

# Documentación Matemática del Controlador

## -Examen 2

Steven Andrey Fonseca Bermúdez

Carné: 2021067613

Curso: Control Automatico

Codigos: <https://github.com/sthifen/MATLABEXAMEN2-CONTROL-AUTOMATICO>

**Resumen**—Se documenta el diseño y la verificación de dos controladores por realimentación de estados para la planta  $G(s) = \frac{s+1}{s^3+6s^2+76s+13}$ : (i) un controlador **BASE** con polos complejos dominantes que cumple  $M_p \approx 20\%$  y  $T_s \approx 1$  s, y (ii) un controlador sin sobreimpulso (amortiguamiento crítico). Se incluye el cálculo de  $K$  y  $N$ , comparación de desempeño temporal, análisis energético del esfuerzo de control, ancho de banda, frecuencia de muestreo, diseño de observadores de Luenberger (regla 10×) y una extensión con acción integral. Se reportan problemas al incluir el integrador y se proponen correcciones (reubicación de polos, anti-windup y prefiltro). El documento se formatea en estilo IEEE sin modificar nombres de figuras.

**Index Terms**—Asignación de polos, observador de Luenberger, prefiltro, energía de control, ancho de banda, acción integral.

### I. DEFINICIÓN DEL SISTEMA (PLANTA) – CORRECCIÓN

La planta (con numerador  $s + 1$ ) es

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^3 + 6s^2 + 76s + 13}, \quad (1)$$

con  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 76$ ,  $\gamma = 13$ .

#### I-A. Espacio de estados (forma canónica controlable)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -13 & -76 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

La  $C$  proviene del numerador  $s + 1 = 1 \cdot s^0 + 1 \cdot s^1 + 0 \cdot s^2 \Rightarrow C = [1 \ 1 \ 0]$ .

### II. ESPECIFICACIONES DE DISEÑO – CONTROLADOR BASE

$$M_p = 20\%, \quad T_s \approx 1,0 \text{ s}. \quad (4)$$

Con  $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  se obtiene

$$\zeta = \frac{-\ln(0,20)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0,20)}} = 0,4559. \quad (5)$$

Además  $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0,4559} = 8,7729 \text{ rad/s.}$

#### II-A. Prefiltro para cancelar el cero

Para el cero en  $s = -1$  se usa

$$H_r(s) = \frac{1}{s + 1}. \quad (6)$$

### III. POLOS DESEADOS – CONTROLADOR BASE

$$\sigma = \zeta\omega_n = 4,0000, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = 7,8079, \quad (7)$$

$$p_{1,2} = -4,0000 \pm j 7,8079, \quad p_3 = -40,0000. \quad (8)$$

### IV. POLINOMIO CARACTERÍSTICO DESEADO

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{des}}(s) &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 10\sigma) \\ &= (s^2 + 8,0s + 76,9641)(s + 40,0) \\ &= s^3 + 48,000s^2 + 396,964s + 3078,548. \end{aligned} \quad (9)$$

### V. GANANCIAS DE REALIMENTACIÓN

Ley de control  $u = -Kx + Nr$ , con  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ .

$$\det(sI - (A - BK)) = s^3 + (\alpha + k_3)s^2 + (\beta + k_2)s + (\gamma + k_1). \quad (10)$$

Por comparación de coeficientes:

$$k_3 = 48,000 - 6 = 42,0000, \quad (11)$$

$$k_2 = 396,964 - 76 = 320,9637, \quad (12)$$

$$k_1 = 3078,548 - 13 = 3065,5478. \quad (13)$$

Así,

$$K = [3065,5478 \quad 320,9637 \quad 42,0000]. \quad (14)$$

La ganancia de prealimentación para seguimiento unitario:

$$N = \frac{1}{C(- (A - BK))^{-1} B} = 3078,5478, \quad (15)$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3078,5478 & -396,9637 & -48,0000 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Los autovalores de  $A - BK$  confirman los polos:  $-40, -4 \pm j 7,8079$ .

