

Immagine: Earthrise, Apollo8 (Nasa).

Url: [https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image\\_feature\\_1249.html](https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1249.html)

# Seminario 3

# Termodinamica

05/05/2021



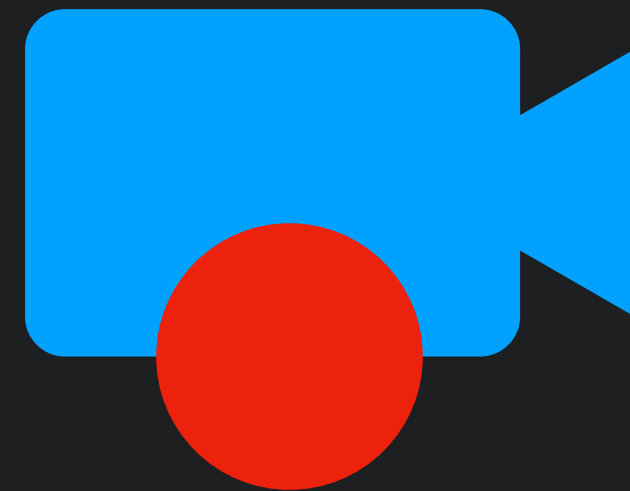
Corso di Fisica 1(A)  
Laurea in Scienze Biologiche @UniPv

**Stefano Mangini**  
[stefano.mangini01@universitadipavia.it](mailto:stefano.mangini01@universitadipavia.it)

# Disclaimer

Regole del fight club:

Registra la lezione!

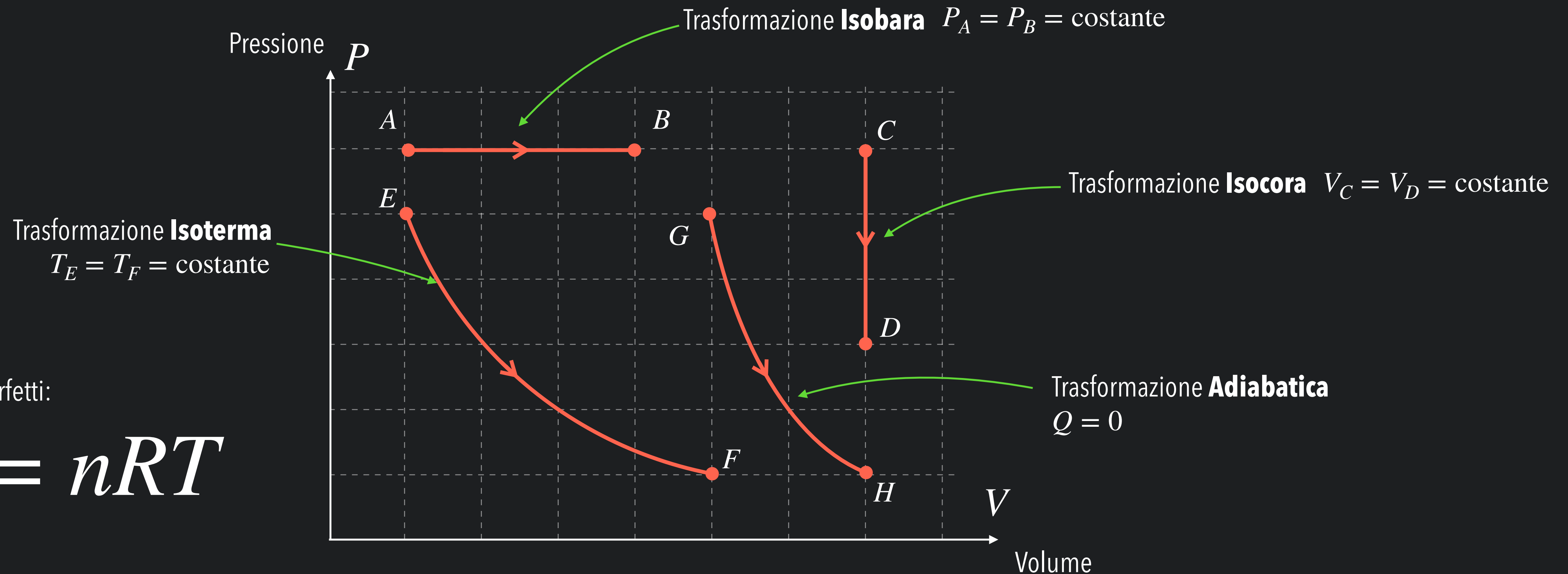


# Es. 1: Trasformazione isoterma



Due moli di ossigeno vengono compressi isotermicamente a  $T = 15\text{ °C}$  da un volume iniziale  $V_i = 15\text{ L}$  ad un volume finale di  $V_f = 6\text{ L}$ . Calcolare: **(a)** la pressione finale del gas; **(b)** la variazione di energia interna; **(c)** il lavoro compiuto dal gas. Si consideri l'ossigeno come un gas perfetto.

Breve recap delle trasformazioni termodinamiche:



