Билеты 9-10

Александр Старовойтов <Telegram>

5 января 2022 г.

1. Билет 9

1.1. Задание 1

1.2. Задание 2

$|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = \sqrt{2}; |\vec{c}| = 4$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 45°; (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = 60°$
$-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = ?$

$\vec{d}^2 = (-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}, -\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 =$
$9 + 8 + 16 - 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c} = 33 - 12 - 12 + 16 = 25 \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 5}$

1.3. Задание 3

Составить каноническое уравнение процекции прямой L на плоскость α

$L : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

$\alpha : 2x + 3y + 6z = 6$

$\vec{q}_L\{3, -2, 0\}; \vec{n}_\alpha\{2, 3, 6\}$

$\text{Пр}_\alpha \vec{q}_L = \vec{q}_L - \frac{(\vec{q}_L, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \{3, -2, 0\} - \frac{6-6}{49}\{2, 3, 6\} = \{3, -2, 0\} = \vec{q}_L$

$M = (1, 1, 1) \in L; A = (0, 0, 1) \in \alpha; AM\{1, 1, 0\}$

Найдем проекцию т. M на α:

$$\text{Пр}_\alpha \vec{AM} = \vec{AM} - \frac{(\vec{AM}, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)}\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{49}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/49 \\ 31/49 \\ -36/49 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Пр}_\alpha M = (37/49, 31/49, 13/49)$

Тогда уравнение проекции: $\boxed{\frac{x-37/49}{3} = \frac{y-31/49}{-2} = \frac{z-13/49}{0}}$

1.4. Задание 4

1.5. Задание 5

Найти все матрицы перестановочные с матрицей A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$AB = BA$
$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

2. Билет 10

2.1. Задание 1

2.2. Задание 2

$ABCD$ — тетраэдр
$V_{ABCD} = 7; A = (-2, 1, 0); B = (0, -2, 1); C = (1, 0, -2)$
$D = (x, y, z), y < 0$
$\vec{AB}\{2, -3, 1\}; \vec{AC}\{3, -1, -2\}; \vec{AD}\{x + 2, y - 1, z\}$
$V_{ABCD} = \frac{\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}}{6} \Rightarrow \vec{AB}\vec{AC}\vec{AD} = 42$
$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ x + 2 & y - 1 & z \end{vmatrix} = 42$
$-2z + 3y - 3 + 6x + 12 + x + 2 + 9z + 4y - 4 = 42$
$7x + 7y + 7z = 35$
$\boxed{D = (6, -1, 0)}$

2.3. Задание 3

2.4. Задание 4

2.5. Задание 5

Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} A^V = \tag{1}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{(2,1)} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1/2 - 1/2 & -1 + 1/2 - 1/2 & -1 - 1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 - 1/2 \\ -1/2 + 1/2 + 1 & 1/2 - 1/2 + 1 & 1/2 + 1/2 - 1 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$