A Yatzy Variant

Författare

Stefan Josefsson, stejos@kth.se
Joe Huldén, joeda@kth.se

Summering

Sannolikheterna för händelserna givet 4 sidor på tärningen samt väntevärde för ett kast
Par $\frac{15}{64}$, Två par $\frac{45}{128}$, Triss $\frac{15}{64}$, Kåk $\frac{15}{128}$, Fyrtal $\frac{1}{16}$, Stege 0, väntevärde $\frac{2185}{256}$
Sannolikheterna för händelserna givet 6 sidor på tärningen samt väntevärde för ett kast
Par $\frac{25}{54}$, Två par $\frac{25}{108}$, Triss $\frac{25}{162}$, Kåk $\frac{25}{648}$, Fyrtal $\frac{13}{648}$, Stege $\frac{5}{162}$, väntevärde $\frac{12\,439}{1296}$
Sannolikheterna för händelserna givet 8 sidor på tärningen samt väntevärde för ett kast
Par $\frac{525}{1024}$, Två par $\frac{315}{2048}$, Triss $\frac{105}{1024}$, Kåk $\frac{35}{2048}$, Fyrtal $\frac{9}{1024}$, Stege $\frac{15}{1024}$, väntevärde $\frac{39\,483}{4096}$
Sannolikheterna för händelserna givet 12 sidor på tärningen samt väntevärde för ett kast
Par $\frac{275}{576}$, Två par $\frac{275}{3456}$, Triss $\frac{275}{5184}$, Kåk $\frac{55}{10\,368}$, Fyrtal $\frac{7}{2592}$, Stege $\frac{5}{1296}$, väntevärde $\frac{200\,681}{20\,736}$
Sannolikheterna för händelserna givet 20 sidor på tärningen samt väntevärde för ett kast
Par $\frac{2907}{8000}$, Två par $\frac{513}{16\,000}$, Triss $\frac{171}{8000}$, Kåk $\frac{19}{16\,000}$, Fyrtal $\frac{3}{5000}$, Stege $\frac{3}{5000}$, väntevärde $\frac{1\,563\,177}{160\,000}$

Sannolikhet för olika pokerhändelser

Sannolikheten för de olika händelserna kan beräknas genom totalundersökning men det är även möjligt att kombinatoriskt beräkna antalet gynsamma utfall.
tot = 5^n vilket utgör det totala antalet utfall
Det finns n stycken unika par {1,1},{2,2}...,{n,n}. Vi måste välja ut 2 platser av 5 möjliga vid utplacering av detta par. För de resterande 3 platserna kan då väljas n-1,n-2 samt n-3 olika tal. Detta ger

p(par) = n * $\binom{5}{2}$(n-1) *(n-2)*(n-3)/tot,

Det finns $\binom{n}{2}$ unika två-par. För varje sådant måste vi placera ut ett par bland 5 möjliga positioner följt av ytterliggare ett par bland nu 3 möjliga positioner och slutligen utplacering av ett tal skilt från valda tal i paret, för att undvika att inkludera kåk. Detta ger

p(tvåpar) = $\binom{n}{2}\binom{5}{3}\binom{3}{2}$*(n-2) /tot

Det finns n stycken unika trissar. Vi måste för varje sådan triss placera ut denna bland 5 möjliga positioner följt av två tal vilka är inbördes skilda från varandra och även skillt från tal i trissen. Detta ger

p(triss) = n * $\binom{5}{3}$*(n-1)*(n-2)/tot

Det finns n*(n-1) unika kåkar. Vi måste för den första delen till kåken placera ut 3 tal bland 5 möjliga positioner. De resterande 2 talen skall placeras ut bland 2 möjliga positioner Detta ger p(kåk) = n*(n-1) * $\binom{5}{3}$ * 1/tot

Det finns n st unika fyrtal. Dessa skall placeras ut bland bland 4 möjliga positioner. Vi betraktar även 5 identiska tal som ett fyrtal. Detta ger

p(fyrtal) = (n*$\binom{5}{4}$*(n-1)+n)/tot

Det finns (n-5 +1) unika stegar, n≥4. Varje tal i stegen skall placeras ut på ett med -1 minskande antal möjliga positioner. Detta ger
p(stege) = (n-4) * 5! / tot, n≥4

Väntevärde för ett kast

Väntevärdet för ett kast kan beräknas genom att betrakta sannolikheterna för de olika händelserna och multiplicera dessa med det medelvärde en sådan händelse associeras till. Värdet i fråga är kopplat till summan av antalet ögon på de tärningar som är relevanta för händelsen. Det räcker att betrakta alla kombinationer av tal vilka ger upphov till respektive händelse, oberoende ordning. Alla sådanna kombinationer är nämligen inbördes lika sannolika. Medelvärdet blir då summan av alla dessa värden dividerat med antalet.