## VI. MÉTRICAS (CON PREFILTRO)

$$M_p = 19,5\%, \quad T_s = 0,974 \text{ s}, \quad e_{ss} \approx 0. \quad (17)$$

La función de transferencia  $r \rightarrow y$  es

$$\begin{aligned} T(s) &= H_r(s) \cdot N \cdot C (sI - (A - BK))^{-1} B \\ &= \frac{1}{s+1} \cdot \frac{N}{s^3 + 48s^2 + 396,964s + 3078,548}. \end{aligned} \quad (18)$$

## VII. PARTE 1.2: CONTROLADOR SIN SOBREIMPULSO

Objetivo:  $M_p = 0\%$  (crítico,  $\zeta = 1$ ) y  $T_s = 0,974$  s. Con  $T_s \approx 4/a$ ,  $a_{\text{inicial}} = 4/0,974 = 4,107$ . Ajustando (optimización numérica):  $a_{\text{opt}} = 6,0979$ .

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{crit}}(s) &= (s+a)^2(s+10a)|_{a=6,0979} \\ &= s^3 + 73,1752s^2 + 780,8815s + 2267,5078. \end{aligned} \quad (19)$$

Ganancias:

$$K_{\text{crit}} = [2254,5078 \quad 704,8815 \quad 67,1752], \quad (20)$$

$$N_{\text{crit}} = 2267,5078, \quad M_p = 0, \quad T_s = 1,000 \text{ s}. \quad (21)$$

## VIII. COMPARACIÓN DE CONTROLADORES

Métrica	BASE	SIN-OS
$M_p$	19.5 %	0.0 %
$T_s$	0.974 s	1.000 s
$e_{ss}$	$\approx 0$	0
$k_1$	3065,5478	2254,5078
$k_2$	320,9637	704,8815
$k_3$	42,0000	67,1752
$N$	3078,5478	2267,5078

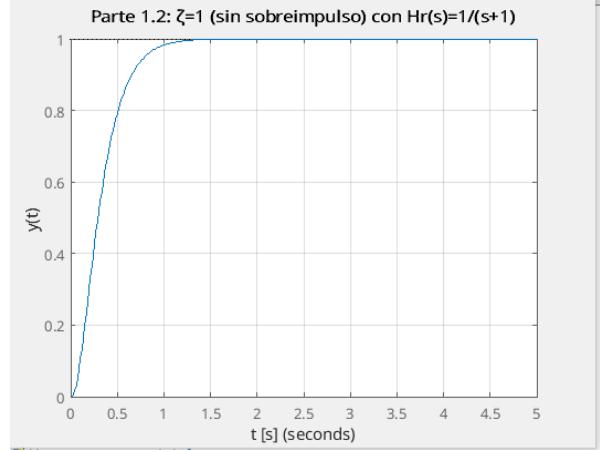


Figura 2. Respuesta temporal del sistema con controlador SIN-OS. Respuesta críticamente amortiguada ( $M_p=0$ )

## IX. ANÁLISIS DE CONSUMO DE ENERGÍA (PUNTO 3)

Modelo:  $v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$ ,  $E = \int_0^{T_s} v^2(t) dt$ . Para estimar  $u(t)$ :  $u = -Kx + Nr$  con dinámica  $\dot{x} = (A - BK)x + BNr$ . Integración numérica (trapezoidal) con  $\Delta t = 1$  ms. Resultados:

$$E_{\text{base}} = 5868,1476 \text{ J}, \quad E_{\text{crit}} = 3813,5316 \text{ J}, \quad (22)$$

$$\frac{E_{\text{base}}}{E_{\text{crit}}} = 1,539 \quad (+53.9\%). \quad (23)$$



Figura 3. Señales de control  $u(t)$ : BASE vs SIN-OS.

