Immagine: Earthrise, Apollo8 (Nasa).
Url: https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_1249.html

Seminario 1
Cinematica e Dinamica

07/04/2021

Corso di Fisica 1(A)
Laurea in Scienze Biologiche @UniPv

Stefano Mangini
stefano.mangini01@universitadipavia.it

Disclaimer

Regole del fight club:

Intervenite e chiedete, sia
tramite audio che tramite chat
(ma ricordatemi di controllarla)

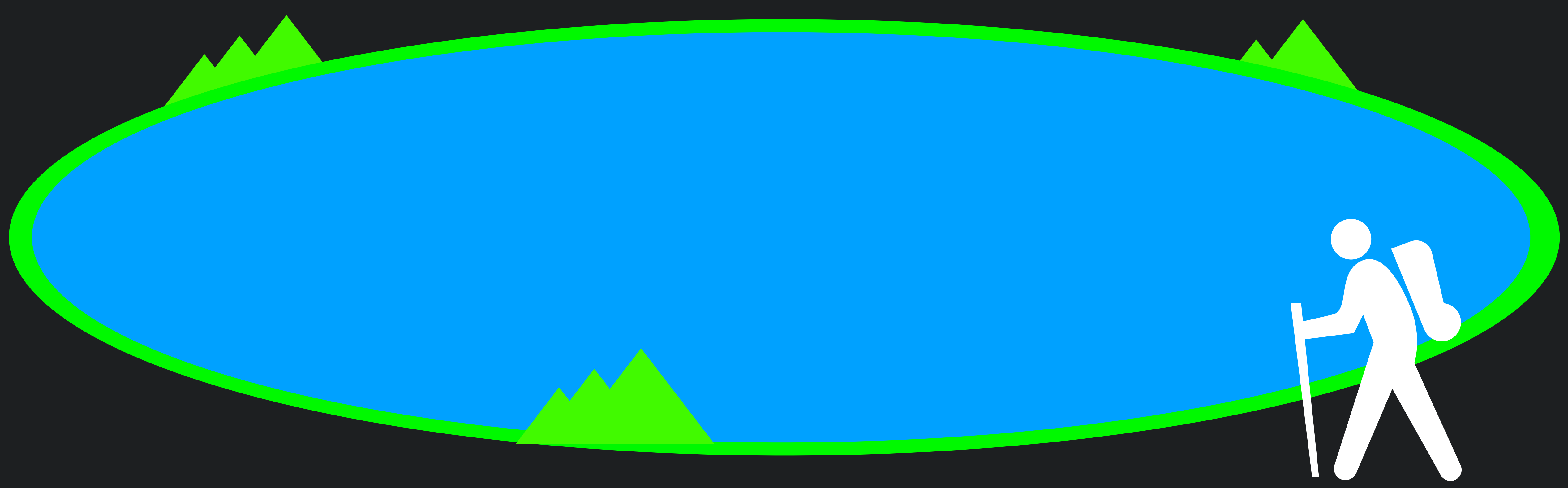
Lezione ibrida: metà con
presentazione metà “a mano”

Ricordatemi di registrare
la lezione

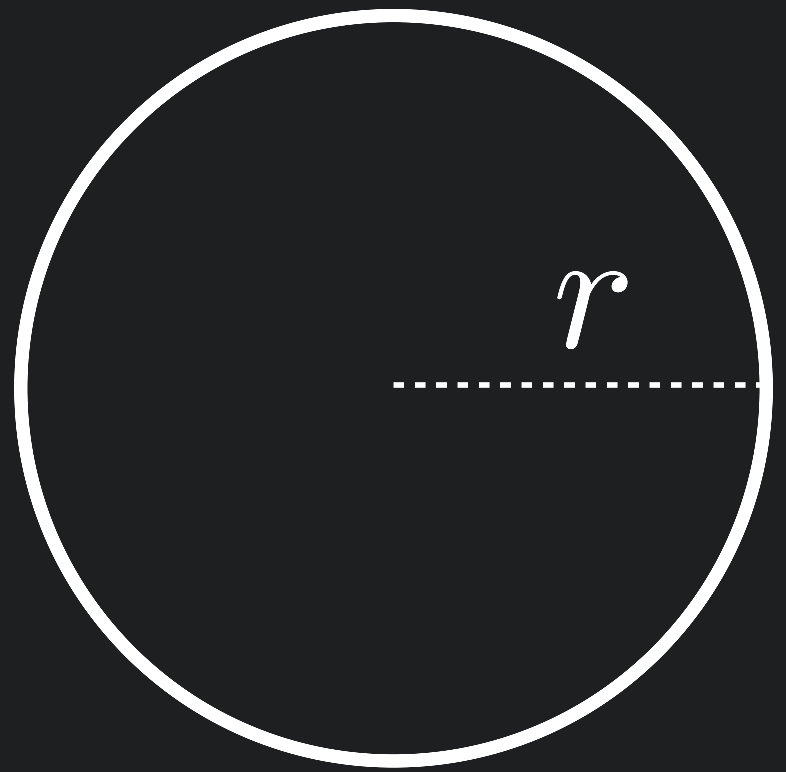
Es. 1: Passeggiata al lago

Un laghetto di montagna, di forma approssimativamente circolare, ha una superficie di $2.5\,\mathrm{km}^2$. Quanto tempo ci vuole (in secondi) per fare una passeggiata intorno al lago, camminando lentamente a una velocità media di $1.8\,\mathrm{km/h}$?

$$A = 2.5\,\mathrm{km}^2$$

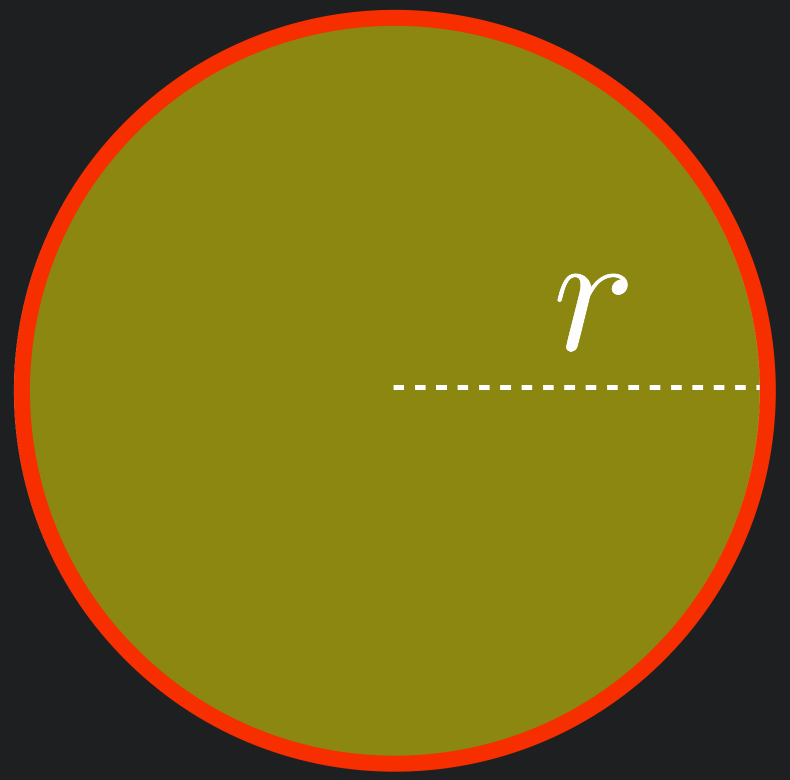


$$v = 1.8\,\mathrm{km/h}$$



$$t_{\text{giro completo}} = ?$$

Es. 1: Passeggiata al lago



$$A = \pi r^2$$

$$C = 2\pi r$$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \longrightarrow \sqrt{\frac{2.5\,\mathrm{km}^2}{3.14}} \approx 0.89\,\mathrm{km}$$

$$C = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} \longrightarrow 2 \cdot 3.14 \cdot 0.89\,\mathrm{km} \approx 5.59\,\mathrm{km}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} \longrightarrow t = \frac{C}{v} \longrightarrow \frac{5.59\,\mathrm{km}}{1.8\,\mathrm{km/h}} = 3.10\,\mathrm{h}$$

Bene, ma in secondi? Convertiamo un'ora in secondi:

$$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{s}$$

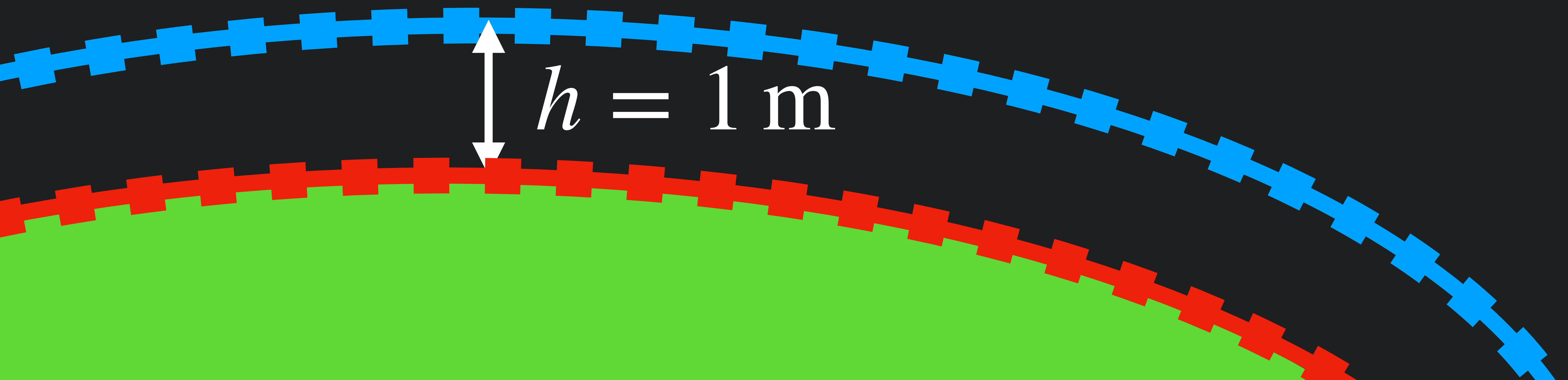
$$\Longrightarrow \quad t = 3.10\,\mathrm{h} = 3.10\,\mathrm{h} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s}}{\mathrm{h}} = 11160\,\mathrm{s}$$

Es. 1bis: Una corda grande quanto la terra

Immaginate di possedere una corda talmente lunga da poter fare esattamente un giro di tutto il pianeta (assunto come una sfera perfetta). Quanta corda devo aggiungere a quella già in mio possesso affinché questa ora avvolga ancora per intero il pianeta, ma si trovi ad $h = 1\,\mathrm{m}$ di altezza rispetto alla superficie?

$$l_0 = 2\,\pi\, r_{\text{terra}}$$

$$l_1 = 2\,\pi\,(r_{\text{terra}} + 1\,\mathrm{m})$$

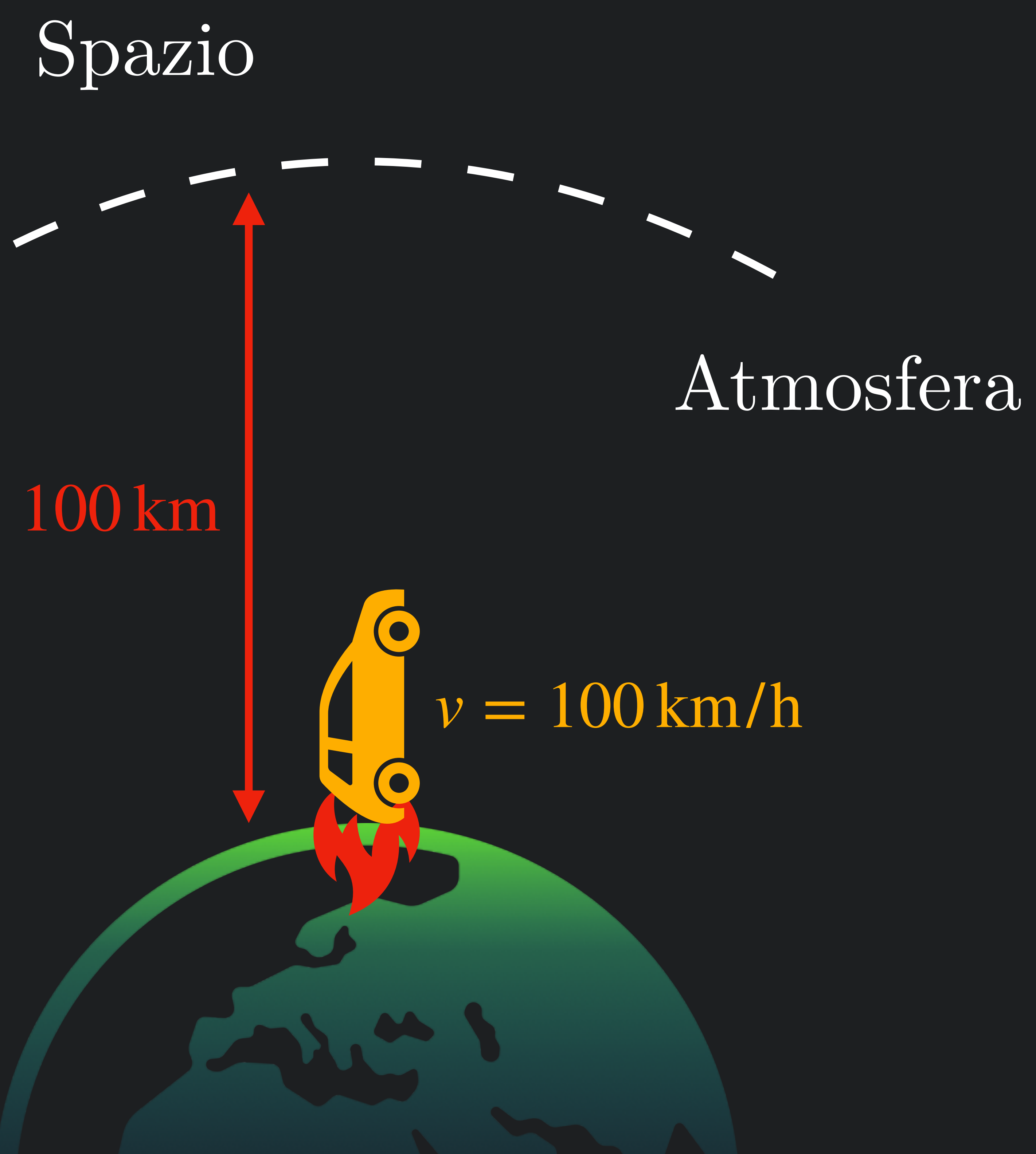


$$\Longrightarrow \quad \Delta l = l_1 - l_0 = 2\,\pi \cdot 1\,\mathrm{m} \approx 6.28\,\mathrm{m}$$

Servono solo 6 m in più di corda!

