11.10.12 Analysis f. Informatiker

Wiederholung:

Sei $M$ Menge

Wenn $M$ endlich: $\# M =$ Anzahl Elemente $\in M$

Wenn $M$ unendlich: $\# M = \infty$

Für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ $\qquad 0! = 1$

Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

~~Lem~~ Lemma 1.11

! ändern, vorher falsch!

Wenn ~~F~~ $0 < k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad \text{z. B. } \binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

**Bemerkung:**

Terme sind nur def. wenn $0 < k < n$

**1.12)**

Geometrische Anordnung: Pascalsches Dreieck

$$\begin{matrix} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

~~Fl~~ Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle ~~für~~ $0 \leq k \leq n$

**Satz 1.13)**

Sei $A$ endliche Menge

$\# A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ ~~so~~ mit ~~01~~ $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{ U \subseteq A \mid \# U = k \}$
(Menge aller $k$-elementigen Teilmengen von $A$)
Dann gilt $\# P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:
$A = \{1,2,3,4\}$ $n=4$ $k=2$
2-elementige Teilmengen von $A$:
$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,4\}$
$\{2,3\}$ $\{2,4\}$ $\{3,4\}$ $\longrightarrow$ 6
$\binom{4}{2} = 6$ ok

Beweis
Vorüberlegung: Sei $k=0 \vee k=n$
$P_0(A) = \{\emptyset\}$ $P_n(A) = \{A\}$
$\# P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\# P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$ ok
Jetzt: Induktionsbeweis nach $n$
Anfang: $n=0$ Dann $k=0$ ok
I.S.: $n \to n+1$
Sei $\# A = n+1$
$\Rightarrow 0 \leq k \leq (n+1)$
Falls $k=0 \vee k=n+1$: fertig
Sei also: $0 < k < n+1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \setminus \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}$, $\# B = n$
Man kann die Wahl einer ~~k-el~~ $k$-elementigen Teilmenge von $A$ so strukturieren
1) Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2a) Wenn $a \notin U$: Wähle $k$ Elemente aus $B$
2b) Wenn $a \in U$: Wähle $k-1$ Elemente aus $B$

$\Rightarrow \# P_k(A) = \# P_k(B) + \# P_{k-1}(B)$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \underset{1.11}{=} \binom{n+1}{k} \qquad \text{q.e.d.}$$

IV:

## Satz 1.14 (Binomische Formel)

Seien $a, b$ Zahlen, $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

z.B.: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Beweis:**

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{\text{n Faktoren}}$ ~~n-mal~~

Ausmultiplizieren

Erhalte Terme der Form $a^{n-k} b^k$ mit $0 \le k \le n$

~~Häufigkeit~~

Häufigkeit von $a^{n-k} a^k$

= Anzahl der Möglichkeiten,

aus $n$ Faktoren $k$ mal $b$ zu wählen. ~~Das ist $\binom{n}{k}$~~

Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

**Folgerung**

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k} b^k = 1$

$$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

**Beispiel**

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

## Definition 1.15

Sei $A$ endliche Menge

Eine Anordnung von $A$ ist ein $n$-Tupel

$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A$ für alle $i$ und

$a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel

Anordnungen von $\{1,2,3\}$: $(1,2,3)$ $(1,3,2)$

$(2,1,3)$ $(2,3,1)$

$(3,1,2)$ $(3,2,1)$ $\to 6$

Satz 1.16

Sei $A$ endliche $\underbrace{}_{\text{nicht leere}}$ Menge, $\# A = n \geq 1$

Dann ist die Anzahl der Anordnungen von $A$ gleich $n!$

Beweis

Induktion nach $n$

IA: $n=1$ klar

IS: $n \to n+1$

Sei $\# A = n+1$

Wahl einer Anordnung von $A$ kann man so unterteilen:

1) Wähle 1 Element $a_1 \in A$

($n+1$ Möglichkeiten)

2) Wähle Anordnung von $A \setminus \{a_1\}$

$\# (A \setminus \{a_1\}) = n$

$= n!$ Möglichkeiten bei 2

Insgesamt: $(n+1) n! = (n+1)!$ q.e.d.