Medelvärdet för ett par blir
mPar = $\frac{(2+2\,n)}{2}$=$(1+n)$

För två par låter vi betrakta alla unika sådanna. Det finns $\binom{n}{2}$ unika. Antalet två par innehållande ett givet tal k, 1≤k≤n är då n stycken. Var och ett av dessa innehåller 2 stycken k. Vi får därför att medelvärdet blir

mTvåpar = $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}\sum_{k=1}^{n} 2\,k$=$\frac{(n-1)\,(n+1)\,n}{\binom{n}{2}}$

Det finns n stycken unika trissar. Sannolikheten för att var och en av dem skall inträffa är densamma. Vi får därför

mTriss = $\frac{3\,(1+n)}{2}$

Det finns n * (n-1) unika kåkar. Antalet kåkar inneållande ett tal k, 1≤k≤n är då 2*n stycken. Där n stycken innehåller 2st k, andra delen n innehåller 3 st k. Vi får därför

mKåk = $\frac{5\,(n-1)}{n*\,(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k$ = $\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n} k$ = $\frac{5\,(n+1)}{2}$

Det finns n unika fyrtal. Vi får därför

mFyrtal = $\frac{(4+4*n)}{2}$=$2*(1+n)$

Det finns (n-4) unika stegar, n≥4. Sannolikheten för att var och en av dem skall inträffa är densamma. Den första stegen har värdet 15. Skillnaden mellan värden på stegarna är 5.
Fallet med 4≥n ger 0

mStege = $\frac{1}{n-4}\sum_{k=1}^{n-4}(10+5\,k)$ = $\frac{1}{n-4}$* (25+5(n-4))*(n-4) / 2 = $\frac{5+5\,n}{2}$=$5*\frac{1+n}{2}$, n≥5

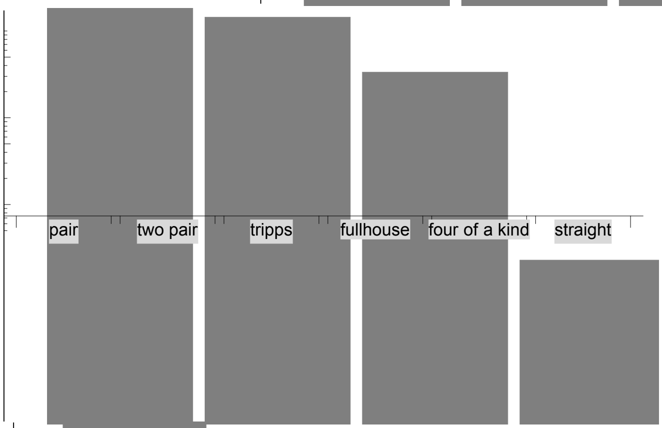
För att erhålla väntevärdet låter vi därefter multiplicera sannolikheten för varje händelse med respektive medelvärde samt summera alla dessa termer.
E = mPar * p(par) + mTvåPar * p(tvåpar) + mTriss * p(triss) + mKåk *p(kåk) + mFyrtal * p(fyrtal) + mStege * p(stege)