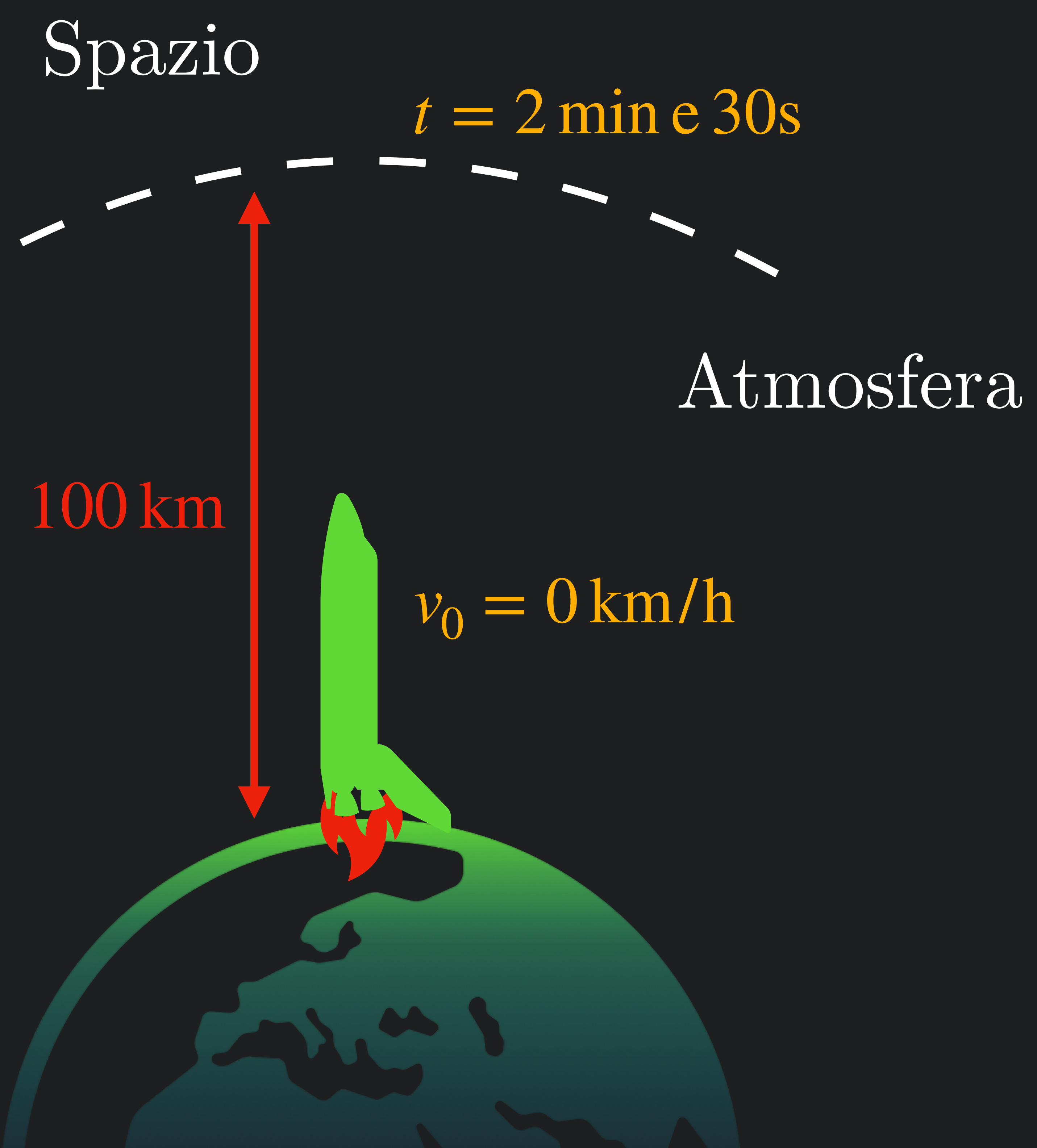
Es. 2: Superstrada verticale

Se un automobile viaggiasse verticalmente alla velocità di 100 km/h, quanto tempo ci metterebbe per uscire dall'atmosfera partendo da terra (si consideri la linea di Kármán come confine tra l'atmosfera terrestre e lo spazio esterno, posta a 100 km)? Se l'automobile in questione pesasse 740 kg, quanto lavoro dovrebbe essere svolto dal motore per raggiungere lo spazio (si trascuri l'attrito dell'aria e si assuma che l'accelerazione gravitazionale sia costante lungo l'intero tragitto)?



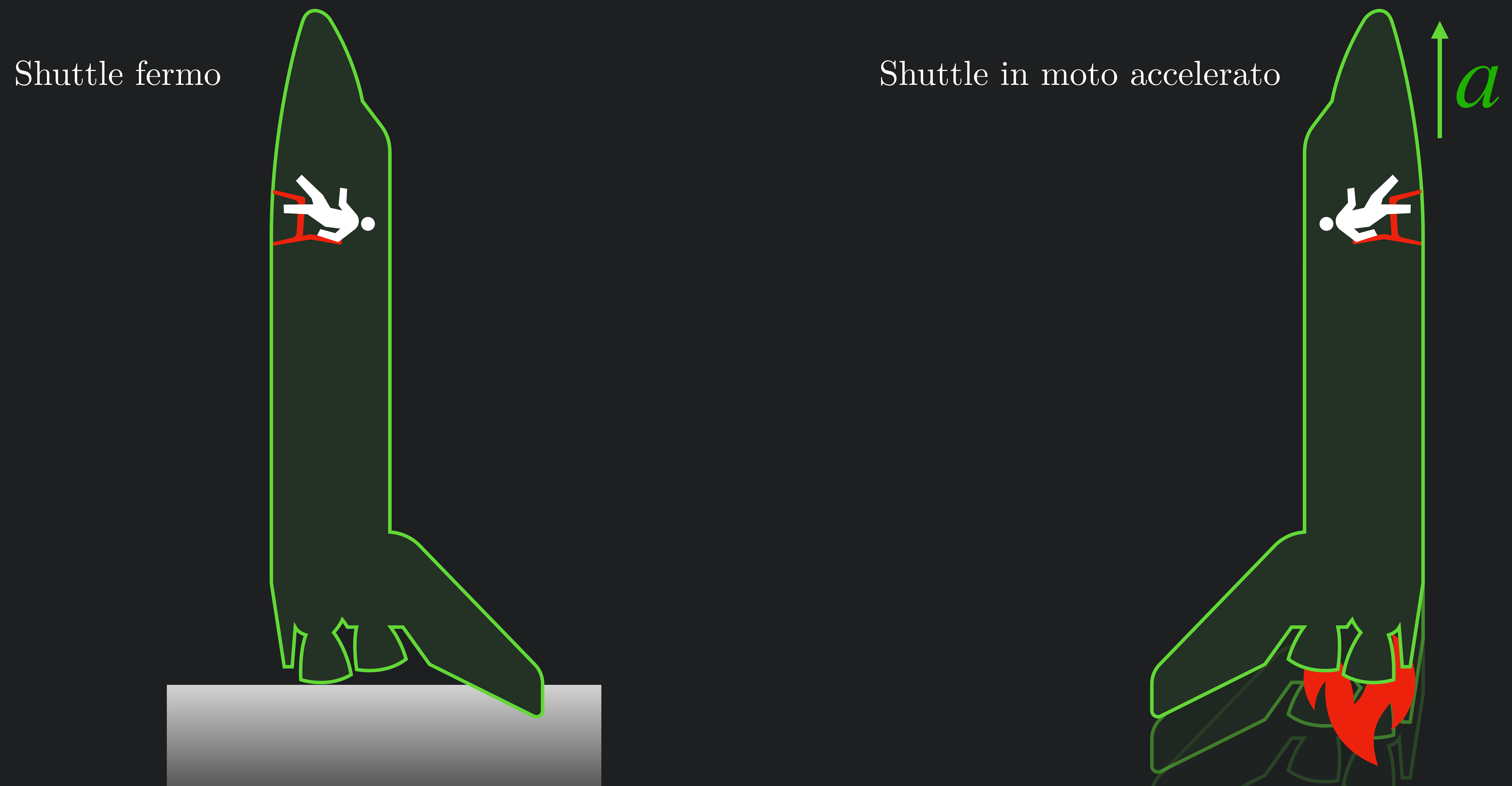
Es. 3: Space Shuttle

Lo Space Shuttle della NASA raggiunge lo spazio — Linea di Kármán — in 2 min e 30 s, qual è la velocità del veicolo spaziale al termine del tragitto in km/h?
Valutare l'accelerazione subita dai piloti durante il lancio.



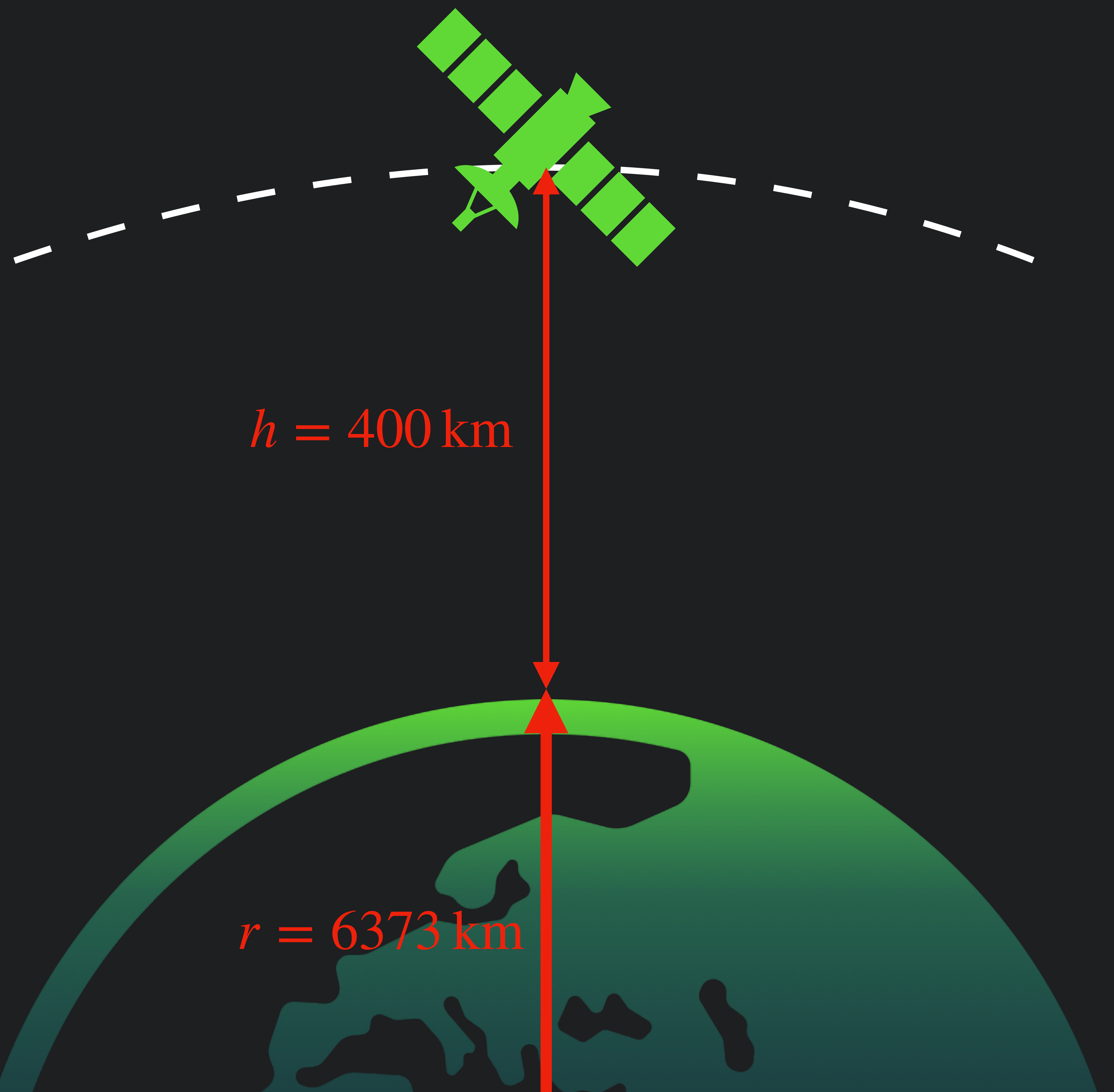
Il motore esercita una spinta sullo Shuttle che quindi si muove di moto accelerato uniforme. Quanto vale l'accelerazione a?

