Математическое моделирование

Лабораторная работа №8

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построение модели конкуренции двух фирм.

2 Задание

Вариант 50

Случай 1

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a1}{c1}M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1}M_2 - \frac{b}{c_1}M_1M_2 - \frac{a_2}{c_1}M_2^2$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq}$$

$$a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq}$$

$$b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}$$

$$c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$$

$$c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$$

Также введена нормировка $t = c_1 \Theta$.

Случай 2

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dM_1}{d\Theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a1}{c1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\Theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - (\frac{b}{c_1} + 0.00031) M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами

$$M_0^1 = 6.4 \; M_0^2 = 4.1$$

$$p_{cr} = 20 \; N = 40 \; q = 1$$

$$\tau_1 = 20 \; \tau_2 = 15$$

$$\tilde{p}_1 = 7 \; \tilde{p}_2 = 9.5$$

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

N - число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

τ - длительность производственного цикла

p - рыночная цена товара

$\tilde{p}$ - себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции

δ - доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек

k - постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции

$Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса является пороговой (то есть, $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - k = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - k$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}))$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр γ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла τ. При заданном М уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Тогда уравнения динамики оборотных средств приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau}(\frac{p}{p_{cr}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - k$$

Это уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $dM/dt = 0$

$$\widetilde{M_{1,2}} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}), b = kNq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

Получается, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b << a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы.

При $b << a$ стационарные значения M равны

$$\widetilde{M_{+}} = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \widetilde{M_{-}} = k\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

Первое состояние $\widetilde{M_{+}}$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние \widetilde{M_{-} неустойчиво, так, что при $M < \widetilde{M_{-}}$ оборотные средства падают ($dM/dt < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\widetilde{M_{-}}$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations

p_cr=20
N=40
q=1

tau1=20
tau2=15
p1=7
p2=9.5

d = 0.00031

a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)
b = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*tau2*tau2*p2*p2*N*q)
```

```
M1=6.4
M2=4.1

t = collect(LinRange(0, 20, 500))
tspan = (0, 20)

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[1] - (b/c1)*y[1]*y[2] - (a1/c1)*y[1]*y[1]
    dy[2] = (c2/c1)*y[2] - (b/c1)*y[1]*y[2] - (a2/c1)*y[2]*y[2]
end

prob = ODEProblem(syst, [M1, M2], tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

plot(sol)
savefig("../report/image/01.png")

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[1] - (b/c1)*y[1]*y[2] - (a1/c1)*y[1]*y[1]
    dy[2] = (c2/c1)*y[2] - (b/c1+d)*y[1]*y[2] - (a2/c1)*y[2]*y[2]
end

prob = ODEProblem(syst, [M1, M2], tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

plot(sol)
savefig("../report/image/02.png")
```

4.2 Решение на OpenModelica

```
model lab8

parameter Real p_cr=20;
parameter Real N=40;
parameter Real q=1;
parameter Real tau1=20;
parameter Real tau2=15;
parameter Real p1=7;
parameter Real p2=9.5;
parameter Real d=0.00031;

parameter Real a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q);
parameter Real a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real b = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*tau2*tau2*p2*p2*N*q);
parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

Real M1_1(start=6.4);
Real M2_1(start=4.1);
Real M1_2(start=6.4);
Real M2_2(start=4.1);

equation
  der(M1_1) = M1_1 - (b/c1)*M1_1*M2_1 - (a1/c1)*M1_1*M1_1;
  der(M2_1) = (c2/c1)*M2_1 - (b/c1)*M1_1*M2_1 - (a2/c1)*M2_1*M2_1;

equation
  der(M1_2) = M1_2 - (b/c1)*M1_2*M2_2 - (a1/c1)*M1_2*M1_2;
```

```
  der(M2_2) = (c2/c1)*M2_2 - (b/c1+d)*M1_2*M2_2 - (a2/c1)*M2_2*M2_2;