Grafer

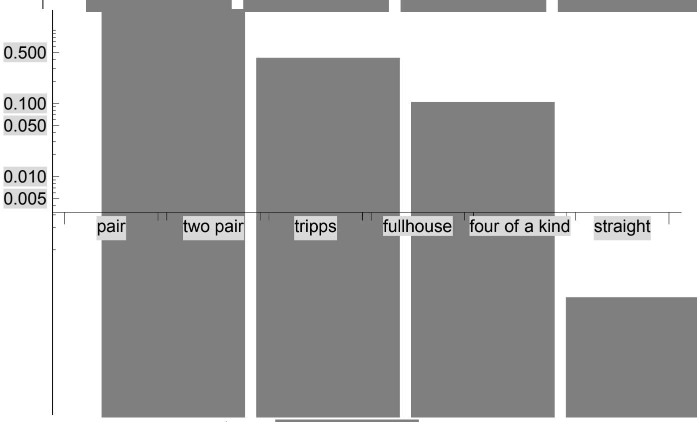
N=4


pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight

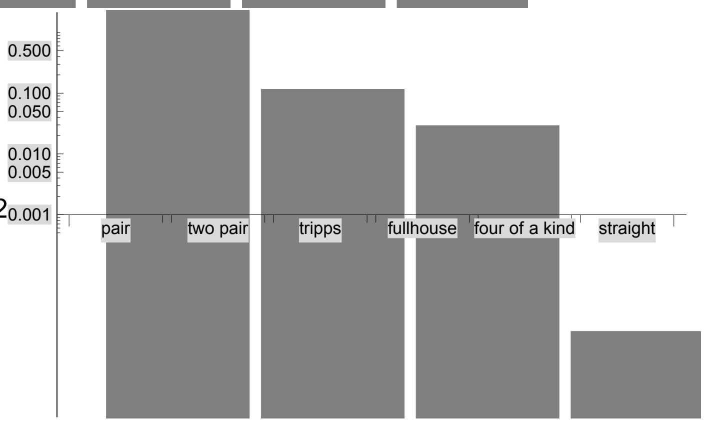
N=6


pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight

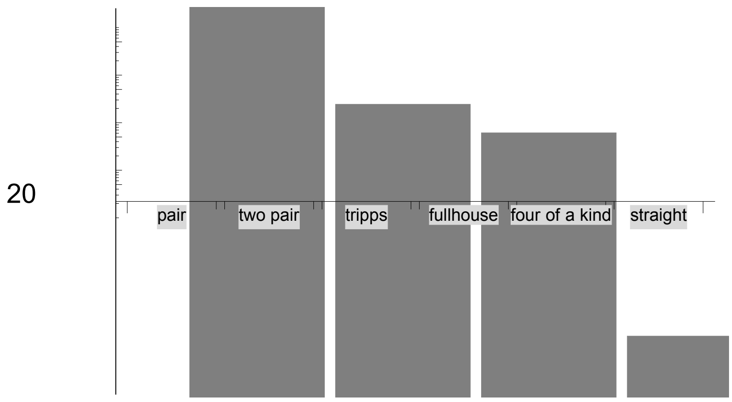
N = 8


0.500
0.100
0.050
0.010
0.005
pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight

N = 12


0.500
0.100
0.050
0.010
0.005
0.001
pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight

N =



Kod

```
ClearAll["`*"]
n = 20;
s1 = Tuples[Range[1, n], 5];
nTot = n^5;
t[s_] := Sort[s - Min[s]];
s2 = Sort /@ s1;
s1 = t /@ s1;

aPair[{___, x_, x_, ___}] := True
aPair[{___}] := False
twoPair[{___, x_, x_, ___, y_, y_, ___} /; x ≠ y] := True
twoPair[{___}] := False
tripps[{___, x_, x_, x_, ___}] := True
tripps[{___}] := False

fullhouse[{x_, x_, y_, y_, y_} /; x ≠ y] := True
fullhouse[{y_, y_, y_, x_, x_} /; x ≠ y] := True
fullhouse[{___}] := False
fourOfAKind[{___, x_, x_, x_, x_, ___}] := True
fourOfAKind[{___}] := False
straight[{0, 1, 2, 3, 4}] := True
straight[{___}] := False



fourOfAKindVal[x_] := Count[fourOfAKind /@ x, True]
fullHouseVal[x_] := Count[fullhouse /@ x, True]
trippsVal[x_] :=
 (Count[tripps /@ x, True] - fourOfAKindVal[x] - fullHouseVal[x])
twoPairVal[x_] := (Count[twoPair /@ x, True] - fullHouseVal[x])
pairVal[x_] := (Count[aPair /@ x, True] - twoPairVal[x] -
   trippsVal[x] - fourOfAKindVal[x] - fullHouseVal[x])
straighVal[x_] := Count[straight /@ x, True]


p1 = pairVal[s1] / nTot
p2 = twoPairVal[s1] / nTot
p3 = trippsVal[s1] / nTot
p4 = fullHouseVal[s1] / nTot
p5 = fourOfAKindVal[s1] / nTot
p6 = straighVal[s1] / nTot
```