Es. 3: Space Shuttle



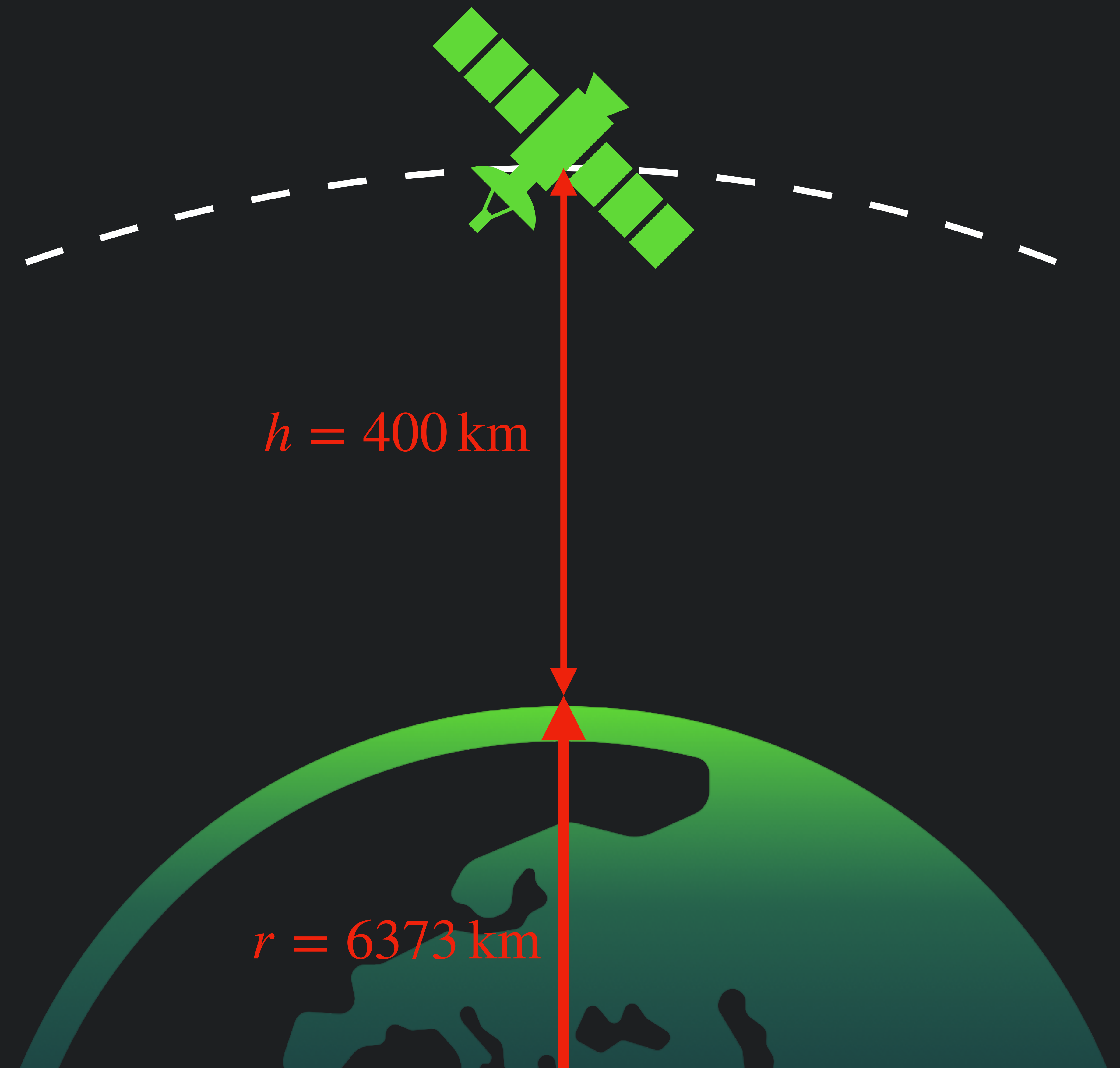
Es. 4: Stazione Spaziale Internazionale (ISS)

La stazione spaziale internazionale orbita ad un altitudine di circa 400 km. Determinare la velocità che permetta alla stazione di percorrere un moto circolare uniforme intorno alla terra senza cadere. Si considerino le seguenti costanti: $GM = 3.98 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}$, raggio medio terrestre $r = 6373\,\mathrm{km}$.



Es. 4: Stazione Spaziale Internazionale (ISS)

Assolutamente non in scala



In scala

Es. 5: Pallina da tennis

Una pallina da tennis viene lanciata orizzontalmente all'altezza $H = 2.4\,\mathrm{m}$ ad una velocità di $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$. La rete si trova a $d = 12\,\mathrm{m}$ di distanza, ed è alta $h = 90\,\mathrm{cm}$. La pallina riesce a superare la rete? A quale distanza dal giocatore cade?

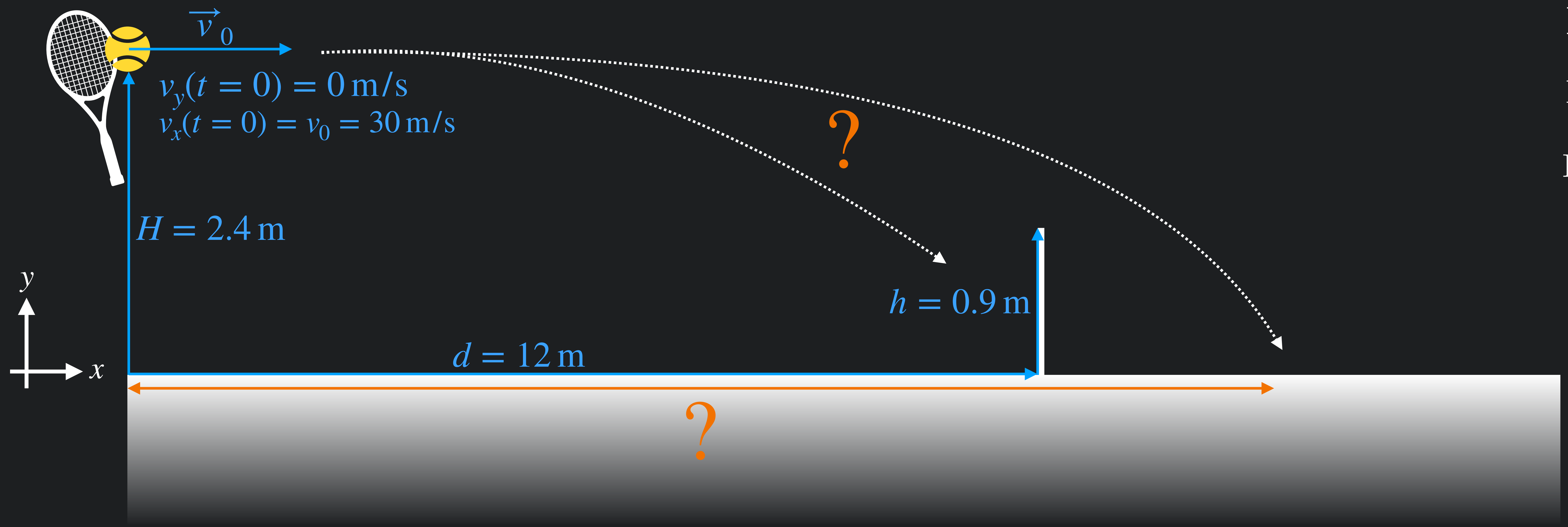


Diagramma delle forze

Forze esterne $\vec{F} = -mg\,\hat{y}$

Legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

$$m\vec{a} = -mg\,\hat{y} \rightarrow \vec{a} = -g\hat{y} \qquad \vec{a} = (0, -g)$$

$[g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}]$

Eqs. del moto (aka legge oraria):

$$x(t) = x_0 + v_{0,x}\,t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = v_0\,t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0,y}\,t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad\qquad y(t) = y_0 - \frac{1}{2}g\,t^2$$

A che altezza si trova la pallina dopo aver percorso la distanza di $d = 12\,\mathrm{m}$? Iniziamo ricaviamo il tempo t_d necessario per percorrere la distanza $d = 12\,\mathrm{m}$:

$$t_d = \frac{x(t_d)}{v_0} = \frac{12\,\mathrm{m}}{30\,\mathrm{m/s}} = 0.4\,\mathrm{s}$$

Es. 5: Pallina da tennis

Sostituiamo $y_0 = 2.4\,\mathrm{m}$, e $t_d = 0.4\,\mathrm{s}$ nella Eq. per $y(t)$, ovvero:

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g\, t^2 \longrightarrow y(t_d) = 2.4\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0.4\,\mathrm{s})^2 = 2.4\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot (0.4)^2\,\cancel{\mathrm{s}^2} \approx 1.62\,\mathrm{m}$$

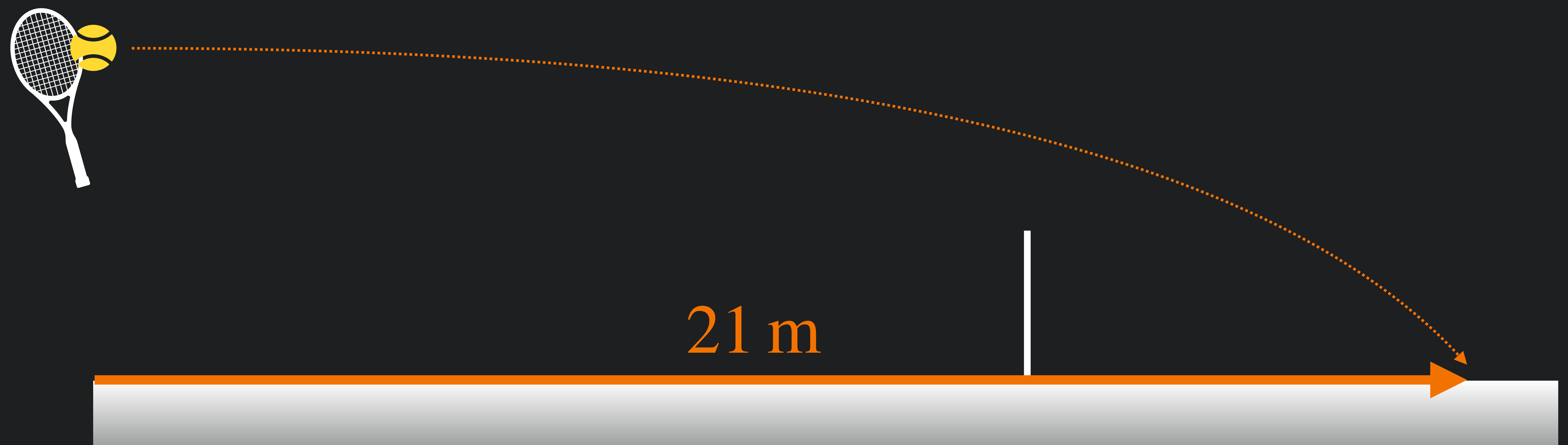
$y(t_d) > 0.9\,\mathrm{m}$, quindi la pallina supera la rete!

