1 Перестановки. Их свойства. Четная и нечетная перестановка. Транспозиция.

NOTE:

field: Перестановки

field: Пусть Ω — множество, $|\Omega| = n$. Занумеровав эти элементы, считаем $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда перестановки — биекции $\sigma : \Omega \to \Omega$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

S_n — множество всех перестановок из n элементов.

Произведение перестановок — $(\sigma\tau) = \sigma(\tau(i))$.

NOTE:

field: Свойства перестановок

field:

1. $\sigma\tau \neq \tau\sigma$
2. $(\sigma\tau)\pi = \sigma(\tau\pi)$ (т.к. это отображения)
3. существует e и σ^{-1}

NOTE:

field: Четная и нечетная перестановка

field: A_n — множество четных перестановок.

$(-1)^m$ — четность перестановки, где m это количество транспозиций в разложении.

Четность перестановки совпадает с четностью количества циклов четной длины.

NOTE:

field: Транспозиция

field: Транспозиция — цикл длины 2.

2 Разложение перестановки в произведение циклов. Представление перестановки в виде произведения транспозиций. Представление четной перестановки в виде произведения циклов длины 3.

NOTE:

field: Разложение перестановки в произведение циклов

field: $\sigma \in S_n$. $i_1 \in \Omega$. $i_2 = \sigma(i_1)$, $i_3 = \sigma(i_2)$, …. Т.к. $|\Omega| = n$ и σ — биекция, $\exists i_k : i_1 = \sigma(i_k)$.

$$(i_1 i_2 \dots i_k)$$

Далее из биекции находим остальные непересекающиеся циклы.

NOTE:

field: Представление перестановки в виде произведения транспозиций.

field: Достаточно для одного цикла.

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k)$$

NOTE:

field: Представление четной перестановки в виде произведения циклов длины 3.

field: $\sigma \in A_n \Leftrightarrow \sigma 3$.

3 Группы. Их свойства. Примеры. Подгруппы.

NOTE:

field: Группы

field: $(G, \circ)$

1. ассоциативность
2. $\exists e$
3. $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G$

Абелева $\Leftrightarrow \circ$ коммутативно
$|G|$ — порядок
$a \in G, ord(a) = k$, если $a^k = e$ и k — минимально.
G — p-группа $\Leftrightarrow p$ — простое и $|G| = p^n$.

NOTE:

field: Свойства групп

field:

1. e — едиственна
2. a^{-1} — единственнен

NOTE:

field: Примеры групп

field:

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(GL_n, \cdot)$ — невырожденные матрицы
3. $(S_n, \cdot)$
4. $(A_n, \cdot)$

NOTE:

field: Подгруппы

field: $(G, \circ)$. $H \subset G$ — подгруппа $\Leftrightarrow e \in H$, H — группа относительно $\circ$.

$aH = \{ah : \forall h \in H\}$ — левый смежный класс. Любая группа распадается на непересекающиеся смежные классы.

(Теорема Лагранжа): $|G| = n$, $H \subset G$ — подгруппа, $|H| = k$. Тогда $n = k(G : H)$, где $(G : H)$ — число смежных классов по H.

Циклическая — порождается одним элементом.

$\exists g : a = g^{-1}bg$ — a, b сопряженные

G распадается на непересекающиеся классы сопряженности.

4 Действия групп на множествах. Орбиты и стабилизаторы. Их свойства. Формула Бернсайда.

NOTE:

field: Дествия групп на множествах

field: G — группа, M — множество.

Отбражение $G \times M \to M$:

1. $em = m \quad \forall m \in M$
2. $g_1(g_2m) = (g_1g_2)m$

NOTE:

field: Орбиты и стабилизаторы

field: $St(m) = \{g \in G : gm = m\} \subset G$, подгруппа G
$Orb(m) = \{gm : g \in G\} \subset M$.

