



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

**«Стохастический анализ и моделирование»**

*Студент 415 группы*  
А. А. Рыбакова

*Преподаватель*  
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2022

# Содержание

<b>1 Задача №1</b>	<b>4</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	4
1.1.1 Схема Бернулли и биномиальное распределение. . . . .	4
1.1.2 Геометрическое распределение и свойство отсутствия памяти . . . . .	4
1.1.3 Игра в орлянку . . . . .	5
1.2 Графики . . . . .	6
<b>2 Задача №2</b>	<b>11</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	11
2.1.1 Распределение Кантора . . . . .	11
2.1.2 Критерий Колмогорова . . . . .	12
2.1.3 Критерий Смирнова . . . . .	12
2.1.4 Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	13
2.2 Графики . . . . .	14
<b>3 Задача №3</b>	<b>16</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	16
3.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	16
3.2.1 Экспоненциальное распределение . . . . .	16
3.2.2 Пуассоновское распределение . . . . .	17
3.2.3 Нормальное распределение . . . . .	18
3.3 Графики . . . . .	19
<b>4 Задача №4</b>	<b>24</b>
4.1 Постановка задачи . . . . .	24
4.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	24
4.2.1 Распределение Коши . . . . .	24
4.2.2 Метод фон Неймана . . . . .	24
4.2.3 normal probability plot . . . . .	25
4.2.4 Сравнение скорости моделирования . . . . .	26
4.3 Графики . . . . .	26
<b>5 Задача №5</b>	<b>30</b>
5.1 Постановка задачи . . . . .	30
5.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	30
5.2.1 ЦПТ и ЗБЧ . . . . .	30
5.2.2 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии . . . . .	30
5.2.3 Распределение Коши . . . . .	31
5.3 Графики . . . . .	31
<b>6 Задача №6</b>	<b>34</b>
6.1 Постановка задачи . . . . .	34
6.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	34
6.2.1 Метод Монте-Карло . . . . .	34
6.2.2 Метод квадратур . . . . .	35
6.2.3 Результаты работы программы . . . . .	35

<b>7 Задача №7</b>	<b>36</b>
7.1 Постановка задачи . . . . .	36
7.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	36
7.2.1 Метод случайного поиска . . . . .	36
7.2.2 Метод имитации отжига . . . . .	37
7.2.3 Оценка средней погрешности. . . . .	38
<b>8 Задача №8</b>	<b>39</b>
8.1 Постановка задачи . . . . .	39
8.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	39
8.3 Графики . . . . .	41
<b>9 Задача №9</b>	<b>42</b>
9.1 Постановка задачи . . . . .	42
9.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	42
9.2.1 Винеровский процесс . . . . .	43
9.2.2 Процесс Орнштейна-Уленбека . . . . .	44
9.3 Графики . . . . .	46
<b>10 Задача №10</b>	<b>48</b>
10.1 Постановка задачи . . . . .	48
10.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	48
10.3 Графики . . . . .	49
<b>11 Задача №11</b>	<b>50</b>
11.1 Постановка задачи . . . . .	50
11.2 Теоретические выкладки и реализация . . . . .	50
11.2.1 Первая интерпретация: система массового обслуживания . . . . .	50
11.2.2 Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(1 + \cos(t))$ и единичными скачками. . . . .	51
11.2.3 Третья интерпретация: работа страховой компании . . . . .	51
11.3 Графики . . . . .	52

# 1 Задача №1

## 1.1 Постановка задачи

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью  $p$ . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность независимых испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш  $S_n$  определяется как сумма по всем  $n$  испытаниям значений 1 и  $-1$  в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы  $Y(i) = S_i/\sqrt{n}$ , как функцию от номера испытания  $i = 1, \dots, n$  для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для  $Y(n)$  при  $n \rightarrow \infty$

### 1.1.1 Схема Бернулли и биномиальное распределение.

**Определение 1.** Схемой Бернулли с заданной вероятностью успеха  $p$  называется эксперимент, состоящий из серии испытаний, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. Отсутствие взаимного влияния;
2. Воспроизводимость испытаний;
3. В каждом испытании наблюдается признак; причем вероятность его проявления (успеха) равна  $p$ .

**Определение 2.** Случайная величина  $\xi$ , принимающая значение 1 с вероятностью  $p$  и значение 0 с вероятностью  $1 - p$ , имеет распределение Бернулли ( $\xi \sim Be(p)$ ).

Случайную величину  $\xi \sim B(p)$  можно смоделировать с помощью  $X \sim U[0, 1]$  следующим образом:

$$\xi = \begin{cases} 1 & , X < p \\ 0 & , X \geq p \end{cases}.$$

**Определение 3.** Пусть случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} Be(p)$ ;  $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$  - число "успехов" в  $n$  испытаниях Бернулли. Тогда  $\eta$  имеет биномиальное распределение ( $\eta \sim Bi(n, p)$ ).  $\mathbb{P}(\eta = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ .

Случайную величину  $\eta \sim Bi(n, p)$  можно смоделировать через  $\xi_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} Be(p), i = 1, \dots, n$  по формуле  $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

### 1.1.2 Геометрическое распределение и свойство отсутствия памяти

**Определение 4.** Случайная величина  $Y$ , равная количеству неудач до появления первого успеха в схеме Бернулли с параметром  $p$ , называется случайной величиной, имеющей геометрическое распределение с параметром  $p$  ( $Y \sim Geom(p)$ ).

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^k p, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

**Утверждение 1.** (Свойство отсутствия памяти) Если  $Y \sim Geom(p)$ , то  $\mathbb{P}(Y > n + m \mid Y \geq m) = \mathbb{P}(Y > n), \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим условную вероятность того, что  $Y$  примет значение, большее  $n + m$  при условии, что  $Y \geq m$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > n + m | Y \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(Y > n + m, Y \geq m)}{\mathbb{P}(Y \geq m)} = \frac{\mathbb{P}(Y > n + m)}{\mathbb{P}(Y \geq m)} = \\ \frac{\mathbb{P}(Y = m + n + 1) + \mathbb{P}(Y = m + n + 2) + \dots}{\mathbb{P}(Y = m + 1) + \mathbb{P}(Y = m + 2) + \dots} &= \frac{p((1-p)^{m+n+1} + (1-p)^{m+n+2} + \dots)}{p((1-p)^{m+1} + (1-p)^{m+2} + \dots)} \\ &= \frac{(1-p)^{n+m+1}}{(1-p)^m} = (1-p)^{n+1} = \mathbb{P}(Y > n).\end{aligned}$$

□

### 1.1.3 Игра в орлянку

Смоделируем последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$ :

Пусть

$$\xi_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} Be\left(\frac{1}{2}\right), \quad X_i = \begin{cases} 1 & , \xi_i = 1 \\ -1 & , \xi_i = 0 \end{cases},$$

Тогда

$$Y(n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}$$

**Теорема 1.** (ЦПТ в форме Леви) Пусть  $X_1, \dots, X_n, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание  $\mu$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Пусть  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Тогда

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где  $N(0, 1)$  — стандартное нормальное распределение.

В нашем случае  $\mathbb{E}(X_i) = \mu = 0$ ,  $\sqrt{\text{Var}(X_i)} = \sigma = 1$ . Значит из ЦПТ в форме Леви:

$$S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = Y(n) \xrightarrow{d} N(0, 1), \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

## 1.2 Графики

Эмпирическая и теоретическая функции распределения Бернулли

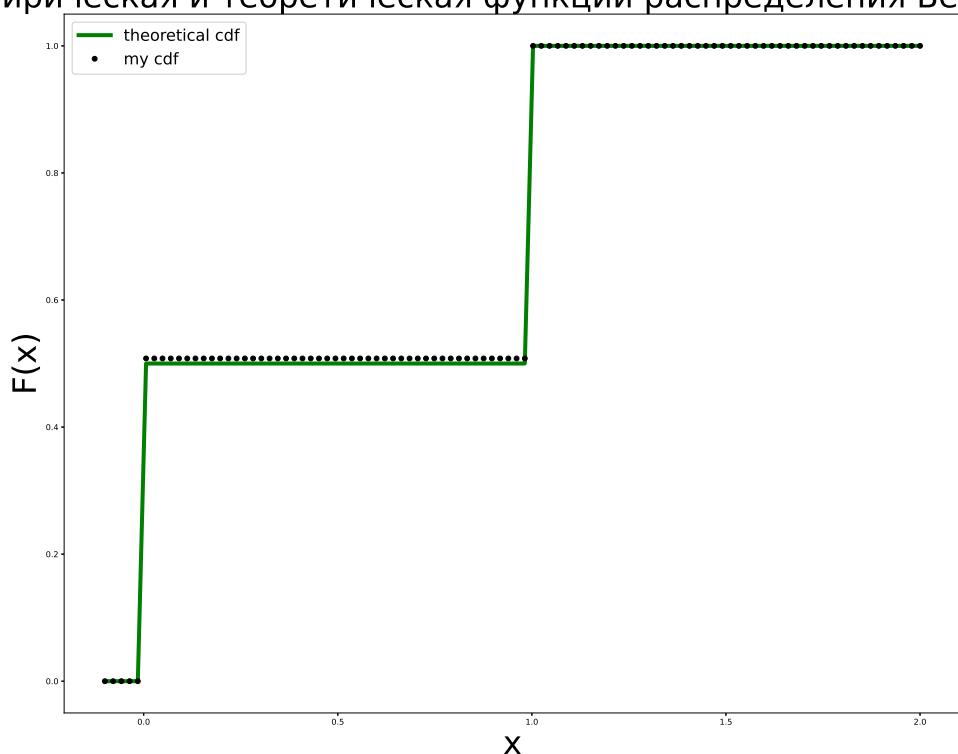


Рис. 1: Эмпирическая и теоретическая функции распределения Бернулли

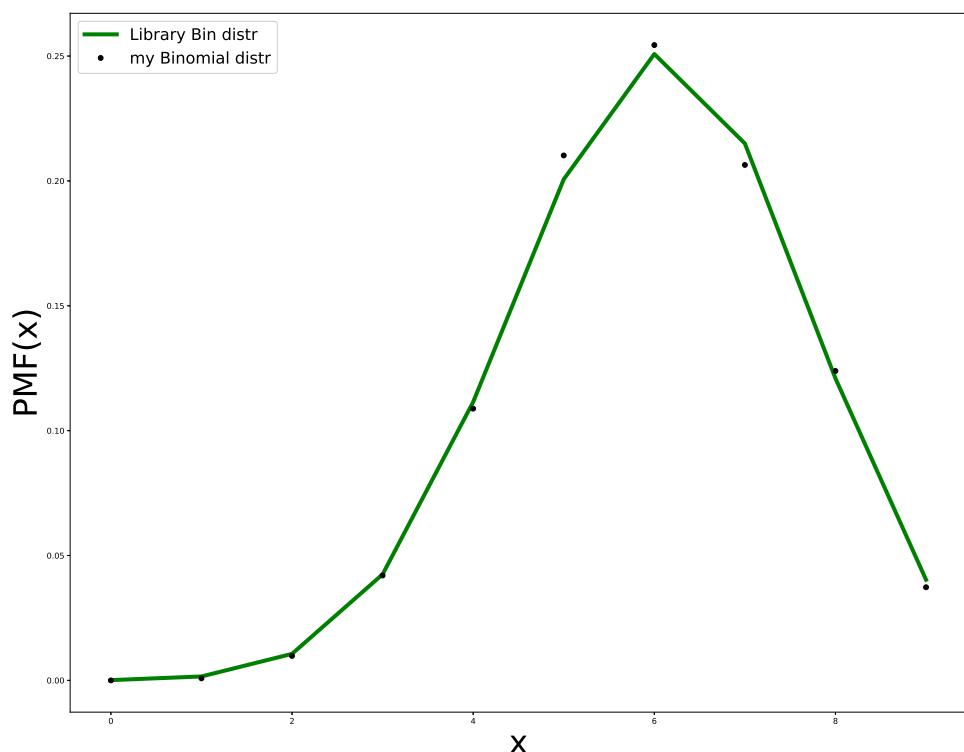


Рис. 2: Эмпирическое и теоретическое биномиальные распределения.

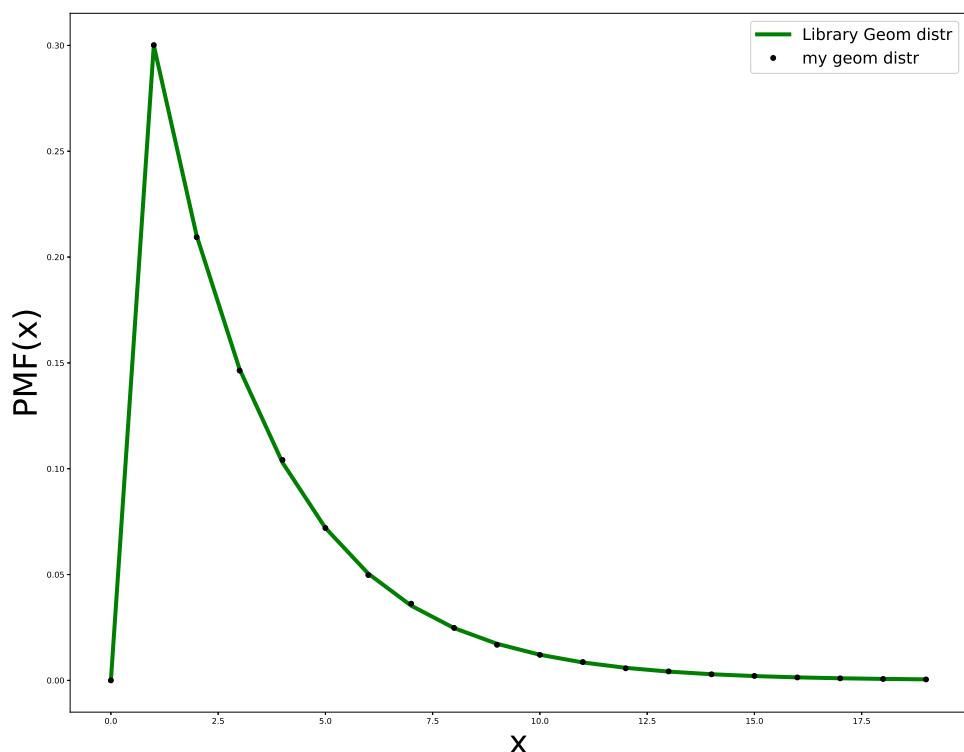


Рис. 3: Эмпирическое и теоретическое геометрическое распределения.

