Математическое моделирование

Лабораторная работа №2

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построение математической модели для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

2 Задание

Вариант 50

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживаетсяна расстоянии 16,9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Дифференциальные уравнения (ДУ) - это уравнения, которые содержат производные неизвестной функции. Они используются для описания изменения величин в зависимости от времени или других независимых переменных [3].

4 Выполнение лабораторной работы

4.0.1 1. Математическая модель

1. Принимает за $t_0 = 0, x = 0$ место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x = 16,9$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x = \theta = 0$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $16,9 - x$ (или $16,9 + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{16,9-x}{4,7v}$ (во втором случае $\frac{16,9+x}{4,7v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

- в пером случае
$$\frac{x_1}{v} = \frac{16,9 - x_1}{4,7v}$$
- во втором случае
$$\frac{x_2}{v} = \frac{16,9 + x_2}{4,7v}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{169}{57}$ и $x_2 = \frac{169}{37}$.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $v_\tau = \frac{rd\theta}{dt}$.

- $v_\tau = \sqrt{22,09v^2 - v^2}$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $\frac{rd\theta}{dt} = \sqrt{21,09}v$.

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{rd\theta}{dt} = \sqrt{21,09}v \end{cases} \quad \text{с начальными условиями} \begin{cases} \theta = 0 \\ r = x_1 \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} \theta = -\pi \\ r = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{21,09}}$$

4.0.2 2. Использование языков

Используем язык Julia для решения этой задачи.

- Код программы для первого случая:

```
using DifferentialEquations
using Plots

const n = 16.9
const v = 4.7
const r = n / (v + 1)
const t1 = (0, 2pi)

function F(u, p, t)
    return u / sqrt(v*v - 1)
end

setup = ODEProblem(F, r, t1)
result = solve(setup, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
index = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[index] for i in 1:size(result.t)[1]]
plt = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)
plot!(plt, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="Пу
scatter!(plt, rAngles, result.u, label="", mc=:red, ms=0.0005)
plot!(plt, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера",
scatter!(plt, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)
savefig(plt, "case1.png")
```

- Код программы для второго случая:

```
using DifferentialEquations
```

```
using Plots

const n = 16.9
const v = 4.7
const r = n / (v - 1)
const t1 = (-pi, pi)

function F(u, p, t)
    return u / sqrt(v*v - 1)
end

setup = ODEProblem(F, r, t1)
result = solve(setup, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
index = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[index] for i in 1:size(result.t)[1]]
plt = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)
plot!(plt, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="Пут
scatter!(plt, rAngles, result.u, label="", mc=:red, ms=0.0005)
plot!(plt, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера",
scatter!(plt, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)
savefig(plt, "case2.png")
```

Результаты сохраняются в виде картинки с расширешнием png (рис. 4.1 и 4.2).

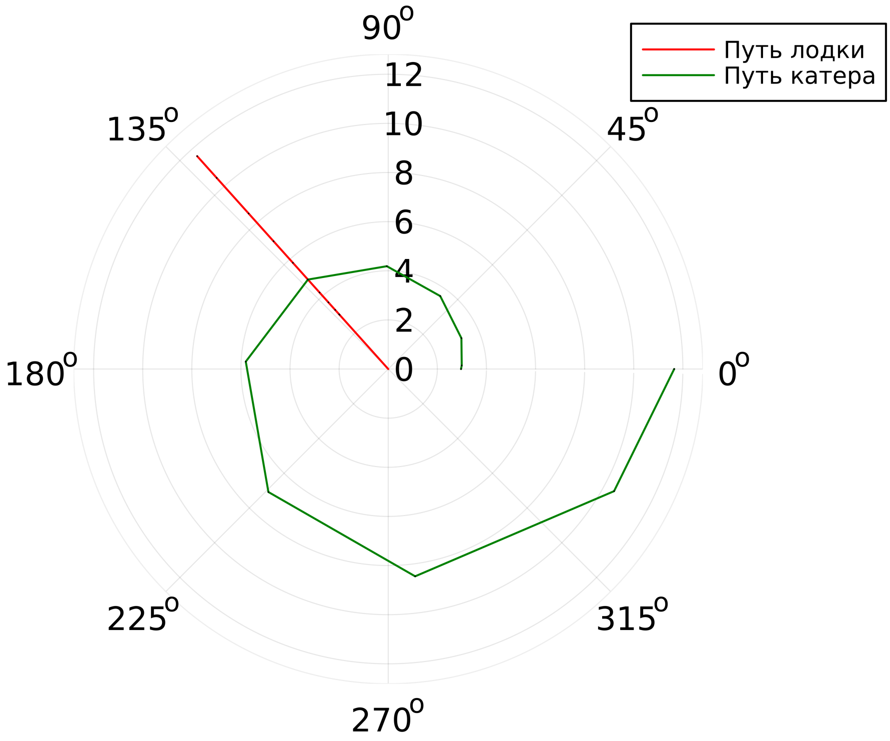

Рис. 4.1: Траекторию движения катера и лодки для первого случая

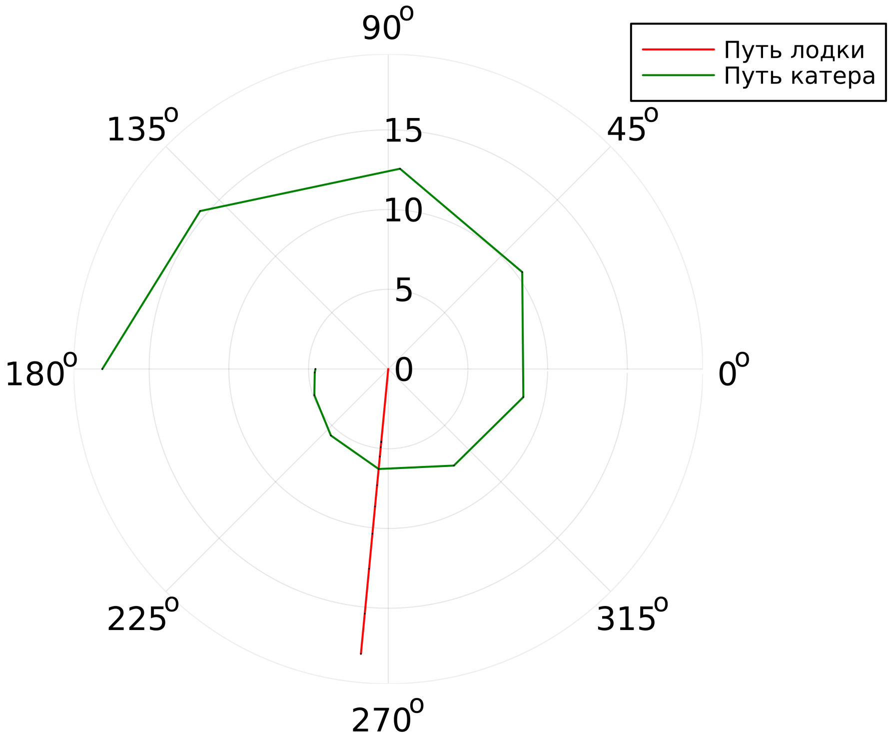

Рис. 4.2: Траекторию движения катера и лодки для второго случая

В картинке видна точка пересечения лодки и катера.

5 Выводы

В ходе этой лабораторной работы ознакомились с языками программирования Julia и OpenModelica. Построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: https://openmodelica.org/useresresources/userdocumentation/.
3. Егоров Д.Л. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. 1-е изд. Казань, 2020. 108 с.