NP-Vollständigkeit von Hamiltonian Cycles

Vertex Cover

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+$ mit $K \leq |V|$.
Ausgabe: Existiert ein *Vertex Cover* der Größe maximal K für G?
D. h. eine Menge $V' \subseteq V$ mit

- $|V'| \leq K$
- $\forall \{u, v\} \in E : \; u \in V' \quad \vee \quad v \in V'$

Hamiltonian Cycle

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Enthält G einen *Hamiltonian Cycle*?
D. h. eine Knoten-Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

$$n = |V|; \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i < n : \; \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ und } \{v_n, v_1\} \in E$$

Konstruktion Vertex Cover $\preceq_L$ Hamiltonian Cycle

Eingabe: Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+, K \leq |V|$
Ausgabe: Graph $G' = (V', E')$, sodass

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \iff G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

$$V' = \underbrace{\{a_i \mid 1 \leq i \leq K\}}_{\text{Selektor}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{e=\{u,v\}\in E} V'_e \right)}_{\text{Cover-Testing}} \qquad E' = \underbrace{\left(\bigcup_{e=\{u,v\}\in E} E'_e \right)}_{\text{Cover-Testing}} \cup \left(\bigcup_{v \in V} E'_v \right) \cup E''$$

$$V'_e = \{(u, e, i), (v, e, i) \mid 1 \leq i \leq 6\}$$

$$\begin{aligned}
E'_e = &\Big\{ \{(u, e, i), (u, e, i+1)\}, \{(v, e, i), (v, e, i+1)\} \mid 1 \leq i \leq 5 \Big\} \\
&\cup \Big\{ \{(u, e, 3), (v, e, 1)\}, \{(v, e, 3), (u, e, 1)\} \Big\} \\
&\cup \Big\{ \{(u, e, 6), (v, e, 4)\}, \{(v, e, 6), (u, e, 4)\} \Big\}
\end{aligned}$$

$$E'_v = \Big\{ \{(v, e_{v[i]}, 6), (v, e_{v[i+1]}, 1)\} \mid 1 \leq i < deg(v) \Big\}$$

$$E'' = \Big\{ \{a_i, (v, e_{v[1]}, 1)\}, \; \{a_i, (v, e_{v[deg(v)]}, 6)\} \mid 1 \leq i \leq K, v \in V \Big\}$$