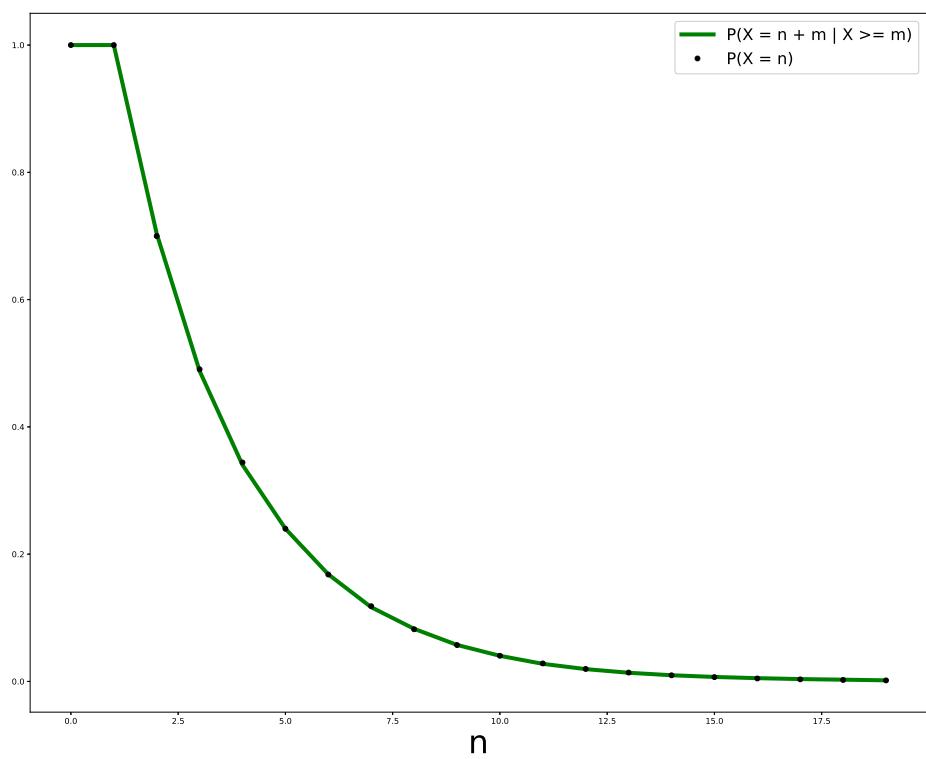


Рис. 4: Свойство отсутствия памяти

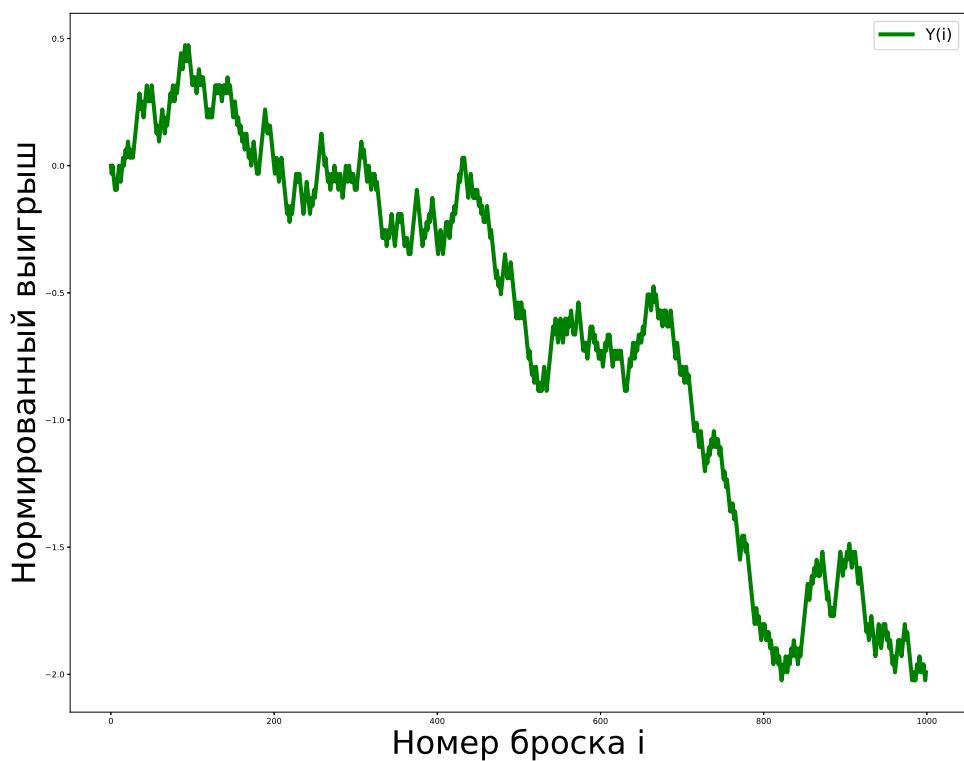


Рис. 5: Поведение  $Y(i)$

## 2 Задача №2

### 2.1 Постановка задачи

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно  $\frac{1}{2}$  ( $X$  и  $1 - X$  распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение  $Y$  при условии  $Y \in [0, \frac{1}{3}]$  совпадает с распределением  $\frac{Y}{3}$  с помощью критерия Смирнова).
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими для разного объёма выборок. Проиллюстрировать сходимость

#### 2.1.1 Распределение Кантора

**Определение 5.** Функция распределения называется сингулярной, если она непрерывная и её множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

**Определение 6.** Канторовым множеством называется множество  $K = \bigcap_{i=0}^{+\infty} K_i$ , где  $K_i$  строится по следующему алгоритму:  $K_0 = [0, 1]$ ,  $K_i$  получается из  $K_{i-1}$  удалением средней трети каждого отрезка.

**Утверждение 2.** Мера Лебега канторова множества равна нулю.

*Доказательство.* Множества  $K_i \supset K_{i+1}, i = 0, \dots, n, \dots$ . Будем считать  $\mu(K)$  последовательно вычитая меру удаленных отрезков.

$$\mu(K) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(C_{k-1}/C_k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3-2} = 0$$

□

Поэтому непрерывное распределение, множеством точек роста которого является канторово множество, будет сингулярным.

Сгенерируем канторову функцию:

Рассмотрим множество чисел на отрезке  $[0, 1]$ , в троичной записи которых отсутствует 1. Будем генерировать элементы множества как:

$$X = \sum_{k=1}^N \frac{2\eta_k}{3^k}, \quad \eta_k \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{N}.$$

Для достижения точности  $\varepsilon$  число  $N$  выберем как округление вверх числа  $\log_3\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$ .

**Утверждение 3.** Распределение Кантора симметрично относительно  $\frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случайную величину  $1 - Y$ :

$$1 - Y = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\eta_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\eta_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - \eta_k)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k}$$

Случайные величины  $\xi_k$  имеют распределение Бернуlli с параметром  $\frac{1}{2}$ , а значит, случайная величина  $1 - Y$  распределена одинаково с  $Y$ . □

### 2.1.2 Критерий Колмогорова

Пусть есть выборка  $X = (X_1, \dots, X_n)$  случайной величины с функцией распределения  $\mathcal{F}$ . Рассмотрим гипотезу  $H_1 = \{\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_1\}$  против альтернативы  $H_2 = \{\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_1\}$ , где  $\mathcal{F}_1$  некоторая "истинная" функция распределения с известными параметрами.

Рассмотрим статистику

$$\rho_n(X) = \sqrt{n} \sup_y \{|F_n^*(y) - F_1(y)|\}, \text{ где } F_n^* \text{ — эмпирическая функция распределения.}$$

Если гипотеза  $H_1$  верна, то  $\rho_n(X)$  будет сходиться по распределению к случайной величине  $\eta$  с функцией распределения Колмогорова  $K(y)$ .

Пусть  $\alpha$  - уровень значимости. Тогда по данному  $\alpha$  легко найти  $C$  такое, что  $\alpha = P(\eta \geq C)$ . Тогда критерий Колмогорова выглядит так:

$$\begin{cases} H_1 & (\text{не отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_n(X) < C, \\ H_2 & (\text{отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_n(X) \geq C. \end{cases} \quad (1)$$

при этом  $C \approx \sqrt{-\log((\alpha)/2)/2}$

### 2.1.3 Критерий Смирнова

Пусть есть выборка  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  случайной величины с функцией распределения  $\mathcal{F}_\xi$  и выборка  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  случайной величины с функцией распределения  $\mathcal{F}_\eta$ . Пусть  $F_{1,n}(x), F_{2,m}(x)$  — эмпирические функции распределения, построенные по независимым выборкам  $X$  и  $Y$ . Допустим  $\mathcal{F}_\xi, \mathcal{F}_\eta \in C(\mathbb{R})$ . Рассмотрим гипотезу  $H_1 = \{\mathcal{F}_\xi \equiv F_\eta\}$  против альтернативы  $H_2 = \{\mathcal{F}_\xi \neq F_\eta\}$ .

Рассмотрим статистику

$$\rho_{n,m}(X, Y) = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_x |\mathcal{F}_{1,n} - \mathcal{F}_{2,m}|$$

Если  $\mathcal{F}_\xi \equiv F_\eta$ , то  $\rho_{n,m}$  будет сходиться по распределению к случайной величине  $\eta$  с функцией распределения Колмогорова  $K(y)$ . Пусть  $\alpha$  - уровень значимости, аналогично предыдущему пункту находим  $C \approx \sqrt{-\log((\alpha)/2)/2}$ . Тогда критерий Смирнова выглядит так:

$$\begin{cases} H_1 & (\text{не отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_{n,m}(X, Y) < C, \\ H_2 & (\text{отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_{n,m}(X, Y) \geq C. \end{cases} \quad (2)$$

**Утверждение 4.** Условное распределение  $Y$  при условии  $Y \in [0, \frac{1}{3}]$  совпадает с распределением  $\frac{Y}{3}$  (самоподобие).

*Доказательство.* Выразим  $X$  через бесконечную последовательность  $\xi_i \sim Be(\frac{1}{2})$ . Пусть случайная величина  $Y$  имеет распределение совпадающее с условным распределением  $X$  на отрезке  $[0, 1/3]$ . Тогда  $Y$  будет иметь вид

$$Y = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2\xi_i}{3^i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\xi_{i+1}}{3^i}.$$

Отсюда следует, что случайные величины  $Y, \frac{1}{3}X$  одинаково распределены.  $\square$

#### 2.1.4 Математическое ожидание и дисперсия

**Утверждение 5.** Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение Кантора, тогда  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ ,  $Var(X) = \frac{1}{8}$ .

*Доказательство.* 1. Из свойства симметричности следует:  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1 - X) = 1 - \mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ .

2. Из свойства самоподобия следует:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{F(3x)}{2}, & 0 \leq x < 1/3, \\ \frac{F(3x-2)}{2} + \frac{1}{2}, & 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{1/3} x^2 dF(x) + \int_{2/3}^1 x^2 dF(x).$$

Сделаем замену  $y = 3x$  в первом интеграле и  $z = 3x - 2$  во втором:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \left(\frac{y}{3}\right)^2 dF(y) + \int_0^1 \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 dF(y) \right) = \\ &= \frac{1}{9} \mathbb{E}(X^2) + \frac{2}{9} \mathbb{E}(X) + \frac{2}{9} = \frac{1}{9} \mathbb{E}(X^2) + \frac{1}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Тогда  $D(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{8}$ . □

## 2.2 Графики

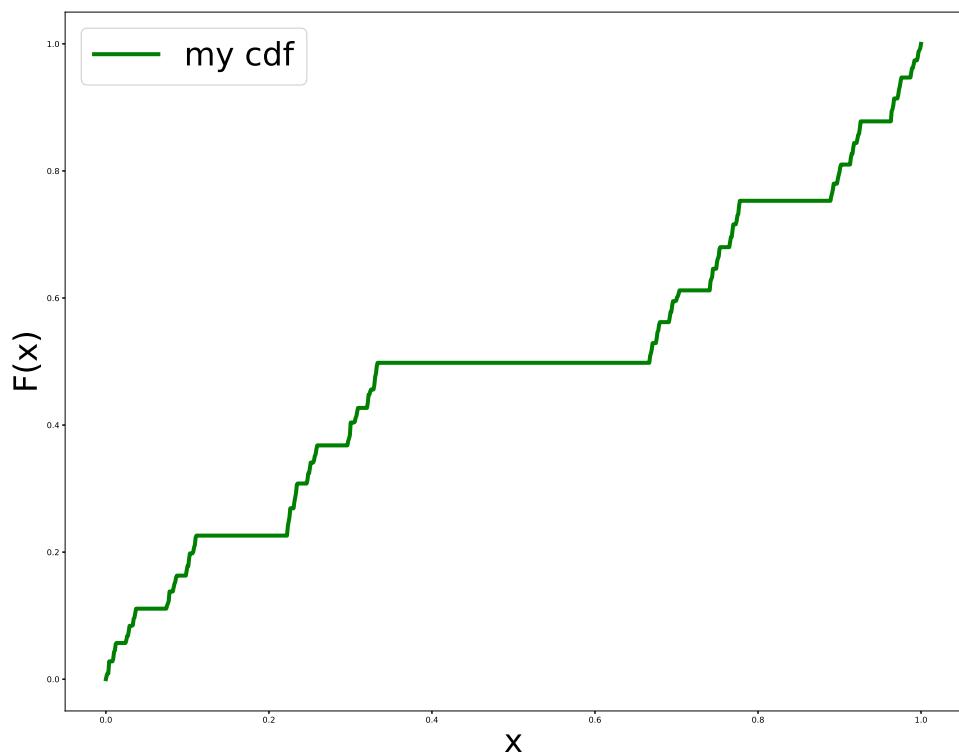


Рис. 6: Распределение Кантора

### Эмпирическое матожидание

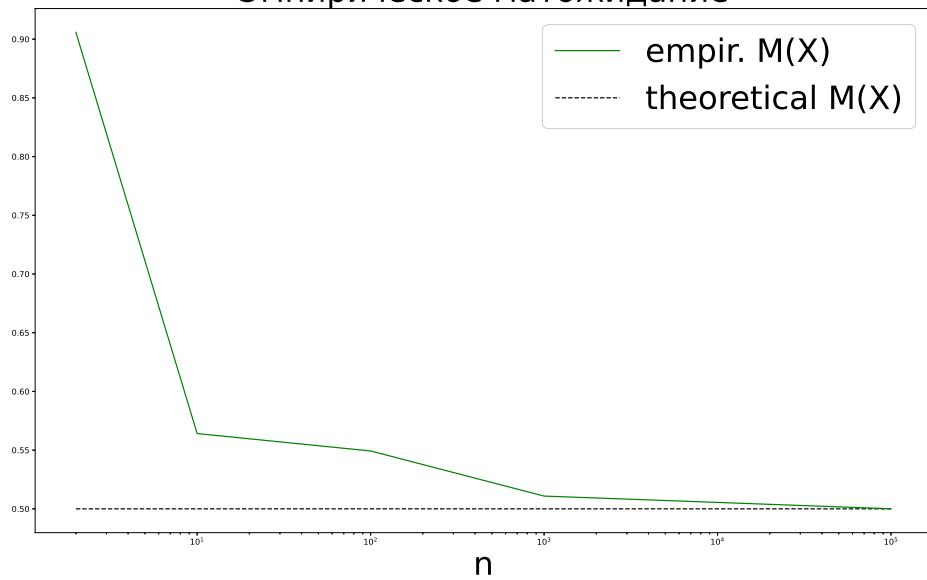


Рис. 7: Сходимость выборочного математического ожидания

### Исправленная выборочная дисперсия

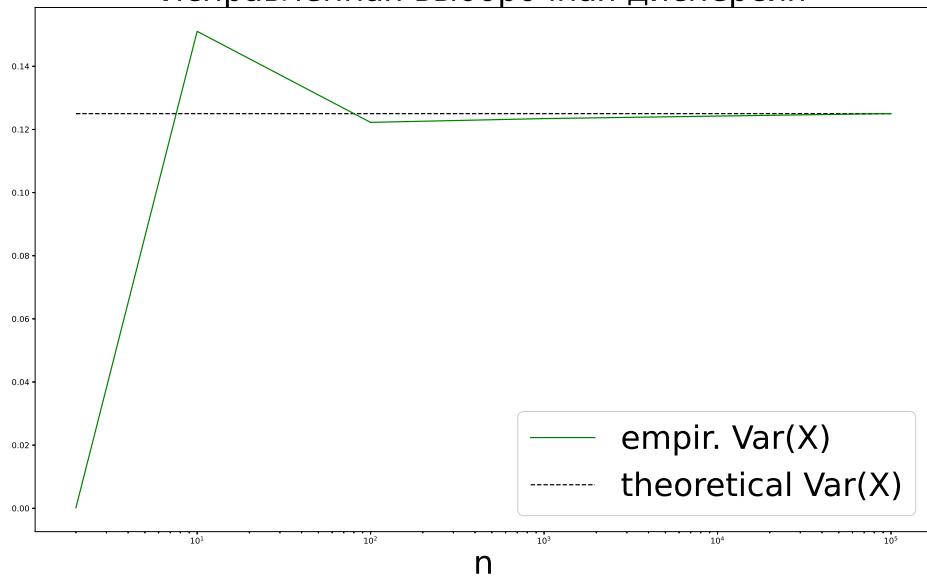


Рис. 8: Сходимость исправленной выборочной дисперсии

### 3 Задача №3

#### 3.1 Постановка задачи

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  соответственно. Найти распределение случайной величины  $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .
2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t-критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера равенство дисперсий.