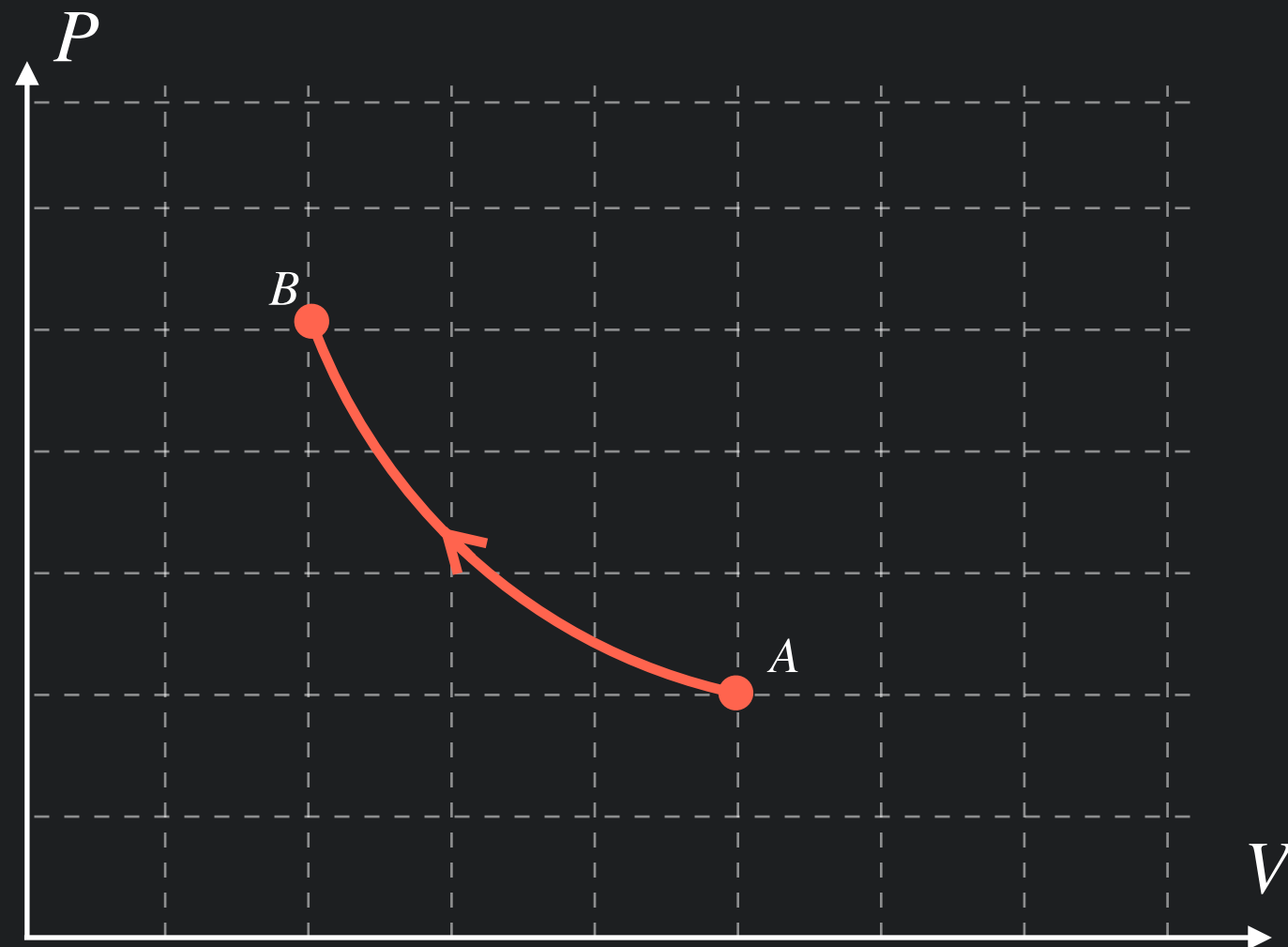
Legge dei Gas perfetti:

$$pV = nRT$$

# Es. 1: Trasformazione isoterma



Due moli di ossigeno vengono compressi isotermicamente a  $T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$  da un volume iniziale  $V_A = 15\text{ L}$  ad un volume finale di  $V_B = 6\text{ L}$ . Calcolare: **(a)** la pressione finale del gas; **(b)** la variazione di energia interna; **(c)** il lavoro compiuto dal gas. Si consideri l'ossigeno come un gas perfetto.



**(a)** Appliciamo la legge dei gas perfetti ai punti A e B

$$p_A V_A = nRT_A$$

$$p_B V_B = nRT_B$$

$$\text{ma } T_A = T_B \implies p_A V_A = p_B V_B \implies p_B = \frac{V_A}{V_B} p_A$$

$$\begin{aligned} \implies p_B &= \frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{nRT}{V_A} \implies p_B = \frac{nRT}{V_B} = \frac{2\text{ mol} \cdot 8.31\text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \cdot (15 + 273.15)\text{ K}}{6 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3} \\ &= 798175.5\text{ Pa} = 7.98\text{ bar} \end{aligned}$$

**(b)** La variazione di energia interna del gas è

$$\Delta U = 0$$

$$U_{\text{gas perfetto}} = U(T)$$

$$\implies \Delta U_{A \rightarrow B} = U_B - U_A = U(T_B) - U(T_A) = U(T) - U(T) = 0$$

In un gas perfetto l'**energia interna** dipende **solo** dalla **temperatura** del gas, ed è data dalla somma dell'energia cinetica delle particelle microscopiche che compongono il gas.

# Es. 1: Trasformazione isoterma



Due moli di ossigeno vengono compressi isotermicamente a  $T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$  da un volume iniziale  $V_A = 15\text{ L}$  ad un volume finale di  $V_B = 6\text{ L}$ . Calcolare: **(a)** la pressione finale del gas; **(b)** la variazione di energia interna; **(c)** il lavoro compiuto dal gas. Si consideri l'ossigeno come un gas perfetto.



**(c)** Il lavoro compiuto da un gas è definito dalla formula:

$$\begin{aligned} L_{A \rightarrow B} &= \int_{V_A}^{V_B} p \cdot dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} \cdot dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{1}{V} \cdot dV = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ &= 2\text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 283.15\text{ K} \cdot \ln\left(\frac{6}{15}\right) = -4388.16\text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro è negativo perché è subito dal sistema, non compiuto. Ovvero siamo noi dall'esterno ad agire sul gas per comprimerlo!

$L > 0$  allora il gas compie lavoro

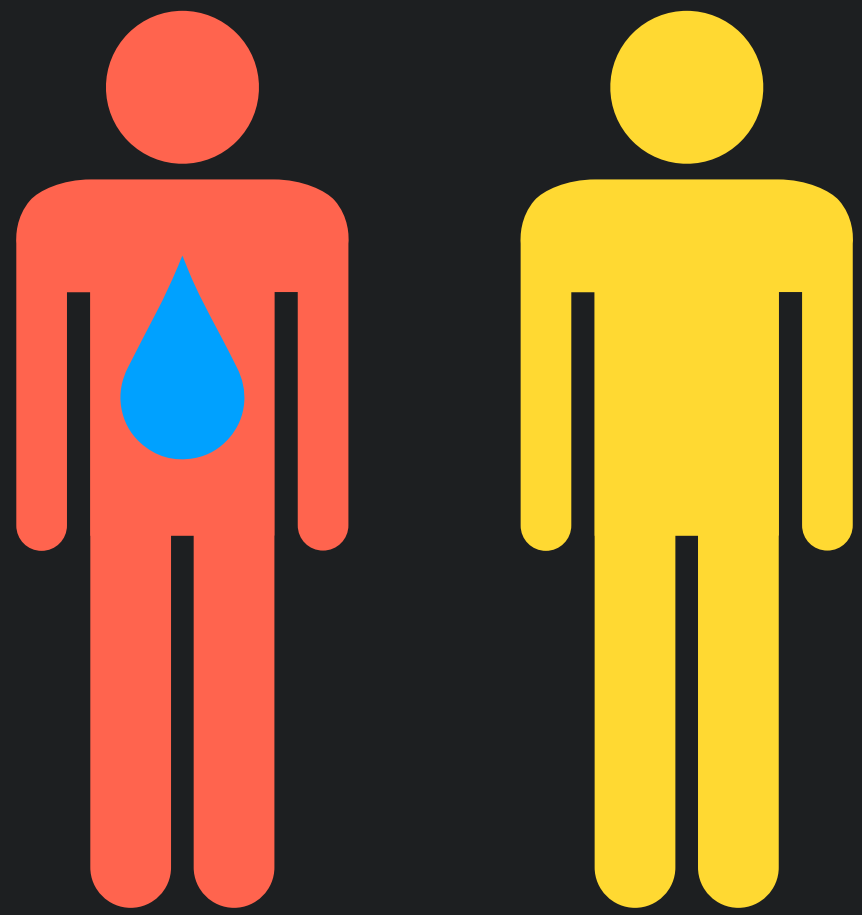
$L < 0$  allora il gas subisce lavoro dall'esterno



## Es. 2: Trasmissione di calore



Siri ha la febbre e beve  $V = 0.2 \text{ L}$  di acqua alla temperatura di  $T = 14^\circ\text{C}$ . Per portarsi alla stessa temperatura del corpo di Siri, l'acqua deve assorbire  $5 \text{ kcal}$ . Qual è la temperatura di Siri?



Si tratta di un problema di trasmissione di calore, la cui formula è data da:

$$Q = C \cdot (T_f - T_i)$$

← differenza di temperatura causata dal trasferimento di calore

← capacità termica

← calore assorbito/ceduto dal corpo

$$[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad c_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1 \text{ cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{g}} = \frac{4190 \text{ J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

è più comodo introdurre il calore specifico di un corpo, ovvero:  $C = m c$

$$Q = c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot m \cdot (T_f - T_i) \implies T_f = \frac{Q + T_i \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} m}{c_{\text{H}_2\text{O}} m} = T_i + \frac{Q}{c_{\text{H}_2\text{O}} V \rho}$$

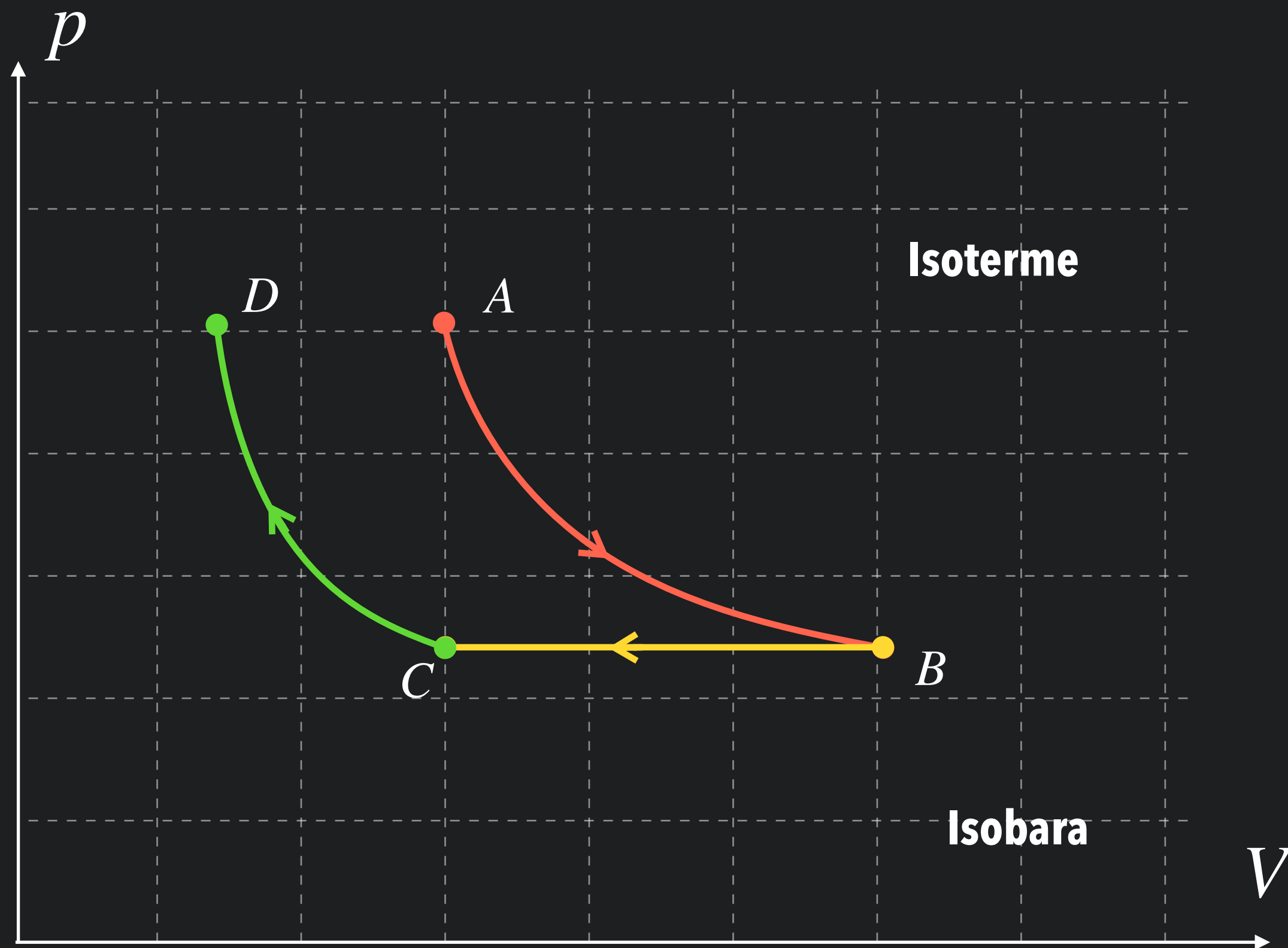
(1 kcal = 1000 cal)

$$T_f = 14^\circ\text{C} + \frac{5 \text{ kcal}}{\frac{1 \text{ cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{g}} \cdot 0.2 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot \frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3}} = 39^\circ\text{C}$$