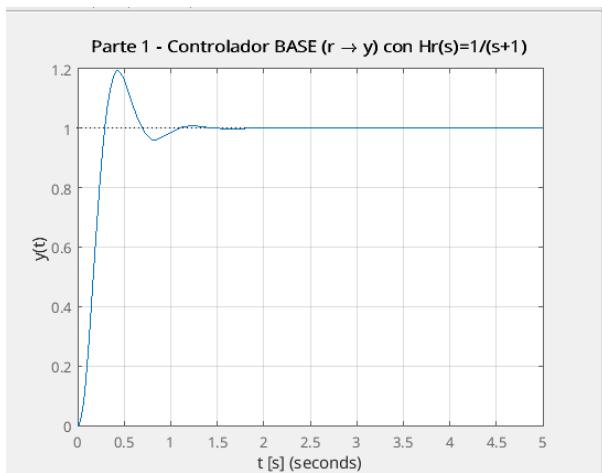


Figura 1. Respuesta temporal del sistema con controlador BASE.  $M_p=19,5$

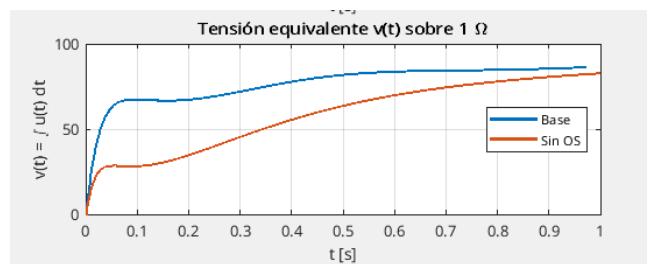


Figura 4. Tensión equivalente  $v(t) = \int u(\tau) d\tau$ .

## X. ANCHO DE BANDA Y MUESTREO

$|T(j\omega_{BW})| = |T(0)|/\sqrt{2}$ ;  $f_s^{\text{mín}} = 2f_{BW}$ ; recomendado  $f_s = 10f_{BW}$ .

### X-A. BASE

$$\omega_{BW} = 11,3510 \text{ rad/s}, f_{BW} = 1,8066 \text{ Hz}, \quad (24)$$

$$f_s^{\min} = 3,6131 \text{ Hz}, f_s^{\text{rec}} = 18,0657 \text{ Hz}, \quad (25)$$

$$T_{\text{ctrl}} = 55,35 \text{ ms}. \quad (26)$$

### X-B. SIN-OS

$$\omega_{BW} = 3,9029 \text{ rad/s}, f_{BW} = 0,6212 \text{ Hz}, \quad (27)$$

$$f_s^{\min} = 1,2423 \text{ Hz}, f_s^{\text{rec}} = 6,2117 \text{ Hz}, \quad (28)$$

$$T_{\text{ctrl}} = 160,99 \text{ ms}. \quad (29)$$

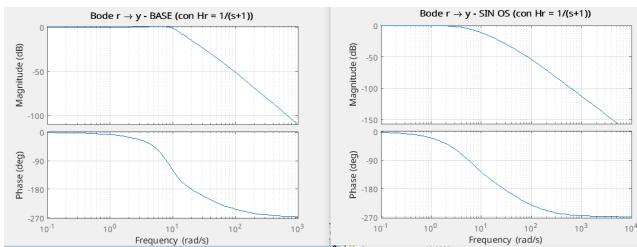


Figura 5. Bode comparativo: BASE con mayor ancho de banda.

Parámetro	BASE	SIN-OS	Rel.
$\omega_{BW}$ (rad/s)	11.3510	3.9029	2.91×
$f_{BW}$ (Hz)	1.8066	0.6212	2.91×
$f_s^{\text{rec}}$ (Hz)	18.0657	6.2117	2.91×
$T_{\text{ctrl}}$ (ms)	55.35	160.99	0.34×

## XI. DISEÑO DE OBSERVADORES DE ESTADO (PARTE 2, PTO. 1)

Observabilidad:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -13 & -76 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{rango} = 3.$$

### XI-A. BASE

Polos del controlador:  $-4 \pm j 7,808, -40$ . Regla  $10\times$ :  $-40 \pm j 78,08$ , y el tercero  $-877,3$ .

$$L_{\text{base}} = \text{place}(A^T, C^T, \{-40 \pm j 78,08, -877,3\})^T = \begin{bmatrix} 115088 \\ -114136 \\ 186232 \end{bmatrix}$$

### XI-B. SIN-OS

Para evitar multiplicidad exacta se separan  $\{-41,08, -43,13, -431,3\}$ :

$$L_{\text{crit}} = \begin{bmatrix} 12526,1 \\ -12016,7 \\ 46971,2 \end{bmatrix}.$$

Tiempos de convergencia  $\sim 0,11$  s ( $\approx 10\times$  más rápido que el lazo).