A che distanza dal giocatore cade la pallina? Prima di tutto dobbiamo calcolare il tempo t_p in cui la pallina tocca il suolo:

$$y(t_p) = y_0 - \frac{1}{2} g\, t_p^2 = 0 \implies \frac{1}{2} g\, t_p^2 = y_0 \implies t_p = \sqrt{\frac{2\,y_0}{g}} \longrightarrow t_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.4\,\cancel{\mathrm{m}}}{9.81\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^2}} \approx 0.7\,\mathrm{s}$$

Non ci rimane che sostituire ora il tempo t_p appena calcolato nella legge oraria di $x(t)$ per calcolare la distanza finale:

$$x(t_p) = v_0\, t_p \longrightarrow x(t_p) = 30\,\mathrm{m/s} \cdot 0.7\,\mathrm{s} = 21\,\mathrm{m}$$



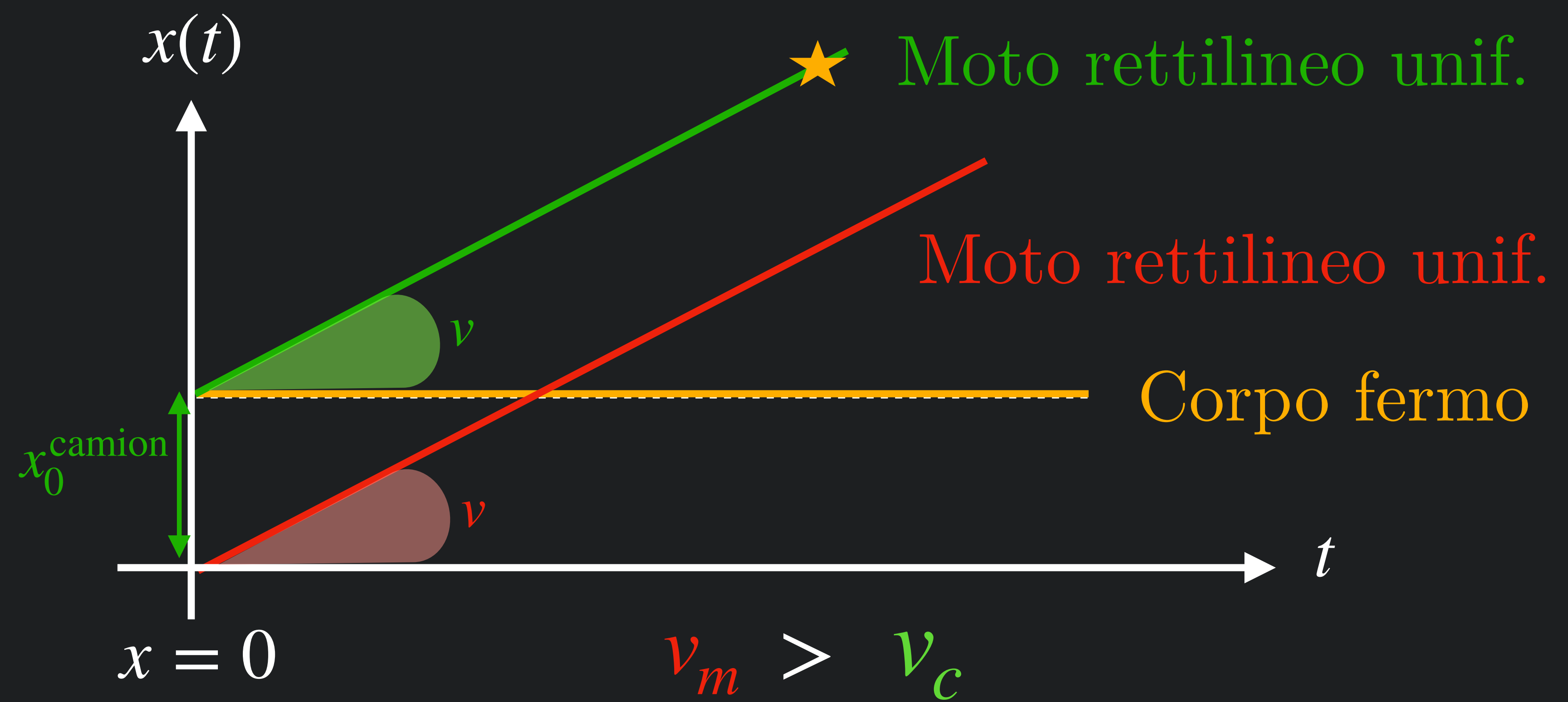
Es. 6: Sorpasso in autostrada

Un auto viaggia in autostrada alla velocità di 130 km/h e vuole superate un autocarro che si muove a 90 km/h. Supponendo che la distanza iniziale tra i due veicoli è di 30 m, la macchina riuscirà a superare l'autocarro? Se si, dopo quanto tempo ci riuscirà, assumendo che le velocità rimangano costanti?

$v_m = 130\,\mathrm{km/h}$ $\quad$ $v_c = 90\,\mathrm{km/h}$

$x^{\mathrm{macchina}}_{t=0} = 0\,\mathrm{m}$ $\quad$ $d = 30\,\mathrm{m}$ $\quad$ $x^{\mathrm{camion}}_{t=0} = 30\,\mathrm{m}$

I due veicoli s'incontreranno?



$v_m > v_c$

$\Longrightarrow$ Sorpasso!

Eqs. del moto per i due veicoli:

$$x^{\mathrm{m}}(t) = v_m\, t$$

$$x^{\mathrm{c}}(t) = x_0^{\mathrm{c}} + v_c\, t$$

$$x^{\mathrm{m}}(t) = x^{\mathrm{c}}(t) \quad \Longrightarrow \quad v_m\, t = x_0^{\mathrm{c}} + v_c\, t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{x_0^{\mathrm{c}}}{v_m - v_c} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{30\,\mathrm{m}}{\frac{130-90}{3.6}\,\mathrm{m/s}} = 2.7\,\mathrm{s}$$

Es. 7: Scontro fra carrelli

Due carrelli di massa $m_1 = 150\,\text{Kg}$ e $m_2 = 350\,\text{Kg}$ viaggiano su un binario uno contro l'altro con velocità $v_1 = 6\,\text{m/s}$ e $v_2 = 4\,\text{m/s}$ rispettivamente, fino a scontrarsi. Dopo l'urto, restano attaccati ma continuano a muoversi. Determinare la velocità (modulo e verso) del sistema dei due carrelli dopo l'urto.

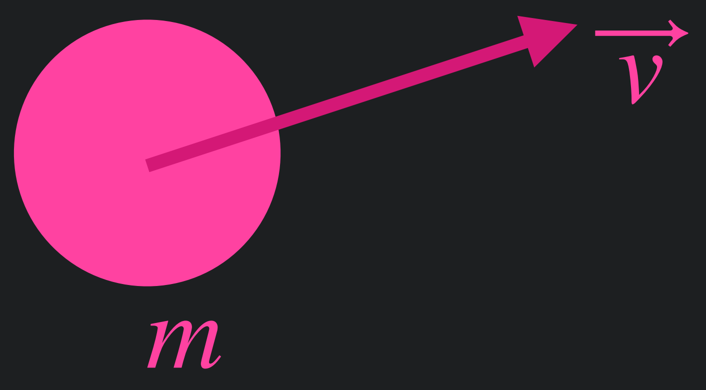
Per risolvere il problema, ci servono due leggi di conservazione:

1) Conservazione della massa $\Longrightarrow$ $M = m_1 + m_2$ Ovvero i carrelli non si sbrandellano (incredibilmente) nell'impatto rinomino le quantità per comodità

2) Conservazione della Quantità di Moto $\Longrightarrow$ $\vec{P}^{\text{iniziale}}_{\text{totale}} = \vec{P}^{\text{finale}}_{\text{totale}} \rightarrow \vec{P}_{\text{i}} = \vec{P}_{\text{f}}$

Es. 7: Scontro fra carrelli

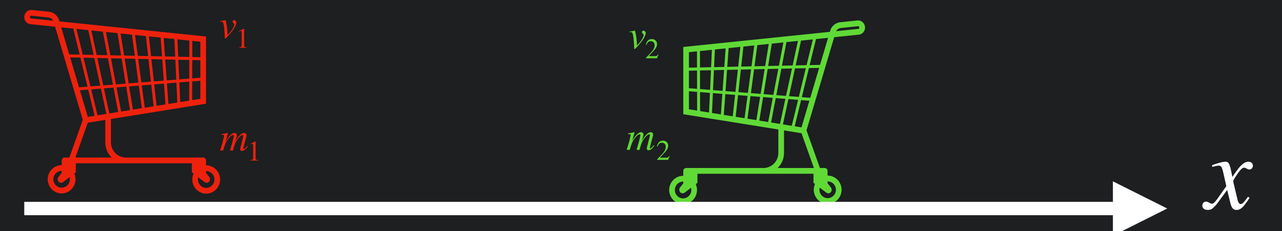
Com'è definita la quantità di moto di un corpo?



$\vec{p} = ? \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} \equiv m\,\vec{v}$ Definizione della quantità di moto

Nel nostro caso tutta la dinamica si svolge lungo un unica direzione, quindi…?

$\Longrightarrow$ possiamo considerare solo componente orizzontale x dei vettori!



Quantità di moto iniziale P_i:

$$P_\mathrm{i} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Quantità di moto finale P_f:

$$P_\mathrm{f} = Mv = (m_1 + m_2)\,v$$

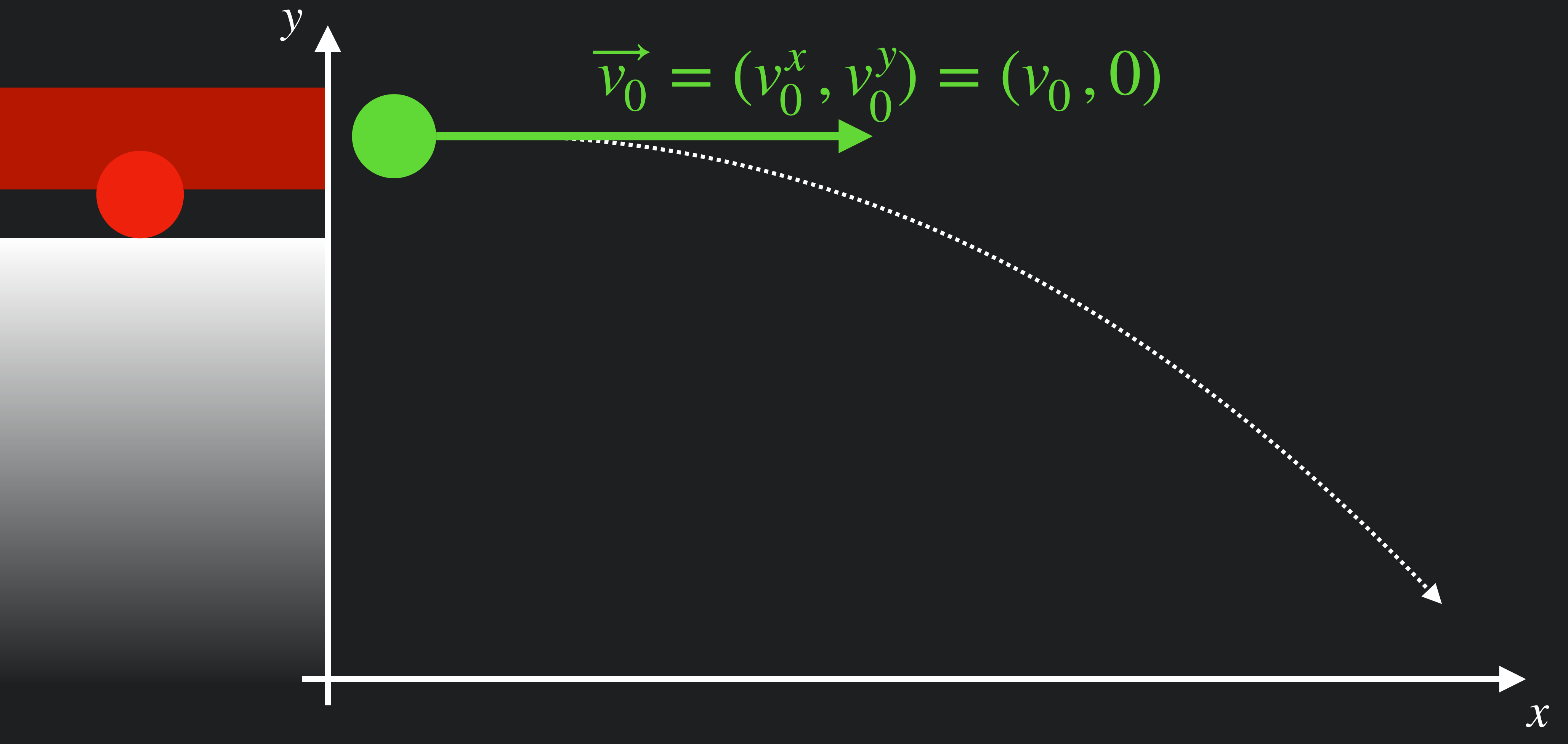
$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f} \Longrightarrow Mv = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Longrightarrow v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v = \frac{150\,\mathrm{Kg}\cdot 6\,\mathrm{m/s} - 350\,\mathrm{Kg}\cdot 4\,\mathrm{m/s}}{150\,\mathrm{Kg} + 350\,\mathrm{Kg}} = \frac{-500\,\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m/s}}{500\,\mathrm{Kg}} = -1\,\mathrm{m/s}$$

$v > 0 \Longrightarrow$ si muovono verso?

Es. 8: Energia di un proiettile

Un proiettile di massa $m = 2.4\,\mathrm{Kg}$ viene sparato da una quota di $h = 125\,\mathrm{m}$ sopra il suolo con velocità iniziale di $v_0 = 150\,\mathrm{m/s}$. Ignorando la resistenza dell'aria, calcolare: (a) l'energia cinetica del proiettile al momento dello sparo; (b) l'energia potenziale; e (c) la velocità del proiettile nel momento del suo impatto a terra.