# Es. 3: Ciclo termodinamico I



Un litro di gas perfetto alla pressione di  $P = 1 \text{ atm}$  viene espanso isotermicamente fino a quando il suo volume è raddoppiato. Poi è compresso al volume originale a pressione costante e successivamente compresso isotermicamente alla sua pressione originale. Descrivere le trasformazioni nel piano  $p$ - $V$  e calcolare il lavoro complessivo eseguito dal gas.



Lavoro totale dato dalla somma del lavoro nelle singole trasformazioni

$$L_{\text{tot}} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow D}$$

**I) Tratto AB**

$$L = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_A \ln 2 \quad (V_B = 2V_A)$$
$$= p_A V_A \ln 2 \quad \left(p_A V_A = nRT_A \implies T_A = \frac{p_A V_A}{nR}\right)$$

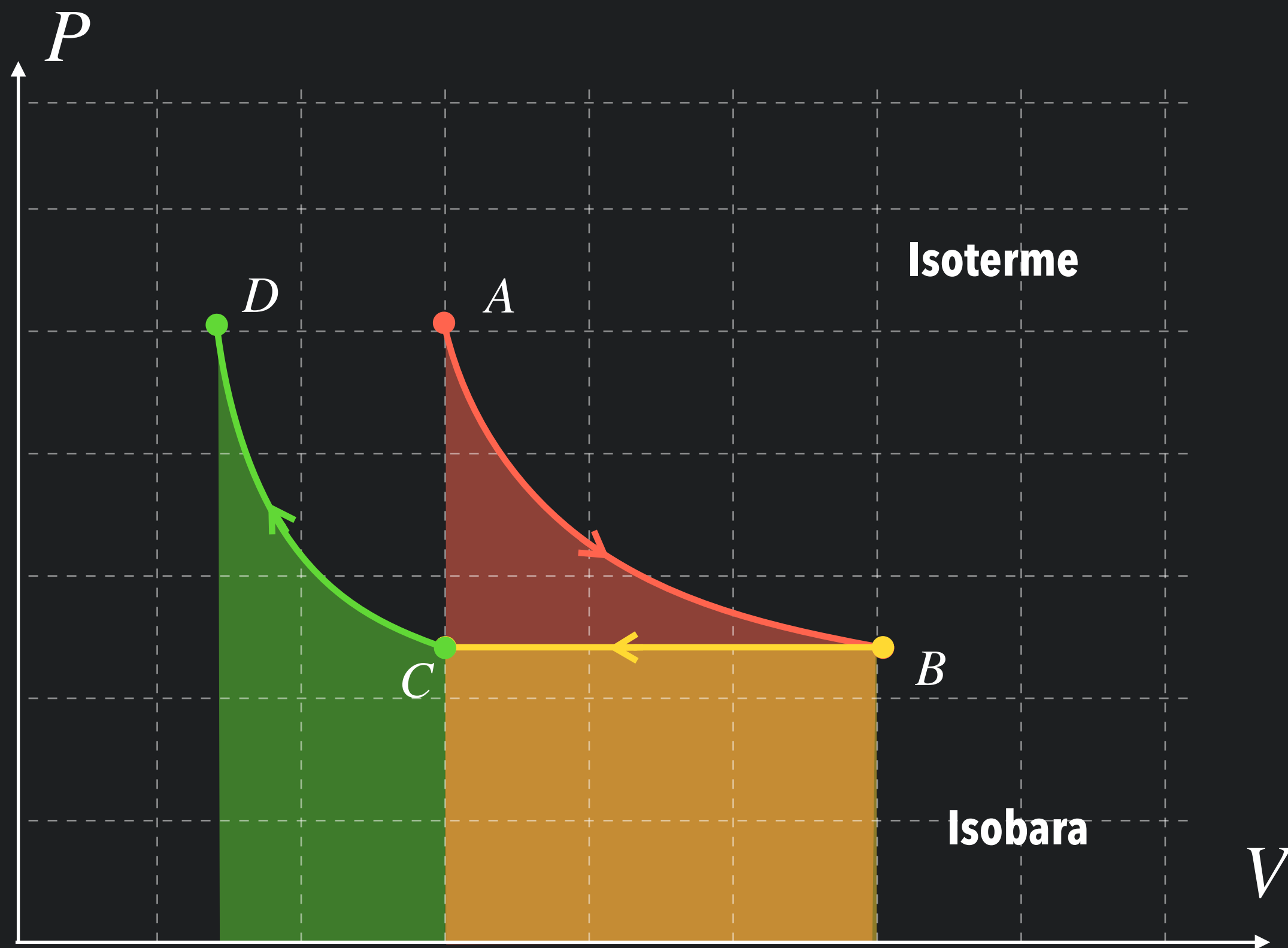
**II) Tratto BC**

$$L = \int_{V_B}^{V_C} p_B \cdot dV = p_B \int_{V_B}^{V_C} dV = p_B (V_C - V_B) \quad (p_B = p_C = \text{cost})$$
$$= -p_B V_A \quad (V_C = V_A \quad V_B = 2V_A)$$
$$= -\frac{1}{2} p_A V_A \quad \left(p_B V_B = nRT_B = p_A V_A \implies p_B = p_A/2\right)$$

# Es. 3: Ciclo termodinamico I



Un litro di gas perfetto alla pressione di  $P = 1 \text{ atm}$  viene espanso isotermicamente fino a quando il suo volume è raddoppiato. Poi è compresso al volume originale a pressione costante e successivamente compresso isotermicamente alla sua pressione originale. Descrivere le trasformazioni nel piano  $p$ - $V$  e calcolare il lavoro complessivo eseguito dal gas.



