NP-Vollständigkeit von Hamiltonian Cycles

durch Reduktion von Vertex Covern

Stefan Walter

Universität Leipzig
10-202-2112, Complexity Theory

16. Dezember 2019

Literatur

Michael R. Garey und David S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman & Co., 1990. ISBN: 0716710455, Chapter 3.1.4, p. 56 to 60

VERTEX COVER (Knotenüberdeckung)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+$ mit $K \leq |V|$.
Ausgabe: Existiert ein Vertex Cover der Größe maximal K für G?
D. h. eine Menge $V' \subseteq V$ mit

- $|V'| \leq K$
- $\forall \{u, v\} \in E : \; u \in V' \quad \vee \quad v \in V'$

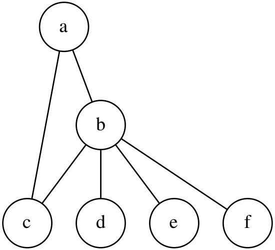
VERTEX COVER (Knotenüberdeckung)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+$ mit $K \leq |V|$.

Ausgabe: Existiert ein Vertex Cover der Größe maximal K für G?

D. h. eine Menge $V' \subseteq V$ mit

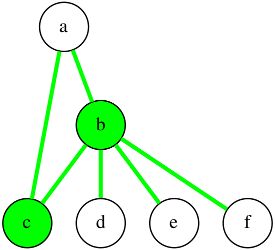
- $|V'| \leq K$
- $\forall \{u, v\} \in E : \; u \in V' \quad \vee \quad v \in V'$



VERTEX COVER (Knotenüberdeckung)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+$ mit $K \leq |V|$.
Ausgabe: Existiert ein Vertex Cover der Größe maximal K für G?
D. h. eine Menge $V' \subseteq V$ mit

- $|V'| \leq K$
- $\forall \{u, v\} \in E : \; u \in V' \quad \vee \quad v \in V'$



Hamiltonian Cycle (Hamiltonkreis)

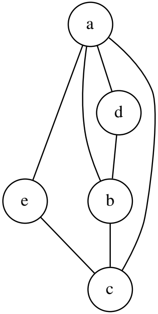
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Enthält G einen Hamiltonian Cycle?
D. h. eine Knoten-Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

- $n = |V|$
- $\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i < n : \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_1\} \in E$

Hamiltonian Cycle (Hamiltonkreis)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Enthält G einen Hamiltonian Cycle?
D. h. eine Knoten-Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

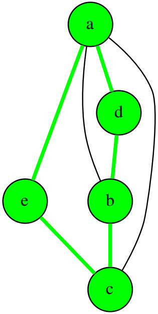
- $n = |V|$
- $\forall\, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i < n: \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_1\} \in E$



Hamiltonian Cycle (Hamiltonkreis)

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$
Ausgabe: Enthält G einen Hamiltonian Cycle?
D. h. eine Knoten-Folge $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ mit

- $n = |V|$
- $\forall\, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i < n: \ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$ und $\{v_n, v_1\} \in E$



Vorgehen beim Zeigen von NP-Vollständigkeit

Vorgehen

- Hamiltonian Cycle $\in NP$
- Hamiltonian Cycle ist NP-schwer:
  $\forall L' \in NP: \; L' \preceq_L$ Hamiltonian Cycle

Notizen:

- hier mit Vertex Cover $\preceq_L$ Hamiltonian Cycle
- Annahme: Vertex Cover ist NP-vollständig

Beweisidee

Beweisidee.

HAMILTONIAN CYCLE $\in NP$:

- rate Knotenfolge $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^{|V|}$ nichtdeterministisch
- teste, ob Folge die Bedingung erfüllt
  $\Rightarrow$ polynomiell

Reduktion

NP-schwer: Vertex Cover $\preceq_L$ Hamiltonian Cycle
Eingabe: Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+, K \leq |V|$
Ausgabe: Graph $G' = (V', E')$, sodass

$$(G, K) \in \text{Vertex Cover} \iff G' \in \text{Hamiltonian Cycle}$$

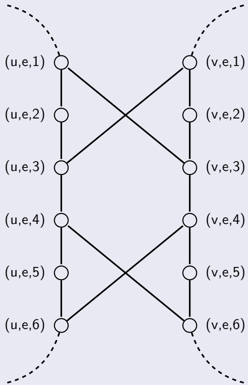
Konstruktions-Idee

- K „Selektor“-Knoten $a_1, a_2, \ldots, a_K$
- $|E|$ „Cover-Testing“-Komponenten (abgekürzt CTK)