(a) Energia cinetica al momento dello sparo

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.4\,\mathrm{Kg} \cdot (150\,\mathrm{m/s})^2 = 2.7 \cdot 10^4 \,\frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 2.7 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$$

(b) Energia potenziale al momento dello sparo

$$U_i = mgh = 2.4\,\mathrm{Kg} \cdot 9.8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 125\,\mathrm{m} = 2.9 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 2.9 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$$

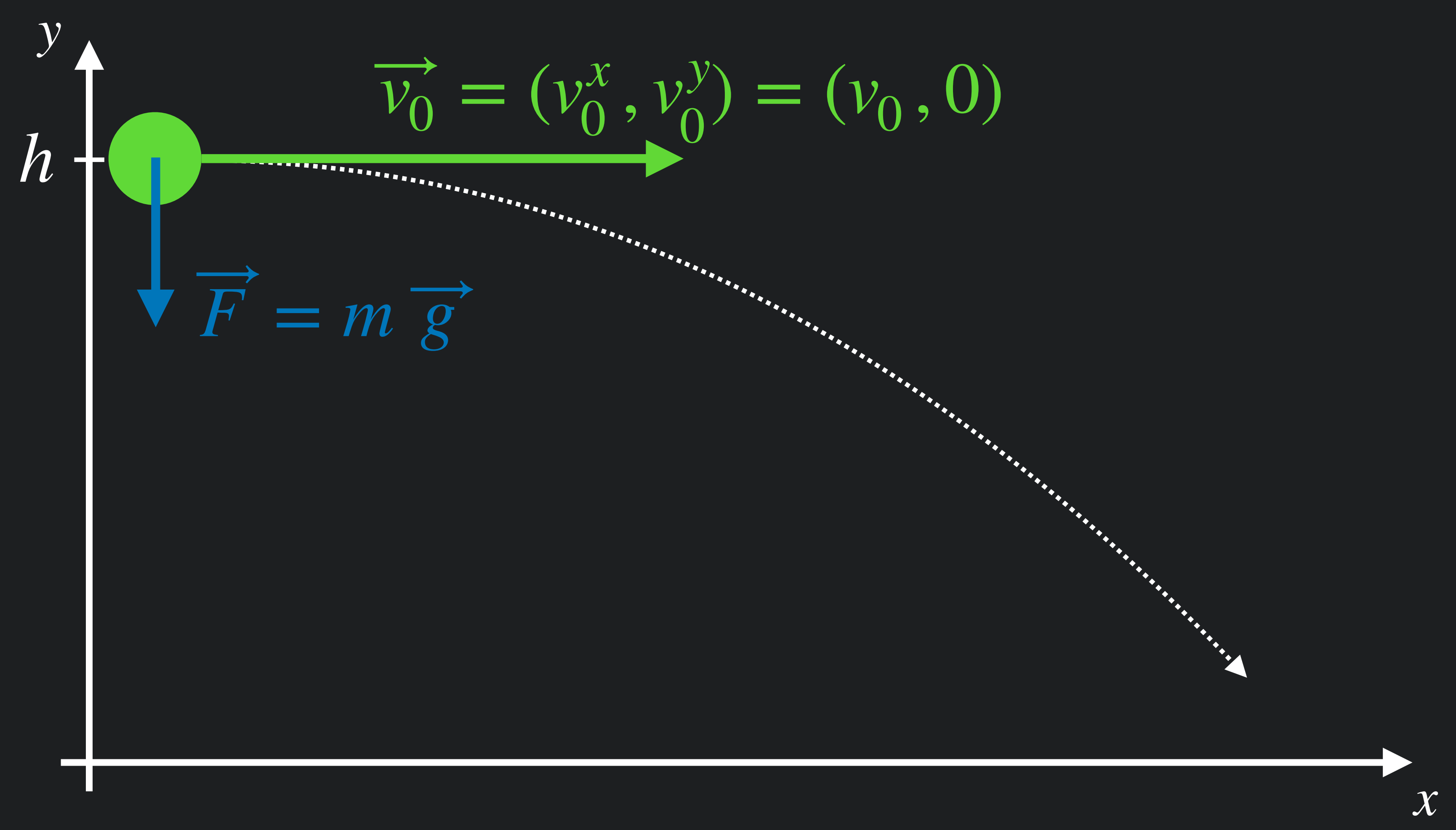
(c) Velocità del proiettile al momento dell'impatto

$$U_i + K_i = U_f + K_f \implies U_i + K_i = 0 + \frac{1}{2} m v_f^2 \implies v_f = \sqrt{\frac{2(U_i + K_i)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (27 + 2.9) \cdot 10^3\,\mathrm{J}}{2.4\,\mathrm{Kg}}} = 157.8\,\mathrm{m/s}$$

Possiamo arrivare allo stesso risultato in un altro modo?

Si! Usando le Eq. del moto, let's try...

Es. 8: Energia di un proiettile



Scomponiamo le forze lungo gli assi (x, y) :

$$F_x = 0 \implies a_x = 0 \implies v_x(t) = v_0^x + \cancel{a_x t}$$

$$F_y = -mg \implies a_y = -g \implies v_y(t) = \cancel{v_0^y} + a_y t$$

Quando arriva a terra il proiettile?

$$y(t) = y_0 + v_0^y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \implies y(t_f) = h - \frac{1}{2} g\, t_f^2 = 0 \implies t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La velocità è un vettore

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$$

Il cui modulo è dato da

calcolato a $t = t_f$

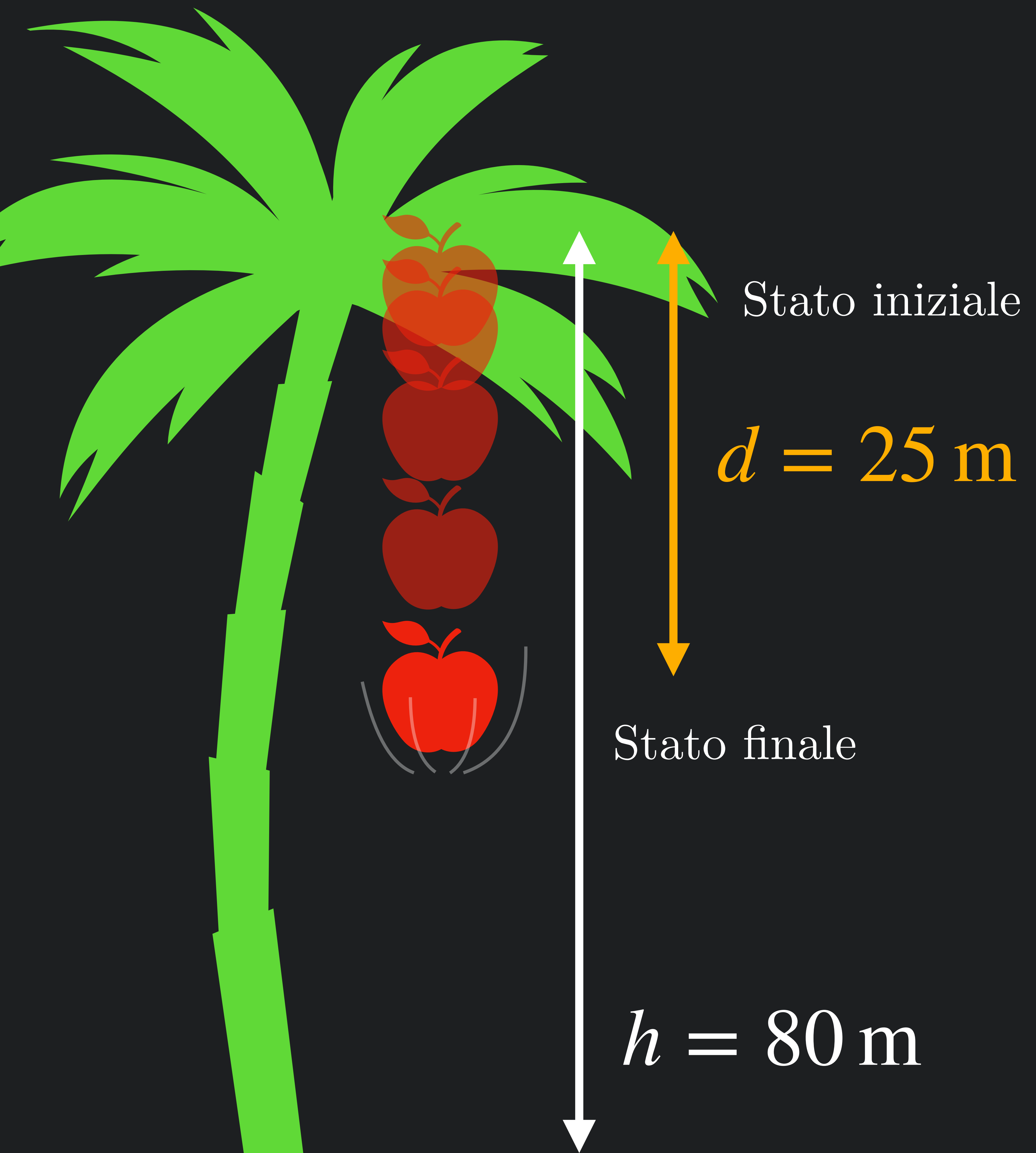
$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{(v_0^x)^2 + (-gt)^2} = \sqrt{(v_0^x)^2 + g^2 \frac{2h}{g}} = \sqrt{(150\,\mathrm{m/s})^2 + \frac{2 \cdot 125\,\mathrm{m/s}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}}$$

$$= \sqrt{(150\,\mathrm{m/s})^2 + 9.81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2 \cdot 125\,\mathrm{m}} = 157.9\,\mathrm{m/s}$$

È uguale!
La piccola differenza è dovuta al numero di cifre decimali usate nei calcoli. Be careful!

Es. 9: Energia di un corpo in caduta

Un corpo è lasciato cadere da $h = 80\,\text{m}$ di altezza. Calcolare il rapporto tra la sua energia potenziale e quella cinetica quando ha percorso $d = 25\,\text{m}$.



Abbiamo due energie in gioco, quella cinetica e quella potenziale.

En. potenziale: $U = mgh$

En. cinetica: $K = \frac{1}{2}mv^2$

E è l'energia totale posseduta dal sistema (cinetica + potenziale)

Principio di conservazione dell'energia: $E_{\text{iniziale}} = E_{\text{finale}}$ $\left(\begin{array}{l} \text{iniziale} = t_1 \\ \text{finale} = t_2 \end{array}\right)$

$$E_{\text{iniziale}} = U_{\text{i}} + K_{\text{i}} = mgh + 0$$

$$E_{\text{finale}} = U_{\text{f}} + K_{\text{f}} = mgh_{\text{f}} + \frac{1}{2}mv_{\text{f}}^2 = mg(h - d) + \frac{1}{2}mv_{\text{f}}^2$$

Il problema chiede di calcolare il rapporto fra U e K al tempo t_{f}

$$R = \frac{U_{\text{f}}}{K_{\text{f}}} = \frac{\cancel{m}gh_{\text{f}}}{\frac{1}{2}\cancel{m}v_{\text{f}}^2} = \frac{2g(h - d)}{v_{\text{f}}^2} \qquad v_{\text{f}} = ?$$

Es. 9: Energia di un corpo in caduta

Applichiamo il principio di conservazione dell'energia $E_\mathrm{i} = E_\mathrm{f}$

$$\cancel{m}gh = mg(h - d) + \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 = \cancel{mgh} - mgd + \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 \implies 0 = -mgd + \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 \implies \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 = mgd \implies v_\mathrm{f}^2 = 2gd$$

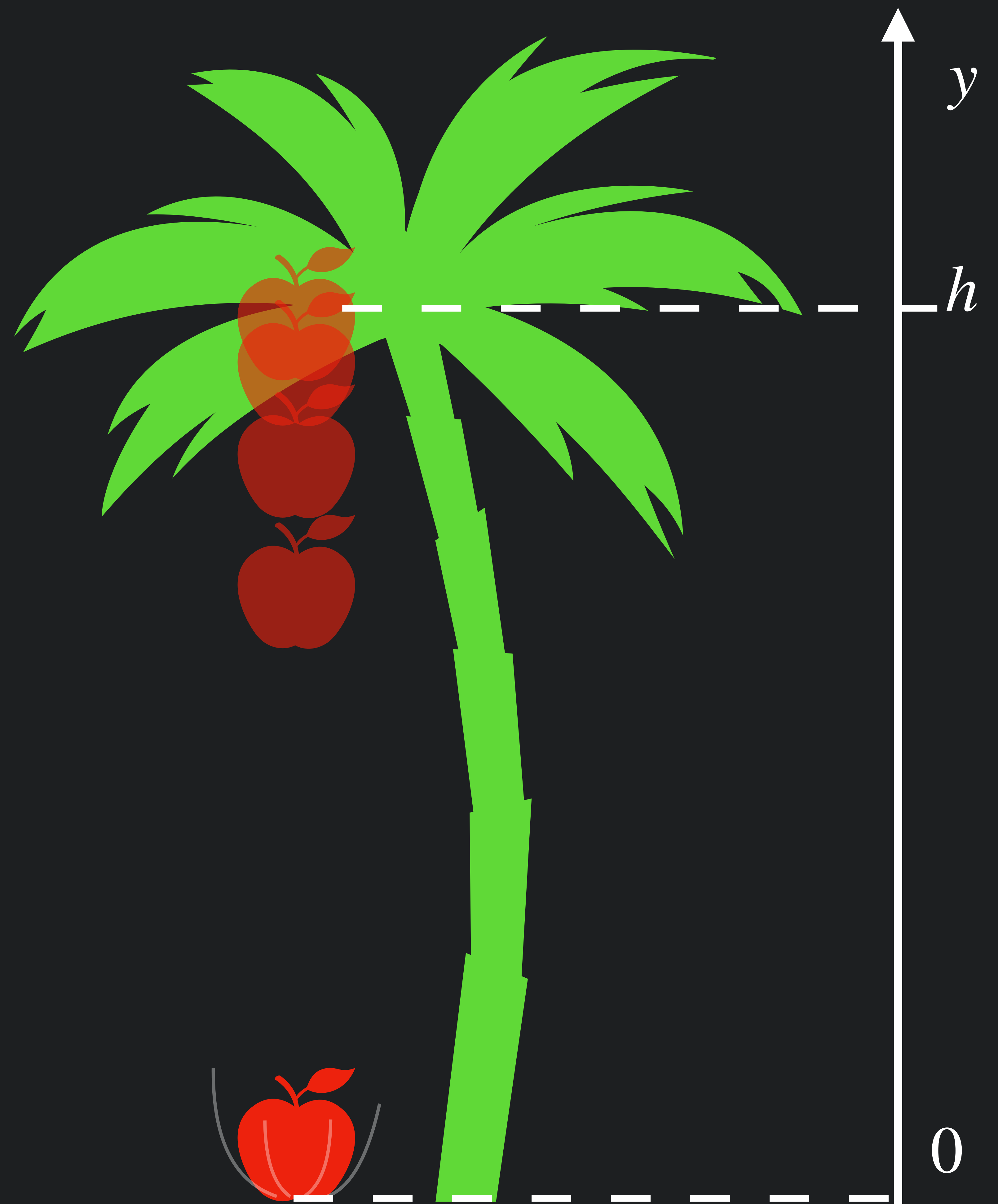
Possiamo sostituire nella formula per il rapporto R

$$R = \frac{2g(h-d)}{v_\mathrm{f}^2} = \frac{2\cancel{g}(h-d)}{2\cancel{g}d} = \frac{80\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m}} = 2.2$$

