МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ - 1 сем. — для ИУ9

Далее ссылки на учебники:

[**З**]: Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. - М.: Наука, 1981. - 544с.

[**М**]: Морозова В.Д. Введение в анализ. - М.: Изд-во МГТУ, 1996. - 331с.

[**Ив**]: Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. - М.: Изд-во МГТУ, 1998. - 408с.

[**К**]: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. I. - М.: Высшая школа, 1981.

[**АСЧ**]: Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу / Под ред. В.А. Садовничего. - М.: Высш. шк., 1999. - 695с.

1 Элементы теории множеств

См. [З, стр. 5–9].

1.1 Множества

Множество — это совокупность определенных элементов, связанных каким–либо общим свойством.

Пример 1. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Множество, которое не имеет ни одного элемента, называется **пустым множеством** и обозначается $\varnothing$.

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, записывается в виде $a \in A$ или $A \ni a$, а то, что не принадлежит — в виде $a \notin A$. Множества будем, как правило, обозначать большими буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми, хотя иногда от этого соглашения придется отступать, так как элементами некоторого множества могут быть другие множества.

Символы $\wedge$ (**конъюнкция**), $\vee$ (**дизъюнкция**), $\Rightarrow$ (**импликация**) и $\Longleftrightarrow$ (**эквивалентность**) будем понимать как символы, заменяющие словосочетания:
$\wedge$ — "и";
$\vee$ — "или";
$\Rightarrow$ — "если ..., то" или "влечет";
$\Longleftrightarrow$ — "равносильно" или "тогда и только тогда, когда", или "если и только если".

Два множества A и B считают **равными**, если любой элемент x множества A является элементом множества B и наоборот, т.е. $a \in A \iff a \in B$. Из приведенного определения равных множеств следует, что множество полностью определяется своими элементами.

Рассмотрим **способы задания** конкретных множеств. Для конечного множества, число элементов которого относительно невелико, может быть использован способ непосредственного **перечисления** элементов. Элементы конечного множества перечисляют в фигурных скобках в произвольном фиксированном порядке $\{1;3;5\}$. Подчеркнем, что поскольку множество полностью определено своими элементами, то при задании конечного множества порядок, в котором перечислены его элементы, не имеет значения. Поэтому записи $\{1;3;5\}$, $\{3;1;5\}$, $\{5;3;1\}$ и т.д. все задают одно и то же множество. Кроме того, иногда в записи множеств используют повторения элементов. Будем считать, что запись $\{1;3;3;5;5\}$ задает то же самое множество, что и запись $\{1;3;5\}$.

В общем случае для конечного множества используют форму записи $\{a_1;\ldots;a_n\}$. Как правило, при этом избегают повторений элементов. Тогда конечное множество, заданное записью $\{a_1;\ldots;a_n\}$, состоит из n элементов. Его называют также **n–элементным множеством**.

Однако способ задания множества путем непосредственного перечисления его элементов применим в весьма узком диапазоне конечных множеств. Наиболее общим способом задания конкретных множеств является указание некоторого свойства, которым должны обладать все элементы описываемого множества, и только они.

Эта идея реализуется следующим образом. Пусть рассматриваются только множества, являющиеся частью некоторого множества U. Свойство, которым обладают исключительно элементы данного множества A, обозначим через $P(x)$ и назовем **характеристическим свойством** или **коллективизирующим свойством**. Множество, заданное этим свойством, записывается в следующей форме:

$$A = \{x \in U:\ P(x)\}.$$

Пример 2: $A = \{x \in \mathbb{N}:\ x$ — делитель $36\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

Пример 3. Попытка определить множество $Y = \{X\ :\ X \notin X\}$ всех множеств, которые не являются элементами самих себя, приводит к противоречию. В самом деле, это множество не пусто. Например, множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел не есть действительное число. Пусть Y не является элементом самого себя, т.е. $Y \notin Y$. Тогда, поскольку Y есть множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя, $Y \in Y$. В то же время, если $Y \in Y$, должно выполняться $Y \notin Y$. Следовательно, мы доказали, что $Y \notin Y \iff Y \in Y$! Это противоречие приводит к парадоксу, называемому **парадоксом Рассела**. Он приводится иногда в такой "сказочно-шутливой" редакции: "В некоторой деревне живет брадобрей, который по долгу службы должен брить тех и только тех, кто не бреет себя сам". Брадобрей оказывается в незавидном положении: если он не будет себя брить, то тотчас окажется, что он должен себя брить, а следуя неумолимой инструкции, он немедленно должен прекратить бриться, ибо он будет брить себя сам, что запрещено.

Парадокс Рассела показывает, что интуитивное понимание множества позволяет трактовать идею множества настолько широко и расплывчато, что может привести к противоречиям. Чтобы избежать таких противоречий, вводят понятие **универсального множества** U. И предполагают, что рассматриваются только такие множества, элементы которых являются и элементами множества U.

1.2 Операции над множествами

Для любых двух множеств A и B определены новые множества, называемые **объединением**, **пересечением**, **разностью** и **симметрической разностью**:

$$A \cup B \ = \{x\colon\ x \in A \text{ или } x \in B\}, \qquad A \cap B \ = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \in B\},$$
$$A \setminus B \ = \{x\colon\ x \in A \text{ и } x \notin B\}, \qquad A \triangle B \ = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Введенные множества проиллюстрируем диаграммами Эйлера — Венна. **Диаграммами Эйлера — Венна** называют фигуры, условно изображающие множества. Иллюстрация введенных множеств представлена на рис. 1 (они отмечены штриховкой).

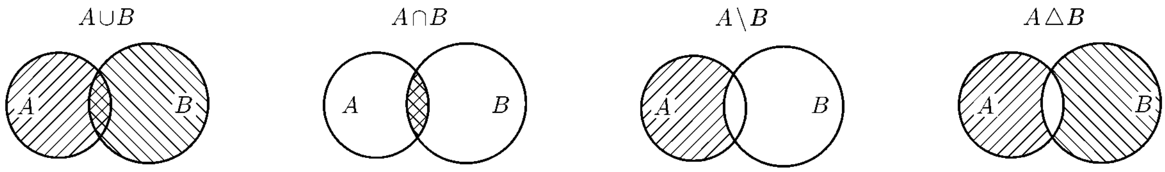

Рис. 1

Фиксируя универсальное множество U, мы можем определить **дополнение** $\overline{A}$ **множества** A следующим образом: $\overline{A} = U \setminus A$. Итак, дополнение множества A — это множество всех элементов универсального множества, не принадлежащих A.

Говорят, что B есть **подмножество** множества A, если всякий элемент B есть элемент A. Для обозначения используют запись: $B \subseteq A$. Говорят также, что B **содержится в** A, B **включено в** A, A **включает** B, имеет место **включение** $B \subseteq A$. Считают, что пустое множество есть подмножество любого множества и, если фиксировано некоторое универсальное множество, каждое рассматриваемое множество есть его подмножество.

Сопоставляя определение подмножества и определение равенства множеств, мы видим, что множество A равно множеству B тогда и только тогда, когда A есть подмножество B и наоборот, т.е.

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

Последняя формула является основой для построения доказательств о равенстве множеств. Ее применение состоит в следующем. Чтобы доказать равенство двух множеств X и Y, т.е. что $X = Y$, достаточно доказать два включения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, т.е. доказать, что из предположения $x \in X$ (для произвольного x) следует, что $x \in Y$, и, наоборот, из предположения $x \in Y$ следует, что $x \in X$. Такой метод доказательства теоретико-множественных равенств называют **методом двух включений**. Примеры применения этого метода мы дадим позже.

Если $B \subseteq A$, но $B \neq A$, то пишут $B \subset A$ и B называют **строгим подмножеством** (или **собственным подмножеством**) множества A, а символ $\subset$ — **символом строгого включения**.

Введенные выше операции над множествами обладают следующими свойствами:

1. $A \cup B = B \cup A$;

2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
9. $A \cup \varnothing = A$;
10. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
11. $A \cap U = A$;
12. $A \cup U = U$;
13. $A \cup \overline{A} = U$;
14. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
15. $A \cup A = A$;
16. $A \cap A = A$;
17. $\overline{\overline{A}} = A$;
18. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
19. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
20. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
21. $A \triangle B = B \triangle A$;
22. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Каждое из написанных выше равенств, верное для любых входящих в них множеств, часто называют **теоретико–множественным тождеством**. Любое из них может быть доказано методом двух включений.

Задача 1. Докажите этим методом тождество 19.

Для иллюстрации теоретико–множественных тождеств используются диаграммы Эйлера — Венна.

Пример 4. Рассмотрим свойство 8, которое называется **вторым законом де Моргана**. Универсальное множество будем изображать прямоугольником Ω. Заштрихованная на рис. 2,*a* область изображает множество $A \cap B$, а незаштрихованная часть прямоугольника Ω (внешняя по отношению к заштрихованной) соответствует множеству $\overline{A \cap B}$. На рис. 2,*б* части прямоугольника Ω, заштрихованные вертикально и множеству $\overline{A} \cup \overline{B}$ отвечает область, заштрихованная хотя бы одним из указанных способов. Она совпадает с областью, не заштрихованной на рис. 2,*а* и отвечающей множеству $\overline{A \cap B}$, что иллюстрирует свойство 8.

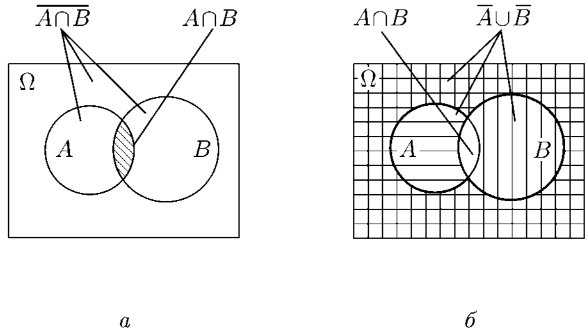

Рис. 2

Помимо метода двух включений для доказательства теоретико-множественных тождеств могут быть использованы другие методы, например **метод характеристических функций**.

Кроме того, теоретико-множественные тождества можно доказывать, используя ранее доказанные тождества для преобразования левой части к правой или наоборот. Такой метод доказательства часто называют **методом эквивалентных преобразований**.

Задача 2. Докажите этим методом тождество 22, пользуясь тождествами 1–19.

2 Элементы теории множеств II

См. [3, стр. 9–22].

2.1 Отображения множеств

Отображение (функция) f из множества A в множество B считается заданным, если каждому элементу $x \in A$ сопоставлен единственный элемент $y \in B$.

Отображение f из множества A в множество B обозначают записью $f\colon\ A \to B$. Множество A называют **областью определения функции** f и обозначают $D(f)$, множество B — **областью значений функции** f, элемент $x \in X$ — **аргументом функции**, а элемент $y \in Y$ — **зависимым переменным**. Элемент $y \in B$, который отображением f сопоставляется элементу $x \in A$, называют **образом элемента** x **при отображении** f или **значением функции** f **в точке** x и обозначают $f(x)$. При этом элемент $x \in A$ называют **прообразом элемента** y **при отображении** f.

Символы $\forall$ (**квантор общности**), $\exists$ (**квантор существования**) и $\exists!$ будем понимать как символы, заменяющие словосочетания:

1. Выражение "для всякого элемента x множества E" записывают в виде $\forall x \in E$. Эта запись означает, что утверждение, следующее за ней, будет выполнено для произвольного элемента множества E. Запись $\forall x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in E$ означает: "каковы бы ни были элементы $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ множества E".

2. Выражение "существует по крайней мере один элемент множества E, такой, что ..." записывают $\exists x \in E\colon \ldots$ Все, что следует за этой записью, выполняется хотя бы для одного элемента множества E. Наоборот, $\nexists x \in E\colon \ldots$ означает, что все следующее далее не выполняется ни для одного элемента из E.

3. Выражение "существует один и только один элемент из E, такой, что ..." записывают в виде $\exists!\, x \in E\colon \ldots$ Запись $\exists x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \in E\colon \ldots$ означает: "существуют такие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множества E, что ...".

Рассмотрим отображение $f\colon\ A \to B$. **Образом подмножества** $C \subseteq A$ называют множество

$$f(C) = \{y \in B\colon\ \exists x \in C \quad f(x) = y\}.$$

Прообразом подмножества $D \subseteq B$ называют множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in A\colon\ f(x) \in D\}.$$

Отображение f множества A в себя называют **тождественным**, если $f(x) = x$ при всех x из A. Отображение $f\colon\ A \to B$ называют **инъективным** (**инъекцией**), если из равенства $f(x) = f(x')$ следует $x = x'$. Называют **сюръективным** (**сюръекцией**), если его область значений совпадает со всем множеством B ($f(A) = B$). И наконец, называют **биективным** (**биекцией**), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Таким образом, если отображение $f\colon\ A \to B$ биективно, то каждому элементу множества A отвечает единственный элемент множества B и наоборот. Тогда говорят, что множества A и B находятся между собой во **взаимно однозначном соответствии**.

Для функций $f\colon\ A \to B$ и $g\colon\ A \to B$ в случае $B \subseteq \mathbb{R}$ вводят арифметические операции:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x),\ (f-g)(x) = f(x)-g(x),\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

при этом операция деления определяется только в точках x, где $g(x) \neq 0$.

Множество всех отображений из A в B будем обозначать как B^A. Множество всех подмножеств множества U называют **булеаном множества** U и обозначают 2^U:

$$2^U = \{A\colon\ A \subseteq U\}.$$

Характеристическая функция χ_A **множества** $A \subseteq U$ есть функция, отображающая универсальное множество U в двухэлементное множество $\{0; 1\}$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Из определений вытекает справедливость тождеств

$$\begin{array}{ccc} \chi_A^2 = \chi_A, & \chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B, & \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B, \\ \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A, & \chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B, & \chi_{A\,\triangle\,B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B(x). \end{array}$$

Теорема 1. Отображение $2^U \quad\to\quad \{0; 1\}^U$, которое сопоставляет подмножеству $A \subseteq U$ его характеристическую функцию χ_A, есть биекция.

Задача 1. Докажите теорему.

Метод характеристических функций доказательства справедливости теоретико–множественных тождеств заключается в выражении характеристических функций обеих частей тождества через характеристические функции входящих в него множеств. При этом используются указанные свойства характеристических функций. По теореме 1 тождество верно тогда и только тогда, когда характеристические функции левой и правой частей совпадают.

Функция g есть **обратная к функции** f, если $x = g(y) \iff y = f(x)$. Обозначения: $g = f^{-1}$.

Пусть $f\colon A \to B, g\colon C \to D, B \subseteq C$. Тогда определено отображение $g \circ f\colon A \to D, (g \circ f)(x) = g(f(x))$, которое называют **композицией отображений (сложной функцией)** f и g.

Теорема 2. Отображение f^{-1} — обратное к отображению $f \iff f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f$ — тождественные отображения.

Задача 2. Докажите теорему.

Задача 3. Докажите, что отображение $f\colon A \to B$ имеет обратное $f^{-1}\colon B \to A$ т. и т.т., к. f — биекция.

Задача 4. Докажите, что композиция $g \circ f$ биекций $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ есть биекция.

2.2 Семейства множеств

Пусть U — универсальное множество, I — произвольное множество (никак не связанное с U), а каждому элементу $i \in I$ однозначно сопоставлено подмножество $A_i \subseteq U$. Тогда говорят, что задано **(индексированное) семейство множеств** $(A_i)_{i \in I}$. Множество I называют множеством индексов, а множества A_i — элементами семейства $(A_i)_{i \in I}$.

Таким образом, семейство $(A_i)_{i \in I}$ определено, если задано отображение $:\ I \to 2^U$.

В случае $I = \mathbb{N}$ получаем последовательность множеств, или **счетное семейство множеств**; если множество I конечно, получаем **конечное семейство множеств**.

Операции объединения и пересечения множеств можно распространить на произвольные семейства множеств.

1. **Объединение семейства множеств**:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x\colon\ \exists i\ x \in A_i\}.$$

2. **Пересечение семейства множеств**:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x\colon\ \forall i\ x \in A_i\}.$$

Справедливы следующие тождества:

1. $A \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cup B_i)$;

2. $A \cap \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cap B_i)$;

3. $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$;

4. $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$;

5. $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A}_i$;

6. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A}_i$.

Эти свойства нетрудно доказать методом двух включений.

Задача 5. Докажите второе и третье тождества.

2.3 Декартовы произведения

Пусть A и B — произвольные множества. **Упорядоченная пара** на множествах A и B, обозначаемая записью $(a;b)$, определяется элементами $a \in A$ и $b \in B$, а также порядком, в котором они записаны. Если $A = B$, то говорят об упорядоченной паре на множестве A. Две упорядоченные пары $(a;b)$ и $(a';b')$ на множествах A и B называют **равными**, если $a = a'$ и $b = b'$.

Упорядоченную пару $(a;b)$ не следует связывать с множеством $\{a;b\}$, так как упорядоченная пара характеризуется не только составом, но и порядком элементов в ней.

Простейший и важнейший пример упорядоченных пар — это система координат в аналитической геометрии.

Обобщением понятия упорядоченной пары является **упорядоченный n–набор** или **кортеж**. Говорят также: **упорядоченная n–ка** (например, упорядоченная тройка, четверка, пятерка и т.д.). В отличие от конечного множества $\{a_1;\dots;a_n\}$ кортеж $(a_1;\dots;a_n)$ на множествах $A_1, \dots, A_n$ характеризуется не только входящими в него элементами $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$, но и порядком, в котором они перечисляются.

Два кортежа $(a_1;\dots;a_n)$ и $(b_1;\dots;b_n)$ на множествах $A_1, \dots, A_n$ равны, если $a_i = b_i$, $i = 1,\dots,n$.

Число n называется **длиной кортежа** (или **размерностью кортежа**), а элемент a_i — i–й **проекцией (компонентой) кортежа**. Для двух кортежей одинаковой размерности их компоненты с одинаковыми номерами называют **одноименными компонентами**. Определение равенства кортежей можно переформулировать так: два кортежа одинаковой размерности равны тогда и только тогда, когда их одноименные компоненты совпадают.

Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1, \dots, A_n$ называют **декартовым (прямым) произведением множеств** $A_1, \dots, A_n$ и обозначают $A_1 \times \dots \times A_n$.

Таким образом,

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1;\dots;a_n) : \; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Если все множества A_i, $i = 1, \ldots, n$, равны между собой, то указанное декартово произведение называют n–й **декартовой степенью множества** A и обозначают A^n. В частности, при $n = 2$ получаем **декартов квадрат**, а при $n = 3$ — **декартов куб** множества A.

По определению полагают, что первая декартова степень любого множества A есть само множество A, т.е. $A^1 = A$.

Декартово произведение имеет следующие свойства:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

3. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

Эти свойства нетрудно доказать **методом двух включений**. Из последнего тождества вытекает, что пустое множество при построении декартовых произведений множеств играет ту же роль, что и нуль при умножении чисел.

Каждое отображение $f\colon\ A \to B$ однозначно определяет множество упорядоченных пар $\{(x, y) \in A \times B\colon\ x \in A,\ y = f(x)\}$, называемое **графиком отображения** f.

График обратной функции f^{-1} получается из графика функции f зеркальным отражением относительно прямой $y = x$.

Пример 1. $\arcsin x$.

3 Числовые множества

См. [З, стр. 33–55, 68–70], [АСЧ, стр. 27–28], [К, стр. 43].

3.1 Множество действительных чисел

Дадим геометрическую интерпретацию вещественных чисел. Говорят, что на прямой задана **система отсчета**, если на этой прямой фиксированы две различные точки (точки O и e на рис. 3). Точку O называют началом отсчета, а длина отрезка Oe задает единицу масштаба, т.е. полагаем: $|Oe| = 1$. Прямую с заданной системой отсчета называют **координатной осью**. Ее обычно обозначают Ox. Точка O делит координатную ось на две части: положительную полуось, где лежит точка e, и отрицательную полуось. **Координатой точки** M на оси Ox называют длину отрезка OM, взятую со знаком $+$, если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком $-$, если точка M лежит на отрицательной полуоси.

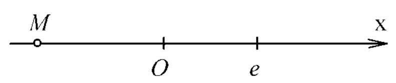

Рис. 3

Каждой точке M на оси Ox соответствует действительное число x, а именно, ее координата. И обратно, каждому действительному числу на оси Ox соответствует точка, для которой это действительное число является ее координатой.

Всякий раз, когда это потребуется, будем считать, что между действительными числами и точками некоторой прямой установлено такого рода соответствие. Таким образом, совокупность всех действительных чисел можно рассматривать как **числовую прямую**. Иногда вместо числовой прямой используют также термин "вещественная прямая". Отождествление действительных чисел с точками на числовой прямой будет в дальнейшем полезным, так как служит вспомогательным средством для понимания и мотивировки введения новых понятий. Числовую прямую, как и множество действительных чисел, обозначают через $\mathbb{R}$.

Свойства вещественных чисел (см. [3, стр. 33–41]).

Аксиома полноты. Если A и B — такие непустые подмножества $\mathbb{R}$, что для любых элементов $x \in A$ и $y \in B$ выполнено $x \leqslant y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in A$ и $y \in B$.

Абсолютным значением (или **модулем**) $|a|$ любого действительного числа a называют действительное число, удовлетворяющее условиям

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что абсолютное значение любого действительного числа неотрицательно ($|a| \geqslant 0$), а также

$$|a| = |-a|, \qquad -|a| \leqslant a \leqslant |a|, \qquad |a| \geqslant -a.$$

Геометрически $|a|$ соответствует расстоянию между точками числовой прямой, изображающими числа 0 и a.

Расстояние между точками a и b равно $|a - b|$.

Неравенство треугольника: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Числовые множества — множества точек на прямой. Подмножество X множества действительных чисел называют **промежутком**, если вместе с любыми двумя числами x_1, x_2 это подмножество содержит любое x, заключенное между ними. Используют промежутки следующих видов ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$):

$(a, b) = \{x\colon\ a < x < b\}$ — **открытый промежуток**, или **интервал**;

$[a, b] = \{x\colon\ a < x < b\}$ — **замкнутый промежуток**, или **отрезок**;

$(a, b] = \{x\colon\ a < x \leqslant b\}$ и $[a, b) = \{x\colon\ a \leqslant x < b\}$ — **полуинтервалы**;

$(a, +\infty) = \{x\colon\ x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x\colon\ x < b\}$ и $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — **бесконечные интервалы**;

$[a, +\infty) = \{x\colon\ x \geqslant b\}$, $(-\infty, b] = \{x\colon\ x \leqslant b\}$ — **бесконечные полуинтервалы**

Открытое множество — любое объединение интервалов (конечных или бесконечных).

Множество **замкнутое**, если его дополнение (в $\mathbb{R}$) открытое.

Окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ — любое открытое множество, содержащее a. Обозначение: $U(a)$.

Выколотая (проколотая) окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ — такое множество $\dot{U}(a)$, что $a \notin \dot{U}(a)$, а $\dot{U}(a) \cup \{a\}$ есть окрестность точки a.

Множество $\{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называют ε**–окрестностью точки** a и обозначают $U_\varepsilon(a)$, а множество

$$\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

называют **выколотой (проколотой) ε-окрестностью точки** a.

Если $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2]$, то отрезок $[a_2, b_2]$ называют **вложенным** в отрезок $[a_1, b_1]$.

Теорема о вложенных отрезках. Для всякой системы вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Док–во следует из аксиомы полноты. Действительно, для любых двух отрезков $[a_m, b_m]$, $[a_n, b_n]$ нашей системы имеет место $a_m \leqslant b_n$. В противном случае мы получили бы $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, т. е. отрезки $[a_m, b_m]$, $[a_n, b_n]$ не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) вложен в другой.

Таким образом, для числовых множеств $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, B = \{b_m : m \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется такое число с $\in \mathbb{R}$, что $a_n \leqslant c \leqslant b_m$ для любых элементов $a_n \in A$ и $b_m \in B$. В частности, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но это и означает, что точка с принадлежит всем отрезкам данной системы. $\triangleright$

3.2 Ограниченные числовые множества, их точные грани

Пусть B — подмножество $\mathbb{R}$. Тогда

$a \in \mathbb{R}$ — **верхняя грань множества** B, а множество B называют **ограниченным сверху** $\iff$ $\forall x \in B \ \ x \leqslant a$.

$a \in \mathbb{R}$ — **нижняя грань множества** B, а множество B называют **ограниченным снизу** $\iff$ $\forall x \in B \ \ x \geqslant a$.

Множество B ограниченное сверху и снизу называют **ограниченным**.

$a \in B$ — **максимальный элемент** множества B $\iff$ $\forall x \in B \ x \leqslant a$; Обозначение: $a = \max B$.

$a \in B$ — **минимальный элемент** множества B $\iff$ $\forall x \in B \ x \geqslant a$; Обозначение: $a = \min B$.

$a \in \mathbb{R}$ — **точная верхняя грань множества** B $\iff$ a — минимальный элемент множества всех верхних граней множества B. Обозначение: $a = \sup B$.

$a \in \mathbb{R}$ — **точная нижняя грань множества** B $\iff$ a — максимальный элемент множества всех нижних граней множества B. Обозначение: $a = \inf B$.

Пример 1. $B = (0, 1]$. $1 = \max B = \sup B$. $0 = \inf B$, $\min B$ не существует.

Пример 2. $B = (0, +\infty)$. $\sup B$ не существует.

Задача 1. Докажите, что максимальный (минимальный) элемент множества, если он существует, является единственным.

Задача 2. Докажите, что максимальный (минимальный) элемент множества, если он существует, является точной верхней (нижней) гранью множества.

Теорема о точных гранях. Ограниченное сверху (снизу) непустое подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Док–во следует из аксиомы полноты. А именно, пусть $X \subset \mathbb{R}$ — данное подмножество, а Y — множество верхних граней X. По условию, $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$.

Тогда в силу аксиом полноты существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Число c, таким образом, является верхней гранью множества X и нижней гранью множества Y. Как верхняя грань X, число c является элементом Y, но как нижняя грань Y, число с является минимальным элементом множества Y. Итак, $c = \min Y = \sup X$.

3.3 Натуральные числа

Свойство: $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$.

Свойство Архимеда. Каково бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n > a$.

Доказательство этого свойства будет приведено в §4 (см. пример 5).

Следствие. Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число n, что $na > b$.

Док–во. Согласно свойству Архимеда для числа b/a существует такое натуральное n, что $n > b/a$. Это число n искомое, так как, умножая неравенство $n > b/a$ на положительное число a, получаем $na > b$.

Это следствие имеет простой геометрический смысл: если взять два отрезка соответственно длин a и b, $0 < a < b$, то последовательно откладывая на большем отрезке от одного из его концов меньший отрезок, мы через конечное число шагов выйдем за пределы большего отрезка.

4 Элементы математической логики

См. [3, стр. 1–3, 29–30].

Логика — наука о законах построения правильных рассуждений.

4.1 Высказывания и операции над ними

Понятие **высказывания** не определяется строго. Указывается только, что высказывание — это предложение, которое может быть истинным или ложным.

Примеры: 1) $1 = \sup(0,1)$; 2) $2 = \sup(0,1)$; 3) $a = \sup(0,1)$.

5 Операций над высказываниями: и, или, $\Rightarrow$, $\iff$, не.

Некоторые законы логики:

(1) Закон отрицания противоречия: (не (не $\mathcal{A}$)) $\iff$ $\mathcal{A}$.

(2) Закон исключенного третьего: $\mathcal{A}$ или (не $\mathcal{A}$).

(3) Правило цепного заключения.

(4) Закон контрапозиции.

(5) Правило построения отрицания сложных логических высказываний, содержащих кванторы:

если в символьную запись утверждения $\mathcal{A}$ входят кванторы $\exists, \forall$ и условие P, то при построении символьной записи противоположного утверждения "не $\mathcal{A}$" квантор $\exists$ заменяют на $\forall$ квантор $\forall$ — на $\exists$, а условие P заменяют на условие "не P".

Например, рассмотрим утверждение $\exists x \in E : P(x)$ (существует элемент x множества E, обладающий свойством $P(x)$) и построим его отрицание. Если это утверждение неверно, то указанного элемента не существует, т.е. для каждого $x \in E$ свойство $P(x)$ не выполняется, или

$$\text{не } (\exists x \in E : P(x)) \quad = \quad \forall x \in E : \quad \text{не } \ P(x).$$

Теперь построим отрицание утверждения $\forall x \in E : P(x)$ (для каждого элемента x множества E имеет место свойство $P(x)$). Если данное утверждение неверно, то свойство $P(x)$ имеет место не для каждого элемента указанного множества, т.е. существует хотя бы один элемент $x \in E$, не обладающий этим свойством, или

$$\text{не } (\forall x \in E : P(x)) \quad = \quad \exists x \in E : \quad \text{не } \ P(x).$$

Если кванторов несколько, то данное правило применяется несколько раз.

Задача 1. Используя правило построения отрицания высказываний с кванторами, сформулировать определение неограниченного множества.

4.2 Теоремы и их доказательства

Любую математическую теорему можно представить в виде истинного высказывания вида $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ или $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$. Так как высказывание $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ означает $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B}$, то любая теорема представляет собой одну или несколько импликаций.

Для теоремы $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ высказывание $\mathcal{A}$ называют **условием или посылкой**, а $\mathcal{B}$ — **следствием или заключением теоремы**. Говорят также: $\mathcal{A}$ — **достаточное условие для** $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ — **необходимое условие для** $\mathcal{A}$.