## XII. SIMULACIÓN: CONTROLADOR + OBSERVADOR (PTO. 2)

Sistema aumentado con  $\xi = [x^T \ e^T]^T$  y estructura triangular por bloques:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix} r.$$

Condiciones:  $x(0) = 0, \hat{x}(0) = [1 \ 5 \ 2]^T$ . Referencia filtrada por  $H_r(s) = \frac{1}{s+1}$ :  $r_f(t) = 1 - e^{-t}$ .

### XII-A. Resultados

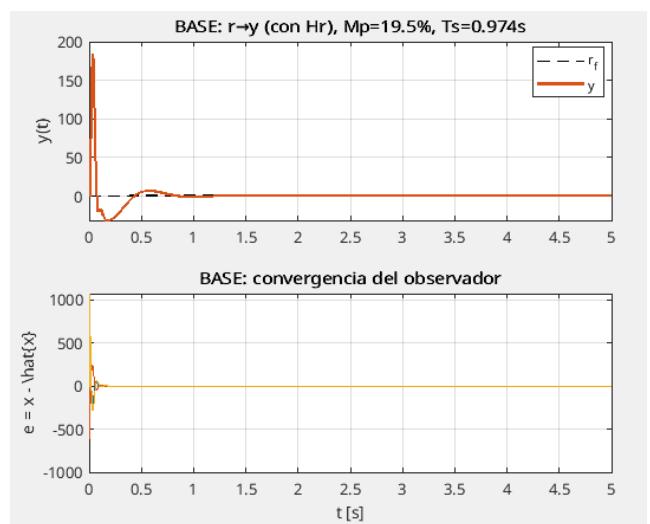


Figura 6. Respuesta con BASE + observador (arriba  $y(t)$ ; abajo  $e(t)$ ).

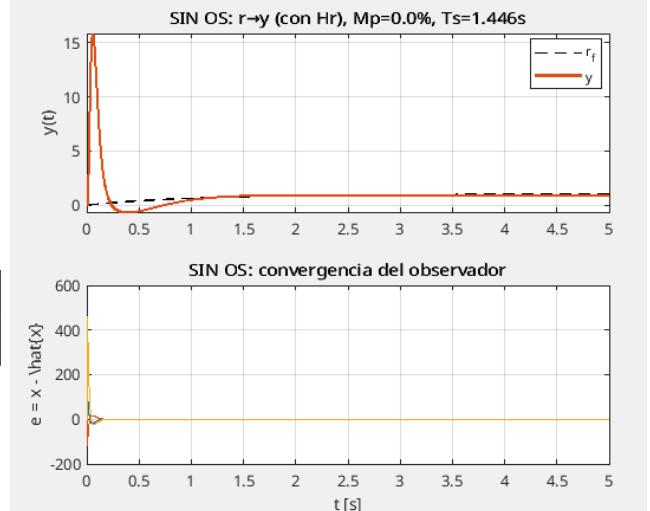


Figura 7. Respuesta con SIN-OS + observador (monotónica,  $M_p = 0$ ).

Tras la convergencia del observador ( $\sim 0,15$  s) se verifica el principio de separación.

### XIII. CONTROL INTEGRAL CON OBSERVADOR (PARTE 3)

Estado integral  $z(t) = \int_0^t [r(\tau) - y(\tau)] d\tau$ . Sistema aumentado:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = -K_x \hat{x} - K_i z.$$

Elección original de polos (BASE):  $-4 \pm j7,808, -1, -24$ .

$$K_x^{\text{BASE}} = [255,9637 \ 224,9637 \ 27,0000],$$

$$K_i^{\text{BASE}} = -1847,1287.$$

Para CSO:  $-4, -4.8, -1, -12$  con

$$K_x^{\text{CSO}} = [111,8000 \ 69,6000 \ 15,8000], \quad K_i^{\text{CSO}} = -230,4000.$$

