Immagine: Earthrise, Apollo8 (Nasa).
Url: https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1249.html

Seminario 2
Fluidodinamica

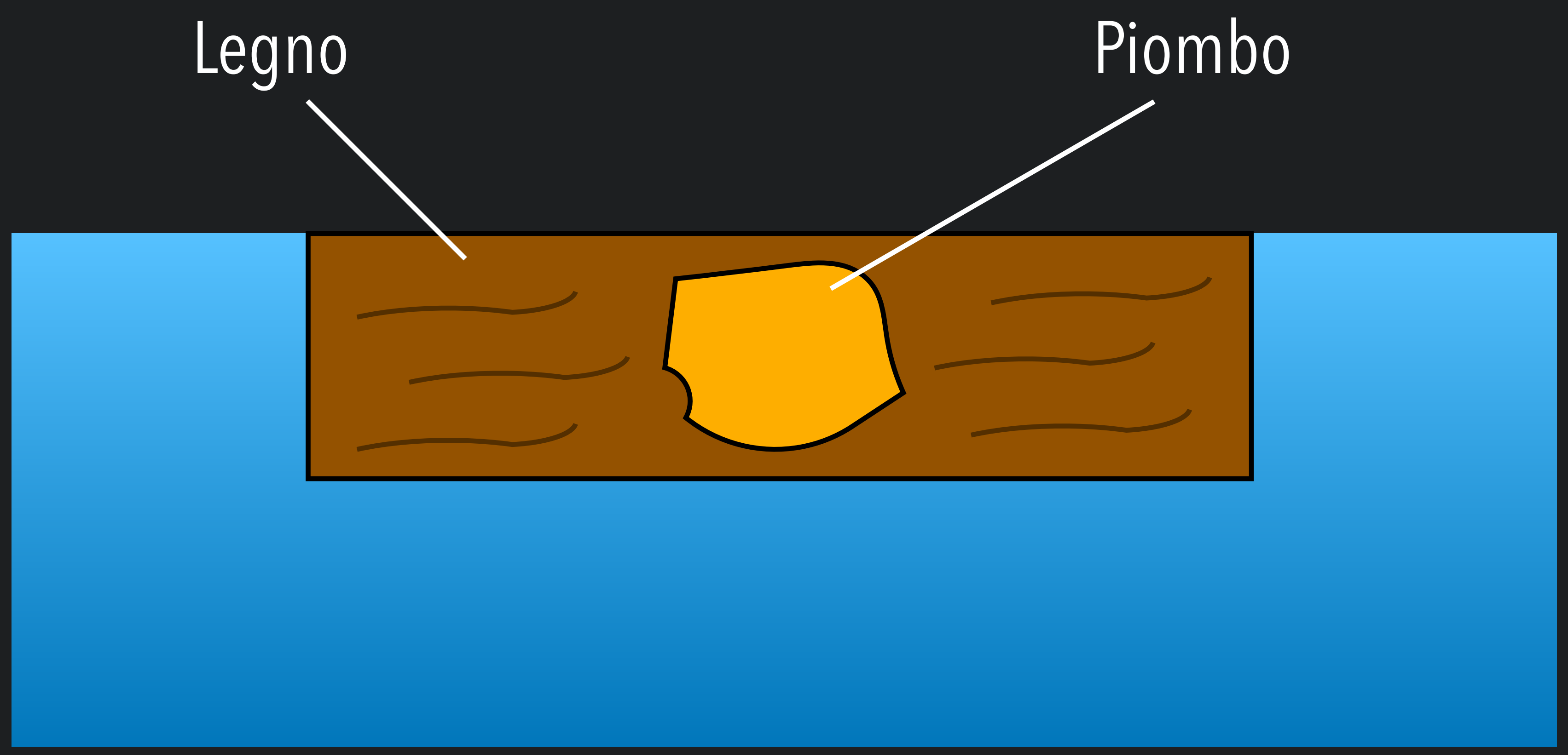
27/04/2021

Corso di Fisica 1(A)
Laurea in Scienze Biologiche @UniPv

Stefano Mangini
stefano.mangini01@universitadipavia.it

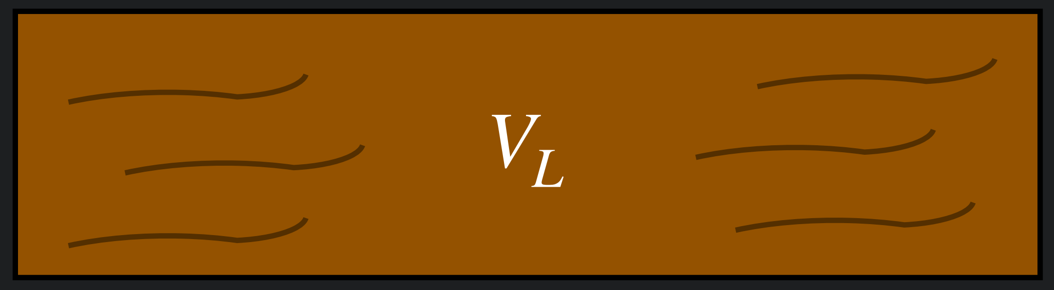
Es. 1: Tronco Galleggiante

In un pezzo di legno, avente densità $\rho_L = 0.5\,\mathrm{g/cm^3}$ e massa $m = 800\,\mathrm{g}$, si pratica un foro di volume $V_p = 200\,\mathrm{cm^3}$, e lo si riempie di piombo, che ha una densità di $\rho_P = 11.34\,\mathrm{g/cm^3}$. Se il corpo è interamente sommerso in acqua, galleggia o affonda?



Calcoliamo il volume totale dell'oggetto:

$$V_L = \frac{m_L}{\rho_L} = \frac{800\,\mathrm{g}}{0.5\,\mathrm{g/cm^3}} = 1600\,\mathrm{cm^3}$$



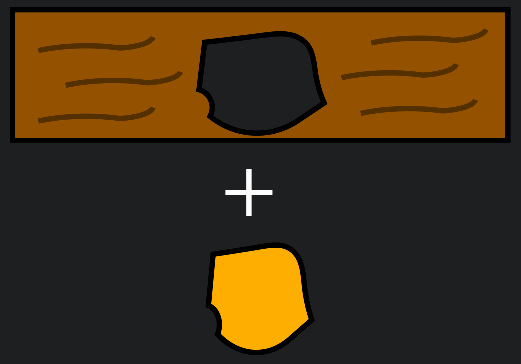
Spinta di Archimede: l'oggetto totale riceve una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato

$$F_{\text{archimede}} = m_{\text{acqua}}\, g = \rho_{\text{acqua}} V_L\, g = (1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 1600\,\mathrm{cm^3})\, g = \underbrace{1600\,\mathrm{g}}_{\text{grammi}} \cdot \underbrace{g}_{\text{accelerazione di gravità}}$$

grammi

accelerazione di gravità
$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

La massa complessiva del sistema legno + piombo è:



$$m_L = (V_L - 200\mathrm{cm^3}) \cdot \rho_L = (1600\,\mathrm{cm^3} - 200\,\mathrm{cm^3}) \cdot 0.5\,\mathrm{g/cm^3} = 700\,\mathrm{g}$$

$$m_P = V_P \cdot \rho_P = 200\,\mathrm{cm^3} \cdot 11.34\,\mathrm{g/cm^3} = 2286\,\mathrm{g}$$

$$\Longrightarrow \quad P = M \cdot g = (m_L + m_P) \cdot g \quad \Longrightarrow \quad P = 2986\,\mathrm{g} \cdot g$$