Bemerkung

(Zusammenhang zwischen Anordnung u. Teilmengen)

Sei $A$ endl. Menge, $\# A = n$, $0 \leq k \leq n$

Sei $(a_1, \dots, a_n)$ Anordnung von $A$

$\leadsto$ Teilmenge $U := \{a_1, \dots, a_k\}$ Dann

$U \subseteq A$, $\# U = k$ $U \in P_k(A)$

Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$k!\,(n-k)!$ -mal

Anordnungen von U

Anordnungen A \ U

$\Rightarrow$ ~~#~~ # Anordnungen von $A = n!$

$= \# P_k(A) \cdot k!\,(n-k)!$

$\Rightarrow \# P_k(A) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

## 2 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen?

Präzise Konstruktion ist umfangreich

Axiomatischer Zugang

Beschreibung der reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften (Axiome):

1) Grundrechenarten → Körper
2) Ungleichungen → angeordneten Körper
3) Lückenlosigkeit → Vollständigkeit

**Körper**

**Definition 2.1)**

Ein Körper ist eine Menge $K$ mit 2 Rechenoperationen:
Addition ($+$) und Multiplikation ($\cdot$)
So dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:

**Addition**

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a,b,c \in K$
~~Assoz~~ Assoziativgesetz
2) $a+b = b+a$ für alle $a,b \in K$
Kommutativgesetz
3) Es gibt ein $0 \in K$ so dass $0+a=a$

$\forall$ = "für alle"

$\forall\, a \in K$

4) Für jedes $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a+b=0$

<u>Bem.</u>

$0 \in K$ ist eindeutig.

<u>Beweis</u>

Wenn $0' \in K$ mit $0'+a=a$, dann $0=0'+0=0+0'=0'$

q.e.d.

<u>Bem.</u> ~~9.~~

Das $b$ in 4) ist auch eindeutig. ~~Notation~~.

Notation: $b=-a$ (Negatives von $a$)

<u>Beweis</u>

~~$b = b+0$~~ Angenommen: $b'+a=0$

~~$b \in$~~ $b=b+0=b+(a+b')=(b+a)+b'=0+b'=b'$ q.e.d.

<u>Multiplikation</u>

5) $a(bc)=(ab)c \quad \forall\, a,b,c \in K$

6) $ab=ba \quad \forall\, a,b \in K$

7) Es gibt ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$, so dass
$1 \cdot a = a \quad \forall\, a \in K$

8) ~~Für alle Elemente~~

8) Für alle $a \in K$, $a \neq 0$, gibt es ein $b \in K$ mit $ab=1$

<u>Bem.</u>

$1 \in K$ ist eindeutig, ~~b ist~~ $b$ in 8) ist eindeutig

Beziehung $b=a^{-1}$

<u>Beweis</u>

Wie eben.

q.e.d.

9) Distributivgesetz

$a(b+c)=ab+ac \quad \forall\, a,b,c \in K$

Weitere Bezeichnungen:

$$a-b := a+(-b)\ ,\ \frac{a}{b} = a\cdot b^{-1}\ , \text{wenn } b\neq 0$$

~~B~~

Bem.

Die üblichen Rechenregeln folgen aus diesen Axiomen 1)–9)

z.B.:

$$-(-a)=b\ ,\ a(b-c)=ab-ac\ ,\ a(-b)=-(ab)$$

Beispiele 2.2)

$\mathbb{Q}$ ist Körper

$\mathbb{Z}$ ist kein Körper (8) nicht erfüllt)

Beispiel 2.3)

$\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$

Definition von $+$ und $\cdot$ :

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$1+1=0$

$\boxed{\text{Übung: Prüfe alle Körperaxiome}}$

Bem.:

sei $K$ endlicher Körper

Dann gilt $\#K = p^r$ wobei $p$ Primzahl, $r\in\mathbb{N}$

Für jede solche ~~Za~~ $q=p^r$ gibt es genau einen Körper $K$ mit $\#K=q$

Analysis

Wdh. Angeordneter Körper:

Menge $K$ mit $+, \cdot, <$

so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind

z.B.: $\mathbb{Q}$ ~~ist~~ sind ein angeordneter Körper

~~Sei~~ Sei $K$ angeordneter Körper, $M \subseteq K$ Teilmenge

$a \in K$ ist obere Schranke von $M$, wenn $M \leq a$

d.h.: $x \leq a \; \forall x \in M$

$a \in K$ ist kleinste obere Schranke, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 1) \; M \leq a \\ 2) \text{ Wenn } b < a, \text{ dann nicht } M \leq b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Bezeichung} \\ a = \sup(M) \end{array}$$

