

Вопросы для подготовки к коллоквиуму
по аналитической геометрии, 1 семестр,
для ИУ-9, 2020 г., лектор Д. А. Степанов

вопросы сформулированы так же, как в билетах коллоквиума

1. Сформулировать определения свободного вектора и линейных операций над векторами. Сформулировать и доказать свойства линейных операций над векторами.
2. Дать определение линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сформулировать и доказать леммы об алгебраическом критерии линейной зависимости и о линейно зависимых подсистемах.
3. Дать определения коллинеарности, компланарности, линейной зависимости и независимости векторов. Сформулировать и доказать геометрические критерии линейной зависимости 2-х и 3-х векторов.
4. Дать определения коллинеарности и компланарности векторов. Сформулировать и доказать теорему о линейной зависимости 4-х векторов.
5. Дать определение базиса в множестве (пространстве) свободных векторов V_3 . Сформулировать и доказать теорему о разложении вектора по базису. Сформулировать утверждение о линейных операциях в координатах.
6. Что называется матрицей перехода от базиса к базису? Записать формулы замены координат вектора при переходе к новому базису. Вывести эти формулы.
7. Дать определение скалярного произведения векторов. Сформулировать и доказать его основные свойства: критерий перпендикулярности векторов, симметричность, линейность.
8. Дать определение матрицы Грама базиса в V_3 . Записать формулу вычисления скалярного произведения в координатах и вывести эту формулу. Сформулировать и доказать следствие из этой формулы для ортонормированного базиса. Вывести формулу для длины вектора, его направляющих косинусов в ортонормированном базисе, угла между двумя векторами.
9. Что такое ориентация плоскости? Дать определение ориентированной площади параллелограмма. Сформулировать и доказать её основные свойства: антисимметричность, линейность, формулу вычисления в координатах.
10. Что такое ориентация пространства? Дать определение правой и левой тройки векторов. Дать определение ориентированного объёма параллелепипеда (смешанного произведения векторов). Сформулировать и доказать его следующие свойства: косимметричность и линейность.
11. Что такое ориентация пространства? Дать определение правой и левой тройки векторов. Дать определение ориентированного объёма параллелепипеда (смешанного произведения векторов). Вывести формулу вычисления смешанного произведения в координатах.

12. Дать определение смешанного произведения векторов (ориентированного объёма) и векторного произведения векторов. Сформулировать и доказать теорему о связи смешанного, скалярного и векторного произведения.
13. Дать определение правой и левой тройки векторов. Дать определение векторного произведения векторов. Сформулировать и доказать его основные свойства: антисимметричность и линейность.
14. Дать определение векторного произведения векторов. Доказать формулу для вычисления векторного произведения в координатах в правом ортонормированном базисе.
15. Дать определение двойного векторного произведения векторов. Записать и вывести формулу " $\text{bac} - \text{cab}$ " и тождество Якоби.
16. Дать определение декартовой системы координат на плоскости и в пространстве. Какая система координат называется прямоугольной? Записать формулу для вычисления расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат и формулу деления отрезка в заданном отношении. Вывести эти формулы.
17. Дать определение декартовой системы координат, матрицы перехода от базиса к базису. Вывести формулы преобразования координат точки при переходе к новой системе координат (можно ограничиться случаем плоскости).
18. Записать основные типы уравнений прямой на плоскости: общее, с угловым коэффициентом, "в отрезках", параметрическое, каноническое, нормальное, уравнение прямой через 2 точки. Объяснить смысл входящих в эти уравнения параметров.
19. Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых на плоскости. Записать и вывести формулу для вычисления расстояния от точки до прямой. Записать формулу для вычисления угла между прямыми.
20. Дать определение пучка прямых на плоскости. Сформулировать и доказать теорему об уравнении пучка прямых.
21. Сформулировать и доказать теорему об уравнении 1-го порядка как уравнении плоскости в пространстве. Дать определение нормального вектора.
22. Записать и вывести параметрические уравнения плоскости в пространстве. Записать и вывести уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки и уравнение "в отрезках".
23. Описать способы исследования взаимного расположения двух плоскостей в пространстве. Записать и вывести формулы для вычисления расстояния от точки до плоскости и для вычисления угла между плоскостями.
24. Дать определение пучка плоскостей и связки плоскостей в пространстве. Сформулировать теоремы об уравнении пучка плоскостей и об уравнении связки плоскостей.
25. Записать и вывести параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве, общие уравнения прямой в пространстве. Записать и вывести формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве.

26. Описать способы исследования взаимного расположения двух прямых, прямой и плоскости в пространстве. Записать и вывести формулу для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми.
27. Записать параметрическое уравнение прямой в пространстве в векторной форме. Объяснить смысл входящих в это уравнение параметров. Описать метод построения общего перпендикуляра к двум данным непараллельным прямым в пространстве.
28. Дать определение эллипса. Вывести его каноническое уравнение.
29. Дать определение гиперболы. Вывести её каноническое уравнение.
30. Дать определение параболы. Вывести её каноническое уравнение.
31. Что такое директрисы эллипса и гиперболы? Сформулировать и доказать директориальное свойство эллипса и гиперболы.
32. Сформулировать директориальное свойство эллипса и гиперболы. Вывести полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы.
33. Вывести уравнение касательной к эллипсу. Записать уравнение касательной к гиперболе и параболе.
34. Сформулировать и доказать оптическое свойство эллипса.
35. Сформулировать и доказать оптическое свойство гиперболы.
36. Сформулировать и доказать оптическое свойство параболы.
37. Дать определение поверхности вращения. Вывести её уравнение по известному уравнению сечения плоскостью, проходящей через ось вращения. Получить уравнения эллипсоида, гиперболоидов, параболоида вращения.
38. Записать канонические уравнения эллипсоида, гиперболоидов, параболоидов. Исследовать эти поверхности методом сечений.
39. Дать определения цилиндра и конуса. Записать и вывести уравнения этих поверхностей по известной направляющей кривой. Описать конические сечения.
40. Сформулировать определение аффинного преобразования плоскости. Доказать теорему о формулах, задающих аффинное взаимно однозначное преобразование плоскости.
41. Сформулировать определение аффинного преобразования плоскости. Сформулировать и доказать теорему о существовании аффинного преобразования, переводящего три заданные точки в три заданные точки.
42. Что такое невырожденное аффинное преобразование плоскости? Сформулировать и доказать групповые свойства невырожденных аффинных преобразований.