NOTE:

field: Свойства орбит и стабилизаторов

field: Имеется биекция $Orb(m) \mapsto \{gSt(m) : g \in G\}$
$|G| = |Orb(m)| \cdot |St(m)|$
$m_1, m_2 \in Orb(m) \Rightarrow St(m_1), St(m_2)$ — сопряжены.

NOTE:

field: Формула Бернсайда

field: $|G| = n, |M| = m$. $M^g = \{m \in M : gm = m\}$. Тогда $N = \frac{1}{|G|} \sum_{g\ inG} |M^g|$, где N — число орбит.

5 Нормальные подгруппы. Гомоморфизмы групп. Ядро и факторгруппа. Первая теорема о гомоморфизме.

NOTE:

field: Нормальные подгруппы

field: $H \lhd G \Leftrightarrow g^{-1}Hg \subset H \quad \forall g \in G$
(Или $gH = Hg \quad \forall g \in G$)

NOTE:

field: Гомоморфизмы групп, ядро и факторгруппа

field: $f : G \to G'$: $f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in G$
$\ker(f) = \{e\} \Leftrightarrow$ инъективный гомоморфизм
$\forall g' \in G' : \quad \exists g \in G, f(g) = g' \Leftrightarrow$ сюръективный гомоморфизм
Сюръективный и инъективный гомоморфизм это изоморфизм ($G \cong G'$)
$\ker(f) = \{a \in G | f(a) = e\}$
Если f — гомоморфизм:

1. $f(e) = e'$
2. $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$
3. $\ker(f) \lhd G$

G/H — факторгруппа $\Leftrightarrow G/H = \{gH \mid \forall g \in G, H \lhd G\}$. $aH \circ bH \mapsto abH$

NOTE:

field: 1-ая теорема о гомоморфизме групп

field:

Th 1 (1-ая теорема о гомоморфизме)**.** *f — сюръективный гомоморфизм* $\Rightarrow \exists G/\ker(f) \cong G'$
$H \lhd G \Rightarrow \quad \exists \varphi : G \to G/H : \varphi$ *— сюръекция,* $\ker(\varphi) = H$

6 Вторая и третья теоремы о гомоморфизме. Теорема Кели.

NOTE:

field: 2-ая теорема о гомоморфизме групп

field:

Th 2 (2-ая теорема о гомоморфизме групп). $H \subset G, K \lhd G \Rightarrow$

1. $HK = KH$
2. $HK \subset G$
3. $HK/K \cong H/(H \cap K)$

NOTE:

field: 3-ая теорема о гомоморфизме групп

field: $H \lhd G, K \lhd G, K \subset H \Rightarrow G/H \cong (G/K)/(H/K)$

NOTE:

field: Теорема Кели

field:

Th 3 (Теорема Кели). $|G| = n \Rightarrow \quad \exists f : G \to S_n$, n — *инъективный гомоморфизм (вложение).*

7 Конечные абелевы группы. Их классификация.

NOTE:

field: Конечные абелевы группы

field: В абелевой группе любая подгруппа нормальная.

Th 4 (Лемма)**.** *G — абелева группа, $\forall a \in G : ord(a) = p^k$, для какого-то $k \Rightarrow |G| = p^n$*

Th 5. *G — абелева группа, $G = m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n} \Rightarrow G \cong A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_n}$, где A_{p_i} — абелева группа и $|A_{P_i} = p_i^{s_i}$*

Th 6. *G — абелева p-группа $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_{p_{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_{s_n}}$*

Th 7. *G — абелева группа $\Rightarrow G$ разлагается в прямую сумму циклических p-групп единственным образом.*

8 Свободные абелевы группы. Их базис. Классификация конечно порождённых абелевых групп.

NOTE:

field: Свободные абелевы группы

field: Без кручений $\Leftrightarrow \quad \nexists a \in A : na = 0$

Конечно порожденная абелева группа A без кручений называется свободной абелевой группой. Количество элементов в базисе — ранг этой группы. Обозн. $F_n^{ab} = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$ n раз.

NOTE:

field: Базис свободной абелевой группы

field: Система $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ — независимая $\Leftrightarrow$ $(n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_k a_k = 0, n_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0)$

A — абелева без кручений.