#### 3.2 Теоретические выкладки и реализация

##### 3.2.1 Экспоненциальное распределение

**Определение 7.** Случайная величина  $X$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$  ( $X \sim Exp(\lambda)$ ), если её функция распределения имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}.$$

Будем моделировать экспоненциальное распределение методом обратных функций.

**Теорема 2.** (метод обратных функций) Допустим  $\gamma \sim U[0, 1]$ .  $F(x)$  - какая-то функция распределения.

Тогда если  $\xi = G(\gamma) = \sup\{x | F(x) \leq \gamma\}$  имеет функцию распределения  $F(x)$ , где  $\gamma \sim U[0, 1]$ .

Найдём  $G(y)$ :

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}.$$

Т.е.  $X = -\frac{\ln(1-\gamma)}{\lambda}$ . Так как  $1 - \gamma \sim U[0, 1]$ , то можно задать  $X = -\frac{\ln(\gamma)}{\lambda}$

**Утверждение 6.** (свойство отсутствия памяти) Если  $\eta \sim Exp(\lambda)$ , то  $\mathbb{P}(\eta > m + n | \eta \geq m) = \mathbb{P}(\eta > n)$ ,  $\forall m, n \in [0, +\infty)$ .

*Доказательство.* Из определения экспоненциального распределения следует, что

$$\mathbb{P}(\eta \geq n) = 1 - \mathbb{P}(\eta < n) = e^{-\lambda n};$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\eta > m+n | \eta \geq m) = \frac{\mathbb{P}(\eta > m+n, \eta \geq m)}{\mathbb{P}(\eta \geq m)} = \frac{\mathbb{P}(\eta > m+n)}{\mathbb{P}(\eta \geq m)} = \frac{e^{-\lambda(m+n)}}{e^{-\lambda m}} = e^{-\lambda n} = \mathbb{P}(\eta > n).$$

□

**Утверждение 7.** Пусть  $X_i \sim Exp(\lambda_i), i = 1, \dots, n$ .

Тогда случайная величина  $Y = \min(X_1, \dots, X_n) \sim Exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$ .

*Доказательство.*

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x) = 1 - \mathbb{P}(\min_i(X_i) \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim Exp(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$$

□

### 3.2.2 Пуассоновское распределение

**Определение 8.** Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda$  ( $\xi \sim Pois(\lambda)$ ), если

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots \stackrel{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$  и пусть  $\eta = \max\{n : \xi_1 + \dots + \xi_n < 1\}$ . Тогда случайная величина  $\eta$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ .

Будем генерировать Пуассоновское распределение с помощью датчика экспоненциального распределения по алгоритму из теоремы. Также можно моделировать Пуассоновское распределение при помощи следующей теоремы:

**Утверждение 8.**  $Bi(n, \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d.} Pois(\lambda)$ .

Проверить, что генерируется распределение Пуассона можно при помощи критерия хи-квадрат Пирсона.

**Определение 9.** Пусть случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1)$ . Величина  $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  имеет распределение хи-квадрат с  $n$  степенями свободы.

Дана выборка  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  случайной величины с функцией распределения  $F$ . Проверяется простая гипотеза

$H_1 = \{F \equiv F_1\}$  при альтернативе  $H_2 = \{F \neq F_1\}$ . Пусть  $A_1, \dots, A_k$  — интервалы группировки в области значений случайной величины с предполагаемым распределением  $F_1$ . Пусть  $\forall j = 1, \dots, k$  величина  $\nu_j$  равна числу элементов выборки, попавших в интервал  $A_j$ :

$$\nu_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i \in A_j)$$

Пусть число  $p_j > 0$  равно теоретической вероятности попадания в интервал  $A_j$  случайной величины с распределением  $F_1$ . Здесь  $p_1 + \dots + p_k = 1$ .

$$\text{Пусть } \rho_n(\vec{X}) = \sum_{j=1}^k \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}$$

**Теорема 4.** (Пирсона) Если верна гипотеза  $H_1$ , то при фиксированном  $k$  и при  $n \rightarrow \infty$   $\rho_n(\vec{X}) \xrightarrow{d.} H_{k-1}$ , где  $H_{k-1}$  имеет распределение  $\chi^2(k-1)$ .

Осталось построить критерий согласия по определению. Пусть случайная величина  $\eta$  имеет распределение  $H_{k-1}$ . Найдём  $C$ , равное квантили уровня  $1 - \alpha$  этого распределения. Тогда критерий выглядит так:

$$\begin{cases} H_1 & (\text{не отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_n(\vec{X}) < C, \\ H_2 & (\text{отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho_n(\vec{X}) \geq C. \end{cases} \quad (3)$$

### 3.2.3 Нормальное распределение

**Определение 10.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu, \sigma^2$  ( $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ), если плотность её распределения задаётся формулой

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Нормальное распределение с параметрами  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$  называется стандартным нормальным распределением.

**Теорема 5.** Если  $r, \phi \stackrel{i.i.d.}{\sim} U[0, 1]$ , то случайные величины  $z_0 = \sqrt{-2 \ln r} \cos(2\pi\phi)$ ,  $z_1 = \sqrt{-2 \ln r} \sin(2\pi\phi)$  имеют стандартное нормальное распределение.

Будем генерировать  $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , как  $\xi = \mu + \sigma z_0, \eta = \mu + \sigma z_1$ .

**Теорема 6.** Допустим  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ ,

$Y_1, \dots, Y_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ .

Тогда  $\rho(\vec{X}, \vec{Y}) = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_0^2(\vec{X}) + (m-1)S_0^2(\vec{Y})}{m+n-2}}}$ , имеет распределение Стьюдента с  $(n + m - 2)$  степенями свободы где  $S_0^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_0^2(\vec{Y}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  - выборка случайной величины  $\xi \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ , а  $Y_1, \dots, Y_m$  - случайной величины  $\eta \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ . С помощью t-критерия Стьюдента проверим равенство матожиданий случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . За нулевую гипотезу возьмём  $H_1 = \{a_1 = a_2\}$  с альтернативой  $H_2 = \{a_1 \neq a_2\}$ . Пусть  $\alpha$  - уровень значимости,  $C_{\frac{\alpha}{2}}, C_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантили распределения Стьюдента с  $(n + m - 2)$  степенями свободы. Тогда t-критерий Стьюдента выглядит так:

$$\begin{cases} H_1 & (\text{не отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } C_{\frac{\alpha}{2}} \leq \rho \leq C_{1-\frac{\alpha}{2}}, \\ H_2 & (\text{отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

**Теорема 7.** Допустим  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ ,

$Y_1, \dots, Y_m \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ .

Тогда  $\rho(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})}$ , имеет распределение Фишера с  $(n - 1), (m - 1)$  степенями свободы

где  $S_0^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_0^2(\vec{Y}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$

Для проверки равенства дисперсий  $\xi, \eta$  воспользуемся критерием Фишера. За нулевую гипотезу возьмём  $H_1 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$ . Пусть  $\alpha$  - уровень значимости,  $C_{1-\alpha}$  - квантиль распределения Фишера с  $(n - 1), (m - 1)$  степенями свободы. Тогда критерий выглядит так:

$$\begin{cases} H_1 & (\text{не отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ если } \rho \leq C_{1-\alpha}, \\ H_2 & (\text{отвергаем нулевую гипотезу}), \text{ иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