Beispiel: $K = \mathbb{Q}$

$M = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}$

Beh.: $\sup(M) = 0$

Beweis: 1) Zeige: $M \leq 0$, d.h.: $\frac{1}{n} < 0$ f. alle $n \in \mathbb{N}$ ok

2) Zeige: Wenn $b = \mathbb{Q}$, $b < 0$, dann nicht $M \leq b$

Schreibe $b = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$b < 0$ heißt $m < 0$, $m \leq -1$

$b = \frac{m}{n} \leq \frac{-1}{n} < \frac{-1}{n+1} \in M$

$\Rightarrow M \nleq b$ (nicht $M \leq b$) q.e.d.

Vollständigkeit

2.13) Def

Ein angeordneter Körper $K$ heißt Dedekind-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge von $K$ eine kleinste obere Schranke hat.

2.14) Satz

Es gibt genau einen Dedekind-vollständigen

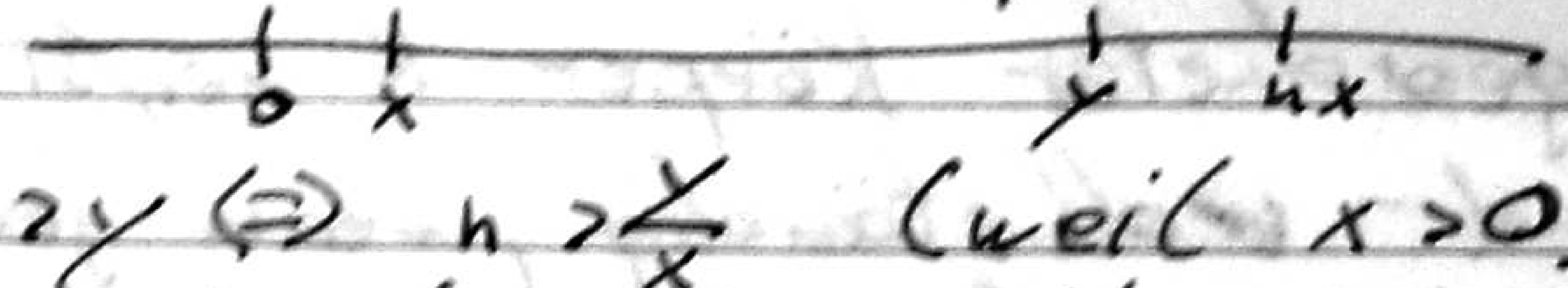
angeordneten Körper $K$.
Dieser heißt Körper der reellen Zahlen.
<u>Bezeichnung:</u> $\mathbb{R}$
<u>Beweis</u> ausgelassen

<u>2.15) Satz</u>
~~Die nat. Zahlen Fa~~
Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt

<u>Beweis</u> (verwende nur die Axiome)
Indirekter Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist beschränkt
Vollständigkeit:
$\mathbb{N}$ hat eine kleinste obere Schranke $a \in \mathbb{R}$
Es gilt $a-1 < a \Rightarrow a-1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ $\quad n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n+1 \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq a-1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ Widerspruch!
~~An~~ Also Annahme falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt q.e.d.

beschränkt = nach oben beschränkt
und nach unten beschränkt
unbeschränkt = nicht nach oben
oder nicht nach unten beschränkt

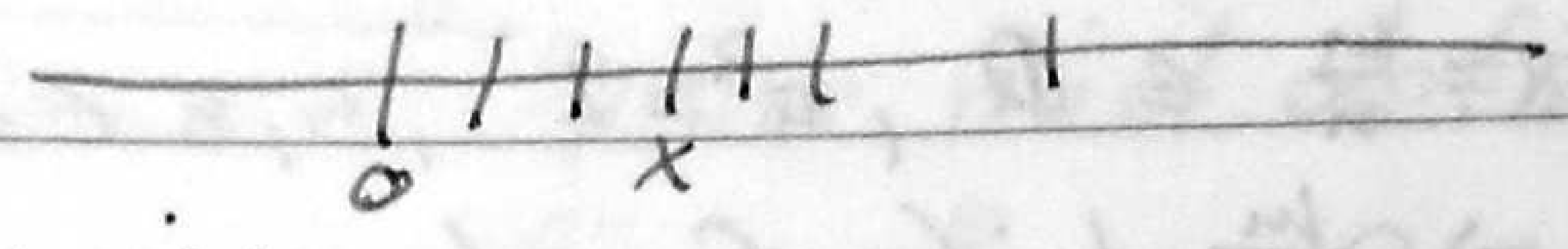
<u>2.16) Folgerung</u> (Prinzip des Archimedes)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$




<u>Beweis</u> $nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$ (weil $x > 0$)
$\mathbb{N}$ unbeschränkt $\Rightarrow \frac{y}{x}$ ist keine obere
und nicht nach oben beschränkt $\quad$ Schranke von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$ q.e.d.

## 2.17) Folgerung

Sei $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$



**Beweis:**

$\frac{1}{n} < x \Leftrightarrow 1 < n \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < n$

(weil $x$ positiv)

$\frac{1}{x}$ keine ob. Schranke von $\mathbb{N}$

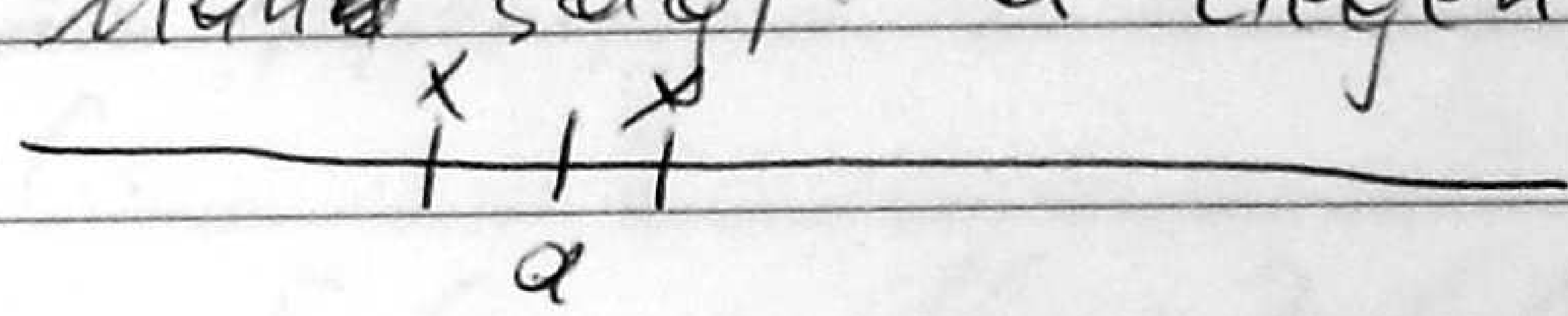
$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x} < n$ q.e.d

## 2.18) Satz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

Dann gibt es $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$

Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$



**Beweis**

$y - x > 0$ Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$

Ansatz: $a = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$

Sei $M = \{ m \in \mathbb{Z} \mid x < \frac{m}{n} \} = \{ m \in \mathbb{Z} \mid nx < m \}$

$M$ ist nach unten beschränkt und nicht leer (wegen Archimedes)

$M$ hat ein Minimum

Sei $m = \min(M)$

$m \in M \Rightarrow x < \frac{m}{n}$

$m - 1 \notin M \Rightarrow x \geq \frac{m-1}{n}$

$$y - \frac{m}{n} = y - x + x - \frac{m}{n} > \frac{1}{n} + x - \frac{m}{n} = x - \frac{m-1}{n} \geq 0$$

$y > \frac{m}{n}$ q.e.d.

Wurzeln

2.19) Satz

Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Beweis: Angenommen $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $a^2 = 2$, $m, n \in \mathbb{N}$

Kürze den Bruch $\Rightarrow \frac{m}{n}$ teiler fremd

$a^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$

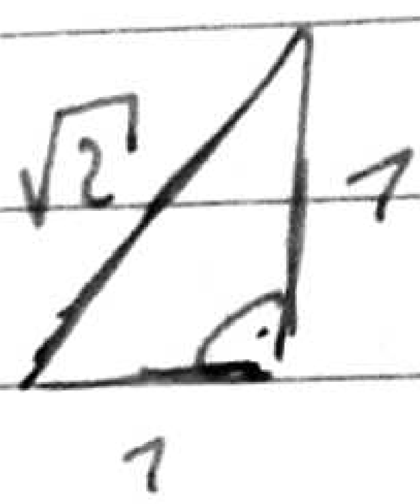
$\Rightarrow m^2$ gerade $\Rightarrow m$ gerade $m = 2q$, $q \in \mathbb{N}$

$(2q)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4q^2 = 2n^2 \Rightarrow 2q^2 = n^2$

$\Rightarrow n^2$ gerade $\Rightarrow n$ gerade

Widerspruch zur Annahme $m, n$ teilerfremd

q.e.d.




$\Rightarrow \sqrt{2}$ sollte existieren

Bem.:

Wenn $n \in \mathbb{N}$, keine Quadratzahl, dann gibt es kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = n$

(ähnlicher Beweis)

2.20) Satz

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

Dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ mit $y^n = x$

Bezeichnung: $y = \sqrt[n]{x}$

Beweis: später

Ansatz: $\sup \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^n \leq x \} =: y$

(sup existiert weil $\mathbb{R}$ Dedekind-vollst.)

2.21) Def.:

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Potenzrechnung: $x^{a+b} = x^a x^b$, $x^{ab} = (x^a)^b$

für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$

Bemerkung:

Später wird definiert: $x^a$

für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$

# 3 Folgen und Reihen reeller Zahlen

Grundbegriff d. Analysis:

Konvergenz:

Beispiel: Wenn $n \in \mathbb{N}$ immer größer wird, geht $\frac{1}{n}$ immer näher an Null

Sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

3.1) Def.:

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ d.h. jeder nat. Zahl $n$ $(n \geq 0)$ wird eine ~~re~~ reelle Zahl $a_n$ zugeordnet.

Notation: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder $(a_n)_{n \geq 0}$

oder $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

Variante:

Folgen, die bei $k \in \mathbb{Z}$ anfangen:

$(a_n)_{n \geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$

Beispiele

1) konstante Folge: $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ fest

$(a, a, a, a, \dots)$

2) $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$

$(a_n)_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

3) $a_n = (-1)^n$ $n \geq 0$

$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

4) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$

**3.2) Def.:** Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen

1) Die Folge $(a_n)$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt: Für jedes $\varepsilon > \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$

so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

Dann heißt $a$ Grenzwert der Folge $(a_n)$

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

2) Die Folge $(a_n)$ heißt Nullfolge, wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$

3) Die Folge $(a_n)$ ist divergent, wenn sie keinen Grenzwert hat.

**3.3) Beispiel**

1) $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$

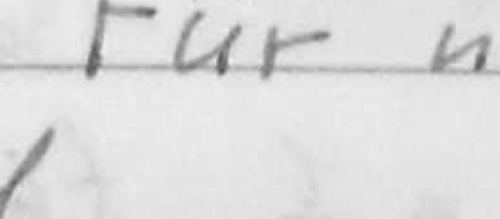
Beh.: $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

Beweis.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Archimedes: es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$

Dann gilt für $n \geq N$: $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

2) $a_n = a$ für $n \geq 0$

Beh.: $a_n \to a$ für $n \to \infty$




Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $N = 0$ Für $n \geq N$ gilt $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ q.e.d.

3) $a_n = (-1)^n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$


Beh.: $(a_n)$ ist divergent.

Beweis: Angenommen, $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert der Folge.

Wähle $\varepsilon = 1$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$

f. alle $n \geq \mathbb{N}$

Wenn $n$ gerade: $a_n = 1$ ~~Da~~ $|1-a| < 1$

Wenn $n$ ungerade: $a_n = -1$ $|-1-a| < 1 \Rightarrow |1+a| < 1$

$$2 = |2| = |1-a+1+a| \leq |1-a| + |1+a| < 2$$

$\Rightarrow 2 < 2$ Widerspruch: Also ist $(a_n)$ divergent

Wdh.:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a\in\mathbb{R}$ wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ s.d.