Confrontiamo le due forze:

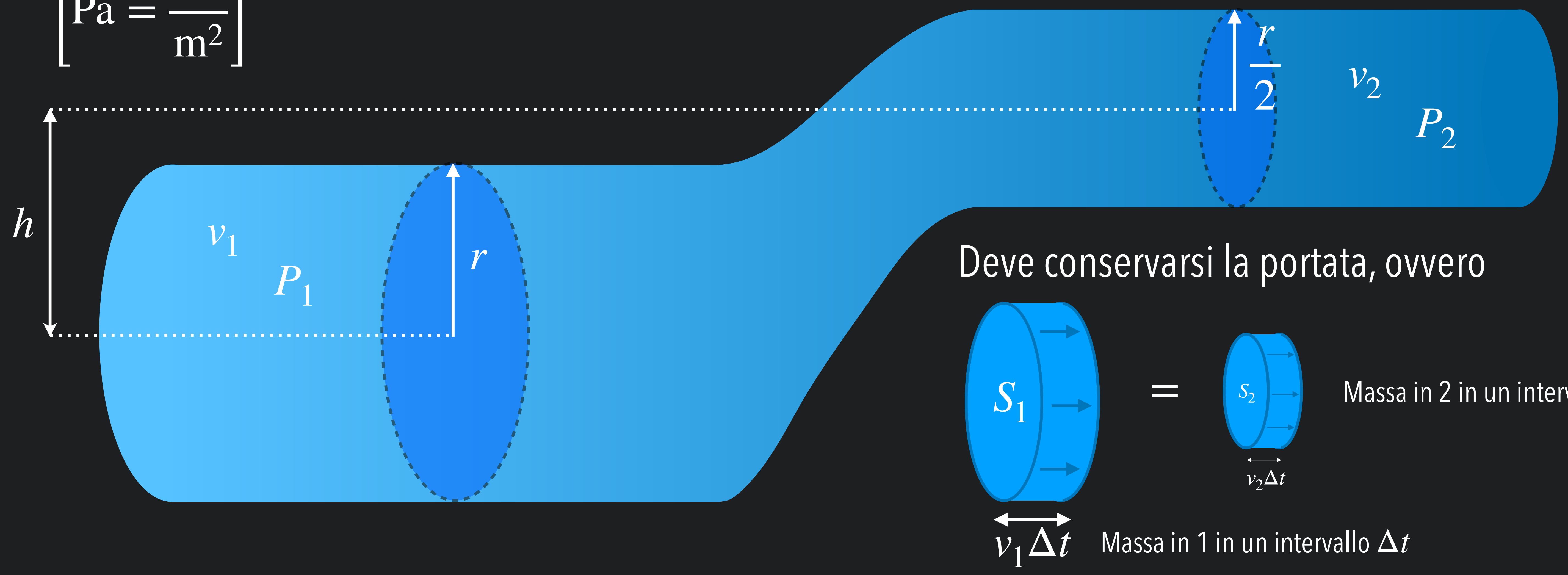
$$\underbrace{2986\,\mathrm{g} \cdot g}_{P} \qquad \underbrace{1600\,\mathrm{g} \cdot g}_{F_{\text{archimede}}}$$

$$\Longrightarrow \quad P > F_{\text{archimede}} \quad \Longrightarrow$$ Affonda!

Es. 2: Moto dei fluidi

In un condotto cilindrico scorre un fluido perfetto con una velocità $v_1 = 0.8\ \mathrm{m/s}$ e una pressione $P_1 = 0.12\ \mathrm{atm}$. Ad un certo punto il condotto presenta una strozzatura, avente raggio pari alla metà del primo tratto, e si trova $h = 10\ \mathrm{cm}$ più in alto rispetto ad esso. Assumendo che il moto sia stazionario e che il fluido in questione sia acqua, calcolare la velocità e la pressione del liquido nella strozzatura ($1\mathrm{atm} = 101325\ \mathrm{Pa}$).

$$\left[\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$$



Liquido ideale: incompressibile, senza attriti, moto laminare, …

Eq. di Bernoulli: $$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 + P = \text{costante}$$

Deve conservarsi la portata, ovvero

Massa in 2 in un intervallo Δt

Massa in 1 in un intervallo Δt

$$M_1 = M_2$$
$$\rho\, V_1 = \rho\, V_2$$
$$\rho \cdot S_1\, v_1 \Delta t = \rho \cdot S_2\, v_2 \Delta t$$
$$\pi r_1^2 \cdot v_1 = \pi r_2^2 \cdot v_2 \qquad \pi r_1^2 \cdot v_1 = \pi \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \cdot v_2$$
$$\Longrightarrow \quad v_2 = 4 v_1$$

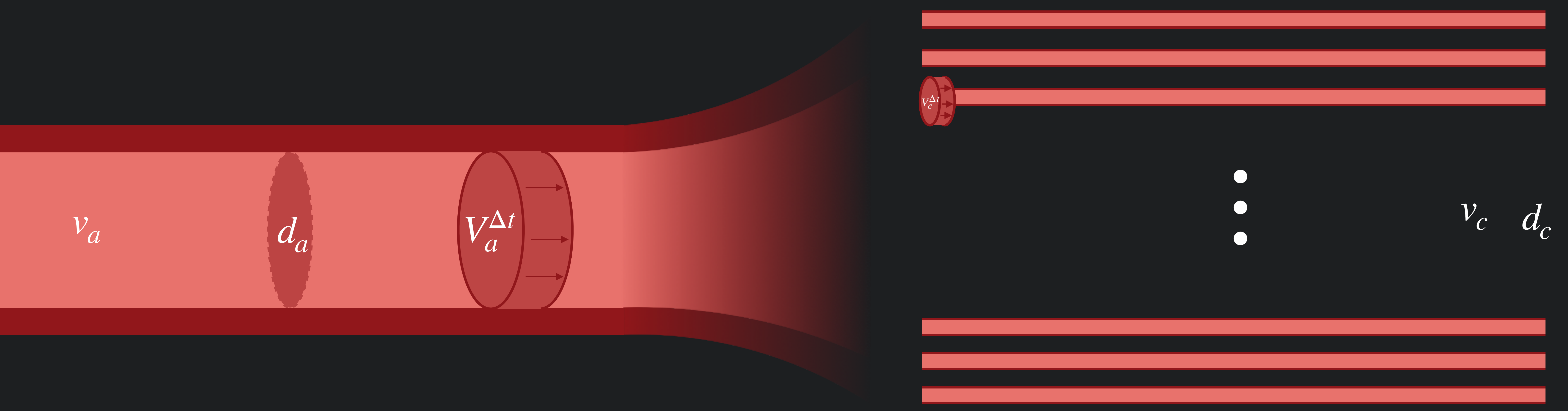
Applichiamo Eq. Bernoulli ai punti 1 e 2

$$\rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 \implies \frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho (4 v_1)^2 + P_2 \implies P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - 16 v_1^2) + P_1 - \rho g h$$

$$P_2 = 0.12 \cdot 101325\ \mathrm{Pa} - \frac{15}{2} 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\ (0.8\ \mathrm{m/s})^2 - 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\ 9.81\ \mathrm{m/s^2}\ 0.1\ \mathrm{m} \ = 6367\ \mathrm{Pa} = 0.06\ \mathrm{atm}$$

