

Билеты 9-10

Александр Старовойтов <Telegram>

6 января 2022 г.

Билет 9

Задание 1

- Дать определения векторного и смешанного произведений векторов. (вопрос 10)
- Вывести формулы для вычисления векторного произведения и смешанного произведения векторов в правом ортонормированном базисе. (вопрос 11)

Задание 2

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 3; |\vec{b}| = \sqrt{2}; |\vec{c}| = 4 \\ \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} &= \widehat{(\vec{b}, \vec{c})} = 45^\circ; \widehat{(\vec{a}, \vec{c})} = 60^\circ \\ -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{d}^2 &= (-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}, -\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 + 2\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 = \\ 9 + 8 + 16 - 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c} &= 33 - 12 - 12 + 16 = 25 \Rightarrow |\vec{d}| = 5 \end{aligned}$$

Задание 3

Составить каноническое уравнение проекции прямой L на плоскость α

$$L: \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\alpha: 2x + 3y + 6z = 6$$

$$\vec{q}_L \{3, -2, 0\}; \vec{n}_\alpha \{2, 3, 6\}$$

$$\text{Пр}_\alpha \vec{q}_L = \vec{q}_L - \frac{(\vec{q}_L, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)} \vec{n}_\alpha = \{3, -2, 0\} - \frac{6-6}{49} \{2, 3, 6\} = \{3, -2, 0\} = \vec{q}_L$$

$$M = (1, 1, 1) \in L; A = (0, 0, 1) \in \alpha; AM \{1, 1, 0\}$$

Найдем проекцию т. M на α :

$$\text{Пр}_\alpha \vec{AM} = \vec{AM} - \frac{(\vec{AM}, \vec{n}_\alpha)}{(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\alpha)} \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{49} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/49 \\ 31/49 \\ -36/49 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Пр}_\alpha M = (37/49, 31/49, 13/49)$$

$$\text{Тогда уравнение проекции: } \boxed{\frac{x-37/49}{3} = \frac{y-31/49}{-2} = \frac{z-13/49}{0}}$$

Задание 4

Найти НОД многочленов f и g с коэффициентами в поле вычетов \mathbb{Z}_5

$$f = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2$$

$$g = x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 = (x^4 + 2x^3 + 3x + 1)(x + 1) + (3x^2 + 4x + 1)$$

$$2(3x^2 + 4x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x + 1 = (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1) + (2x + 4)$$

$$3(2x + 4) = x + 2$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

Последний ненулевой остаток $x + 2 \Rightarrow \boxed{\text{НОД}(f, g) = x + 2}$

Задание 5

Найти все матрицы перестановочные с матрицей A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2 \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_3 = x_3 + 3x_4 \\ 3x_2 + x_4 = 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mid :3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = c_1; x_4 = c_2$$

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$-3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = x_4 = c_2$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3}c_1$$

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} c_2 & \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}}$$

Билет 10

Задание 1

- Сформулировать теорему об уравнении первого порядка как уравнении прямой на плоскости. (вопрос 12)
- Дать определение пучка прямых на плоскости (собственного и несобственного). Доказать теорему об уравнении собственного пучка прямых. (вопрос 14)

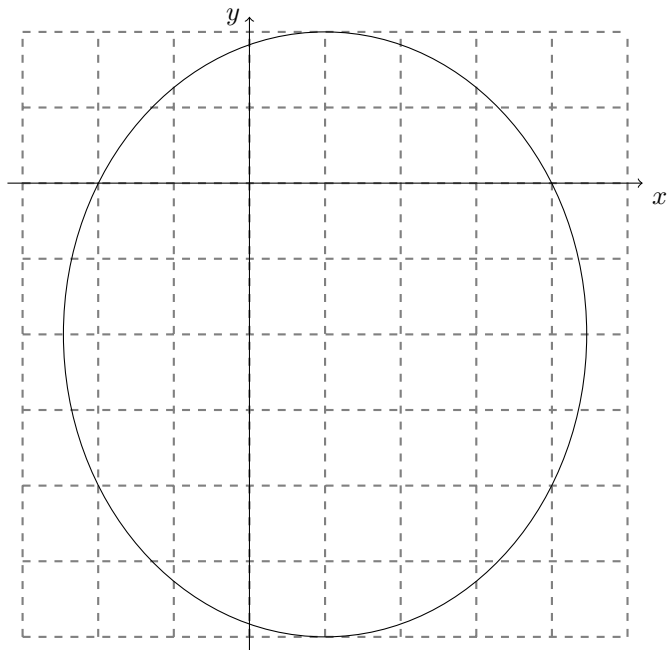
Задание 2

$$\begin{aligned} ABCD & \text{ — тетраэдр} \\ V_{ABCD} &= 7; A = (-2, 1, 0); B = (0, -2, 1); C = (1, 0, -2) \\ D &= (x, y, z), y < 0 \\ \vec{AB}\{2, -3, 1\}; \vec{AC}\{3, -1, -2\}; \vec{AD}\{x+2, y-1, z\} \\ V_{ABCD} &= \frac{\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}}{6} \Rightarrow \vec{AB}\vec{AC}\vec{AD} = 42 \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ x+2 & y-1 & z \end{vmatrix} &= 42 \\ -2z + 3y - 3 + 6x + 12 + x + 2 + 9z + 4y - 4 &= 42 \\ 7x + 7y + 7z &= 35 \\ \boxed{D = (6, -1, 0)} \end{aligned}$$

Задание 3

Уравнение кривой второго порядка привести к каноническому виду. Определить основные параметры (полуоси, координаты центра, фокусов, эксцентриситет) и сделать чертеж кривой в исходной системе координат.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 &= 0 \\ 4(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) - 48 &= 4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 - 48 \\ \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \\ x' = x - 1; y' = y + 2 \\ O(1, -2) \\ c = \sqrt{b^2 - a^2} &= 2 \\ a = 2\sqrt{3}; b &= 4 \\ F_1(1, 0); F_2(1, -4) \\ e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



Задание 4

Является ли неприводимым многочлен f с коэффициентами в поле вычетов \mathbb{Z}_3 . Если нет, разложить его на неприводимые множители

$$f = x^4 + x^3 + x + 2$$

Проверим есть ли в разложении линейные двучлены:
 $f(0) = 2 \neq 0$; $f(1) = 5 = 2 \neq 0$; $f(2) = 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \neq 0$

Квадратные трехчлены (перебором):

$$x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$$

Задание 5

Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} A^V = \quad (1)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned}
A^{(1,1)} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & A^{(1,2)} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A^{(1,3)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
A^{(2,1)} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A^{(2,2)} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & A^{(2,3)} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
A^{(3,1)} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A^{(3,2)} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A^{(3,3)} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

$$A^V = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\textcolor{red}{1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 1/2 - 1/2 & -1 + 1/2 - 1/2 & -1 - 1/2 + 1/2 \\ -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 + 1/2 & -1/2 + 0 - 1/2 \\ -1/2 + 1/2 + 1 & 1/2 - 1/2 + 1 & 1/2 + 1/2 - 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$