Система a_k — базис $A \Leftrightarrow a_k$ — независимы и порождают A.

Любая конечно порожденная абелева группа без кручений обладает базисом, притом все ее базисы равномощны.

NOTE:

field: Классификация конечно порожденных абелевых групп

field: A — конечно порожденная абелева группа $Rightarrow A \cong F_n^{ab} \oplus B$, где B — конечная абелева группа.

9 Свободные группы. Задание группы образующими и соотношениями. Примеры.

NOTE:

field: Свободные группы

field: $X = \{x_i\}$ — множество символов (алфавит)

$F(X)$ — множество классов эквивалентных слов, где слово — пустая или конечная последовательность символов из $X \cup X^{-1}$, а два слова эквивалентны, если после редукции (вычеркивание $x_i x_i^{-1}$ и $x_i^{-1} x_i$), получаем одинаковые слова. Класс эквивалентных слов обозн. $[u]$.

На $F(X)$ введем операцию $[u][v] = [uv]$. Тогда $F(X)$ — свободная группа. Если X — конечно, то конечно порожденная свободная группа. $|X|$ — степень свободы.

NOTE:

field: Задание группы образующими и соотношениями. Примеры

field: G — группа, порожденная $g_1, g_2, \ldots, g_n$. X — алфавит: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $\Rightarrow f : X \to M$, $f(x_i) = g_i$ единственным образом продолжается до гомоморфизма групп $\overline{f} : F(X) \to G$:

Элементы $\ker \overline{f}$ — соотношения группы G в алфавите X. Если множество соотношений H' такого, что минимальная нормальная подгруппа в $F(X)$ содержащая H', совпадает с H, то H' — определяющее множество соотношений

$H' = \{x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1} | 1 \leq i < j \leq n\}$ определяют свободную абелеву группу.

10 Кольца. Определение и основные свойства. Примеры.

NOTE:

field: Кольца

field: $(A, +, \cdot)$ — кольцо, если:

1. $(A, +)$ — абелева группа
2. $a(bc) = (ab)c$ и $\exists e$
3. $(x + y)z = xz + yz$ и $z(x + y) = zx + zy$

$ab = ba \Rightarrow$ коммутативное
$\exists a^{-1} \Rightarrow$ тело
тело, где $ab = ba$ это поле

NOTE:

field: Свойства кольца

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
2. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
3. $(-a)(-b) = ab$

NOTE:

field: Примеры колец

field: $\mathbb{Z}$ — коммутативное кольцо
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — поля
$M_{n \times m}$ некоммутативное кольцо
$Z_m = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ — множество остатков при делении на m, коммутативное кольцо.

11 Идеалы. Факторкольца. Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизме для колец. Прямое произведение колец. Группа единиц.

NOTE:

field: Идеалы

field: $\mathbf{a} \subset A$ — левый идеал кольца $A \Leftrightarrow \mathbf{a}$ — подгруппа относительно сложения и $ax \in \mathbf{a} \forall a \in A, x \in \mathbf{a}$ (т.е. $A\mathbf{a} \subset \mathbf{a}$)

(Двусторонний) *идеал* — левый и правый идеал.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — идеалы $\Rightarrow \mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ — тоже идеал

NOTE:

field: Факторкольца

field: $A/\mathbf{a}$, элементы — смежные классы $x + \mathbf{a}$. $(x + \mathbf{a}) + (y + \mathbf{a}) = (x + y) + \mathbf{a}$, $(x + \mathbf{a})(y + \mathbf{a}) = xy + \mathbf{a}$

NOTE:

field: Гомоморфизмы колец

field: $f : A \to B$:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$

$\ker(f) = \{a | f(a) = 0\}$

NOTE:

field: Теорема о гомоморфизме для колец

field:

Th 8 (Теорема о гомоморфизме для колец)**.** *$f : A \to B$ — сюръективный гомоморфизм колец $\Rightarrow \exists! A/\ker(f) \cong B$.*

$\mathbf{a} \subset A$ — идеал кольца $A \Rightarrow \exists! \varphi : a \to A/\mathbf{a} : \varphi$ — сюръекция, $\ker(\varphi) = \mathbf{a}$

NOTE:

field: Прямое произведение колец

field: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$:

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$
- ноль — $(0, 0)$, e — $(1, 1)$

NOTE:

field: Группа единиц

field: $U \subset A$ — множество обратимых элементов, называется группой единиц, а ее элементы — единицами кольца A.