Es. 3: Sangue nell'aorta

L'aorta ha un diametro interno di circa $d_a = 3\,\mathrm{cm}$, mentre il diametro di un capillare è di circa $d_c = 10\,\mu\mathrm{m}$. Inoltre, la velocità media del flusso è di circa $v_a = 30\,\mathrm{cm/s}$ nell'aorta, e di $v_c = 0.08\,\mathrm{cm/s}$ in un capillare. Assumendo che tutto il sangue che fluisce attraverso l'aorta fluisca anche attraverso i capillari, quanti capillari ha il sistema circolatorio?



Fluido incompressibile $\Longrightarrow$ Conservazione del flusso!

Volumetto di sangue nell'aorta:

$$V_a^{\Delta t} = \rho_s \cdot S_a v_a \Delta t$$

Volumetto di sangue in uno dei capillari:

$$V_c^{\Delta t} = \rho_s \cdot S_c v_c \Delta t$$

La portata deve conservarsi $\Longrightarrow$

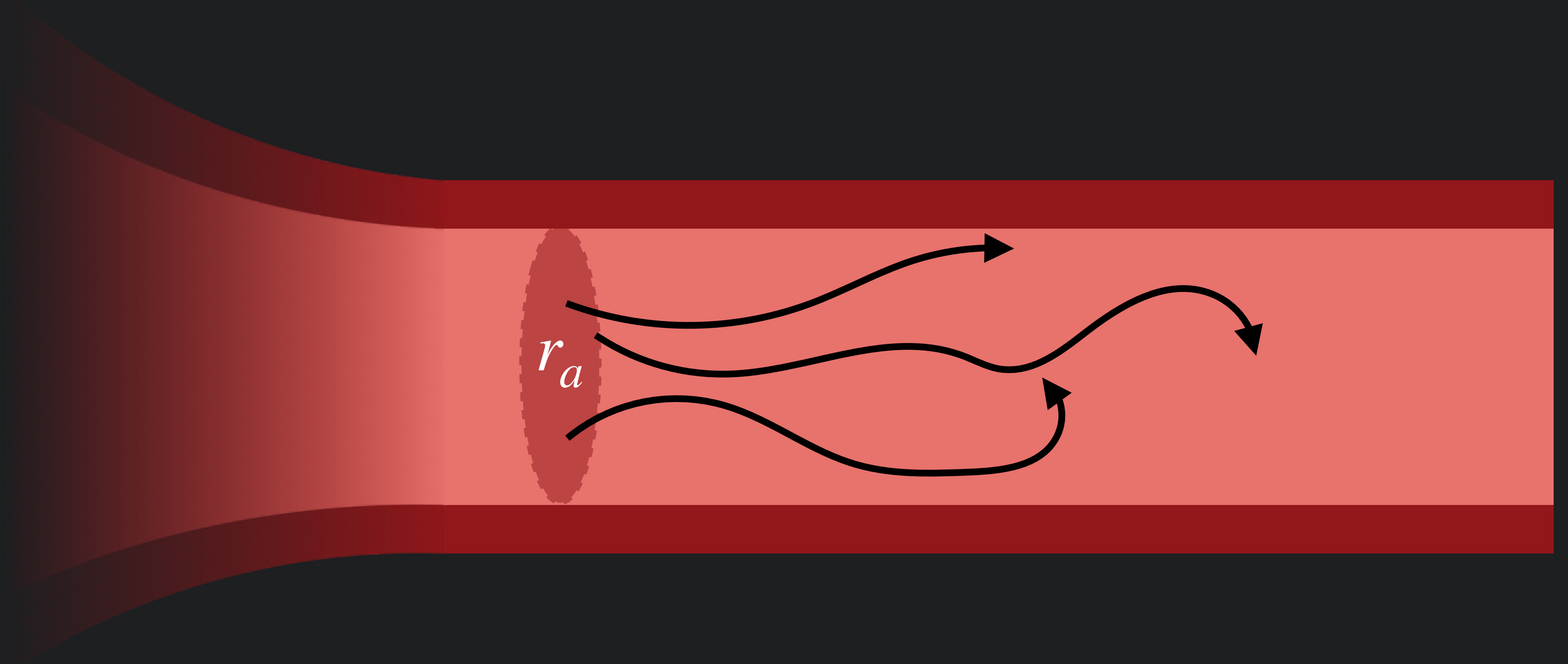
$$V_a^{\Delta t} = \quad V_c^{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad V_a^{\Delta t} = N\, V_c^{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \quad N = \frac{S_a\, v_a}{S_c\, v_c} = \frac{\pi (d_a/2)^2\, v_a}{\pi (d_c/2)^2\, v_c} \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{(3\,\mathrm{cm})^2 \cdot 30\,\mathrm{cm/s}}{(10^{-3}\,\mathrm{cm})^2 \cdot 0.08\,\mathrm{cm/s}} = 3375000000$$

$$= 3.375 \cdot 10^9$$

Es. 4: Sangue turbolento

Sebbene il sangue fluisca attraverso il sistema circolatorio con un moto laminare, può capitare che nell'aorta tale moto invece diventi turbolento (ad esempio durante un'attività fisica intensa). Assumendo un diametro di $d = 2\,\mathrm{cm}$ per l'aorta, ed un numero di Reynolds $R = 2000$, calcolare la velocità critica perché il moto diventi turbolento.
($\eta_\mathrm{s} = 4\,\mathrm{cP}, \rho_\mathrm{s} = 1.05\,\mathrm{g/cm^3}$)