$|a_n-a|<\varepsilon$ für alle $n\geq N$

~~Bsp.~~ Bez.:

$a_n\to a$ für $n\to\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$

Bsp.:

$\frac{1}{n}\to 0$ für $n\to\infty$

$(-1)^n$ divergiert

$(a_n)$ ist divergent, wenn sie gegen kein $a\in\mathbb{R}$ konvergiert.

Bsp.: $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots)$

konvergiert gegen $0$

Satz 3.4) (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Sei $(a_n)$ Folge reeller Zahlen und $a, b\in\mathbb{R}$ mit $a_n\to a$ und $a_n\to b$ für $n\to\infty$

Dann ist $a=b$.

Bem.:

Darum ist ~~diese~~ Bezeichnung $a=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ sinnvoll.

Beweis: Angenommen, $a\neq b$

Sei $\varepsilon:=\frac{|a-b|}{2}$


Konvergenz: es gibt $N_1\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a|<\varepsilon$ für alle $n\geq N_1$,

$N_2\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-b|<\varepsilon$ $\forall$ $n\geq N_2$

Sei $n=\cancel{m}\,\cancel{N}\max(N_1,N_2)$

$$|a-b|=|a-a_n+a_n-b|\leq|a-a_n|+|a_n-b|<\underbrace{\varepsilon+\varepsilon}_{=|a-b|}$$

Schmierzettel !!!

$\Rightarrow |a-b| < |a-b|$ ~~Wied~~ Widerspruch

$\Rightarrow a \neq b$, d.h. $a=b$ q.e.d.

**Def. 3.5)**

Eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt bzw. nach unten beschränkt bzw. beschränkt, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dieselbe Eigenschaft hat.

**Satz 3.6)**

Jede konvergente Folge ~~ist beschränkt~~ reeller Zahlen ist beschränkt.

**Beweis:**

Angenommen $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Wähle $\varepsilon = 1$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ s.d.

$|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$

Sei $C := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots |a_{N-1}|, |a|+1\}$

Dann $|a_n| \leq C$ für $n \leq N+1$

Für $n \geq N$ gilt:

$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \leq C$

Somit $|a_n| \leq C \ \forall n$

$-C \leq a_n \leq C \ \forall n$

$\Rightarrow$ Folge $(a_n)$ ist beschränkt.

**Bem.:**

Nicht jede beschr. Folge konvergiert.

z.B.: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

**3.7 Def.**

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)$ konvergiert uneigentlich gegen unendlich, wenn gilt:

Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{R}$ mit ~~$a_n \geq C$~~ $a_n > C$

für alle $n \geq N$

**Bem.:**

Alternative Terminologie:

"konvergiert uneigentlich" (gegen $\infty$)

= "divergiert bestimmt" (gegen $\infty$)

**Bsp.:**

1) $a_n = n$ $\quad a_n \to \infty$ für $n \to \infty$

**Bez.:**

$a_n \to \infty$ f. $n \to \infty$

$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \infty$

**Bsp.:**

2) $a_n = (-1)^n \cdot n$ konvergiert nicht

$(0, -1, 2, -3, 4, -5, \ldots)$ uneigentlich gegen $\infty$

**Satz 3.8)** (Potenzenwachstum)

Sei $x \in \mathbb{R}$ Betrachte Folge: $(x^n)_{n \geq 0}$

1) Wenn $|x| > 1$, dann ist $(x^n)$ divergent.

2) Wenn $x > 1$, dann $x^n \to \infty$ f. $n \to \infty$

3) Wenn $|x| < 1$, dann $x^n \to 0$ f. $n \to \infty$

**Beweis:**

2) Sei $x > 1$

Schreibe $x = 1 + a$. Dann $a > 0$

~~Satz 3.9)~~ Satz 2.9 $\Rightarrow$

$x^n = (1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$

Archimedes: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $Na > C$ ; $C \in \mathbb{R}$

Für $n \geq N$ gilt:

$x^n = (1+a)^n \geq 1 + na \geq 1 + N \cdot a > 1 + C > C$

$\Rightarrow$ 2) stimmt!

Schmierzettel!!!

1) Sei $|x| > 1$. Dann $|x^n| = |x|^n$, $|x| > 1$

2) $\Rightarrow$ $|x^n|$ ist nicht beschränkt für $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $x^n$ divergent.

