

Возьмем сумму ***n*** б.б.ф. $\beta_k(x),$ определенных в окрестности точки $x_0,$ в которой одно из слагаемых имеет более высокий порядок роста по сравнению с остальными. Используя определение 4 главной части функции, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Главной частью суммы конечного числа б.б.ф. является слагаемое более высокого порядка роста по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

(Доказательство проводится так же, как и для суммы б.м.ф.).

В общем случае можно говорить о выделении главной части не только у алгебраической суммы конечного числа б.б.ф., но и у произвольной б.б.ф., при $x \to x_0$.

Представим в виде таблицы, аналогичной приведенной выше для б.м.ф., возможные варианты выделения главной части б.б.ф. при различном стремлении аргумента.

x_0	Вид главной части	Выделение главной части б.б.ф. $f(x)$
$x \to x_0$, $x_0 = 0$	$C\left(\frac{1}{x}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C\left(\frac{1}{x}\right)^k + \boldsymbol{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^k\right)$ $\Rightarrow f(x) \sim C\left(\frac{1}{x}\right)^k$
$x \to x_0$, $x_0 = \text{const} \neq 0$	$C\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = C\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k + \boldsymbol{o}\left(\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k\right)$ $\Rightarrow f(x) \sim C\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k$
$x \to \infty$	Cx^k	Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^k} = C$, где $C \neq 0$ $\Rightarrow f(x) = Cx^k + \boldsymbol{o}\left(x^k\right)$ $\Rightarrow f(x) \sim Cx^k$

Пример 23.

Выделить главную часть б.б.ф.:

$$f(x)=\frac{2x^5}{1-x^3} \text{ при } x\to\infty.$$

Главную часть данной функции ищем в виде Cx^k. Числа C и k найдем, вычислив

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{\left(1-x^3\right)x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^k-x^{k+3}}=$$

$$=\left\{k+3=5\Rightarrow k=2\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^2-x^5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^3}-1}=-2\Rightarrow k=2,\ C=-2.$$

Следовательно, $f(x)=\dfrac{2x^5}{1-x^3}\sim -2x^2$ при $x\to\infty$.

Между б.м.ф. и б.б.ф. существует связь. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 7. Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$ $\left(\alpha(x)\neq 0\right)$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x\to x_0$ и, наоборот, если функция $\beta(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$ $\left(\beta(x)\neq 0\right)$, то функция $\dfrac{1}{\beta(x)}$ есть бесконечно малая при $x\to x_0$.

В примерах 24–26 для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ следует:

а) показать, что обе функции являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x\to 3$;

б) для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть вида $C\left(x-x_0\right)^k$ и указать порядок их малости (роста);

в) сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$, если это возможно.

Пример 24.

$f(x)=\sin \pi x;\ g(x)=\log_2\left(\frac{x}{3}\right),\ x\to 3.$

Решение:

а) покажем, что при $x\to 3$ обе функции являются б.м.ф. Для этого найдем пределы:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\sin \pi x=\sin 3\pi=0 \Rightarrow f(x)\ \text{– б.м.ф. при}\ x\to 3,$$

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\log_2\left(\frac{x}{3}\right)=\log_2 1=0 \Rightarrow g(x)\ \text{– б.м.ф. при}\ x\to 3;$$

б) $f(x)$ и $g(x)$ являются б.м.ф. при $x\to 3$. Следовательно, главную часть этих функций будем искать в виде $C(x-3)^k$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)^k}=\lim_{x\to 3}\frac{\sin \pi x}{(x-3)^k}=\left\{\begin{matrix}\text{замена:}\\ t=x-3\Rightarrow x=t+3\\ t\to 0\ \text{ при } x\to 3\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t+3\pi)}{t^k}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin \pi t}{t^k}=\left\{\begin{matrix}\sin \pi t\sim \pi t\\ \pi t\to 0\ \text{ при } t\to 0\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{t^k}=-\pi\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^k}=(\text{при } k=1)=-\pi,$$