## III) Tratto CD

$$\begin{aligned} L &= nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \\ &= p_B V_A \ln\left(\frac{V_D}{V_A}\right) \\ &= \frac{p_A}{2} V_A \ln\left(\frac{V_A}{2V_A}\right) = \frac{p_A}{2} V_A \ln \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} p_A V_A \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( p_C V_C = nRT_C \Rightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{nR} \right. \\ \left. = \frac{p_B V_A}{nR} \right) \\ \left( p_D V_D = nRT_D = p_C V_C \right. \\ \left. V_D = \frac{p_C V_C}{p_D} = \frac{p_B V_A}{p_A} = \frac{1}{2} \frac{p_A V_A}{p_A} = \frac{V_A}{2} \right) \end{aligned}$$

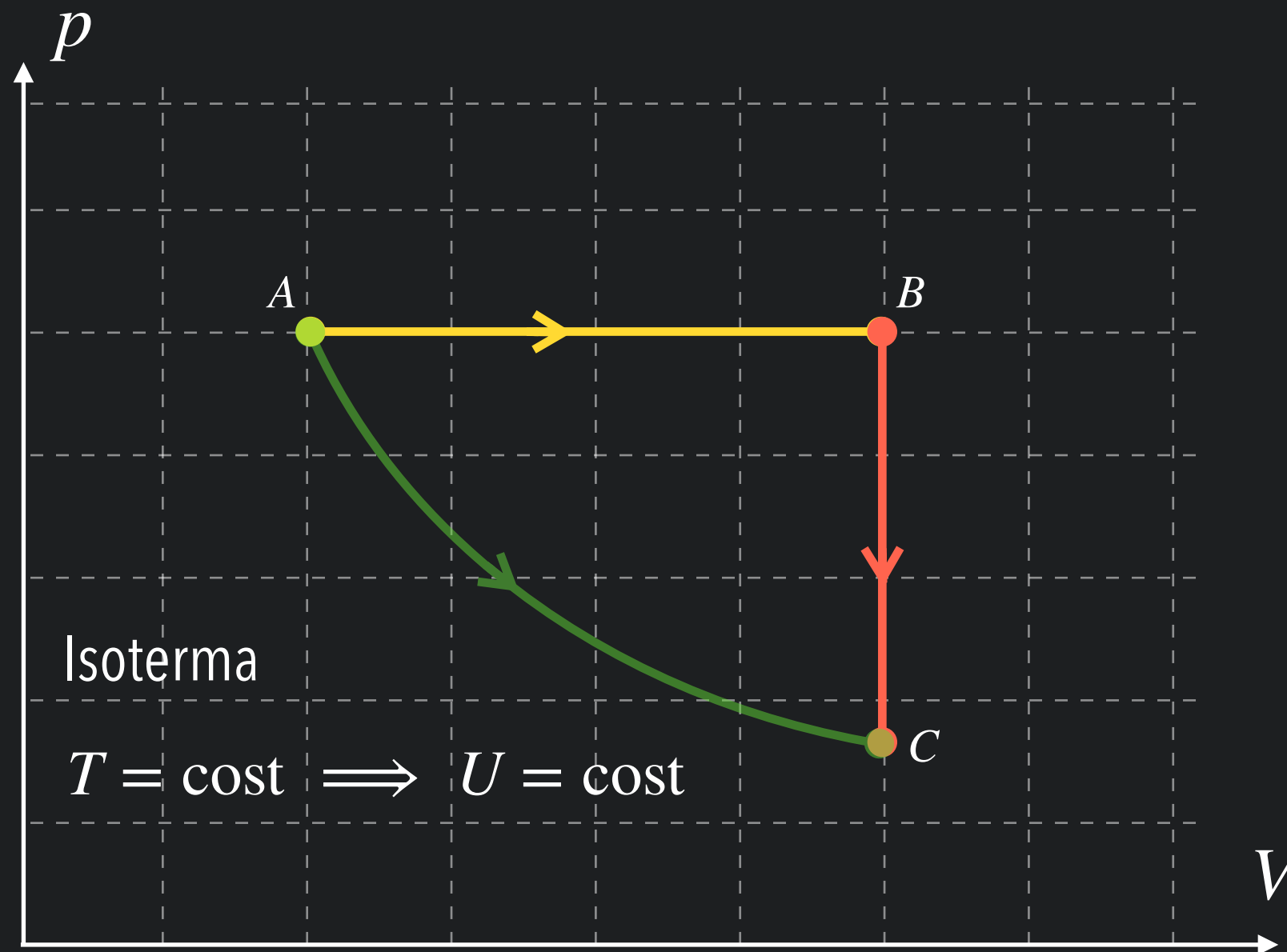
$$\begin{aligned} \Rightarrow L_{\text{tot}} &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} \\ &= p_A V_A \ln 2 - \frac{1}{2} p_A V_A - \frac{1}{2} p_A V_A \ln 2 \quad \left( \text{red} - \text{yellow} - \text{green} \right) \\ &= p_A V_A (\ln 2 - 1/2 - \ln 2/2) = -15.54 \text{ J} \end{aligned}$$



# Es. 4: Ciclo termodinamico II



Due moli di un gas perfetto sono contenute inizialmente in un volume  $V_A = 5.5 \text{ L}$  alla pressione  $P_A = 3 \text{ atm}$ . Il sistema subisce successivamente una trasformazione dallo stato iniziale  $A$  allo stato finale  $C$  composta da una trasformazione isobara  $AB$  con  $V_B = 3V_A$  una trasformazione isocora  $BC$  con  $P_C = P_B/3$ . Si calcoli: **(a)** il lavoro totale  $L_{AC}$  svolto nell'intera trasformazione; **(b)** il calore totale  $Q_{AC}$  scambiato nell'intera trasformazione.



$$L_{\text{tot}} = L_{AB} + L_{BC}$$

Trasformazione  $BC$  è **isocora**  $\implies$  nessun lavoro  $L_{BC} = 0$

$$= L_{AB}$$

$$= p_A \Delta V_{AB} = p_A (V_B - V_A) = 2p_A V_A = 2 \cdot 3 \cdot 101325 \text{ Pa} \cdot 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 3343.725 \text{ J}$$