Definizione di numero di Reynolds:

velocità e densità del fluido

diametro del condotto circolare

$$R := \frac{\rho\, v\, d}{\eta}$$

viscosità del fluido

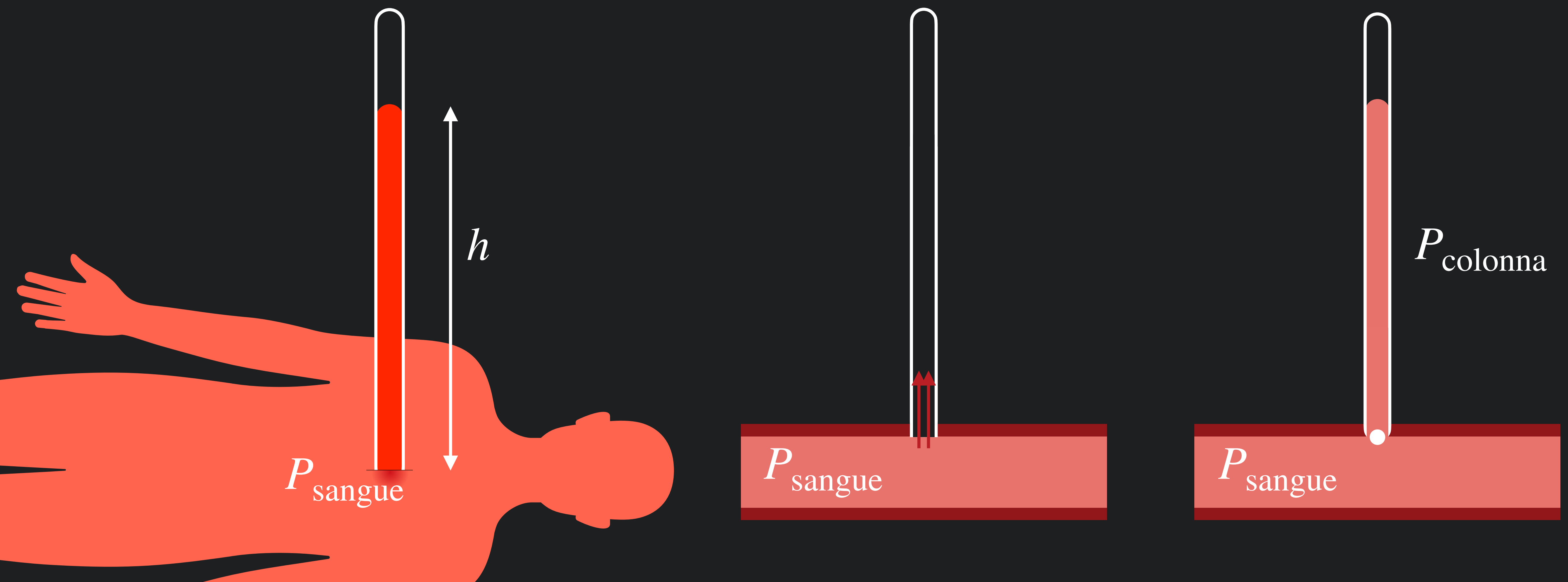
$$\left(\text{oppure} \quad \mathrm{R}' := \frac{\rho\, \mathrm{v}\, \mathrm{r}}{\eta}\right)$$

$$v_\text{critica} = \frac{R\,\eta}{\rho_s\, d} = \frac{2000 \cdot 0.04\,\mathrm{P}}{1.05\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 2\,\mathrm{cm}} = \frac{2000 \cdot 0.04\,\mathrm{g/(cm \cdot s)}}{1.05\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 2\,\mathrm{cm}}$$

$$= 38\,\mathrm{cm/s}$$

Es. 5: Fontana di sangue

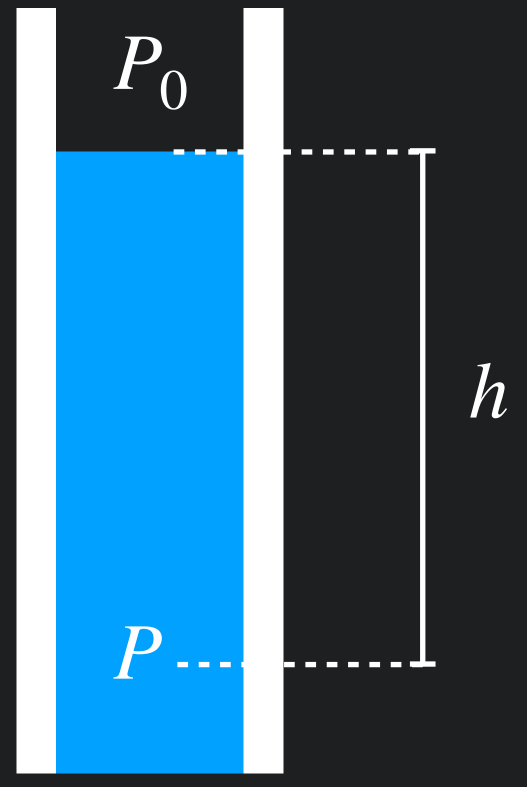
Il sangue fluisce in media a $p = 100\,\mathrm{torr}$ all'altezza del cuore. Determinare l'altezza raggiunta dal sangue se introducessimo un piccolo tubo verticale in un'arteria, trascurando i fenomeni di espansione e contrazione delle arterie e l'attrito viscoso nei vasi sanguigni. Calcolare la pressione del sangue nei piedi di una persona il cui cuore è a $d = 130\,\mathrm{cm}$ da terra ($1\,\mathrm{torr} = 1\,\mathrm{mmHg} = 133.32\,\mathrm{Pa}$).



Legge di Stevino

$$P = P_0 + \rho\, g\, h$$

(nel nostro caso $P_0 = 0$)



Equilibrio: Il sangue smetterà di salire lungo il tubo, quando le due pressioni P_{sangue} e $P_{colonna}$ saranno uguali, cioè

