M2 OAM : Introduction à la turbulence **Automne 2024**

TP2 : Processus Gaussiens

Quelques exercices aléatoires.

---

1. Calculer la fonction caractéristique $\chi(t) = \left\langle e^{itX} \right\rangle$, en déduire les kurtosis associées pour
   - $X \overset{L}{=} N(0,1)$
   - $X \overset{L}{=} Laplace(0,1)$, de densité $p(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$
   - $X \overset{L}{=} U([-1/2, 1/2])$ (loi uniforme)
2. Etant donné un Wiener W, montrer que les processus suivant sont aussi des Wieners:
   - $-W_t, \quad t \geq 0$
   - $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} W_{\alpha t}, \quad t \geq 0$
   - $W_{1-t} - W_1, \quad t \in [0,1]$
   - $tW_{1/t}, \quad t > 0$
3. Calculer les moments $< W_t^p >$ d'un Wiener 1D.
4. Si X_t, Y_t sont deux processus Gaussiens indépendants, montrer que les processus suivants sont aussi Gaussiens
   - $\tilde{X}_t := X_{f(t)}$ où f est strictement croissante
   - $\tilde{X}_t := X_t + \alpha Y_t$
5. Les processus suivants sont-il stationnaires?
   - $e^{-t} W_{e^{2t}}$
   - $W_t - tW_1, \quad t \in [0,1]$
   - $(1-t)W_{t/(1-t)}, \quad t \in [0,1]$
6. Calculer les spectres de puissance $S(k) := \dfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} C(x) dx$ associés à
   - un bruit blanc : $C(x) = \delta(x)$
   - un Orstein-Uhlenbeck: $C(x) = C_0^2 e^{-|x|}$
   - une corrélation triangle: $C(x) = C_0(1 - |x|)1_{|x|<1}$
   - une corrélation algébrique: $C(x) = C_0(1 - |x|^{\xi})1_{|x|<1}$ pour $\xi < 1$
7. On considère une approximation discrète du brownien sur $[0,T]$ telle que $R_n(T) := (2S_n - n)\Delta x$ avec $S_n := \sum_{i=0}^{n-1} X_i, \quad X_i \overset{Loi}{=} Bernouilli(1/2), i.i.d.$ On note $\kappa := \Delta x^2 / \Delta t$
   - Calculer $\langle R_n \rangle, \langle R_n^2 \rangle$

- Montrer que

$$R_n/\sqrt{\kappa T} \stackrel{L}{=} N(0,1) \quad \text{pour } n \to \infty$$

- Simuler le processus pour diverses lois X et retrouver numériquement le théorème central limite.