end lab8;
```

4.3 Результаты работы

Результаты на Julia (рис. 4.1 и 4.2).

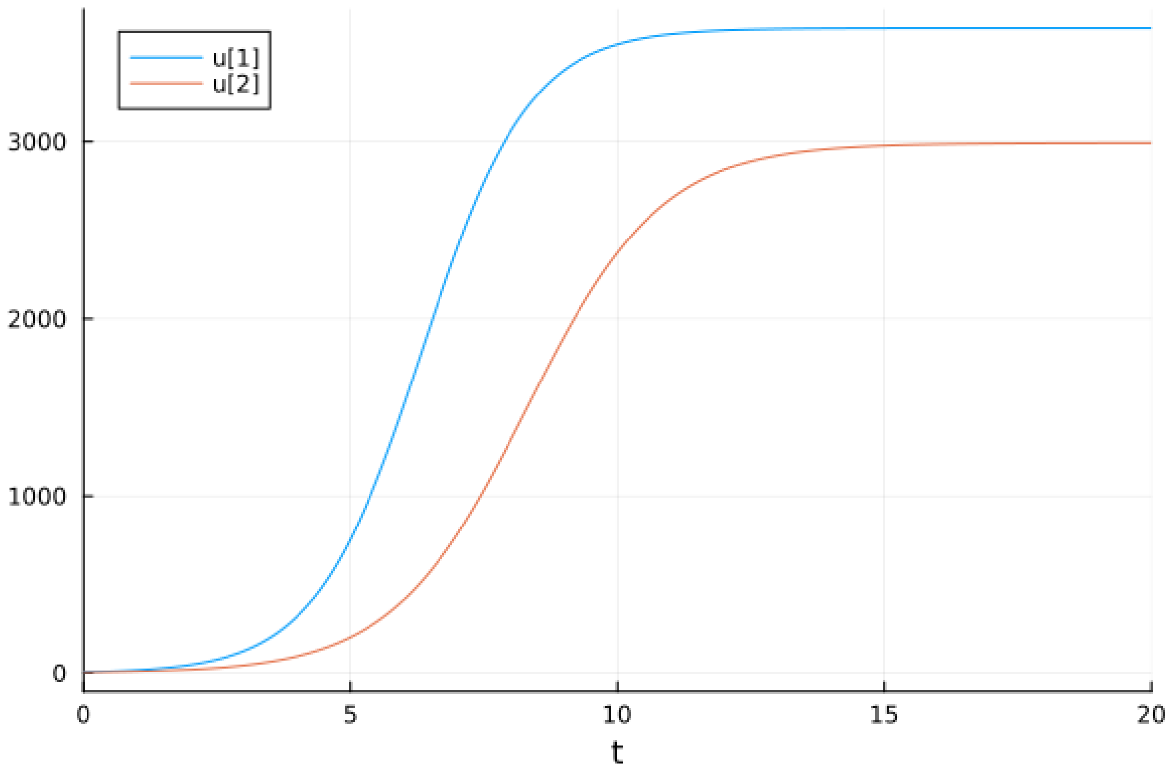

Рис. 4.1: График для случая 1 (Julia)

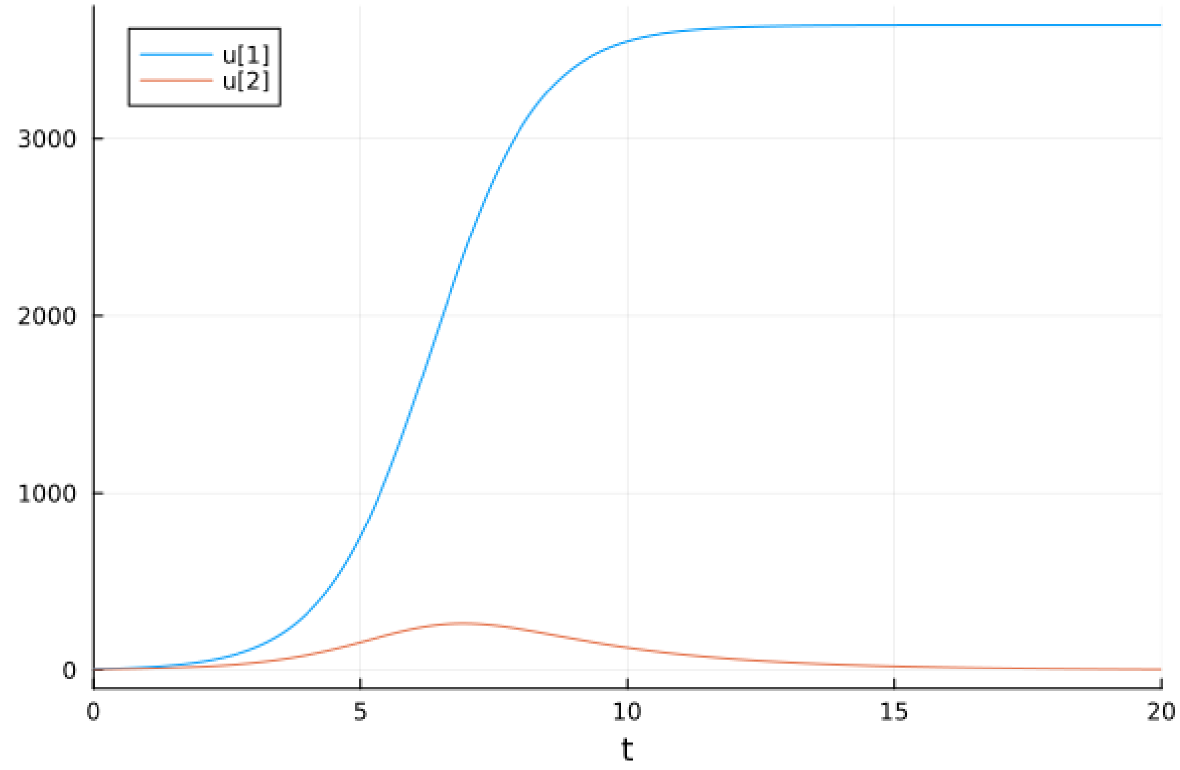

Рис. 4.2: График для случая 2 (Julia)

Результаты на OpenModelica (рис. 4.3 и 4.4).

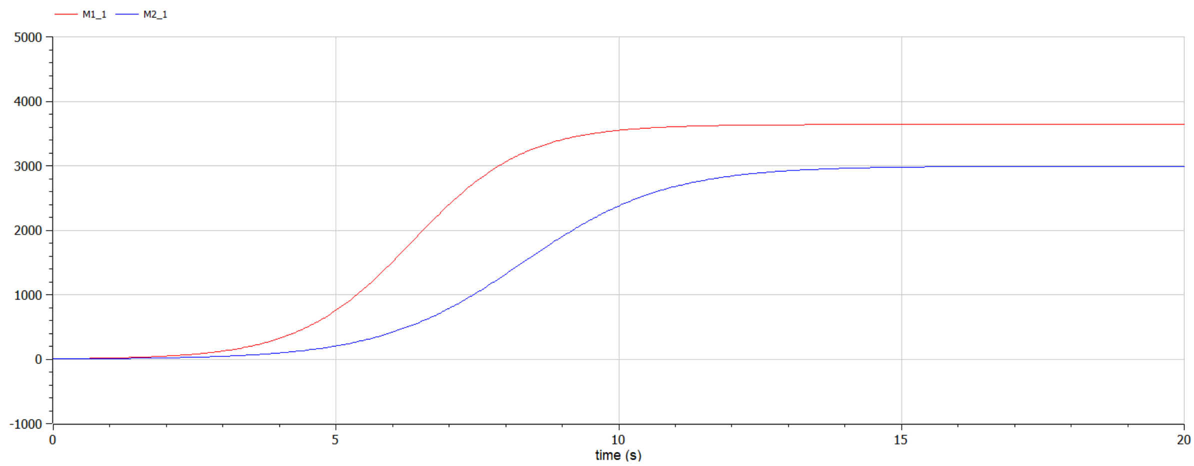