$\Rightarrow k=1,\ C=-\pi.$

Таким образом,

$$f(x)\sim -\pi(x-3)\ \text{ при }\ x\to 3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{\left(x-3\right)^k}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_2\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(x-3\right)^k}=\left\{\begin{matrix}\text{замена:}\\ t=x-3\Rightarrow x=t+3\\ t\to 0\ \text{ при } x\to 3\end{matrix}\right\}=$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\log_2\left(\frac{t+3}{3}\right)}{t^k} = \lim_{t\to 0}\frac{\log_2\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^k} = \left\{\begin{matrix}\log_2\left(1+\frac{t}{3}\right)\sim\frac{t}{3}\log_2 e \\ \frac{t}{3}\to 0 \text{ при } t\to 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\log_2 e}{3}\frac{t}{t^k} = (\text{при } k=1) = \frac{\log_2 e}{3},$$

$$\Rightarrow k=1,\ C=\frac{1}{3}\log_2 e.$$

Поэтому $g(x)\sim\left(\frac{1}{3}\log_2 e\right)(x-3)$ при $x\to 3$;

в) выделив главные части обеих функций, мы видим, что при $x\to 3$ они имеют первый порядок малости относительно б.м.ф. $(x-3)$. Следовательно, они являются б.м.ф. одного порядка при $x\to 3$. В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив предел их отношения при $x\to 3$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\begin{matrix}\text{при } x\to 3 \ \ f(x)\sim -\pi(x-3) \\ g(x)\sim\left(\frac{1}{3}\log_2 e\right)(x-3) = -3\pi\ln 2\neq 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-\pi(x-3)}{\left(\frac{1}{3}\log_2 e\right)(x-3)} = \frac{-3\pi}{\log_2 e} = -3\pi\ln 2\neq 0.$$

Соответственно $f(x)=\boldsymbol{O}\left(g(x)\right)$ при $x\to 3$.

Пример 25.

$$f(x)=\frac{x^3+x\sin x}{x+\sqrt[3]{x}};\ g(x)=\frac{x^2+x+1}{x+2}\ \ x\to\infty.$$

Решение:

а) в данном случае обе функции при $x\to\infty$ являются б.б.ф., поскольку

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x\sin x}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}\sin x}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8}}} = \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + x + 1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = \infty;$$

б) $f(x)$ и $g(x)$ являются б.б.ф. при $x\to\infty$. Следовательно, главную часть этих функций будем искать в виде Cx^k $(k>0)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x\sin x}{\left(x+\sqrt[3]{x}\right)x^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x\sin x}{x^{k+1}+x^{k+\frac{1}{3}}} =$$

$$= \left\{\text{при } k+1=3 \Rightarrow k=2\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + x\sin x}{x^3 + x^{\frac{7}{3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}\sin x}{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = 1,$$

$\Rightarrow k=2,\ C=1.$

Таким образом,

$$f(x) \sim x^2 \text{ при } x\to\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{\left(x+2\right)x^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^{k+1}+2x^k} = \left\{\text{при } k+1=2 \Rightarrow k=1\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}} = 1,$$

$\Rightarrow k=1,\ C=1.$

Значит,

$$g(x) \sim x \text{ при } x\to\infty;$$

в) выделив главные части обеих функций, мы видим, что при $x \to \infty$ функция $f(x)$ имеет второй порядок, а функция $g(x)$ – первый порядок роста относительно б.б.ф. x. Следовательно, $f(x)$ имеет более высокий порядок роста (а именно второй) по сравнению с $g(x)$ при $x \to \infty$. Убедимся в этом непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\begin{matrix} f(x) \sim x^2 \text{ при } x \to \infty \\ g(x) \sim x \text{ при } x \to \infty \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\Rightarrow g(x) = \boldsymbol{o}\big(f(x)\big) \text{ при } x \to \infty \;\; \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\big(g(x)\big)^k} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^k} = \{\text{при } k = 2\} = 1 \neq 0.$$

Следовательно,

$$g(x) = \boldsymbol{o}\big(f(x)\big) \text{ при } x \to \infty,$$

или

$$f(x) \sim \big(g(x)\big)^2 \text{ при } x \to \infty.$$

Пример 26.

$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x};\; g(x) = \sin x \;\; x \to 0.$

Решение:

а) убедимся, что обе функции при $x \to 0$ являются б.м.ф. Для этого вычислим пределы:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = (\text{по теореме 2}) = 0$$

$\Rightarrow f(x) -$ б.м.ф. при $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

$\Rightarrow g(x) -$ б.м.ф. при $x \to 0$.