Любая современная математическая теория строится как последовательность определений, аксиом и теорем, которые представляют собой формулировки свойств изучаемых объектов. Определения и аксиомы не требуют доказательства, а каждая последующая теорема доказывается с использованием только определений, аксиом и уже доказанных теорем.

Прямое доказательство теоремы вида $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ представляет собой последовательность импликаций $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{B}$, причем каждая импликация есть определение, аксиома, уже доказанная теорема или закон логики.

Пример 4: доказательство теоремы о вложенных отрезках с использованием аксиомы полноты.

Метод доказательство "от противного": для доказательства таким методом теоремы $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ предполагают, что $\mathcal{B}$ не верно (противное). Если рассуждения приводят к тому, что при таком предположении условие $\mathcal{A}$ невыполнимо, т.е. возникает противоречие, то теорему считают доказанной.

Пример 5. Докажем методом "от противного" свойство Архимеда. Предположим "противное": свойство Архимеда не выполняется. Это означает, что существует такое число a, что для всех натуральных n выполняется неравенство $n \leqslant a$. Т.е. число a ограничивает сверху множество натуральных чисел. Поэтому множество натуральных чисел, как всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет конечную верхнюю грань (см. теорему о верхней грани). Обозначим ее через p: $p = \sup \mathbb{N}$.

Заметим, что число $p-1$ не может быть верхней гранью множества $\mathbb{N}$, так как $p = \sup \mathbb{N}$ — минимальная верхняя грань множества $\mathbb{N}$, а $p-1 < p$. Поэтому существует такое натуральное число n, что $n > p-1$. Но тогда $n+1 > p$, причем согласно определению натуральных чисел $n+1 \in \mathbb{N}$. Неравенство $n+1 > p$ противоречит тому, что $p = \sup \mathbb{N}$, так как точная верхняя грань множества ограничивает его сверху. Полученное противоречие показывает, что указанного числа a не существует, т.е. свойство Архимеда справедливо. $\triangleright$

Задача 2. Докажите, что промежутками являются только конечные или бесконечные интервалы, конечные или бесконечные полуинтервалы и отрезки. Используйте для этого теорему о точной грани и рассмотрите случаи, когда промежуток ограничен и неограничен сверху (снизу), точная грань принадлежит и не принадлежит промежутку.

4.3 Метод доказательства "по индукции"

Описание метода: пусть необходимо доказать утверждение 0) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}(n)$.

Доказывают:

1) $\mathcal{A}(1)$;

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}(n) \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(n+1)$.

Обоснование метода: из 1) и 2) следует 0), так как: $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{A}(1) \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(2) \;\Rightarrow \ldots \Rightarrow\; \mathcal{A}(k)$.

Пример 6. Докажем методом математической индукции формулу бинома Ньютона. Для записи этой формулы введем следующие обозначения. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно обозначают через $n!$ и называют "n–**факториал**". При этом полагают по определению $0! = 1$. Числа

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

называют **биномиальными коэффициентами**. Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \tag{1}$$

Для док–ва ее заметим сначал, что из определения следует, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1 \quad \text{и}$$

Лемма.

$$1 \leqslant k \leqslant n \quad \Rightarrow \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Док–во леммы.

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Док–во формулу бинома Ньютона. При $n = 1$ формула (1) имеет вид $(a+b)^1 = a+b$ и очевидна. В предположении справедливости этой формулы для порядка n получаем:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = \\
&= (a+b)(a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n) = \\
&= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k+1}b^k + \ldots + C_n^n ab^n = \\
&= \qquad\qquad a^n b + C_n^1 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_n^{k-1} a^{n-k+1}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^n + C_n^n b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k + \ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Мы раскрыли скобки, объединили слагаемые, содержащие одинаковые степени a, b, и воспользовались леммой. Таким образом, по индукции установлена справедлпвость формулы бинома Ньютона. $\triangleright$

Задача 3. Применив метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $(1+x)^n > 1 + nx$ (**неравенство Бернулли**) для всех $x > -1$, $x \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

5 Мощность множеств

О количестве элементов множества можно говорить только для конечных множеств, а для бесконечных говорят о мощности множества. Множество A **равномощно множеству** B, если существует биекцпя $f\colon\ A \to B$.

Примеры. 1. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и целых чисел $\mathbb{Z}$ равномощны (док–во).
2. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ равномощны (док–во позже).

Из того, что существует биекцпя $f\colon\ A \to B$, следует, что существует отображение $f^{-1}\colon\ B \to A$, которое также есть биекция. Поэтому если A равномощно B, то и B равномощно A, и мы можем говорить, что множества A и B равномощны. Факт равномощности множеств A и B будем заиисывать так: $A \sim B$. Из определения равномощности и свойств биекции также следует, что для любого множества A имеет место $A \sim A$ (тождественное отображение есть биекция множества A на себя); а для любых множеств A, B, C из $A \sim B$ и $B \sim C$ следует $A \sim C$ (композиция биекций есть биекция).

Обозначим через $|A|$ семейство множеств, равномощных множеству A. Утверждение о равномощности множеств A и B можно записать так: $|A| = |B|$. Семейство $|A|$ называют **мощностью множества** A.

Теорема 1. $A = \{a_1; \ldots; a_n\} \sim B = \{b_1; \ldots; b_m\} \quad \Longleftrightarrow \quad n = m.$

Задача 1. Докажите эту теорему.

Мощностью конечного множества $A = \{a_1; \ldots; a_n\}$ можно считать натуральное число n, так как, задавая такое число, мы задаем и класс всех (попарно равномощных) множеств вида $\{a_1; \ldots; a_n\}$. Обратно, каждый такой класс однозначно определяет натуральное число n как число элементов в каждом множестве данного класса. Будем писать: $|A| = n$. Естественно считается, что мощность пустого множества равна нулю: $|\varnothing| = 0$.

Задача 2. Докажите, что если A — конечное множество, то $|2^A| = 2^{|A|}$.

Задача 3. Докажите, что если A, B — конечное множество, то $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Перейдем теперь к исследованию мощности бесконечных множеств. Таковы хорошо известные нам числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Любое множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называют **счетным**. Любую биекцию $\nu\colon \mathbb{N} \to M$ называют **нумерацией** счетного множества M; если элемент M есть $\nu(n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то этот элемент M обозначаем через a_n, называя натуральное число n номером элемента a_n относительно данной нумерации ν.

Теорема 2. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Док–во. Пустое подмножество конечно по определению. Пусть M — счетное множество, а B — его некоторое непустое подмножество. Поскольку множество M счетно, можно считать, что задана некоторая его нумерация. Следовательно, каждый элемент подмножества B имеет свой номер. Запишем номера элементов множества B в порядке возрастания: $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ Если среди них есть наибольший номер i_p, то подмножество B конечно. В противном случае получим счетное подмножество $\{a_{i_1}; a_{i_2}; \ldots; a_{i_n}; \ldots\}$, нумерация которого установлена так: $\nu(n) = a_{i_n}$. $\triangleright$

Теорема 3. Объединение конечного или счетного семейства счетных множеств счетно.

Док–во. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — конечное или счетное семейство счетных множеств. Рассмотрим сначала случай, когда множества A_i попарно не пересекаются.

В этом случае нумерация объединения конечного семейства счетных множеств может быть проведена по схеме, изображенной на рис. 4, а нумерация объединения счетного семейства счетных множеств — по схеме, приведенной на рис. 5.

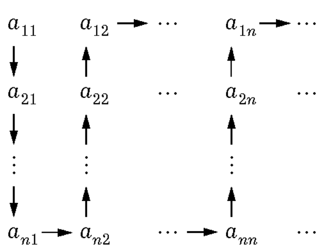

Рис. 4

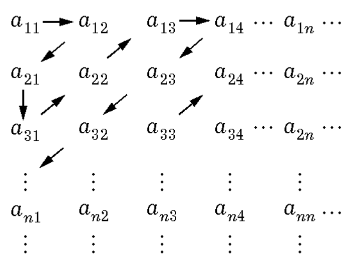

Рис. 5

Пусть теперь $\{A_i\}_{i\in I}$ — произвольное конечное или счетное семейство счетных множеств, т.е. множества A_i могут пересекаться. В этом случае, применяя указанные на рис. 4 и рис. 5 схемы нумерации к конечному или счетному объединению счетных множеств, следует пропускать каждый раз элементы, которые уже получили номера. $\triangleright$

Теорема 4. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

Док–во. Каждому рациональному числу, представленному несократимой дробью $\frac{a}{b}$, однозначно соответствует упорядоченная пара $(a; b)$, и, напротив, любая упорядоченная пара $(a; b)$ взаимно простых целых чисел a и $b > 0$, однозначно определяет несократимую дробь $\frac{a}{b}$ и, значит, рациональное число. Следовательно, множество $\mathbb{Q}$ равномощно некоторому бесконечному подмножеству множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $A_i = \{(j; i) : j \in \mathbb{Z}\}$ упорядоченных пар. Это множество счетно (см. пример 1). Имеем

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Откуда, согласно теореме 3, вытекает счетность множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ как счетного объединения счетных множеств. Из теоремы 2 вытекает, что любое его бесконечное подмножество счетно. Таким образом, множество $\mathbb{Q}$ счетно. $\triangleright$

Следующая теорема обобщает теорему 4. Приведем ее без доказательства.

Теорема о квадрате. Для любого бесконечного множества M его декартов квадрат $M \times M$ равномощен самому множеству M.

Теорема 5. **(Теорема Кантора).** Множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ не есть счетное множество.

Док–во. Пусть множество $[0, 1]$ счетное. Тогда существует биекция $\varphi \colon \mathbb{N} \to [0, 1]$. Представим действительные числа отрезка $[0, 1]$ в двоичной системе счисления, считая $1 = 0.111\ldots$. Выпишем все числа $\varphi(n)$:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi(1) & = & 0.\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}\ldots, \\
\varphi(2) & = & 0.\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(n) & = & 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn}\ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Построим число $\beta = 0.\beta_1\ldots\beta_n\ldots$ из $[0, 1]$: положим $\beta_i = 1$, если $\alpha_{ii} = 0$, и $\beta_i = 0$, если $\alpha_{ii} = 1$. Ясно, что это число не совпадает ни с одним числом вида $\varphi(n)$, а это противоречит допущению, что любое число из $[0, 1]$ есть $\varphi(k)$ для некоторого k. Поэтому отрезок $[0, 1]$ не является счетным. $\triangleright$

Итак, $\mathbb{N}$ не равномощно $[0, 1]$. В то же время $[0, 1]$ содержит подмножество чисел, в двоичной записи которых только один член отличен от нуля. Это подмножество равномощно самому $\mathbb{N}$. Следовательно, множество $[0, 1]$ бесконечно, но не равномощно счетному множеству. Мощность отрезка $[0, 1]$ называют **мощностью континуума**, а любое множество, равномощное отрезку $[0, 1]$, называют **множеством мощности континуума** или **континуальным множеством**.

Задача 4. Докажите, что если A — бесконечное множество, а B — его конечное подмножество, то $A \sim A \setminus B$.

Задача 5. Докажите, что следующие множества равномощны:

$$[0, 1] \sim (0, 1) \sim [a, b] \sim \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}\ (a < b).$$

Мощность множеств можно в определенном смысле сравнивать, говоря о большей или меньшей мощности. Считают, что мощность множества A не превышает мощность множества B ($|A| \leqslant |B|$), если A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Мощность множества A считается строго меньшей мощности множества B ($|A| < |B|$), если множества A и B неравномощны и существует собственное подмножество C множества B, равномощное множеству A, т.е. $(A \not\sim B)$ и $(\exists C \subset B)(A \sim C)$.

Приведем следующую теорему без доказательства.

Теорема Кантора — Бернштейна. Для любых двух множеств A и B имеет место в точности одно из следующих трех условий: либо $|A| < |B|$, либо $|B| < |A|$, либо $|B| = |A|$.

Из этой теоремы следует, что любые два множества сравнимы по мощности. А из теоремы 2 и определений следует, что мощность счетного множества является наименьшей среди мощностей бесконечных множеств. Можно сказать, что всякое бесконечное множество не менее чем счетно. Наконец, из теоремы Кантора вытекает, что $|\mathbb{N}| < |[0, 1]|$.

Теорема 5 обобщается следующим образом.

Теорема 6. Для любого множества A верно неравенство $|2^A| > |A|$.

Доказательство см. [3, стр. 26].

В силу этой теоремы нет наибольшей мощности, так как для любого множества A существует множество большей мощности — его булеан.

6 Предел числовой последовательности

См. [3, стр. 77–80].

6.1 Определение и примеры

Если каждому номеру $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено единственное число $x_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана **числовая последовательность**, которая обозначается через $\{x_n\}$. При этом число x_n называют n**–ым элементом последовательности**, число x_{n+1} — **следующим** за x_n, а x_{n-1} — **предшествующим** x_n.

В вычислительных алгоритмах последовательность отражает ход процесса последовательных приближений к искомому решению, а при измерении какой-либо физической величины или параметра технического объекта различными способами и с различной точностью последовательность результатов характеризует их близость к истинному значению.

Последовательность можно рассматривать как отображение $n \mapsto x_n$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. Образ этого отображения называют **множеством последовательности**. Отличие понятия последовательности от множества в том, что в множестве порядок элементов не определен, а в последовательности определен.

Примеры: 1) $\{x_n = c\}$; 2) $\{1/n\}$; 3) $\{q^n\}$.

Последовательность называют **ограниченной (сверху, снизу)**, если ее множество ограничено (сверху, снизу). Последовательность называют **постоянной**, если ее множество состоит из одного элемента.

Точку $b \in \mathbb{R}$ числовой прямой называют **пределом последовательности** $\{x_n\}$ и обозначают $b = \lim x_n$ (или $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, или "$x_n \to b$ при $n \to \infty$"), если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое натуральное число N, что начиная с номера $n = N + 1$ все элементы последовательности попадают в ε–окрестность точки b, т.е.

$$b = \lim\{x_n\} \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ (n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon). \qquad (1)$$

В общем случае N зависит от ε, на что указывает в (1) обозначение $N(\varepsilon)$. Как правило, чем меньше число ε, тем больше N.

Последовательность, для которой существует какой либо предел, называют **сходящейся** (**сходящейся к точке** b), а если никакого предела нет, то — **расходящейся**.

Определение по геометрическому смыслу означает, что какой бы малый интервал длины 2ε с центром в точке b ни взять на числовой прямой, все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N+1$, должны попадать в этот интервал (рис. 6). Вне его будет только конечное число элементов последовательности.

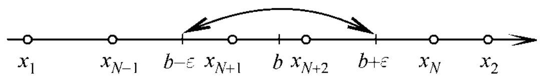

Рис. 6

Отсюда следует, что добавление к последовательности конечного числа элементов или исключение из нее конечного числа элементов не влияет на ее сходимость и значение ее предела, изменяется лишь номер, начиная с которого все элементы последовательности попадают в выбранную ε–окрестность точки b.

Пример 1. Для постоянной последовательности $\lim x_n = c$. В самом деле, $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому в (1) в качестве N можно выбрать любое натуральное число.

Пример 2. $\lim \frac{1}{n} = 0$. Действительно, при произвольном $\varepsilon > 0$ предположим, что $|1/n - 0| < \varepsilon$. Это эквивалентно неравенству $n > 1/\varepsilon$. Полагая $N = [1/\varepsilon]$ (целая часть числа $1/\varepsilon$), получаем нужное условие (1).

Пример 3. Проверим, что $\lim q^n = 0$ при $|q| < 1$. Для $0 < \varepsilon < 1$ предположим, что $|q^n - 0| < \varepsilon$, т.е. $|q|^n < \varepsilon$. Из свойств логарифма следует, что $\log_a a^n = n$ и $n = \log_a |q|^n > \log_a \varepsilon$ при $a = |q| < 1$. Поэтому для выполнения условия (1) достаточно выбрать $N = [\log_a(\varepsilon)]$.

6.2 Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Док–во. Пусть у сходящейся последовательности $\{x_n\}$ по меньшей мере два предела b_1 и b_2, причем $b_1 \neq b_2$. Тогда, по определению предела,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}: \quad \big(|x_n - b_1| < \varepsilon \quad \forall n > N_1\big) \wedge \big(|x_n - b_2| < \varepsilon \quad \forall n > N_2\big).$$

Примем $\varepsilon = |b_2 - b_1|/3$ и при $n > \max\{N_1; N_2\}$ из неравенства треугольника следует, что

$$|b_2 - b_1| = |x_n - b_1 + b_2 - x_n| \leqslant |x_n - b_1| + |x_n - b_2| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}\,|b_2 - b_1|.$$

В итоге приходим к противоречию: $|b_2 - b_1| < 2\,|b_2 - b_1|/3$. Поэтому $b_1 = b_2$, что означает единственность предела сходящейся последовательности (это очевидно, если вспомнить геометрический смысл предела последовательности; в самом деле, нельзя, начиная с некоторого номера, уложить все последующие элементы последовательности в две непересекающиеся окрестности двух точек).

Теорема 2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена, т.е.

$$\exists \lim\{x_n\} \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \exists M > 0: \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Док–во. Из определения следует, что для сходящейся последовательности с пределом $b \in \mathbb{R}$ в его ε–окрестность $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ попадают все элементы x_n начиная с определенного номера $N+1$. Выберем

$$M = \max\{|x_1|; |x_2|; \ldots; |x_N|; |b-\varepsilon|; |b+\varepsilon|\}.$$

Тогда $|x_n| \leqslant M \ \forall n \in \mathbb{N}$, что отвечает условию определения ограниченной последовательности. $\triangleright$

Пример 4: последовательность $\{q^n\}$ при $|q| > 1$ неограничена, и поэтому не имеет предела.

Теорема 3 (**арифметические свойства пределов последовательностей**). Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся соответственно к пределам a и b, то

$$\begin{aligned}
&1)\quad \lim(x_n + y_n) = a + b,\\
&2)\quad \lim(x_n y_n) = ab,\\
&3)\quad \lim(c x_n) = ca,\\
&4)\quad \lim(x_n / y_n) = a/b, \quad \text{если } b \neq 0.
\end{aligned}$$

Док–во позже.

7 Теоремы существования пределов последовательностей

7.1 Критерий Коши сходимости последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называют **фундаментальной**, если для любого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что абсолютное значение разности любых двух ее элементов с номерами, большими N, меньше ε, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (**критерий Коши**). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Док–во. Необходимость. По определению, для сходящейся к пределу $b \in \mathbb{R}$ последовательности имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда с учетом неравенства треугольника $\forall m > N$ получим

$$|x_n - x_m| = |(x_n - b) - (x_m - b)| \leqslant |x_n - b| + |x_m - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что соответствует определению фундаментальной последовательности.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Согласно определению по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N(\varepsilon)$, такой, что из $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ следует $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$. Тогда, приняв $m = N$, получим

$$\forall n > N \qquad x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Поскольку рассматриваемая последовательность имеет конечное число элементов с номерами, не превосходящими N, из (1) следует, что фундаментальная последовательность ограничена. Для множества значений ограниченной последовательности существуют точные нижняя и верхняя грани. Для множества значений элементов при $n > s, s \in \mathbb{N}$, обозначим эти грани $a_s = \inf\limits_{n>s} x_n$ и $b_s = \sup\limits_{n>s} x_n$ соответственно. С увеличением s точная нижняя грань не уменьшается, а точная верхняя грань не увеличивается, т.е.

$$a_s \leqslant a_{s+1} \leqslant b_{s+1} \leqslant b_s,$$

и получаем систему вложенных отрезков

$$[a_N, b_N] \supseteq [a_{N+1}, b_{N+1}] \supseteq \ldots \supseteq [a_{N+k}, b_{N+k}] \supseteq \ldots, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По теореме о вложенных отрезков существует общая точка, которая принадлежит всем отрезкам. Обозначим ее через b. Таким образом, $\forall k \in \mathbb{N}$ $a_{N+k} \leqslant b \leqslant b_{N+k}$, а при $n > N + k$ из определения a_s, b_s получаем, что $a_{N+k} \leqslant x_n \leqslant b_{N+k}$. Отсюда при $n > N + k$

$$|b - x_n| \leqslant b_{N+k} - a_{N+k}. \tag{2}$$

Теперь из (1) и определения a_s, b_s следует

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant a_{N+k} \leqslant b_{N+k} \leqslant x_N + \frac{\varepsilon}{3},$$

или

$$b_{N+k} - a_{N+k} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \tag{3}$$

Из сравнения (2) и (3) в итоге получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \Rightarrow |b - x_n| < \varepsilon),$$

что соответствует определению предела последовательности, т.е.

$$\exists \lim\{x_n\} \quad \text{и} \quad \lim\{x_n\} = b \in \mathbb{R}. \qquad \triangleright$$

Пример 1. Последовательность $\{(-1)^n\}$ не является фундаментальной, поэтому не имеет предела.

7.2 Монотонные последовательности

Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ (в частности, $x_n < x_{n+1}$) или $x_n \geqslant x_{n+1}$ (в частности, $x_n > x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют **неубывающей** (в частности, **возрастающей**) или **невозрастающей** (в частности, **убывающей**). Эти названия объединяют общим термином **монотонная** (в частности, **строго монотонная**) **последовательность**.

Теорема 2 (**признак Вейерштрасса**). Для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно ее ограниченности.

Док–во. Необходимость следует из теоремы об ограниченности сходящейся последовательности. Докажем достаточность.

Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, а множество ее значений ограничено сверху. Тогда по теореме о точной грани множество последовательности имеет точную верхнюю грань, которую обозначим $\sup\{x_n\} = b \in \mathbb{R}$. В силу свойств точной верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad b - \varepsilon < x_N \leqslant b. \tag{4}$$

Согласно определению для неубывающей последовательности имеем $\forall n > N$ $x_n \geqslant x_N$. Из (4) и определения точной верхней грани получаем

$$b - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant b.$$

Тогда $|b - x_n| = b - x_n < \varepsilon$ $\forall n > N$, а с учетом (4) получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \Rightarrow |b - x_n| < \varepsilon),$$

что соответствует определению предела последовательности, т.е. $\exists \lim\{x_n\}$ и $\lim\{x_n\} = b \in \mathbb{R}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая, то ход доказательства аналогичен. $\triangleright$

Пример 2. Рассмотрим последовательность рациональных чисел $x_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что эта последовательность имеет предел.

Покажем сначала, что последовательность $y_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ убывающая. Используя неравенство Бернулли, находим, что при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Т.е. $y_{n-1} > y_n$, а значит, последовательность y_n убывающая. Она ограниченная, так как ее элементы положительны. В силу признака Вейерштрасса последовательность y_n сходится.

Но тогда из арифметических свойств пределов последовательностей получаем

$$\lim x_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim y_n \cdot \lim \frac{n}{n+1} = \lim y_n.$$

Т.е. последовательность x_n также сходится и имеет тот же предел. $\triangleright$

Предел рассмотренной последовательности, следуя Эйлеру, традиционно обозначают латинской буквой e:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

8 Предельные точки последовательности

См. [З, стр. 88–89], [АСЧ, стр. 52], [К, стр. 87].

8.1 Частичный предел последовательности

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ и пусть числа $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ образуют возрастающую последовательность целых положительных чисел. Тогда последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_{k_n}$, называют **подпоследовательностью** исходной последовательности. Очевидно, что если $\{x_n\}$ имеет пределом число b, то любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел, поскольку начиная с некоторого номера все элементы как исходной последовательности, так и любой ее подпоследовательности попадают в любую выбранную окрестность точки b. В то же время расходящаяся последовательность может иметь сходящиеся подпоследовательности, причем к разным пределам.

Примеры. 1) Последовательность $\{(-1)^n\}$ имеет частичные пределы $-1, 1$.

2) У последовательности $\{n\}$ частичных пределов нет, так как любая ее подпоследовательность неограничена, а значит расходится.

Условие, при котором из последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (**Больцано — Вейерштрасса**) Всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Док–во. Пусть все элементы последовательности $\{x_n\}$ заключены между числами a и b, т.е. $x_n \in [a, b]\ \forall n \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы одна из его половин будет содержать бесконечное множество элементов последовательности, так как в противном случае и весь отрезок $[a, b]$ содержал бы конечное их число, что невозможно. Пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин отрезка $[a, b]$, которая содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$ (или если обе половины таковы, то любая из них).

Аналогично из отрезка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$, содержащую бесконечное множество элементов последовательности, и т.д. Продолжая этот процесс, построим систему вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

причем $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. По теореме о вложенных отрезков существует точка x, принадлежащая всем этим отрезкам. Построим подпоследовательность, сходящуюся к x. Для каждого натурального n из $[a_n, b_n]$ выберем элемент x_{k_n} последовательности. Это возможно, так как каждый такой отрезок содержит бесконечное множество элементов последовательности.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. Действительно, для любой ε–окрестности $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ точки x существует отрезок $[a_N, b_N] \subset U_\varepsilon(x)$ (достаточно лишь выбрать N из неравенства $(b-a)/2^N < \varepsilon$). Поскольку каждый следующий отрезок лежит в $[a_N, b_N]$, то $x_{k_n} \in [a_n, b_n] \subset [a_N, b_N] \subset U_\varepsilon(x)$ для всех $n > N$. $\triangleright$

Метод рассуждений, использованный при доказательстве этой теоремы и связанный с последовательным делением пополам рассматриваемых отрезков, известен под названием **метода Больцано**. Этот метод используется при доказательство многих сложных теорем.

Частичным пределом или **предельной точкой** последовательности называют предел какой–либо ее подпоследовательности.

Замечание. Различие понятий предела и частичного предела в том, что в случае предела вне его окрестности находится конечное число элементов последовательности и бесконечное внутри, а в случае частичного предела — бесконечное число внутри и, может быть, бесконечное вне.

8.2 Верхний и нижний пределы последовательности

Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называют **верхним (нижним) пределом последовательности** и обозначают: $\overline{\lim}\ x_n$ и $\underline{\lim}\ x_n$.

Теорема о существовании верхнего и нижнего предела последовательности. У любой ограниченной последовательности существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.

Док–во. Докажем существование наибольшего частичного предела. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Из теоремы Больцано — Вейерштрасса следует, что множество A частичных пределов этой последовательности не пусто. Из ограниченности последовательности следует и ограниченность множества A. В силу этого множество A имеет конечную верхнюю грань. Покажем, что $b = \sup A$ является частичным пределом, т.е. что $b \in A$. Действительно, если $b \notin A$, то по определению частичного предела существует такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, и поэтому в этом интервале нет ни одного частичного предела, т.е. элемента A. А это противоречит условию $b = \sup A$. Таким образом, $b \in A$ и, следовательно, b является наибольшим элементом множества A, поэтому $b = \overline{\lim} x_n$.

Аналогично доказывается существование наименьшего частичного предела. $\triangleright$

Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена и не имеет наибольшего (наименьшего) частичного предела, то полагают $\overline{\lim}\ x_n = +\infty$ ($\underline{\lim}\ x_n = -\infty$).

9 Топологические свойства числовых множеств

9.1 Предельные точки множеств

См. [3, стр. 69–70].

Точку $x \in \mathbb{R}$ называют **предельной точкой множества** $E \subseteq \mathbb{R}$, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от x.

Теорема 1 (**теорема о предельной точке**). Всякое ограниченное бесконечное подмножество прямой $\mathbb{R}$ имеет предельную точку в $\mathbb{R}$.

Для **док–ва** используем метод Больцано. Пусть E — ограниченное бесконечное числовое множество. Тогда E лежит внутри некоторого отрезка I_0. Делим отрезок пополам: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, выбирая каждый раз ту половину I_n отрезка I_{n-1}, которая содержит бесконечное число элементов E, т.е. $E_n = E \cup I_n$ — бесконечное множество для любого $n = 1, 2, \dots$.

По теореме о вложенных отрезков существует точка $x \in \cap_n I_n$. Длина отрезка I_n равна $|I_n| = |I_0|/2^n$ и стремится к 0 при $n \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $|I_n| < \varepsilon$, а значит, $I_n \subset U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, поскольку $x \in I_n$. Так как $E_n = E \cup I_n$ — бесконечное множество и $E_n \subset U_\varepsilon(x)$, то окрестность $U_\varepsilon(x)$ содержит точку множества E, отличную от x. Т.е. x — предельная точка множества E. $\triangleright$

9.2 Внутренность и замыкание множества

Точку a множества $E \subseteq \mathbb{R}$ называют **внутренней**, если существует такая окрестность $U(a)$ этой точки, что $U(a) \subseteq E$. Множество всех внутренних точек множества E называют **внутренностью множества** E и обозначают $\operatorname{Int} E$.

Замыканием множества E называют объединение E с множеством предельных точек E и обозначают $[E]$.

Задача 1. Докажите, что
1) объединение любого (конечного или бесконечного) семейства открытых множеств есть открытое множество;
2) пересечение любого конечного семейства открытых множеств есть открытое множество.

Задача 2. Приведите пример бесконечного семейства открытых множеств, пересечение которого не является открытым множеством.

Теорема 2. 1. Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ открыто т. и т. т., к. любая точка множества E есть внутренняя точка множества E, т.е. $\operatorname{Int} E = E$.
2. Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто т. и т. т., к. любая предельная точка множества E есть точка множества E, т.е. $[E] = E$.

Задача 3. Докажите эту теорему.

9.3 Открытые покрытия множеств

См. [3, стр. 69].