Konstruktions-Idee

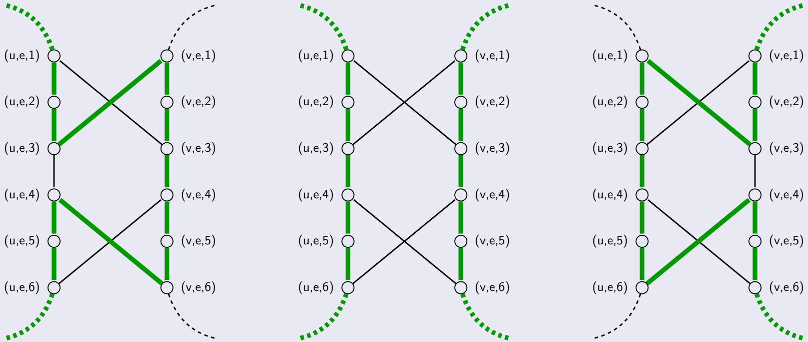
- K „Selektor"-Knoten $a_1, a_2, \ldots, a_K$
- $|E|$ „Cover-Testing"-Komponenten (abgekürzt CTK)

z. B. für $e = \{u, v\} \in E$



Konstruktions-Idee

Pfade durch Cover-Testing-Komponente bei Hamiltonkreis in G':



Vollständige Reduktions-Konstruktion

$G' = (V', E')$ mit

$$V' = \underbrace{\{a_i \mid 1 \leq i \leq K\}}_{\text{Selektor}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{e \in E} V'_e \right)}_{\text{Cover-Testing}}$$

$$E' = \underbrace{\left(\bigcup_{e \in E} E'_e \right)}_{\text{Cover-Testing}} \cup \left(\bigcup_{v \in V} E'_v \right) \cup E''$$

Vollständige Reduktions-Konstruktion

(für $e = \{u, v\} \in E$)

$$V'_e = \{(u,e,i),(v,e,i) \mid 1 \leq i \leq 6\}$$

$$E'_e = \Big\{\{(u,e,i),(u,e,i+1)\},\{(v,e,i),(v,e,i+1)\} \mid 1 \leq i \leq 5\Big\}$$

$$\cup \Big\{\{(u,e,3),(v,e,1)\},\{(v,e,3),(u,e,1)\}\Big\}$$

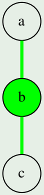
$$\cup \Big\{\{(u,e,6),(v,e,4)\},\{(v,e,6),(u,e,4)\}\Big\}$$

$$E'_v = \Big\{\{(v,e_{v[i]},6),(v,e_{v[i+1]},1)\} \mid 1 \leq i < deg(v)\Big\}$$

$$E'' = \Big\{\{a_i,(v,e_{v[1]},1)\},\ \{a_i,(v,e_{v[deg(v)]},6)\} \mid 1 \leq i \leq K, v \in V\Big\}$$

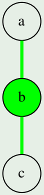
Konstruktion Beispiel $\in VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{\{a, b\}, \{b, c\}\Big\}\Big) \qquad K = 1$$



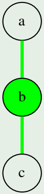
Konstruktion Beispiel $\in VC$

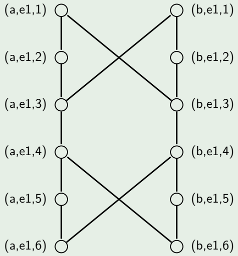
$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \Big\}\Big) \qquad K = 1$$



Konstruktion Beispiel $\in VC$

$$G = (V,E) = \left(\{a,b,c\}, \left\{ \underbrace{\{a,b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b,c\}}_{e_2} \right\}\right) \qquad K = 1$$

