# 2 МЕТОД А.М. ДАНИЛЕВСКОГО

## 2.1 Вычисление собственных значений

Сущность метода А. М. Данилевского заключается в преобразовании исходной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

в подобную ей матрицу Фробениуса

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

по формуле $P = B^{-1} \cdot A \cdot B$ с помощью матрицы подобия $B$. При этом $\det(P - \lambda E) = \det\left(B^{-1}AB\text{-}\lambda B\right) = \det\left(B^{-1}(A - \lambda E)B\right) = \det B^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det B$ $= \det(P - \lambda E)$, что означает совпадение характеристических уравнений подобных матриц.

Докажем методом математической индукции, что характеристическое уравнение матрицы $P$ имеет вид:

$$\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ \dots \ - p_{n-1}\lambda - p_n\right) = 0.$$

Пусть n=2, тогда $\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\text{-}p_1\lambda\text{-}p_2$.

Предположим, что при n=k $\det(P - \lambda E) = (-1)^k \left(\lambda^k - p_1\lambda^{k-1} - \ \dots \ - p_k\right)$ и возьмём n=k+1. Тогда

$$\det(P-\lambda E)=\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_k & p_{k+1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+2}p_{k+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}-(-1)^{2k+2}\cdot\lambda\cdot\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+2}p_{k+1}-\lambda\left((-1)^k\left(\lambda^k-p_1\lambda^{k-1}-\dots-p_k\right)\right)=$$

$=(-1)^{k+1}\cdot\left(\lambda^{k+1}-p_1\lambda^k-\dots-p_k\lambda-p_{k+1}\right)$ , что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения матрицы $A$ определяются первой строкой матрицы $P$.

Согласно методу А.М. Данилевского, переход от матрицы $A$ к подобной ей матрице $P$ осуществляется с помощью n-1 преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы $A$, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы $P$.

Рассмотрим эти преобразования подробно.

На первом этапе, предполагая, что $a_{n,n\text{-}1}\neq 0$, построим матрицу $B_1$, заменив в единичной матрице порядка n элементы n-1 строки на значения

$$b_{n-1,j}=-\frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}} \quad j\neq n\text{-}1 \ ; \qquad b_{n-1,n-1}=\frac{1}{a_{n,n-1}} \tag{8}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Умножим справа матрицу $A$ на матрицу $B_1$

$$A \cdot B_1 = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где
$$c_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1} \cdot b_{n-1,j} \quad 1 \le i \le n, \quad j \ne n\text{-}1\,;$$
$$c_{i,n-1} = a_{i,n-1} \cdot b_{n-1,n-1} \quad 1 \le i \le n\,. \qquad (11)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что обратная матрица $B_1^{-1}$ имеет вид

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Пусть $D_1 = B_1^{-1} A B_1$, следовательно, $D_1 = B_1^{-1} \cdot C$. Так как, очевидно, умножение слева матрицы $C$ на матрицу $B_1^{-1}$ не изменяет последнюю строку $C$ , то матрица $D_1$ имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \cdots & d_{n-1,n-1} & d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где
$$d_{ij} = c_{ij} \qquad 1 \le i \le n\text{-}2\;;$$
$$d_{n-1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} c_{kj} \quad 1 \le j \le n\,. \qquad (14)$$

Полученная матрица $D_1$ подобна матрице $A$ и имеет одну преобразованную строку. Этим заканчивается первый этап процесса.