Рис. 4.3: График для случая 1 (OpenModelica)

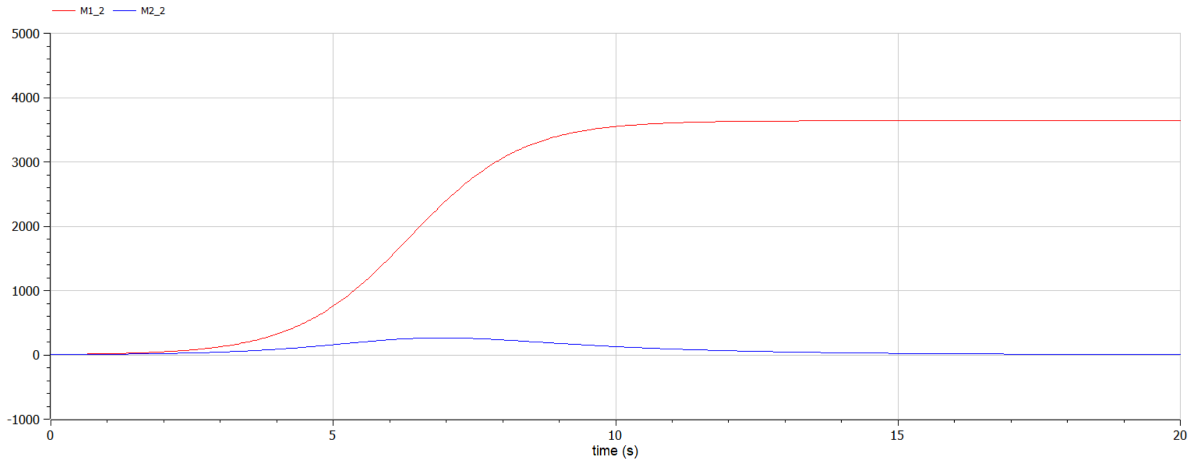

Рис. 4.4: График для случая 2 (OpenModelica)

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы мы построили модель конкуренции двух фирм.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: https://openmodelica.org/useresresources/userdocumentation/.