б) поскольку $f(x)$ и $g(x)$ являются б.м.ф. при $x \to 0,$ главную часть этих функций будем искать в виде Cx^k $(k > 0)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k} = \begin{cases} \nexists \text{ при } \forall k \geq 1, \\ 0 \text{ при } \forall k < 1. \end{cases}$$

А это означает, что $f(x)$ не имеет главной части вида $Cx^k\,(C \neq 0)$ при $x \to 0.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^k} = \{\text{при } k = 1\} = 1,$$

$$\Rightarrow k = 1,\ C = 1.$$

Следовательно,

$$g(x) \sim x \text{ при } x \to 0;$$

в) сравним две функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \begin{Bmatrix} \text{при } x \to 0 \\ \sin x \sim x \end{Bmatrix} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$ – не существует,

$\Rightarrow f(x)$ и $g(x)$ не сравнимы при $x \to 0.$

Контрольное задание для самостоятельной работы № 1

№ вар.	Вычислить*	№ вар.	Вычислить*
1	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}x}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)$	11	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$ $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 4x}{x^2+\pi x}$ $\left(-\dfrac{4}{\pi}\right)$	12	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(3-2x)}{\operatorname{arctg}(3x-3)}$ $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$
3	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\lg(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$ $\left(\dfrac{8}{3\ln 10}\right)$	13	$\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$ $\left(\dfrac{1}{\pi e^{4\pi^2}}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{5-5^x}$ $\left(\dfrac{\pi}{10\ln 5}\right)$	14	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi x}{\sin x}$ $(-\pi)$
5	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin^2(3x-3)}{1+\cos\pi x}$ $\left(\dfrac{18}{\pi^2}\right)$	15	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$ $\left(\dfrac{1}{8}\right)$
6	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$ $\left(\dfrac{9\ln 3}{\pi}\right)$	16	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$ (2)
7	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)\operatorname{tg}\pi x}{\arcsin\left((1-x)^2\right)}$ (π^2)	17	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$ $\left(\dfrac{9}{98}\right)$
8	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$ $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$	18	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ $\left(-\dfrac{7}{8}\right)$
9	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ $\left(\dfrac{9}{8}\right)$	19	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$ (-2π)
10	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2 2x}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$	20	$\lim\limits_{x\to3\pi}\dfrac{2^x-8^\pi}{\sin 7x-\sin 3x}$ $\left(-2^{3\pi-2}\ln 2\right)$

*В скобках справа дан правильный ответ.

Контрольное задание для самостоятельной работы № 2

№ вар.	Вычислить*	№ вар.	Вычислить*
1	$\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{2x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$ $\left(e^{\frac{4}{3}}\right)$	11	$\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$ $\left(e^{-\frac{1}{8}}\right)$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{x}}$ $\left(e^{-3}\right)$	12	$\lim\limits_{x\to +0}\left(2-5^{\arcsin x^2}\right)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{x}}$ $\left(\dfrac{1}{5}\right)$
3	$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ $\left(e^{\frac{9}{2}}\right)$	13	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{2}{\pi}}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{c\operatorname{tg} x}$ $\left(e^{-2}\right)$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\sin x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)$
5	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{4}{\pi}}\right)$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$ $\left(e^{-18}\right)$
6	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ $\left(e^{3}\right)$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+\pi x^2)}}$ $\left(e^{-\frac{1}{\pi}}\right)$
7	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{9x-7}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ $\left(e^{12}\right)$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{3x^2}}$ $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\right)^{\frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}}$ $\left(e^{-1}\right)$	18	$\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\left(2-\dfrac{2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$ $\left(e^{\frac{2}{\pi}}\right)$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{c\operatorname{tg}\pi x}$ $\left(e^{-\frac{1}{\pi}}\right)$	19	$\lim\limits_{x\to 1}(1+\operatorname{tg}\pi x)^{\frac{1}{x-1}}$ $\left(e^{\pi}\right)$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ $\left(e^{-8}\right)$	20	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$ $\left(e^{3}\right)$

*В скобках справа дан правильный ответ.

ЛИТЕРАТУРА

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970.

Морозова В.Д. Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособ. для втузов: в 2 ч. Ч. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ: в 2 т. Т. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2 ч. Ч. 1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982.

Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича: в 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1993.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Астрель, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ахметова Фаина Харисовна
Ефремова Светлана Николаевна
Ласковая Татьяна Алексеевна

**ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ**

Часть 2

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *О.Ю. Соколова*
Компьютерная верстка *П.В. Ильина*

Подписано в печать 19.02.14. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,86. Изд. № 124. Тираж 100 экз. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
e-mail: press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com

Для заметок