### 3.3 Графики

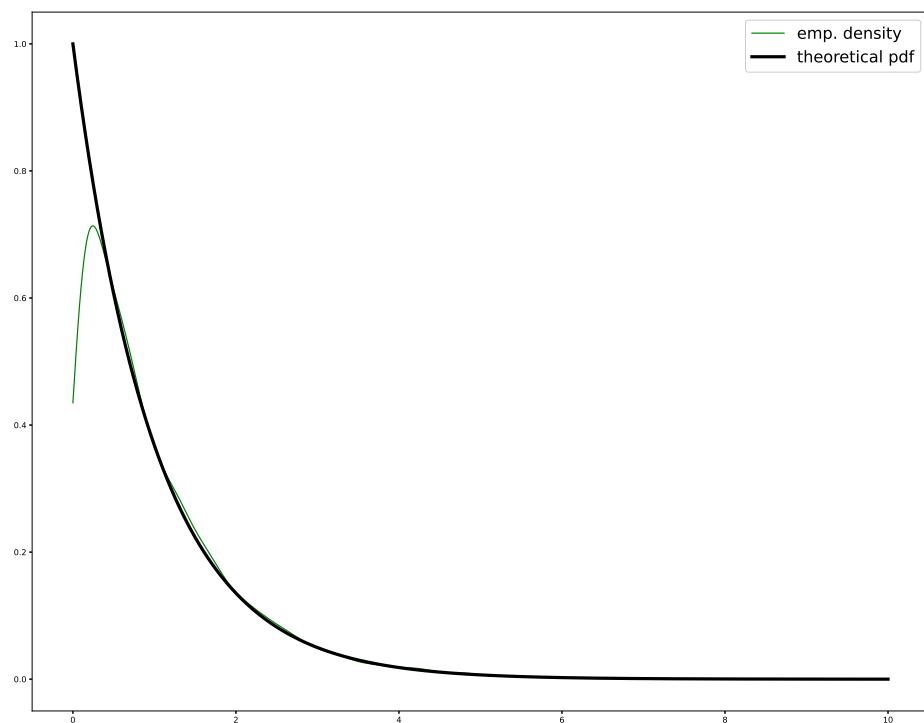


Рис. 9: Экспоненциальное распределение

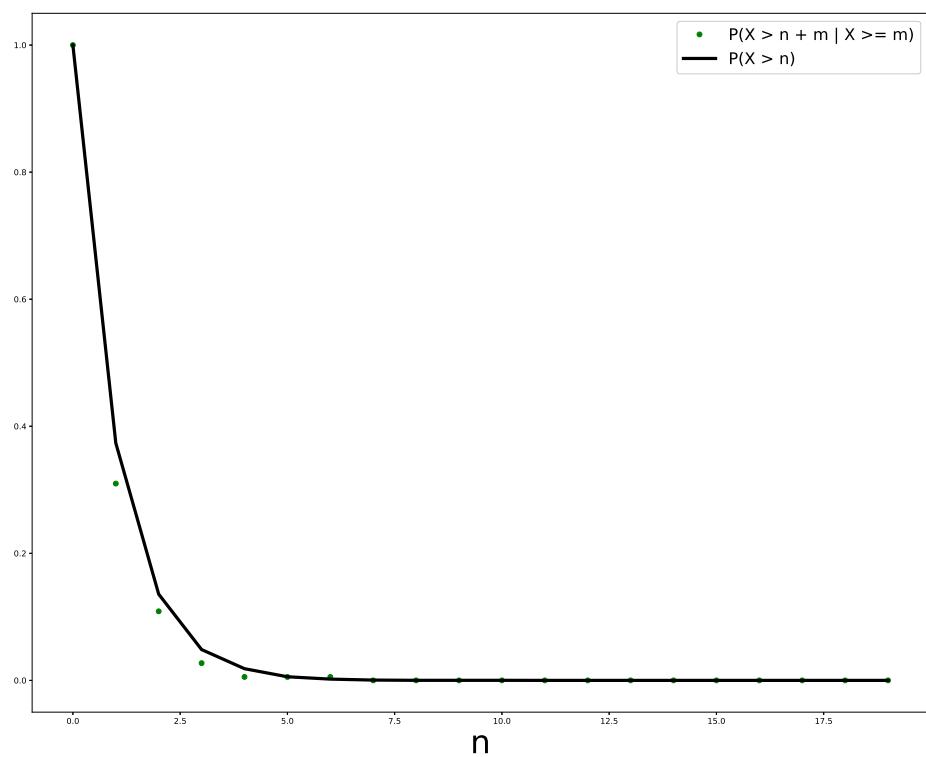


Рис. 10: Отсутствие памяти экспоненциального распределения

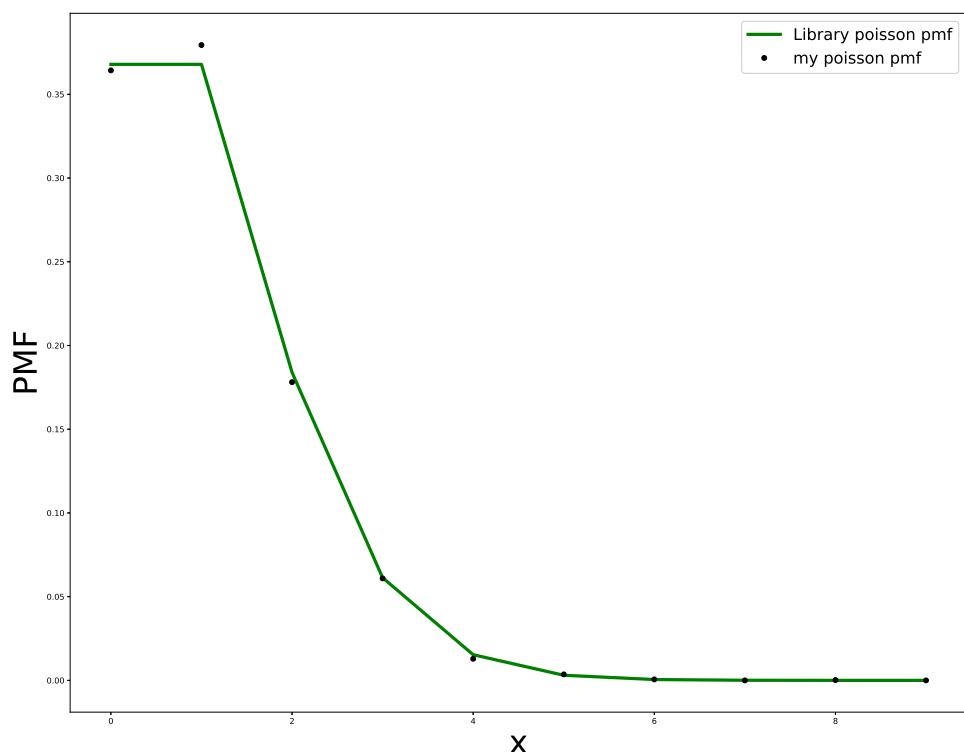


Рис. 11: Распределение Пуассона

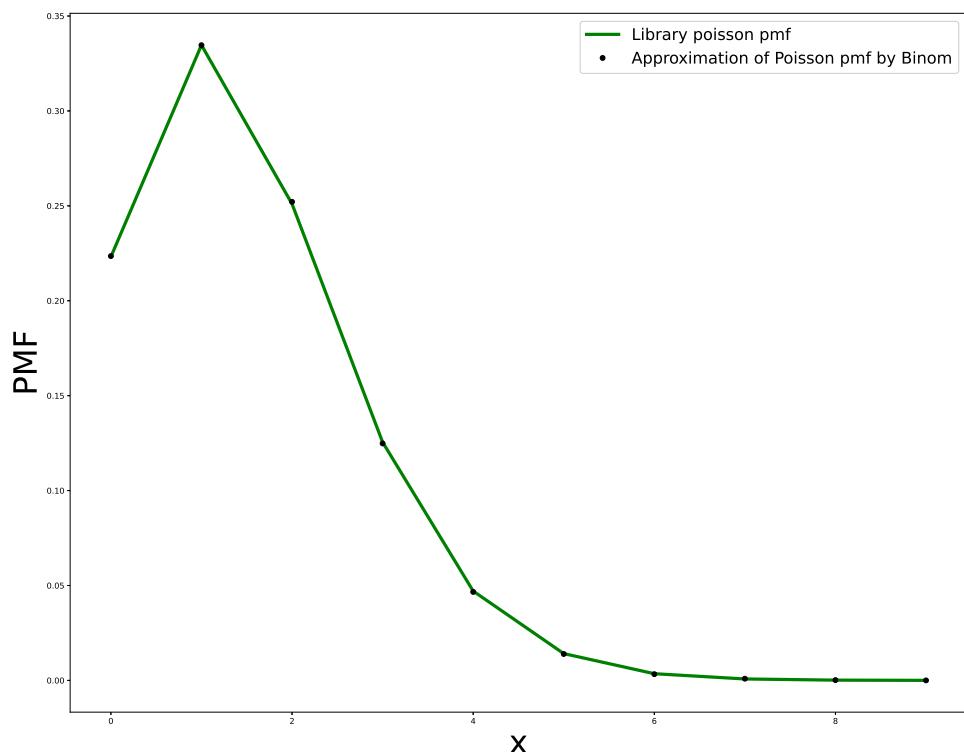


Рис. 12: Распределение Пуассона через предел биномиального

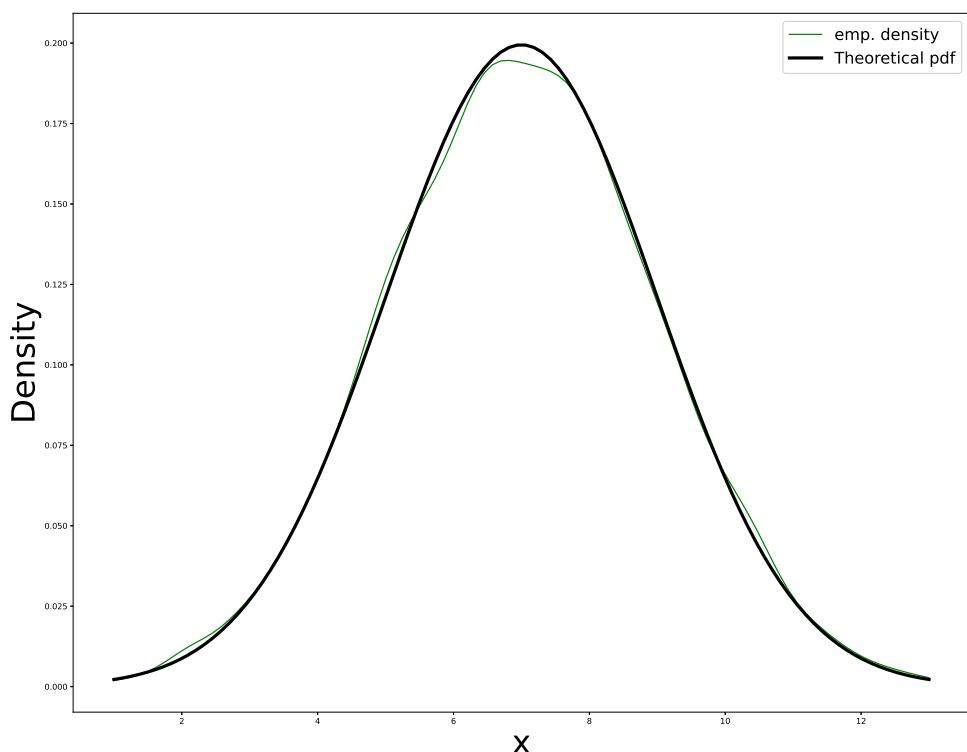


Рис. 13: Стандартное нормальное распределение полярным методом

## 4 Задача №4

### 4.1 Постановка задачи

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции normal probability plot убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

### 4.2 Теоретические выкладки и реализация

#### 4.2.1 Распределение Коши

**Определение 11.** Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Коши с параметрами  $a, \gamma$  ( $\xi \sim C(a, \gamma)$ ), если её функция распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-a}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Из метода обратных функций: пусть  $X \sim C(a, \gamma)$ ,  $y \sim U[0, 1]$ ,  $y = F_X(x) \Rightarrow x = a + \gamma \tan(\pi(y - \frac{1}{2}))$ .

#### 4.2.2 Метод фон Неймана

Необходимо мажорируя плотность стандартного нормального распределения плотностью распределения Коши с параметрами сдвига  $a$  и масштаба  $b$ , обеспечить максимальную эффективность метода фон Неймана моделирования нормального распределения.

Запишем плотность стандартного нормального распределения  $p(x)$  и плотность распределения Коши  $q(x)$ :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$q(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Будем моделировать стандартное нормальное распределение, следуя такому алгоритму:

1. подберем такое число  $k > 0$ , что  $p(x) \leq kq(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,
2. получим реализацию случайной величины  $X = x$ , где  $X \sim Cauchy(a, b)$ ,
3. сгенерируем случайную величину  $Y(x) \sim Be\left(\frac{p(x)}{kq(x)}\right)$  и получим ее реализацию  $-y$ ,
4. если  $y = 1$ , то выдаём  $x$  в качестве результата работы генератора, иначе — возвращаемся к пункту 2.

Далее заметим, что алгоритм будет работать тем быстрее, чем ближе отношение  $\frac{p(x)}{kq(x)}$  к 1, поэтому оптимальным будет являться:

$$k^* = \min_{a,b} \max_x \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Рассмотрим

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} e^{-\frac{x^2}{2}} ((x-a)^2 + b^2).$$

Положим для начала  $a = 0$  и рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 + b^2).$$

Чтобы найти максимум по  $x$ , вычислим ее производную и приравняем к 0:

$$g'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} x (2 - x^2 - b^2) = 0.$$

Точки экстремума:  $\begin{cases} x = 0, & |b| > \sqrt{2}, \\ x = \pm\sqrt{2-b^2}, & 0 < |b| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$  Получается, что

$$k^* = \min \left\{ \min_{|b|>\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} b, \min_{0<|b|\leq\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{b} e^{\frac{b^2}{2}-1} \right\}.$$

По условию,  $k > 0$ , значит  $b > 0$ . Рассмотрим вторую под знаком минимума функцию:

$$h(b) = \frac{1}{b} e^{\frac{b^2}{2}-1}.$$

Найдем ее минимум, приравняв производную к 0, откуда с учетом того, что  $b > 0$  следует, что  $b = 1$ . Окончательно получаем оптимум при  $a^* = 0, b^* = 1$ :

$$k^* = \min \left\{ \sqrt{\pi}, \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \right\} = \frac{2\pi}{e}.$$

Теперь докажем, что в качестве оптимального значения параметра  $a$  можно взять 0:

$$\begin{aligned} k^* &= \min_{a,b} \max_x \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} e^{\frac{x^2}{2}} ((x-a)^2 + b^2) \right) > \\ &> \min_a \left\{ \min_{b>\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}b} (a^2 + b^2), \min_{0 < b \leq \sqrt{2}} (\sqrt{2-b^2} + |a|) \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства видно, что минимум достигается как раз при  $a^* = 0$ .

Таким образом, максимальная скорость работы метода фон Неймана для моделирования стандартных нормальных случайных величин будет достигаться при использовании параметров  $a^* = 0, b^* = 1$ .

#### 4.2.3 normal probability plot

Функция `normal probability plot` принимает на вход выборку, строит график, на оси  $x$  откладывая квантили стандартного распределения, по оси  $y$  - эмпирические квантили, посчитанные по выборке. Пусть  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Введем замену  $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$ . Тогда

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} dt.$$

Таким образом, линейной заменой можно свести любую конфигурацию нормального распределения к стандартному, а функция normal probability plot будет прямой со сдвигом  $\mu$  и коэффициентом наклона  $\sigma$ .

#### 4.2.4 Сравнение скорости моделирования

Мы провели эксперименты с вызовом генераторов нормальных случайных величин методом Фон-Неймана и полярным методом для различных объемов выборки. На графиках ниже показано, что метод Фон-Неймана работает заметно медленнее, при увеличении объема выборки различие достигает двух порядков.

### 4.3 Графики

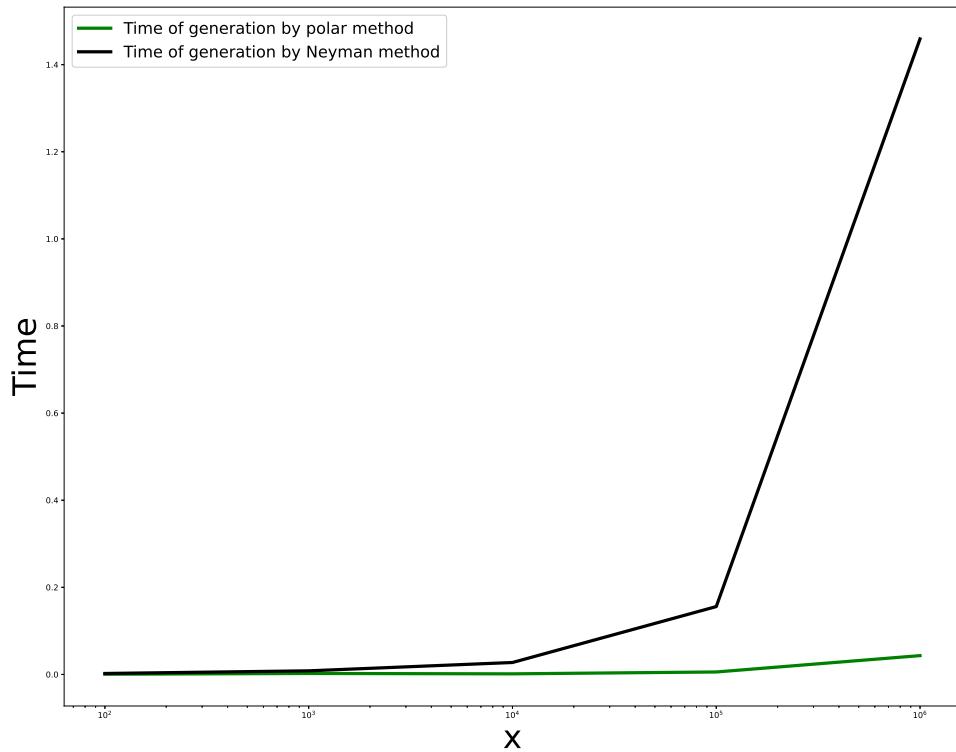


Рис. 14: Сравнение времени работы генераторов нормального распределения полярным методом и методом Фон-Неймана.

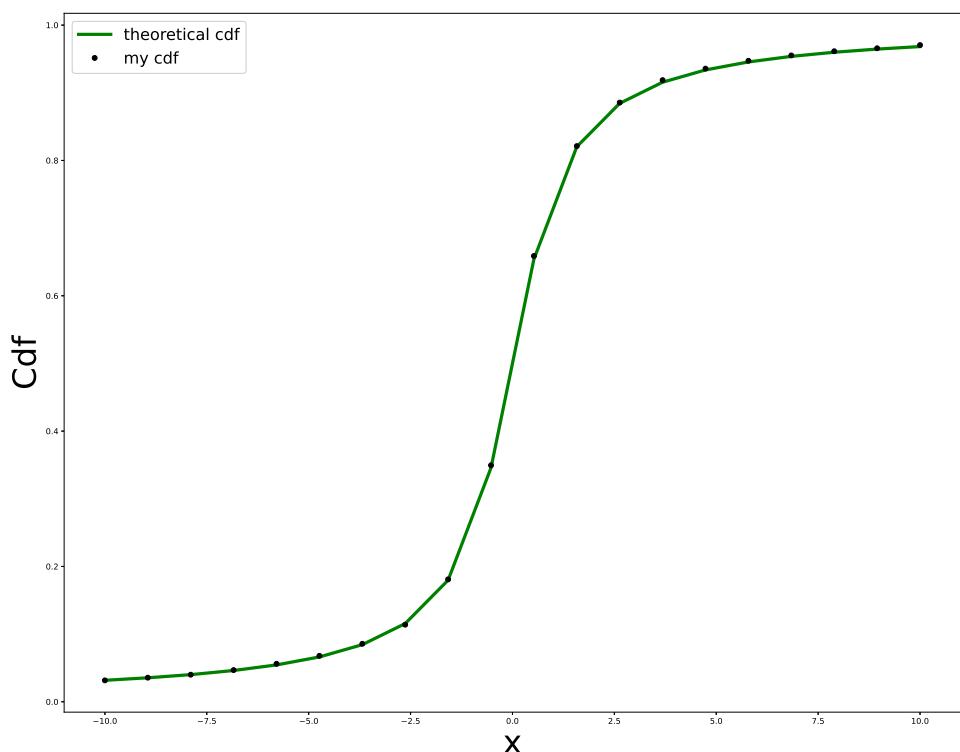


Рис. 15: Эмпирическое и теоретическое распределения Коши.

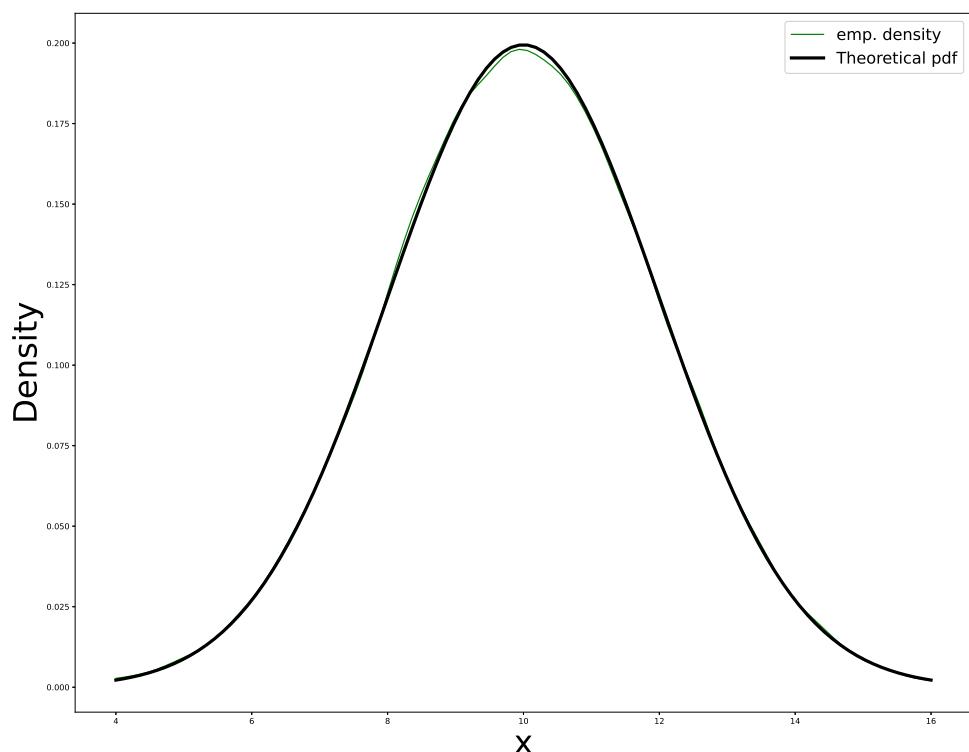


Рис. 16: Теоретическая и эмпирическая плотности нормального распределения (Метод Фон-Неймана).

