Математическое моделирование

Лабораторная работа №5

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построение простейшей модели взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

Вариант 50

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.71x(t) + 0.046x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.64y(t) - 0.017x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 4, y_0 = 12$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры [3]. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв и хищников зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 4
y0 = 12
u0 = [x0; y0]
t0 = 0
tmax = 200
tspan = (t0, tmax)
t = collect(LinRange(t0, tmax, 1000))

a = 0.71
b = 0.046
c = 0.64
d = 0.017

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = -a*y[1] + b*y[1]*y[2]
    dy[2] = c*y[2] - d*y[1]*y[2]
end
```

```
prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat = t)

plot(sol)
savefig("../report/image/01_jl.png")

plot(sol, idxs=(1, 2))
savefig("../report/image/02_jl.png")
```

4.2 Решение на OpenModelica

```
model lab5
Real x(start=4);
Real y(start=12);

parameter Real a = 0.71;
parameter Real b = 0.046;
parameter Real c = 0.64;
parameter Real d = 0.017;

equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5;
```

4.3 Результаты работы

Результаты на Julia (рис. 4.1 и 4.2).

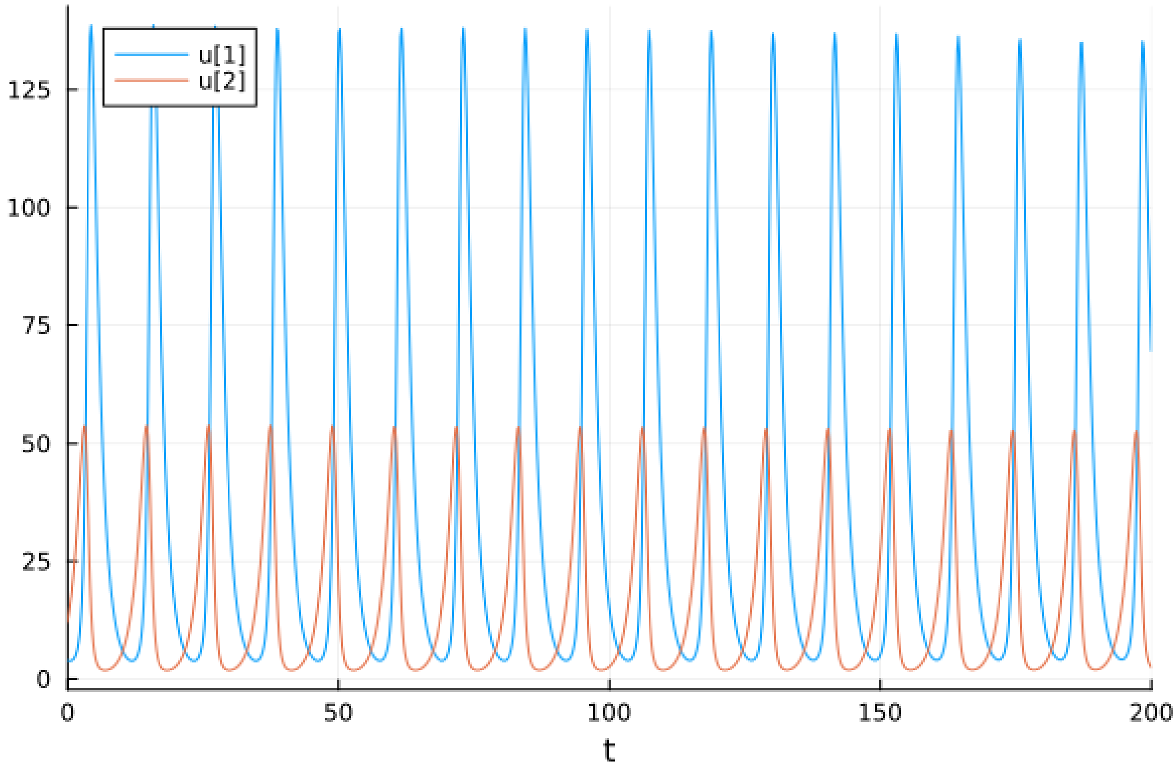

Рис. 4.1: График зависимости численности жертв и хищников от времени (Julia)

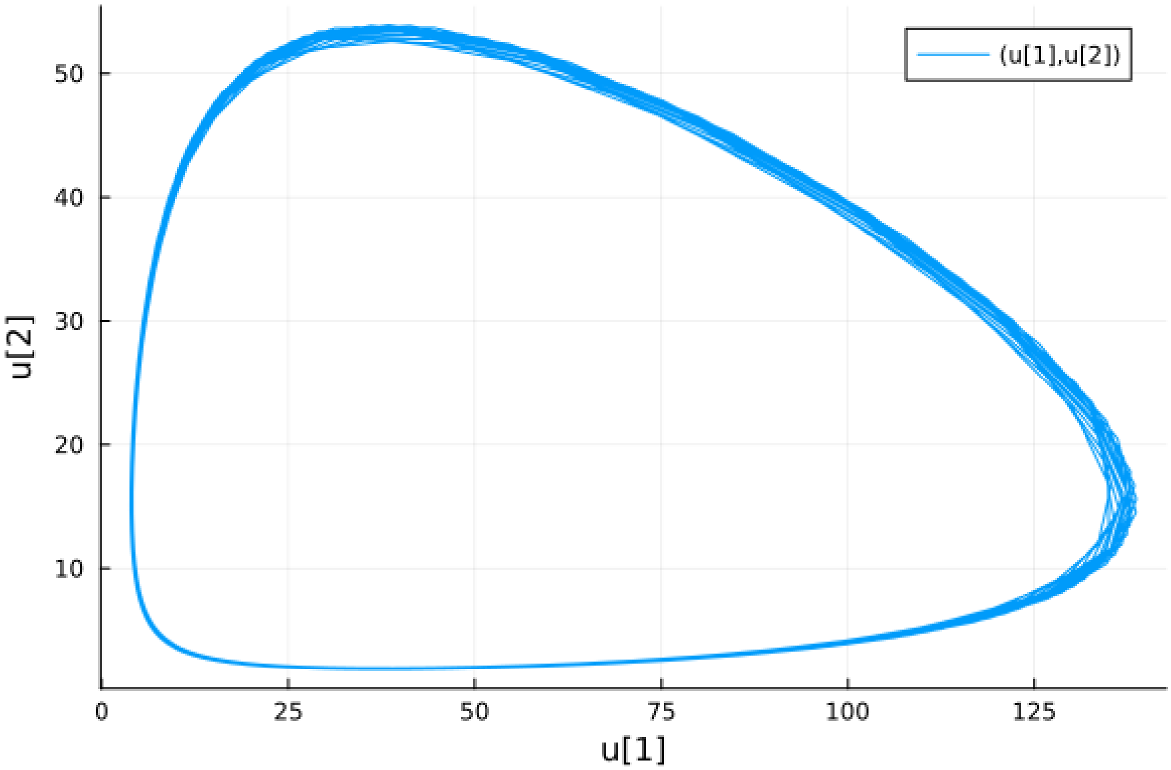

Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв (Julia)

Результаты на OpenModelica (рис. 4.3 и 4.4).

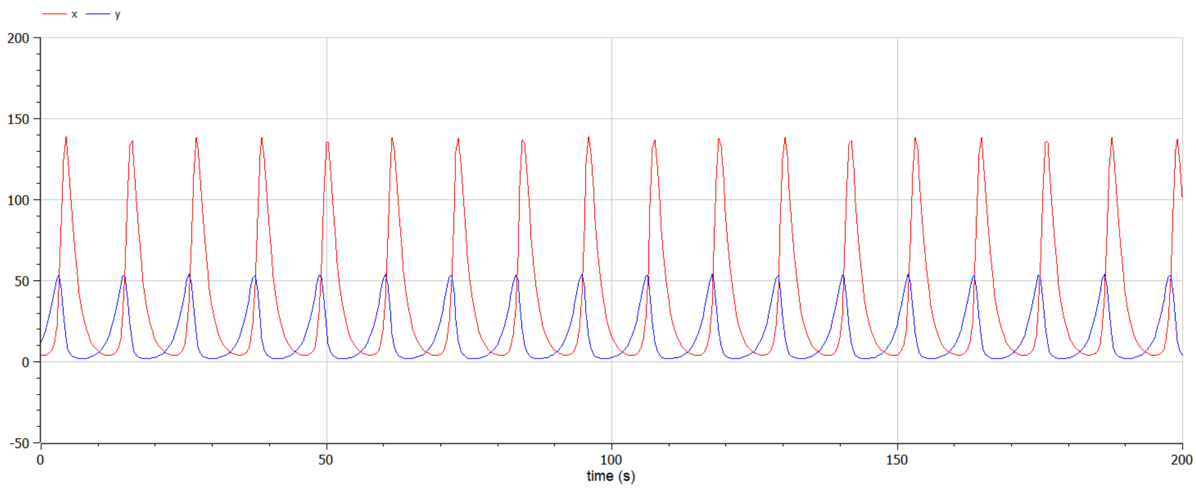

Рис. 4.3: График зависимости численности жертв и хищников от времени (OpenModelica)

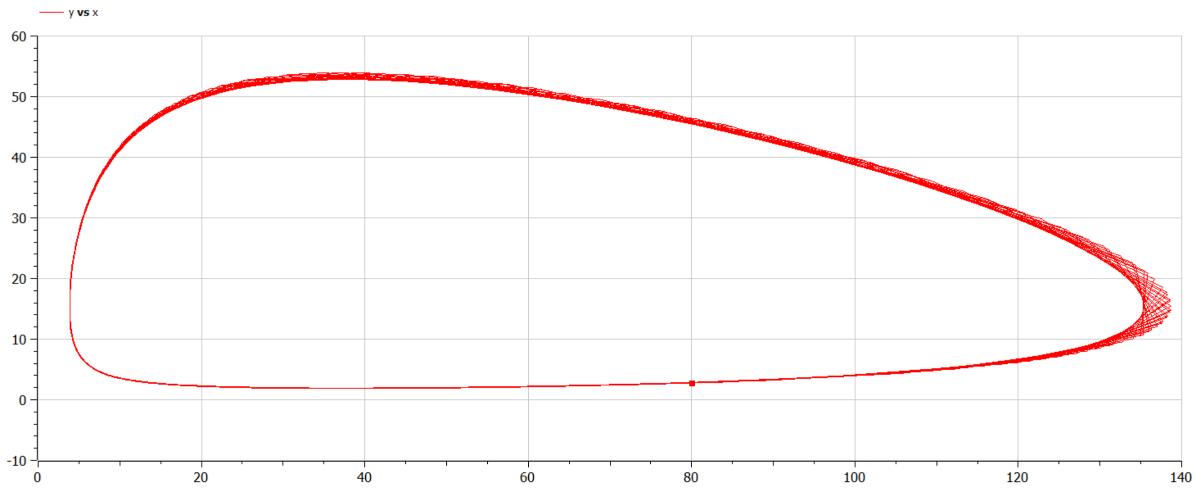

Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв (OpenModelica)

Стационарное состояние системы будет в точке: $x_0 = \frac{0.64}{0.017} \approx 37.65, y_0 = \frac{0.71}{0.046} \approx 15.43$

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы мы построили простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: https://openmodelica.org/useresresources/userdocumentation/.
3. Lotka–Volterra equations [Электронный ресурс]. Wikipedia, 2024. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations.