Билеты 9-10

Александр Старовойтов <Telegram>

7 января 2022 г.

Билет 9

Задание 1

- Дать определения векторного и смешанного произведений векторов. (вопрос 10)
- Вывести формулы для вычисления векторного произведения и смешанного произведения векторов в правом ортонормированном базисе. (вопрос 11)

Задание 2

$|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = \sqrt{2}; |\vec{c}| = 4$
$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = (\widehat{\vec{b},\vec{c}}) = 45°; (\widehat{\vec{a},\vec{c}}) = 60°$
$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = ?$

$\vec{d}^2 = (-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}, -\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 = 9 + 8 + 16 - 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c} = 33 - 12 - 12 + 16 = 25 \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 5}$

Задание 3

Составить каноническое уравнение процекции прямой L на плоскость α
$L: \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$
$\alpha: 2x + 3y + 6z = 6$
$\vec{q}_L\{3, -2, 0\}; \vec{n}_\alpha\{2, 3, 6\}$
$\text{Пр}_\alpha \vec{q}_L = \vec{q}_L - \frac{(\vec{q}_L, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \{3, -2, 0\} - \frac{6-6}{49}\{2, 3, 6\} = \{3, -2, 0\} = \vec{q}_L$
$M = (1, 1, 1) \in L; A = (0, 0, 1) \in \alpha; AM\{1, 1, 0\}$
Найдем проекцию т. M на α:

$$\text{Пр}_\alpha A\vec{M} = A\vec{M} - \frac{(A\vec{M}, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{49}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39/49 \\ 34/49 \\ -30/49 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Пр}_\alpha M = (39/49, 34/49, 19/49)$
Тогда уравнение проекции: $\boxed{\frac{x-39/49}{3} = \frac{y-34/49}{-2} = \frac{z-19/49}{0}}$

Задание 4

Найти НОД *многочленов f и g с коэффициентами в поле вычетов* $\mathbb{Z}_5$

$$f = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$$

$$g = x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x^4 + 2x^3 + 3x + 1)(x + 1) + (3x^2 + 4x + 1)$
$2(3x^2 + 4x + 1) = x^2 + 3x + 2$
$x^4 + 2x^3 + 3x + 1 = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1) + (2x + 4)$
$3(2x + 4) = x + 2$
$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
Последний ненулевой остаток $x + 2 \Rightarrow \boxed{\text{НОД}(f, g) = x + 2}$

Задание 5

Найти все матрицы перестановочные с матрицей A
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
$AB = BA$
$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \end{pmatrix}$
$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2 \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_3 = x_3 + 3x_4 \\ 3x_2 + x_4 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$
$\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \; | : 3 \; = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_3 = c_1; x_4 = c_2$
$x_1 - x_4 = 0$
$-3x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 = x_4 = c_2$
$x_2 = \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}c_1$
$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} c_2 & \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}}$

Билет 10

Задание 1

- Сформулировать теорему об уравнении первого порядка как уравнении прямой на плоскости. (вопрос 12)

- Дать определение пучка прямых на плоскости (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка прямых. (вопрос 14)

Задание 2

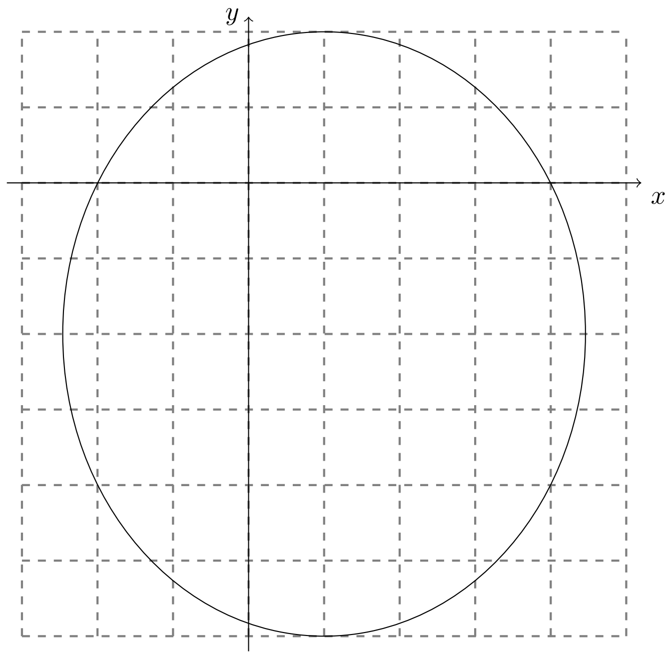
$ABCD$ — тетраэдр
$V_{ABCD} = 7; A = (-2, 1, 0); B = (0, -2, 1); C = (1, 0, -2)$
$D = (x, y, z), y < 0$
$\vec{AB}\{2, -3, 1\}; \vec{AC}\{3, -1, -2\}; \vec{AD}\{x + 2, y - 1, z\}$
$V_{ABCD} = \frac{\left|\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}\right|}{6} \Rightarrow \left|\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}\right| = 42$
$\left|\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ x+2 & y-1 & z \end{vmatrix}\right| = 42$
$|-2z + 3y - 3 + 6x + 12 + x + 2 + 9z + 4y - 4| = 42$
$|7x + 7y + 7z| = 35$
$\boxed{D = (0, -5, 0)}$

Задание 3

Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду. Определить основные параметры (полуоси, координаты центра, фокусов, эксцентриситет) и сделать чертеж кривой в исходной системе координат.

$$4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$$

$4(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) - 48 = 4(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 - 48$
$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
$x' = x - 1; y' = y + 2$
$O(1, -2)$
$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 2$
$a = 2\sqrt{3}; b = 4$
$F_1(1, 0); F_2(1, -4)$
$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Задание 4

Является ли неприводимым многочлен f с коэффициентами в поле вычетов $\mathbb{Z}_3$. Если нет, разложить его на неприводимые множители

$$f = x^4 + x^3 + x + 2$$

Проверим есть ли в разложении линейные двучлены:
$f(0) = 2 \neq 0; f(1) = 5 = 2 \neq 0; f(2) = 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \neq 0$
Квадратные трехчлены (перебором):
$x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$

Задание 5

Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} A^V = \tag{1}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{(2,1)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1/2 - 1/2 & -1 + 1/2 - 1/2 & -1 - 1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 - 1/2 \\ -1/2 + 1/2 + 1 & 1/2 - 1/2 + 1 & 1/2 + 1/2 - 1 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$