$$\frac{2907}{8000}$$

$$\frac{513}{16\,000}$$

$$\frac{171}{8000}$$

$$\frac{19}{16\,000}$$

$$\frac{3}{5000}$$

$$\frac{3}{5000}$$

```
aPairV[{___, x_, x_, ___}] := 2 * x
aPairV[{___, x_, x_, x_, ___}] := 0
aPairV[{___, y_, y_, ___, x_, x_, ___}] := 0
aPairV[{___}] := 0

twoPairV[{x_, x_, x_, y_, y_}] := 0
twoPairV[{x_, x_, y_, y_, y_}] := 0
twoPairV[{___, x_, x_, ___, y_, y_, ___} /; x ≠ y] := 2 * x + 2 * y
twoPairV[{___}] := 0

trippsV[{___, x_, x_, x_, x_, ___}] := 0
trippsV[{x_, x_, x_, y_, y_}] := 0
trippsV[{x_, x_, y_, y_, y_}] := 0
trippsV[{___, x_, x_, x_, ___}] := 3 * x
trippsV[{___}] := 0

fullhouseV[{x_, x_, y_, y_, y_} /; x ≠ y] := 2 * x + 3 * y
fullhouseV[{y_, y_, y_, x_, x_} /; x ≠ y] := 3 * y + 2 * x
fullhouseV[{___}] := 0

fourOfAKindV[{___, x_, x_, x_, x_, ___}] := 4 * x
fourOfAKindV[{___}] := 0


straightV[{x1_, x2_, x3_, x4_, x5_}] /;
  Differences[{x1, x2, x3, x4, x5}] == {1, 1, 1, 1} := x1 + x2 + x3 + x4 + x5
straightV[{___}] := 0



a1 = Total[aPairV /@ s2] / pairVal[s1] * p1
a2 = Total[twoPairV /@ s2] / twoPairVal[s1] * p2
a3 = Total[trippsV /@ s2] / trippsVal[s1] * p3
a4 = Total[fullhouseV /@ s2] / fullHouseVal[s1] * p4
a5 = Total[fourOfAKindV /@ s2] / fourOfAKindVal[s1] * p5
a6 = Total[straightV /@ s2] / straighVal[s1] * p6
a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6
```

$$\frac{61\,047}{8000}$$

$$\frac{10\,773}{8000}$$

$$\frac{10\,773}{16\,000}$$

$$\frac{399}{6400}$$

$$\frac{63}{2500}$$

$$\frac{63}{2000}$$

$$\frac{1\,563\,177}{160\,000}$$

```
ClearAll["`*"]
eyes = 6;
nTot = eyes ^5;
pPair[n_] = n * Binomial[5, 2] * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3);
pTwoPair[n_] = Binomial[n, 2] * Binomial[5, 2] * Binomial[3, 2] * (n - 2);
pTrips[n_] = n * Binomial[5, 3] * (n - 1) * (n - 2);
pFullHouse[n_] = (n) * (n - 1) * Binomial[5, 3] * 1;
pFourOfAKind[n_] = ((n * Binomial[5, 4] * (n - 1)) + n);
pStraight[n_] = (n - 5 + 1) * Factorial[5];
a0 = pPair[eyes] / nTot
a1 = pTwoPair[eyes] / nTot
a2 = pTrips[eyes] / nTot
a3 = pFullHouse[eyes] / nTot
a4 = pFourOfAKind[eyes] / nTot
a5 = pStraight[eyes] / nTot
eyes = 8;
nTot = eyes ^5
b0 = pPair[eyes] / nTot
b1 = pTwoPair[eyes] / nTot
b2 = pTrips[eyes] / nTot
b3 = pFullHouse[eyes] / nTot
b4 = pFourOfAKind[eyes] / nTot
b5 = pStraight[eyes] / nTot
eyes = 12;
nTot = eyes ^5;
c0 = pPair[eyes] / nTot
c1 = pTwoPair[eyes] / nTot
c2 = pTrips[eyes] / nTot
c3 = pFullHouse[eyes] / nTot
c4 = pFourOfAKind[eyes] / nTot
c5 = pStraight[eyes] / nTot
eyes = 20;
nTot = eyes ^5;
d0 = pPair[eyes] / nTot
d1 = pTwoPair[eyes] / nTot
d2 = pTrips[eyes] / nTot
d3 = pFullHouse[eyes] / nTot
d4 = pFourOfAKind[eyes] / nTot
d5 = pStraight[eyes] / nTot
eyes = 4;
nTot = eyes ^5;
e0 = pPair[eyes] / nTot
e1 = pTwoPair[eyes] / nTot
e2 = pTrips[eyes] / nTot
e3 = pFullHouse[eyes] / nTot
e4 = pFourOfAKind[eyes] / nTot
e5 = 0
```