На втором этапе, предполагая, что $d_{n-1,n-2} \ne 0$, построим матрицу $B_2$, заменив в единичной матрице порядка n элементы n-2 строки на значения

$$b_{n-2,j} = -\frac{d_{n-1,j}}{d_{n-1,n-2}} \quad j \neq n-2\ ; \qquad (15)$$
$$b_{n-2,n-2} = \frac{1}{d_{n-1,n-2}}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & \dots & d_{n-2,n-1} & d_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Далее, взяв в качестве матрицы $A$ матрицу $D_1$ и проведя вычисления по формулам (11) и (14), получим матрицу $D_2 = B_2^{-1} \cdot D_1 \cdot B_2$ с двумя преобразованными строками. Над матрицей $D_2$ проделываем те же операции. Продолжая этот процесс, мы получим матрицу Фробениуса

$$P = B_{n-1}^{-1} \cdot B_{n-2}^{-1} \cdot \ldots \cdot B_2^{-1} \cdot B_1^{-1} \cdot A \cdot B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_{n-2} \cdot B_{n-1}\ , \qquad (17)$$

если все n-1 промежуточных преобразований возможны.

Из формулы (17) очевидно, что неособенная матрица подобия при преобразовании $A$ к $P$ может быть записана как

$$B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_{n-2} \cdot B_{n-1}\ . \qquad (18)$$

Процесс А.М. Данилевского происходит без всяких осложнений, если элементы матриц, на которые производится деление в формулах (8) и (15) отличны от нуля. Остановимся сейчас на исключительных случаях, когда это требование нарушается.

Допустим, что при преобразовании матрицы $A$ в матрицу Фробениуса $P$ после нескольких шагов получена матрица

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1,k-1} & d_{1k} & d_{1,k+1} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & 0 & d_{k,k} & d_{k,k+1} & \dots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

т.е. оказалось, что $d_{k,k-1} = 0$.

Тогда продолжать преобразование по методу А.М. Данилевского нельзя. Здесь возможны два случая.

1) Пусть $d_{k,m} \neq 0$, где $m < k-1$. Тогда этот элемент выдвигаем на место нулевого элемента $d_{k,k\text{-}1}$, т.е. переставляем (k-1)–й и m–й столбцы матрицы $D$ и, одновременно, переставляем её (k-1)–ю и m–ю строки. Можно доказать, что полученная новая матрица $D'$ будет подобна прежней. К новой матрице применяем метод А.М. Данилевского.
2) Пусть $d_{km} = 0$, где $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$, тогда $D$ имеет вид

$$D = \begin{array}{c} \qquad (D') \qquad\qquad\qquad\qquad (F) \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,k-1} & d_{1k} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{k-1,1} & d_{k-1,2} & \cdots & d_{k-1,k-1} & d_{k-1,k} & \cdots & d_{k-1,n-1} & d_{k-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{kk} & \cdots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \qquad (0) \qquad\qquad\qquad\qquad (D'') \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} D' & F \\ \hline 0 & D'' \end{array}\right)$$

В таком случае для матрицы $D$, разбитой на четыре клетки $\det(D-\lambda E) = \det(D'-\lambda E)\cdot\det(D''-\lambda E)$. При этом матрица $D''$ уже приведена к форме Фробениуса и $\det(D''-\lambda E) = (-1)^{n-k+1}\left(\lambda^{n-k+1} - d_{kk}\lambda^{n-k} - d_{k,k+1}\lambda^{n-k-1} - \ldots - d_{k,n-1}\lambda - d_{kn}\right)$. Остаётся применить метод А.М. Данилевского к матрице $D'$.

### 2.2 Нахождение собственных векторов

Пусть $\vec{y}$ - собственный вектор матрицы $P$ (2), отвечающий собственному значению $\lambda$. Тогда $P\vec{y} = \lambda\vec{y}$ или в координатном виде

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_{n-1} y_{n-1} + p_n y_n = \lambda y_1 \\ y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda y_2 \\ \qquad y_2 \qquad\qquad\qquad = \lambda y_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad y_{n-1} \quad = \lambda y_n \end{cases}$$

Полагая $y_n = 1$, мы получим, используя последовательно эти уравнения с низу вверх, $y_{n-1} = \lambda$, $y_{n-2} = \lambda^2$, …, $y_1 = \lambda^{n-1}$.

$$\vec{y} = \left(\lambda^{n-1},\ \lambda^{n-2},\ \ldots,\ \lambda,\ 1\right) \tag{19}$$

Так как матрицы $A$ (6) и $P$ (7) подобны, то $P = B^{-1} \cdot A \cdot B$, а матрица подобия $B$ определяется формулой (18). Тогда $B^{-1} A B \vec{y} = \lambda \vec{y}$ или $A \cdot B\vec{y} = \lambda B\vec{y}$. Это означает, что вектор

$$\vec{x} = B\vec{y} = B \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \dots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

является собственным вектором матрицы $A$, отвечающим собственному значению $\lambda$.

