Билеты 9-10

Александр Старовойтов <Telegram>

5 января 2022 г.

Билет 9

Задание 1

Задание 2

$|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = \sqrt{2}; |\vec{c}| = 4$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 45°; (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 60°$
$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \ ?$

$\vec{d}^2 = (-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}, -\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 = 9 + 8 + 16 - 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c} = 33 - 12 - 12 + 16 = 25 \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 5}$

Задание 3

Составить каноническое уравнение процекции прямой L на плоскость α

$L : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$
$\alpha : 2x + 3y + 6z = 6$
$\vec{q}_L\{3, -2, 0\}; \vec{n}_\alpha\{2, 3, 6\}$
$\text{Пр}_\alpha \vec{q}_L = \vec{q}_L - \frac{(\vec{q}_L, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \{3, -2, 0\} - \frac{6-6}{49}\{2, 3, 6\} = \{3, -2, 0\} = \vec{q}_L$
$M = (1, 1, 1) \in L; A = (0, 0, 1) \in \alpha; AM\{1, 1, 0\}$
Найдем проекцию т. M на α:
$\text{Пр}_\alpha A\vec{M} = A\vec{M} - \frac{(A\vec{M}, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{49}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/49 \\ 31/49 \\ -36/49 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Пр}_\alpha M = (37/49, 31/49, 13/49)$
Тогда уравнение проекции: $\boxed{\frac{x-37/49}{3} = \frac{y-31/49}{-2} = \frac{z-13/49}{0}}$

Задание 4

Найти НОД *многочленов f и g с коэффициентами в поле вычетов $\mathbb{Z}_5$*

$$f = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$$

$$g = x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x^4 + 2x^3 + 3x + 1)(x + 1) + (3x^2 + 4x + 1)$
$2(3x^2 + 4x + 1) = x^2 + 3x + 2$

$x^4 + 2x^3 + 3x + 1 = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1) + (2x + 4)$
$3(2x + 4) = x + 2$
$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
Последний ненулевой остаток $x + 2 \Rightarrow \boxed{\text{НОД}(f, g) = x + 2}$

Задание 5

Найти все матрицы перестановочные с матрицей A
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
$AB = BA$
$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \end{pmatrix}$
$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2 \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_3 = x_3 + 3x_4 \\ 3x_2 + x_4 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$
$\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad | : 3 \quad = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_3 = c_1; x_4 = c_2$
$x_1 - x_4 = 0$
$-3x_2 + 2x_3 = 0$
$x_1 = x_4 = c_2$
$x_2 = \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}c_1$
$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} c_2 & \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}}$

Билет 10

Задание 1

Задание 2

$ABCD$ — тетраэдр
$V_{ABCD} = 7; A = (-2, 1, 0); B = (0, -2, 1); C = (1, 0, -2)$

$D=(x,y,z), y<0$

$\vec{AB}\{2,-3,1\}; \vec{AC}\{3,-1,-2\}; \vec{AD}\{x+2,y-1,z\}$

$V_{ABCD}=\frac{\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}}{6} \Rightarrow \vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}=42$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ x+2 & y-1 & z \end{vmatrix}=42$

$-2z+3y-3+6x+12+x+2+9z+4y-4=42$

$7x+7y+7z=35$

$\boxed{D=(6,-1,0)}$

Задание 3

Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду. Определить основные параметры (полуости, координаты центра, фокусов, эксцентриситет) и сделать чертеж кривой в исходной системе координат.

Задание 4

Является ли неприводимым многочлен f с коэффициентами в поле вычетов $\mathbb{Z}_3$. Если нет, разложить его на неприводимые множители

$$f=x^4+x^3+x+2$$

Задание 5

Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}A^V= \tag{1}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1+1=2$$

$$A^{(1,1)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1, \qquad A^{(1,2)}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1, \qquad A^{(1,3)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A^{(2,1)}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1, \qquad A^{(2,2)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1, \qquad A^{(2,3)}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A^{(3,1)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1, \qquad A^{(3,2)}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1, \qquad A^{(3,3)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$$

$$A^V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1/2 - 1/2 & -1 + 1/2 - 1/2 & -1 - 1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 - 1/2 \\ -1/2 + 1/2 + 1 & 1/2 - 1/2 + 1 & 1/2 + 1/2 - 1 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$