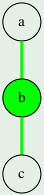


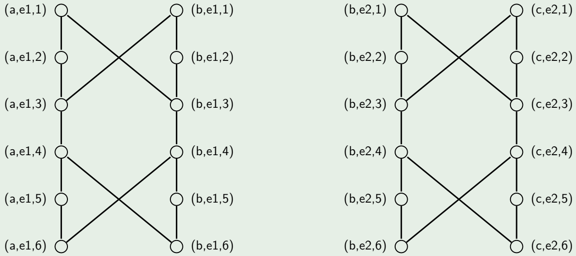


V'_e, E'_e

Konstruktion Beispiel $\in VC$

$$G = (V, E) = \left(\{a, b, c\}, \left\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \right\}\right) \qquad K = 1$$

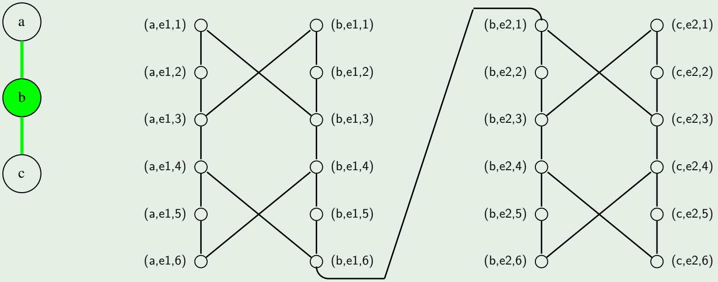




V'_e, E'_e

Konstruktion Beispiel $\in VC$

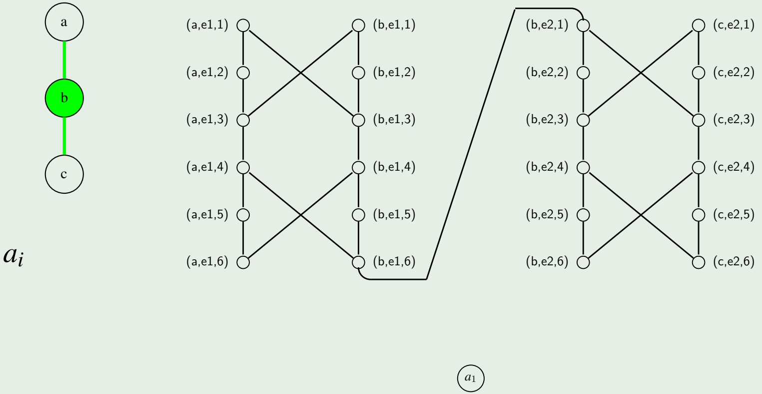
$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \Big\}\Big) \qquad K = 1$$



E'_v

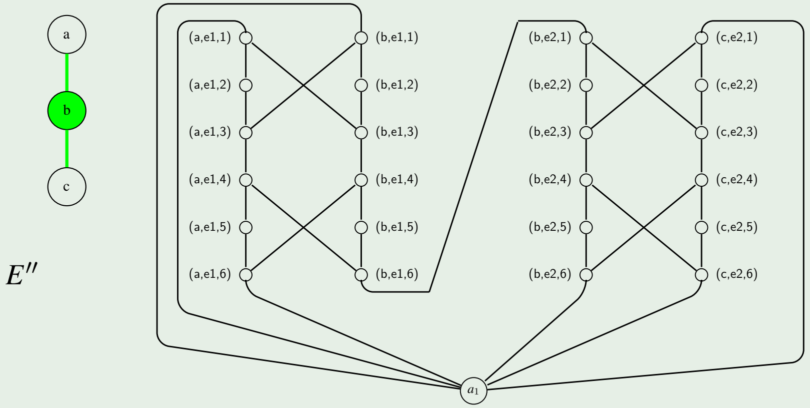
Konstruktion Beispiel $\in VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \Big\}\Big) \qquad K = 1$$