### 2.3 Пример 3

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 1{,}3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 2 & 1 & \boxed{1{,}6} & 2 \end{pmatrix}$ методом А.М. Данилевского.

Вычислим собственные значения матрицы $A$, используя формулы (8) - (16).

1-й этап

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{1{,}6} & -\frac{1}{1{,}6} & \frac{1}{1{,}6} & -\frac{2}{1{,}6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1{,}25 & -0{,}625 & 0{,}625 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1{,}6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = B_1^{-1} \cdot A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1,575 & 0,6875 & 0,3125 & 1,375 \\ -1,5 & 0,05 & 1,25 & -1,5 \\ 1,45 & \boxed{4,125} & 4,375 & 2,81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2-й этап

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1,45}{4,125} & \dfrac{1}{4,125} & -\dfrac{4,375}{4,125} & -\dfrac{2,81}{4,125} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3515 & 0,2424 & -1,0606 & -0,6812 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1,45 & 4,125 & 4,375 & 2,81 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = B_2^{-1} \cdot D_1 \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 1,3333 & 0,1667 & -0,4167 & 0,9067 \\ \boxed{-4,3267} & 4,6667 & 7,1433 & -5,0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3-й этап

$$B_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{-4,3267} & -\dfrac{4,6667}{-4,3267} & -\dfrac{7,1433}{-4,3267} & -\dfrac{-5,0133}{-4,3267} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,2311 & 1,0786 & 1,651 & -1,1587 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} -4{,}3267 & 4{,}6667 & 7{,}1433 & -5{,}0133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = B_3^{-1} \cdot D_2 \cdot B_3 = P = \begin{pmatrix} 6 & 0{,}2 & -12{,}735 & 2{,}7616 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Первая строка матрицы $P$ определяет коэффициенты характеристического уравнения матрицы $A$, которое имеет вид $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 0{,}2\lambda^2 + 12{,}735\lambda - 2{,}7616 = 0$. Корни этого уравнения будут собственными значениями матрицы $A$. Решая уравнение одним из численных методов [1] (методом половинного деления, комбинированным, итераций и др.), находим $\lambda_1 = -1{,}4201$ , $\lambda_2 = 0{,}2226$ , $\lambda_3 = 1{,}5454$ , $\lambda_4 = 5{,}652$. При этом для отделения корней можно использовать результат примера 2.

Найдем собственные векторы матрицы $A$ с помощью формул (18)-(20).

Матрица подобия

$$B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} -0{,}2311 & 1{,}0786 & 1{,}651 & -1{,}1587 \\ 0{,}0812 & -0{,}1367 & -1{,}641 & -0{,}2739 \\ 0{,}2381 & -1{,}2628 & -0{,}4132 & 0{,}3696 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} (-1{,}4201)^3 \\ (-1{,}4201)^2 \\ -1{,}4201 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}8638 \\ 2{,}0166 \\ -1{,}4201 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2226^3 \\ 0{,}2226^2 \\ 0{,}2226 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}011 \\ 0{,}0496 \\ 0{,}2226 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 1{,}5454^3 \\ 1{,}5454^2 \\ 1{,}5454 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}691 \\ 2{,}3883 \\ 1{,}5454 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 5{,}652^3 \\ 5{,}652^2 \\ 5{,}652 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180{,}5568 \\ 31{,}9455 \\ 5{,}652 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы матрицы $A$