Открытым покрытием множества $E \subseteq \mathbb{R}$ называют такое семейство $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ открытых подмножеств $G_\alpha \subseteq \mathbb{R}$, что $E \subseteq \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Открытое покрытие $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I_1}$ множества $E \subseteq \mathbb{R}$ называют **подпокрытием покрытия** $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$, если $I_1 \subseteq I$.

Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называют **компактным** (**компактом**), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 3 (**теорема о конечном покрытии**). Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ компактно т. и т. т., к. оно замкнуто и ограничено.

Док–во $\Leftarrow$ методом Больцано:
("от противного") пусть существует открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ множества E, не содержащее конечного подпокрытия. Так как E ограничено, то существует такой отрезок I_0, что $E \subseteq I_0$. Делим отрезок пополам: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, выбирая каждый раз ту половину I_n отрезка I_{n-1}, для которой множество $E_n = E \cup I_n$ не покрывается никаким конечным подпокрытием $\{G_\alpha\}$. Из этого условия следует бесконечность E_n. Рассуждая аналогично доказательству теоремы о предельной точке, доказываем, что существует точка $x \in \cap_n I_n$, которая является предельной для множества E.

Так как множество E замкнуто, то по теореме 2 (часть 2) любая его предельная точка есть точка E. Поэтому $x \in E$, а значит, $x \in G_{\alpha_0}$ для некоторого α_0. Множество G_{α_0} открыто, $x \in G_{\alpha_0} \cap I_n$, а длина отрезка I_n стремится к 0 при $n \to \infty$. Поэтому найдется такое n, что $I_n \subseteq G_{\alpha_0}$, но это противоречит выбору I_n, так как множество $E_n = E \cup I_n$ не покрывается никаким конечным подпокрытием $\{G_\alpha\}$.

Док–во $\Rightarrow$, ограниченость. Рассмотрим открытое покрытие множества E интервалами $U_n(0), n \in \mathbb{N}$ (n–окрестности 0). Так как E компактно, то существует его конечное подпокрытие $U_{n_i}(0), i = 1, \dots, k$. Имеем $U_{n_1}(0) \subset \dots \subset U_{n_k}(0)$ при $n_1 < \dots < n_k$. А значит, $E \subseteq U_{n_k}(0)$, и E ограничено.

Док–во $\Rightarrow$, замкнутость. Достаточно доказать открытость $\overline{E}$. Для этого рассмотрим произвольную точку $z \in \overline{E}$ и для каждой точки $x \in E$ непересекающиеся окрестности $U_{\delta_x}(x)$ и $U_{\delta_x}(z)$ точек x и z соответственно, где $\delta_x = |x - z|/3$. Семейство $\{U_{\delta_x}(x) : x \in E\}$ есть открытое покрытие E. Так как множество E компактно, то существует его конечное подпокрытие $\{U_i = U_{\delta_{x_i}}(x_i)\}_{i=1,\dots,n}$. Множество $V = \bigcap_{i=1}^n U_{\delta_{x_i}}(z)$ открыто как пересечение конечного семейства открытых множеств (см. задачу 1). Это множество не пересекается ни с одним из множеств $U_j, j = 1, \dots, n$, так как из тождества 2 на стр. 8 следует, что

$$V \cap U_j = \Big(\bigcap_{i=1}^n U_{\delta_{x_i}}(z)\Big) \cap U_{\delta_{x_j}}(x_j) = \bigcap_{i=1}^n \Big(U_{\delta_{x_i}}(z) \cap U_{\delta_{x_j}}(x_j)\Big),$$

а $U_{\delta_{x_j}}(z) \cap U_{\delta_{x_j}}(x_j) = \varnothing$ по выбору δ_{x_j}. Множество V не пересекается также с E, так как $\bigcup_{j=1}^n U_j \supseteq E$, а из тождества 3 на стр. 8 следует, что

$$V \cap E \subseteq V \cap \Big(\bigcup_{j=1}^n U_j\Big) = \bigcup_{j=1}^n \Big(V \cap U_j\Big) = \varnothing.$$

Т.е. V есть окрестность точки $z \in \overline{E}$, непересекающаяся с E. Поэтому z — внутренняя точка $\overline{E}$. Поскольку z — произвольная точка $\overline{E}$, то по теореме 2 (часть 1) $\overline{E}$ открыто, а значит, E замкнуто. $\triangleright$

10 Предел функции

10.1 Виды пределов

См. [3, стр. 105–107].

Вспомним определение предела последовательности:

$$b = \lim z_n \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ (n > N \ \Rightarrow \ |z_n - b| < \varepsilon).$$

Если в этом определении заменить последовательность $\{z_n\}$ на функцию $f(x)$, а натуральные числа n и N — на действительные x и M, то получим определение **предела функции $f(x)$ при стремлении аргумента к $+\infty$**:

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) > 0: \ (x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (1)$$

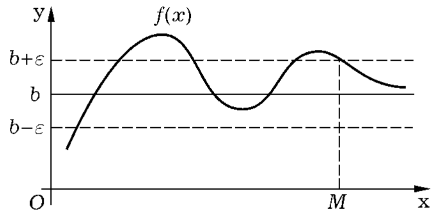

Рис. 7

Из рис. 7 ясно, как по заданному значению ε выбрать положение точки M, при котором будет выполнено условие этого определения. График функции при $x \to +\infty$ неограниченно приближается к горизонтальной прямой $y = b$, называемой в этом случае **правосторонней горизонтальной асимптотой** графика функции.

Задача 1. Докажите, что условие (1) эквивалентно условию

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) > 0: \quad \forall x > M \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение (1) может быть обобщено на случай $x \to a$ следующим образом. Интерпретируем множество тех x, которые удовлетворяют неравенству $x > M$, как окрестность (выколотую окрестность) символа $+\infty$:

$$U_M(+\infty) = \dot{U}_M(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x > M\} = (M, +\infty).$$

И перепишем условие (1) в виде:

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M = M(\varepsilon) > 0: \ (x \in \dot{U}_M(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(b)).$$

Заменяя в этой записи $+\infty$ на a, а M на δ, получаем

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ (x \in \dot{U}_\delta(a) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(b)). \quad (2)$$

Наконец, переписывая условия принадлежности окрестностям в виде неравенств, получаем определение предела функции $f(x)$ при стремлении аргумента к точке:

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ (0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon), \quad (3)$$

т.е. точку $b \in \mathbb{R}$ называют **пределом функции** $f(x)$ **в точке** $a \in \mathbb{R}$ (или **при** x, **стремящемся к** $a \in \mathbb{R}$), если, каково бы ни было положительное число ε, найдется такое положительное число δ, что для всех точек выколотой δ–окрестности точки a значения функции принадлежат ε–окрестности точки b.

Запись $\delta(\varepsilon)$ в (3) подчеркивает, что значение δ зависит от выбора ε. Рис. 8 иллюстрирует, что для нахождения δ при заданном ε по графику функции следует найти ближайшие к a точки x_1 и x_2, в которых функция принимает значения $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ соответственно, и положить δ равным меньшему из расстояний от точки a до найденных точек. **Рис.8**

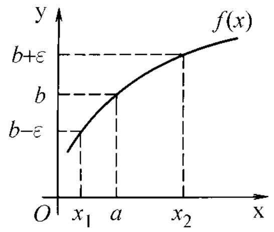

Рис. 8

Из определения следует, что функция $f(x)$ должна быть определена в некоторой выколотой окрестности точки a, иначе условие (2) не может выполняться. При этом точка a может и не принадлежать области определения функции, а если и принадлежит, то значение $f(a)$ не учитывают.

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ при $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, хотя $f(2)$ не определено.

Точка a может не иметь выколотой окрестности в области D_f определения функции (например, для функции $f(x)=\sqrt{x}$ точка $x=0$ в $D_f=\{x\in\mathbb{R}\colon\ x\geqslant 0\}$). Тогда изменение аргумента x при $x\to a$ имеет смысл лишь в расположенной по одну сторону от точки a выколотой полуокрестности. Но даже в случае, когда функция определена в выколотой окрестности точки a, для анализа особенностей поведения функции при $x\to a$ бывает целесообразно ограничить "свободу" изменения аргумента x одной из выколотых полуокрестностей этой точки. Такое ограничение приводит к понятию одностороннего предела. Кроме того, возможны стремления x к $-\infty$ или ∞. Для получения соответствующих определений введем понятия окрестности (выколотой окрестности) символов $a+$, $a-$, $-\infty$ и ∞:

$$\begin{aligned}
\dot U_\delta(a+) &= (a, a+\delta), \qquad \dot U_\delta(a-) \;=\; (a-\delta, a),\\
\dot U_M(-\infty) &= U_M(-\infty) \;=\; \{x\in\mathbb{R}\colon\ x<-M\} \;=\; (-\infty,-M),\\
\dot U_M(\infty) &= U_M(\infty) \;=\; \{x\in\mathbb{R}\colon\ |x|>M\} \;=\; \mathbb{R}\setminus[-M,M].
\end{aligned}$$

Тогда условие (2) имеет смысл и в случае, когда a заменяется на $a+$, $a-$, $+\infty$, $-\infty$ или ∞, а b — на $+\infty$, $-\infty$ или ∞. Заменяя в полученной записи (2) условия принадлежности окрестностям на неравенства, получаем соответствующее определение предела функции. Например, так получается определение:

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\infty \iff \forall E>0 \quad \exists\delta=\delta(E)>0:\ \bigl(a-\delta<x<a \ \Rightarrow\ |f(x)|>E\bigr).$$

Пределы $\lim_{x\to a-} f(x)$ и $\lim_{x\to a+} f(x)$ называют **левым** и **правым** (или **односторонними**) **пределами функции** $f(x)$ **в точке** a. Чтобы отличить от односторонних, пределы с $x \to a$ называют **двусторонними**.

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sign}(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sign}(x) = +1.$

Анализируя все получающиеся определения, заметим, что при $x \to a, a-, a+$ достаточно рассматривать для δ сколь угодно малые положительные значения, а при $x \to +\infty, -\infty, \infty$ — сколь угодно большие значения M. Аналогично, если предел есть число b, то достаточно рассматривать для ε сколь угодно малые положительные значения. Когда же функция имеет какой–либо бесконечный предел, достаточно рассматривать сколь угодно большие значения E.

Отметим также, что символы $a+$, $a-$, $+\infty$, $-\infty$ и ∞ не являются числами, хотя для них были введены понятия окрестности (выколотой окрестности).

Задача 2. Какие пределы иллюстрируют рис. 9–11 ? Приведите соответствующие определения.

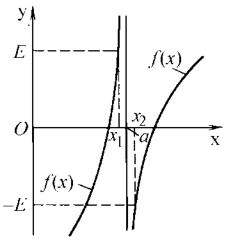

Рис. 9

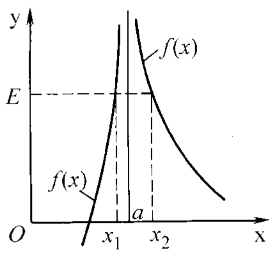

Рис. 10

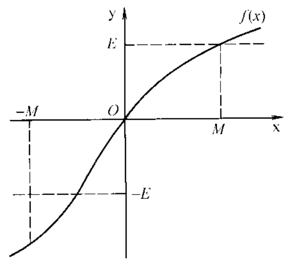

Рис. 11

10.2 База множеств. Предел функции по базе

См. [3, стр. 125–128], [АСЧ, сс. 55–59].

Мы показали, что на все рассмотренные случаи предела возможен взгляд с единой точки зрения: достаточно ввести понятия окрестности (выколотой окрестности) соответствующих символов. Семейство таких окрестностей называют базой. Точная формулировка этого понятия позволит каждое свойство пределов формулировать и доказывать один раз, а не для каждого типа пределов отдельно.

Семейство $\mathcal{B} = \{b_\alpha\}$ подмножеств множества A : $b_\alpha \subseteq A$, называют **базой в множестве** A, если:

$$1)\ \ \forall b \in \mathcal{B} \quad b \neq \varnothing;$$
$$2)\ \ \forall b_1 \in \mathcal{B} \quad \forall b_2 \in \mathcal{B} \quad \exists b \in \mathcal{B}: \quad b \subset b_1 \cap b_2.$$

Пусть A — область определения функции, $\mathcal{B}$ — база в множестве A. Число d называют **пределом функции** $f(x)$ **по базе** $\mathcal{B}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < \varepsilon. \tag{4}$$

При этом используют обозначение: $d = \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$. В данном определении возможно $A \not\subseteq \mathbb{R}$ (этот случай мы будем рассматривать в следующем семестре), но обязательно область значений f есть числовое множество.

Наиболее употребительные базы следующие.

– База $\mathcal{B}_0$ на множестве $\mathbb{N}$ состоит из множеств $N_s = \{s, s+1, s+2, \ldots\}, s \in \mathbb{N}$. Предел по этой базе есть предел последовательности.

– База $\mathcal{B}_1$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $\dot{U}_\delta(a), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a$.

– База $\mathcal{B}_2$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $\dot{U}_\delta(a+) = (a, a+\delta), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a+$.

– База $\mathcal{B}_3$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $\dot{U}_\delta(a-) = (a-\delta, a), \delta > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to a-$.

– База $\mathcal{B}_4$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to \infty$.

– База $\mathcal{B}_5$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to +\infty$.

– База $\mathcal{B}_6$ на множестве $\mathbb{R}$ состоит из множеств $U_M(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < -M\}, M > 0$. Предел по этой базе есть предел при $x \to -\infty$.

Если функция не определена на всей прямой, то она не может иметь предела по базам $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_6$. Пределы, определенные в предыдущем пункте, имеют смысл только, если функция определена в некоторой выколотой окрестности соответствующего символа. Для получения более общего определения перенесем рассмотренные базы на другие числовые множества.

Рассмотрим сначала базу $\mathcal{B}_1 = \{\dot{U}_\delta(a) : \delta > 0\}$, где a — некоторая точка. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — область определения функции f. Построим семейство $\mathcal{B}_1^A = \{A \cap \dot{U}_\delta(a) : \delta > 0\}$. Заметим, что для любого $\delta > 0$ множество $A \cap \dot{U}_\delta(a)$ непусто, только если a — предельная точка множества A. В этом случае $\mathcal{B}_1^A$ есть база в множестве A, и мы можем рассмотреть предел функции f по этой базе.

Рассмотрим теперь одну из баз $\mathcal{B}_2, \ldots \mathcal{B}_6$ и множество $A \subset \mathbb{R}$. Аналогично случаю базы $\mathcal{B}_1$ семейство $\mathcal{B}_i^A = \{A \cap b : b \in \mathcal{B}_i\}$ при $i = 2, \ldots 6$ есть база в множестве A, если соответственно

при $i = 2$: a — предельная точка множества $A \cap (a, +\infty)$,
при $i = 3$: a — предельная точка множества $A \cap (-\infty, a)$,
при $i = 4$: множество A не ограничено,
при $i = 5$: множество A не ограничено сверху,
при $i = 6$: множество A не ограничено снизу.

Задача 3. Покажите, что $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1^A, \ldots \mathcal{B}_6^A$ есть базы в соответсвующих множествах, а пределы по базам $\mathcal{B}_1^A, \ldots \mathcal{B}_6^A$ совпадают с соответствующими пределами, определенными в предыдущем пункте, если область A определения функции содержит некоторую выколотую окрестность соответствующего символа.

Предел функции $f\colon A \to \mathbb{R}$ по базам $\mathcal{B}_1^A, \ldots \mathcal{B}_6^A$ будем обозначать соответственно через:

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a+} f(x), \quad \lim_{x\to a-} f(x), \quad \lim_{x\to \infty} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x).$$

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} c = c$. Действительно, при любом x $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, если ε — произвольное положительное число. Поэтому в качестве b можно взять любой элемент базы $\mathcal{B}$.

Задача 4. Пусть семейство $\mathcal{B}$ — это все интервалы, содержащие $[a, b]$. Покажите, что $\mathcal{B}$ — база в $\mathbb{R}$. Для каких функций $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = d \in \mathbb{R}$?

Задача 5. Пусть база $\mathcal{B}$ в A состоит из одного непустого множества $b \subset A$. Для каких функций $f\colon\ A \to \mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = d \in \mathbb{R}$?

Условие (4) определяет **конечный** предел функции по базе (d — число). Для определения **бесконечного** предела достаточно заменить это условие на следующее:

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty \iff \forall E > 0 \quad \exists b = b(E) \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b \quad |f(x)| > E.$$

Аналогично определяются $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty$. Тогда $f(x) > E$ и $f(x) < -E$ соответственно.

11 Основные свойства предела функции

См. [3, стр. 108–114].

11.1 Общие свойства

Теорема 1 (**о единственности предела функции**). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел по базе $\mathcal{B}$, то этот предел единственный.

Док–во. От противного: пусть d_1, d_2 — два предела и $d_1 \neq d_2$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такие два элемента $b_1(\varepsilon)$ и $b_2(\varepsilon)$ базы $\mathcal{B}$, что

$$\forall x \in b_i(\varepsilon) \quad |f(x) - d_i| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad i = 1, 2.$$

Положим $\varepsilon = |d_1 - d_2|/2$. По определению базы существует такой элемент b_3 базы $\mathcal{B}$, что $b_3 \subset b_1(\varepsilon) \cap b_2(\varepsilon)$. Так как элемент базы непустое множество, существует $x \in b_3$. Для такого x, используя неравенство треугольника, получаем:

$$|d_1 - d_2| \leqslant |d_1 - f(x)| + |f(x) - d_2| < 2\varepsilon = |d_1 - d_2|.$$

Пришли к противоречию: $|d_1 - d_2| < |d_1 - d_2|$, которое доказывает теорему.

Теорема 2 (**о сохранении знака**).

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = d \neq 0 \implies \exists b \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b \quad f(x) > d/2,\ d > 0; \quad f(x) < d/2,\ d < 0.$$

Док–во. Для $\varepsilon = |d|/2$ по определению предела

$$\exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < |d|/2, \qquad \text{т.е. } d - |d|/2 < f(x) < d + |d|/2.$$

Имеем $f(x) > d - |d|/2 = d/2$ при $d > 0$, и $f(x) < d + |d|/2 = d/2$ при $d < 0$. $\triangleright$

Функцию $f : A \to \mathbb{R}$ называют **ограниченной на множестве** $D \subseteq A$, если множество $f(D)$ ограничено, т.е. существует константа $C > 0$, такая, что $\forall x \in D$ $|f(x)| \leqslant C$.

Теорема 3 (**о локальной ограниченности функции, имеющей предел**). $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = d$ — число $\Rightarrow$ существует множество $b \in \mathcal{B}$, на котором $f(x)$ ограничено.

Док–во. Для $\varepsilon = 1$ по определению предела $\exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B}: \ \forall x \in b \ |f(x) - d| < 1$, т.е. $d - 1 < f(x) < d + 1$ и множество $f(b)$ ограничено.

Теорема 4 (**о предельном переходе в неравенстве**).

$$\begin{array}{l} 1) \ \lim\limits_{\mathcal{B}} f_i(x) = d_i, \ i = 1, 2, \\ 2) \ \exists b \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b \quad f_1(x) \leqslant f_2(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad d_1 \leqslant d_2.$$

Док–во. От противного: пусть $d_1 > d_2$. Тогда для $\varepsilon = 1/2\ (d_1 - d_2)$ по определению предела $\exists b_i = b_i(\varepsilon) \in \mathcal{B}: \ \forall x \in b_i \ |f_i(x) - d_i| < \varepsilon, \ i = 1, 2$. По определению базы существует такой элемент b_3 базы $\mathcal{B}$, что $b_3 \subset b_1(\varepsilon) \cap b_2(\varepsilon) \cap b$. Так как элемент базы непустое множество, существует $x \in b_3$. Для такого x получаем:

$$f_1(x) > d_1 - \varepsilon = d_2 + \varepsilon > f_2(x) \geqslant f_1(x).$$

Пришли к противоречию: $f_1(x) > f_1(x)$, которое доказывает теорему.

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, хотя $x^2 > 0$ при $x \neq 0$. Таким образом, предельный переход в строгом неравенстве может давать равенство.

11.2 Теоремы существования пределов функций

Теорема 5 (**о пределе промежуточной функции**).

$$\begin{array}{l} 1) \ \lim\limits_{\mathcal{B}} f_i(x) = d, \ i = 1, 2, \\ 2) \ \exists b \in \mathcal{B}: \ \forall x \in b \quad f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) \ \text{сущ. и равен} \ d.$$

Док–во. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такие два элемента $b_1(\varepsilon)$ и $b_2(\varepsilon)$ базы $\mathcal{B}$, что при $i = 1, 2$

$$\forall x \in b_i(\varepsilon) \quad |f_i(x) - d| < \varepsilon \quad \text{или} \quad d - \varepsilon < f_i(x) < d + \varepsilon.$$

По определению базы существует такой элемент b_3 базы $\mathcal{B}$, что $b_3 \subset b_1(\varepsilon) \cap b_2(\varepsilon) \cap b$. Тогда

$$\forall x \in b_3 \quad d - \varepsilon < f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) < d + \varepsilon.$$

Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_3 \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b_3 \quad |g(x) - d| < \varepsilon$.

Теорема 6 (**о связи односторонних и двустороннего пределов**). Пусть a — предельная точка множеств $A \cap (a, +\infty)$ и $A \cap (-\infty, a)$, $f\colon A \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) \ \text{сущ. и равен} \ d \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a-} f(x), \ \lim_{x \to a+} f(x) \ \text{сущ. и равны} \ d.$$

Док–во. $\Rightarrow$: по определению двустороннего предела

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A \quad |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Но
$$\dot U_\delta(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \dot U_\delta(a-) \cup \dot U_\delta(a+).$$
Поэтому $\forall x \in \dot U_\delta(a-) \cap A \quad |f(x)-d| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = d$. Аналогично для правого предела.

$\Leftarrow$: так как a — предельная точка множества $A \cap (a, +\infty)$ (и $A \cap (-\infty, a)$), то a — предельная точка и множества A тоже. С другой стороны, по определению односторонних пределов
$$\begin{array}{ccc} \forall\varepsilon > 0 & \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : & \forall x \in \dot U_{\delta_1}(a-) \cap A \quad |f(x)-d| < \varepsilon \\ \text{и} & \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : & \forall x \in \dot U_{\delta_2}(a+) \cap A \quad |f(x)-d| < \varepsilon. \end{array}$$
Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\dot U_\delta(a) \subseteq \dot U_{\delta_1}(a-) \cup \dot U_{\delta_2}(a+)$, а значит,
$$\forall x \in \dot U_\delta(a) \cap A \quad |f(x)-d| < \varepsilon \quad \text{и поэтому} \quad \lim_{x\to a} f(x) = d.$$

Теорема 7 (**критерий Коши существования предела функции по базе**).
$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B} : \quad \forall x, z \in b \quad |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

Без док–ва.

11.3 Определение предела по Гейне

Опр. предела по Гейне. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, a — предельная точка A. Точку $d \in \mathbb{R}$ называют **пределом функции** $f(x)$ **в точке** $a \in \mathbb{R}$, если для любой имеющей пределом точку a последовательности $\{x_n\}$ значений $x_n \in A$ аргумента функции, не совпадающих с a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений $f(x_n)$ функции имеет пределом точку d. Будем использовать обозначение: $d = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Гейне. В отличии от этого определения определение предела функции, данное ранее, будем называть по Коши.

Теорема 8 (**об эквивалентности двух определений**).
$$\lim_{x\to a} f(x) = d \quad \text{по Коши} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = d \quad \text{по Гейне}.$$

Док–во. $\Rightarrow$: пусть функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ имеет в точке a предел d по Коши. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$
$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \dot U_\delta(a) \cap A \quad |f(x) - d| < \varepsilon.$$
Рассмотрим стремящуюся к a последовательность $\{x_n\}$, элементы которой лежат в A и не совпадают с a. По определению предела последовательности
$$\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad x_n \in \dot U_\delta(a).$$
Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\forall n > N$ $|f(x_n) - d| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел d.

$\Leftarrow$ От противного: пусть d — предел по Гейне, но не предел по Коши функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$. Используя правило построения отрицания высказываний с кванторами, последнее условие можно переписать в виде

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \dot{U}_\delta(a) \cap A \ : \quad |f(x) - d| \geqslant \varepsilon.$$

Из него следует, что для $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, существует такой элемент $x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(a) \cap A$, что $|f(x_n) - d| \geqslant \varepsilon$. Получили последовательность $\{x_n\}$ в $A \setminus \{a\}$. Эта последовательность сходится к a, так как $x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(a)$, а $\delta_n \to 0$. По определению предела по Гейне последовательность $\{f(x_n)\}$ должна сходиться к d, но это противоречит условию $|f(x_n) - d| \geqslant \varepsilon$, что доказывает утверждение $\Leftarrow$. $\triangleright$

Из теоремы 8 следует, что в рассуждениях мы можем использовать как определение предела функции по Коши, так и по Гейне. Определение по Гейне удобно использовать для доказательства того, что предел функции в данной точке не существует. А именно, если для двух различных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$, имеющих одинаковый предел a, последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(z_n)\}$ имеют различные пределы, то в этом случае $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует.

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin(1/x)$. График этой функции показан на рис. 12, но получить из него представление о ее поведении в окрестности точки $x = 0$ трудно. Докажем, что данная функция не имеет предела в точке 0.

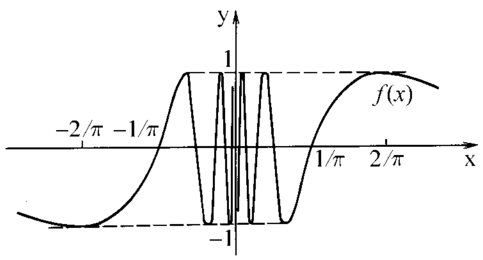

Рис. 12

Выберем сходящуюся к этой точке последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$. Ясно, что $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — область определения функции, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim x_n = 0$. Тогда $f(x_n) = \sin(n\pi) \equiv 0$ и $\lim f(x_n) = 0$.

Возьмем теперь сходящуюся к той же точке последовательность $\{z_n\} = \left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$, для которой $f(z_n) = \sin\bigl((4n+1)\pi/2\bigr) \equiv 1$ и $\lim f(z_n) = 1$.

Две последовательности дали разные результаты, что противоречит условию определения предела функции по Гейне, т.е. данная функция не имеет предела в точке $x = 0$.

12 Бесконечно малые функции

12.1 Бесконечно малые, бесконечно большие функции и их свойства

Функцию $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой (б.м.) по базе** $\mathcal{B}$ $\iff$ $\lim\limits_{\mathcal{B}} \alpha(x) = 0$.

Пример 1. Функция $f(x) = x$ — б.м. при $x \to 0$ или при $x \to 0\pm$, но не является б.м. при других стремлениях x.

Теорема 1 (**о связи функции, ее предела и бесконечно малой**).

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = d \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = d + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) \text{— б.м. по базе } \mathcal{B}.$$

Док–во. $\Rightarrow$: пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел d по базе $\mathcal{B}$. Согласно определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B} : \quad \forall x \in b \quad |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Но это в силу определения б.м. означает, что функция $\alpha(x) = f(x) - d$ есть б.м. по базе $\mathcal{B}$.

$\Leftarrow$: пусть теперь $f(x) = d + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$. Тогда, согласно определению б.м., имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B} : \quad \forall x \in b \quad |\alpha(x)| = |f(x) - d| < \varepsilon,$$

а это означает, что существует предел по базе $\mathcal{B}$ функции $f(x)$ и он равен d. $\triangleright$

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой (б.б.) по базе $\mathcal{B}$** $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \infty$.

Пример 2. $f(x) = x$ при $x \to \infty$.

Теорема 2 (**о связи б.б. и б.м.**).

$$f(x) \quad \text{б. б. по базе } \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{f(x)} \quad \text{б. м. по базе } \mathcal{B}.$$

Док–во. $\Rightarrow$: пусть функция $f(x)$ — б.б. по базе $\mathcal{B}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $E = 1/\varepsilon$, согласно определению, имеем

$$\exists b = b(E) \in \mathcal{B} : \quad \forall x \in b \quad |f(x)| > E.$$

Поэтому $\forall x \in b$ $f(x) \neq 0$, так как $E > 0$, и $|1/f(x)| = 1/|f(x)| < \varepsilon$. Поскольку ε — произвольное положительное, то это означает, что функция $1/f(x)$ есть б.м. по базе $\mathcal{B}$.

$\Leftarrow$: пусть функция $\frac{1}{f(x)}$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$. Выберем произвольное $E > 0$. Для $\varepsilon = 1/E$, согласно определению, имеем

$$\exists b = b(\varepsilon) \in \mathcal{B} : \quad \forall x \in b \quad \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon = \frac{1}{E}$$

и, следовательно, $|f(x)| > E$. Это означает, что функция $f(x)$ — б.б. по базе $\mathcal{B}$. $\triangleright$

Пример 3. Сравните x и $1/x$ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$.

Теорема 3 (**арифметические свойства бесконечно малых**).
Пусть $\alpha(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$. Тогда

1) $\beta(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\alpha(x)+\beta(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$.
2) $z(x)$ — огранич. на некотором $\quad b\in\mathcal{B}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $z(x)\alpha(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$.
3) $\beta(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\alpha(x)\beta(x)$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$.
4) $u(x)\to d$ по базе $\mathcal{B}$, $d\neq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\dfrac{\alpha(x)}{u(x)}$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$.