12 Коммутативные кольца. Максимальные и простые идеалы. Их свойства. Критерий того, что факторкольцо является полем.

NOTE:

field: Максимальный и простой идеал

field: A — коммутативное кольцо

Идеал $\mathbf{p} \subset A$ — простой $\Leftrightarrow$ ($xy \in \mathbf{p} \Rightarrow x \in \mathbf{p}$ либо $y \in \mathbf{p}$)

$\mathbf{p}$ — максимальный $\Leftrightarrow \nexists \mathbf{a} \neq A : \mathbf{ma}$ и $\mathbf{m} \neq \mathbf{a}$

NOTE:

field: Свойства максимального и простого идеала

field:

1. $\mathbf{p} \subset A$ — простой $\Leftrightarrow A/\mathbf{p}$ — целостно
2. всякий максимальный идеал — простой
3. $f : A \to B$ — гомоморфизм, $\mathbf{p}'$ — простой идеал кольца $B \Rightarrow \mathbf{p} = f^{-1}(\mathbf{p}')$ — простой идеал кольца A

NOTE:

field: Критерий того, что факторкольцо является полем

field: $A/\mathbf{m}$ — поле $\Leftrightarrow \mathbf{m}$ — максимальный идеал кольца A

13 Китайская теорема об остатках. Ее следствия.

NOTE:

field: Китайская теорема об остатках

field: A — коммутативное кольцо, $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}$ — идеалы A, $\mathbf{a_i} + \mathbf{a_j} = A \forall i \neq j \Rightarrow \forall$ семейства $x_1, x_2, \dots, x_n \in A \exists x \in A : x \equiv x_i (\mod \mathbf{a_i}) \forall i$
$x \equiv y (\mod \mathbf{a}) \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{a}$

NOTE:

field: Следствия из китайской теоремы об остатках

field:

Th 9 (Следствие)**.** *A — коммутативное кольцо, $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}$ — идеалы A, $\mathbf{a_i} + \mathbf{a_j} = A \forall i \neq j$, $f : A \to (A/\mathbf{a_1})\ times (A/\mathbf{a_2}) \times \dots \times (A/\mathbf{a_n})$ — отображение, индуцированное каноническими отображениями A в $A/\mathbf{a_i}$ для каждого множителя $\Rightarrow \ker f = \mathbf{a_1} \cap \mathbf{a_2} \cap \dots \cap \mathbf{a_n}$ и $A/(\mathbf{a_1} \cap \mathbf{a_2} \cap \dots \cap \mathbf{a_n}) \cong (A/\mathbf{a_1}) \times (A/\mathbf{a_2}) \times \dots \times (A/\mathbf{a_n})$*

Th 10 (Для целых чисел)**.** *$m_1, m_2, \dots, m_n$ — попарно взаимно простые целые числа $\Rightarrow \forall x_1, x_2, \dots, x_n \exists x \in \mathbb{Z} : x \equiv x_i (\mod m_i) \forall i$*

14 Главные идеалы. Кольцо главных идеалов. Примеры. Целостные и факториальные кольца.

NOTE:

field: Главный идеал

field: $\mathbf{a}$ — главный $\Leftrightarrow \exists a \in A : \mathbf{a} = aA$

Обозн. $\dashv = (a)$

(m) — идеал $\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}/(m) = /mathbbZ_m$ и существует естественное отображение $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$

NOTE:

field: Кольцо главных идеалов

field: Кольцо главных идеалов $\Leftrightarrow$ все идеалы главные

$\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов

NOTE:

field: Целостное кольцо

field: целостное кольцо $\Leftrightarrow \nexists a, b : ab = 0$
(или кольцо без делителей нуля)

NOTE:

field: Факториальное кольцо

field: A — факториальное $\Leftrightarrow$ целостное и всякий элемент имеет однозначное разложение на неприводимые.

