2 МЕТОД А.М. ДАНИЛЕВСКОГО

2.1 Вычисление собственных значений

Сущность метода А. М. Данилевского заключается в преобразовании исходной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

в подобную ей матрицу Фробениуса

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

по формуле $P = B^{-1} \cdot A \cdot B$ с помощью матрицы подобия B. При этом $\det(P - \lambda E) = \det\left(B^{-1}AB\text{-}\lambda B\right) = \det\left(B^{-1}(A - \lambda E)B\right) = \det B^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det B$ $= \det(P - \lambda E)$, что означает совпадение характеристических уравнений подобных матриц.

Докажем методом математической индукции, что характеристическое уравнение матрицы P имеет вид:

$$\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ \dots \ - p_{n-1}\lambda - p_n\right) = 0.$$

Пусть n=2, тогда $\det(P - \lambda E) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\text{-}p_1\lambda\text{-}p_2$.

Предположим, что при n=k $\det(P - \lambda E) = (-1)^k \left(\lambda^k - p_1\lambda^{k-1} - \ \dots \ - p_k\right)$ и возьмём n=k+1. Тогда

$$\det(P-\lambda E)=\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_{k-1} & p_k & p_{k+1} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+2}p_{k+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}-(-1)^{2k+2}\cdot\lambda\cdot\begin{vmatrix} p_1-\lambda & p_2 & \dots & p_k \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+2}p_{k+1}-\lambda\left((-1)^k\left(\lambda^k-p_1\lambda^{k-1}-\ldots-p_k\right)\right)=$$

$=(-1)^{k+1}\cdot\left(\lambda^{k+1}-p_1\lambda^k-\ldots-p_k\lambda-p_{k+1}\right)$, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, коэффициенты характеристического уравнения матрицы A определяются первой строкой матрицы P.

Согласно методу А.М. Данилевского, переход от матрицы A к подобной ей матрице P осуществляется с помощью n-1 преобразований подобия, последовательно преобразующих строки матрицы A, начиная с последней, в соответствующие строки матрицы P.

Рассмотрим эти преобразования подробно.

На первом этапе, предполагая, что $a_{n,n\text{-}1}\neq 0$, построим матрицу B_1, заменив в единичной матрице порядка n элементы n-1 строки на значения

$$\begin{aligned} b_{n-1,j} &= -\frac{a_{nj}}{a_{n,n-1}} \quad j\neq n\text{-}1 \ ; \\ b_{n-1,n\text{-}1} &= \frac{1}{a_{n,n-1}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Умножим справа матрицу A на матрицу B_1

$$A \cdot B_1 = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где

$$c_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1} \cdot b_{n-1,j} \quad 1 \le i \le n, \quad j \ne n\text{-}1\ ;$$
$$c_{i,n-1} = a_{i,n-1} \cdot b_{n-1,n-1} \quad 1 \le i \le n\ . \qquad (11)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что обратная матрица B_1^{-1} имеет вид

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Пусть $D_1 = B_1^{-1} A B_1$, следовательно, $D_1 = B_1^{-1} \cdot C$. Так как, очевидно, умножение слева матрицы C на матрицу B_1^{-1} не изменяет последнюю строку C , то матрица D_1 имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \cdots & d_{n-1,n-1} & d_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где

$$d_{ij} = c_{ij} \qquad 1 \le\ i\ \le\ n\text{-}2\ \ ;$$
$$d_{n-1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} c_{kj} \quad 1 \le\ j \le\ n\ . \qquad (14)$$

Полученная матрица D_1 подобна матрице A и имеет одну преобразованную строку. Этим заканчивается первый этап процесса.