Док–во 1) По определению б.м.

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\quad &\exists b_1=b_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\in\mathcal{B}:\quad \forall x\in b_1\quad |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\\ \text{и}\qquad &\exists b_2=b_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\in\mathcal{B}:\quad \forall x\in b_2\quad |\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

По определению базы существует такой элемент b_3 базы $\mathcal{B}$, что $b_3\subset b_1\cap b_2$. Тогда, используя неравенство треугольника, получаем

$$\forall x\in b_3\quad |\alpha(x)+\beta(x)|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

а это означает, что функция $\alpha(x)+\beta(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$.

2) Для ограниченной в $b\in\mathcal{B}$ функции $f(x)$ можно указать такое число $C>0$, что $\forall x\in b\ |f(x)|\leqslant C$. По определению б.м. имеем

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists b_1=b_1\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)\in\mathcal{B}:\quad \forall x\in b_1\quad |\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{C}.$$

По определению базы существует такой элемент b_2 базы $\mathcal{B}$, что $b_2\subset b_1\cap b$. Тогда

$$\forall x\in b_2\quad |\alpha(x)f(x)|=|\alpha(x)|\cdot|f(x)|<\frac{\varepsilon}{C}\,C=\varepsilon,$$

а значит, функция $\alpha(x)f(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$.

3) По теореме о локальной ограниченности функции, имеющей предел, б.м. $\beta(x)$ ограничена на некотором $b\in\mathcal{B}$. Отсюда и из пункта 2) следует, что $\alpha(x)\beta(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$.

4) Из теоремы о сохранении знака

$$\exists b\in\mathcal{B}:\quad \forall x\in b\quad |u(x)|>\frac{|d|}{2}\qquad\text{или}\qquad \left|\frac{1}{u(x)}\right|<\frac{2}{|d|},$$

т.е. функция $\dfrac{1}{u(x)}$ ограничена в b. Поэтому из пункта 2) следует, что $\dfrac{\alpha(x)}{u(x)}$ — б. м. по базе $\mathcal{B}$. $\triangleright$

12.2 Основные теоремы о пределах функций (окончание)

Теорема 4 (**арифметические свойства пределов**).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)=a,\\ \lim\limits_{\mathcal{B}} g(x)=d,\\ c\in\mathbb{R}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll}1) & \lim\limits_{\mathcal{B}}(f(x)+g(x))=a+d;\\ 2) & \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)g(x)=ad;\\ 3) & \lim\limits_{\mathcal{B}} cg(x)=cd;\\ 4) & \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{d},\quad d\neq 0.\end{array}$$

Док–во следует из теорем 1 и 3. Докажем утверждение 2. Так как $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = a$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) = d$, то по теореме 1 $f(x) = a + \alpha(x)$ и $g(x) = d + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$. Поэтому

$$f(x)g(x) = (a + \alpha(x))(d + \beta(x)) = ad + a\beta(x) + \alpha(x)d + \alpha(x)\beta(x) = ad + \gamma(x),$$

где $\gamma(x) = a\beta(x) + \alpha(x)d + \alpha(x)\beta(x)$ — б.м. по базе $\mathcal{B}$ согласно теореме 3 (части 2, 3, 1). Отсюда, используя теорему 1, получаем $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = ad$.

Утверждения 1, 3, 4 доказываются аналогично. ▷

В п. 10.2 было отмечено, что предел последовательности — это частный случай предела по базе. Следовательно, данная теорема применима и к последовательностям (см. теорему 3 из §6).

Теорема 4 имеет аналоги для случаев, когда a или (и) d — бесконечности. Для их доказательства можно использовать теоремы 4 и 2.

Задача 1. Докажите, что

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty, \quad \lim_{\mathcal{B}} g(x) = d \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathcal{B}} \big[f(x)\ g(x)\big] = \infty.$$

Теорема 5 (**предел сложной функции или замена переменной в пределе**).

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & g\colon\ Z \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{B}_z \text{ — база в } Z, \quad \lim\limits_{\mathcal{B}_z} g(z) = d, \\ 2) & f\colon\ X \to Z, \quad \mathcal{B}_x \text{ — база в } X, \\ 3) & \forall b_z \in \mathcal{B}_z \quad \exists b_x \in \mathcal{B}_x : \quad f(b_x) \subseteq b_z \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{\mathcal{B}_x} g[f(x)] = d \\ (d \text{ может быть } (\pm)\infty). \end{array}$$

Док–во для случая, когда d — число. Композиция $g \circ f\colon\ X \to \mathbb{R}$ определена, так как $f(X) \subseteq Z$. Из условия 1 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b_z = b_z(\varepsilon) \in \mathcal{B}_z : \quad \forall z \in b_z \quad |g(z) - d| < \varepsilon.$$

А из условия 3 — то, что

$$\exists b_x \in \mathcal{B}_x : \quad \forall x \in b_x \quad f(x) \in b_z.$$

Поэтому $\forall x \in b_x \ |g[f(x)] - d| < \varepsilon$, что означает: $\lim\limits_{\mathcal{B}_x} g[f(x)] = d$.

Случай бесконечного предела доказывается аналогично. ▷

При вычислении пределов применяется, как правило, следующий вариант правила замены переменной.

Следствие 1.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a \in Z \subseteq \mathbb{R}, \quad g\colon\ Z \to \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{z \to a} g(z) = d, \\ 2) & f\colon\ X \to Z, \quad \mathcal{B} \text{ — база в } X, \quad \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = a \\ 3) & \exists b \in \mathcal{B} : \quad \forall x \in b \quad f(x) \neq a \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} g[f(x)] = d \\ (d \text{ может быть } (\pm)\infty). \end{array}$$

Док–во. Обозначим $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_z$ — база $z \to a$ в Z. Тогда условия 1 и 2 теоремы 5 выполняются. Докажем условие 3. Любой элемент базы $\mathcal{B}_z$ есть множество вида $\dot{U}_\varepsilon(a)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Из определения предела $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)$ следует, что

$$\exists b_x = b_x(\varepsilon) \in \mathcal{B}: \quad \forall x \in b_x \quad |f(x) - d| < \varepsilon.$$

По определению базы существует такой элемент b_1 базы $\mathcal{B}$, что $b_1 \subset b_x \cap b$. Тогда $\forall x \in b_1 \quad f(x) \in \dot{U}_\varepsilon(d)$, т.е. $f(b_1) \subseteq \dot{U}_\varepsilon(d)$. Так как в этих рассуждениях ε — произвольное положительное число, то условие 3 теоремы 5 выполняется, а значит, предел композиции $g \circ f$ по базе $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$ существует и равен c. ▷

Данное следствие имеет следующий аналог для случаев, когда d — это $+\infty$, $-\infty$ или ∞ (отметим, что для этих случаев условие 3 выполняется всегда).

Следствие 2.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & Z \subseteq \mathbb{R}, \quad g\colon\ Z \to \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{z \to (\pm)\infty} g(z) = d, \\ 2) & f\colon\ X \to Z, \quad \mathcal{B} \text{ — база в } X, \quad \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = (\pm)\infty \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} g[f(x)] = d \\ (c \text{ может быть } (\pm)\infty). \end{array}$$

Задача 2. Докажите следствие 2.

Пример 4. Так как

$$\lim_{z \to -\infty} e^z = 0, \qquad \lim_{z \to +\infty} e^z = +\infty,$$

то из следствия 2 получаем утверждения

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty \implies \lim_{\mathcal{B}} e^{f(x)} = 0,$$
$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty \implies \lim_{\mathcal{B}} e^{f(x)} = +\infty.$$

Пример 5. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, то из следствия 2 следует равенство

$$\lim_{z \to \infty} g(z) = \lim_{x \to 0} g\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Задача 3. Докажите, что если в (1) правый предел не существует, то не существует и левый, и наоборот: если не существует левый предел, то не существует и правый.

13 Два замечательных предела

См. [3, стр. 114–116, 131–133].

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Вывод разобьем на 4 этапа: 1) пусть x — центральный угол или длина дуги окружности единичного радиуса причем $0 < x < \pi/2$ (рис. 13). Сравнение площадей треугольника OAB, сектора AOB и треугольника OAD дает

$$0 < S_{\triangle OAB} < S_{\text{сек.}AOB} < S_{\triangle OAD}$$

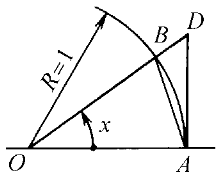

Рис. 13

Но при $OA = 1$ $S_{\triangle OAB} = (\sin x)/2$, $S_{\text{сек.}AOB} = x/2$, $S_{\triangle OAD} = (\operatorname{tg} x)/2$ и поэтому

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2) Из 1) и из нечетности функций получаем $0 > \sin x > x > \operatorname{tg} x$ при $0 > x > -\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $0 < |\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ при $x \in \dot{U}_{\pi/2}(0)$.

3) Из 2) и из теоремы о пределе промежуточной функции: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. По теореме о замене переменной в пределе $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{x}{2} = 0$. Отсюда и из арифметических свойств пределов следует, что

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) = 1.$$

4) Из 2) имеем $1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$. Но в $\dot{U}_{\pi/2}(0)$ функции $\frac{x}{\sin x}$ и $\cos x$ положительны, поэтому $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, а значит, $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Отсюда, из 3) и теоремы о пределе промежуточной функции получаем результат.

Второй замечательный предел: $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Вывод. Ранее мы показали, что

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Отсюда по теореме об арифметических свойствах пределов получаем:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Чтобы перенести на случай функций указанные пределы последовательностей, применим теорему о пределе сложной функции. Для этого положим:

$Z = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_z$ — база $n \to \infty$, $X = (1, +\infty)$, $\mathcal{B}_x$ — база $x \to +\infty$, $f\colon x \mapsto [x]$,

где $[x]$ — целая часть числа x. Тогда условия 2 и 3 теоремы 5 выполняются, так как для любого $b_z = \{s, s+1, s+2, \ldots\} \in \mathcal{B}_z$, полагая $b_x = (s, +\infty) \in \mathcal{B}_x$, получаем $f(b_x) \subseteq b_z$.

Предел по базе $n \to \infty$ функций (последовательностей)

$$g_1(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad g_2(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

есть e. По теореме о пределе сложной функции предел по базе $x \to +\infty$ функций

$$(g_1 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}, \quad (g_2 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

также есть e. Но при $x > 1$ имеем

$$1 \leqslant [x] \leqslant x < [x] + 1, \tag{1}$$

а значит,

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

Все части этого неравенства больше единицы. Поэтому после их возведения в положительные степени, показателями которых служат соответствующие части неравенства (1), получим

$$(g_1 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = (g_2 \circ f)(x). \tag{2}$$

Так как при $x \to +\infty$ крайние члены в (2) стремятся к e, то по теореме о пределе промежуточной функции $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть теперь $x \to -\infty$. Используем замену $x = -u$. Тогда $u \to +\infty$. После тождественных преобразований получим

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1}\left(1 + \frac{1}{u-1}\right).$$

Используя теоремы о пределе сложной функции и об арифметических свойствах пределов, находим

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

В итоге при любом способе стремления x к бесконечности справедлив второй замечательный предел. $\triangleright$

Следствие: $\lim\limits_{z \to 0}(1+z)^{1/z} = e$.

Вывод следует из теоремы о пределе сложной функции, поскольку замена переменной $z = 1/x$ сводит данный предел ко второму замечательному пределу.

14 Сравнение функций при одинаковом стремлении аргумента

14.1 Основные понятия

См. [АСЧ, стр. 72].

Пусть $\mathcal{B}$ — база, $\alpha(x), \beta(x)$ — функции, определенные на множестве $b \in \mathcal{B}$, и $\forall x \in b\ \beta(x) \neq 0$. Тогда
ф. $\alpha(x), \beta(x)$ **эквивалентны по базе** $\mathcal{B}$ ($\alpha \sim \beta$ по базе $\mathcal{B}$) $\iff \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$;
ф. $\alpha(x)$ o**–малое от** $\beta(x)$ по базе $\mathcal{B}$ $\Big(\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$ по базе $\mathcal{B}\Big) \iff \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$;
ф. $\alpha(x)$ O**–большое от** $\beta(x)$ по базе $\mathcal{B}$ $\Big(\alpha(x) = O\big(\beta(x)\big)$ по базе $\mathcal{B}\Big) \iff$ функция $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ограничена на некотором элементе $b \in \mathcal{B}$;
ф. $\alpha(x), \beta(x)$ **одного порядка по базе** $\mathcal{B} \iff \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$;
ф. $\alpha(x)$ **имеет порядок** k **относительно** $\beta(x)$ по базе $\mathcal{B} \iff \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$;
ф. $\alpha(x), \beta(x)$ **несравнимы по базе** $\mathcal{B} \iff \lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не сущ. и $\neq \infty$.

Отметим, что рассмотрены все случаи предела $\lim\limits_{\mathcal{B}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, так как если этот предел бесконечен, то по теореме о связи б.б. и б.м. функция $\beta(x)/\alpha(x)$ есть б.м., а значит $\beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$ по базе $\mathcal{B}$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = d \iff f(x) \sim d$. Поэтому понятие $\sim$ интересно только для б.м. и б.б.
2) Из первого замечательного предела следует, что $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.
3) Функции $\alpha(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ и $\beta(x) = x^2$ несравнимы при $x \to 0$, хотя $\alpha(x) = O\big(\beta(x)\big)$.

Таблица эквивалентностей (при $x \to 0$):

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad e^x - 1 \sim x, \qquad \ln(1+x) \sim x, \qquad \operatorname{tg} x \sim x,$$
$$\arcsin x \sim x, \qquad a^x - 1 \sim x \ln a, \qquad (1+x)^b - 1 \sim bx.$$

Задача 1. Вывести эти эквивалентности (см. [З, с. 140]).

14.2 Вычисления пределов методом эквивалентных б.м. и б.б.

Теорема 1 (**свойства** o **и** O).
1) $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$;
2) $\beta = o(\alpha),\ \gamma = o(\beta) \implies \gamma$ есть $o(\alpha)$;
3) $o(\alpha)$ есть $O(\alpha)$;
4) $O(\alpha) \pm O(\alpha) = O(\alpha)$.

Док–во следует из определений.

Задача 2. Докажите эту теорему.

Теорема 2 (**свойства** $\sim$).
(1) $\alpha(x) \sim \beta(x)$ по базе $\mathcal{B}$, $\alpha(x) \neq 0$ на некотором $b \in \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \beta(x) \sim \alpha(x)$ по базе $\mathcal{B}$ (**свойство симметричности** $\sim$);
(2) $\alpha(x) \sim \beta(x)$ по базе $\mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ по базе $\mathcal{B}$ (**критерий эквивалентности функций**).

Док–во следует из определений.

Теорема 3 (**о замене эквивалентных при вычислении пределов**).

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{по базе} \quad \mathcal{B} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} (1) & \lim\limits_{\mathcal{B}} [f(x)\alpha(x)] = \lim\limits_{\mathcal{B}} [f(x)\beta(x)]; \\ (2) & \lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{\beta(x)}. \end{array}$$

Док–во следует из определений.

Отметим, что использовать определение предела для вычисления можно только для очень простых пределов. Наиболее универсальным методом вычисления пределов является метод эквивалентных б.м. и б.б., который заключается в сведении сложных пределов к простым, уже известным. При этом используются арифметические свойства пределов, замена переменных, критерий эквивалентности функций и теорема 3. При подстановке эквивалентностей главная степень должна сохраняться или при $\alpha(x) \sim \beta(x)$ следует $\alpha(x)$ заменять на $\beta(x) + o(\beta(x))$ и использовать свойства o–малых.

Функция вида $C(x-a)^k (C \neq 0)$ называется **главной частью функции** $f(x)$ **при** $x \to a(\pm)$, если $f(x) \sim C(x-a)^k$ при $x \to a(\pm)$.

Функция вида $Cx^k (C \neq 0)$ называется **главной частью функции** $f(x)$ **при** $x \to (\pm)\infty$, если $f(x) \sim Cx^k$ при $x \to (\pm)\infty$.

Пример 4. Предел $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3 - 2x^2} - x^2 - x)$ можно вычислить двумя способами: 1) умножением на сопряженное и 2) заменой радикала на эквивалентную функцию. При подстановке эквивалентности теряется старшая степень $\frac{1}{x}$ и второй способ дает неправильный ответ.

14.3 Раскрытие неопределенностей

См. [Ив: §6.4, стр. 146–152].

Определение неопределенностей: пределы вида

$$\lim_{\mathcal{B}} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{наз. } \textbf{неопредел.} \left[\tfrac{0}{0}\right] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = 0, \ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = 0;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{— } \textbf{неопредел.} \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty, \ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = \infty;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} \Big[f(x)g(x)\Big] \quad \text{— } \textbf{неопредел.} \ [0 \cdot \infty] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = 0, \ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = \infty;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} \big[f(x) - g(x)\big] \quad \text{— } \textbf{неопр.} \ [\infty - \infty] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty, \ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = \infty;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)^{g(x)} \quad \text{— } \textbf{неопредел.} \ [0^0] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = 0, \ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = 0;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)^{g(x)} \quad \text{— **неопредел.** } [\infty^0] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = \infty,\ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = 0;$$

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)^{g(x)} \quad \text{— **неопредел.** } [1^\infty] \iff \lim_{\mathcal{B}} f(x) = 1,\ \lim_{\mathcal{B}} g(x) = \infty.$$

Покажем, что неопределенности всех указанных видов можно свести к неопределенности $[0/0]$ алгебраическими преобразованиями. В случае неопределенности $[\infty/\infty]$ преобразование есть

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}.$$

Из неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ преобразованием

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

получим неопределенность вида $[0/0]$ или $[\infty/\infty]$ (выбор между ними зависит от удобства проведения последующих вычислений). Неопределенность $[\infty - \infty]$ преобразованием

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{g(x)}}$$

сводится к неопределенности $[0/0]$.

Неопределенные выражения вида $[1^\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$ полезно предварительно прологарифмировать:

$$\ln f(x)^{g(x)} = g(x)\, \ln f(x).$$

Теперь это выражение во всех трех случаях соответствует неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$ (проверьте это). Если существует $\lim\limits_{\mathcal{B}} \ln f(x)^{g(x)}$ и он равен $d \in \mathbb{R}$, $+\infty$ или $-\infty$, то существует $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)^{g(x)}$ и он равен e^d, $+\infty$ или нулю соответственно. Случаи $\pm\infty$ этого утверждения доказаны в §12 (пример 4 и задача 2). Случай конечного d следует из непрерывности экспоненты и будет доказан позже.

15 Непрерывность функции в точке

15.1 Определение и примеры

См. [З: стр. 148–151].

Наивное понимание непрерывной линии: линия, которую можно нарисовать на доске, на бумаге и т.п. не отрывая мел, карандаш и т.п. от доски, бумаги и т.п. Строгое определение основано на понятиях предела и приращения функции.

Пусть $a \in E \subseteq \mathbb{R}, f\colon E \to \mathbb{R}, a + \Delta x \in E$. Тогда число $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ называют **приращением функции** f в точке a, соответствующее **приращению аргумента** Δx. Другие обозначения: $\Delta f(a), \Delta y(a, \Delta x)$ и т.д.

Рассмотрим сначала возможные формулировки непрерывности функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in E$:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \Delta y \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0;\\
&(2)\quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a);\\
&(3)\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \in E \ \big(|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big);\\
&(4)\quad \forall V\big(f(a)\big)\ (\text{окр. т. } f(a)) \quad \exists U(a)\ (\text{окр. т. } a) \quad f\big(U(a)\cap E\big) \subseteq V\big(f(a)\big).
\end{aligned}
$$

Точку $a \in E \subseteq \mathbb{R}$ называют **изолированной** точкой множества $E \iff \exists U(a)$ (окрест. т. a) $\quad U(a) \cap E = \{a\}$.

Точки числового множества делятся на два типа: изолированные и предельные.

Теорема 1 (**об эквивалентности определений непрерывности функции в точке**).

1. Если a — предельная точка E, то условия с (1) по (4) эквивалентны.

2. Если a — изолированная точка E, то для любой функции f условия (3) и (4) выполняются, а условия (1) и (2) не выполняются.

Док–во следует из определений.

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ **непрерывна в точке** $a \in E \iff$ (4).

Следствие из теоремы 1: в любой изолированной точке своей области определения функция непрерывна, в любой предельной точке условия с (1) по (4) эквивалентны.

Примеры непрерывных функций.

1. Для $f(x) = \mathrm{const}$ имеем $\Delta y = 0$ и выполняется условие (1).

2. $f(x) = x$, $\Delta y = \Delta x$. Рассуждения аналогичны примеру 1.

3. $f(x) = \sin x$, $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$. Для проверки условия (1) применяется теорема о пределе промежуточной функции.

4. $f(x) = e^x$. При $x = 0$, полагая $\delta = \min\{|\ln(1-\varepsilon)|, \ln(1+\varepsilon)\}$, проверяем условие (3). При произвольном x из арифметических свойств пределов имеем $e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x} \to e^x$, а значит, выполняется условие (2).

15.2 Свойства функций, непрерывных в точке

См. [3: стр. 156–157].

Теорема 2 (**о непрерывности арифметических операций**). Если функции f и g непрерывны в точке a, то непрерывны в этой точке их сумма, разность, произведение, а при $g(a) \neq 0$ и частное f/g.

Док–во следует из соответствующей теоремы о пределах, если a — предельная точка E, и из определения, если a — изолированная точка E.

Пример 5. Из теоремы 2 следует непрерывность любого многочлена.

Теорема 3 (**о непрерывности сложной функции**). Если функция $g\colon X \to Z$ непрерывна в точке a, а функция $f\colon Z \to Y$ непрерывна в точке $d = g(a)$, то сложная функция $f \circ g$ непрерывна в точке a.

Док–во заключается в проверке условия (4):

$$\begin{array}{llll} f \ \text{ непр. в т. } \ d=g(a) & \Rightarrow & \forall V\big(f(d)\big) \quad \exists U(d): & f\Big(U(d)\cap Z\Big) \subseteq V\big(f(d)\big), \\ g \ \text{ непр. в точке } \ a & \Rightarrow & \exists W(a): \quad g\Big(W(a)\cap X\Big) \subseteq U(d) & \\ \quad\Big| \Rightarrow & & (f\circ g)\Big(W(a)\cap X\Big) \subseteq f\Big(U(d)\cap Z\Big) \subseteq V\big(f(d)\big). & \triangleright \end{array}$$

Теорема 4 (**о переходе к пределу под знаком непрерывной функции**).

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & a=\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x)\in\mathbb{R}, \\ 2) & f \ \text{ непрерывна в т. } a, \\ 3) & \exists b\in\mathcal{B}: \ f \ \text{ определена на } g(b) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \lim_{\mathcal{B}} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{\mathcal{B}} g(x)\right),$$

т. е. под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Док–во. $f\colon E\to\mathbb{R}$ непр. в точке $a \Rightarrow$

$$\begin{array}{lll} \forall\varepsilon>0 & \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0: & \forall z\in E \quad \Big(|z-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(z)-f(a)|<\varepsilon\Big), \\ a=\lim\limits_{\mathcal{B}} g(x) \ \Rightarrow & \exists b_1=b_1(\delta)\in\mathcal{B}: & \forall x\in b_1 \quad |g(x)-a|<\delta \\ \text{опр. базы} \ \Rightarrow & \exists b_2\in\mathcal{B}: \ b_2\subset b_1\cap b & \\ \quad\Big|\Rightarrow & \forall x\in b_2 & \Big|f\big(g(x)\big)-f(a)\Big|<\varepsilon, \ \text{т.к.} \ \ g(x)\in g(b)\subseteq E. \quad \triangleright \end{array}$$

Пример 6. Из непрерывности экспоненты и теоремы 4 следует, что

$$\lim_{\mathcal{B}} z(x) = d\in\mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\mathcal{B}} e^{z(x)} = e^d.$$

Этот факт обосновывает изложенный в предыдущем параграфе метод раскрытия неопределенносте $[1^\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$.

Основными элементарными функциями называют

$$\text{const},\ x^a,\ a^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x.$$

Элементарной называют функцию, полученную из основных элементарных путем применения конечного числа арифметических действий и операции композиции.

Примеры: 7) $\ln(1+\cos\sqrt{x})$; 8) $\sqrt{x^2}=|x|$.

Теорема 5. Любая элементарная функция непрерывна в области своего определения.

Док–во следует из теорем 2 и 3, а также непрерывности основных элементарных функций (см. [М: §9.5, стр. 275–278] или [З: стр. 152, 165, 166]).

16 Непрерывность функций на множествах

См. [3: стр. 151–153].

Свойства функции, определяемые ее поведением в сколь угодно малой окрестности некоторой точки, называют локальными свойствами этой функции (например, свойства функции, имеющей в этой точке предел, или свойства функции, непрерывной в данной точке). Локальные свойства характеризуют поведение функции в каком-то предельном отношении, когда ее аргумент стремится к исследуемой точке. В отличие от локальных глобальными называют свойства функции, связанные либо со всей ее областью определения, либо с некоторым промежутком в этой области. Непрерывность функции на множестве есть глобальное свойство функции.

16.1 Общее определение

Функция f **непрерывна на интервале** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Введем обозначения: $\quad f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+} f(x), \quad f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-} f(x).$

Определим **одностороннюю непрерывность функции в точке** a:
$f(a+0) = f(a)$ (**справа**), $\quad f(a-0) = f(a)$ (**слева**).

Функция f **непрерывна на отрезке** $[a, b]$, если выполняются два условия:
1) функция f непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и
2) $f(a+0) = f(a), \quad f(b-0) = f(b)$.

Ограничение отображения $f\colon X \to Y$ **на подмножество** $A \subseteq X$ есть отображение $f\big|_A\colon A \to Y$, где $f\big|_A(x) = f(x)$ только при $x \in A$.

Теорема 1 (**о связи непрерывности функции в точке и на отрезке**). Функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ $\iff$ ограничение $f\big|_{[a,b]}$ непрерывно в каждой точке отрезка.

Док–во. В каждой точке c интервала (a, b) непрерывность f эквивалентна непрерывности $f\big|_{[a,b]}$, поскольку в некоторой окресности точки c эти функции совпадают.

Так как $U(a+) = U(a) \cap [a, b]$ (для малых $U(a)$), то $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f\big|_{[a,b]}(x)$. Поэтому: f непрерывна в точке a справа $\iff$ ограничение $f\big|_{[a,b]}$ непрерывно в точке a.

Аналогично: f непрерывна в точке b слева $\iff$ ограничение $f\big|_{[a,b]}$ непрерывно в точке b. $\triangleright$

Доказанная теорема мотивирует следующее определение. Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ называют **непрерывной на подмножестве** $A \subseteq E$, если ее ограничение $f\big|_A$ непрерывно в каждой точке A. Через $C(A)$ обозначают множество всех функций непрерывных на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$. Далее говоря о функции f, непрерывной на подмножестве A, будем заменять f на $f\big|_A$ и считать, что A — область определения f.

По определению **множество** $B \subseteq A$ **открыто в** $A \subseteq \mathbb{R}$, если существует такое открытое в $\mathbb{R}$ множество U, что $B = U \cap A$. Используя данное понятие, можно переформулировать определение функции непрерывной на подмножестве следующим образом.

Теорема 2 (**критерий непрерывности функции на множестве.**). Функция $f\colon\ E \to \mathbb{R}$ непрерывна на $E \iff$ относительно f прообраз любого открытого множества из $\mathbb{R}$ открыт в E.

Док–во. " $\Rightarrow$ " : рассмотрим произвольное открытое множество V и произвольную точку $x \in f^{-1}(V)$. Имеем $x \in E$ и $f(x) \in V$, т.е. V — окрестность точки $f(x)$. Так как f непрерывна в точке x, то $\exists U(x)$ (окр. т. x) : $f\big(U(x) \cap E\big) \subseteq V$ или, что эквивалентно, $U(x) \cap E \subseteq f^{-1}(V)$. Множество $U = \cup_{x \in f^{-1}(V)} U(x)$ открыто, как объединение открытых. Используя тождество 3 на стр. 8 и метод двух включений, получаем

$$U \cap E = \big(\cup_{x\in f^{-1}(V)} U(x)\big) \cap E = \cup_{x\in f^{-1}(V)}\big(U(x) \cap E\big) = f^{-1}(V),$$

т.е. прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в E.

" $\Leftarrow$ " : докажем непрерывность функции f в произвольной точке $x \in E$. Пусть V — окрестность точки $f(x)$. Тогда $x \in f^{-1}(V)$ и по условию $f^{-1}(V)$ — открытое множество в E. По определению, последнее означает, что существует такое открытое в $\mathbb{R}$ множество U, что $f^{-1}(V) = U \cap E$. Т.е. U такая окрестность точки x, что $f(U \cap E) \subseteq V$. Так как V — произвольная окрестность точки $f(x)$, то функция f непрерывна в точке $x \in E$.

16.2 Свойства функций, непрерывных на отрезке.

См. [3: стр. 157–159].

Теорема 3 (**Больцано–Коши**).
Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0 \implies \exists c \in (a, b) :\ f(c) = 0$.

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия графика функции лежит и ниже, и выше оси Ox, то эта линия пересекает ось Ox (рис. 14).