$a \neq 0, a \in A(), (a)$ — простой главный идеал $\Leftrightarrow a$ — неприводим.

$\forall a \in A, a \neq 0$ обладает однозначным разложением на неприводимые, если: $\exists u$ — единица и неприводимые элементы $p_1, p_2, \ldots, p_k$ такие, что $a = up_1p_2 \cdots p_k$. Причем для двух таких разложений $a = up_1p_2 \cdots p_k = u'q_1q_2 \cdots q_m$, $m = k$ и, с точностью до перестановки, $q_i = u_ip_i$, где u_i — единицы в A.

15 НОД. Теорема о том, что любое кольцо главных идеалов факториально. Примеры.

NOTE:

field: НОД

field: a делит $b \Leftrightarrow \exists c \in A : b = ac$.
d — НОД a и $b \Leftrightarrow$ любой c, делящий a и b, делит также d.

NOTE:

field: Теорема о том, что любое кольцо главных идеалов факториально.

field: Всякое целостное кольцо главных идеалов факториально.

Пример: $\mathbb{Z}$, группа единиц состоит из 1 и -1. Неприводимые — простые числа.

$\mathbb{R}[x], \mathbb{Q}[x]$

16 Локализация. Ее свойства. Примеры.

NOTE:

field: Локализация

field: A — коммутативное кольцо, $S \subset A$ — мультипликативное подмножество, если $1 \in S$ и $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

$(a, s) \equiv (a', s') \Leftrightarrow \exists s'' \in S : s''(as' - sa') = 0$ — отношение эквивалентности.

$S^{-1}A$ — множество классов эквивалентности (кольцо). Эл-ты: $\frac{a}{s}$, $\frac{s}{s}$ — единица.

$(\frac{a}{s})(\frac{a'}{s'}) = \frac{aa'}{ss'}$

$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as'+a's}{ss'}$

NOTE:

field: Свойства локализации

field: $\varphi_S A \to S^{-1}A$, $\varphi_S(a) = \frac{a}{1}$

a — целостное кольцо, S — мультипликативное множество, не содержащее нуля. $\Rightarrow \varphi_S$ — инъективный гомоморфизм

$S \subset S^{-1}A$ обратимо

NOTE:

field: Примеры локализации

field: A — целостное кольцо, S состоит из обратимых элементов $\Rightarrow S^{-1}A = A$

A — целостное кольцо, S — множество его ненулевых элементов $\Rightarrow S$ — мультипликативное множество, $S^{-1}A$ — поле (назыв. *полем частных* кольца A).

Например, $\mathbb{Q}$ — поле частных кольца $\mathbb{Z}$

17 Многочлены. Определения свойства. Трансцендентные и алгебраические элементы.

NOTE:

field: Многочлены

field: A — коммутативное кольцо. Построим кольцо B, эл-ты: $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), a_i \in A$, где конечное число $a_i \neq 0$

$f + g = (a_0, \dots, a_n, \dots) + (b_0, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, \dots, a_n + b_n, \dots)$

$f \cdot g = (a_0, \dots, a_n, \dots) + (b_0, \dots, b_n, \dots) = (h_0, \dots, h_n, \dots)$, где $h_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j$

$\varphi A \to B$ — инъективный гомоморфизм, $\varphi(a) = (a, 0, 0, \dots)$. А значит $A \subset B$

$x = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$

$x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

$x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$

$a \cdot x^n = a \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (0, 0, \dots, 0, a, 0, \dots)$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Кольцо B — *кольцо многочленов от одной переменной*. Обозн. $A[x]$. $a_0, \dots$ — *коэффициенты* $f(x)$. $\deg(f)$ — максимальное n, для которого $a_n \neq 0$

