

ВАРИАНТ 1

1. Найти решётку подгрупп циклической группы \mathbb{Z}_{12} .
2. Решить уравнение

$$(167)(57)X(3456) = (25)(37)(46)$$

в группе подстановок S_7 . Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z - i| + |z + i| \geq 4.$$

Какая кривая служит границей этой области?

4. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$$

и

$$g = x^5 + 2x^4 + 3x + 1$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_5 .

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ найти элемент, обратный элементу $a = 2 - 3\sqrt[3]{2}$ и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

ВАРИАНТ 2

1. Содержит ли группа подстановок S_{10} элемент порядка 18? Порядка 30? (Ответ обосновать.)
2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 2 \\ 7x + y + 3z = 7 \\ 5x + 6y + 5z = 10 \end{cases}$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_{11} .

3. Найти все корни 3-й степени из комплексного числа

$$z = \frac{-4 + 8i}{3 - i}.$$

4. Разложить многочлен

$$f = x^4 + x^2 + 1$$

на неприводимые над полем \mathbb{R} действительных и полем \mathbb{C} комплексных чисел.

5. В поле вычетов \mathbb{Z}_{101} найти элемент, обратный элементу $a = 66$.

ВАРИАНТ 3

1. Найти все элементы мультипликативной группы \mathbb{Z}_8^* кольца вычетов \mathbb{Z}_8 . Изоморфна ли эта группа какой-то из групп $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$? (Ответ обосновать.)
2. Решить уравнение

$$(273)X(26)(1526) = (256437)$$

в группе подстановок S_7 . Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z + i| - |z - i| \leq 1.$$

Какая кривая служит границей этой области?

4. Является ли многочлен

$$f = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

неприводимым над полем вычетов \mathbb{Z}_3 ? Если нет, разложить его на неприводимые множители.

5. В поле вычетов \mathbb{Z}_{113} найти элемент, обратный элементу $a = 46$.

ВАРИАНТ 4

1. Вычислить 2017-ю степень подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in S_7.$$

2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x + 7y + 2z = 8 \\ 3x + 2y + 7z = 11 \\ 5x + 6y + 5z = 5 \end{cases}$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_{13} .

3. Вычислить 2017-ю степень комплексного числа

$$z = \frac{2}{\sqrt{3} - i}.$$

4. Разложить многочлен

$$f = x^5 - 2x^4 + 2x - 4$$

на неприводимые над полем \mathbb{R} действительных и полем \mathbb{C} комплексных чисел.

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ найти элемент, обратный элементу $a = 1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

ВАРИАНТ 5

1. Вычислить 2018-ю степень элемента $a = 7$ в мультипликативной группе \mathbb{Z}_{10}^* кольца вычетов \mathbb{Z}_{10} .
2. Решить уравнение

$$(16432)X(34)(45) = (1243657)$$

в группе подстановок S_7 . Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z - 1| \geq 1 + \operatorname{Re} z.$$

Какая кривая служит границей этой области?

4. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^4 + 3$$

и

$$g = x^3 + 2x + 3x + 1$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_5 .

5. В поле вычетов \mathbb{Z}_{97} найти элемент, обратный элементу $a = 50$.

ВАРИАНТ 6

1. В группе подстановок S_9 найти подгруппу, порождённую двумя транспозициями $\sigma = (24)$ и $\tau = (47)$. Какой из следующих групп изоморфна эта подгруппа: \mathbb{Z}_6 , S_3 , \mathbb{Z}_5 ?

2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 5 \\ 2x + 10y + 7z = 7 \\ 7x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_{11} .

3. Найти все корни 4-й степени из комплексного числа

$$z = \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i}.$$

4. Разложить многочлен $f = x^3 + 5x^2 + 9x + 5$ на неприводимые над полем \mathbb{R} действительных и полем \mathbb{C} комплексных чисел.

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ найти элемент, обратный элементу $a = 1 - 2\sqrt[3]{4}$ и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

ВАРИАНТ 7

1. Найти решётку подгрупп циклической группы \mathbb{Z}_{16} .
2. Решить уравнение

$$(2357)X(16)(246) = (243756)$$

в группе подстановок S_7 . Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |z - i| \leq 1 \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Является ли многочлен

$$f = x^4 + x + 1$$

неприводимым над полем вычетов \mathbb{Z}_2 ? Если нет, разложить его на неприводимые множители.

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ найти элемент, обратный элементу $a = 1 + 4\sqrt[3]{2}$ и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

ВАРИАНТ 8

1. Изоморфна ли группа подстановок S_5 группе D_{60} симметрий правильного 60-угольника? (Ответ обосновать.)

2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x + 9y + 8z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \\ 8x + 2y + 5z = 11 \end{cases}$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_{13} .

3. Вычислить 2016-ю степень комплексного числа

$$z = \frac{\sqrt{2}}{1 + i}.$$

4. Разложить многочлен

$$f = x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1$$

на неприводимые над полем \mathbb{R} действительных и полем \mathbb{C} комплексных чисел.

5. В поле вычетов \mathbb{Z}_{103} найти элемент, обратный элементу $a = 19$.

ИУ-9, ЛА и АГ, 1 семестр, РК2. Каждая задача оценивается в 4 балла. Необходимый минимум -- 12 баллов.

ВАРИАНТ 9

1. Вычислить 2017-ю степень элемента $a = 3$ в мультипликативной группе \mathbb{Z}_{11}^* поля вычетов \mathbb{Z}_{11} .

2. Решить уравнение

$$(13)(37)X(24)(45) = (15)(2764)$$

в группе подстановок S_7 . Для найденной подстановки X определить её порядок и чётность.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|z - 3| - |z + 3| \geq 4.$$

Какая кривая служит границей этой области?

4. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^4 + 1$$

и

$$g = x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_5 .

5. В поле вычетов \mathbb{Z}_{101} найти элемент, обратный элементу $a=71$.

ИУ-9, ЛА и АГ, 1 семестр, РК2. Каждая задача оценивается в 4 балла. Необходимый минимум -- 12 баллов.

ВАРИАНТ 10

1. Вычислить 2018-ю степень подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_7.$$

2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 4 \\ 5x + 5y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

над полем вычетов \mathbb{Z}_7 .

3. Найти все корни 6-й степени из комплексного числа

$$z = \frac{-2 - 5i}{5 - 2i}.$$

4. Разложить многочлен

$$f = x^5 + 2x^4 + x + 2$$

на неприводимые над полем \mathbb{R} действительных и полем \mathbb{C} комплексных чисел.

5. В поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ найти элемент, обратный элементу $a = 1 - \sqrt[3]{3}$ и представить его в виде $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$, $x, y, z \in \mathbb{Q}$.