3) Sei $|x| < 1$. Wenn $x = 0$ : $x^n = 0$ f. alle $n$, ok!

sei $0 < |x| < 1$

Dann $\frac{1}{|x|} > 1$

Gegeben sei $\varepsilon > 0$ Setze $C = \frac{1}{\varepsilon}$

2) $\Rightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{|x|^n} > C$ f. $n \geq N$

$\Rightarrow |x|^n < \frac{1}{C}$ f. $n \geq N \Leftrightarrow |x|^n < \varepsilon$ f. $n \geq N$

<u>Satz 3.9)</u> (Rechenregeln)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen

Sei $a_n \to a$ f. $n \to \infty$

$b_n \to b$ f. $n \to \infty$

Dann gilt:

1) $(a_n + b_n) \longrightarrow a + b$ f. $n \to \infty$

2) $(a_n \cdot b_n) \longrightarrow a \cdot b$ f. $n \to \infty$

3) Angenommen $b \neq 0$

Dann ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

und $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$ f. $n \to \infty$

<u>Def</u> "fast alle" = "alle bis auf endlich viele"

<u>Beweis:</u>

1) Gegeben $\varepsilon > 0$

Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ f. $n \geq N_1$

$N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ f. $n \geq N_2$

Sei $N = \max(N_1, N_2)$ Für $n \geq N$ gilt:

$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$ 1)

2) $(a_n)$ konvergiert $\Rightarrow$ ist beschränkt.

$\exists$ gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < C$ f. alle $n \in \mathbb{N}_0$

~~OE~~ ohne Einschränkung (OE) sei $C \geq |b|$

Rechne:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$

$$\exists\ N \in \mathbb{N} \text{ mit } \left.\begin{array}{l} |a_n - a| < \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon \\ |b_n - b| < \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon \end{array}\right\} \text{ f. } n \geq N$$

Für $n \geq N$ gilt:

$$|a_n b_n - ab|$$

$$< |a_n| \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon + |b| \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon$$

$$\leq C \cdot \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon + C \cdot \frac{1}{2C} \cdot \varepsilon$$

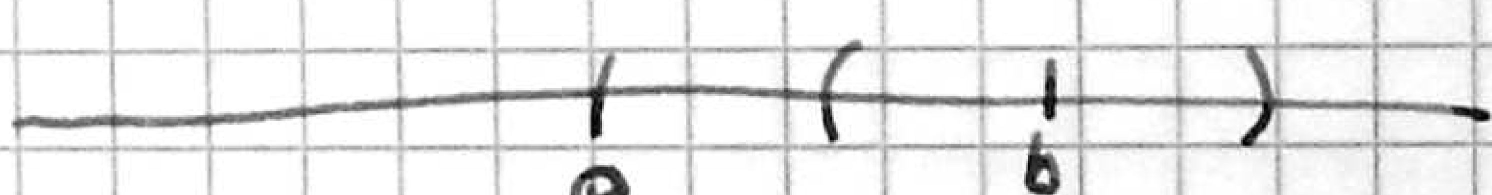
$$= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ 2) gilt.

3) Sei $b \neq 0$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}|b| > 0$

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für $n \geq N$




Dann gilt für $n \geq N$:

$$|b_n| = |b_n - b + b| = |b - b + b_n| = |b - (b - b_n)|$$

$$\geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$$

Insbesondere ist $|b_n| \neq 0$ für $n \geq N$

Rechne: $\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b \cdot b_n}\right|$

$$= \frac{1}{|b||b_n|} |b_n - b| \qquad NR: |b_n| > \frac{1}{2}|b| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$$

$$< \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \quad \text{f. } n \geq N$$

Gegeben sei $\varepsilon > 0$, $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}$ für $n \geq N_1$

~~Gegeben sei $\varepsilon > 0$~~

$\Rightarrow$ für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ 3) gilt.

<u>Zusatz:</u>

Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$ dann gilt:

4) für $c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot a_n \to c \cdot a$ f. $n \to \infty$

5) $(a_n - b_n) \to a - b$ f. $n \to \infty$

6) Wenn $b \neq 0$, dann

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad \text{f. } n \to \infty$$

<u>Beweis</u>: Übung