NOTE:

field: Свойства многочленов

field: A — целостное кольцо $\Rightarrow \deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)), \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

A — целостное кольцо $\Rightarrow A[x]$ — тоже целостное

A — подкольцо коммутативного кольца K, $\alpha \in K \Rightarrow \exists!$ гомоморфизм $\varphi_\alpha : A[x] \to K$, $\varphi_\alpha(a) = a \forall a \in A$, $\varphi_\alpha(x) = \alpha$

NOTE:

field: Алгебраические и трансцендентные элементы

field: α — алгебраический над $A \Leftrightarrow \exists f \in A[x] : \varphi_\alpha(f) = 0$

Если φ_α — инъективно, то трансцендентным.

$\varphi_\alpha(f) = 0$ значит α корень f. Обозн. $f(\alpha) = 0$.

18 Алгоритм Евклида. Евклидовы кольца.

NOTE:

field: Евклидовы кольца

field: A — евклидово кольцо $\Leftrightarrow$ A — целостное кольцо, $\delta : A\ 0 \to \mathbb{N} \cup 0$

19 Теорема о том, что любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов. Лемма Гаусса.

NOTE:

field: Теорема о том, что любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

field: Всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов

Всякое евклидово кольцо является факториальным

NOTE:

field: Лемма Гаусса

field: $f(x), g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. $a = \gcd(a_i), b = \gcd(b_i)$, $c = \gcd(c_i)$, где c_i — коэффициенты $f(x)g(x)$. $\Rightarrow c = ba$

20 Неприводимые многочлены. Расширение полей. Алгебраически замкнутые поля.

NOTE:

field: Неприводимые многочлены

field: $f \in K[x], \deg(f) \neq 0$ — *неприводимый* над полем $K \Leftrightarrow \nexists g \in K[x], 1 \leq \deg(g) < \deg(f), f$ делится на g

NOTE:

field: Расширение полей

field: Поле $K[x]/(f)$ называется расширением поля K, где f — неприводимый многочлен над K

TODO дописать?

NOTE:

field: Алгебраически замкнутые поля

field: Поле K — *алгебраически замкнутое* $\Leftrightarrow \forall f(x) \in K[x]$ имеет корень

21 Основная теорема алгебры (алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел).

NOTE:

field: Основная теорема алгебры

field: Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто
TODO леммы

22 Модули. Определение и примеры. Основные свойства. Векторное пространство, как модуль.

NOTE:

field: Модули

field: A — кольцо. *Левый модуль* (модуль) над A — абелева группа M с действием A на M, если:

1. $(a + b)x = ax + bx$
2. $a(x + y) = ax + ay$
3. $(ab)x = a(bx)$
4. $1 \cdot x = x$

$a, b \in A; x, y \in M$
Подгруппа $N \subset M$ — подмодуль $\Leftrightarrow AN \subset N$

NOTE:

field: Примеры модулей

field:

- любой левый идеал
- любая коммутативная группа есть $\mathbb{Z}$-модуль
- $A[x]$ есть A-модуль

NOTE:

field: Векторное пространство, как модуль.

field: Модуль M над полем называется *векторным пространством.*
M конечно порожден $\Leftrightarrow$ M — конечномерное векторное пространство.

23 Теоремы о гомоморфизме для модулей. Аннулятор.

NOTE:

field: 1-я теорема о гомоморфизме для модулей

field: $f : M \to M'$ — сюръективный гомоморфизм модулей $\Rightarrow \exists$ естественный изоморфизм $M/\ker(f) \cong M'$

NOTE:

field: 2-я теорема о гомоморфизме для модулей

field: N, N' — подмодули $M \Rightarrow (N + N')/N' \cong N/(N \cap N')$

NOTE:

field: 3-я теорема о гомоморфизме для модулей

field: N, N' — подмодули M, $N' \subset N \Rightarrow M/N \cong (M/N')/(N/N')$

NOTE:

field: Аннулятор

field: $\mathsf{Ann}(M) = \{a | a \in A, ax = 0, \forall x \in M\}$
Модуль M — точный $\Leftrightarrow \mathsf{Ann}(M) = 0$
$\mathsf{Ann}(M)$ — двусторонний идеал кольца A

24 Алгебры. Определения и примеры. Аналог теоремы Кели для алгебр.