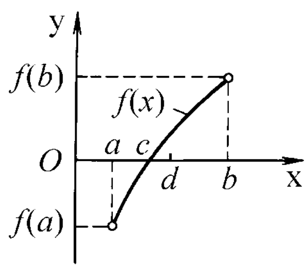

Рис. 14

Док–во. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $d = (a + b)/2$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке. В этом случае теорема доказана и $c = d$. Пусть $f(d) \neq 0$. Тогда на концах одного из отрезков $[a, d]$, $[d, b]$ функция примет значения разных знаков (на рис. 14 это отрезок $[a, d]$). Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Тогда $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Разделим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $(a_1 + b_1)/2$ этого отрезка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим $[a_2, b_2]$ ту из половин отрезка$[a_1, b_1]$, для которой $f(a_2)f(b_2) < 0$. Продолжим этот процесс построения отрезков. При этом либо после конечного числа шагов наткнемся на такую точку деления отрезков пополам, в которой функция обращается в нуль, и доказательство теоремы будет завершено, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

удовлетворяющих условию $f(a_n)f(b_n) < 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

По теореме о вложенных отрезков существует точка c, принадлежащая всем этим отрезкам. Покажем, что именно эта точка удовлетворяет требованиям данной теоремы и является искомой точкой c из (a, b). Так как $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$0 \leqslant a_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0, \quad 0 \leqslant \mathrm{c} - b_n \leqslant b_n - a_n \to 0.$$

а значит, $a_n \to c$ и $b_n \to c$ при $n \to \infty$. С другой стороны, по условию теоремы функция f непрерывна в точке c, поэтому $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Отсюда и из определения предела по Гейне следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c), \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве получаем $f(c)f(c) \leqslant 0$. Но $f(c)^2 \geqslant 0$, поэтому $f(c) = 0$. $\triangleright$

Доказательство теоремы дает метод решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ в случае, когда функция f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Этот метод называется **метод деления отрезка пополам**.

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в условии теоремы 3 существенно. Его нельзя заменить требованием непрерывности в интервале (a, b): на рис. 15 дан пример графика функции, непрерывной в интервале (a, b), но не являющейся непрерывной на отрезке $[a, b]$ в силу нарушения непрерывности справа в точке a. Эта функция имеет на концах отрезка значения разных знаков, но ни в одной точке отрезка не обращается в нуль. Ясно, что функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке интервала (a, b), может также перейти от отрицательного значения к положительному, не обращаясь в нуль.

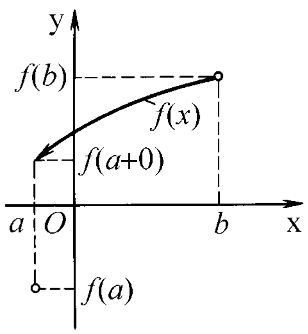

Рис. 15

Следующий пример показывает, что в условии теоремы нельзя заменить отрезок на два непересекающихся отрезка.

Пример 1. $f(x) = -1$ на $[0;1]$ и $= 1$ на $[2;3]$.

Теорема 4 (**о промежуточном значении**). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, A — некоторое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = A$.

Для **док–ва** достаточно применить теорему 3 к функции $g(x) = f(x) - A$.

Таким образом, непрерывная в промежутке функция, переходя от одного значения к другому, хотя бы один раз принимает каждое промежуточное между ними значение. Иными словами, значения, принимаемые непрерывной функцией $f(x)$, когда x изменяется в каком-либо промежутке X, сами также заполняют сплошь некоторый промежуток Y.

Теорема 5 (**Вейерштрасса об ограниченности**).
Непрерывная на компакте функция ограничена на нем.

Док–во. Пусть $K \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$, K — компакт, $f\colon\ E \to \mathbb{R}$ — непрерывная на K функция. По определению непрерывной функции на подмножестве ограничение $f\big|_K$ непрерывно в любой точке $a \in K$. С целью упрощения обозначений будем считать, что $f\big|_K = f$, т.е. $E = K$.

Если a — предельная точка K, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. По теореме о локальной ограниченности функции, имеющей предел, найдется окрестность $U(a)$ точки a, в которой функция f ограничена. Если a — изолированная точка K, то по определению изолированной точки найдется такая окрестность $U(a)$, что $U(a) \cap K = \{a\}$, а значит, функция f ограничена в $U(a)$. Совокупность таких окрестностей для всех точек K образует его покрытие. По определению компакта можно выделить конечное подпокрытие $U(a_n)$, $n = \overline{1,N}$. В каждой из окрестностей $U(a_n)$ множество значений функции $f(x)$ ограничено, т.е. $\exists C_n \in \mathbb{R}\ \forall x \in U(a_n)\ |f(x)| \leqslant C_n$. Поэтому

$$\forall x \in K \quad |f(x)| \leqslant C = \max\{C_1; C_2; \ldots; C_N\},$$

что, по определению, означает, что функция f ограничена на K. $\triangleright$

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на компакте. Непрерывность на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна, но не ограничена. Для разрывной функции теорема также не верна: например, функция $\operatorname{tg} x$ не ограничена на $[\pi/4; 3\pi/4]$.

Отметим, что отрезок есть компакт, а значит, эта и следующая теоремы верны для отрезка.

Теорема 6 (**Вейерштрасса о достижимости наибольшего и наименьшего значений**). Если функция непрерывна на компакте, то на этом компакте есть точка, где функция принимает наибольшее значение на этом компакте, и есть точка, где функция принимает наименьшее значение.

Док–во. Пусть $K \subseteq \mathbb{R}$ — компакт, f — непрерывная на K функция. Согласно теореме 5 множество значений функции $f(x)$ на K ограничено, а согласно теореме о точной грани оно имеет точную верхнюю грань $M = \sup\limits_{x\in K} f(x)$, причем $M \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\forall x \in K$ $f(x) < M$, т.е. функция $f(x)$ не достигает на K своей точной верхней грани. Тогда вспомогательная функция $g(x) = 1/\big(M - f(x)\big)$, $x \in K$ положительна во всех точках K и в силу теоремы о непрерывности арифметических операций непрерывна в каждой точке K. По теореме 5 функция $g(x)$ также ограничена на K, т.е. $\forall x \in K$ $g(x) \leqslant \gamma$, причем $\gamma > 0$. Но тогда $f(x) \leqslant M - 1/\gamma < M$, т.е. число $M - 1/\gamma$ является верхней гранью рассматриваемого множества значений функции f на K, а это противоречит определению точной верхней грани множества как наименьшей из верхних граней. Из этого противоречия следует, что на K найдется такая точка x^*, для которой $f(x^*) = M$, т.е. функция принимает в этой точке конечное наибольшее значение.

Аналогичным путем можно доказать, что на K найдется такая точка x_*, в которой функция $f(x)$ принимает конечное наименьшее значение. $\triangleright$

Геометрическая интерпретация теоремы 6 приведена на рис. 16. Наименьшее и наибольшее значения обозначены соответственно m и M.

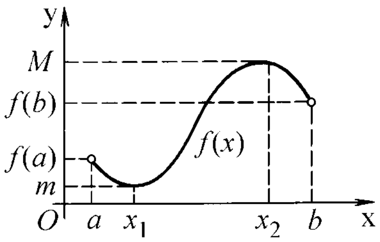

Рис. 16

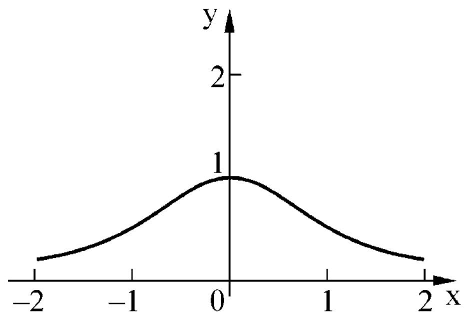

Рис. 17

Существенным условием в этой теореме (как и в предыдущей) является непрерывность функции именно на компакте (отрезке). Даже сочетание непрерывности и ограниченности не гарантирует достижения функцией наименьшего и наибольшего значений: на $\mathbb{R}$ функция $1/(1+x^2)$ ограничена и непрерывна как элементарная, но не достигает наименьшего значения (см. рис. 17).

Из теоремы 6 и теоремы 4 о промежуточном значении функции получаем

Следствие 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то образ отрезка $[a,b]$ при отображении f есть отрезок $[m,M]$, где $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ — наименьшее и наибольшее значения функции f на отрезке $[a,b]$.

Это следствие иллюстрирует рис. 16: множество значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a,b]$, сплошь заполняет отрезок $[m,M]$.

17 Точки разрыва функций

Примеры: 1) $\operatorname{sign} x$, $a=0$; 2) $\ln x$, $a<0$, $a=0$; 3) $\frac{\sin x}{x}$, $a=0$.

Точку $a \in \mathbb{R}$ называют **точкой разрыва функции** $f\colon E \to \mathbb{R}$, если
1) она предельная точка множеств $E \cap (-\infty; a)$ и $E \cap (a; +\infty)$,
2) функция f не является непрерывной в этой точке.

Точка разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется **точкой устранимого разрыва**, если существует непрерывная функция $\bar{f}\colon E \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ такая, что $f\big|_{E\setminus\{a\}} = \bar{f}\big|_{E\setminus\{a\}}$.

Отметим, что имеется четыре варианта существования и несуществования пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$:
1) a — не предельная точка множества $E \cap (-\infty; a)$ или соответственно $E \cap (a; +\infty)$;
a — предельная точка, при этом
2) предел не существует,
3) предел бесконечен или
4) предел конечен.

Точку разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ называют **точкой разрыва 1–го рода**, если пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют и конечны. Остальные точки разрыва называют **точками разрыва 2–го рода**. Таким образом, точка разрыва $a \in \mathbb{R}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ есть точка разрыва 2–го рода, если предел $f(a-0)$ или предел $f(a+0)$, или они оба не существуют или бесконечны.

Из определений следует, что точка устранимого разрыва есть точка разрыва 1–го рода.

Точку разрыва 2–го рода $a \in \mathbb{R}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ называют **точкой бесконечного разрыва**, если один из пределов $f(a-0), f(a+0)$ бесконечен, а второй конечен или бесконечен.

Примеры.
4. Функция $\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке 0 небесконечный разрыв 2–го рода.
5. Функция

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

которая называется **функцией Дирихле**, разрывна во всех точках, причем все они точки небесконечного разрыва 2–го рода. Действительно, на любом интервале есть как рациональные, так и иррациональные числа. Поэтому в любой точке a пределы $\mathcal{D}(a-0)$ и $\mathcal{D}(a+0)$ не существуют.

6. Рассмотрим **функцию Римана**

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{при } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ где } \dfrac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Заметим, что для любого $N \in \mathbb{N}$ в любой окрестности $U(a)$ произвольной точки $a \in \mathbb{R}$ имеется только конечное число рациональных чисел $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, таких, что $n < N$. Уменьшим окрестность $U(a)$ так, чтобы в ней не было таких чисел (кроме, быть может, самого числа a, если $a \in \mathbb{Q}$). Тогда $\forall x \in \dot{U}(a)\ |\mathcal{R}(x)| \leqslant 1/N$. Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$, выбирая $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1/N < \varepsilon$, выбирая соответствующую окрестности $\dot{U}(a)$, получаем, что $\forall x \in \dot{U}(a)\ |\mathcal{R}(x)| < \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to a} \mathcal{R}(x) = 0$ в произвольной точке $a \in \mathbb{R}$. Т.е. функция Римана непрерывна в любой иррациональной точке и имеет устранимый разрыв в любой рациональной точке.

Задача 1. Для каждого из 4 типов разрывов приведите пример функции с таким разрывом в виде рисунка ее графика.

18 Теоремы о непрерывности

См. [3: стр. 159–166].

18.1 Понятие равномерной непрерывности

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ **равномерно непрерывна**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad \big(|x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\big). \quad (1)$$

Отличие этого понятия от понятия непрерывности на E заключается в том, что δ в (1) не зависит ни от x_1, ни от x_2. Тогда как: f непрерывна на $E \iff$

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \quad \forall x \in E \quad \big(|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

т.е. δ зависит от x_0.

Теорема 1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, равномерно непрерывная на E, непрерывна на E.

Док–во следует из определений: полагая в условии (1) $x_1 = x$ и $x_2 = x_0$, получаем условие непрерывности функции f в точке x_0.

Примеры функций, которые непрерывны, но не равномерно непрерывны:

$$1)\ \frac{1}{x} \quad \text{на} \quad (0;1]; \qquad 2)\ \sin\frac{1}{x} \quad \text{на} \quad (0;1]; \qquad 3)\ \sin x^2 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}.$$

Для док–ва того, что для данных функций условие (1) не выполняется, запишем его отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in E: \quad |x_1 - x_2| < \delta,\ |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

Для каждой из трех функций f найдем две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ из соответствующего множества E, что $|f(x_n) - f(z_n)| \geqslant 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - z_n| = 0$. Тогда условие (2) будет выполняться при $\varepsilon = 1$, а значит, указанные функции не равномерно непрерывны на E.

В качестве последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ для функций 1)—3) можно выбрать:

$$1)\ x_n = \frac{1}{n}, \quad z_n = \frac{1}{n+1}; \qquad 2)\quad x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}, \quad z_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n};$$

$$3)\quad x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}, \quad z_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} n}. \quad \triangleright$$

Теорема 2 (**Кантора о равномерной непрерывности**).
Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.

Док–во. Пусть $K \subseteq \mathbb{R}$ — компакт, $f\colon K \to \mathbb{R}$ — непрерывная на K функция. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f на K

$$\forall a \in K \quad \exists \delta(a) = \delta(\frac{\varepsilon}{2}, a) > 0: \quad \forall x \in U_{\delta(a)}(a) \cap K \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Рассмотрим открытое покрытие $\{V(a) = U_{\delta(a)/2}(a) : a \in K\}$ множества K. В силу компактности K из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{V(a_1), \dots, V(a_n)\}$. Положим $\delta^* = \frac{1}{2}\min\{\delta(a_1); \dots; \delta(a_n)\}$.

Теперь возьмем такие точки $a', a'' \in K$, что $|a' - a''| < \delta^*$. Пусть i — такой номер, что $a' \in V(a_i)$. Тогда $|a' - a_i| < \delta(a_i)/2 < \delta(a_i)$ и $a' \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$. А в силу неравенства треугольника

$$|a'' - a_i| \leqslant |a' - a''| + |a' - a_i| < \delta^* + \frac{\delta(a_i)}{2} \leqslant \delta(a_i),$$

и поэтому $a'' \in U_{\delta(a_i)}(a_i)$. На основании того же неравенства треугольника и (3) имеем

$$\big|f(a'') - f(a')\big| \leqslant \big|f(a'') - f(a_i)\big| + \big|f(a_i) - f(a')\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для каждой пары точек $a', a'' \in K$ из условия $|a' - a''| < \delta^*$ следует неравенство $\big|f(a'') - f(a')\big| < \varepsilon$, причем число δ^* зависит лишь от выбора ε и не зависит от положения этих точек, что по определению соответствует равномерной непрерывности f на K. $\triangleright$

18.2 Критерий непрерывности монотонной функции

Теорема 3 (**о точках разрыва монотонной функции**).
Монотонная функция может иметь разрывы только 1–го рода.

Док–во. Пусть c — точка разрыва неубывающей функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. По определению точки разрыва c — предельная точка и левой $E \cap (-\infty; c)$, и правой $E \cap (c; +\infty)$ части области E определения f. В частности, $E \cap (c; +\infty)$ — непустое множество. Так как f — неубывающая функция, образ $f\big(E \cap (-\infty; c)\big)$ ограничен сверху значением $f(c_1)$, где $c_1 \in E \cap (c; +\infty)$. По теореме о точной грани существует $b = \sup f\big(E \cap (-\infty; c)\big)$. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b_1 \in f\big(E \cap (-\infty; c)\big)$, что $b_1 \in (b - \varepsilon, b]$. По определению образа множества существует точка $c_1 \in E \cap (-\infty; c)$ такая, что $f(c_1) = b_1$. Обозначим $\delta = c - c_1$. Используя монотонность f и определения b_1 и b, получаем $b_1 = f(c - \delta) \leqslant f(x) \leqslant b$ для любого $x \in E \cap (c - \delta, c]$, а значит, $0 \leqslant b - f(x) \leqslant b - b_1 < \varepsilon$. По определению левого предела $b = f(c - 0)$.

Аналогично доказывается существование конечного предела $f(c+0)$ и рассматривается случай невозрастающей функции. Таким образом, c — точка разрыва 1–го рода в случае и неубывающей, и невозрастающей функции f.

Теорема 4 (**критерий непрерывности монотонной функции**). Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff$ образ $f([a, b])$ отрезка сам является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Док–во. "$\Rightarrow$": ввиду монотонности f все значения, которые функция принимает на отрезке $[a, b]$, лежат между значениями $f(a)$ и $f(b)$, которые она принимает в концах отрезка. Согласно теореме о промежуточном значении она обязана принимать и все значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, множество значений функции является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

"$\Leftarrow$": из определения следует: функция f непрерывна на отрезке $[a, b] \iff$ $f(c) = f(c+0)$ при $c \in [a, b)$ и $f(c) = f(c-0)$ при $c \in (a, b]$.

Пусть f — неубывающая функция с областью определения $[a,b]$. При $c \in (a,b]$ множество $f\big([a,c)\big)$ ограничен сверху значением $f(b)$. Рассуждая как при доказательстве предыдущей теоремы, доказываем существование конечного предела $f(c-0)$.

При $a \leqslant a_1 < c-\Delta x < c < a_2 \leqslant b$ имеем $f(a_1) \leqslant f(c-\Delta x) \leqslant f(c) \leqslant f(a_2)$. Переходя в этих неравенствах к пределу $\Delta x \to 0+$, получаем $f(a_1) \leqslant f(c-\Delta x) \leqslant f(c) \leqslant f(a_2)$. Следовательно, при $f(c-0) < f(c)$ интервал $(f(c-0), f(c))$ не лежит в образе $f([a,b])$, а это противоречит условию. Поэтому $f(c-0) = f(c)$.

Аналогично доказывается равенство $f(c) = f(c+0)$ при $c \in [a,b)$ и разбирается случай невозрастающей функции. $\triangleright$

18.3 О непрерывности обратной функции

Теорема 5 (**о существовании и непрерывности обратной функции**).
1) Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ — строго монотонна на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$, то f имеет обратную функцию $f^{-1}\colon Y \to E$, определенную на множестве $Y = f(E)$ значений функции f. Функция f^{-1} монотонна и имеет на Y тот же вид монотонности, какой имеет функция f на множестве E.
2) Если, кроме того, E есть промежуток, а функция f непрерывна на нем, то множество Y есть промежуток, и функция f^{-1} непрерывна на Y.

Док–во. 1) Отображение $f\colon E \to Y = f(E)$ сюръективно по определению. Пусть для определенности f возрастает на E. Тогда

$$\forall x_1 \in E \quad \forall x_2 \in E \quad \Big(x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)\Big). \tag{4}$$

Таким образом, отображение f в различных точках принимает различные значения, т.е. оно инъективно. Следовательно, f биективно, а значит, определено обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to E$, задаваемое формулой $x = f^{-1}(y)$, если $y = f(x)$.

Сопостовляя определение f^{-1} с соотношением (4), получаем соотношение

$$\forall y_1 \in Y \quad \forall y_2 \in Y \quad \Big(f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2\Big),$$

означающее, что функция f^{-1} возрастает на области своего определения.

2) Пусть $y_1, y_2 \in Y = f(E)$ и $y_1 \neq y_2$. Тогда $x_i = f^{-1}(y_i) \in E$, $i = 1,2$, и $x_1 \neq x_2$. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Так как $x_1, x_2 \in E$, а E есть промежуток, то $[x_1, x_2] \subseteq E$. Поэтому функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$. По критерию непрерывности монотонной функции образ $f\Big([x_1,x_2]\Big)$ есть отрезок с концами $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Следовательно, отрезок $[y_1, y_2]$ (или $[y_2, y_1]$) полностью лежит в Y, а f^{-1} — монотонная на этом отрезке функция, образ которой является отрезок $[x_1, x_2]$, причем x_1, x_2 — образы концов отрезка $[y_1, y_2]$. По критерию непрерывности монотонной функции функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[y_1, y_2]$.

Поскольку y_1, y_2 — произвольные точки из Y, то Y — промежуток, а функция f^{-1} непрерывна в каждой точке y из Y. Действительно, так как промежутками являются только интервалы, полуинтервалы и отрезки (см. задачу 2 из §4), то либо y — внутренняя точка промежутка Y, либо Y есть полуинтервал или отрезок, а y — его концевая точка. В первом случае существуют точки y_1 и y_2 из Y слева и справа от y: $y_1 < y < y_2$. Тогда из непрерывности функции f^{-1} на отрезке $[y_1, y_2]$ (см. предыдущий абзац) следует непрерывность этой функции в точке y. Если y — концевая точка промежутка Y, то рассматривая какую–либо другую точку y_1 из Y, доказываем непрерывность функции f^{-1} на отрезке $[y_1, y]$ (или $[y, y_1]$), а значит, функция $f^{-1}\colon\ Y \to E$ непрерывна и в концевой точке $y \in Y$. $\triangleright$

Пример 4. Функция $y = \sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ограничение этой функции на этот отрезок имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, определенную, непрерывную и возрастающую на отрезке $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$.

Пример 5. Аналогично, ограничение функции $y = \cos x$ на отрезок $[0, \pi]$ есть убывающая непрерывная функция, которая имеет обратную функцию $x = \arccos y$, определенную, непрерывную и убывающую на отрезке $[-1, 1]$.

Пример 6. Ограничение функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ есть возрастающая от $-\infty$ до ∞ непрерывная функция, которая в силу теоремы 5 имеет обратную функцию $x = \operatorname{arctg} y$, определенную, непрерывную и возрастающую на всей прямой.

Задача 1. Приведите пример непрерывной немонотонной функции, имеющей обратную.

19 Производная функции

См. [3: стр. 170–187].

19.1 Производная и ее механический смысл

Пример 1 (скорость движения). Рассмотрим прямолинейное движение точечной массы. Пусть функция $s = f(t)$ описывает зависимость от времени t расстояния s, пройденного точкой (рис. 18), причем в момент времени t_0 точка занимает положение M_0 и располагается на расстоянии $s_0 = f(t_0)$ от O. Через промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ точка окажется в положении M_1, а пройденное расстояние будет $\Delta s = s_1 - s_0$, где $s_1 = f(t_1)$. В данном случае разностное отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = v_{\text{ср}}$$

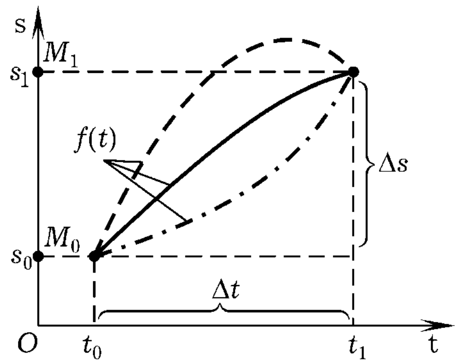

Рис. 18

равно средней скорости $v_{\text{ср}}$, с которой должна была бы равномерно двигаться точка в течение промежутка времени Δt, чтобы пройти расстояние Δs. При неравномерном движении значение $v_{\text{ср}}$ зависит как от t_0, так и от выбора Δt, но это значение будет одинаково для любых зависимостей, графики которых проходят через точки $(t_0; s_0)$ и $(t_1; s_1)$ (см. рис. 18, сплошная, штриховая и штрихпунктирные кривые).

Чтобы получить более точное представление о скорости точки в момент времени t_0, следует уменьшать промежуток времени Δt и в пределе устремить его к нулю ($\Delta t \to 0$). Тогда предел (если, конечно, он существует)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

естественно назвать **мгновенной скоростью** точки в момент времени t_0. $\triangleright$

Пусть a — предельная точка множества E, $a \in E$. **Производной функции** $f\colon E \to \mathbb{R}$ **в точке** a называют предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (при условии, что этот предел существует), т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Обозначения: $f'(a), y'(a)$, y'_x, dy/dx или просто y'.

Пример 2. $y = x^s$, где s — любое отличное от нуля действительное число. Область E определения этой функции зависит от значения s:
1) $E = \mathbb{R}$ при $s = \frac{k}{n} > 0$ и нечетном n ($\frac{k}{n}$ — несократимая дробь);
2) $E = \{x \neq 0\}$ при $s = \frac{k}{n} < 0$ и нечетном n;
3) $E = \{x \geqslant 0\}$ при $s = \frac{k}{n} > 0$ и четном n;
4) $E = \{x > 0\}$ в остальных случаях.

При $x \neq 0$ в области определения функции имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^s - x^s}{\Delta x} = x^s \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x})^s - 1}{\Delta x} = x^s \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = sx^{s-1}.$$

Отметим, что при $x \neq 0$ области определения y и y' совпадают:
$x > 0 \;\Rightarrow\; s$ — любое;
$x < 0 \;\Rightarrow\; s = \frac{k}{n}$, n — нечетное $\;\Rightarrow\; s - 1 = \frac{k-n}{n}$ — такого же типа.

В точке $x = 0$ при $s = \frac{k}{n} > 0$ и нечетном n имеем (при четном n предел справа)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^s}{\Delta x} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s > 1 \\ 1 & \text{при} \quad s = 1 \\ \infty & \text{при} \quad s < 1. \end{cases}$$

Поэтому $(x^s)' = sx^{s-1}$ в тех точках, где определена правая часть равенства.

Механический смысл производной функции $s = f(t)$, описывающей движение точки в зависимости от времени t, состоит в том, что значение производной $f'(t_0)$ равно мгновенной скорости в момент времени t_0.

19.2 Геометрический смысл производной

Пусть график функции $y = f(x)$ в окрестности точки a имеет вид, показанный на рис. 19. Проведем через точки $M\big(a; f(a)\big)$ и $M_1\big(a+\Delta x; f(a+\Delta x)\big)$ прямую, называемую **секущей**. При перемещении точки M_1 по кривой меняется и положение секущей.

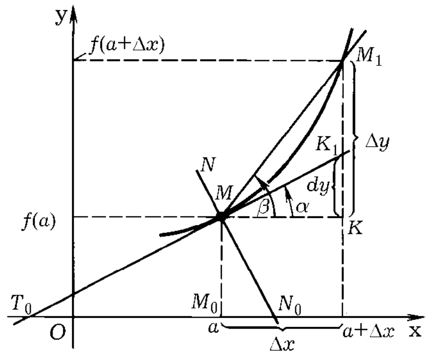

Рис. 19

Если существует предельное положение секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь вдоль кривой, стремится к точке M, то прямую, к которой стремится секущая, называют **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M.

Найдем угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M\big(a; f(a)\big)$. Из рис. 19 следует, что угловой коэффициент секущей MM_1 совпадает с разностным отношением, т.е. $\operatorname{tg}\beta = \Delta y/\Delta x$. Для получения углового коэффициента касательной нужно перейти к пределу в этом разностном отношении при $\Delta x \to 0$. Так как при этом $\beta \to \alpha$, то в силу непрерывности функции $\operatorname{tg} x$ угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

Геометрический смысл: производиая $f'(a)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M\big(a; f(a)\big)$.

Уравнение касательной к графику функции: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Прямую, проходящую через точку M перпендикулярно касательной, называют **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в точке M (на рис. 19 это прямая NN_0). Уравнение нормали имеет вид $y - f(a) = -(x-a)/f'(a)$, если $f'(a) \neq 0$, и вид $x = a$, если $f'(a) = 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ не определена на $(a - \delta, a)$ для некоторого δ. Тогда при вычислении предела разностного отношения $\Delta y/\Delta x$ приходится ограничиться приближением x к нулю только справа. При существовании такого одностороннего предела его называют **односторонней производной** в точке a **справа** и обозначают $f'_+(a)$. Аналогично определяется **односторонняя производная** в точке a **слева** $f'_-(a)$. В таких ситуациях (рис. 20 и рис. 21) в точке a график функции имеет **одностороннюю касательную**, т.е. предельное положение секущей существует только, когда точка M_1 находится справа (слева) от точки M.

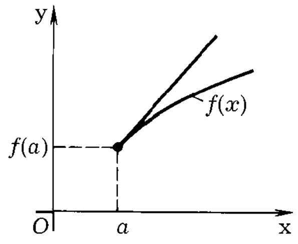

Рис. 20

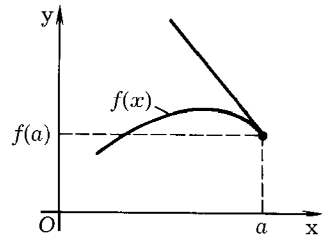

Рис. 21

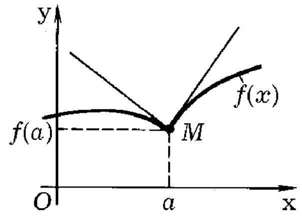

Рис. 22

Может оказаться, что в некоторой внутренней точке $x = a$ того промежутка, в котором определена и непрерывна функция $y = f(x)$, существуют не равные между собой односторонние пределы разностного отношения $\Delta y/\Delta x$. Их тоже называют односторонними производными функции в точке a. В этом случае в соответствующей точке графика функции будут существовать односторонние касательные, образующие, вообще говоря, некоторый угол (рис. 22). Точку $M\big(a, f(a)\big)$ при этом называют **угловой точкой** (или **точкой излома**) **графика** функции.

Задача 1. Приведите пример элементарной функции с точкой излома.