$$\vec{x}_1 = B \cdot \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}6663 \\ 1{,}548 \\ -2{,}2723 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = B \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}7402 \\ -0{,}6451 \\ 0{,}2176 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = B \cdot \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 3{,}1157 \\ -2{,}8365 \\ -2{,}4059 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_4 = B \cdot \vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}8975 \\ 0{,}7531 \\ 0{,}69 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Если эти векторы нормировать каждый на свою длину, т.е. найти $\vec{x}_i = \dfrac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|}$ $\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ ,то получим ортонормированную систему собственных векторов матрицы $A$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}222 \\ 0{,}5159 \\ -0{,}7573 \\ 0{,}3333 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5219 \\ -0{,}4549 \\ 0{,}1534 \\ 0{,}7051 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6289 \\ -0{,}5726 \\ -0{,}4857 \\ 0{,}2019 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}5317 \\ 0{,}4462 \\ 0{,}4088 \\ 0{,}5925 \end{pmatrix}$$

# 3 МЕТОД А.Н. КРЫЛОВА

## 3.1 Вычисление собственных значений

Согласно тождеству Гамильтона – Кели [4], матрица $A$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению (4), поэтому

$$A^n - p_1 A^{n-1} - p_2 A^{n-2} - \ldots - p_{n-1} A - p_n E = 0 \tag{21}$$

Возьмём произвольный ненулевой вектор $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$ и умножим обе части равенства (21) справа на $\vec{y}_0$

$$A^n \vec{y}_0 - p_1 A^{n-1} \vec{y}_0 - p_2 A^{n-2} \vec{y}_0 - \ldots - p_{n-1} A \vec{y}_0 - p_n \vec{y}_0 = \vec{0} \tag{22}$$

Положим

$$\vec{y}_k = A^k \vec{y}_0 \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{23}$$

тогда равенство (22) приобретает вид



$$\vec{y}_n - p_1\vec{y}_{n\text{-}1} - p_2\vec{y}_{n\text{-}2} - \ldots - p_{n-1}\vec{y}_1 - p_n\vec{y}_0 = \vec{0} \tag{24}$$

где $\vec{y}_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$ $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

Векторы $\vec{y}_k$ удобно находить с помощью рекуррентной формулы

$$\vec{y}_k = A\vec{y}_{k-1} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{25}$$

Следовательно, векторное равенство (24) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} p_1 y_{i,n-1} + p_2 y_{i,n-2} + \ldots + p_{n\text{-}1} y_{i1} + p_n y_{i0} = y_{in} \\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{gathered} \tag{26}$$

из которой можно найти неизвестные значения $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, определяющие коэффициенты характеристического уравнения (4). Если векторы $\vec{y}_k$ $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ линейно независимы, то система (26) будет иметь единственное решение, если эти векторы окажутся линейно зависимы, то можно изменить начальный вектор $\vec{y}_0$.

### 3.2 Нахождение собственных векторов

Для простоты ограничимся случаем, когда характеристический многочлен

$$D(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n\text{-}1} - p_2\lambda^{n\text{-}2} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n \tag{27}$$

имеет различные корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, которые будем считать уже найденными из характеристического уравнения. Разложим вектор $\vec{y}_0$, использовавшийся при вычислении собственных значений, по собственным векторам $\vec{x}_1$ , $\vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_n$ матрицы $A$

$$\vec{y}_0 = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \ldots + c_n\vec{x}_n \tag{28}$$

где $c_i \neq 0$ $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ - некоторые коэффициенты. Отсюда, учитывая, что

$$\begin{aligned} &A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i \\ &A^2\vec{x}_i = \lambda_i^2\vec{x}_i \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ &A^{n-1}\vec{x}_i = \lambda_i^{n-1}\vec{x}_i \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{aligned} \tag{29}$$