NOTE:

field: Алгебры

field: A — алгебра над полем K (или K-алгебра) $\Leftrightarrow$ A — векторное пространство над K и на A есть умножение:

1. $x(y+z) = xy + xz$
2. $(x+y)z = xz + yz$
3. $(ax)y = x(ay) = a(xy)$

$\forall x, y \in A, a \in K$
Ассоциативная алгебра, Алгебра с единицей

NOTE:

field: Примеры алгебр

field: $\mathbb{C}$ — алгебра над $\mathbb{R}$
K — поле $\Rightarrow K[x]$ — K-алгебра
$M_n(K)$ — кольцо матриц

NOTE:

field: Аналог теоремы Кели для алгебр.

field: A — n-мерная алгебра над полем $K \Rightarrow A$ изоморфна некоторой подалгебре в $M_n(K)$

25 Конечномерные алгебры. Минимальный многочлен элемента. Алгебры с делением. Обратимость элемента, не являющегося делителем нуля.

NOTE:

field: Конечномерные алгебры

field: Алгебра A над полем K — конечномерная $\Leftrightarrow$ конечномерно векторное пространство A над K.

Алгебра A над полем K — конечно порожденная $\Leftrightarrow$ существует конечное множество элементов пораждающих A

NOTE:

field: Минимальный многочлен элемента

field: Многочлен $f(x) \in K[x]$ для которого $f(a) = 0$ называется аннулирующим элемент a

A — конечномерная алгебра над полем K, $a \in A \Rightarrow f(x)$ аннулирующий a, степень которого минимальна и старший коэффициент равен 1, называется минимальным многочленом элемента a над K

NOTE:

field: Алгебры с делением

field: K-алгебра A, $1 \in A$, любой элемент обратим $\Rightarrow A$ — алгебра с делением

Th 11. *A — конечномерная ассоциативная коммутативная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ (т.е. A — поле) $\Rightarrow$ либо $A = \mathbb{R}$, либо $A = \mathbb{C}$*

NOTE:

field: Обратимость элемента, не являющегося делителем нуля

field:

Th 12. *A — конечномерная алгебра над полем K. $\Rightarrow \forall a \in A, a$ либо обратим, либо является делителем нуля.*

26 Задание алгебры. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса (б/д).

NOTE:

field: Задание алгебры

field: A — конечномерная алгебра над полем K и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис A над K. $\Rightarrow$ Соотношения $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} g_{ij}^k e_k$ задают структуру K-алгебры на A.

$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n \Rightarrow ab = \left(\sum_{i=1}^n a_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_je_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_ib_je_ie_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_ib_jg_{ij}^k e_k$

NOTE:

field: Теорема Фробениуса

field:

Th 13 (Фробениус)**.** *A — конечномерная ассоциативная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$ либо $A = \mathbb{R}$, либо $A = \mathbb{C}$, либо $A = \mathbb{H}$*

27 Алгебры с делением над полем комплексных чисел. Теорема Фробениуса (коммутативный случай). Групповая алгебра. Дифференцирование алгебр.

NOTE:

field: Теорема Фробениуса (коммутативный случай)

field:

Th 14 (Фробениус (коммутативный случай))**.** *A — конечномерная ассоциативная коммутативная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$ (т.е. A — поле). $\Rightarrow$ либо $A = \mathbb{R}$, либо $A = \mathbb{C}$.*

NOTE:

field: Дифференцирование алгебр

field: A — алгебра над полем K. Дифференциерование алгебры это $d : A \to A$, если:

1. $d(ax) = adx$
2. $d(x + y) = dx + dy$
3. $d(xy) = (dx)y + x(dy)$

$\forall x, y \in A, a \in K$