Один или оба односторонних предела разностного отношения $\Delta y/\Delta x$ в точке a могут быть бесконечными. Тогда говорят о **бесконечной односторонней производной** функции $y = f(x)$ слева или справа в точке a (в отличие от рассмотренных выше случаев **конечной односторонней производной**). Для непрерывной функции бесконечная односторонняя производная может быть только определенного знака (либо $+\infty$, либо $-\infty$). Если знаки бесконечных односторонних производных функции и слева и справа в некоторой точке a совпадают, то в этой точке данная функция имеет **бесконечную производную определенного знака** (положительную на рис. 23 и отрицательную на рис. 24). В этом случае касательная к графику функции в соответствующей точке существует и является вертикальной. Если же знаки бесконечных односторонних производных различны, то соответствующую точку графика функции называют **точкой заострения** (**точкой возврата**) (рис. 25 и рис. 26).

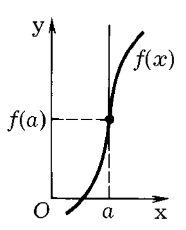

Рис. 23

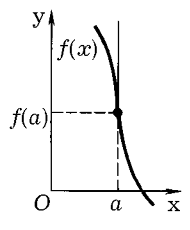

Рис. 24

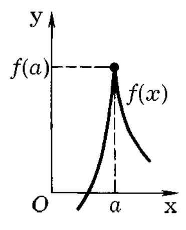

Рис. 25

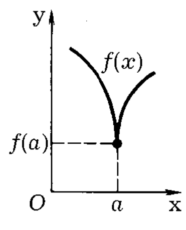

Рис. 26

Задача 2. Приведите примеры элементарных функций а) с бесконечной производной и б) с точкой возврата.

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$, но не имеет в точке $x = 0$ даже односторонних производных. Действительно, разностное отношение в этой точке

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

не стремится ни к какому пределу при $\Delta x \to 0$. Секущая OM_1 (рис. 27), исходящая из начала координат, не имеет предельного положения при стремлении точки M_1 к точке O, так что в начале координат не существует к кривой касательной (хотя бы односторонней).

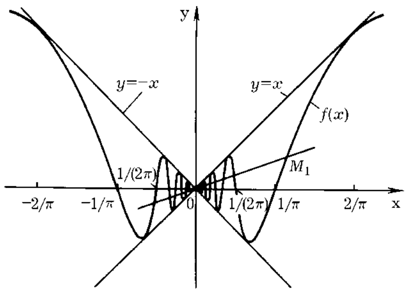

Рис. 27

19.3 Дифференцируемость функций

Пусть $a \in E$ — предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$. Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ называют **дифференцируемой в точке** a, если приращение этой функции в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое — линейное относительно Δx, второе — o–малое от Δx:

$$\Delta f(a) = L\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

где L — число, не зависящее от Δx, $a + \Delta x \in E$, а функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ (любое o–малое от Δx можно представить в виде $\alpha(\Delta x)\Delta x$). При этом линейную относительно Δx часть приращения функции f называют **дифференциалом функции** f и обозначают через df или $df(a)$, $dy(a, \Delta x)$ и т.п.

Замечание. Если $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$. Поэтому дифференциал аргумента x отождествляют с его приращением Δx, т.е. полагают $dx = \Delta x$.

Равносильность дифференцируемости функции в точке и существования в этой точке конечной производной данной функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. 1) Для дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную (**условие дифференцируемости функции**).
2) $df(a) = f'(a)dx$.

Док–во. 1) Необходимость. Если функция дифференцируема в точке a, т.е. справедливо (1), то при $\Delta x \neq 0$ получим $\Delta f(a)/\Delta x = L + \alpha(\Delta x)$. Отсюда следует, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = L,$$

т.е. существует конечная производная $f'(a)$ и $L = f'(a)$.

Достаточность. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечную производую $f'(a)$, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

По теореме о связи функции, ее предела и б.м. можно написать $\Delta f(a)/\Delta x = f'(a) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — б.м. при $\Delta x \to 0$. Отсюда $\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, что в силу определения означает дифференцируемость функции $y = f(x)$ в точке a.

2) В ходе доказательства 1) установлено, что для дифференцируемой в точке a функции $y = f(x)$ выполнено равенство $L = f'(a)$. Поэтому $df(a) = f'(a)dx$. ▷

Замечание. Фомула $dy = y'dx$ объясняет, почему для производной используется обозначение $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Утверждение 1) теоремы 1 называют необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции одного переменного. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 2 (о связи дифференцируемости и непрерывности функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

Док–во. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, ее приращение представимо в виде $\Delta f(a) = L\Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда сразу следует $\Delta f(a) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что равносильно непрерывности функции $y = f(x)$ в точке a. ▷

Пример 4. Функция $y = |x|$ непрерывна, но недифференцируема в точке $x = 0$. А значит, утверждение, обратное утверждению теоремы 2, неверно, т.е. из непрерывности функции в точке не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Функцию, дифференцируемую в каждой точке множества $X \subseteq \mathbb{R}$, называют **дифференцируемой на множестве** X. Если функция дифференцируема в каждой точке своей области определения, то ее называют просто **дифференцируемой**.

Геометрический смысл дифференциала функции (см. рис. 19): дифференциал функции f в точке a равен приращению в точке $M\big(a; f(a)\big)$ ординаты точки на касательной к графику функции f, соответствующему приращению Δx аргумента.

20 Правила дифференцирования

См. [З, с. 189–197] или [Ив. §2.1–2.3, стр. 36–51].

Дифференцирование — операция нахождения производной.

20.1 Арифметические правила дифференцирования.

Теорема 1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма, произведение и частное (последнее при условии $v(x) \neq 0$), а также их произведение на константу C, причем справедливы равенства (здесь обозначения аргумента x опущено):

$$1)\quad (u+v)' = u' + v'; \qquad 2)\quad (Cu)' = Cu';$$
$$3)\quad (uv)' = u'v + uv'; \qquad 4)\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

При **доказательстве** используются определение производной и правила предельного перехода для суммы, произведения и частного двух функций. Докажем формулы 3 и 4. Формулы 1 и 2 доказываются аналогично.

3) Пусть $y(x) = u(x)v(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции u, v и y получат соответственно приращения

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), \qquad \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x),$$
$$\begin{aligned} \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ &= (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v. \end{aligned}$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v. \tag{1}$$

Из дифференцируемости функции v в точке x следует ее непрерывность в этой точке, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0. \tag{2}$$

Так как функции u и v дифференцируемы в точке x, в этой точке существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x). \tag{3}$$

В силу (3), (1), (2) и правил предельного перехода для суммы и произведения функций существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v \right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

т.е. в точке x существует конечная производная функции $y(x) = u(x)v(x)$, равная $y' = (uv)' = u'v + uv'$.

4) Если в точке x выполнено условие $v(x) \neq 0$, то в этой точке определена функция $y(x) = u(x)/v(x)$. Приращению Δx соответствуют приращения Δu, Δv и

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}. \tag{4}$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Согласно (3), (2), (4) и правилам предельного перехода для суммы и частного функций, заключаем, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т.е. в точке x существует конечная производная функции $y(x) = u(x)/v(x)$, равная

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \qquad \triangleright$$

Задача 1. Используя формулу 4 данной теоремы, выведите формулу для производной $\operatorname{tg} x$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеем:

1) $d(Cu) = C\,du$, где $C = \text{const}$;
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3) $d(uv) = u\,dv + v\,du$;
4) $d\dfrac{u}{v} = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ при $v \neq 0$.

Док–во. 3: $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = v\,du + u\,dv$. Остальные формулы доказываются аналогично.

20.2 Производная сложной функции

Теорема 2 (производиая сложной функции). Пусть функция $g\colon X \to Z$ дифференцируема в точке $a \in X$, а функция $f\colon Z \to \mathbb{R}$ дифференцируема в соответствующей точке $b = g(a) \in Z$. Тогда сложная функция $f \circ g\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a и

$$(f \circ g)(a) = f'_z\big(g(a)\big)g'_x(a).$$

Док–во. Пусть приращению Δx аргумена x в точке a соответствует приращение $\Delta z = g(a + \Delta x) - g(a)$ функции $z = g(x)$, а Δz, в свою очередь, вызывает приращение $\Delta y = f(b + \Delta z) - f(b)$ функции $y = f(z)$. Так как функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$ дифференцируемы в точках b и a соответственно, то их приращения можно записать в виде

$$\Delta y = \big(f'(b) + \alpha(\Delta z)\big)\Delta z, \qquad \Delta z = \big(g'(a) + \beta(\Delta x)\big)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta z)$ и $\beta(\Delta x)$ — б.м. при $\Delta z \to 0$ и $\Delta x \to 0$ соответственно. Отсюда

$$\Delta y = \big(f'(b) + \alpha(\Delta z)\big)\big(g'(a) + \beta(\Delta x)\big)\Delta x = f'(b)g'(a)\Delta x + \gamma\Delta x = \Delta F.$$

Здесь $\gamma = f'(b)\beta(\Delta x) + g'(a)\alpha(\Delta z) + \alpha(\Delta z)\beta(\Delta x)$, а $\Delta F = f\big(g(a+\Delta x)\big) - f\big(g(a)\big)$ — приращение сложной функции $F(x) = f\big(g(x)\big)$, вызванное приращением Δx ее аргумента x. Так как $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то γ является б.м. при $\Delta x \to 0$, а значит, функция F дифференцируема в точке a и $F'(a) = f'(b)g'(a)$. $\triangleright$

Следствие 2 (инвариантность формы первого дифференциала). Формула для дифференциала функции $dy = f'(u)du$ одинакова для случая, когда u —

аргумент этой функции, и для случая, когда u — функция какого–либо другого аргумента.

Док–во. Если u — аргумент функции f, то указанная формула следует из формулы связи производной и дифференциала (см. часть 2 теоремы 1 из предыдущего параграфа).

Пусть u — функция аргумента x: $u = g(x)$. Пусть эта функция дифференцируема в точке a, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $b = g(a)$. По теореме 2 сложная функция $F(x) = f\big(g(x)\big)$ дифференцируема в точке a, а ее дифференциал в точке a есть

$$dy = dF(a) = F'(a)dx = f'(b)g'(a)dx = f'(b)du,$$

где дважды использовалась указанная формула связи производной и дифференциала. Т.е. при $u = b$ в этом случае также получается указанная в теореме формула. $\triangleright$

Геометрическая интерпретация этого следствия. Формула для дифференциала не меняется при переходе от координаты u к координате x. Т.е. дифференцпал не зависит от выбора системы координат и характеризует собственно геометрические свойства функции, а не ее представление в координатах.

Из теоремы 2 следует формула **логарифмической производной:** $y' = y(\ln y)'$. Она применяется в случае, когда вычисление $(\ln y)'$ проще, чем вычисление y'.

20.3 Производная обратной функции

Теорема 3 (производиая обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную производную $f'(a) \neq 0$, и для $f(x)$ существует обратная функция $x = g(y)$ непрерывная в соответствующей точке $y = b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{5}$$

Док–во. Дадим значению $y = b$ приращение Δy. Тогда функция $x = g(y)$ тоже получит соответствующее приращение Δx. При $\Delta y \neq 0$ в силу однозначности функции $y = f(x)$ будет отлично от нуля и Δx. Поэтому допустимо рассматривать отношения

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y/\Delta x}.$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$ ввиду непрерывности функции $x = g(y)$. Но тогда знаменатель в правой части стремится к пределу $f'(a) \neq 0$, т.е. существует конечный предел правой части, равный $1/f'(a)$. Следовательно, существует конечный предел и левой части. $\triangleright$

Дадим геометрическую интерпретацию формулы (5). Графики рассмотренных в теореме 3 функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ в координатной плоскости xOy совпадают (рис. 28). Поэтому для углов α и β наклона к осям координат касательной, проведенной к кривой графика в точке $M(a;b)$, справедливо равенство $\alpha+\beta=\pi/2$, и, согласно геометрическому смыслу производной,

$$g'(b)=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(a)}.$$

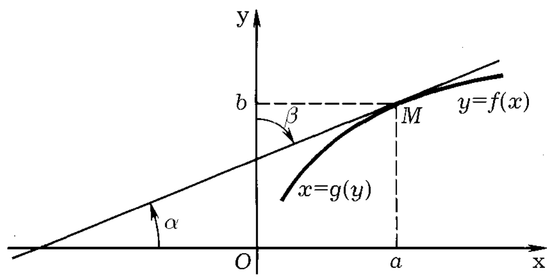

Рис. 28

Пример 2. Функция $y=\arcsin x$ $(x\in[-1,1], y\in[-\pi/2,\pi/2])$ является обратной к функции $x=\sin y$, имеющей производную $x'=\cos y>0$ для всех $y\in(-\pi/2,\pi/2)$. В таком случае для всех $x\in(-1,1)$, согласно теореме 3, существует производная y', причем

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Точки $x=\pm 1$, принадлежащие области определения функции y, исключены из рассмотрения, поскольку в соответствующих им точках $y=\pm\pi/2$ области значений этой функции $x'=\cos y=0$.

Задача 2. Выведите формулы для $(\ln x)'$ и $(\operatorname{arctg} x)'$.

Замечание. Для лучшего запоминания формул для производных сложной и обратной функций их лучше записать так:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx},\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

21 Правила дифференцирования II

См. [Ив. §2.4–2.6, 4.1–4.2, 4.4–4.5, стр. 51–59, 78–88, 91–101].

21.1 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором множестве E. Тогда производная $f'(x)$ является тоже функцией аргумента x с областью определения E. Если эта новая функция $f'(x)$ дифференцируема, то можно найти ее производную, называемую **второй производной** исходной **функции** $f(x)$, или **производной второго порядка**, и обозначаемую $f''(x)$. В связи с этим $f'(x)$ для определенности называют **первой производной**, или **производной первого порядка**.

Механический смысл второй производной. Пусть функция $s = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения точки во времени t. Тогда ее вторая производная — это скорость изменения скорости $v = f'(t)$ точки, т.е. ускорение.

Если $f''(x)$ в свою очередь является дифференцируемой функцией аргумента x, то последующее дифференцирование $f''(x)$ даст третью производную $f'''(x) = \big(f''(x)\big)'$, или производную третьего порядка, и так далее.

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка этой функции и обозначают $f^{(n)}(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}, \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ и т.п.

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка в предположении, что dx постоянно. Дифференциал n-го порядка обозначают $d^n y, d^n f(x)$. По определению

$$f^{(n)}(x) = \big(f^{(n-1)}(x)\big)', \qquad d^n f(x) = d\big(d^{n-1} f(x)\big).$$

Дифференциалы более высоких порядков, чем первый, вообще говоря, не обладают свойством инвариантности формы записи.

Теорема 1 (**неинвариантность формы второго дифференциала**).
Пусть $y = f(z)$. Тогда
1) если z — аргумент функции y, то $d^2y = f''(z)dz^2$;
2) если z — функция какого–либо другого аргумента, то $d^2y = f''_{zz}(z)dz^2 + f'_z(z)d^2z$.

Док–во. 1) По формуле связи производной и дифференциала имеем $dy = f'(z)\,dz$ и $d\big(f'(z)\big) = f''(z)\,dz$ по определению второй производной. Согласно определению второго дифференциала

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(z)\,dz\big) = d\big(f'(z)\big)\,dz = f''(z)\,dz^2,$$

где dz мы считаем постоянным.

2) Если $z = g(x)$, то из свойства инвариантности формы первого дифференциала имеем $dy = f'(z)\,dz$. Подчеркнем, что $dz = g'(x)\,dx$ и $z = g(x)$ нельзя считать в данном случае независимыми. Поэтому дифференциал от dy следует искать как дифференциал произведения:

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(z)\,dz\big) = d\big(f'(z)\big)\,dz + f'(z)\,d(dz) = f''(z)\,dz^2 + f'(z)d^2z.$$

21.2 Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически

Пусть значения двух переменных x и y связаны уравнением $F(x,y) = 0$, где левая часть представляет собой выражение, содержащее x, y и элементарные функции. Если функция $y = f(x)$ такова, что подстановка ее в уравнение вместо y превращает уравнение в тождество, то говорят, что уравнение задает **функцию** $y = f(x)$ **неявным способом**.

Пример 1. Уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{1}$$

неявным способом задает две элементарные функции

$$f_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2},$$

которые при $y \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$ соответствуют двум полуокружностям радиуса R.

Для вычисления производной неявно заданной дифференцируемой функции следует продифференцировать обе части равенства $F(x,y) = 0$ по x, использовать правило дифференцирования сложной функции, и затем решить полученное уравнение относительно y'. Дифференцируя полученное равенство для y' еще раз и учитывая выражение для первой производной, получаем выражение для y''. Для вычисления дифференциала неявно заданной дифференцируемой функции следует вычислить дифференциал обеих частей равенства $F(x,y) = 0$, используя свойства дифференциала, а затем решить полученное уравнение относительно dy.

Пример 1. Дифференцируя (1) по x с учетом правила дифференцирования сложной функции, получаем $2x + 2yy' = 0$. Отсюда при $y \neq 0$ найдем $y' = -x/y$. Таким образом, в данном случае удалось найти производную y', не устанавливая явной зависимости y от x.

Дифференциал (1) есть $2xdx + 2ydy = 0$, а значит, $dy = -(x/y)dx$.

Дифференцируя равенство $y' = -x/y$ еще раз и учитывая выражение для первой производной и (1), записываем

$$y'' = \frac{-y + xy'}{y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}. \qquad \triangleright$$

Пусть зависимость между x и y задана соотношениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a,b). \tag{2}$$

Функцию $y = f(x)$ называют **параметрически заданной** соотношениями (2), если $y(t) = f\big(x(t)\big)$.

Такие функции возникают при рассмотрении кривых на плоскости. А именно, на координатной плоскост xOy любому значению параметра t из промежутка (a,b) соответствует точка с координатам $(x;y)$. При изменении t точка описывает некоторую кривую, а (2) являются **параметрическими уравнениями** этой **кривой**.

Если функция $x = x(t)$ имеет при $t \in (a,b)$ обратную функцию $t = t(x)$, то y можно представить как сложную функцию от x: $y = f(x) = y\big(t(x)\big)$. Строго монотонная функция всегда имеет обратную. Поэтому разбивая интервал (a,b) на части, на которых функция $x = x(t)$ строго монотонна, на каждом таком участке от параметрически заданной функции мы можем перейти к аналитически заданной функции $y = f(x)$. Однако обратная функция элементарной функции не всегда является элементарной. Поэтому переход от параметрического способа задания функции к явному аналитическому не всегда возможен в классе элементарных функций.

Пример 2. Циклоида — траектория точки, лежащей на колесе, если колесо катится без скольжения по прямой.

Задача 1. Докажите, что циклоида задается уравнениями
$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

Отметим, что функция $x = a(t - \sin t)$ является возрастающей на всей прямой $\mathbb{R}$. Поэтому циклоида является графиком некоторой функции, но эта функция не является элементарной, так как параметр t не удается исключить из данных уравнений и явно выразить y через x в классе элементарных функций. $\triangleright$

Следующая теорема позволяет вычислять производную параметрически заданной функции, не находя ее явного представления. При этом производная параметрически заданной функции является параметрически заданной функцией.

Теорема 2 (**производиая параметрически заданной функции**). Пусть в (2) функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в промежутке T, причем $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in T$, и функция $x(t)$ строго монотонна в этом промежутке. Тогда производная функции, заданной параметрически соотношениями (2), является функцией, параметрически заданной соотношениями

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad x = x(t), \quad t \in (a, b).$$

Док–во. По теореме о существовании и непрерывности обратной функции существует функция $t = t(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $X = x(T)$, обратная к функции $x(t)$. Согласно теореме о производной обратной функции эта функция дифференцируема в X. Поэтому сложная функция $y = f(x) = y\big(t(x)\big) = (y \circ t)(x)$ определена в промежутке X и удовлетворяет условиям теоремы о производной сложной функции. Используя эту теорему вместе с теоремой о производной обратной функции, получаем $y'_x = y'(t)t'(x) = y'(t)/x'(t)$ $\forall t \in T$. $\triangleright$

Замечания. 1. Для лучшего запоминания формулы из теоремы 2 ее лучше записать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

2. Для вычисления второй производной параметрически заданной функции следует дважды применить теорему 2, при этом в общем случае

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

3. Для вычисления дифференциала параметрически заданной функции можно вычислить дифференциалы y и x как функций t и, исключив из данных уравнений dt, явно выразить dy через dx.

Пример 2. Найдем y', dy, y'' в случае циклоиды. Функция $x = a(t - \sin t)$ является возрастающей на всем множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. Имеем $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$ и по теореме 2

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Поскольку $x'(t) \neq 0$ при $t \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, сложная функция $y\big(t(x)\big)$ дифференцируема по x в точках $x \neq 2ak\pi$. В итоге

$$\begin{cases} y'_x = \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2}, \\ x = a(t - \sin t), \end{cases} \qquad t \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Еще раз применяя теорему 2, но уже к функции (3), получаем

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t(t)}{x'(t)} = \frac{-1/(2\sin^2\frac{t}{2})}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

При вычислении дифференциала сначала получаем $dx = a(1 - \cos t)dt$ и $dy = a \sin t dt$, а затем

$$dy = \frac{\sin t}{1-\cos t} dt.$$

22 Основные теоремы дифференциального исчисления

См. [Ив: §5.1–5.3, стр. 106–123].

Эти теоремы дают информацию о значении производной функции в некоторой внутренней точке рассматриваемого отрезка.

22.1 Теоремы о нулях производных

Точку $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называют **точкой локального минимума** функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, а значение функции в ней — **локальным минимумом,** если
1) точка x_0 является предельной для левой $E \cap (-\infty; x_0)$ и правой $E \cap (x_0; +\infty)$ частей области определения функции,
2) существует выколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 такая, что в любой точке $x \in \dot{U}(x_0) \cap E$ имеем $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Аналогично (изменяя только тип неравенства) определяются **точки локального максимума** ($f(x_0) \geqslant f(x)$), **строгого локального минимума** ($f(x_0) < f(x)$) и **строгого локального максимума** ($f(x_0) > f(x)$).

Локальный максимум или локальный минимум называют **локальным экстремумом**, а строгие локальные максимум или минимум — **строгим локальным экстремумом**.

Пример 1. На рис. 29 сплошной линией изображен график функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$. В данном случае точки x_*, d и x_1 — точки локального максимума, c и x_2 — точки локального минимума, все $x \in (c, d)$ — точки локального экстремума (локальных максимума и минимума одновременно). Функция не определена слева от точки a и справа от точки b, поэтому точки a и b не являются точками локального экстремума.

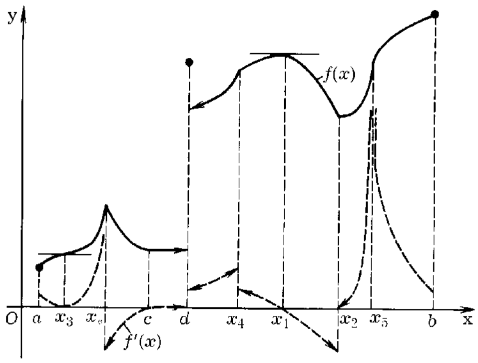

Рис. 29

Далее слова "строгий" и "локальный" будем иногда опускать. При этом точку x_0 будем называть **точкой экстремума (максимума** или **минимума)**, а **значение** $f(x_0)$ **функции** — **экстремальным (максимальным** или **минимальным)**. Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума или минимума, то будем писать соответственно $f(x_0) = f_{\max}$ или $f(x_0) = f_{\min}$. Таким образом, на рис. 29 x_*, d, x_1 и x_2 — точки экстремума функции $f(x)$ (x_*, d и x_1 — точки максимума и x_2 — точка минимума). Следует заметить, что максимальное значение функции $f(x)$ в интервале (a, b) не обязано быть больше любого минимального значения этой функции в данном интервале. Например, максимальное значение $f(x_*)$ функции $f(x)$, график которой изображен на рис. 29, меньше ее минимального значения $f(x_2)$. Однако если $c \in E \subset \mathbb{R}$ — точка (глобального) экстремума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на области определения функции и точка c является предельной для $E \cap (-\infty; x_0)$ и для $E \cap (x_0; +\infty)$, то x_0 — точка локального экстремума этой функции.

Теорема 1 (**Ферма**). Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке локального экстремума c, то $f'(c) = 0$.

Док–во. По определению в точке c локального минимума при малых Δx имеем $\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geqslant 0$. По теореме о предельном переходе в неравенстве получаем

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geqslant 0, \qquad f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

А значит, $f'(c) = 0$. Аналогично в точке локального максимума. ▷

Геометрический смысл теоремы. Обращение в нуль производной $f'(c)$ означает, что касательная к кривой графика функции $f(x)$ в точке $M(c; f(c))$ параллельна оси Ox (рис. 30).

При доказательстве теоремы Ферма существенно использование того, что c является предельной для левой и правой частей области определения функции. Это позволило рассматривать точки x, лежащие как справа, так и слева от точки c. Без этого предположения утверждение теоремы может оказаться неверным. В самом деле, если функция достигает наибольшего значения в граничной точке на одном из концов (a или b) промежутка, то производная в такой точке (при условии, что производная существует) может и не быть равной нулю (рис. 31).

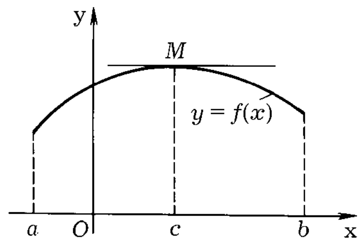

Рис. 30

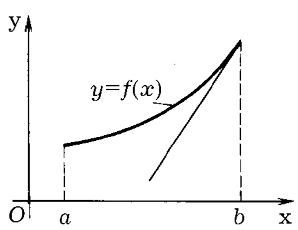

Рис. 31

Теорема 2 (**Ролля**). Если функция $y = f(x)$
1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируема в интервале (a, b);
3) на концах отрезка принимает равные значения $(f(a) = f(b))$,

то между точками a и b найдется, по крайней мере, одна точка c $(a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Док–во. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, она, согласно теореме Вейерштрасса, достигает на этом отрезке своих наибольшего M и наименьшего m значений. Рассмотрим два случая.

1. $M = m$. Функция $f(x)$ в интервале (a, b) сохраняет постоянное значение, и поэтому $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$, т.е. в качестве c можно взять любую точку из интервала (a, b).

2. $M > m$. Поскольку, согласно условию теоремы, $f(a) = f(b)$, одного из значений M или m функция достигает во внутренней точке c интервала (a, b). Тогда из теоремы Ферма следует, что в этой точке $f'(c) = 0$. $\triangleright$

Теорема Ролля имеет следующее **геометрическое толкование**: если ординаты непрерывной кривой на концах отрезка $[a, b]$ равны между собой и кривая в каждой внутренней точке этого отрезка имеет невертикальную касательную, то на кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси Ox (на рис. 32 точки M_1 и M_2, соответствующие точкам c_1 и c_2 интервала (a, b)).

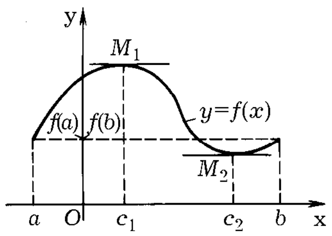

Рис. 32

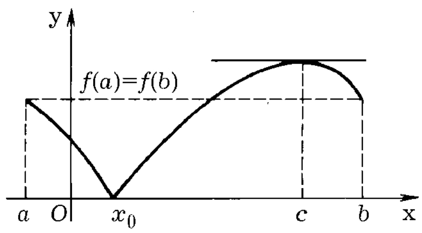

Рис. 33

Заметим, что все условия теоремы Ролля существенны для справедливости ее утверждения. Например, функция $y = |x|$ непрерывна на отрезке $[-1,\ 1]$, принимает на его концах равные значения, но не имеет конечной двусторонней производной в точке $x = 0$, внутренней для этого отрезка. Так как $y' = +1$ $\forall x \in (0, 1)$ и $y' = -1$ $\forall x \in (-1, 0)$, в интервале $(-1, 1)$ нет ни одной точки, в которой бы производная y' обращалась в нуль.

Однако теорема Ролля носит лишь достаточный характер, т.е. если все условия теоремы выполнены, то ее утверждение верно, но если нарушено хотя бы одно ее условие, то нельзя сказать что-либо определенное о существовании точки, в которой производная рассматриваемой функции обращалась бы в нуль. На рис. 33 видно, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на концах отрезка имеет равные значения, но не является дифференцируемой во внутренней точке x_0 этого отрезка. Тем не менее существует точка $x = c$, в которой $f'(c) = 0$ (касательная в соответствующей точке кривой графика этой функции параллельна оси Ox).

Если функция $s = f(t)$ задает зависимость от времени t координаты s точки при ее непрерывном прямолинейном движении, то условие $f(a) = f(b)$ означает, что эта точка после начала движения в момент времени a через промежуток времени $b - a$ должна вернуться в исходное положение. Но для этого хотя бы в один из промежуточных моментов времени $t_0 \in (a, b)$ ее скорость движения $f'(t_0)$ должна стать равной нулю. Такова **механическая интерпретация** теоремы Ролля.