получим

$$
\begin{aligned}
&\vec{y}_1 = c_1\lambda_1\vec{x}_1 + c_2\lambda_2\,\vec{x}_2 + \ldots + c_n\lambda_n\vec{x}_n \\
&\vec{y}_2 = c_1\lambda_1^2\vec{x}_1 + c_2\,\lambda_2^2\vec{x}_2 + \ldots + c_n\lambda_n^2\vec{x}_n \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
&\vec{y}_{n-1} = c_1\lambda_1^{n-1}\vec{x}_1 + c_2\lambda_2^{n-1}\,\vec{x}_2 + \ldots + c_n\lambda_n^{n-1}\vec{x}_n
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

Пусть $$Q_i(\lambda) = \lambda^{n-1} + q_{1i}\lambda^{n-2} + \ldots + q_{n-1,i} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (31)$$
произвольная система многочленов. Составляя линейную комбинацию векторов $\vec{y}_{n-1}, \vec{y}_{n-2},\ \ldots,\ \vec{y}_0$ с коэффициентами из (31) в силу соотношений (28) и (30) находим

$$
\begin{gathered}
\vec{y}_{n-1} + q_{1i}\vec{y}_{n-2} + \ \ldots\ + \ q_{n-1,i}\vec{y}_0 = \\
= c_1Q_i(\lambda_1)\vec{x}_1 + c_2Q_i(\lambda_2)\vec{x}_2 + \ldots + c_nQ_i(\lambda_n)\vec{x}_n \\
i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n
\end{gathered}
\qquad (32)
$$

Если положить

$$Q_i(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (33)$$

то, очевидно

$$Q_i(\lambda_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ D'(\lambda_i) \neq 0, & j = i \end{cases}$$

Формула (32) при этом принимает вид

$$c_iQ_i(\lambda_i)\vec{x}_i = \vec{y}_{n-1} + q_{1i}\vec{y}_{n-2} + \ldots + q_{n-1,i}\vec{y}_0 \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (34)$$

Коэффициенты $q_{ji}$ $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\text{-}1$ могут быть легко определены по схеме Горнера

$$q_{0i} = 1\ ,\quad q_{ji} = \lambda_i q_{j-1,i} - p_j \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\text{-}1 \qquad (35)$$

Таким образом, формула (34), в которой коэффициенты вычисляются по формуле (35), определяет собственный вектор $\vec{x}_i$, отвечающий собственному значению $\lambda_i$, с точностью до числового множителя.

### 3.3 Пример 4

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 0{,}5 & 2 \\ 1 & 1{,}3 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 2 & 1 & 1{,}6 & 2 \end{pmatrix}$$ методом А.Н. Крылова.

Вычислим собственные значения матрицы, используя формулы (25), (26) и результаты, полученные в примере 3.

Выберем начальный вектор $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\vec{y}_1 = A\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 1 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}_2 = A\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 10,09 \\ 6,5 \\ 6,55 \\ 10,2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_3 = A\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 52,373 \\ 41,84 \\ 37,64 \\ 57,56 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_4 = A\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 291,0006 \\ 239,605 \\ 220,7825 \\ 321,93 \end{pmatrix}$$

Таким образом, система для нахождения $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ имеет вид

$$\begin{cases} 52,373p_1 + 10,09p_2 + 2,2p_3 + p_4 = 291,0006 \\ 41,84\ p_1 + \quad 6,5p_2 + \quad p_3 \quad = 239,605 \\ 37,64\ p_1 + \ 6,55p_2 + 0,5p_3 \quad = 220,7825 \\ 57,56\ p_1 + \ 10,2p_2 + \quad 2p_3 \quad = 321,93 \end{cases}$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений можно решить по формулам Крамера или методом Гаусса [1].В результате решения получим $p_1 = 6,\quad p_2 = 0,2,\quad p_3 = -12,735,\qquad p_4 = 2,7616$. Таким образом, характеристическое уравнение матрицы $A$ имеет вид $\lambda^4 - 6\lambda^3 - 0,2\lambda^2 + 12,735\lambda - 2,7616 = 0$. Его корни, являющиеся собственными значениями матрицы $A$, были найдены в примере 3: $\lambda_1 = -1,4201$ , $\lambda_2 = 0,2226$ , $\lambda_3 = 1,5454$ , $\lambda_4 = 5,652$.