Probplot for my Von Neumann distribution

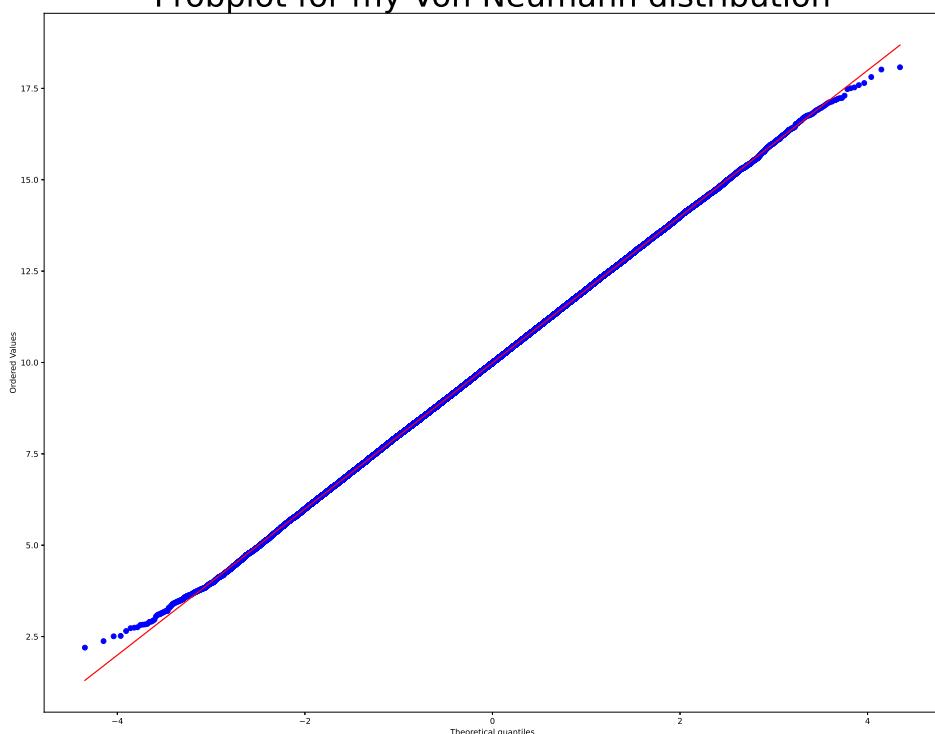


Рис. 17: ProbPlot

## 5 Задача №5

### 5.1 Постановка задачи

1. Пусть  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Убедиться эмпирически в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, т.е. исследовать поведение суммы  $S_n$  и эмпирического распределения величины

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - a \right)$$

2. Считая  $\mu$  и  $\sigma^2$  неизвестными для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.
3. Пусть  $X_i \sim K(a, b)$  имеет распределение Коши со сдвигом  $a$  и масштабом  $b$ . Проверить эмпирически, как ведут себя суммы  $S_n/n$ . Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

### 5.2 Теоретические выкладки и реализация

#### 5.2.1 ЦПТ и ЗБЧ

**Теорема 8.** (о законе больших чисел) Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ,  $|\mu| < \infty$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

**Теорема 9.** (Центральная предельная теорема) Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ ,  $\exists \mathbb{D}X_i \neq 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Тогда

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1).$$

#### 5.2.2 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии

Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Введем обозначения:

Выборочное среднее:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$\alpha$  - уровень значимости Будем строить доверительные интервалы следующим образом:

$$\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) < \mu < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(1 - \frac{\alpha}{2});$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_n^2(\frac{1-\alpha}{2})};$$

где  $t_n(\alpha)$  — квантиль уровня  $\alpha$  распределения Стьюдента с  $n$  степенями свободы,  $\chi_n^2(\alpha)$  — квантиль уровня  $\alpha$  распределения  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы.

### 5.2.3 Распределение Коши

Пусть  $X_1, \dots, X_n \sim C(a, \gamma)$ . Рассмотрим, как ведет себя сумма  $\frac{S_n}{n}$ . Распределение Коши не имеет матожидания. Поэтому ЗБЧ выполниться не будет.

**Определение 12.** Пусть  $\xi$  — случайная величина. Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется функция  $\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)$ .

Свойства характеристической функции:

1.  $\phi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\phi_\xi(at).$

2. Пусть  $\xi, \eta$  — независимые случайные величины. Тогда

$$\phi_{\eta+\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it(\eta+\xi)} = \mathbb{E}e^{it\eta}\mathbb{E}e^{it\xi} = \phi_\eta(t)\phi_\xi(t).$$

3. (Теорема единственности) Пусть  $\xi, \eta$  — случайные величины. Если  $\phi_\xi \equiv \phi_\eta$ , то они распределены одинаково.

Характеристическая функция распределения Коши равна  $\phi(t) = e^{x_0it - \gamma|t|}$ . Рассмотрим характеристическую функцию средних  $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ,  $X_i \sim C(a, \gamma)$ . Из свойств выше следует

$$\phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = (\phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right))^n = (\mathbb{E}e^{\frac{x_0it - \gamma|t|}{n}})^n = \phi_{X_1}(t).$$

Из единственности следует, что  $\frac{S_n}{n} \sim C(a, \gamma)$ .

## 5.3 Графики

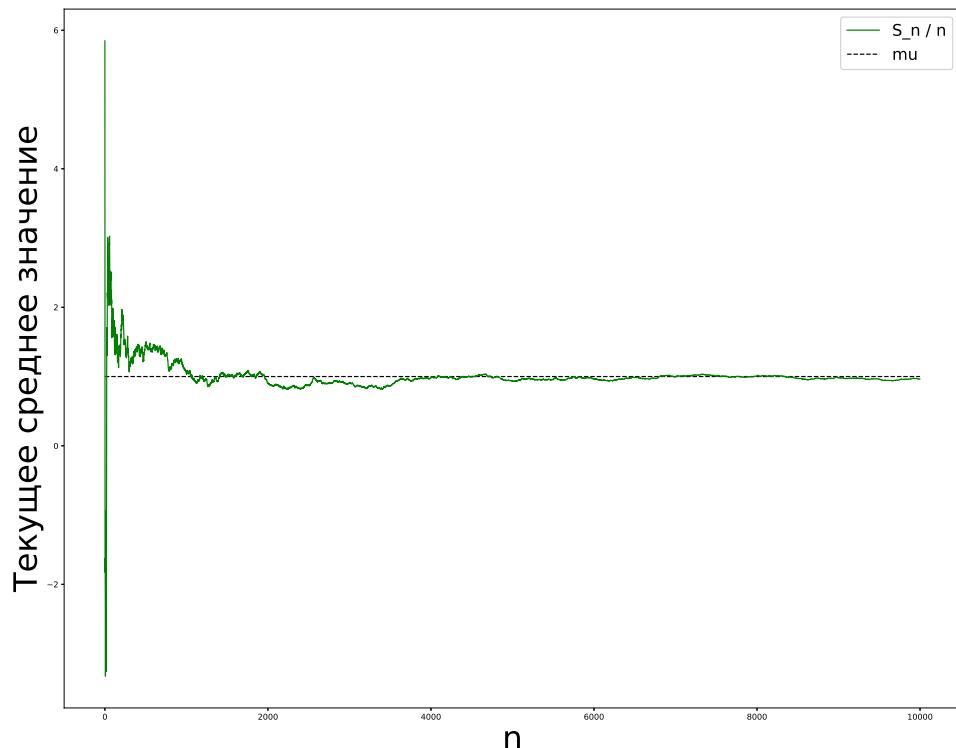


Рис. 18: Демонстрация ЗБЧ.

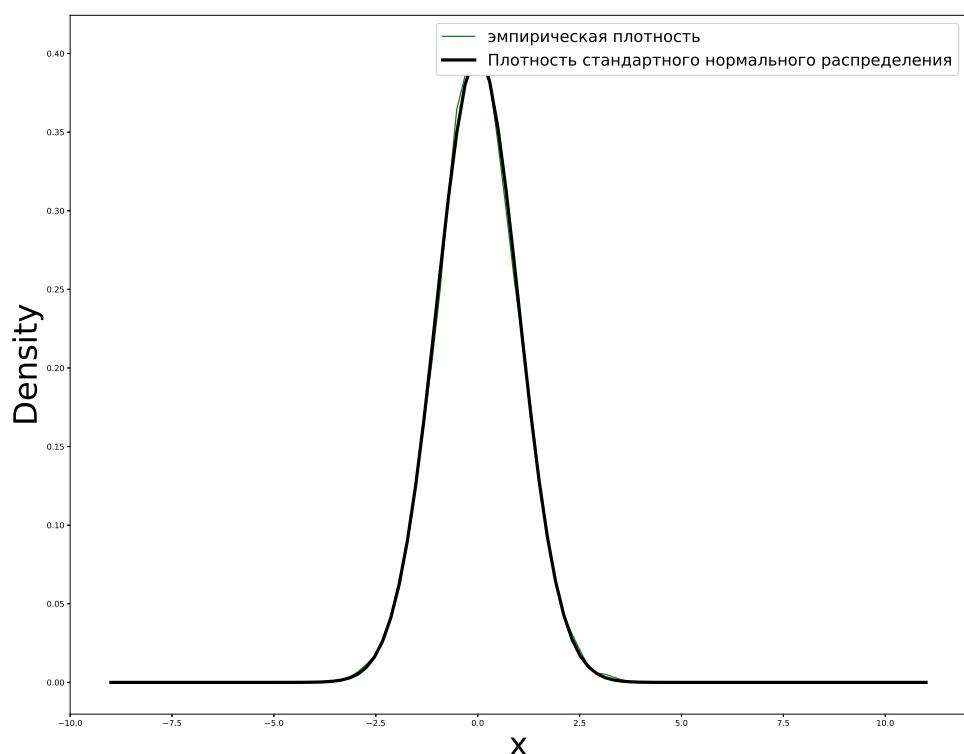


Рис. 19: Центральная предельная теорема

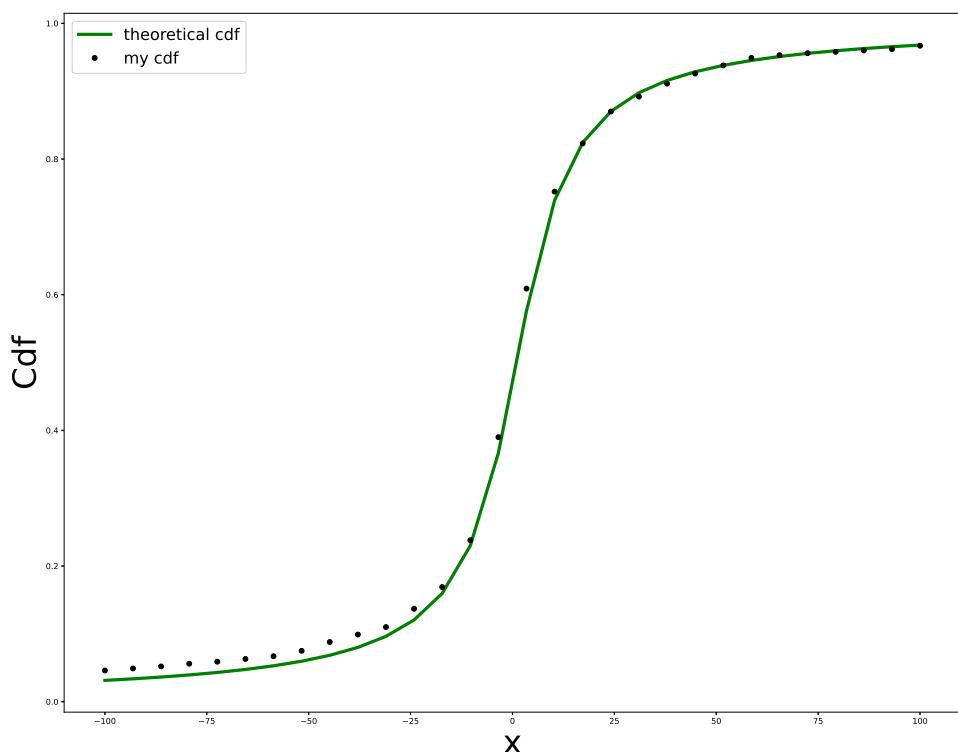


Рис. 20: Среднее случайных величин с распределением Коши.

## 6 Задача №6

### 6.1 Постановка задачи

1. Посчитать интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{27 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2})}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- методом Монте-Карло,
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.

### 6.2 Теоретические выкладки и реализация

#### 6.2.1 Метод Монте-Карло

Перепишем подынтегральную функцию в виде  $f(x) \cdot p(x)$ , где

$$f(x) = \frac{\pi^5 e^{\frac{-1}{27 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2},$$

$$p(x) = \frac{e^{-(x_1^2 + \dots + x_{10}^2)}}{\pi^5}.$$

$p(x)$  является совместной плотностью распределения  $X = (X_1, \dots, X_{10})$ ,  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \frac{1}{2})$ . Поэтому интеграл можно представить в виде

$$I = \mathbb{E} f(X_1, \dots, X_{10}).$$

Пусть выборка  $X^i = (X_1^i, \dots, X_{10}^i)$ ,  $X_j^i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \frac{1}{2})$ . Рассмотрим случайную величину  $Y = f(X)$ . Из ЗБЧ в форме Хинчина следует, что выборочное среднее будет сходиться по вероятности к матожиданию:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X^i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} f(X) = I.$$

Чем больше  $n$  — тем больше точность. Оценим погрешность с помощью ЦПТ:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - I\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - nI}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) = \Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - \Phi_0\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) - 1 = \alpha.$$

где

•

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

- $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(Y^i) - \bar{Y})^2$  — исправленная выборочная дисперсия,

- $\alpha$  — уровень доверия.

Значение погрешности  $\varepsilon$  можно получить из уравнения  $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi_0^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ .

### 6.2.2 Метод квадратур

Сделаем замену  $x_i = \tan(\frac{\pi}{2}t_i)$ ,  $dx_i = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{2}t_i)} dt_i$ ,  $-1 \leq t_i \leq 1$  и учтём четность функции:

$$I = \pi^{10} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{e^{-(\sum_{i=1}^{10} \tan(\frac{\pi}{2}t_i) + \frac{1}{2^7 \prod_{i=1}^{10} \tan^2(\frac{\pi}{2}t_i)})}}{\prod_{i=1}^{10} \tan^2(\frac{\pi}{2}t_i) \cos(\frac{\pi}{2}t_i)} dt_1, \dots dt_{10}$$

Разобьём отрезок  $[0, 1]$  на  $N$  частей. Найдем серединные точки каждого отрезка  $T = (T_1, \dots, T_N)$ . Составим всевозможные комбинации точек  $t \in T^{10}$  и просуммируем значение подынтегральной функции  $f(t)$  с весом  $\frac{\pi^{10}}{N^{10}}$ :

$$\bar{I} = \frac{\pi^{10}}{N^{10}} \sum_{t \in T^{10}} f(t).$$

Погрешность для такого способа вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \frac{|f''(\xi)|}{24} h^3, h = \frac{1}{N},$$

где  $\xi$  — точка, в которой достигается максимум второй производной функции  $f(t)$  по модулю.

### 6.2.3 Результаты работы программы

При количестве точек  $n = 10^6$  метод Монте-Карло даёт результат  $I = 125.393056$ .

При количестве же точек в сетке  $n = 5^{10}$  метод квадратур даёт результат  $I = 11.50783480$ .

Значительное расхождение результатов связано с недостаточным разбиением в методе квадратур, и как следствие - недостаточной точностью этого метода (к сожалению измельчение разбиения невозможно в силу того, что требует значительных вычислительных затрат).

## 7 Задача №7

### 7.1 Постановка задачи

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции  $f$  на множестве  $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ , т.е.  $y = \min_{x \in A} f(x)$ , где

$$f(x) = x_1^3 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1 x_2^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

при  $x_1 \neq 0$  и  $x_2 \neq 0$ , функция доопределяется по непрерывности при  $x_1 = 0$  или  $x_2 = 0$ .

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка  $g$  в пространстве  $\mathbb{R}^2$ , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

3. Оценить точность. Сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

### 7.2 Теоретические выкладки и реализация

#### 7.2.1 Метод случайного поиска

Будем генерировать случайную точку  $(X_1, X_2)$  равномерно распределенную в круге и искать минимальное значение функции  $f(x_1, x_2)$ . Совместная плотность случайных величин  $(X_1, X_2)$  имеет вид

$$f(X_1, X_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & X_1^2 + X_2^2 \leq 1, \\ 0, & X_1^2 + X_2^2 > 1. \end{cases}$$

Генерировать  $(X_1, X_2)$  будем следующим образом:  $X_1, X_2 \stackrel{iid}{\sim} Uniform[-1, 1]$ , если  $X_1^2 + X_2^2 \leq 1$ , то выдаём  $(X_1, X_2)$  в качестве результата, иначе, генерируем  $X_1, X_2$  заново до тех пор, пока условие не будет выполнено.