На втором этапе, предполагая, что $d_{n-1,n-2} \ne 0$, построим матрицу B_2, заменив в единичной матрице порядка n элементы n-2 строки на значения

$$b_{n-2,j} = -\frac{d_{n-1,j}}{d_{n-1,n-2}} \quad j \neq n-2\ ;$$
$$b_{n-2,n-2} = \frac{1}{d_{n-1,n-2}} \tag{15}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-2,1} & d_{n-2,2} & \dots & d_{n-2,n-1} & d_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Далее, взяв в качестве матрицы A матрицу D_1 и проведя вычисления по формулам (11) и (14), получим матрицу $D_2 = B_2^{-1} \cdot D_1 \cdot B_2$ с двумя преобразованными строками. Над матрицей D_2 проделываем те же операции. Продолжая этот процесс, мы получим матрицу Фробениуса

$$P = B_{n-1}^{-1} \cdot B_{n-2}^{-1} \cdot \ldots \cdot B_2^{-1} \cdot B_1^{-1} \cdot A \cdot B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_{n-2} \cdot B_{n-1}\ , \tag{17}$$

если все n-1 промежуточных преобразований возможны.

Из формулы (17) очевидно, что неособенная матрица подобия при преобразовании A к P может быть записана как

$$B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_{n-2} \cdot B_{n-1}\ . \tag{18}$$

Процесс А.М. Данилевского происходит без всяких осложнений, если элементы матриц, на которые производится деление в формулах (8) и (15) отличны от нуля. Остановимся сейчас на исключительных случаях, когда это требование нарушается.

Допустим, что при преобразовании матрицы A в матрицу Фробениуса P после нескольких шагов получена матрица

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1,k-1} & d_{1k} & d_{1,k+1} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & 0 & d_{k,k} & d_{k,k+1} & \dots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

т.е. оказалось, что $d_{k,k-1} = 0$.

Тогда продолжать преобразование по методу А.М. Данилевского нельзя. Здесь возможны два случая.

1) Пусть $d_{k,m} \neq 0$, где $m < k-1$. Тогда этот элемент выдвигаем на место нулевого элемента $d_{k,k-1}$, т.е. переставляем (k-1)–й и m–й столбцы матрицы D и, одновременно, переставляем её (k-1)–ю и m–ю строки. Можно доказать, что полученная новая матрица D' будет подобна прежней. К новой матрице применяем метод А.М. Данилевского.
2) Пусть $d_{km} = 0$, где $m = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ k-1$, тогда D имеет вид

$$D = \begin{array}{c} \qquad (D') \qquad\qquad\qquad\qquad (F) \\ \left(\begin{array}{cccc|cccc} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1,k-1} & d_{1k} & \cdots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{k-1,1} & d_{k-1,2} & \cdots & d_{k-1,k-1} & d_{k-1,k} & \cdots & d_{k-1,n-1} & d_{k-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{kk} & \cdots & d_{k,n-1} & d_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \qquad (0) \qquad\qquad\qquad\qquad (D'') \end{array} = \left(\begin{array}{c|c} D' & F \\ \hline 0 & D'' \end{array}\right)$$

В таком случае для матрицы D, разбитой на четыре клетки $\det(D-\lambda E) = \det(D'-\lambda E)\cdot\det(D''-\lambda E)$. При этом матрица D'' уже приведена к форме Фробениуса и $\det(D''-\lambda E) = (-1)^{n-k+1}\left(\lambda^{n-k+1} - d_{kk}\lambda^{n-k} - d_{k,k+1}\lambda^{n-k-1} - \ldots - d_{k,n-1}\lambda - d_{kn}\right)$. Остаётся применить метод А.М. Данилевского к матрице D'.

2.2 Нахождение собственных векторов

Пусть $\vec{y}$ - собственный вектор матрицы P (2), отвечающий собственному значению λ. Тогда $P\vec{y} = \lambda\vec{y}$ или в координатном виде

$$\begin{cases} p_1 y_1 + p_2 y_2 + \ldots + p_{n-1} y_{n-1} + p_n y_n = \lambda y_1 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ y_2 = \lambda y_3 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_{n-1} = \lambda y_n \end{cases}$$

Полагая $y_n = 1$, мы получим, используя последовательно эти уравнения с низу вверх, $y_{n-1} = \lambda$, $y_{n-2} = \lambda^2$, … , $y_1 = \lambda^{n-1}$.

$$\vec{y} = \left(\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2},\ \ldots\ , \lambda, 1\right) \tag{19}$$