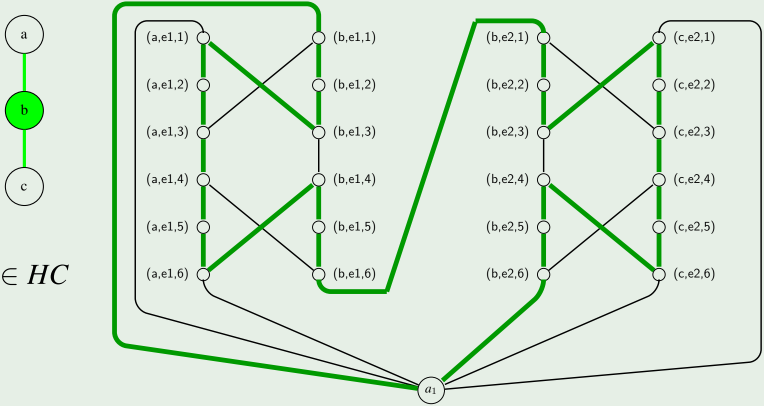
Konstruktion Beispiel $\in VC$

$$G = (V, E) = \left(\{a, b, c\}, \left\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \right\}\right) \qquad K = 1$$



Konstruktion Beispiel $\in VC$

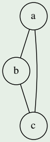
$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2} \Big\}\Big) \qquad K = 1$$



$G' \in HC$

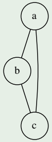
Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V,E) = \Big(\{a,b,c\}, \Big\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}\Big\}\Big) \quad K = 1$$



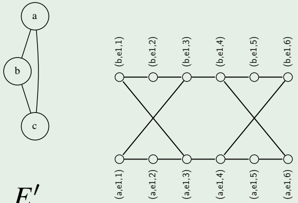
Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \quad K = 1$$



Konstruktion Beispiel $\notin VC$

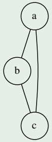
$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \quad K = 1$$

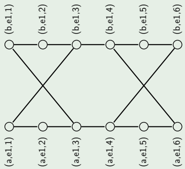


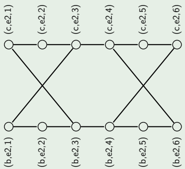
V'_e, E'_e

Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \left(\{a, b, c\}, \left\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \right\}\right) \qquad K = 1$$



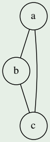


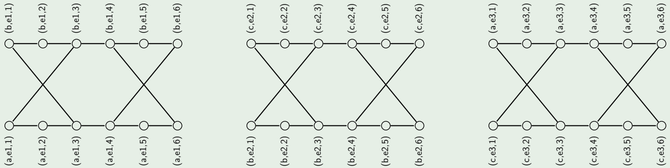


V'_e, E'_e

Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \qquad K = 1$$

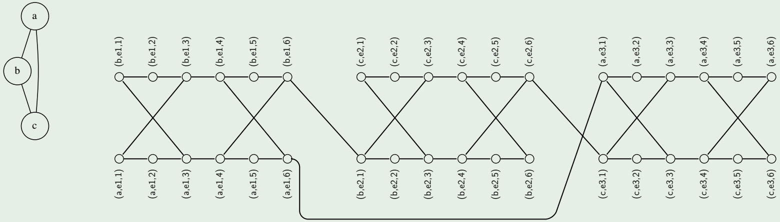




V'_e, E'_e

Konstruktion Beispiel $\notin VC$

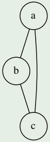
$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \quad K = 1$$



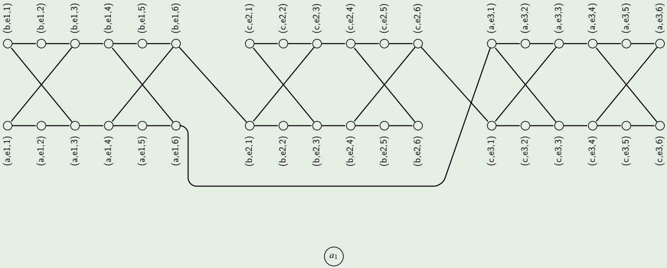
E'_v

Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \left(\{a, b, c\}, \left\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \right\}\right) \quad K = 1$$

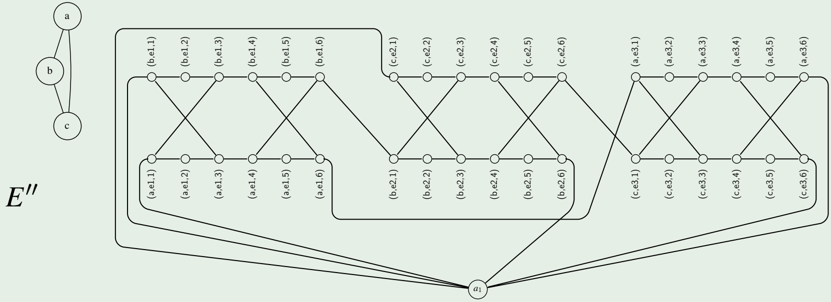


a_i



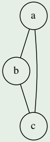
Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a,b,c\}, \Big\{ \underbrace{\{a,b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b,c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c,a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \quad K = 1$$