Se volessimo calcolare la velocità con cui tocca terra?

$$E_{\mathrm{altezza=h}} = E_{\mathrm{altezza=0}}$$

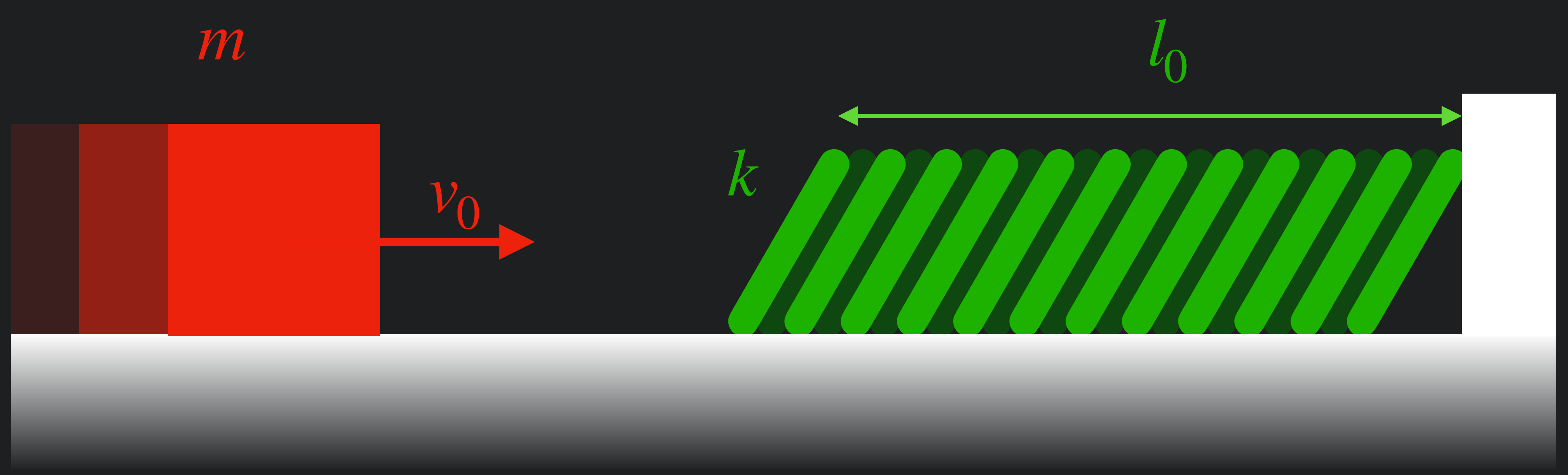
$$\implies \underbrace{mgh}_{U_\mathrm{i}} + \underbrace{0}_{K_\mathrm{i}} = \underbrace{0}_{U_\mathrm{f}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K_\mathrm{f}} \qquad \implies v = \sqrt{2gh}$$



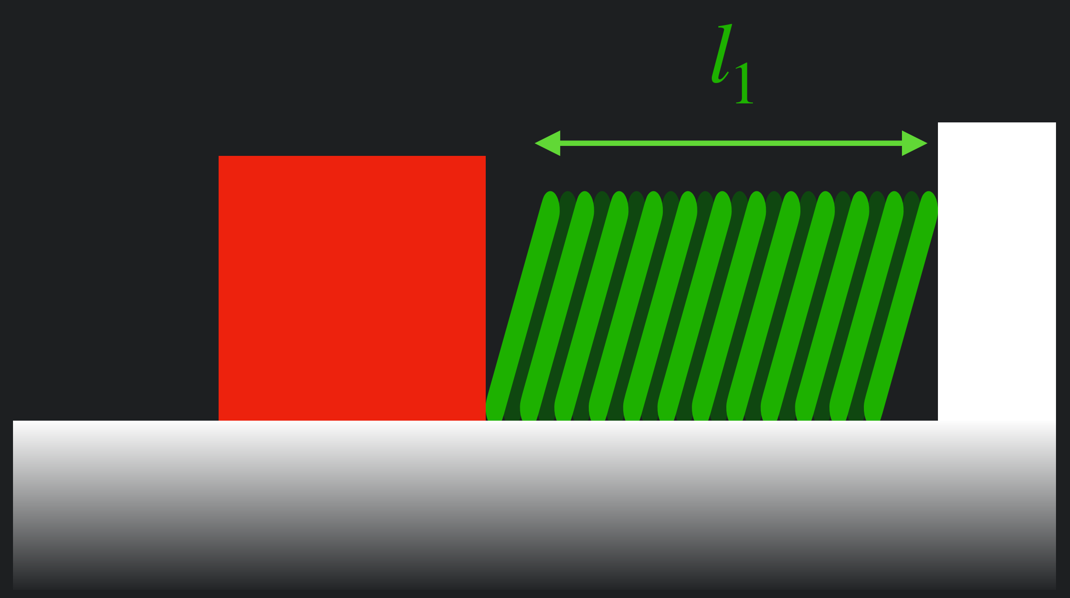
Es. 10: Compressione di una molla

Un blocco di massa $m = 2\,\mathrm{Kg}$, in moto su un piano orizzontale senza attrito con velocità iniziale di $v_0 = 1.2\,\mathrm{m/s}$, urta contro una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 50\,\mathrm{N/m}$. Calcolare la massima compressione della molla dopo l'urto.

$t = t_0$



$t = t_1$



Due modi per risolvere l'esercizio:

1. Conservazione dell'energia

$$E_{t=t_0} = E_{t=t_1}$$

2. Leggi del moto

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

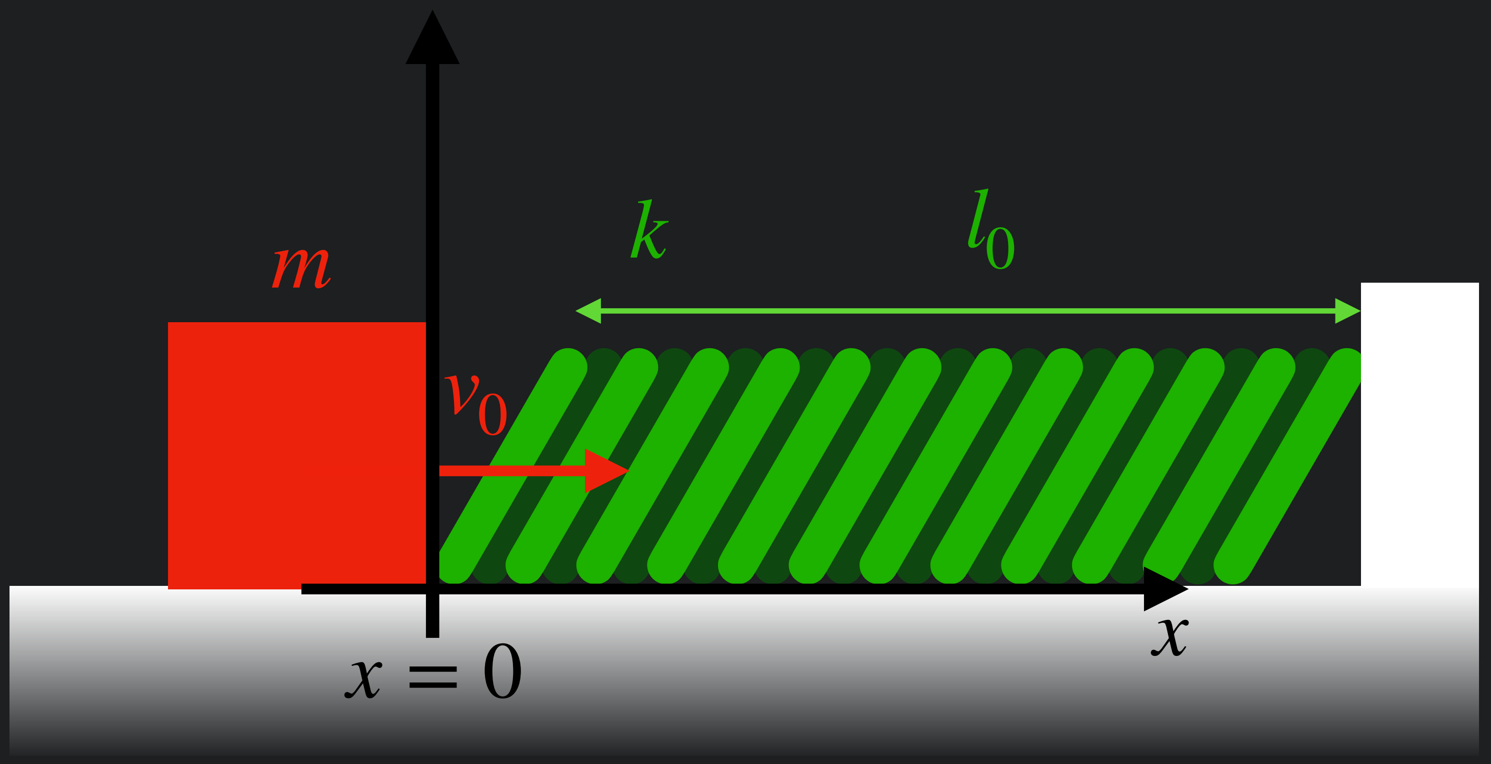
En. al tempo $t = t_0$: $E_{t=t_0} = E_{t_0}^{\text{blocco}} + E_{t_0}^{\text{molla}} = (K_{t_0}^{\text{blocco}} + \cancel{U_{t_0}^{\text{blocco}}}) + (\cancel{K_{t_0}^{\text{molla}}} + \cancel{U_{t_0}^{\text{molla}}}) = K_{t_0}^{\text{blocco}} = \frac{1}{2}mv_0^2$

blocco a quota costante molla ferma molla a quota costante e a lunghezza di riposo l_0

En. al tempo $t = t_1$: $E_{t=t_1} = E_{t_1}^{\text{blocco}} + E_{t_1}^{\text{molla}} = U_{t_0}^{\text{molla}} \equiv \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l_1)^2$ Energia potenziale elastica

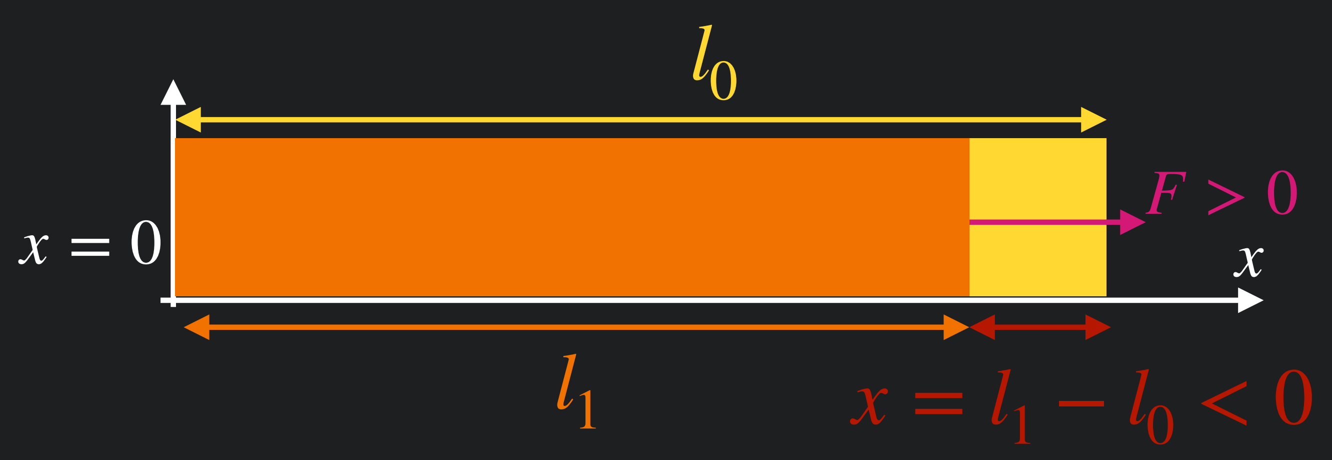
$$E_{t=t_0} = E_{t=t_1} \implies mv_0^2 = k(\Delta l)^2 \implies \Delta l = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Kg}\cdot(1.2)^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{50\,\mathrm{N/m}}} = \sqrt{\frac{0.057\,\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot\mathrm{m^2}/\cancel{\mathrm{s^2}}}{(\cancel{\mathrm{Kg}}\cdot\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s^2}})/\cancel{\mathrm{m}}}} = 0.24\,\mathrm{m}$$