Il calore scambiato nelle trasformazioni si può calcolare utilizzando le formule con il *calore specifico molare* a pressione e volume costante, cioè:

$$Q_V = nc_V \Delta T$$

calore scambiato a **volume** costante

$$Q_p = nc_p \Delta T$$

calore scambiato a **pressione** costante

$$c_V = \frac{3}{2}R$$

$$c_p - c_V = R \implies c_p = \frac{5}{2}R$$

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = \frac{5}{2}nR \left( \frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR} \right) = \frac{5}{2}p_A(V_B - V_A) = 5p_A V_A = 8359.3 \text{ J}$$

$$Q_{AB} = nc_V(T_C - T_B) = \frac{3}{2}V_B(p_C - p_B) = \frac{3}{2}V_B \left( \frac{p_B}{3} - p_B \right) = -p_B V_B = -3p_A V_A = -5015.5875 \text{ J}$$

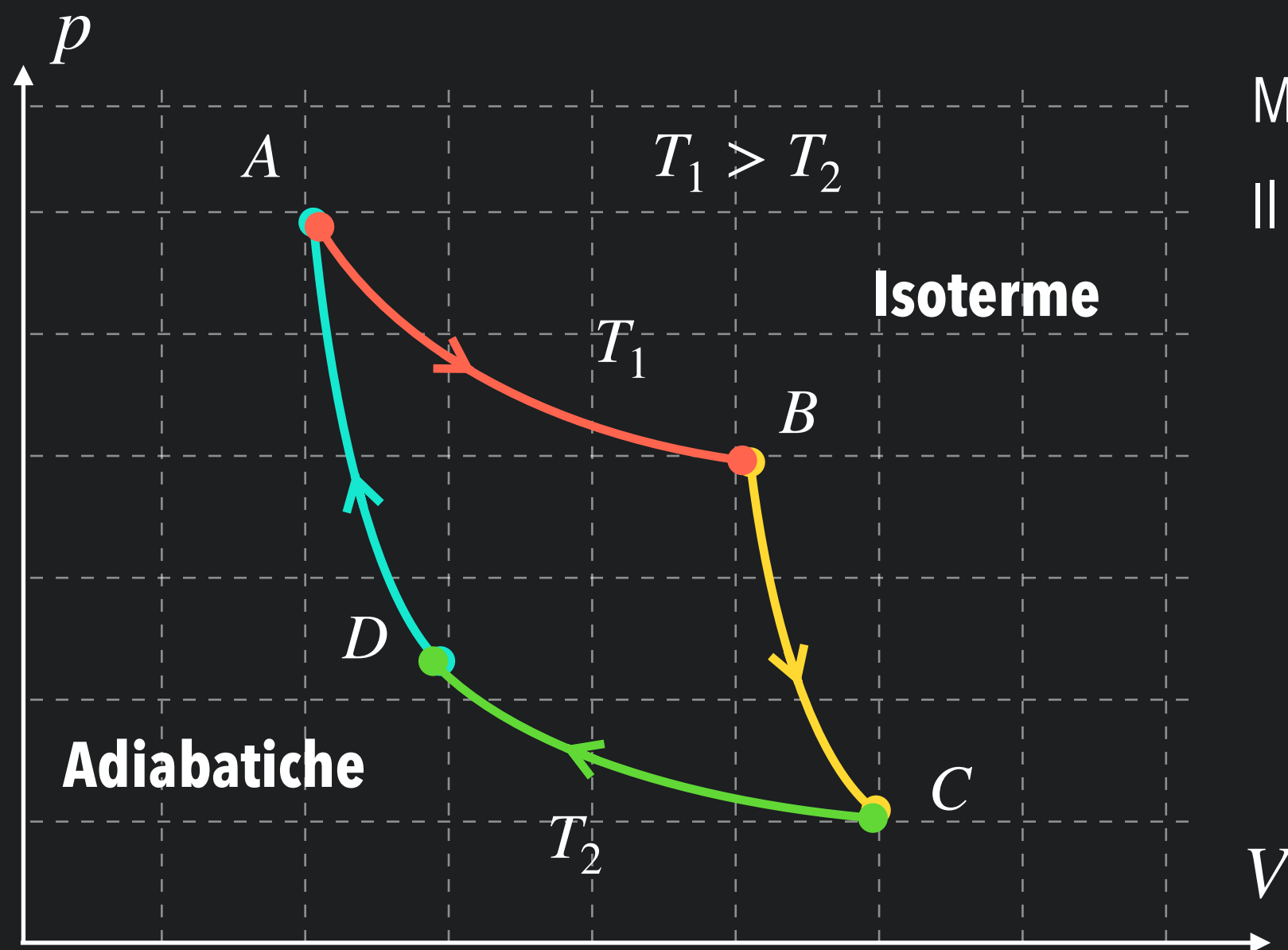
$$Q_{\text{tot}} = Q_{AB} + Q_{BC} = 3343.725 \text{ J} \stackrel{!!}{=} L_{\text{tot}}$$

Primo principio termodinamica:  $\Delta U = Q - L \implies \Delta U = 0$  Infatti, c'è una trasformazione Isoterma che passa per  $AC$ !

# Es. 5: Uomo di Carnot



Se si considera l'organismo umano come una macchina termica che lavora con un rendimento del 20 % secondo un ciclo di Carnot, il cui refrigerante è l'ambiente esterno a  $T_2 = 10^\circ\text{C}$ , quale temperatura dovrebbe assumere l'organismo?