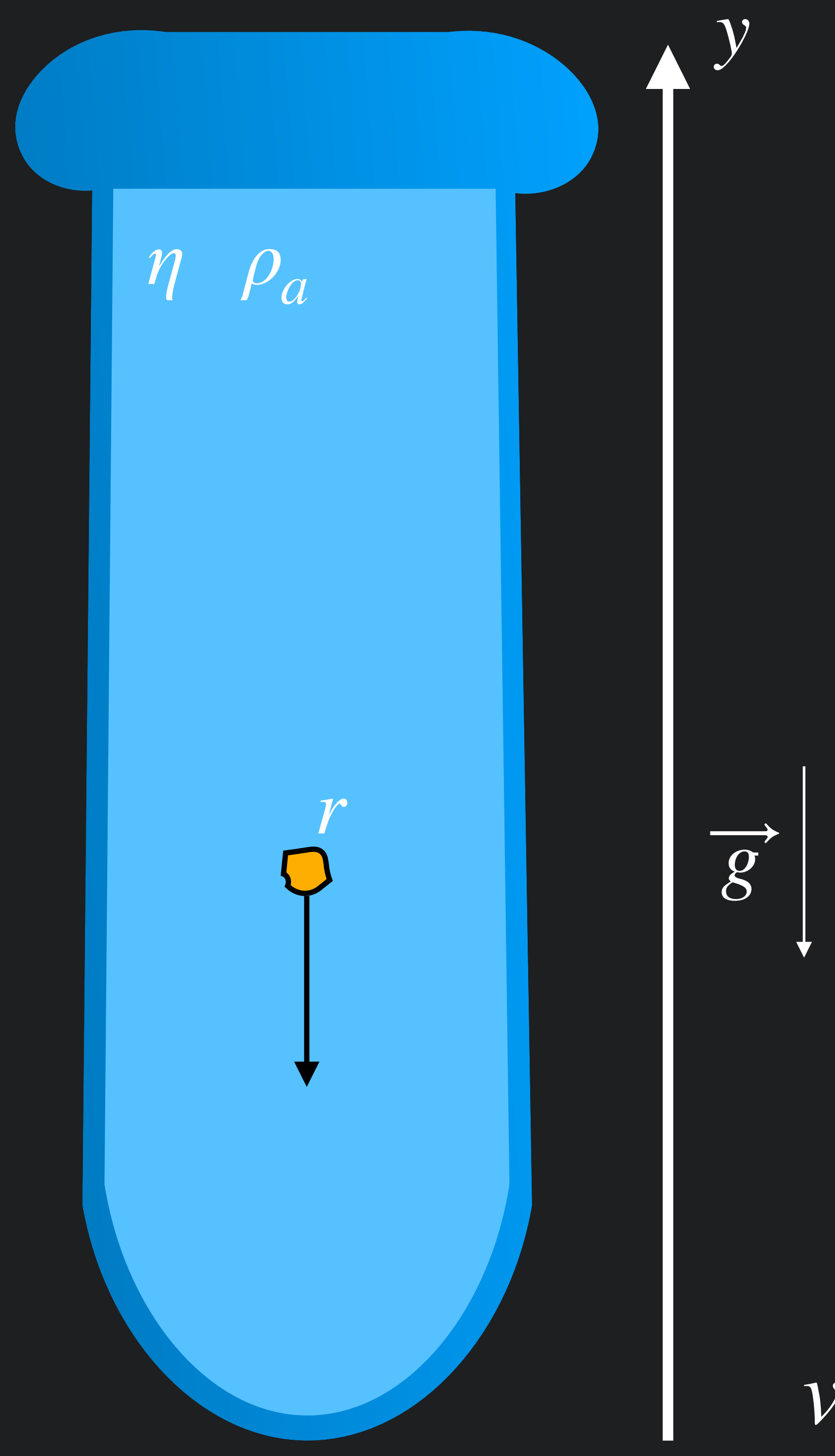
$$P_{sangue} = P_{colonna} = \rho\, g\, h \implies h = \frac{P_{sangue}}{\rho\, g} = \frac{100\,\mathrm{torr}}{1.05 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}} = 1.29\,\mathrm{m}$$

Usando di nuovo Stevino abbiamo:

$$P_{piedi} = P_{cuore} + \rho\, g\, d \quad = 100\,\mathrm{torr} + 100\,\mathrm{torr} = 200\,\mathrm{torr}$$

Es. 6: Cellula e sedimentazione

Una cellula sedimenta in acqua a 25°C, densità $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ e viscosità $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pl}$. Sia il raggio della cellula pari a $r = 3.5\,\mu\mathrm{m}$ e la sua densità del 10% maggiore rispetto al liquido in cui sedimenta. Si calcoli la forza di attrito viscoso e la velocità di sedimentazione. Per accelerare il processo di sedimentazione si procede all'impiego di una centrifuga di raggio circa $r = 10\,\mathrm{cm}$. Calcolare la velocità di rotazione da impostare nello strumento per ottenere una velocità di sedimentazione mille volte più alta.



Spinta di Archimede

$\vec{F}_A = -V_c\,\rho_a\,\vec{g}$

$\vec{S} = -6\pi r\eta\,\vec{v}$

Forza di attrito (Stokes)

$\left(V_c = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$$\left(\begin{array}{l} \rho_c = \rho_a + 10\,\%\,\rho_a \\ \rho_c = \rho_a + 0.1\,\rho_a = 1.1\,\rho_a \\ \implies \rho_c - \rho_a = 0.1\,\rho_a \end{array}\right)$$

$\vec{P} = m\,\vec{g}$

Forza peso

Eq. di Newton applicata alla cellula

$$\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{S} = m\,\vec{a}$$

All'equilibrio (e proiettando lungo l'asse y)

$$V_p\,\rho_a\,g - m\,g + 6\pi r\eta v = 0$$

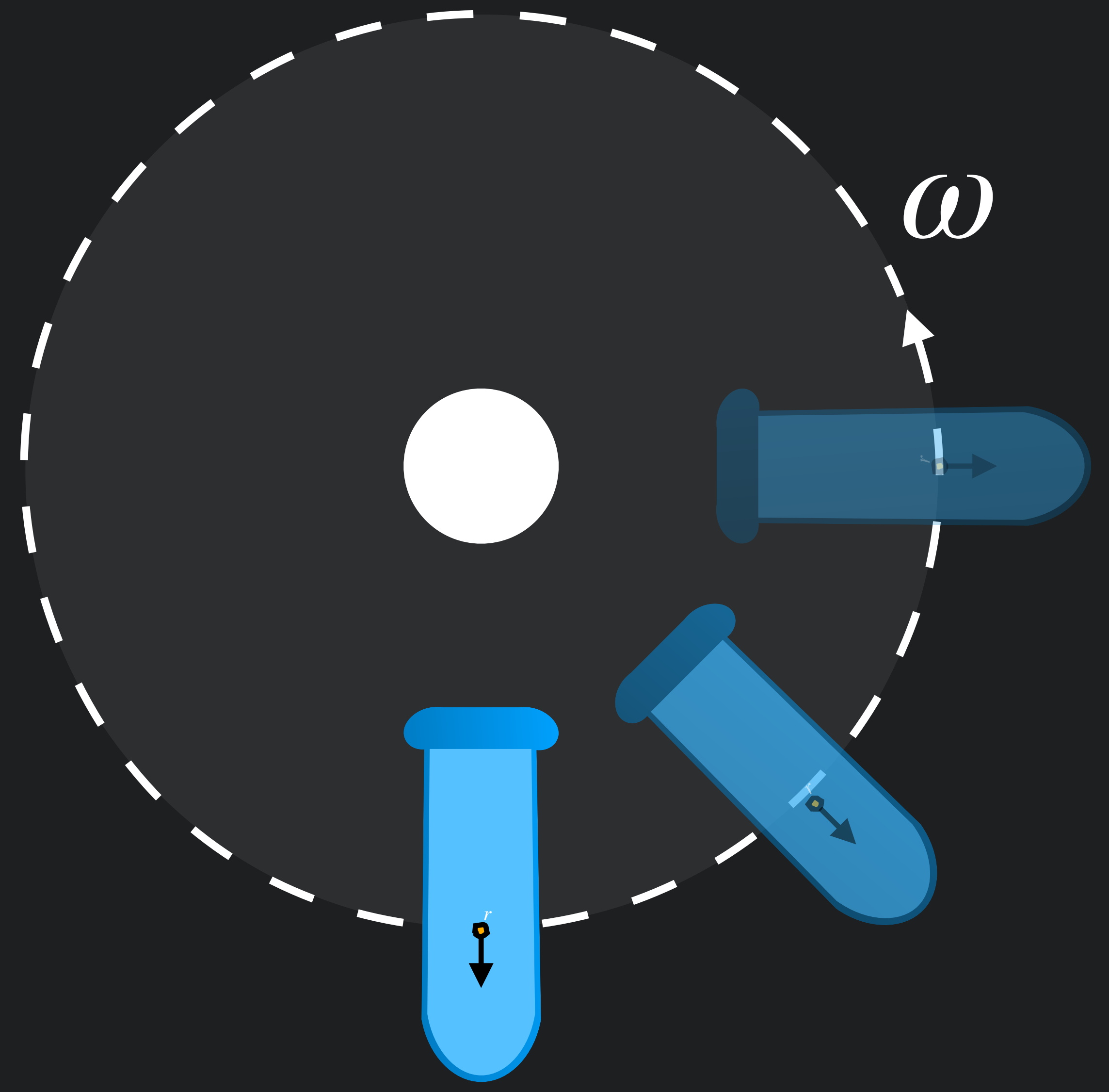
$$\implies v_{\mathrm{sedimentazione}} = \frac{V_c\,g\,(\rho_c - \rho_a)}{6\pi r\eta} = \frac{2}{9}\frac{r^2\,g\,(\rho_c - \rho_a)}{\eta}$$