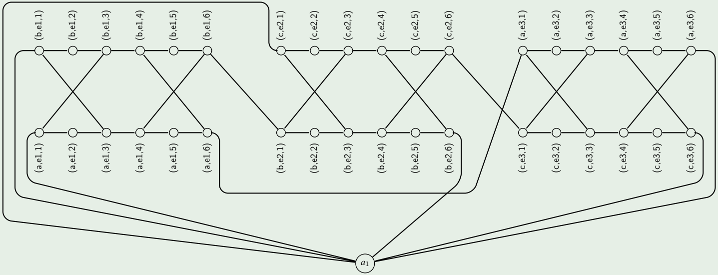


Konstruktion Beispiel $\notin VC$

$$G = (V, E) = \Big(\{a, b, c\}, \Big\{ \underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, a\}}_{e_3} \Big\}\Big) \quad K = 1$$



$G' \notin HC$



Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

- Konstruktion von G' aus G und K in logarithmischem Platz
- Klarmachen, dass Reduktion korrekt ist

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \Longleftarrow G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \Longleftarrow G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \iff G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'. CTKs in G' entsprechen Kanten in G (bijektiv).

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \text{Vertex Cover} \Longleftarrow G' \in \text{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'. CTKs in G' entsprechen Kanten in G (bijektiv). Betrachte alle Teilpfade, die in einem Selektor-Knoten in G' beginnen und enden und zwischendurch keinen solchen beinhalten.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \Longleftarrow G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'. CTKs in G' entsprechen Kanten in G (bijektiv). Betrachte alle Teilpfade, die in einem Selektor-Knoten in G' beginnen und enden und zwischendurch keinen solchen beinhalten. Jeder solche Pfad entspricht bijektiv einem Knoten in G; und alle darauf liegenden CTKs entsprechen genau den an diesem Knoten anliegenden Kanten in G.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \text{Vertex Cover} \impliedby G' \in \text{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'. CTKs in G' entsprechen Kanten in G (bijektiv). Betrachte alle Teilpfade, die in einem Selektor-Knoten in G' beginnen und enden und zwischendurch keinen solchen beinhalten. Jeder solche Pfad entspricht bijektiv einem Knoten in G; und alle darauf liegenden CTKs entsprechen genau den an diesem Knoten anliegenden Kanten in G. Da im Hamiltonkreis alle Knoten in G' enthalten sind (damit auch alle CTKs), sind in G alle den CTKs entsprechenden Kanten durch die entsprechenden Knoten erreichbar.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \Longleftarrow G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Existiere ein Hamiltonkreis in G'. CTKs in G' entsprechen Kanten in G (bijektiv). Betrachte alle Teilpfade, die in einem Selektor-Knoten in G' beginnen und enden und zwischendurch keinen solchen beinhalten. Jeder solche Pfad entspricht bijektiv einem Knoten in G; und alle darauf liegenden CTKs entsprechen genau den an diesem Knoten anliegenden Kanten in G. Da im Hamiltonkreis alle Knoten in G' enthalten sind (damit auch alle CTKs), sind in G alle den CTKs entsprechenden Kanten durch die entsprechenden Knoten erreichbar. Also existiert ein Vertex-Cover der Größe maximal K für G.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \implies G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \implies G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Sei $V^* \subseteq V$ ein Vertex-Cover für G mit $|V^*| \leq K$.

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

$$(G, K) \in \textsc{Vertex Cover} \implies G' \in \textsc{Hamiltonian Cycle}$$

Sei $V^* \subseteq V$ ein Vertex-Cover für G mit $|V^*| \leq K$. Sei o.B.d.A. $|V^*| = K$ mit $V^* = \{v_1, v_2, \ldots, v_K\}$ (im Zweifel minimales Cover mit weiteren Knoten auffüllen).