$$\frac{25}{54}$$

$$\frac{25}{108}$$

$$\frac{25}{162}$$

$$\frac{25}{648}$$

$$\frac{13}{648}$$

$$\frac{5}{162}$$

32 768

$$\frac{525}{1024}$$

$$\frac{315}{2048}$$

$$\frac{105}{1024}$$

$$\frac{35}{2048}$$

$$\frac{9}{1024}$$

$$\frac{15}{1024}$$

$$\frac{275}{576}$$

$$\frac{275}{3456}$$

$$\frac{275}{5184}$$

$$\frac{55}{10\,368}$$

$$\frac{7}{2592}$$

$$\frac{5}{1296}$$

$$\frac{2907}{8000}$$

$$\frac{513}{16\,000}$$

$$\frac{171}{8000}$$

$$\frac{19}{16\,000}$$

$$\frac{3}{5000}$$

$$\frac{3}{5000}$$

$$\frac{15}{64}$$

$$\frac{45}{128}$$

$$\frac{15}{64}$$

$$\frac{15}{128}$$

$$\frac{1}{16}$$

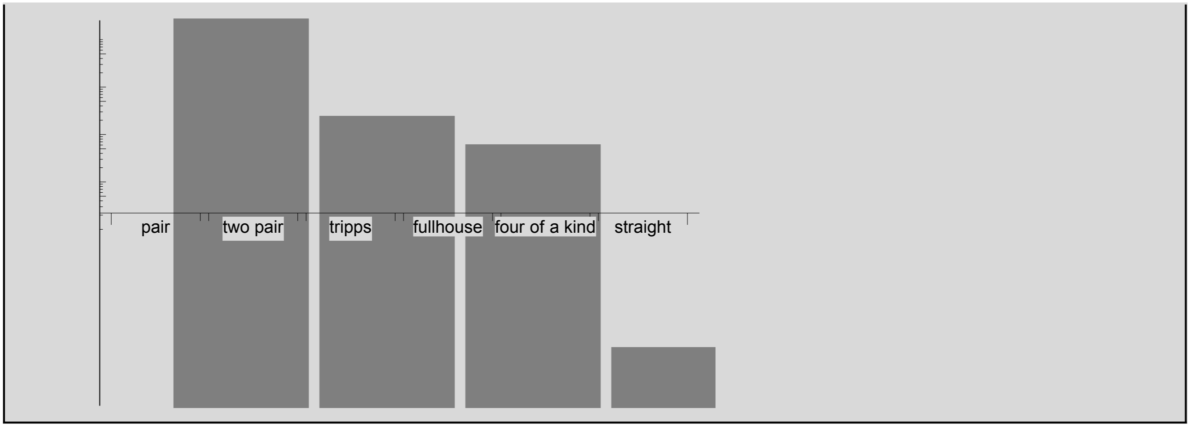
0

```
BarChart[{{a0, a1, a2, a3, a4, a5}},
 ChartLabels → {"pair", "two pair", "tripps", "fullhouse",
   "four of a kind", "straight"}, ScalingFunctions → "Log"]
BarChart[{{b0, b1, b2, b3, b4, b5}}, ChartLabels →
  {"pair", "two pair", "tripps", "fullhouse", "four of a kind", "straight"},
 ScalingFunctions → "Log"]
BarChart[{{c0, c1, c2, c3, c4, c5}},
 ChartLabels → {"pair", "two pair", "tripps", "fullhouse",
   "four of a kind", "straight"}, ScalingFunctions → "Log"]
BarChart[{{d0, d1, d2, d3, d4, d5}}, ChartLabels →
  {"pair", "two pair", "tripps", "fullhouse", "four of a kind", "straight"},
 ScalingFunctions → "Log"]
BarChart[{{e0, e1, e2, e3, e4, e5}},
 ChartLabels → {"pair", "two pair", "tripps", "fullhouse",
   "four of a kind", "straight"}, ScalingFunctions → "Log"]
```


pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight


0.500
0.100
0.050
0.010
0.005
pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight


0.500
0.100
0.050
0.010
0.005
0.001
pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight


pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight


pair
two pair
tripps
fullhouse
four of a kind
straight