$$v_{\mathrm{sedimentazione}} = \frac{2}{9}\frac{(3.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m})^2 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (0.1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3})}{8.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pa \cdot s}} = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s} = 10.8\,\mathrm{mm/h}$$

$$|S| = 6\pi r\eta v_{\mathrm{sedimentazione}} = V_c\,g\,(\rho_c - \rho_a) = 1.76 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

Es. 6: Cellula e sedimentazione

Una cellula sedimenta in acqua a 25°C, densità $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ e viscosità $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{Pl}$. Sia il raggio della cellula pari a $r = 3.5\,\mu\mathrm{m}$ e la sua densità del 10% maggiore rispetto al liquido in cui sedimenta. Si calcoli la forza di attrito viscoso e la velocità di sedimentazione. Per accelerare il processo di sedimentazione si procede all'impiego di una centrifuga di raggio circa $r = 10\,\mathrm{cm}$. Calcolare la velocità di rotazione da impostare nello strumento per ottenere una velocità di sedimentazione mille volte più alta.



Gravità

$$v^g_{\text{sedimentazione}} = \frac{2}{9}\frac{r^2\,g\,(\rho_c - \rho_a)}{\eta}$$

Centrifuga

$$v^c_{\text{sedimentazione}} = \frac{2}{9}\frac{r^2\,\omega^2 R\,(\rho_c - \rho_a)}{\eta}$$

Vogliamo che $\quad v^c = 1000 \cdot v^g$

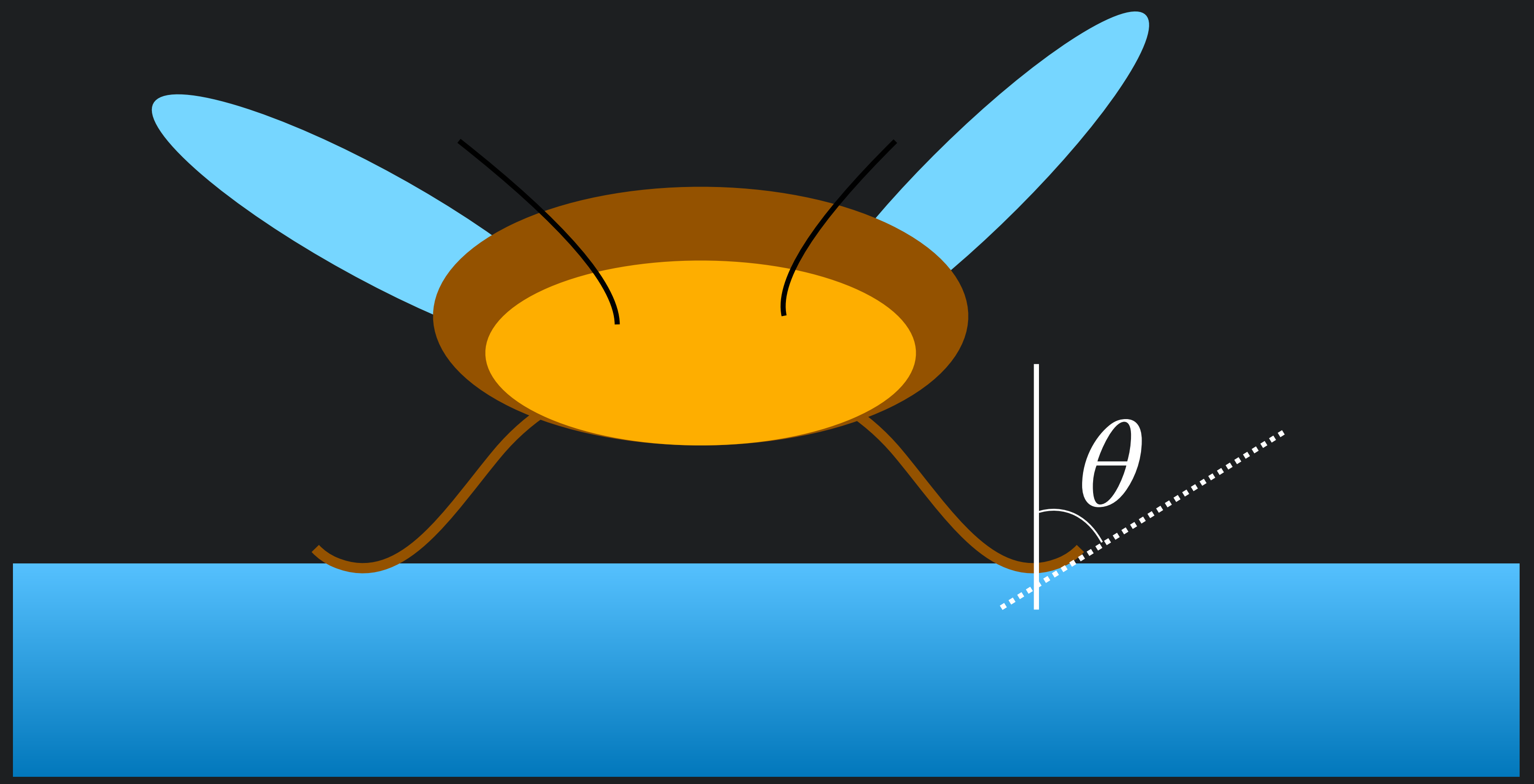
$$\Longrightarrow \frac{2}{9}\frac{r^2\,\omega^2 R\,(\rho_c - \rho_a)}{\eta} = 1000 \cdot \frac{2}{9}\frac{r^2\,g\,(\rho_c - \rho_a)}{\eta}$$