Оценим погрешность вычислений.  $f$  — непрерывна, значит — липшицева. Пусть получена точка  $(x_1, x_2)$ , а  $(x_1^*, x_2^*)$  — точка теоретического минимума. Справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |f(x_1^*, x_2^*) - f(x_1, x_2)| &\leq |f(x_1^*, x_2^*) - f(x_1^*, x_2)| + |f(x_1^*, x_2) - f(x_1, x_2)| \leq \\ &\leq \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| |x_2^* - x_2| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| |x_1^* - x_1|. \end{aligned}$$

Пусть  $\|x^* - x\|_\infty < \delta$ , тогда

$$|f(x_1^*, x_2^*) - f(x_1, x_2)| \leq \delta \left( \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \right)$$

Оценим производные:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| &= \left| 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) + 10x_1^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq \\ &\leq \left| 3x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right) \right| + \left| x_1 \cos\left(\frac{1}{x_1}\right) \right| + \left| 10x_1^4 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq 3x_1^2 + |x_1| + 10x_2^4 = 3x_1^2 + |x_1| + 10(1 - x_1^2)^2 = 10 - 17x_1^2 + |x_1| + 10x_1^4 \leq 10,$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| &= \left| 40x_1x_2^3 \cos\left(\frac{1}{x_2}\right) + 10x_1x_2^2 \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leq \\ &\leq 10|x_1|x_2^2(|4x_2| + 1) \leq 50|x_1|(1 - x_1^2) \leq 50\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{3} = \frac{100}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Зафиксируем  $\varepsilon$ :

$$\delta(\max \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|) = \varepsilon.$$

Тогда

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\max \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \max \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|} \approx \frac{\varepsilon}{19.245}.$$

Пусть случайный поиск проводится  $n$  раз, тогда хотя бы в одном испытании точка  $(x_1, x_2)$  попала в  $\delta$ -окрестность точки минимума (событие  $A$ ). Обозначим событие попадания точки в  $\delta$ -окрестность точки минимума за  $B$ . Тогда исходную вероятность можно представить в виде:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - (1 - \mathbb{P}(B))^n.$$

Оценим вероятность события  $B$ : в худшем случае (когда окрестность минимальна по площади) точка минимума находится на границе круга. При достаточно маленьком  $\delta$  можно считать, что в круге содержится  $\frac{1}{4}$  часть окрестности. Тогда

$$\mathbb{P}(B) \geq \frac{1}{4} \frac{\pi \delta^2}{\pi} = \frac{\delta^2}{4}.$$

И исходную вероятность можно оценить

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)^n \geq \alpha,$$

где  $\alpha$  — уровень значимости. Отсюда следует, что

$$n \geq \log_{1 - \frac{\delta(\varepsilon)^2}{4}} (1 - \alpha) \approx \log_{1 - \frac{\varepsilon^2}{740}} (1 - \alpha).$$

Поэтому на уровне значимости  $\alpha$  можно утверждать, что при таких  $n$  будет достигаться погрешность не больше  $\varepsilon$ .

Алгоритм выдаёт значение  $-1.288247014489$ , оптимизатор `scipy.optimize.fmin` выдаёт  $-1.2067$ . Это связано с тем, что оптимизатор может застрять в локальном минимуме.

## 7.2.2 Метод имитации отжига

Алгоритм основывается на идее имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. Предполагается, что атомы вещества уже почти выстроены в кристаллическую решётку, но ещё допустимы переходы отдельных атомов из одной ячейки в другую. Активность атомов тем выше, чем выше температура, которую постепенно понижают, что приводит к тому, что вероятность переходов в состояния с большей энергией уменьшается. Устойчивая кристаллическая решётка соответствует минимуму энергии атомов, поэтому атом либо переходит в состояние с меньшим уровнем энергии, либо остаётся на месте. В методе имитации отжига в качестве энергии берется функция, которую требуется минимизировать. Алгоритм выглядит следующим образом:

1. Задаётся начальное значение температуры  $t_0$ , начальное приближение  $(x_0, y_0)$ .
2. Уменьшаем температуру  $t_{k+1} = T(t_k)$  (в данном примере  $T(t) = 0.99t$ ).
3. Выбираем случайного соседа  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = G(x_k, y_k, t_k)$  (в данном примере  $G(x, y, t)$  генерирует  $x_{k+1} \sim N(x_k, t), y_{k+1} \sim N(y_k, t)$ ).
4. Если значение в новой точке меньше, то переходим в неё в любом случае, иначе переходим в неё с вероятностью  $P(g(x_{k+1}, y_{k+1}) - g(x_k, y_k), t_{k+1}))$  (в данном примере  $P(\delta g, t) = e^{-\frac{\delta g}{t}}$ ).
5. Если температура не оказалась ниже задаваемой минимальной температуры — алгоритм продолжает работу с п.2, иначе — останавливает работу.

### 7.2.3 Оценка средней погрешности.

Предположим  $\xi_i$  - случайные величины, равные погрешности решения, найденного при  $i$ -й попытке решения методом имитации отжига. Допустим,  $\xi$  имеет конечное матожидание  $\mu$  и конечную дисперсию  $\sigma^2$ . Тогда распределение среднего значения первых  $N$  таких случайных величин можно приблизить распределением нормального с параметрами  $\mu, \frac{\sigma^2}{n} < \infty$

Теперь рассмотрим выборку получившихся усреднений погрешностей  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Они независимы и одинаково распределены. Следовательно, доверительный интервал для дисперсии погрешности уровня  $\alpha$  будет выглядеть, как

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \bar{X} + \frac{S_1 a_1}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{S_1 a_2}{\sqrt{n}}, \text{ где } a_1 = q_{t_{n-1}}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right), a_2 = q_{t_{n-1}}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

При  $N = 100, n = 30$  доверительный интервал уровня  $\gamma = 0.99$  для  $\mu$  имеет вид  $(0.023726, 0.122715)$ .

## 8 Задача №8

### 8.1 Постановка задачи

1. Применить метод Монте-Карло к решению первой краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, (x, y) \in D; \\ u|_{\delta D} = f(x, y); \\ u \in C^2(D), f \in C(\delta D); \\ D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{cases}$$

Для функции  $f(x, y) = x^2 - y^2$  найти аналитическое решение и сравнить с полученным по методу Монте-Карло.

### 8.2 Теоретические выкладки и реализация

Заменим исходное уравнение на разностную схему. Будем решать задачу на сетке с узлами  $x_i = ih$ ,  $y_j = jh$ . Разделим узлы на две группы: внутренние и граничные. Узел  $(x_i, y_j)$  назовём внутренним, если узлы  $(x_{i+1}, y_j)$ ,  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j+1})$ ,  $(x_i, y_{j-1})$  лежат в области  $D$ . Если хотя бы один из соседних узлов выходит за границу области — узел назовём граничным (тогда  $(x_i, y_j) \in \delta D$ ). Внешние узлы не рассматриваются. В граничных узлах положим

$$u_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

Во внутренних узлах уравнение Лапласа можно заменить разностным уравнением

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0.$$

Перепишем его в виде

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}).$$

Рассмотрим процесс случайного блуждания. Пусть блуждание начинает из  $(x_i, y_j)$  и заканчивается в точке  $(x_k, y_m)$ , являющейся граничной. На каждом шаге равновероятно выбирается соседняя точка. Обозначим за  $\mathbb{P}(i, j, k, m)$  — вероятность, что траектория, начавшись в точке  $(x_i, y_j)$ , завершит блуждание в точке  $(x_k, y_m) \in \delta D$ . Заметим, что

$$\sum_{(x_k, y_m) \in \delta D} \mathbb{P}(i, j, k, m) = 1.$$

Причем, если  $(x_i, y_j), (x_k, y_m) \in \delta D$ , то

$$P(i, j, k, m) = \begin{cases} 1 & , (x_i, y_j) = (x_k, y_m), \\ 0 & , (x_i, y_j) \neq (x_k, y_m). \end{cases}$$

Пусть  $Y_{i,j}$  — случайная величина, принимающая значение  $f(x_k, y_m)$  с вероятностью  $P(i, j, k, m)$ ,  $(x_k, y_m) \in \delta D$ . Из ЗБЧ следует, что

$$V_{i,j} = \mathbb{E}Y_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^k, y^k),$$

где  $(x^k, y^k)$  — граничная точка, в которую попал процесс на  $k$ -ой итерации. На каждом шаге равновероятно выбирается соседняя точка, поэтому из формулы полной вероятности следует

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} \sum_{(x_k, y_m) \in \delta D} f(x_k, y_m) (\mathbb{P}(i+1, j, k, m) + \mathbb{P}(i-1, j, k, m) + \mathbb{P}(i, j+1, k, m) + \\ + \mathbb{P}(i, j-1, k, m)) = \frac{1}{4} (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1})$$

Получаем, что  $V$  удовлетворяет условию исходной задачи. Из единственности решения следует, что решение  $V$  совпадает с решением  $u$  разностной схемы. Опишем итоговый алгоритм метода Монте-Карло:

1. Строим квадратную сетку на  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  с шагом  $h$ .
2. Определяем внутренние и граничные точки.
3. В граничных точках положим  $u(x, y) = f(x, y)$ ; значение во внутренних точках будем считать по формуле

$$u_{i,j} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^k, y^k),$$

где  $(x^k, y^k)$  — граничная точка, в которую попал процесс на  $k$ -ой итерации.

Для снижения числа итераций можно рассмотреть модифицированный алгоритм:

1. Строим квадратную сетку на  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  с шагом  $h$ .
2. Определяем внутренние и граничные точки.
3. В граничных точках положим  $u(x, y) = f(x, y)$ .
4. Заводим счетчик  $Num(x, y)$  (инициализируем нулями) в точках сетки.
5. Выбираем произвольную точку  $(x_0, y_0) \in \delta D$ , заводим переменную  $curr = f(x_0, y_0)$ .
6. Начинаем случайное блуждание. На каждом шагу проверяем точку  $(x_{new}, y_{new})$ , в которую мы попали:
  - Если  $(x_{new}, y_{new}) \in \delta D$  — присвоим значение  $cur = f(x_{new}, y_{new})$ .
  - Иначе
$$u(x_{new}, y_{new}) = \frac{u(x_{new}, y_{new}) \cdot Num(x_{new}, y_{new}) + cur}{Num(x_{new}, y_{new}) + 1},$$

$$Num(x_{new}, y_{new}) = Num(x_{new}, y_{new}) + 1.$$
7. Алгоритм продолжается, пока число попаданий на границу не превысит предельное.

Для проверки алгоритма найдём аналитическое решение. Для этого запишем функции в полярных координатах:  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$

$$f(r, \phi) = r^2 \cos(2\phi),$$

$$u(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n\phi) dt, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(n\phi) dt,$$

Из этого следует, что  $a_2 = 1$ . Остальные члены обнуляются. Итоговый ответ:  $u(r, \phi) = r^2 \cos(2\phi)$ ,  $u(x, y) = x^2 - y^2$ .

### 8.3 Графики

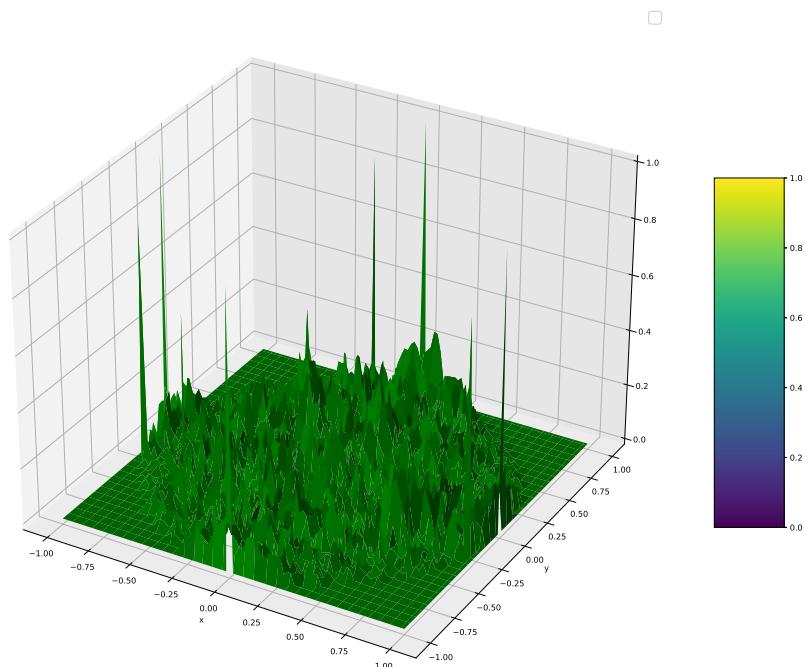


Рис. 21: Погрешность решения, полученного методом Монте-Карло.

## 9 Задача №9

### 9.1 Постановка задачи

Рассмотреть два вида процессов:

- Винеровский процесс  $W(t), t \in [0, 1], W(0) = 0$ .
- Процесс Орнштейна-Уленбека  $X(t), t \in [0, 1], X(0) = X_0$ , то есть стационарный марковский гауссовский процесс. Начальное значение  $X_0$  генерируется случайным образом так, чтобы полученный процесс был стационарным.

Для данных гауссовых процессов

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Моделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, с целью получить визуально непрерывной линии.

### 9.2 Теоретические выкладки и реализация

**Определение 13.** Случайным процессом  $X_t, t \in T$  называется континуальное семейство случайных величин  $X^T = \{X_t, t \in T\}$ , определенных на общем фазовом пространстве  $(\mathcal{X}^T, \mathcal{A}^T)$ .

**Определение 14.** Случайный процесс  $X_t, t \in T$  называется гауссовским, если для любого конечного набора индексов  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  случайный вектор  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  является гауссовским (имеет многомерное нормальное распределение)

Обозначим  $\mathbb{E}(X_t) = m(t), (X_t, X_s) = (t, s)$ . Определим ковариационную матрицу:

$$R = R(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{bmatrix} (t_1, t_1) & (t_1, t_2) & \dots & (t_1, t_n) \\ (t_2, t_1) & (t_2, t_2) & \dots & (t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (t_n, t_1) & (t_n, t_2) & \dots & (t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

Пусть  $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim N(m, R), m = (m(t_1), m(t_2), \dots, m(t_n))$ . Тогда его плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|R|}} e^{-\frac{1}{2} \langle R^{-1}(x-m), (x-m) \rangle}.$$

**Определение 15.** Случайный процесс  $X_t, t \in T$  называется процессом с независимыми приращениями, если для любых  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  случайные величины  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  независимы в совокупности.

**Определение 16.** Случайный процесс  $X_t, t \in T$  называется однородным по времени, если распределения приращений  $X_{t+h} - X_t$  не зависят от  $t$  при  $\forall h > 0$ .

### 9.2.1 Винеровский процесс

**Определение 17.** Винеровским процессом называется процесс, удовлетворяющий условиям:

1.  $W_0 = 0$  почти наверное,
2.  $W_t$  — процесс с независимыми приращениями.
3.  $W_t - W_s \sim N(0, t - s), \forall 0 \leq s < t < \infty$ .

Из условий следует, что винеровский процесс является гауссовским,  $m = 0$ ,  $(t, s) = \min(t, s)$ . Будем моделировать винеровский процесс методом деления отрезка  $[0, 1]$ :

1.  $W_0 = 0$ .
2.  $W_1 = W_1 - W_0 \sim N(0, 1)$ .
3. Пусть известно значение процесса на значениях  $t_1, t_2$  и между ними нет известных значений. Сгенерируем значение процесса в точке  $t = t_1 + \alpha(t_2 - t_1)$ . Для этого необходимо рассчитать условную плотность

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(x_1, x_2)}$$

где

$$\begin{aligned} p_{W_{t_1}, W_t, W_{t_2}}(x_1, x, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_1|}} e^{-\frac{1}{2}\langle R_1^{-1}(x_1, x, x_2), (x_1, x, x_2) \rangle}, \\ p_{W_{t_1}, W_{t_2}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|R_2|}} e^{-\frac{1}{2}\langle R_2^{-1}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle}. \end{aligned}$$

$R_1, R_2$  — матрицы ковариаций. Построим из исходя из вида ковариационной функции:

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t & t \\ t_1 & t & t_2 \end{bmatrix}, \\ R_1 &= \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем определители и обратные функции:

$$\begin{aligned} |R_1| &= t_1(t - t_1)(t_2 - t), \\ |R_2| &= t_1(t_2 - t_1), \\ R_1^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{t}{t_1(t-t_1)} & -\frac{1}{t-t_1} & 0 \\ -\frac{1}{t-t_1} & \frac{t_2-t_1}{(t_2-t)(t-t_1)} & -\frac{1}{(t_2-t)} \\ 0 & -\frac{1}{t_2-t} & \frac{1}{t_2-t} \end{bmatrix}, \\ R_2^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{t_2}{t_1(t_2-t_1)} & -\frac{1}{t_2-t_1} \\ -\frac{1}{t_2-t_1} & \frac{1}{t_2-t_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Итого, получим

$$p_{W_t}(x|W_{t_1} = x_1, W_{t_2} = x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)(t_2-t_1)}} e^{-\frac{(x-((1-\alpha)x_1+\alpha x_2))^2}{2\alpha(1-\alpha)(t_2-t_1)}}.$$

При  $\alpha = \frac{1}{2}$  плотность соответствует распределению  $N(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{t_2-t_1}{4})$ . Зная распределение, можно сгенерировать значение  $W_t$ .