Macchina di Carnot è la macchina termica ideale: nessun ciclo può estrarre più lavoro fra le stesse temperature  $T_1$  e  $T_2$ . Il rendimento di un ciclo di una macchina termica è definito come il rapporto fra lavoro eseguito e calore assorbito:

$$\eta = \frac{L_{\text{eseguito}}}{Q_{\text{assorbito}}} \underset{\substack{\text{in un ciclo} \\ \Delta U = 0 \Rightarrow L = Q}}{=} \frac{Q_{\text{tot}}}{Q_{\text{ass}}} \underset{\substack{\text{in Carnot, calore si trasferisce} \\ \text{solo durante le isoterme}}}{=} \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} \underset{\substack{\text{In trasformazione isoterma} \\ Q = L = nRT \ln(V_{\text{finale}}/V_{\text{iniziale}}) \\ \text{e si dimostra che } V_A/V_B = V_D/V_C}}{=} 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

Invertendo la formula per il rendimento:

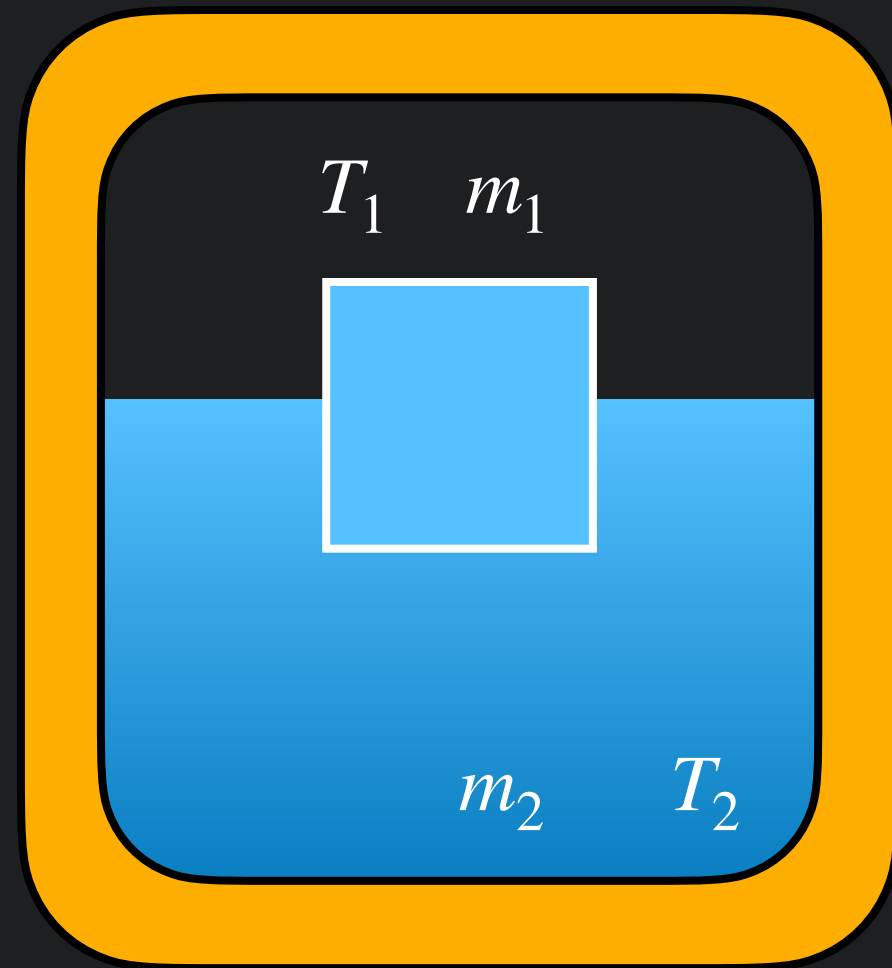
$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta} = \frac{(10 + 273.15) \text{ K}}{1 - 0.2} = 353.93 \text{ K} = 80.8^\circ\text{C}$$

Non siamo una macchina di Carnot...

# Es. 6: Ghiaccio fondente



Un pezzetto di ghiaccio di massa  $m_1$  e alla temperatura di  $T_1 = 250 \text{ K}$  viene immerso in  $m_2 = 60 \text{ g}$  di acqua a temperatura di  $T_2 = 330 \text{ K}$ . Se il sistema è contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche: **(a)** si determini per quali valori della massa il pezzetto di ghiaccio fonde completamente; **(b)** calcolare la temperatura di equilibrio del sistema se la massa del cubetto di ghiaccio vale  $m_1 = 35 \text{ g}$ .



La quantità di calore necessaria a far arrivare il ghiaccio alla temperatura di fusione è:

$$Q_1 = m_1 c_g (T_0 - T_1) \quad \text{con} \quad T_0 = 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$$

$$\left( c_g = 2051 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$$

La quantità di calore necessaria a far sciogliere il ghiaccio, è:

$$Q_2 = \lambda m_1$$

$$(\lambda = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg})$$

Il massimo calore che l'acqua può cedere al cubetto prima di iniziare a congelarsi è dato da:

$$Q_3 = m_2 c_a (T_0 - T_2) = 60 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{4186 \text{ J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (273.15 - 330) \text{ K} = -14278 \text{ J} \quad \left( c_a = 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right)$$

Quindi, la condizione affinché il ghiaccio si sciogla completamente è data da  $|Q_3| > Q_1 + Q_2 \implies 14281 \text{ J} > \lambda m_1 + m_1 c_g (T_0 - T_1)$

$$\implies m_1 < \frac{14278 \text{ J}}{\lambda + c_g (T_0 - T_1)} = \frac{14278 \text{ J}}{3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} + 2051 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 23.15 \text{ K}} = 37.8 \text{ g} \implies m_1 < 37.8 \text{ g}$$

# Es. 6: Ghiaccio fondente



Un pezzetto di ghiaccio di massa  $m_1$  e alla temperatura di  $T_1 = 250 \text{ K}$  viene immerso in  $m_2 = 60 \text{ g}$  di acqua a temperatura di  $T_2 = 330 \text{ K}$ . Se il sistema è contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche: **(a)** si determini per quali valori della massa il pezzetto di ghiaccio fonde completamente; **(b)** calcolare la temperatura di equilibrio del sistema se la massa del cubetto di ghiaccio vale  $m_1 = 35 \text{ g}$ .



Calcoliamo la temperatura di equilibrio considerando tutti i trasferimenti di calore in gioco:

$$m_1 c_g (T_0 - T_1) + \lambda m_1 + m_1 c_a (T_{\text{eq}} - T_0) = -m_2 c_a (T_{\text{eq}} - T_2)$$

$Q_1$  per portare il ghiaccio alla temperatura di fusione

$Q_2$  per fondere il ghiaccio

$Q_4$  per portare il ghiaccio sciolto alla temperatura di equilibrio

$Q_3$  per portare l'acqua alla temperatura di equilibrio

Somma del calore assorbito ( $> 0$ ) dal ghiaccio, è uguale a **meno** quello ceduto ( $< 0$ ) dall'acqua

$$Q_1 + Q_2 + Q_4 + Q_3 = 0$$

Risolvendo l'eq. per ottenere  $T_{\text{eq}}$

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_2 c_a T_2 + m_1 c_a T_0 - m_1 c_g (T_0 - T_1) - \lambda m_1}{c_a (m_1 + m_2)} = 275.83 \text{ K}$$



# Es. 7: Scioglimento dei ghiacciai



Un cubetto di ghiaccio galleggia in un bicchiere riempito a raso con dell'acqua. Dopo un po' di tempo il cubetto di ghiaccio fonde completamente: il livello dell'acqua cresce, diminuisce o rimane costante?