22.2 Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 3 (**Лагранжа**). Пусть функция $y = f(x)$
1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,
2) дифференцируема в интервале (a, b).
Тогда между точками a и b найдется хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, для которой справедливо равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

Док–во. Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных функций и в интервале (a, b) имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

и, наконец, непосредственной подстановкой легко убедиться, что $F(a) = F(b) = 0$. Итак, в интервале (a, b) существует точка $x = c$, в которой производная

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

а отсюда следует (1). $\triangleright$

Для выяснения **геометрического смысла** теоремы Лагранжа заметим, что отношение

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC}$$

является угловым коэффициентом хорды AB (рис. 34), а $f'(c)$ — угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = c$. Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа равносильно следующему: на непрерывной дуге AB, имеющей в каждой точке невертикальную касательную, всегда найдется по крайней мере одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB (на рис. 34 таких точек две — M_1 и M_2).

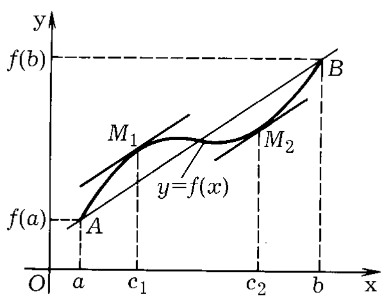

Рис. 34

Если t — время, а $f(t)$ — координата точки при прямолинейном движении, то отношение $\big(f(b)-f(a)\big)/(b-a)$ определяет среднюю скорость точки за период времени $b-a$ (см. пример 1 из §19). Тогда утверждению теоремы Лагранжа можно дать такую **механическую интерпретацию**: в промежутке (a,b) есть хотя бы один момент времени c, для которого мгновенная скорость $f'(c)$ совпадает со средней скоростью точки.

Теорема Ролля — частный случай теоремы Лагранжа, так как при $f(a)=f(b)$ хорда AB параллельна оси Ox. Как и теорема Ролля, теорема Лагранжа носит лишь достаточный характер. Это видно на рис. 35 и рис. 36, где изображены графики функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, но не дифференцируемых в его внутренней точке x_0. График на рис. 35 не имеет точки, в которой касательная параллельна хорде AB, а у графика на рис. 36 такая точка M существует.

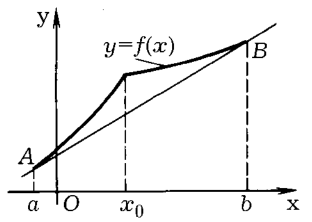

Рис. 35

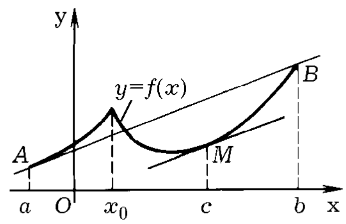

Рис. 36

Доказанную в теореме 3 формулу (1) называют **формулой Лагранжа**. Перепишем ее следующим образом. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и придадим аргументу x функции $y=f(x)$ приращение $\Delta x \neq 0$, не выводящее точку $x+\Delta x$ за пределы отрезка $[a,b]$. Запишем (1) для отрезка $[x_0, x_0+\Delta x]$, если $\Delta x > 0$, или для отрезка $[x_0+\Delta x, x_0]$, если $\Delta x < 0$. При этом число c, заключенное между x_0 и $x_0+\Delta x$, можно представить в виде $c = x_0 + \Theta\Delta x$, где число $\Theta \in (0,1)$. Тогда вместо (1) получим $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0+\Theta\Delta x)\Delta x$, или с учетом обозначения $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$\Delta y = f'(x_0+\Theta\Delta x)\Delta x.$$

Это равенство называют **формулой конечных приращений**. Она позволяет найти точное значение приращения функции $y=f(x)$ при любом конечном приращении Δx аргумента x в отличие от приближенной формулы

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x,$$

погрешность которой стремится к нулю лишь при $\Delta x \to 0$. Эту приближенную формулу называют **формулой бесконечно малых приращений**, поскольку она верна с точностью до бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ функции $o(\Delta x)$ более высокого порядка, чем приращение Δx аргумента x.

Заменяя c в (1) на $a+\Theta(b-a)$, где Θ — некоторое число из интервала $(0,1)$, получаем формулу, справедливую и при $a > b$.

Следствие (критерий постоянства функции). Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция постоянна на этом отрезке т. и т.т., к. во всех внутренних точках отрезка она имеет равную нулю производную.

Док–во. Необходимость очевидна, так как постоянная функция имеет нулевую производную.

Для доказательства достаточности выберем в полуинтервале $(a, b]$ произвольную точку x_1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в интервале (a, b) имеет нулевую производную, то она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a, x_1] \subseteq [a, b]$. Поэтому

$$f(x_1) - f(a) = f'(c)(x_1 - a), \qquad c \in (a, x_1).$$

Но $f'(c) = 0 \ \forall c \in (a, x_1) \subseteq (a, b)$, и поэтому $f(x_1) = f(a)$, т.е. значение функции в произвольной точке на отрезке $[a, b]$ совпадает с ее значением в фиксированной точке a. Следовательно, функция $f(x)$ постоянна на всем отрезке. $\triangleright$

Теорему Лагранжа обобщает следующая теорема.

Теорема 4 (**Коши**). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:
1) непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2) дифференцируемы в интервале (a, b);
3) производиая $g'(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b).
Тогда между точками a и b найдется хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, для которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Док–во: $g(b) - g(a) \neq 0$, иначе по теореме Ролля $\exists d \in (a, b)$ $g'(d) = 0$. Применяя теорему Ролля к функции

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

получаем утверждение теоремы. $\triangleright$

Рассмотрим **геометрическую интерпретацию** теоремы Коши. Если функция $g(x)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$, то соотношения

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x), \end{cases} \qquad x \in [a, b]$$

задают параметрически функцию $y(z)$ с областью определения $g([a, b])$, а x играет роль параметра, изменяющегося на отрезке $[a, b]$. На рис. 37 изображен график функции $y(z)$ для случая $g(a) < g(b)$. Производная $y'(z)$ этой функции в точке $z_0 = g(c)$, $c \in (a, b)$, определяющая угловой коэффициент касательной к графику в точке $M\big(z_0; y(z_0)\big)$, согласно формуле производной параметрически заданной функции, равна $f'(c)/g'(c)$, что совпадает с правой частью формулы из теоремы Коши. Поэтому геометрический смысл состоит в том, что на произвольной дуге графика дифференцируемой функции, заданной параметрически, между концами $A\big(g(a); f(a)\big)$ и $B\big(g(b); f(b)\big)$ этой дуги всегда можно найти хотя бы одну точку M (на рис. 37 таких точек две — M_1 и M_2), в которой касательная к графику параллельна стягивающей концы дуги хорде AB с угловым коэффициентом $\big(f(b) - f(a)\big)/\big(g(b) - g(a)\big)$.

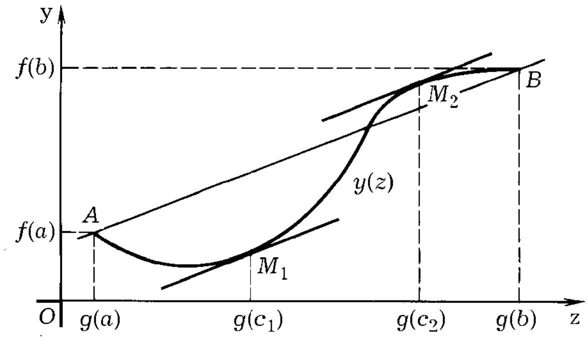

Рис. 37

Теореме Коши можно дать и механическое толкование. Пусть функции $z = g(x)$ и $y = f(x)$ задают изменение во времени x координат точки при ее движении в плоскости zOy, а график зависимости $y(z)$ является траекторией этой точки. Тогда направленный по касательной к траектории вектор скорости точки с проекциями $g'(x)$и $f'(x)$ соответственно на оси Oz и Oy в некоторый промежуточный момент времени $c \in (a, b)$ будет коллинеарен вектору перемещения точки за промежуток времени $b-a$, имеющему проекции $g(b)-g(a)$ и $f(b)-f(a)$ соответственно на оси Oz и Oy.

23 Правило Бернулли — Лопиталя

См. [Ив: §6.1–6.3, стр. 131–137, 139–146] или [З: стр. 245–246].

23.1 Правило Бернулли — Лопиталя

Теорема 1. Пусть
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a, a+\delta)$ для некоторого δ;
2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ (или $= \infty$) и $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$ (соот. $= \infty$);
3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанного интервала;
4) существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций и

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Док–во только для $[0/0]$. Доопределим: $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны на отрезке $[a, x]$, где $x \in (a, a+\delta)$, и применима теорема Коши:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Здесь $c = a + \Theta(x-a)$, $0 < \Theta < 1$. Если $x \to a$, то и $c \to a$ и получаем утверждение теоремы. $\triangleright$

Аналогичные теоремы верны для других типов пределов: $x \to a-$, $x \to a$, $x \to (\pm)\infty$. Например, в случае $x \to +\infty$ аналогичная теорема доказывается заменой $z = \frac{1}{x} \to 0+$.

Из теоремы 1 следует, что предел отношения функций существует при условии существования предела отношения их производных. Однако обратное неверно, т.е. если предел отношения производных не существует, то это еще не означает, что не существует предел отношения самих функций. Эта особенность теоремы 1 объясняется тем, что в ее доказательстве из стремления x к a и того, что $c \in (a, x)$, мы выводили стремления c к a. Обратное же неверно: при $c \to a$ и $c \in (a, x)$ x может не стремиться к a.

Задача 1. Придумать пример конечного предела отношения функций, для которого не существует предел отношения производных.

Общая схема применения правила Бернулли — Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$ состоит из трех этапов:

1) проверка выполнения условий теоремы 1 по отношению к функциям $f(x)$ и $g(x)$ по отдельности;

2) проверка существования предела отношения $f'(x)/g'(x)$ производных этих функций, и если он существует, то его вычисление,

и тогда

3) применение теоремы 1.

При использовании правила Бернулли — Лопиталя производные $f'(x)$ и $g'(x)$ исходных функций $f(x)$ и $g(x)$ сами могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими функциями. Если для функций $f'(x)$ и $g'(x)$ выполнены условия теоремы 1, в том числе существует равный L предел отношения производных этих функций, то правило Бернулли — Лопиталя можно применить повторно. В том случае, когда вторые и более высокого порядка производные исходных функций удовлетворяют указанным выше условиям, правило Бернулли — Лопиталя можно применять последовательно и далее, если есть надежда получить в конце концов отношение производных такого порядка, для которого легко установить существование предела и вычислить его. Тогда будут существовать и совпадать с ним пределы всех отношений производных более низких порядков и предел отношения исходных функций.

Наконец, отметим, что применение правила Бернулли — Лопиталя целесообразно сочетать (если это возможно) с выделением главной части б.м. или б.б. функций или с заменой их эквивалентными им более простыми функциями.

23.2 Сравнение на бесконечности роста показательной, степенной и логарифмической функций

Пример 1. Сравним поведение при $x \to +\infty$ б.б. функций: показательной a^x ($a > 1$); степенной x^s ($s > 0$) и логарифмической $\log_a x$ ($a > 1$). Применим теорему 1:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^s} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^s)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x\ln a)}{sx^{s-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/\ln a}{sx^s} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(a^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0.$$

Поскольку $x^s/a^x = (x/a^{x/s})^s = (x/b^x)^s$, где $b = a^{1/s} > 1$, и в силу непрерывности степенной функции в точке 0

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^s}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{b^x}\right)^s = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{b^x}\right)^s = 0. \qquad \triangleright$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. При $x \to +\infty$ показательная функция a^x при $a > 1$ является б.б. более высокого порядка (растет быстрее), чем степенная x^s с любым положительным показателем s, которая, в свою очередь, является б.б. более высокого порядка, чем логарифмическая функция $\log_a x$ при $a > 1$ (рис. 38).

Следствие. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\log_a x}{x^s} = 0, \quad s < 0,\ a > 1.$

Док–во: делаем замену $z = \frac{1}{x} \to +\infty$ и используем пример 1.

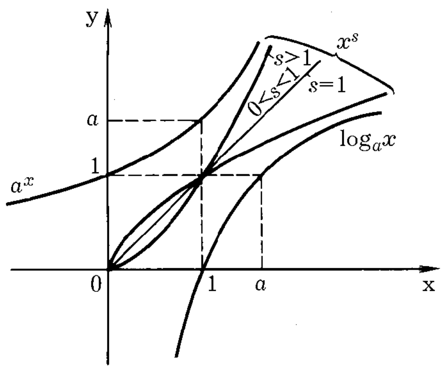

Рис. 38

24 Формула Тейлора

См. [Ив: §7.1–7.5, стр. 156–183] или [З: стр. 215–227].

Формула Тейлора позволяет функцию, заданную сложным аналитическим выражением, заменить удобным для анализа многочленом. В частности, формула Тейлора применяется для нахождения приближенных значений функций.

24.1 Теоремы Тейлора

Пусть в точке a функция $f(x)$ определена и имеет конечные производные всех порядков до n-го включительно. Многочлен

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называют **многочленом Тейлора порядка** n, а его коэффициенты — **коэффициентами Тейлора функции** $f(x)$ **в точке** a.

Многочлен Тейлора дает некоторое приближение к функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, т.е. $f(x) \approx P_n(x)$. Погрешность этого приближенного представления, т.е. разность $f(x) - P_n(x)$, обозначим $R_n(x)$. Тогда получим **формулу Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в точке a**:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

При этом $R_n(x)$ называется **остаточным членом формулы Тейлора**. Утверждения о малости остаточного члена называют **теоремами Тейлора**. Эти утверждения можно сформулировать разными способами, поэтому существует несколько таких теорем.

Теорема 1 (**формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано**). Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки a производные до порядка $n-1$ и производную порядка n в точке a, то при $x \to a$

$$R_n(x) = o\big((x-a)^n\big).$$

Док–во. Фиксируем точку a. Будем обозначать через $P_{n,g}(x)$ многочлен Тейлора порядка n функции $g(x)$ в точке a. Тогда из определения многочлена Тейлора имеем: $P_{n,g}(a) = g(a)$ и

$$P_{n,g}{}'(x) = 0 + g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}2(x-a) + \ldots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1} = P_{n-1,g'}(x).$$

Последовательно $(n-1)$ раз применяя правило Бернулли – Лопиталя и приведенные равенства для функций $g = f, f', f'', \ldots, f^{(n-2)}$, получаем:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-a)^n} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to a}\frac{f'(x) - P_{n-1,f'}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = [\frac{0}{0}] = \cdots =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - P_{1,f^{(n-1)}}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} =$$
$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0,$$

т.к. в силу определения производной последний предел равен $f^{(n)}(a)$. Из доказанного предела и определения o–малого получаем утверждение теоремы. ▷

Форма Пеано остаточного члена не позволяет вычислить погрешность представления функции многочленом Тейлора при заданном значении x из окрестности точки a и не дает возможности установить размеры такой окрестности, в которой многочлен воспроизводил бы эту функцию с наперед заданной точностью, а также ничего не говорит о том, как можно влиять на погрешность за счет роста степени n многочлена. Докажем другие варианты теоремы Тейлора.

Теорема 2 (**формула Тейлора с остаточным членом в общей форме**). Если на отрезке с концами x, a функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то при любой функции g, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную в его внутренних точках, найдется такая точка c, лежащая между a и x, что остаточный член формулы Тейлора порядка n в точке a есть

$$R_n(x) = \frac{g(x)-g(a)}{g'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{1}$$

Док–во. Зафиксируем произвольное $x > a$, для которого выполняются условия теоремы. Тогда существует многочлен $P_{n,f}$ Тейлора порядка n функции f в любой точке $z \in [a, x]$. Составим вспомогательную функцию

$$F(z) = f(x) - P_{n,f}(x) = f(x) - f(z) - f'(z)(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

причем будем считать, что z меняется на отрезке $[a, x]$. На этом отрезке функция F непрерывна как алгебраическая сумма непрерывных функций и на концах отрезка принимает значения $F(a) = R_n(x)$ и $F(x) = 0$. Кроме того, в интервале (a, x) существует производная

$$F'(z) = -f'(z) - \big(f''(z)(x-z) - f'(z)\big) - \Big(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - f''(z)(x-z)\Big) - \ldots -$$

$$-\Big(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\Big) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Функции $F(z)$ и $g(z)$ на отрезке $[a, x]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, поэтому

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}, \tag{2}$$

где c — точка, лежащая между точками a и x. Поскольку $F(x) = 0$, $F(a) = R_n(x)$ и $F'(c) = -f^{(n+1)}(c)(x-c)^n/n!$, из (2) получим формулу (1).

Случай $x > a$ рассматривается аналогично. $\triangleright$

Доказанная теорема носит вспомогательный характер: применяя ее к конкретной функции $g(z)$, получаем другие формы остаточного члена.

Теорема 3 (**формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши**). Если на отрезке с концами x, a функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то найдется такое число Θ, что

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}\big(a + \Theta(x-a)\big)(1-\Theta)^n (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Док–во заключается в применение теоремы 2 к функции $g(z) = (x-z)$. При этом точку c представляем в виде $c = a + \Theta(x-a)$, где $0 < \Theta < 1$, а $g(x) = 0$, $g(a) = x - a$, $g'(c) = -1$, $x - c = (1-\Theta)(x-a)$.

Теорема 4 (**формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**). Если на отрезке с концами x, a функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то найдется такое число Θ, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a + \Theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Док–во следует из теоремы 2, если положить $g(z) = (x-z)^{n+1}$.

24.2 Формулы Маклорена основных элементарных функций

Формула Маклорена — формула Тейлора при $a = 0$. Вычисляя производные до порядка n основных элементарных функций в точке 0, получаем для них формулы Маклорена.

Теорема 5. Формулы Маклорена основных элементарных функций имеют вид

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),\\
(1+x)^s &= 1 + sx + s(s-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + s(s-1)\cdots(s-n+1)\frac{x^n}{n!} + R_n(x).
\end{aligned}$$

Док–во. Для функции $f(x) = \sin x$ имеем $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и т.д. Таким образом, в точке $x = 0$ $f(0) = 0$, все производные четного порядка также равны нулю, а все производные нечетного порядка $k = 2i - 1$ $(i \in \mathbb{N})$ равны $f^{(2i-1)}(0) = (-1)^{i-1}$. Поэтому формула Маклорена порядка $n = 2m$ для этой функции имеет указанный в теореме вид.

Остальные формулы теоремы выводятся аналогично. $\triangleright$

Остаточные члены $R_n(x)$ приведенных в теореме 5 формул Маклорена можно оценить, используя форму Лагранжа остаточного члена. Например, для функции $y = \sin x$ имеем $y^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cos x$, поэтому форма Лагранжа имеет вид

$$R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m \cos(\Theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Так как $|\cos(\Theta x)| \leqslant 1$, то

$$|R_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Важно то, что полученная оценка не зависит от значения Θ, которое нам не известно.

Для функции $(1+x)^s$ при $x > 0$, $n + 1 > s$ имеем

$$\left|f^{(n+1)}(\Theta x)\right| = \left|s(s-1)\cdots(s-n)\frac{1}{(1+\Theta x)^{n+1-s}}\right| < \left|s(s-1)\cdots(s-n+1)\right|,$$

а значит

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{|s(s-1)\ldots(s-n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Из приведенных в теореме 5 формул Маклорена можно получить формулы Тейлора для основных элементарных функций, используя их свойства.

Пример 1. Найдем формулу Тейлора для функции $\cos x$ в точке a:

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos\big((x-a)+a\big) = \cos(x-a)\cos a - \sin(x-a)\sin a = \\ &= \cos a\left(1-\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-a)^{2n}}{(2n)!}\right) - \sin a\Bigg((x-a) - \\ &- \frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-a)^{2n-1}}{(2n-1)!}\Bigg) + R_{2n}(x).\end{aligned}$$

Пример 2. Формула Тейлора для функции x^s в точке $a\neq 0$ выводится так:

$$\begin{aligned}x^s &= \big(a+(x-a)\big)^s = a^s\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^s = a^s\Bigg(1+s\frac{x-a}{a}+ \\ &+ s(s-1)\frac{(x-a)^2}{2!a^2}+\ldots+s(s-1)\cdots(s-n+1)\frac{(x-a)^n}{n!a^n}\Bigg) + R_n(x).\end{aligned}$$

24.3 Применение формулы Тейлора

1) Приближенные вычисления.

Пример 3. Покажем, как применить формулу Тейлора к решению задачи вычисления $\sqrt{10}$ с точностью $\varepsilon = 0.01$. Имеем: $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1+1/9}$, а значит, необходимо вычислить значение функции $f(x) = (1+x)^{1/2}$ при $x = 1/9$ с точностью $\varepsilon/3$. Используем формулу Маклорена для этой функции, определяя n из условия $|R_n(x)| < \varepsilon/3$. Из полученной ранее оценки для $R_n(x)$ убеждаемся, что $n = 1$ подходит. Заменяя значение функции $f(x)$ на значение многочлена Тейлора порядка 1, получаем:

$$\sqrt{10} \approx 3(1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}) \approx 3,17.$$

2) Вычисление пределов

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{3}.$

25 Исследование функций: асимптоты, монотонность и экстремумы

См. [Ив: §8.1–8.3, 8.7 стр. 192–207, 222–225] или [З: стр. 231–234, 249–250].

Этот и следующий параграфы посвящены методу построения графиков функций по характерным точкам.

25.1 Асимптоты графиков функций

Асимптотой неограниченной кривой называется прямая, к которой приближаются точки кривой, удаляясь от начала координат.

При фиксированной системе координат xOy на плоскости различают три вида уравнений прямых: $x = a$, $y = b$, $y = kx + b$. Поэтому существуют три вида асимптот графиков функций: **вертикальные, горизонтальные и наклонные**, причем последние два вида могут быть как **односторонними, правыми** при $x \to +\infty$ или **левыми** при $x \to -\infty$, так и **двусторонними** при $x \to \infty$, т.е. и правым, и левыми одновременно. Далее будем считать, что горизонтальные асимптоты — это частный случай наклонных (при $k = 0$).

Теорема 1. Прямая $\{x = a\}$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff f(a+0) = \pm\infty$ или $f(a-0) = \pm\infty$.

Док–во следует из определений.

Пример 1. $\operatorname{tg} x$.

Теорема 2. Прямая $\{y = kx + b\}$ является правой наклонной асимптотой графика функции $y = f(x) \iff \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$.

В случае левой наклонной асимптоты формулировка аналогична, только в обоих пределах $x \to -\infty$.

Док–во. Из определения следует: $y = kx + b$ — уравнение правой наклонной асимптоты $\iff \alpha(x) = f(x) - kx - b$ — б.м. при $x \to +\infty$.
Отсюда следуют утверждение " $\Rightarrow$ " теоремы.

Обратно, из второго предела и теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой следует, что $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ — б.м., а значит, $\{y = kx + b\}$ — асимптота. $\triangleright$

Пример 2. Найдем вертикальные и наклонные асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}.$$

Функция определена при $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Вычислим пределы

$$\lim_{x\to-0} \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+0} \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика рассматриваемой функции.

Для нахождения наклонных асимптот графика представим эту функцию в виде

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = x - 3 + \frac{1}{x}.$$

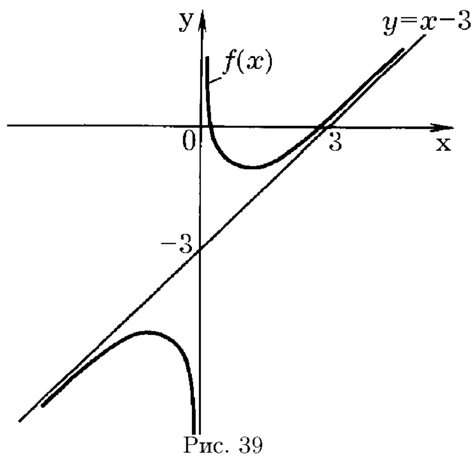

Рис. 39

Так как $1/x \to 0$ при $x \to \infty$, то из определения наклонной асимптоты следует, что прямая $y = x-3$ является двусторонней наклонной асимптотой графика указанной функции. Поскольку $1/x > 0$ при $x > 0$ и $1/x < 0$ при $x < 0$, кривая графика лежит выше асимптоты при $x \to +\infty$ и ниже ее при $x \to -\infty$ (рис. 39).

25.2 Условия возрастания и убывания функций

Выясним теперь, как по производной функции можно судить о возрастании (или убывании) самой функции на промежутке. Напомним, что функцию $f(x)$ называют возрастающей (убывающей) в интервале (a, b), если большему значению ее аргумента x в этом интервале соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е.

$$x_2 > x_1, \quad x_1, x_2 \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1) \quad \big(f(x_2) < f(x_1)\big).$$

Функцию называют неубывающей (невозрастающей) в интервале (a, b), если большему значению аргумента в этом интервале соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$x_2 > x_1, \quad x_1, x_2 \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geqslant f(x_1) \quad \big(f(x_2) \leqslant f(x_1)\big).$$

При этом в первом случае функцию именуют строго монотонной, а во втором — монотонной.

Теорема 3 (критерий монотонности функции). Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) $\iff$ $f'(x) \geqslant 0$ $\big(f'(x) \leqslant 0\big)$ для всех $x \in (a, b)$.

Док–во для неубывающей функции.

$\Rightarrow$: и для $\Delta x > 0$, и для $\Delta x < 0$ имеем $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. Отсюда при $\Delta x \to 0$ по теореме о предельном переходе в неравенстве получаем $f'(x) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$: для произвольных $x_1, x_2 \in (a; b)$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа

$$\exists c \in (x_1, x_2) \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

т.е. f — неубывающая функция на интервале (a, b).

Аналогично для невозрастающей функции. $\triangleright$

Теорема 4 (достаточное условие строгой монотонности функции).
1) Если для дифференцируемой в интервале (a, b) функции $f(x)$ имеем $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.
2) Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.

Док–во аналогично предыдущему: 1) по теореме Лагранжа

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) \ (x_1 < x_2) \quad \exists c \in (x_1, x_2) : \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

а значит, f — возрастающая функция на интервале (a, b).

2) Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в качестве x_1, x_2 в предыдущем рассуждении можно взять произвольные точки из отрезка $[a; b]$.

Аналогично для убывающей функции. ▷

Пример 3. Достаточное условие строгой монотонности для функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^{1/3}$ на любом интервале, содержащем 0, не выполняется, так как $f'(0) = 0$, а $g'(0) = \infty$, хотя эти функции возрастают на всей числовой прямой (рис. 40). Поэтому достаточное условие строгой монотонности из теоремы 4 не является необходимым.

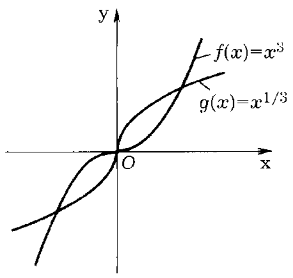

Рис. 40

Необходимое и достаточное условие монотонности является и необходимым условием строгой монотонности.

Доказанные теоремы имеют следующий **геометрический смысл**: если в интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в конечном числе точек может быть горизонтальна или вертикальна, а для всех остальных точек $x \in (a, b)$ образует острый угол с осью Ox. Так, например, функции из примера 3 возрастают на всей прямой, но касательная в точке $x = 0$ одной из них горизонтальна, а второй — вертикальна. Если же функция $f(x)$ убывает в интервале (a, b), то касательная к кривой $y = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$ образует тупой угол с осью Ox (в конечном числе точек касательная может быть горизонтальна или вертикальна).

25.3 Максимум и минимум функции

Определения и примеры точек (строгого) локального экстремума, максимума и минимума, значений функции экстремального, максимального и минимального, а также теорема Ферма были приведены в п. 22.1.

Пример 4. $y = x^2$. **Пример** 5. $y = \sqrt{|x|}$.

Точка $x = 0$ является точкой строгого локального минимума данных функций, при этом функция из примера 4 имеет нулевую производную, а функция из примера 5 не имеет производную в этой точке.

Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называют **стационарными точками** этой функции. Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, бесконечна или не существует называют **критическими точками (I порядка) функции** $f(x)$.

Теорема 5 (необходимое условие экстремума).
Если x_0 — точка локального экстремума функциии, то x_0 — критическая точка I порядка этой функции.

Док–во следует из теоремы Ферма.

Если экстремум функции достигается в точке, где производная бесконечна или не существует, то его часто называют **острым экстремумом** (см. пример 5) в отличие от **гладкого экстремума**, который достигается в стационарной точке функции (см. пример 4).

Пример 6. Точка $x = 0$ является критической точкой функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^{1/3}$, но не является точкой локального экстремума этих функций (рис. 40). Таким образом, теорема 3 не дает достаточного условия.

Теорема 6 (первый достаточный признак экстремума).
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках соответствующей выколотой окрестности. Если при переходе аргумента x слева направо через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, причем если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка локального минимума, если же с плюса на минус, то x_0 — точка локального максимума. Если и слева, и справа от точки x_0 в некоторой выколотой окрестности этой точки производная $f'(x)$ имеет один знак, то точка x_0 не является точкой локального экстремума функции $f(x)$.

Док–во следует из достаточного условия строгой монотонности функции на отрезках $[x_1; x_0]$ и $[x_0; x_2]$, где точки x_1 и x_2 выбраны так, что данные отрезки лежат в указанной в условии окрестности.

Задача 1. Дайте **геометрическую иллюстрация** данной теоремы для всех рассматриваемых случаев.