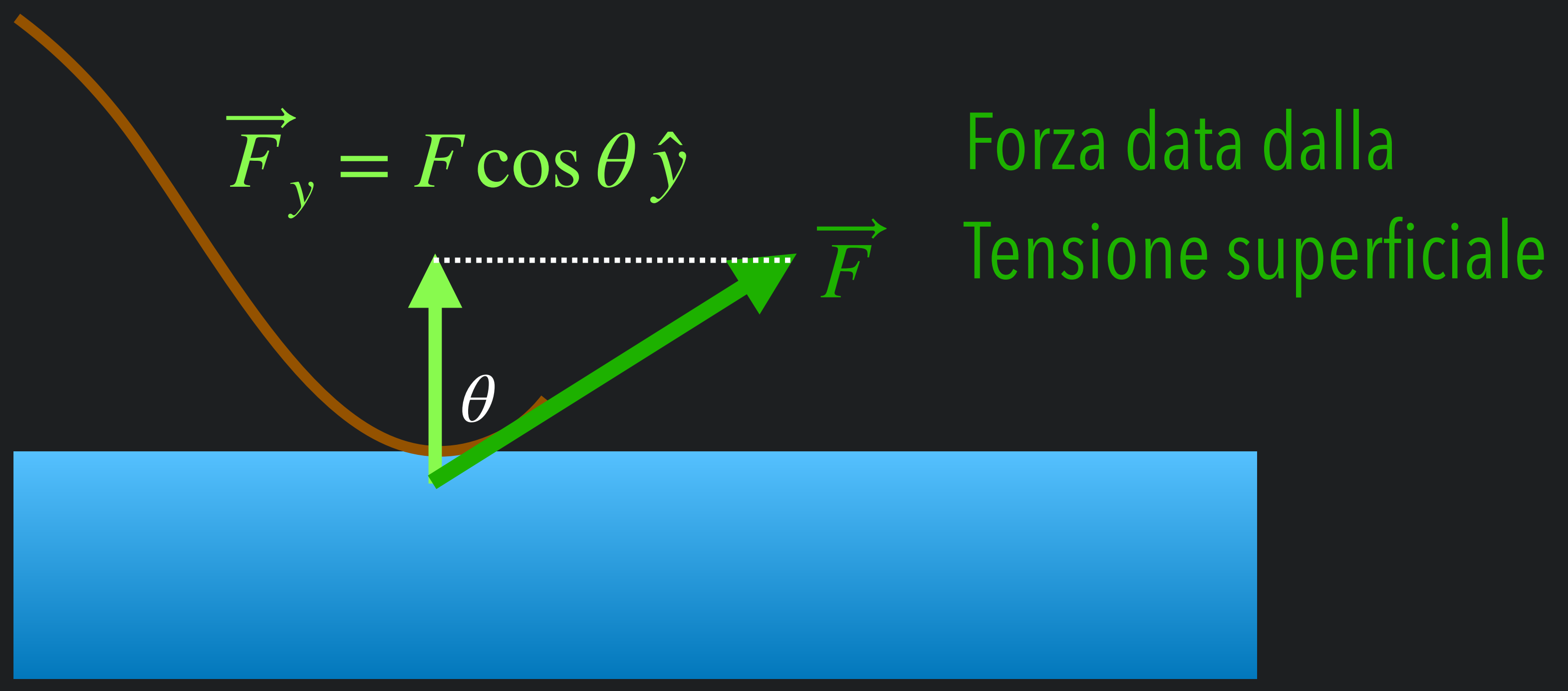
$$\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = \frac{2\pi}{2\pi}\frac{\mathrm{rad}}{\frac{1}{60}\mathrm{m}} = \frac{60}{2\pi}\frac{\mathrm{round}}{m}\right)$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{1000\,g}{R} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1000 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}}{0.1\,\mathrm{m}}} = 313.20\,\mathrm{rad/s} = 2990\,\mathrm{rpm}$$

Es. 7: Insetto sull'acqua

Un insetto è posato sulla superficie di un bacino d'acqua, la cui tensione superficiale ammonta a $T = 0.073\ \mathrm{N/m}$. Determinare la massima massa dell'insetto sopportata dalla superficie dell'acqua. Si approssimi l'insetto ad una sfera di densità pari a quella dell'acqua, e che l'insetto copra un perimetro pari alla circonferenza massima della sfera.