4. Будем последовательно измельчать сетку, пока шаг не станет меньше заданной точности.

### 9.2.2 Процесс Орнштейна-Уленбека

**Определение 18.** Случайный процесс называется стационарным, если  $\theta_h X = X \forall h$  (распределение процесса инвариантно относительно сдвига).

**Определение 19.** Случайный процесс называется марковским, если  $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t, \forall h > 0:$

$$\mathbb{P}_{X_{t+h}|X_t=x, X_{t_1}=x_1, \dots, X_{t_n}=x_n} \stackrel{\text{п.в.}}{=} \mathbb{P}_{X_{t+h}|X_t=x}.$$

**Определение 20.** Процессом Орнштейна-Уленбека называется гауссовский марковский стационарный процесс.

Из стационарности процесса следует:

$$\mathbb{E}X_t = a, R(t, s) = R(|s - t|).$$

Обозначим  $\mathbb{D}W_t = \sigma^2$ , тогда  $R(t, s) = \sigma^2 \rho(s, t)$ , где  $\rho(s, t)$  — коэффициент корреляции.

**Теорема 10.** Для того чтобы последовательность  $W_1, \dots, W_n$  нормально распределенных величин была марковской, необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho(i, j) = \rho(i, k)\rho(k, j), \forall i, j, k : i \leq j < k \leq n,$$

где  $\rho(i, j)$  — коэффициент корреляции случайных величин  $W_i, W_j$ .

Из марковости и стационарности процесса следует

$$\rho(s, t) = \rho(s, \tau)\rho(\tau, t), s > \tau > t,$$

$$\rho(s - t) = \rho(s - \tau)\rho(\tau - t).$$

Сделаем замену  $x = s - \tau, y = \tau - t$ :

$$\rho(x + y) = \rho(x)\rho(y).$$

Нетривиальным решением этого уравнения является  $\rho(x) = e^{-\lambda x}$ . Тогда ковариационная функция имеет вид

$$R(s, t) = \sigma^2 e^{-\lambda |s-t|}.$$

Из гауссности следует

$$\begin{aligned} p_{X_t}(x_1 | X_s = x_2) &= \frac{p_{X_t, X_s}(x_1, x_2)}{p_{X_s}(x_2)}, \\ p_{X_t, X_s}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{|R_0|}} e^{-\frac{1}{2}\langle R_0^{-1}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle}, \\ p_{X_s}(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}}, \end{aligned}$$

где

$$R_0 = \sigma^4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-\lambda |s-t|} \\ e^{-\lambda |s-t|} & 1 \end{bmatrix},$$

$$|R_0| = \sigma^2(1 - e^{-2\lambda |s-t|}),$$

$$R_0^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda |s-t|}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -e^{-\lambda |s-t|} \\ -e^{-\lambda |s-t|} & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$p_{X_t}(x_1|X_s=x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2(1-e^{-2\lambda|s-t|}))}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1-e^{-\lambda|s-t|}x_2)^2}{\sigma^2(1-e^{-2\lambda|s-t|})}}$$

Поэтому  $F(X_t|X_s=x_2) \sim N(x_2e^{-\lambda|t-s|}, \sigma^2(1-e^{-2\lambda|t-s|}))$ . По аналогии с винеровским процессом будем моделировать процесс методом деления отрезка  $[0, 1]$ . Для упрощения сразу положим  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Пусть известны значения процесса в моменты  $t_1, t_2$ , смоделируем значение в момент  $t = \frac{t_1+t_2}{2}$ .

$$p_{X_t}(x|X_{t_1}=x_1, X_{t_2}=x_2) = \frac{p_{X_{t_1}, X_t, X_{t_2}}(x_1, x, x_2)}{p_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2)}$$

где

$$\begin{aligned} p_{X_{t_1}, X_t, X_{t_2}}(x_1, x, x_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|R_1|}} e^{-\frac{1}{2}\langle R_1^{-1}(x_1, x, x_2), (x_1, x, x_2) \rangle}, \\ p_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|R_2|}} e^{-\frac{1}{2}\langle R_2^{-1}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle}. \end{aligned}$$

$R_1, R_2$  — матрицы ковариаций. Построим из исходя из вида ковариационной функции:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-\lambda(t-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t-t_1)} & 1 & e^{-\lambda(t_2-t)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & e^{-\lambda(t_2-t)} & 1 \end{bmatrix}, \\ R_2 &= \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-\lambda(t_2-t_1)} \\ e^{-\lambda(t_2-t_1)} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определители и обратные функции будем искать с помощью библиотеки numpy для python. Подставив в формулы плотностей, получим итоговые распределения:

$$X_t \sim N((x_1 + x_2) \frac{e^{-\frac{\lambda(t_2-t_1)}{2}}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}}, \sigma^2 \frac{1 - e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{1 + e^{-\lambda(t_2-t_1)}}).$$

$$X_0 \sim N(0, \sigma^2), X_1 \sim N(x_0 e^{-\lambda}, \sigma^2(1 - e^{-2\lambda})).$$

### 9.3 Графики

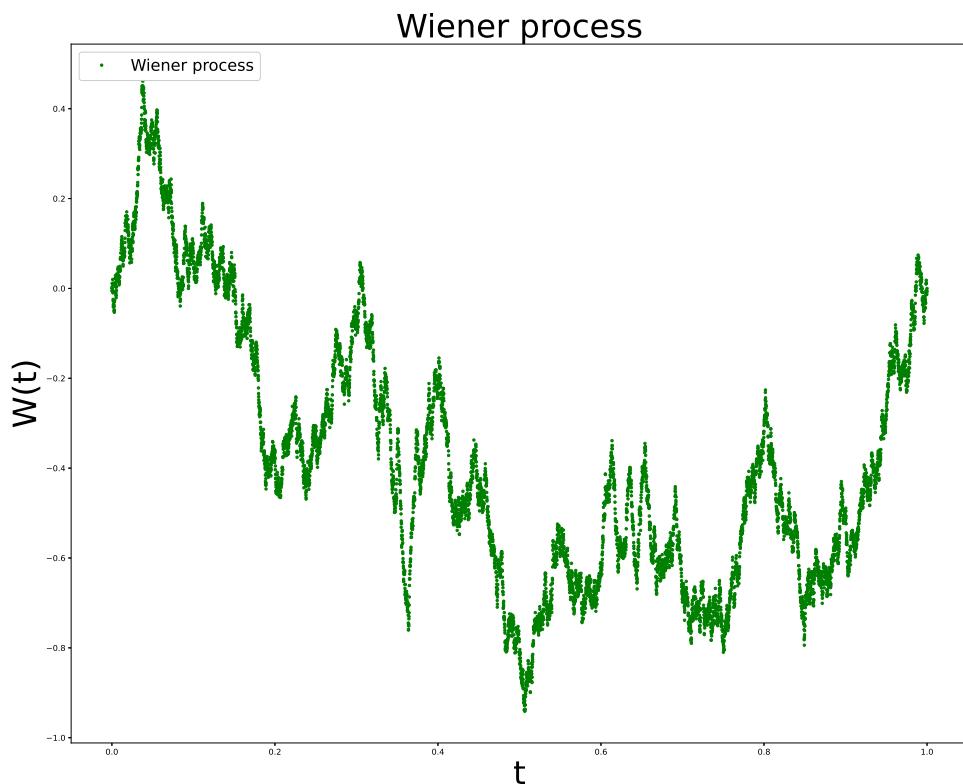


Рис. 22: Винеровский процесс

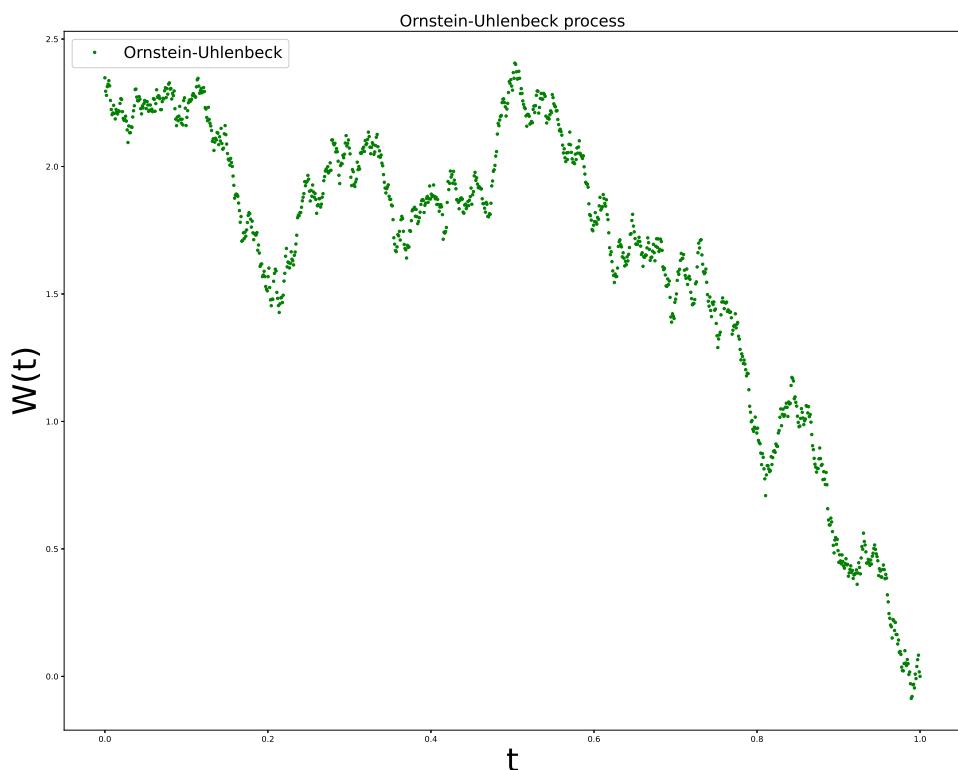


Рис. 23: Процесс Орнштейна-Уленбека

# 10 Задача №10

## 10.1 Постановка задачи

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна-Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить случайную ошибку с известной дисперсией к реализации процесса Орнштейна-Уленбека.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу. Параметры процесса и белого шума считать известными.

## 10.2 Теоретические выкладки и реализация

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + w_k, \\ y_{k+1} = C_{k+1} x^{k+1} + v_{k+1}, \end{cases}$$

где  $y_1, \dots, y_N$  — показания датчика с шумом  $v_k$ ,  $x_0, x_1, \dots, x_N$  — исходный процесс. Пусть  $\mathbb{E}x_0 = m_0$ ,  $\mathbb{D}x_0 = S$ ,  $\mathbb{E}w_k = \mathbb{E}v_k = 0$ ,  $\mathbb{D}w_k = M_k$ ,  $\mathbb{D}v_k = N_k$ . Фильтр Калмана имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1|k} = A_k x_{k|k}, \\ x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + R_{k+1|k} (C_{k+1} R_{k+1|k} C_{k+1}^T + N_{k+1})^{-1} (y_{k+1} - C_{k+1} x_{k+1|k}), \\ R_{k+1|k} = A_k R_{k|k} A_k^T + M_k, \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k} - R_{k+1|k} C_{k+1}^T (C_{k+1} R_{k+1|k} C_{k+1}^T + N_{k+1})^{-1} C_{k+1} R_{k+1|k}, \\ X_{0|0} = \mathbb{E}x_0, \\ R_{0|0} = \mathbb{D}x_0, \end{cases}$$

В исходной задаче  $A_k = a$ ,  $C_k = 1$ ,  $w_k \sim N(0, q)$ ,  $x_1 \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $v_k \sim N(0, r)$  и система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k + w_k, \\ y_{k+1} = x^{k+1} + v_{k+1}, \end{cases}$$

Перепишем фильтр Калмана

$$\begin{cases} x_{k+1|k} = ax_{k|k}, \\ x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + R_{k+1|k} (y_{k+1} - x_{k+1|k}) / (R_{k+1|k} + r), \\ R_{k+1|k} = a^2 R_{k|k} + q, \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k} - R_{k+1|k}^2 / (R_{k+1|k} + r), \\ X_{0|0} = 0, \\ R_{0|0} = \sigma^2. \end{cases}$$

Известны константы  $\sigma, \theta, r$ . Ковариационная функция процесса Орнштейна-Уленбека имеет вид

$$R(t, s) = (t, s) = e^{-|t-s|} \sigma^2.$$

Пусть  $t_{k+1} - t_k = \delta_t, \forall k$ . Рассмотрим ковариационную функцию:

$$(t_{k+1}, t_k) = \mathbb{E}(x_{k+1} x_k) - \mathbb{E}(x_{k+1}) \mathbb{E}(x_k) = \mathbb{E}(ax_k^2 + w_{k+1} x_k) - a(\mathbb{E}(x_k))^2 = a(\mathbb{E}(x_k^2) - (\mathbb{E}(x_k))^2) = a\sigma^2.$$

$$\text{cov}(t_k, t_k) = e^{-|t_k - t_k|} \sigma^2 = \sigma^2.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sigma^2 = a^2\sigma^2 + q, \\ \sigma^2 e^{-\lambda\delta_t} = a\sigma^2 \end{cases}$$

Откуда следует, что  $a = e^{-\lambda\delta_t}$ ,  $q = \sigma^2(1 - e^{-2\lambda\delta_t})$ . Итого, получим схему

$$\begin{cases} x_{k+1|k} = e^{-\lambda\delta_t}x_{k|k}, \\ x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k} + R_{k+1|k}(y_{k+1} - x_{k+1|k})/(R_{k+1|k} + r), \\ R_{k+1|k} = e^{-2\lambda\delta_t}R_{k|k} + \sigma^2(1 - e^{-2\lambda\delta_t}), \\ R_{k+1|k+1} = R_{k+1|k} - R_{k+1|k}^2/(R_{k+1|k} + r), \\ X_{0|0} = 0, \\ R_{0|0} = \sigma^2. \end{cases}$$

### 10.3 Графики

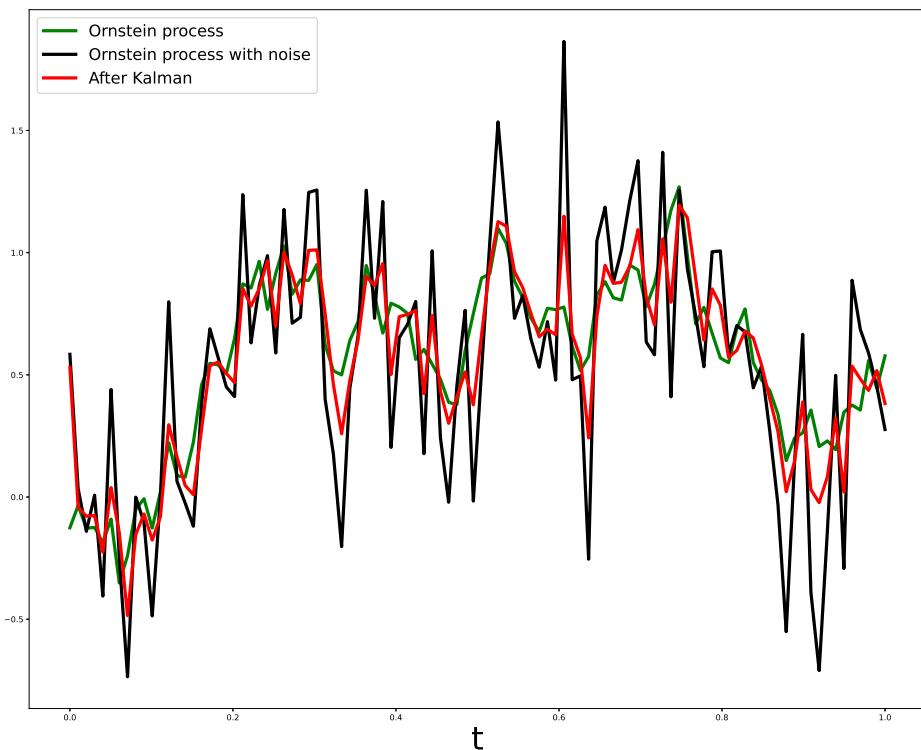


Рис. 24: Фильтр Калмана

# 11 Задача №11

## 11.1 Постановка задачи

Построить двумерное пуассоновское поле, отвечающее сложному пуассоновскому процессу:

1. Первая интерпретация: система массового обслуживания. При этом, первая координата поля — время поступления заявки в СМО (равномерное распределение), вторая — время её обслуживания (распределение  $\chi^2$  с 10 степенями свободы).
2. Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью  $\lambda(1 + \cos(t))$  и единичными скачками. Свести данную задачу моделирования неоднородного пуассоновского процесса при помощи метода Льюиса и Шедлеара к моделированию двумерного пуассоновского поля, где первая координата имеет равномерное распределение, а вторая — распределение Бернулли.
3. Третья интерпретация: работа страховой компании. Первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), вторая координата — величина ущерба (распределение Парето). Поступление капитала по времени линейно со скоростью  $c > 0$ , начальный капитал  $W > 0$ .
4. Для каждой системы рассмотреть всевозможные случаи поведения системы в зависимости от значения параметров.