Пример 7. У составной функции

$$y(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 4 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

производная $y' = 6x$ существует во всех точках, кроме $x = 0$, и меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = 0$. Тем не менее эта функция имеет в точке $x = 0$ не минимум, а максимум, что нетрудно проверить непосредственно (рис. 41). Дело в том, что теорема 6 не применима в данном случае, так как функция терпит разрыв в точке $x = 0$. ▷

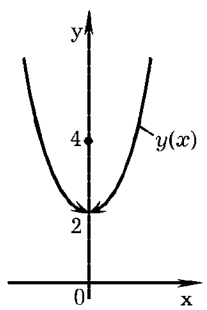

Рис. 41

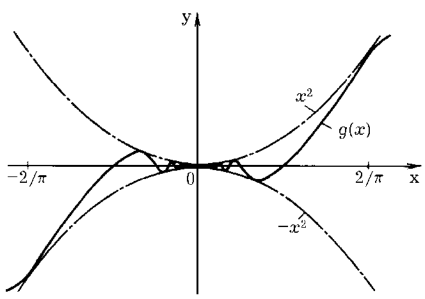

Рис. 42

Таким образом, установленное в теореме 6 достаточное условие существования экстремума нельзя использовать, если функция не является непрерывной в критической точке. Оно не применимо и тогда, когда любая выколотая окрестность рассматриваемой критической точки функции содержит бесконечное множество других ее критических точек, а производная этой функции не сохраняет определенного знака в любой полуокрестности рассматриваемой точки.

Пример 8. График составной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \end{cases}$$

представлен на рис. 42. Составим для этой функции разностное отношение в точке $x = 0$:

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Поскольку при $\Delta x \to 0$ $\Delta f(0)/\Delta x \to 0$, из определения производной следует, что $f'(0) = 0$. Однако в любой сколь угодно малой окрестности стационарной точки $x = 0$ производная

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

рассматриваемой функции бесконечное число раз меняет знак. Поэтому в данном случае теорему 6 нельзя использовать.

По той же причине не применима теорема 6 и к функции

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \Big(2 + \sin \dfrac{1}{x}\Big) & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Различие между этими функциями состоит в том, что для второй из них имеем $g(x) \geqslant x^2 > 0 = g(0)$, и, согласно определению, в точке $x = 0$ она имеет минимум. А для первой из них нельзя указать такой выколотой окрестности, в которой было бы либо $f(0) = 0 < f(x)$, либо $f(0) = 0 > f(x)$ (функция нечетная и не является константой), т.е. первая из функций экстремума в точке $x = 0$ не имеет. ▷

В случаях, когда теорема 6 не применима, нужны дополнительные исследования.

25.4 Исследование функций на экстремум с помощью высших производных

Теорема 7 (второй достаточный признак экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ существует, конечна и не равна нулю. Тогда при $f''(x_0) < 0$ x_0 — точка локального максимума, а при $f''(x_0) > 0$ x_0 — точка локального минимума.

Док–во для случая $f''(x_0) < 0$. Из теоремы о сохранении знака следует:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \ \text{ в некот. вык. окр. т. } x_0.$$

Т.е. знак меняется с + на -. По теореме 6 получаем наше утверждение. Случай $f''(x_0) > 0$ рассматривается аналогично. ▷

Пример 9. $y = x - 2 \ln x$.

Теорема 8 (третий достаточный признак экстремума). Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n - 1$ и производную порядка n в точке x_0, причем все ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно в этой точке равны нулю: $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда,

1) если n четное, то в точке x_0 функция имеет экстремум, причем
при $f^{(n)}(x_0) < 0$ x_0 — точка локального максимума,
а при $f^{(n)}(x_0) > 0$ x_0 — точка локального минимума.

2) Если n нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума данной функции.

Док–во: формула Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big).$$

Знак правой части в окрестности точки x_0 определяется первым слагаемым, так как второе есть o–малое от него. При n четном сомножитель $(x-x_0)^n$ положителен и знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком значения $f^{(n)}(x_0)$, а именно: при $f^{(n)}(x_0) < 0$ $f(x) < f(x_0)$ и, по определению, x_0 — точка локального максимума; при $f^{(n)}(x_0) > 0$ $f(x) > f(x_0)$ и, по определению, x_0 — точка локального минимума. Для нечетного n сомножитель $(x-x_0)^n$ меняет знак при переходе аргумента x через значение x_0, а сомножитель $f^{(n)}(x_0)$ нет. Следовательно, разность $f(x) - f(x_0)$ также меняет знак, и поэтому точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$. $\triangleright$

Пример 10. $y = \dfrac{x^2}{2} + \cos x$.

26 Условия выпуклости функции

См. [Ив: §8.4 стр. 207–213] или [З: стр. 238–241].

Функцию $f(x)$, определенную на интервале (a, b), называют **выпуклой вниз** в этом интервале, если любая дуга ее графика лежит не выше стягивающей эту дугу хорды (рис. 43). Для определения **выпуклых вверх** (рис. 44), **строго выпуклых вниз** и **строго выпуклых вверх** функций достаточно в приведенном определении словосочетание "не выше" заменить соответственно на "не ниже", "ниже" и "выше".

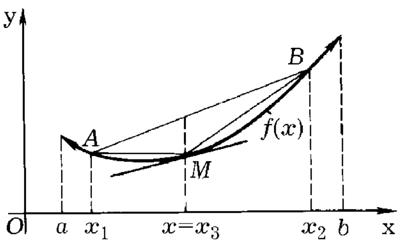

Рис. 43

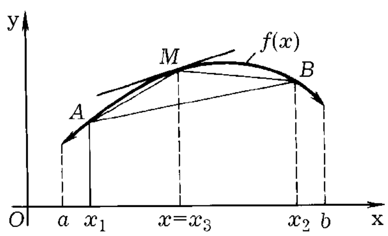

Рис. 44

Существуют функции, которые выпуклые вниз и вверх одновременно, это линейные на интервале функции. Действительно, дуга графика такой функции лежит не выше и не ниже хорды, а значит, совпадает с ней, т.е. является отрезком прямой.

Если о функции говорят, что она выпуклая (или строго выпуклая) и не указывают направление выпуклости, обычно имеют в виду выпуклость (соответственно строгую выпуклость) вниз. Функцию строго (или нестрого) выпуклую вверх называют также **строго (нестрого) вогнутой вниз**, а функцию выпуклую вниз **вогнутой вверх**.

Для того, чтобы применить методы дифференциального исчисления к исследованию выпуклых функций, выведем аналитическое условие, эквивалентное приведенному геометрическому определению. Рассмотрим выпуклую вниз функцию $f(x)$ на интервале (a,b), любые две точки $x_1 < x_2$ из $(a,\,b)$ и соответствующие точки $A\big(x_1; f(x_1)\big)$ и $B\big(x_2; f(x_2)\big)$ на графике функции (рис. 43). Фраза "дуга AB графика функции $f(x)$ лежит не выше стягивающей эту дугу хорды" означает, что ордината произвольной точки M на дуге AB не больше ординаты соответствующей точки на отрезке AB. Из аналитической геометрии известно, что точка отрезка AB имеет координаты

$$\big(x_3 = qx_1 + (1-q)x_2;\; qf(x_1) + (1-q)f(x_2)\big) \quad \text{для некоторого} \quad q \in (0,1).$$

Точка M имеет координаты $\big(x_3; f(x_3)\big)$. Поэтому определение выпуклой вниз функции эквивалентно условию:

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b)\ (x_1 \neq x_2) \quad \forall q \in (0,1) \quad f\big(qx_1 + (1-q)x_2\big) \leqslant qf(x_1) + (1-q)f(x_2). \quad (1)$$

Чтобы получить условие для выпуклых вверх, строго выпуклых вниз и строго выпуклых вверх функций достаточно в (1) неравенство $\leqslant$ заменить соответственно на $\geqslant$, $<$ и $>$.

Отметим, что если функция $f(x)$ (строго) выпукла вверх, то функция $-f(x)$ (строго) выпукла вниз. Ограничимся далее рассмотрением функций, выпуклых вниз и строго выпуклых вниз (полученные результаты легко перенести на функции, выпуклые вверх и строго выпуклые вверх, заменив f на $-f$). Сформулируем несколько необходимых и достаточных условий выпуклости.

Теорема 1. Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда

$$a < x_1 < x_3 < x_2 < b \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}. \qquad (2)$$

В случае строгой выпуклости неравенство строгое.

Док–во. Обозначим

$$q = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}, \quad \text{тогда} \quad 1 - q = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}, \quad x_3 = qx_1 + (1-q)x_2,$$

а неравенство в (1) преобразуется к виду

$$(x_2 - x_1)f(x_3) \leqslant (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2).$$

Заменяя в последнем неравенстве $(x_2 - x_1)$ на $(x_2 - x_3) + (x_3 - x_1)$, и перенеся слагаемые с $(x_2 - x_3)$ в левую часть, а слагаемые с $(x_3 - x_1)$ — в правую часть, получаем

$$(x_2 - x_3)(f(x_3) - f(x_1)) \leqslant (x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_3)),$$

что эквивалентно неравенству из (2).

В случае строгой выпуклости везде в рассуждениях неравенства строгие. $\triangleright$

Геометрическая интерпретация условия (2): угловой коэффициент хорды AM на рис. 43 не больше углового коэффициента хорды BM.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая на интервале (a, b) функция.
1) Функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда ее производная $f'(x)$ не убывает на (a, b).
2) Строгой выпуклости f соответствует строгое возрастание f'.

Док–во 1) $\Rightarrow$: переходя в (2) к пределу сперва при $x_3 \to x_1$, а затем при $x_3 \to x_2$ и учитывая правило предельного перехода в неравенстве и определение производной, получаем

$$a < x_1 < x_2 < b \quad \Rightarrow \quad f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2), \tag{3}$$

т.е. для выпуклой вниз и дифференцируемой в интервале (a, b) функции необходимо, чтобы ее производная не убывала в (a, b).

2) $\Rightarrow$: для строго выпуклой вниз функции $f(x)$ вместо (2) справедливо

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

Применяя к разностям $f(x_3) - f(x_1)$ и $f(x_2) - f(x_3)$ формулу Лагранжа, приходим к выводу, что существуют такие точки c_1 и c_2 ($x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$), для которых

$$f'(c_1) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(c_2).$$

Так как производная $f'(x)$ не убывает в интервале (a, b), то $f'(x_1) \leqslant f'(c_1)$ и $f'(c_2) \leqslant f'(x_2)$, а тогда $f'(x_1) < f'(x_2)$, т.е. для строго выпуклой вниз функции производная $f'(x)$ возрастает в (a, b).

1) $\Leftarrow$ и 2) $\Leftarrow$: пусть производная $f'(x)$ не убывает (возрастает) на интервале (a, b). Докажем, что функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) вниз. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b), то она непрерывна на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ и, согласно теореме Лагранжа существуют c_1 и c_2 такие, что $a < x_1 < c_1 < x_3 < c_2 < x_2 < b$ и

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(c_2).$$

Отсюда при $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$ (производная не убывает) следует (2), т.е. по теореме 1 выпуклость вниз функции $f(x)$, а при $f'(c_1) < f'(c_2)$ (производная возрастает) в (2) получим строгое неравенство, соответствующее строгой выпуклости вниз этой функции по той же теореме 1. $\triangleright$

Геометрическая интерпретация условия (3): наклон секущей расположен между наклонами касательных на концах отрезка.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную.

1) Функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a,b) \iff \forall x \in (a,b)\ f''(x) \geqslant 0$.
2) Если же $f''(x) > 0$ на (a,b), то функция строго выпукла вниз на этом интервале.

Док–во. 1) Из теоремы 2 (часть 1) и критерия монотонности:
$f(x)$ выпукла вниз на $(a,b) \iff f'(x)$ не убывает на $(a,b) \iff \forall x \in (a,b)\ f''(x) \geqslant 0$.

2) Из теоремы 2 (часть 2) и достаточного условия строгой монотонности:
$f(x)$ строго выпукла вниз на $(a,b) \iff f'(x)$ возрастает на $(a,b) \Leftarrow$
$\forall x \in (a,b)\ f''(x) > 0$. $\triangleright$

То, что теорема 3 устанавливает лишь достаточное условие строгой выпуклости вверх (вниз), видно из простого примера для функции $f(x) = -x^4$, которая строго выпукла вверх $\forall x \in \mathbb{R}$, хотя $f''(x)|_{x=0} = -12x^2|_{x=0} = 0$ (рис. 45).

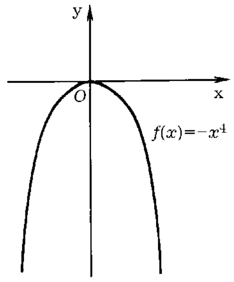

Рис. 45

Теорема 4. Дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ выпукла вниз на нем тогда и только тогда, когда все точки графика функции лежат не ниже любой касательной к нему на этом интервале (в случае строгой выпуклости вниз все точки графика функции, кроме точки касания, лежат выше любой касательной к нему на этом интервале).

Док–во. Необходимость. Запишем уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $\big(x_0; f(x_0)\big)$, где $x_0 \in (a,b)$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Согласно формуле Лагранжа,

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

где точка c лежит между x и x_0. После вычитания последнего равенства из предыдущего получим

$$y - f(x) = \big(f'(x_0) - f'(c)\big)(x - x_0).$$

Для строго выпуклой вниз функции, согласно части 3 теоремы 2, производная возрастает. Поэтому знак разности $f'(x_0) - f'(c)$ противоположен знаку разности $x - x_0$ и, следовательно, $y - f(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Для выпуклой вниз функции, согласно части 1 теоремы 2, производная не убывает в (a,b) и поэтому $y - f(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Так как y и $f(x)$ — ординаты точек на касательной и графике функций соответственно, то точки графика функции лежат не ниже касательной.

Достаточность. Так как точки графика функции $f(x)$ лежат не ниже любой касательной к нему в интервале (a,b), то

$$y - f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x) \leqslant 0 \quad \forall x, x_0 \in (a,b). \tag{4}$$

Подставляя в (4) вместо x точку $x_1 \in (a, x_0)$, а затем точку $x_2 \in (x_0, b)$, получаем

$$\forall x_1 \in (a,x_0)\ \forall x_2 \in (x_0,b) \quad \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}, \tag{5}$$

что соответствует условию (2) выпуклости вниз функции $f(x)$ в интервале (a, b). Строгое неравенство в (4) приводит к строгому неравенству и в (5), а это соответствует условию строгой выпуклости вниз функции $f(x)$ в интервале (a, b). $\triangleright$

Геометрическая интерпретация теоремы 4: дуга графика выпуклой вниз и дифференцируемой в интервале функции лежит не ниже стягивающей эту дугу хорды и не ниже касательной, проведенной в любой точке данной дуги (см. рис. 43).

27 Точки перегиба и построение графиков функций

См. [Ив: §8.5–8.6, 8.8 стр. 213–221, 226–241] или [З: стр. 242, 246–255].

27.1 Точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, в точке $\big(x_0; f(x_0)\big)$ у графика функции существует касательная, а при переходе аргумента x через точку x_0 меняется направление строгой выпуклости функции $f(x)$. Тогда x_0 называют **точкой перегиба** этой **функции**, а точку $\big(x_0; f(x_0)\big)$ — **точкой перегиба графика функции** $f(x)$.

Пример 1. На рис. 40 приведены графики функции $f(x) = x^3$ и обратной ей функции $g(x) = x^{1/3}$. Точка $x_0 = 0$ для этих функций является точкой перегиба. Действительно, $f'(0) = 0$ и $g'(0) = +\infty$. Поэтому график функции f имеет горизонтальную касательную в этой точке, а график функции g — вертикальную касательную. Кроме того, $f''(x) = 6x < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$, $g''(x) = -2x^{-5/3}/9 > 0$ при $x < 0$ и $g''(x) < 0$ при $x > 0$, что, если учесть теорему 3, означает смену направления строгой выпуклости обеими функциями при переходе аргумента x через точку $x_0 = 0$, т.е. точка $x_0 = 0$ удовлетворяет определению точки перегиба.

Теорема 5. В точке перегиба график функции переходит с одной стороны касательной на другую.

Док–во. Пусть x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Если касательная вертикальна, то график функции находится по разные стороны от нее по определению. Рассмотрим случай наклонной или горизонтальной касательной. Тогда производная $f'(x_0)$ существует и конечна. Пусть слева от x_0 (в интервале $(a; x_0)$) функция $f(x)$ строго выпукла вниз, а справа — вверх. По теореме 1 выполняется условие (2), где $b = x_0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x_2 \to x_0$ и используя непрерывность функции в точке x_0, получаем

$$a < x_1 < x_3 < x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_0) - f(x_3)}{x_0 - x_3}. \tag{1}$$

Переходя к пределу при $x_3 \to x_0$ в (1) и используя существование производной $f'(x_0)$, получаем неравенство

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant f'(x_0). \tag{2}$$

Это неравенство означает, что наклон хорды, проходящей через точки $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_0; f(x_0))$ не больше наклона касательной в точке B. А значит точка A лежит не ниже касательной. И это верно для любой точки $x_1 \in (a; x_0)$.

Равенство в (2) означает, что точка A лежит на касательной. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим произвольную точку $x_4 \in (x_1, x_0)$ и обозначим

$$k_1 = \frac{f(x_4) - f(x_1)}{x_4 - x_1}, \qquad k_2 = \frac{f(x_0) - f(x_4)}{x_0 - x_4}.$$

Тогда из неравенства (1) следует, что $k_1 \leqslant k_2$ и поэтому

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} &= \frac{\big(f(x_0) - f(x_4)\big) + \big(f(x_4) - f(x_1)\big)}{x_0 - x_1} = \\ &= \frac{k_2(x_0 - x_4) + k_1(x_4 - x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant k_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как неравенство (2) было доказано для любой точки $x_1 \in (a; x_0)$, то $k_2 \leqslant f'(x_0)$. Объединяя это неравенство с неравенством (3), получаем равенство $k_2 = f'(x_0)$. Таким образом, все точки $(x_4; f(x_4)), x_4 \in (x_1, x_0)$, лежат на касательной, т.е. график функции f на интервале (x_1, x_0) есть прямая, но это противоречит строгой выпуклости функции f на $(a; x_0)$. Поэтому точки графика функции слева от x_0 лежат строго над касательной.

Рассуждая аналогично, получим, что точки справа от x_0 лежат под касательной. $\triangleright$

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{при} \quad x < 0, \\ \operatorname{sh} x & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

при переходе аргумента x через точку $x = 0$ изменяет направление строгой выпуклости (рис. 46), поскольку при $x < 0$ $f''(x) = -1/(1-x)^2 < 0$ и $f''(x) = \operatorname{sh} x > 0$ при $x > 0$. Однако данная функция не имеет в этой точке производной (ни конечной, ни бесконечной), а ее график не имеет в соответствующей точке касательной.

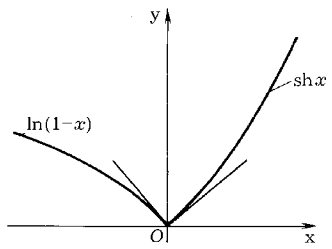

Рис. 46

Действительно, имеем $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$ и поэтому график функции имеет только односторонние касательные в точке $(0; f(0) = 0)$, которые образуют угол, отличный от 0 или π (см. рис. 46). Напомним, что такую точку называют угловой точкой графика функции. Точку $x = 0$ мы не называем точкой перегиба, так как не выполняется одно из условий нашего определения.

Вопрос: Может ли точка перегиба быть точкой экстремума?

Теорема 6 (необходимое условие существования точки перегиба). Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки перегиба x_0 и у нее существует конечная вторая производная в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Док–во. По теореме 2 (часть 2) производиая $f'(x)$ функции $f(x)$ убывает слева от точки перегиба x_0 и возрастает справа или, наоборот, возрастает слева и убывает справа. Поэтому функция $f'(x)$, будучи дифференцируемой, а значит, непрерывной в точке x_0, имеет в этой точке локальный экстремум. Из необходимого условия экстремума заключаем, что $f''(x_0) = 0$. $\triangleright$

Точки, в которых вторая производная функции равна нулю, бесконечна или не существует, называют **критическими точками 2–го порядка функции**.

Теорема 7 (первый достаточный признак существования точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет первую и вторую производную в выколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ этой точки и существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$. Тогда

1) если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента x через значение x_0, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$;

2) если знак $f''(x)$ не меняется при переходе через x_0, то x_0 не является точкой перегиба функции $f(x)$.

Док–во. Так как существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$, то в точке $\big(x_0; f(x_0)\big)$ у графика функции существует касательная. Кроме того, по условию теоремы $f''(x)$ не меняет знак в некотором интервале слева от x_0 и в некотором интервале справа от x_0.

1) Если знаки в этих интервалах разные, то в силу теоремы 3 направление строгой выпуклости функции $f(x)$ в них разное, а значит, x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

2) Если знак один и тот же, то направление строгой выпуклости одинаковое, и x_0 не является точкой перегиба. $\triangleright$

Теорема 8 (второй достаточный признак существования точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n-1$ $(n > 2)$ и производную порядка n в точке x_0, причем $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда при нечетном n x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, а при четном n не является.

Док–во. По формуле Тейлора порядка n в точке $x_0 \in (a, b)$ имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \quad \text{и поэтому}$$

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + o\big((x - x_0)^{n-2}\big),$$

где знак правой части определяется первым слагаемым. Если n нечетно, то в окрестности $U(x_0)$ вторая производная $f''(x)$ при переходе аргумента x через значение x_0 вместе с сомножителем $(x-x_0)^{n-2}$ меняет знак. По теореме 7 x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Если же n четно, то $f''(x)$ в выколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ сохраняет знак, а значит, точка x_0 не будет точкой перегиба.

27.2 Общая схема построение графика функции

Построению графика функции (точнее, его эскиза) предшествует исследование функции, включающее в себя следующие этапы:

1) установление области определения функции, свойств четности (нечетности) и периодичности функции;

2) поиск точек разрыва функции, вычисление в них и в концевых точках области определения односторонних пределов функции, нахождение вертикальных асимптот;

3) вычисление производной, поиск критических точек 1 порядка, вычисление значений функции в критических точках;

4) вычисление второй производной, поиск критических точек 2 порядка, вычисление значений функции в этих точках;

5) исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$, т.е. нахождение наклонных или горизонтальных асимптот графика функции.

Результаты перечисленных этапов целесообразно заносить в сводную таблицу, первая колонка которой содержит значения аргумента x, соответствующие границам промежутков области определения функции, ее точкам разрыва, критическим точкам 1 и 2 порядка, а также всем интервалам области определения функции между этими точками. Точки, которые заносятся в эту таблицу называют **характерными**. В случае четности или нечетности функции в таблицу заносят только точки и интервалы из правой полуплоскости и один правый интервал из левой полуплоскости. В случае периодичности функции в таблицу заносят только те точки и интервалы, которые необходимы для построения графика на периоде. Вторая колонка содержит значения функции $f(x)$ в характерных точках. В третью и четвертую колонки заносят значения или знаки $f'(x)$ и $f''(x)$ в выделенных точках и интервалах. Пятая колонка содержит краткую характеристику поведения функции и особенностей ее графика, а шестая — фрагменты графика в окрестности отмеченных точек и в указанных интервалах.

Непосредственное построение графика функции начинается с построения касательных в характерных точках в виде небольших отрезков (там, где они существуют) и с построения асимптот. После чего построение графика функции сводится к "сглаживанию" ломанной, полученной из отрезков касательных и асимптот.

Пример 3. Рассмотрим последовательность выполнения указанных этапов и заполнения сводной таблицы при исследовании функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}.$$

1. Функция определена на всей числовой оси и не является четной, нечетной или периодической (это **функция общего вида**).

2. Функция не имеет точек разрыва (а следовательно, и вертикальных асимптот) и непрерывна на всей числовой оси. 3. Производная функции $f(x)$

$$f'(x) = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

в точке $x_0 = 1/3$ равна нулю, а в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ — бесконечна. Исследуем поведение производной $f'(x)$ в окрестности этих критических точек функции $f(x)$. Так как

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty,$$

то функция имеет вертикальную касательную в точке $x_1 = 0$. Поскольку

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f'(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = +\infty,$$

точка $x_2 = 1$ есть точка возврата (заострения).

4. Вторая производная функции $f(x)$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$$

ни в одной точке не обращается в нуль, а в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ не существует.

5. Так как пределы

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} = 1$$

и

$$b = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} - 1\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(x\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{2}{3}$$

существуют, график функции $f(x)$ имеет двустороннюю наклонную асимптоту с уравнением $y = x - 2/3$.

С использованием сводной таблицы 1 на рис. 47 построен график исследуемой функции, а также графики ее первой и второй производных.

Таблица 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции	Фрагмент графика
$(-\infty, 0)$	$\nearrow$	$+$	$+$	Возрастание, выпуклость вниз	
$x_1 = 0$	0	$+\infty$	$\nexists$	Точка перегиба с вертикальной касательной	
$(0, 1/3)$	$\nearrow$	$+$	$-$	Возрастание, выпуклость вверх	
$x_0 = 1/3$	$\approx 0{,}53$	0	$-$	Максимум с горизонтальной касательной	
$(1/3, 1)$	$\searrow$	$-$	$-$	Убывание, выпуклость вверх	
$x_2 = 1$	0	∞	$\nexists$	Минимум с вертикальной касательной (точка возврата)	
$(1, +\infty)$	$\nearrow$	$+$	$-$	Возрастание, выпуклость вверх	

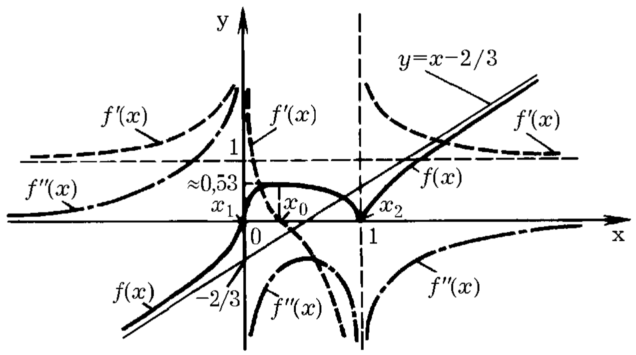

Рис. 47

Изложенный метод построения графиков функций по характерным точкам может быть обобщен на случай параметрически или неявно заданной функции. При этом в случае параметрически заданной функции заполняется таблица аналогичная таблице 1, но содержащая еще один столбец, стоящий слева. В него заносятся значения параметра t в характерных точка, а также интервалы между ними. В случае неявно заданной функции похожую таблицу заполнить нельзя, так как производные y'_x, y''_{xx} зависят как от x, так и от y. Но плоскость xOy можно разрезать на области, где эти производные имеют постоянный знак, а значит, исследуемая функция имеет тот или иной тип монотонности и выпуклости. Использя эту информацию, характерные точки соединяют дугами графика неявно заданной функции. В совокупности эти дуги образуют линию, которая задается уравнением неявно заданной функции.

27.3 Наибольшее и наименьшее значения функции в промежутке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, согласно теореме Вейерштрасса, она достигает на этом отрезке своих наибольшего M и наименьшего m значений. Если функция достигает одно из этих значений внутри отрезка, то соответствующая точка есть точка локального экстремума функции $f(x)$. Поэтому, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, необходимо:

1) найти все критические точки функции, попадающие в интервал (a, b);
2) вычислить значения функции во всех указанных критических точках;
3) вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах отрезка;
4) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Отметим, что здесь проверяется только необходимое условие экстремума, проверять достаточное условие не нужно.

Пример 4. Найдем наибольшее M и наименьшее m значения функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$$

на отрезке $[-3, 6]$. Сначала вычислим производную

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3).$$

Обе стационарные точки $x = -2$ и $x = 3$ этой функции принадлежат заданному отрезку. Значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

$$f(-3) = 19, \quad f(-2) = 36, \quad f(3) = -89, \quad f(6) = 100.$$

Отсюда видно, что наибольшего значения функция достигает на одном из концов отрезка, т.е. $M = f(6) = 100$, а наименьшего значения $m = f(3) = -89$ — в одной из стационарных точек, которая, очевидно, является точкой минимума данной функции. $\triangleright$

27.4 Исследования функций, заданных параметрически

Пример 5. Пусть зависимость y от x задана в виде

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3}, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Имеем

$$\lim_{t\to -1-0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to -1+0} x(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to -1-0} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to -1+0} y(t) = +\infty.$$

Кроме того, при $t_0 = 0$ $x(t_0) = y(t_0) = 0$ и при $t \to \infty$ $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$, т.е. кривая дважды проходит через начало координат.

Найдем производные:

$$y'_x = t\frac{2 - t^3}{1 - 2t^3}, \quad y''_{xx} = 2\frac{(1+t^3)^4}{(1 - 2t^3)^3}.$$

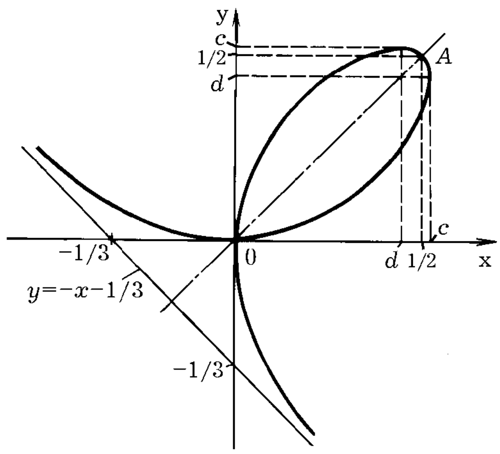

Рис. 48