作业二：翻译与论文排版

申屠慧
能源与环境系统工程（智慧能源班）3210103417

2023 年 7 月 5 日

1 不可压缩流体纳维-斯托克斯方程

不可压缩流体的二维流场完全由速度矢量 $q = (u(x, y)\ v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ 和压力 $p(x, y) \in \mathbb{R}$ 来描述。[1] 这些函数是下列守恒定律的解 (例如，参见 Hirsch, 1988):

- 质量守恒

$$div(q) = 0, \tag{1}$$

  或者，用散度算子 [1] 的显式表示，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

- 简化形式的动量守恒方程[2]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div(q \bigotimes q) = -\mathcal{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q, \tag{3}$$

  或者，用展开的形式，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \end{cases} \tag{4}$$

  以上方程用无量纲的形式写出，使用了以下变量：

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, u = \frac{u^*}{V_0}, v = \frac{v^*}{V_0} \tag{5}$$

[1]我们回顾二维域的微分算子散度、梯度和拉普拉斯算子的定义：如果 $v = (v_x, v_y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 和 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，则 $div(v) = \frac{v_x}{x}$, $\mathcal{G}\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \partial\varphi\partial y)$, $\Delta\varphi = div(\mathcal{G}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y)$.

[2]我们定义 $\bigotimes$ 为张量积

这里有 $(*)$ 上标的变量表示以国际单位制测量的物理量。常数 L, V_0 分别是表征的参考长度和流动速度。无量纲数 Re 称为雷诺数，它的大小表示了惯性（或者对流性）与流动中的粘性（或者扩散项）对流场影响的大小：

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \tag{6}$$

ν 是流体的运动粘度。

总而言之，偏微分方程形式的纳维-斯托克斯方程的数值解将由本文中式 2 和 4 决定；初始条件（$t = 0$ 时刻）与边界条件将在之后的章节中讨论。

2 计算域，交错网络与边界条件

通过考虑处处具有周期性边界条件的矩形域 $L_x \times L_y$ （见），数值求解纳维-斯托克斯方程得到了极大的简化。速度场 $q(x, y)$ 和压力场 $p(x, y)$ 的周期性在数学上表示为

$$q(0, y) = q(L_x, y), p(0, y) = p(L_x, y), \forall y \in [0, L_y], \tag{7}$$

$$q(x, 0) = q(x, L_y), p(x, 0) = p(x, L_y), \forall x \in [0, L_x], \tag{8}$$

计算解的点分布在矩形和均匀的二维网格之后的域中。由于在我们的方法中并非所有变量都共享相同的网格，因此我们首先定义一个主网格 (参见 1)，沿 x 方向分别取 n_x 个计算点，相应地沿 y 方向分别取 n_y 个计算点:

$$x_c(i) = (i-1)\delta x, \delta x = \frac{L_x}{n_x - 1}, i = 1, ..., n_x, \tag{9}$$

$$y_c(j) = (j-1)\delta j, \delta y = \frac{L_y}{n_y - 1}, i = 1, ..., n_y, \tag{10}$$

次级网格由初级网格单元的中心定义:

$$x_m(i) = (i - 1/2)\delta x, i = 1, ..., n_{xm}, \tag{11}$$

$$y_m(j) = (j - 1/2)\delta y, j = 1, ..., n_{ym}, \tag{12}$$

这里我们用了简化符号 $n_{xm} = n_x - 1, n_{ym} = n_y - 1$ 。在定义为矩形 $[x_c(i)\ x_c(i+1)] \times [y_c(j)\ y_c(j+1)]$ 的计算单元内，将未知变量 u, v, p 计算为不同空间位置解的近似值:

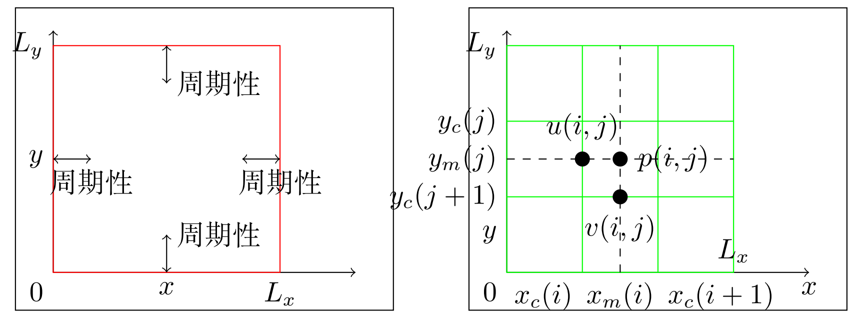

图 1: 计算域，交错网格和边界条件

- $u(i,j) \approx u(x_c(i), y_m(j))$（单元的西面）
- $v(i,j) \approx v(x_m(i), y_c(j))$（单元的南面）
- $p(i,j) \approx p(x_m(i), y_m(j))$（单元的中心）

变量的交错排列具有压力和速度之间强耦合的优点。它还有助于（参见本章末尾的参考资料）避免一些稳定性和收敛性问题，这些问题是由并置排列（所有变量都在相同的网格点上计算）引起的。

参考文献

[1] Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber, and Marie Postel. *An introduction to scientific computing: Twelve computational projects solved with MATLAB*. Springer, 2007.