## 11.2 Теоретические выкладки и реализация

### 11.2.1 Первая интерпретация: система массового обслуживания

Пусть  $\lambda$  — интенсивность пуассоновского поля. Из однородности следует, что времена поступления заявок  $T = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  генерируются так, что  $t_i - t_{i-1} \sim Exp(\lambda), \forall i = 1, \dots, n$ .

**Определение 21.** Распределением  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы называется распределение  $\sum_{i=1}^k X_i^2, X_i \sim N(0, 1)$ .

Пусть заявки обрабатываются за время  $s_i \sim \chi^2(10)$ . Заявки обрабатываются последовательно, поэтому необходимо учитывать очередь. Алгоритм моделирования пуассоновского поля:

1. Генерируем  $t_i = t_{i-1} + \delta_{t_i}$ , где  $\delta_{t_i} \sim Exp(\lambda), s_i \sim \chi^2(10)$ .
2. Убираем из очереди все заявки, исполнившиеся к моменту  $t_i$  и добавляем в очередь значение  $s_i$ .
3. В каждый момент времени, когда приходит новая заявка или заявка заканчивает обработку фиксируем число заявок.
4. Повторяем алгоритм пока рассматриваемый момент времени не превысит предельное значение  $T$ .

Заметим, что  $E(s_i) = 10$ , а  $E(\delta_{t_i}) = \frac{1}{\lambda}$ . Если среднее время между поступлениями заявок превысит время обработки ( $\lambda < 0.1$ ) — очередь не будет расти. При  $\lambda = 0.1$  очередь, вообще говоря, будет расти. При  $\lambda > 0.1$  очередь будет неограниченно расти.

### 11.2.2 Вторая интерпретация: система массового обслуживания с циклической интенсивностью $\lambda(1 + \cos(t))$ и единичными скачками.

Воспользуемся теоремой из статьи:

**Теорема 11.** Пусть существует одномерный неоднородный пуссоновский процесс с параметром  $\lambda^*$ , тогда количество точек  $N^*(T)$  на интервале  $(0, T]$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\mu^* = \Lambda^*(T) - \Lambda^*(0)$ . Пусть  $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$  — точки процесса на рассматриваемом интервале. Пусть  $0 \leq t \leq T, \lambda(t) \leq \lambda^*(t)$ . Из набора  $X^*$  удалим  $X_i^*$  с вероятностью  $1 - \frac{\lambda(X_i^*)}{\lambda^*(X_i^*)}$ . Оставшиеся точки образуют одномерный неоднородный пуссоновский процесс  $\{N(x) : x \geq 0\}$  с параметром  $\lambda(t)$ , на интервале  $(0, T]$ .

Получим следующий алгоритм:

- Генерируем массив  $T^* = (0, t_1^*, \dots, t_n^*)$  времени поступления заявок.  $t_i^* - t_{i-1}^* \sim Exp(\lambda^*)$ , возьмём

$$\lambda^* = 2\lambda \geq \lambda(1 + \cos(t)), \forall t.$$

- Сгенерируем  $f_1, \dots, f_n, f_i \sim Be\left(\frac{1+\cos(t_i^*)}{2}\right)$ .

- Из начального массива отбросим  $t_i^*$ , если  $f_i = 0$ . Получим  $T = (0, t_1, \dots, t_m)$ , который будет отвечать пуссоновскому процессу с циклической интенсивностью.

### 11.2.3 Третья интерпретация: работа страховой компании

**Определение 22.** Случайная величина  $X$  имеет распределение Парето с параметрами  $x_m, k$ , если её функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{k}\right)^k.$$

Для моделирования случайной величины, имеющей распределение Парето, воспользуемся методом обратной функции.

$$F_X^{-1}(x) = \frac{x_m}{(1-x)^{\frac{1}{k}}}.$$

Пусть  $X \sim U[0, 1]$ . Заметим, что  $1 - X \sim U[0, 1]$ , поэтому можно заменить:

$$Y = \frac{x_m}{(1-x)^{\frac{1}{k}}}.$$

Тогда  $Y$  имеет распределение Парето с параметрами  $x_m, k$ . Времена наступления страховых случаев  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  распределены  $t_i - t_{i-1} \sim Exp(\lambda)$  с параметром  $\lambda$  — интенсивность потока страховых случаев. Пусть в момент  $t_i$  происходит страховой случай с ущербом  $s_i$  из распределения Парето. Найдем его матожидание:

$$\mathbb{E}(s_i) = \begin{cases} \frac{kx_m}{k-1}, & k > 1 \\ +\infty, & k \leq 1 \end{cases}$$

За время  $\Delta t$  капитал увеличивается на величину  $c\Delta t$ . Поэтому можно моделировать изменение капитала  $W(t)$  следующим образом:

- Инициализируем значение капитала в начальный момент времени.

2. Генерируем времена наступления страховых случаев  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  и величины ущерба  $s = (s_1, \dots, s_n)$  распределения Парето.
3. Для каждого  $t_i$  высчитываем значение  $W(t_i - 0) = W(t_{i-1}) + c(t_i - t_{i-1})$ ,  $W(t_i + 0) = W(t_i - 0) - s_i$ . На графике промежуток времени без наступления страховых случаев будет изображен в виде прямой с коэффициентом наклона  $c$ . Момент наступления страхового случая будет изображен вертикальной прямой вниз.
4. По достижению предельного времени или в случае банкротства ( $W(t) = 0$ ) — прекращаем алгоритм.

Изучим поведение  $W(t)$ . За время  $t$  происходит в среднем  $\lambda t$  страховых случаев (следует из того, что приращение пуассоновского процесса  $X_t - X_s \sim Pois(\lambda(t-s))$ ). Тогда

$$(\mathbb{E}W(t))' = (W(0) + ct - \mathbb{E}(\sum_{t_i \leq t} s_i))' = c - \lambda \mathbb{E}s_1 = c - \frac{\lambda k x_m}{k-1}.$$

Получаем, что при  $c > \frac{\lambda k x_m}{k-1}$  капитал будет увеличиваться. При  $c < \frac{\lambda k x_m}{k-1}$  компания со временем обанкротится. При  $c = \frac{\lambda k x_m}{k-1}$  капитал компании не будет сильно отклоняться от начального значения.

### 11.3 Графики

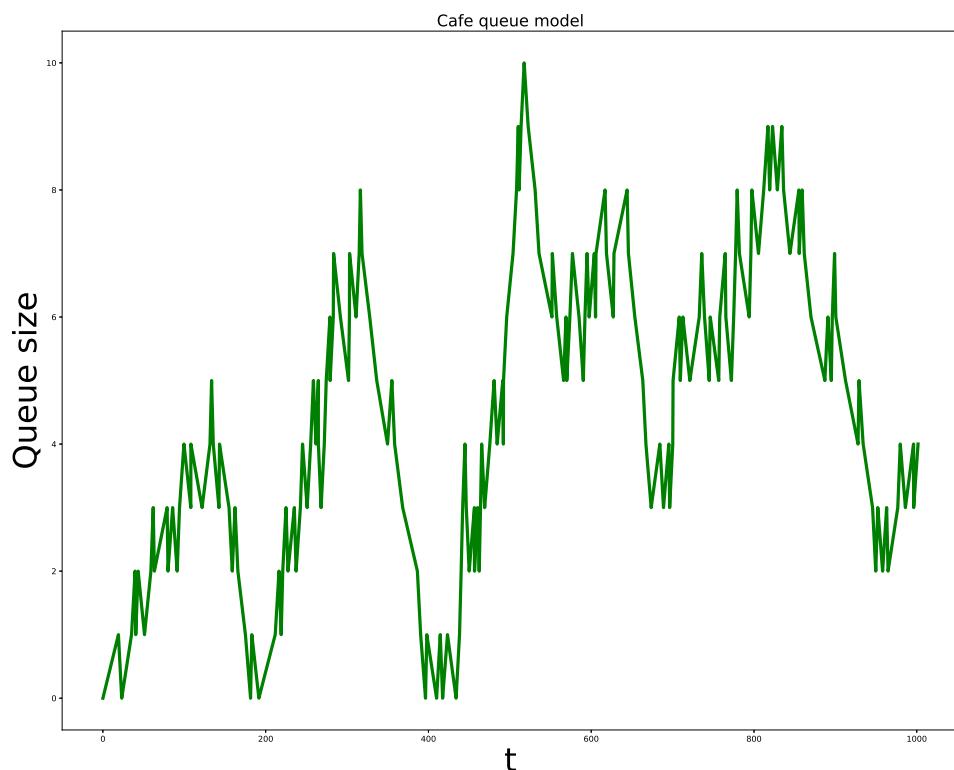


Рис. 25: СМО

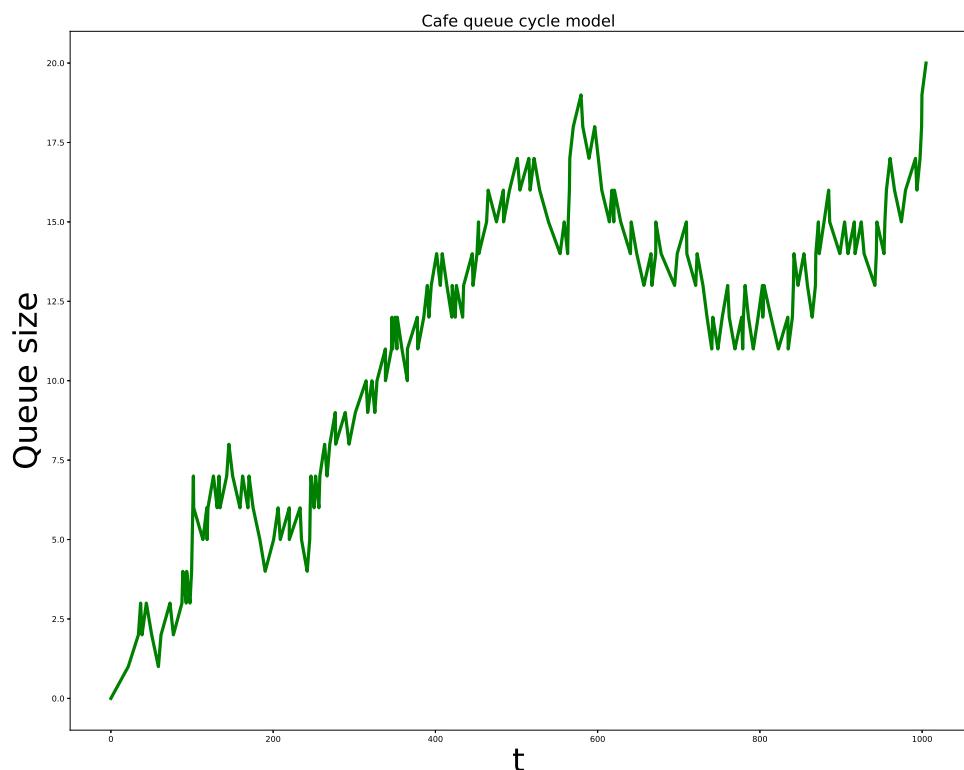


Рис. 26: Пуассоновский процесс с циклической интенсивностью

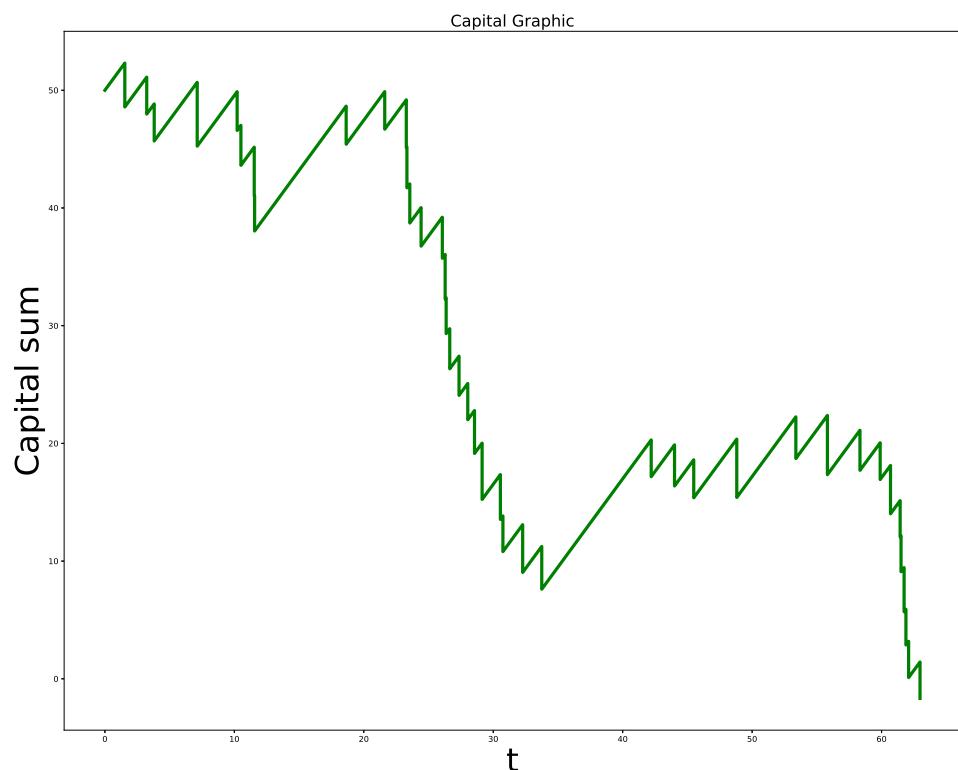


Рис. 27: Капитал

## Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев "Вероятность". Наука. М.: 1989.
- [2] Box, GEP; Muller, Mervin E. (1958). «Заметка о генерации случайных нормальных отклонений»
- [3] Чернова Н. И. Математическая статистика: Учеб. пособие Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007