In **1**, il cubetto galleggia grazie alla spinta di Archimede, quindi:

$$F_A = P \implies \rho_a V_s g = m_g g \implies V_s = m_g / \rho_a$$

E il volume totale è quindi dato da

$$V_{\text{tot}}^{(1)} = V_a + V_s = V_a + \frac{m_g}{\rho_a}$$

(Acqua dolce:  $\rho_{ad} \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ )  
(Acqua salata:  $\rho_{as} \approx 1010 \text{ kg/m}^3$ )

**E allora lo scioglimento dei ghiacciai?**  
**Livello degli oceani rimane costante?**

$$V_{\text{tot}}^{(1)} = V_a + \frac{m_g}{\rho_{as}}$$

In **2**, la massa di ghiaccio si è sciolta ed è diventata acqua, quindi

$$m_g \rightarrow V = m_g / \rho_a$$

E il volume totale è quindi dato da

$$V_{\text{tot}}^{(2)} = V_a + V = V_a + \frac{m_g}{\rho_a} \implies V_{\text{tot}}^{(2)} = V_{\text{tot}}^{(1)} \quad \text{Livello rimane uguale!}$$

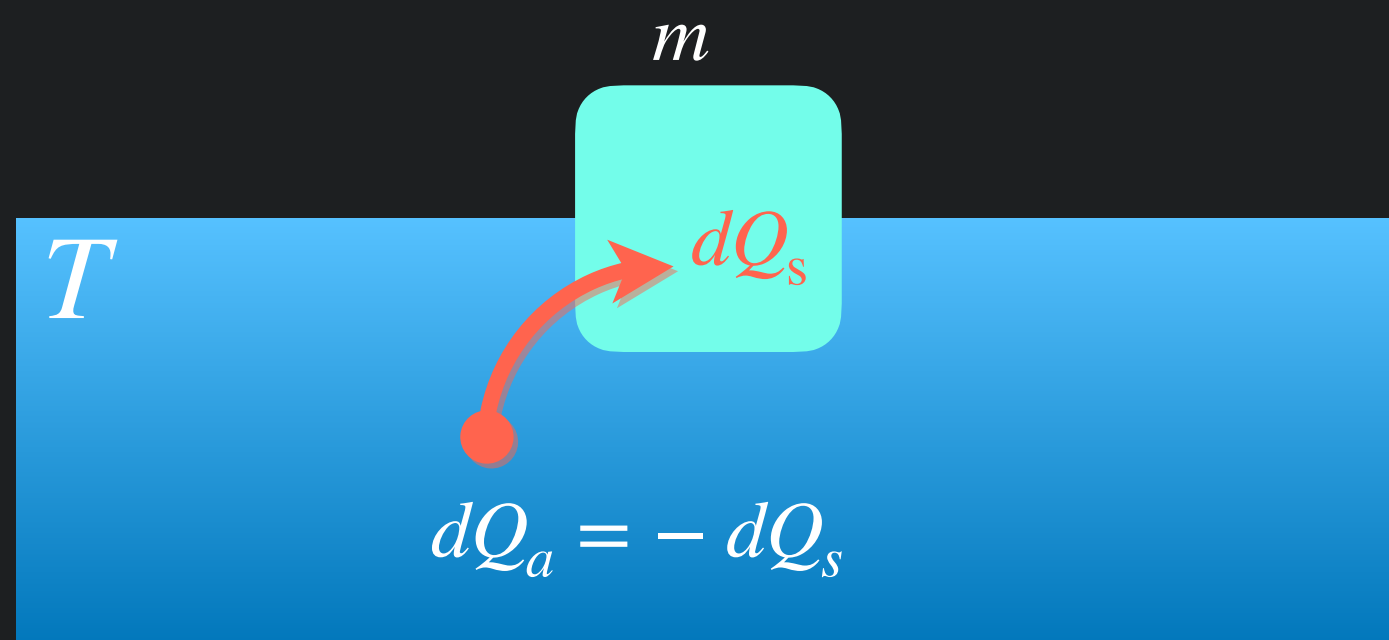
$$V_{\text{tot}}^{(2)} = V_a + \frac{m_g}{\rho_{ad}} \implies V_{\text{tot}}^{(2)} > V_{\text{tot}}^{(1)} \quad \text{Innalzamento oceani!}$$



# Es. 8: Entropia di fusione



Un blocco di ghiaccio di massa  $m = 235$  g si fonde (reversibilmente) in acqua, la temperatura resta costante durante tutto il processo a  $T = 0^\circ\text{C}$ . Calcolare: **(a)** la variazione di entropia per il ghiaccio; **(b)** la variazione di entropia per l'ambiente.



Per un processo reversibile, l'entropia, o meglio la sua variazione, è definita da

$$S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ}{T}$$

(vale per un processo reversibile!)

ghiaccio  
ghiaccio sciolto in acqua

$$S_{\text{acqua}} - S_{\text{ghiaccio}} = \int_i^f \frac{dQ_s}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ_s = \frac{Q}{T}$$

Il calore totale è quello necessario per far sciogliere il ghiaccio, ovvero:

$$Q = \lambda m = 3.3 \cdot 10^5 \text{ J/kg} \cdot 235 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 7.83 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow S_{\text{acqua}} - S_{\text{ghiaccio}} = \frac{Q}{T} = \frac{7.83 \text{ kJ}}{273.15 \text{ K}} = 287 \text{ J/K}$$

E la variazione di entropia dell'ambiente esterno?

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{ambiente}} &= \int_i^f \frac{dQ_a}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f -dQ_s = \frac{-Q}{T} \\ &= -287 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Corretto! In trasformazione reversibile vale:

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} = 0$$