Tensione superficiale crea una forza

$$F = TL$$

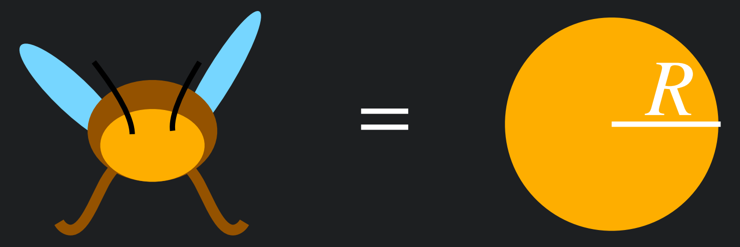
A noi interessa la componente verticale

$$\begin{aligned} F_y &= F\cos\theta \\ &= TL\cos\theta \end{aligned}$$

Insetto galleggia se

$$P = F_y \implies P_{\max} = TL\,(\cos\theta)_{\max} = TL$$

Physicist's way: L'insetto è una sfera

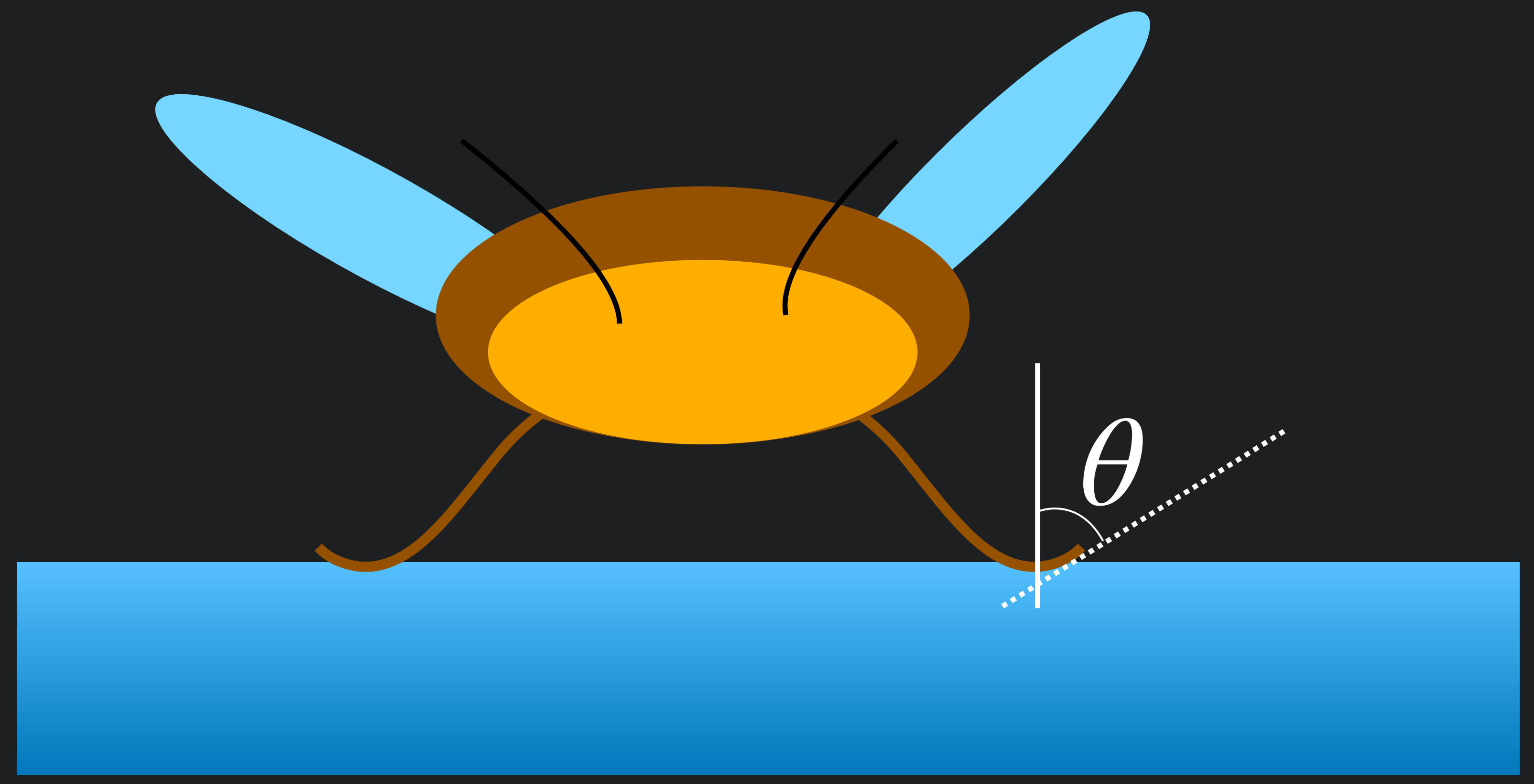


$$L = 2\pi R \qquad (V = m/\rho)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \implies R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

Es. 7: Insetto sull'acqua

Un insetto è posato sulla superficie di un bacino d'acqua, la cui tensione superficiale ammonta a $T = 0.073\ \mathrm{N/m}$. Determinare la massima massa dell'insetto sopportata dalla superficie dell'acqua. Si approssimi l'insetto ad una sfera di densità pari a quella dell'acqua, e che l'insetto copra un perimetro pari alla circonferenza massima della sfera.



$$P_{\max} = TL \qquad R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

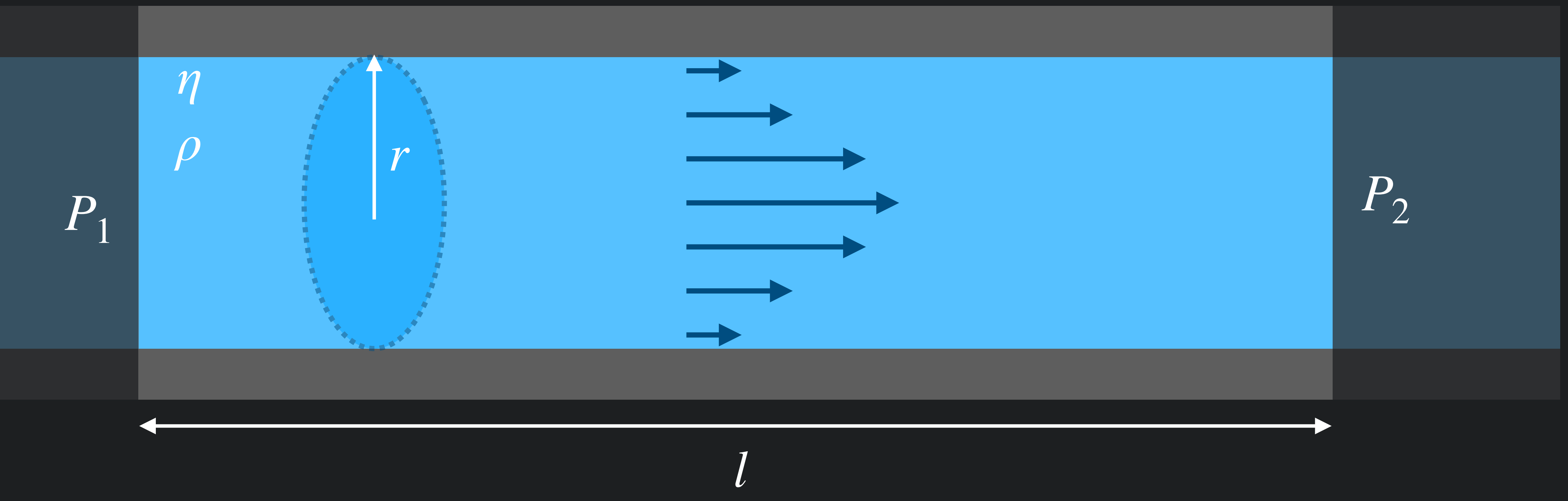
$$m_{\max}\, g = T \cdot 2\pi R \implies m_{\max}\, g = T \cdot 2\pi \left(\frac{3\, m_{\max}}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$m_{\max}^{2/3} = \frac{2\pi T}{g} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/3} \implies m_{\max} = \left(\frac{2\pi T}{g}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$$

$$\implies m_{\max} = \left(\frac{2\pi\, 0.073\ \mathrm{N/m}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{4\pi\, 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}\right)^{1/2} \implies m_{\max} = 0.16\ \mathrm{g}$$

Es. 8: Portata di un fluido viscoso

Un liquido di viscosità $\eta = 0.04\,\mathrm{P}$ e densità $\rho = 1.06\,\mathrm{g/cm^3}$, scorre in un condotto di sezione circolare con raggio $r = 1.2\,\mathrm{mm}$ e lungo $l = 25\,\mathrm{cm}$. Calcolare la velocità media del flusso, considerando un regime laminare, e assumendo che la differenza di pressione ai capi del condotto sia di $\Delta P = 80\,\mathrm{mmHg}$. Calcolare la velocità critica assumendo che il numero di Reynolds si pari a $R = 2000$.



Formula per la portata di un fluido viscoso in un condotto circolare è data da

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P$$

$$= \frac{\pi(1.2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m})^4}{8\cdot 0.04\cdot 0.1\,\mathrm{Pa\,s}\cdot 0.25\,\mathrm{m}}\cdot 80\cdot 133.32\,\mathrm{Pa}$$

$$= 8.68\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3/s}$$

$$Q := v\cdot A \implies v_{\text{avg}} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

$$\implies v_{\text{avg}} = \frac{8.68\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3/s}}{\pi\cdot(1.2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m})^2} = 1.9\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{\text{critica}} = \frac{R\eta}{\rho d} = \frac{2000\cdot 0.004\,\mathrm{Pa\,s}}{1.06\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 2.4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 3.1\,\mathrm{m/s}$$