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

Die folgenden Kanten bilden einen Hamiltonkreis:

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

Die folgenden Kanten bilden einen Hamiltonkreis:

- $\forall\, e = \{u, v\} \in E$ die entsprechenden Kanten innerhalb CTKs; je nachdem, ob $\{u, v\} \cap V^*$ gleich $\{u\}$, $\{u, v\}$ oder $\{v\}$ ist (ein Fall trifft immer zu, da V^* Vertex-Cover ist)

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

Die folgenden Kanten bilden einen Hamiltonkreis:

- $\forall\, e = \{u, v\} \in E$ die entsprechenden Kanten innerhalb CTKs; je nachdem, ob $\{u, v\} \cap V^*$ gleich $\{u\}$, $\{u, v\}$ oder $\{v\}$ ist (ein Fall trifft immer zu, da V^* Vertex-Cover ist)
- Verbindungen zwischen den CTKs: $\forall\, 1 \leq i \leq K : \; E'_{v_i}$

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

Die folgenden Kanten bilden einen Hamiltonkreis:

- $\forall\, e = \{u, v\} \in E$ die entsprechenden Kanten innerhalb CTKs; je nachdem, ob $\{u, v\} \cap V^*$ gleich $\{u\}$, $\{u, v\}$ oder $\{v\}$ ist (ein Fall trifft immer zu, da V^* Vertex-Cover ist)
- Verbindungen zwischen den CTKs: $\forall\, 1 \leq i \leq K:\ E'_{v_i}$
- Verbindungen zw. Selektor-Knoten und Beginn CTK-Ketten:

$$\forall\, 1 \leq i \leq K:\ \{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\}$$

Erklärungsversuch Korrektheit Reduktion

Die folgenden Kanten bilden einen Hamiltonkreis:

- $\forall\, e = \{u, v\} \in E$ die entsprechenden Kanten innerhalb CTKs; je nachdem, ob $\{u, v\} \cap V^*$ gleich $\{u\}$, $\{u, v\}$ oder $\{v\}$ ist (ein Fall trifft immer zu, da V^* Vertex-Cover ist)
- Verbindungen zwischen den CTKs: $\forall\, 1 \leq i \leq K: \; E'_{v_i}$
- Verbindungen zw. Selektor-Knoten und Beginn CTK-Ketten:

$$\forall\, 1 \leq i \leq K: \; \{a_i, (v_i, e_{v_i[1]}, 1)\}$$

- Verbindungen zw. Selektor-Knoten und Ende CTK-Ketten:

$$\begin{aligned} \forall\, 1 \leq i < K: \; & \{a_{i+1}, (v_i, e_{v_i[deg(v_i)]}, 6)\} \\ & \{a_1, (v_K, e_{v_K[deg(v_K)]}, 6)\} \end{aligned}$$

Varianten

- Hamiltonian Path:
  wie Hamiltonian Cycle, nur ohne Bedingung $\{v_n, v_1\} \in E$
- Hamiltonian Path Between Two Points:
  wie Hamiltonian Path, nur expliziter Start- und Endknoten

$\Rightarrow$ alle NP-vollständig

Longest Path

Longest Path – Berechnungsvariante

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+, K \leq |V|$.
Ausgabe: Enthält G einen Pfad ohne Knotenwiederholung mit mindestens K Kanten?

Beweisidee: Reduktion von Hamiltonian Path mit:

$$(V, E) \in \textsc{Hamiltonian Path}$$
$$\iff$$
$$((V, E), |V| - 1) \in \textsc{Longest Path}$$

LONGEST PATH

LONGEST PATH – Berechnungsvariante

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und $K \in \mathbb{N}_+, K \leq |V|$.
Ausgabe: Enthält G einen Pfad ohne Knotenwiederholung mit mindestens K Kanten?

Beweisidee: Reduktion von HAMILTONIAN PATH mit:

$$(V, E) \in \text{HAMILTONIAN PATH}$$
$$\iff$$
$$((V, E), |V| - 1) \in \text{LONGEST PATH}$$

LONGEST PATH – Optimierungsvariante

Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$.
Ausgabe: Längster Pfad ohne Knotenwiederholung in G.

Zusammenfassung

- Hamiltonian Cycle ist NP-vollständig
- Reduktion von Vertex Cover
- Varianten und verwandte Probleme