Es.10: Compressione di una molla



Legge di Hooke:

$F = -kx$ segno opposto rispetto a x !



x è la compressione o estensione della molla rispetto alla sua lunghezza di riposo

Eq. di Newton applicata lungo l'asse x

$$F = ma \implies -kx = ma \implies -kx = m\frac{dx^2}{dt^2} \implies \frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \implies x(t) = A\sin(\sqrt{k/m}\cdot t + \phi)$$

Condizioni iniziali a $t = 0$

$$x(t=0) = 0 \implies x(0) = A\sin(\phi) = 0 \implies \phi = 0$$

$$v(t=0) = v_0 \implies v(0) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(0) = v_0 \implies A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{k/m}\cdot t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2\sin(\sqrt{k/m}\cdot t + \phi)$$

$$= -\frac{k}{m}x(t)$$

Massima compressione quando il corpo si ferma, ovvero $v(t) = 0$

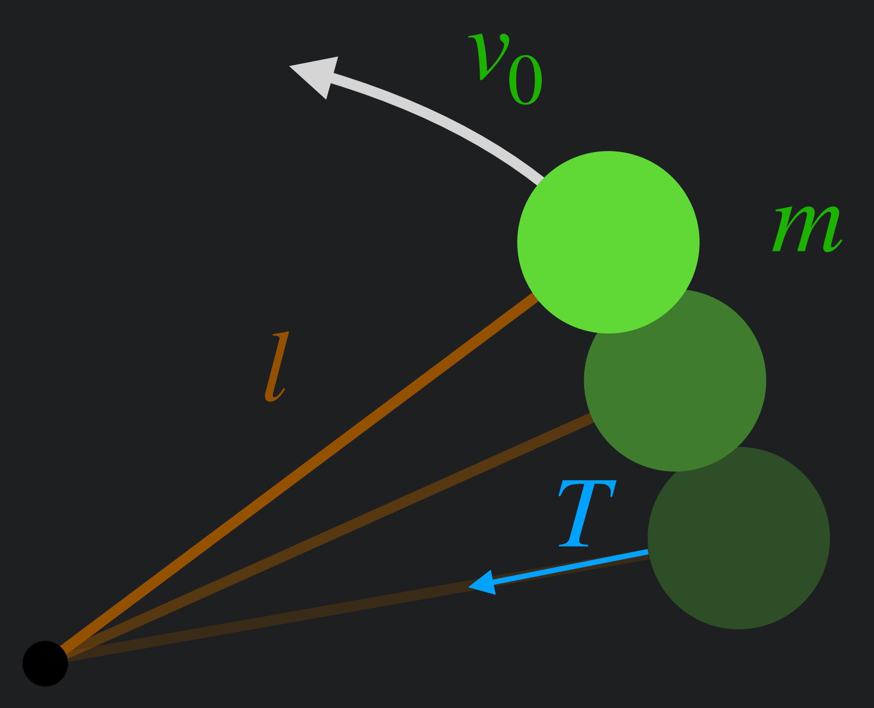
$$v(t_f) = 0 = v_0\cos(\sqrt{k/m}\cdot t_f) = 0 \implies \sqrt{\frac{k}{m}}t_f = \frac{\pi}{2} \implies t_f = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\implies x(t_f) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}$$

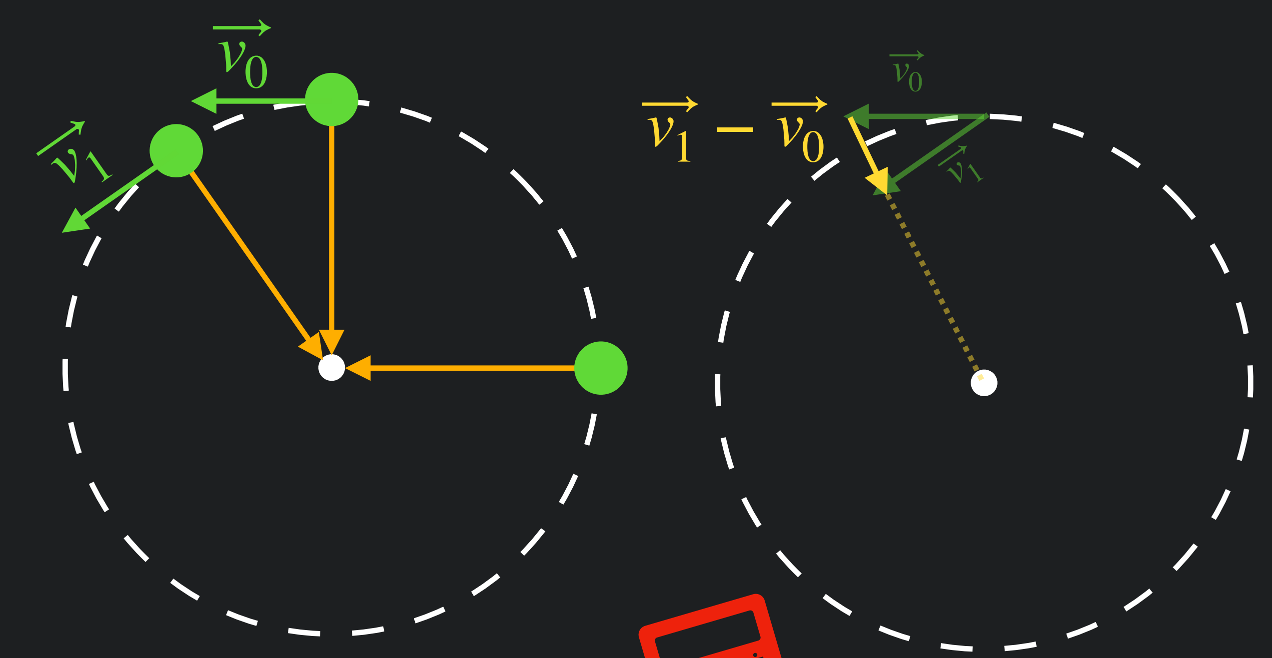
Esattamente come prima!

Es. 11: Aste in rotazione

Una massa di $m = 300\,\text{g}$ attaccata ad un filo lungo $l = 1.5\,\text{m}$ viene posta in rotazione lungo una circonferenza orizzontale ad una velocità di $v_0 = 6\,\text{m/s}$. Calcolare l'accelerazione centripeta della massa, e tensione del filo.



Cosa tiene il corpo in moto lungo la circonferenza? $\implies$ Forza centripeta!



1) Diretta verso il centro

2) $|\vec{F}_c| = \dfrac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ $\qquad v = \omega r$

ω velocità angolare [rad/s]

r raggio della circonferenza

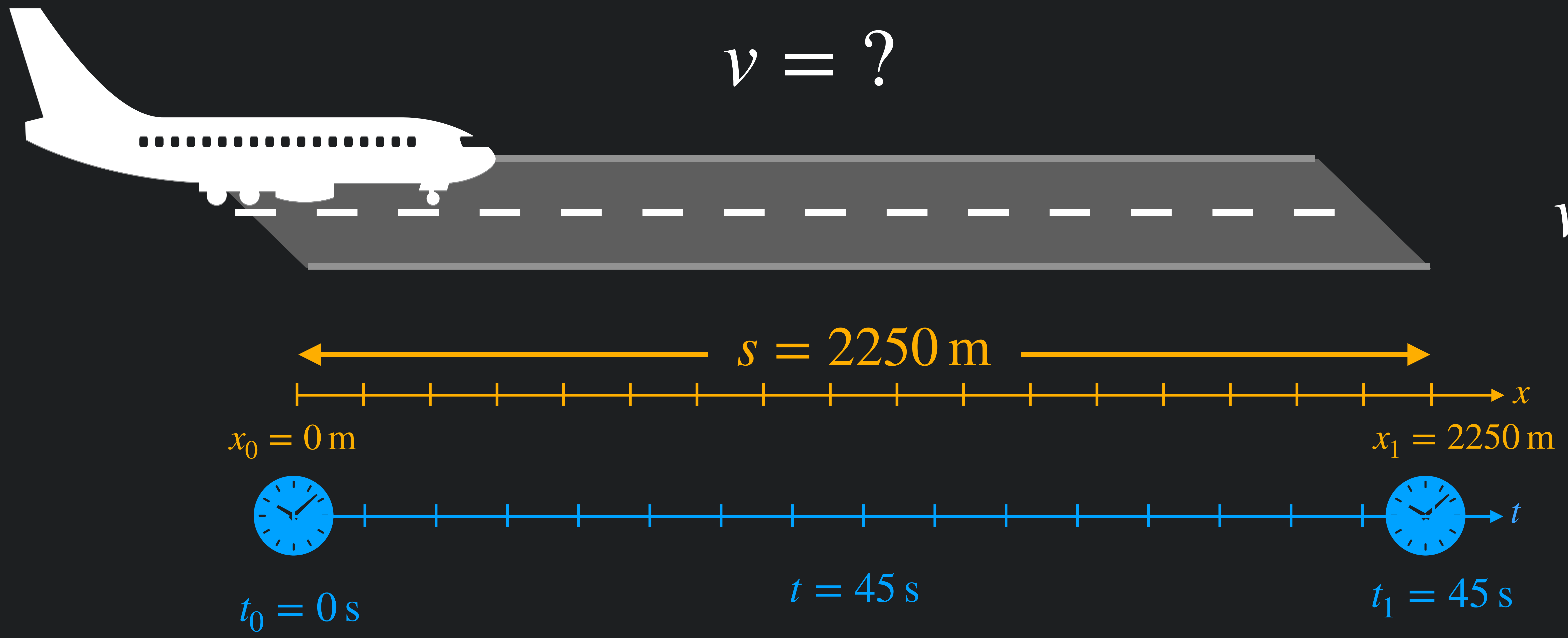
$$F = F_c = ma \implies ma = m\frac{v^2}{r} \implies a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2}{l} = 24\,\text{m/s}^2$$

Ma cosa sta effettivamente esercitando la forza sulla massa m, così da tenerla in traiettoria? $\implies$ Il filo in tensione!

$$T = F_c = m\frac{v_0^2}{l} = 0.3\,\text{Kg} \cdot 24\,\text{m/s}^2 = 7.2\,\text{N}$$

Extra\ Es. 12: Aereo al decollo

Un aereo in fase di decollo percorre sulla pista 2250 m in 45 s. Qual è la velocità con cui l'aereo si stacca dal suolo in km/h?



Forma differenziale — Forma macroscopica

$$v \equiv \dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} \rightarrow v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{2250\,\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s}} = 50\,\mathrm{m/s}$$

$$= 50 \cdot 3.6\,\mathrm{km/h}$$

$$= 180\,\mathrm{km/h}$$

$$1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s} \rightarrow 1\,\mathrm{s} = \frac{1}{3600}\,\mathrm{h}$$

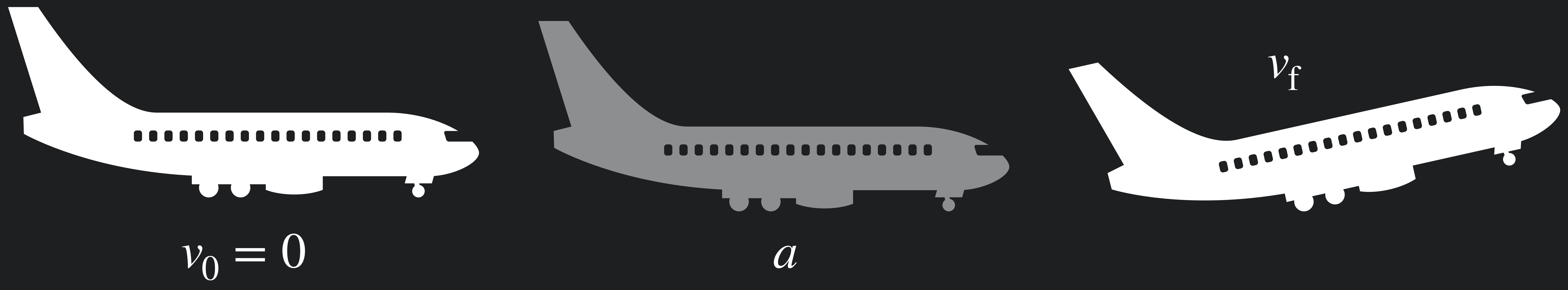
$$1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m} \rightarrow 1\,\mathrm{m} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{km}$$

$$\longrightarrow \mathrm{m/s} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{36000}\,\mathrm{h}} = \frac{3600\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{h}} = 3.6\,\mathrm{km/h}$$

NOTA BENE: abbiamo assunto una velocità costante lungo in tragitto!

Extra\ Es. 12: Aereo al decollo

Ma non è proprio ciò che succede quando un aereo decolla… $\Longrightarrow$ Moto uniformemente accelerato



Scriviamo l'eq moto (aka legge oraria):

$$x(t) = \underbrace{\cancel{x_0}}_{=0} + \underbrace{\cancel{v_0}}_{=0}\, t + \frac{1}{2} a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2\, x(t_f)}{t_f^2} \quad = \frac{2 \cdot 2250\,\mathrm{m}}{(45\,\mathrm{s})^2} = 2.2\,\mathrm{m/s^2}$$

Ora calcoliamo la velocità al decollo

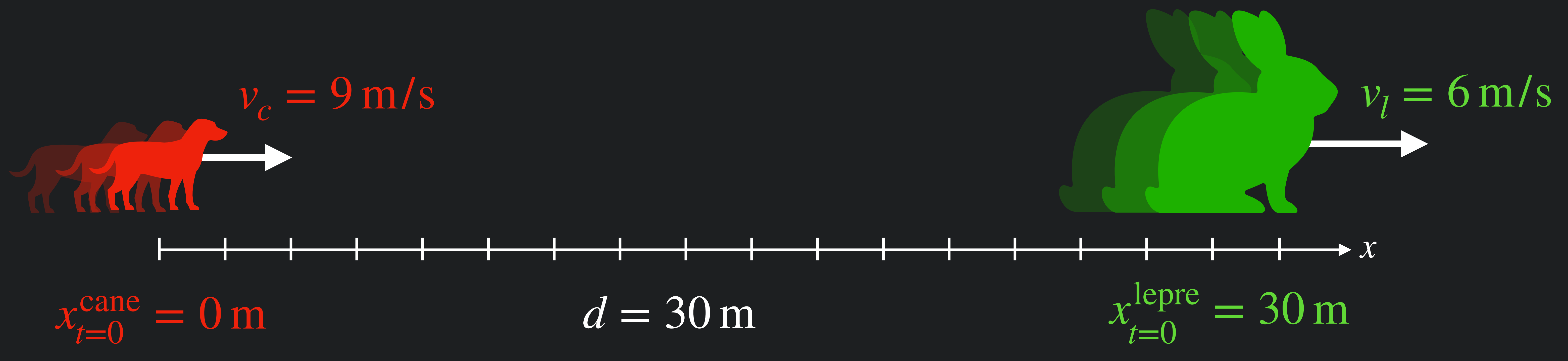
$$v(t) = \underbrace{\cancel{v_0}}_{=0} + a\, t \quad \Longrightarrow \quad v(t_f) = a\, t_f \quad = \frac{2\, x(t_f)}{t_f^2}\, t_f = \frac{2\, x(t_f)}{t_f} \quad = \frac{2 \cdot 2250\,\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s}} = 100\,\mathrm{m/s}$$

$$= 100 \cdot 3.6\,\mathrm{km/h} = 360\,\mathrm{km/h}$$

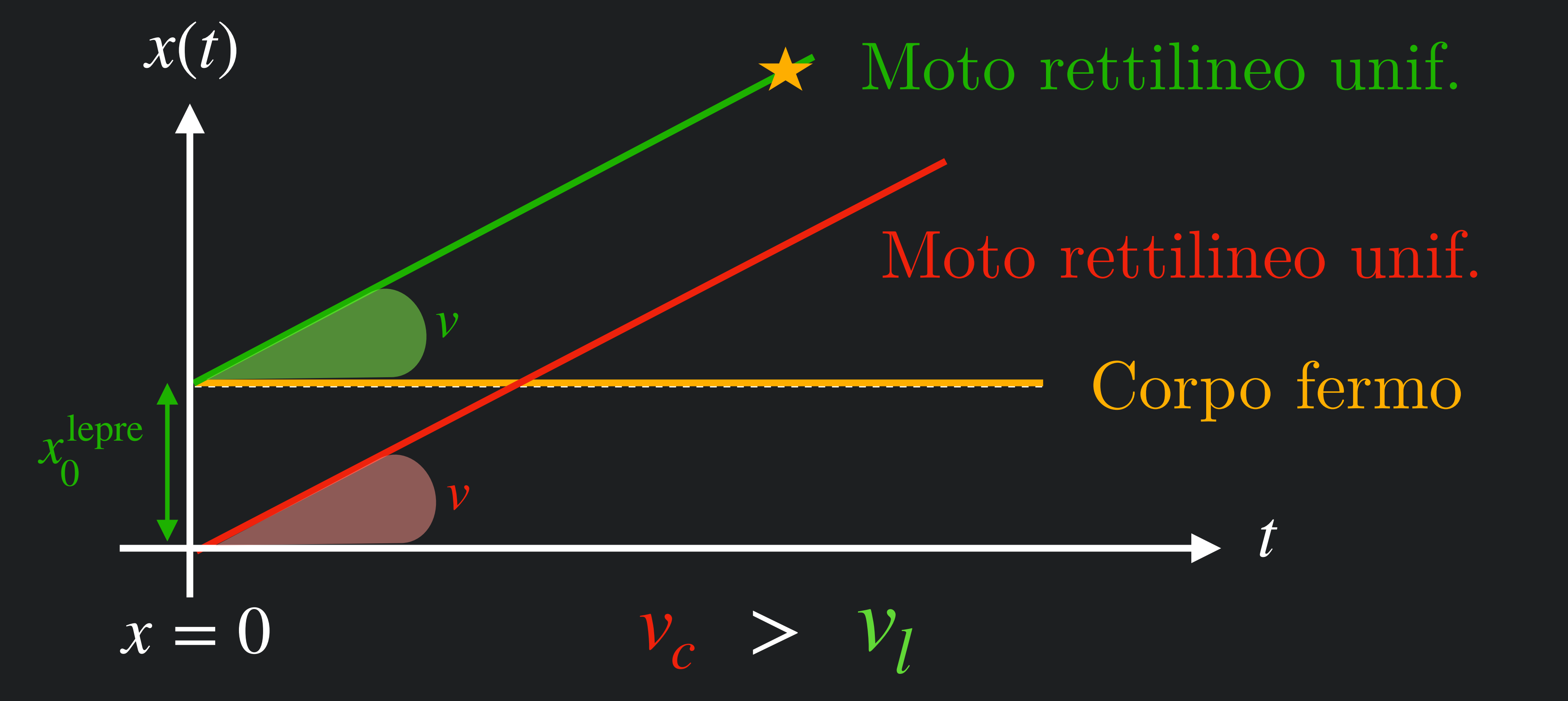
Possiamo sostituire il valore numerico (😒)
oppure la formula analitica per a (😍)

Extra\ Es. 13: Il cane e la lepre

Un cane corre alla velocità di 9 m/s dietro una lepre che scappa a 6 m/s. La distanza iniziale tra i due è di 30 m. Il cane riuscirà a raggiungere la lepre? Se si, dopo quanto tempo questo avviene (assumendo velocità costanti)?



I due animali s'incontreranno?



$v_c > v_l$

$\implies$ Si incontreranno! :(

Eqs. del moto per i due animali:

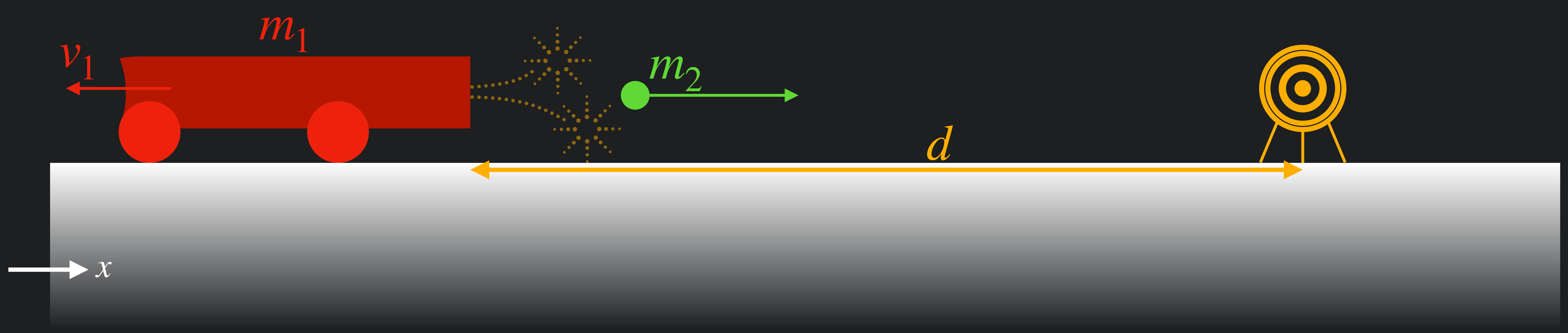
$$x^{\text{cane}}(t) = v_c\, t$$

$$x^{\text{lepre}}(t) = x_0^{\text{lepre}} + v_l\, t$$

$$x^{\text{cane}}(t) = x^{\text{lepre}}(t) \implies v_c\, t = x_0^{\text{lepre}} + v_l\, t \implies t = \frac{x_0^{\text{lepre}}}{v_c - v_l} \implies t = \frac{30\,\mathrm{m}}{(9-6)\,\mathrm{m/s}} = 10\,\mathrm{s}$$

Extra\ Es. 14: Proiettile e cannone

Un proiettile di massa $m_2 = 200\,\mathrm{g}$ viene sparato da un cannone di massa $m_1 = 500\,\mathrm{Kg}$. Sapendo che il cannone rincula con una velocità $v_2 = 12\,\mathrm{cm/s}$, dopo quanto tempo il proiettile colpirà il bersaglio posto ad una distanza di $d = 100\,\mathrm{m}$?



Perché il cannone rincula?

$$P_\mathrm{i} = 0 \qquad P_\mathrm{f} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f} \implies 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \implies m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$m_1, m_2 > 0 \implies v_1 \sim -v_2 \implies v_1 < 0$$

Applichiamo la conservazione della quantità di moto

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f} \implies 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \implies m_1 v_1 = -m_2 v_2 \implies v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$\implies v_2 = -\frac{500\,\mathrm{Kg}}{200\,\mathrm{g}} \cdot (-12\,\mathrm{cm/s})$$

$$= \frac{500\,\mathrm{Kg}}{200 \cdot \frac{1}{1000}\,\mathrm{Kg}} \cdot 12 \cdot \frac{1}{100}\,\mathrm{m/s}$$

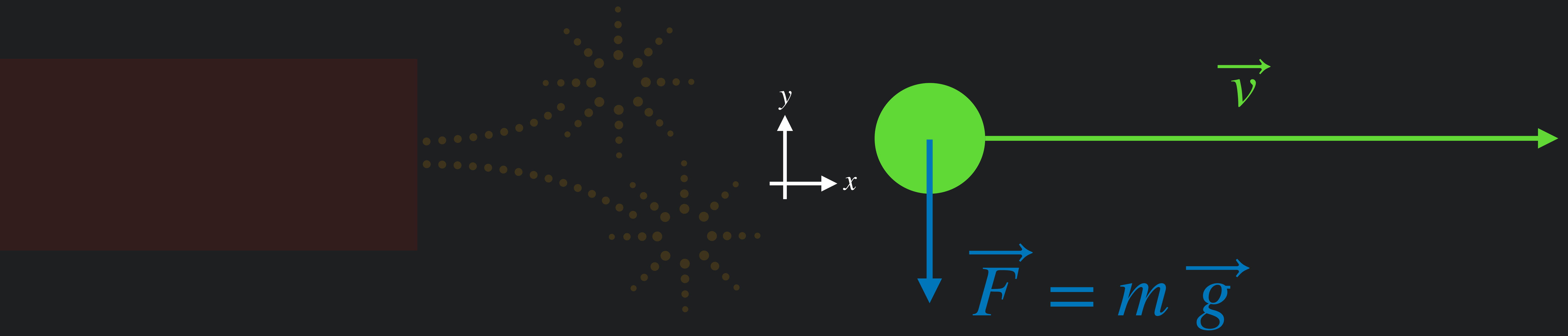
$$= \frac{500\,\mathrm{Kg} \cdot 12\,\mathrm{m/s}}{20\,\mathrm{Kg}} = 300\,\mathrm{m/s}$$

Ora abbiamo tutto per calcolare il tempo d'arrivo

$$t = \frac{d}{v_2} = \frac{100\,\mathrm{m}}{300\,\mathrm{m/s}} \approx 0.33\,\mathrm{s}$$

Domanda: abbiamo ignorato la forza di gravità. Per quale motivo?

Extra\ Es. 14: Proiettile e cannone



Scomponiamo le forze lungo gli assi (x, y) :

$$F_x = 0 \implies a_x = 0$$

$$F_y = -mg \implies a_y = -g$$

$\uparrow$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Legge di Newton

$$x(t) = \underbrace{\cancel{x_0}}_{=0} + v_{0,x}\,t + \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{a_x}}_{=0}\,t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0,y}\,t + \frac{1}{2}a_y\,t^2$$

Ciò che accade lungo y è indipendente da ciò che accade lungo x