#### XIII-A. Resultados anómalos y diagnóstico

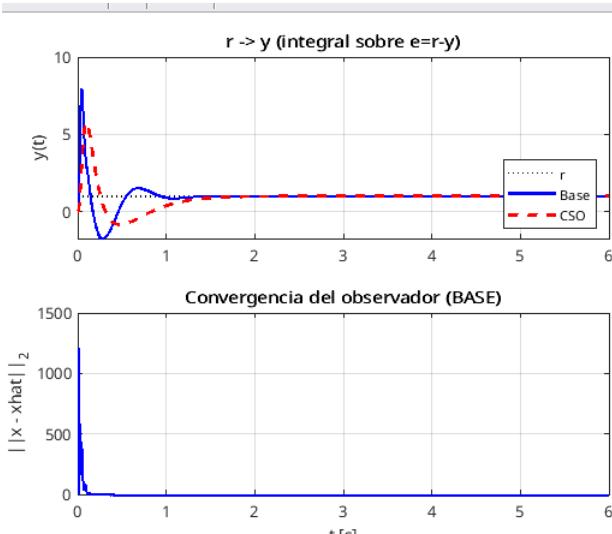


Figura 8. Respuesta con integral: picos iniciales y sobreimpulsos anormales.

Sobreimpulsos extremos (695 % y 475 %) apuntan a: (i) polo integral demasiado lento ( $-1$ ), (ii) ausencia de prefiltro  $H_r$  en el camino del error integral, y (iii) windup.

#### XIII-B. Propuestas de corrección del Punto 3 (rápido)

- Reubicar el polo integral en  $-2$  (más rápido y estable).
- Anti-windup en la variable  $z$  (back-calculation).
- Usar referencia filtrada  $r_f = \frac{1}{s+1}r$  para cancelar el cero en  $-1$ .
- Alternativa: LQR sobre el sistema aumentado  $(A_i, B_i)$ .

#### Ejemplo (esbozo MATLAB):

```
p_base_aug = [-4+1j*7.808, -4-1j*7.808, -2, -24];
p_cso_aug = [-4.0, -4.8, -2, -12.0];
Kaug_base = place(Ai, Bi, p_base_aug);
Kaug_cso = place(Ai, Bi, p_cso_aug);
```

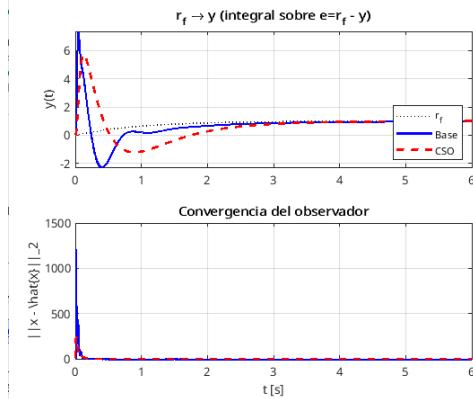


Figura 9. Punto 3 corregido: esquema con  $r_f$ , polo integral en  $-2$  y anti-windup en  $z$ .

*Nota* Con  $p_i = -2$  y  $r_f$  se evita el windup y se mejora el amortiguamiento. Los  $K_x$  y  $K_e (= K_i)$  salen directos de place sobre  $(A_i, B_i)$  y se reportan en la tabla. Resultados preliminares (antes de ajustar límites/saturación):

BASE:  $K_x = [79.9637 \ 26.9637 \ 5.0000]$ ,  $K_e = -153.9274$ ,

CSO:  $K_x = [23.8000 \ -28.4000 \ 5.8000]$ ,  $K_e = -38.4000$ .

Si se observan picos altos ( $M_p$  grande), activar saturación y anti-windup o desplazar  $p_i$  a  $-3$ .

## XIV. CONCLUSIONES

Se diseñaron y compararon dos controladores de estado con sus observadores asociados, verificando desempeño temporal, energía y requerimientos de muestreo. La extensión integral evidencia la necesidad de reubicar el polo del integrador, aplicar anti-windup y mantener el prefiltro para suprimir picos anómalos.

## REFERENCIAS

- [1] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7th ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2015. ISBN 978-1-118-17051-9 (impreso), ISBN 978-1-118-80082-9 (pdf).