Найдем собственные векторы матрицы $A$ с помощью формул (35) и (34) для всех собственных значений.

$\lambda_1 = -1{,}4201$

$q_{01} = 1$

$q_{11} = (-1{,}4201)\cdot 1 - 6 = -7{,}4201$

$q_{21} = (-1{,}4201)\cdot(-7{,}4201) - 0{,}2 = 10{,}3372$

$q_{31} = (-1{,}4201)\cdot 10{,}3372 - (-12{,}735) = -1{,}9447$

$$\vec{x}_1 = \vec{y}_3 - 7{,}4201\vec{y}_2 + 10{,}3372\vec{y}_1 - 1{,}9447\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} -1{,}6986 \\ 3{,}9466 \\ -5{,}793 \\ 2{,}5494 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 0{,}2226$

$q_{02} = 1$

$q_{12} = 0{,}2226\cdot 1 - 6 = -5{,}7774$

$q_{22} = 0{,}2226\cdot(-5{,}7774) - 0{,}2 = -1{,}4862$

$q_{32} = 0{,}2226\cdot(-1{,}4862) - (-12{,}735) = 12{,}4041$

$$\vec{x}_2 = \vec{y}_3 - 5{,}7774\vec{y}_2 - 1{,}4862\vec{y}_1 - 12{,}4041\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 3{,}2138 \\ 2{,}8009 \\ -0{,}9449 \\ -4{,}3416 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1{,}5454$

$q_{03} = 1$

$q_{13} = 1{,}5454\cdot 1 - 6 = -4{,}4546$

$q_{23} = 1{,}5454\cdot(-4{,}4546) - 0{,}2 = -7{,}0842$

$q_{33} = 1{,}5454\cdot(-7{,}0842) - (-12{,}735) = 1{,}787$

$$\vec{x}_3 = \vec{y}_3 - 4{,}4546\vec{y}_2 - 7{,}0842\vec{y}_1 + 1{,}787\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} -6{,}372 \\ 5{,}801 \\ 4{,}9204 \\ -2{,}0451 \end{pmatrix}$$

$\lambda_4 = 5{,}652$

$q_{04} = 1$

$q_{14} = 5{,}652 \cdot 1 - 6 = -0{,}348$

$q_{24} = 5{,}652 \cdot (-0{,}348) - 0{,}2 = -2{,}1667$

$q_{34} = 5{,}652 \cdot (-2{,}1667) - (-12{,}735) = 0{,}4886$

$$\vec{x}_4 = \vec{y}_3 - 0{,}348\vec{y}_2 - 2{,}1667\vec{y}_1 + 0{,}4886\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 44{,}5838 \\ 37{,}4115 \\ 34{,}2774 \\ 49{,}6773 \end{pmatrix}$$

Если каждый из векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ нормировать на его длину, то мы придем к ортонормированной системе собственных векторов матрицы A, с точностью до множителя (-1) совпадающих с полученными в примере 3:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}222 \\ 0{,}5159 \\ -0{,}7573 \\ 0{,}3333 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5219 \\ 0{,}4549 \\ -0{,}1534 \\ -0{,}7051 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -0{,}6289 \\ 0{,}5726 \\ 0{,}4857 \\ -0{,}2019 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0{,}5317 \\ 0{,}4462 \\ 0{,}4088 \\ 0{,}5925 \end{pmatrix}$$

# 4 МЕТОД ЛЕВЕРРЬЕ-ФАДДЕЕВА

## 4.1 Вычисление собственных значений

Этот метод получения характеристического уравнения матрицы основан на формулах Ньютона [4] для сумм степеней корней алгебраического уравнения.

Пусть

$$D(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n \tag{36}$$

характеристический многочлен матрицы A и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - полная совокупность его корней, где каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность.