

Математическое моделирование

Лабораторная работа №3

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Теоретическое введение	7
4	Выполнение лабораторной работы	8
4.1	Математическая модель	8
4.1.1	Боевые действия между регулярными войсками	8
4.1.2	Боевые действия с участием регулярных войск и партизан- ских отрядов	9
4.1.3	Боевые действия между партизанскими отрядами	10
4.2	Решение с помощью двух языков	10
4.2.1	Решение на Julia	10
4.2.2	Решение на OpenModelica	13
5	Выводы	16
	Список литературы	17

Список иллюстраций

4.1	Боевые действия между регулярными войсками	11
4.2	Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов	13
4.3	Боевые действия между регулярными войсками	14
4.4	Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов	15

Список таблиц

1 Цель работы

Рассмотрение простейшей модели боевых действий – модели Ланчестера.

2 Задание

Вариант 50

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 61 100 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в 45 400 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками:

$$\frac{dx}{dt} = -0,41x(t) - 0,89y(t) + \sin(t + 7) + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,52x(t) - 0,61y(t) + \cos(t + 6) + 1$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0,37x(t) - 0,675y(t) + |2\sin(t)|$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,432x(t)y(t) - 0,42y(t) + \cos(t) + 2$$

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Дифференциальные уравнения (ДУ) - это уравнения, которые содержат производные неизвестной функции. Они используются для описания изменения величин в зависимости от времени или других независимых переменных [3].

Законы Ланчестера представляют собой математические формулы для расчета относительных сил пары сражающихся сторон – подразделений вооруженных сил. Наиболее известными и получившими широкое распространение являются так называемые Ланчестеровские модели, использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов как функции от времени [4].

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Математическая модель

Рассмотри три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками.
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.
3. Боевые действия между партизанскими отрядами.

4.1.1 Боевые действия между регулярными войсками

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны и соответственно, $a(t)$, $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t)$, $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Эта модель соответствует первому заданию.

4.1.2 Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Эта модель соответствует второму заданию.

4.1.3 Боевые действия между партизанскими отрядами

Модель ведение боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случае, имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)\end{aligned}$$

4.2 Решение с помощью двух языков

4.2.1 Решение на Julia

Программа для первого случая:

```
using Plots;
using DifferentialEquations;

function new_equations(du, u, p, t)
    du[1] = -0.41*u[1] - 0.89*u[2] + sin(t + 7) + 1
    du[2] = -0.52*u[1] - 0.61*u[2] + cos(t + 6) + 1
end

const initial_conditions = Float64[61100, 45400]
const parameters = [0.0, 3.0]

problem = ODEProblem(new_equations, initial_conditions, parameters)
solution = solve(problem, dtmax=0.1)

X_population = [u[1] for u in solution.u]
Y_population = [u[2] for u in solution.u]
```

```

time = [t for t in solution.t]

plot_solution = plot(dpi = 300, legend= true, bg =:white)
plot!(plot_solution, xlabel="Время", ylabel="Численность", title="Модель боевых действий",
случай 1", legend=:outerbottom)
plot!(plot_solution, time, X_population, label="Численность армии X", color =:red)
plot!(plot_solution, time, Y_population, label="Численность армии Y", color =:green)

savefig(plot_solution, "case1.png")

```

График первого случая на Julia (рис. 4.1).

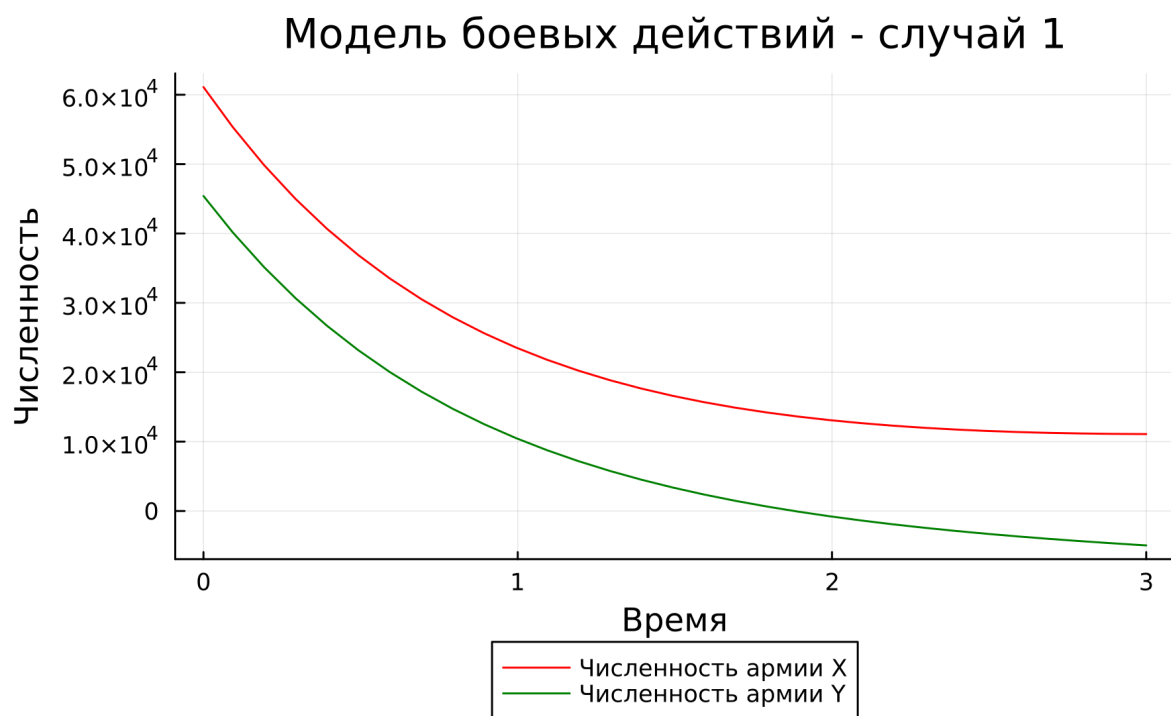


Рис. 4.1: Боевые действия между регулярными войсками

Программа для второго случая:

```
using Plots
```

```
using DifferentialEquations
```

```
function new_equations(du, u, p, t)
```

```
    du[1] = -0.37*u[1] - 0.675*u[2] + abs(2*sin(t))
```

```
    du[2] = -0.432*u[1]*u[2] - 0.42*u[2] + cos(t) + 2
```

```
end
```

```
const initial_conditions = Float64[61100, 45400]
```

```
const parameters = [0.0, 0.0007]
```

```
problem = ODEProblem(new_equations, initial_conditions, parameters)
```

```
solution = solve(problem, dtmax=0.000001)
```

```
X_population = [u[1] for u in solution.u]
```

```
Y_population = [u[2] for u in solution.u]
```

```
time = [t for t in solution.t]
```

```
plot_solution = plot(dpi=1200, legend=true, bg=:white)
```

```
plot!(plot_solution, time, X_population, label="Численность армии X", color=:red)
```

```
plot!(plot_solution, time, Y_population, label="Численность армии Y", color=:green)
```

```
plot!(plot_solution, xlabel="Время", ylabel="Численность", title="Модель боевых действий  
случай 2", legend=:outerbottom)
```

```
savefig(plot_solution, "case2.png")
```

График второго случая на Julia (рис. 4.2).

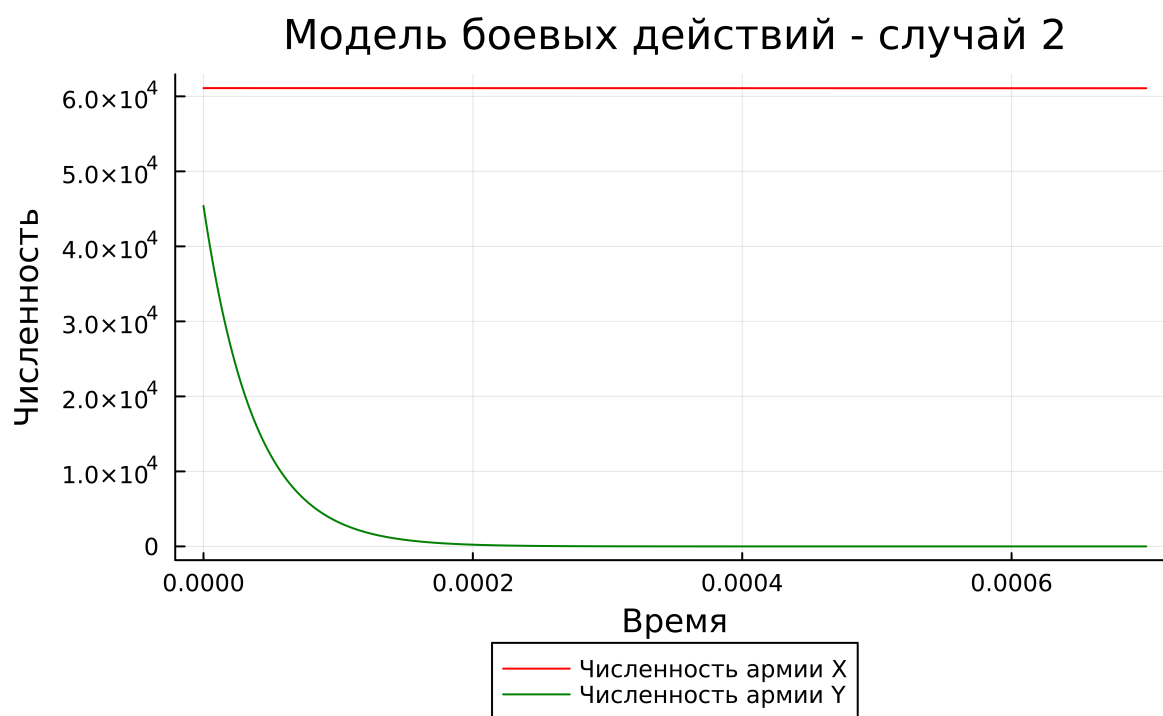


Рис. 4.2: Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

4.2.2 Решение на OpenModelica

Программа для первого случая:

```

model lab3_1
  Real x;
  Real y;
  Real a = 0.41;
  Real b = 0.89;
  Real c = 0.52;
  Real d = 0.61;
  Real t = time;
initial equation

```

```

x = 61100;
y = 45400;
equation
  der(x) = -a*x - b*y + sin(t + 7) + 1;
  der(y) = -c*x - d*y + cos(t + 6) + 1;
end lab3_1;

```

График первого случая на OpenModelica (рис. 4.3).

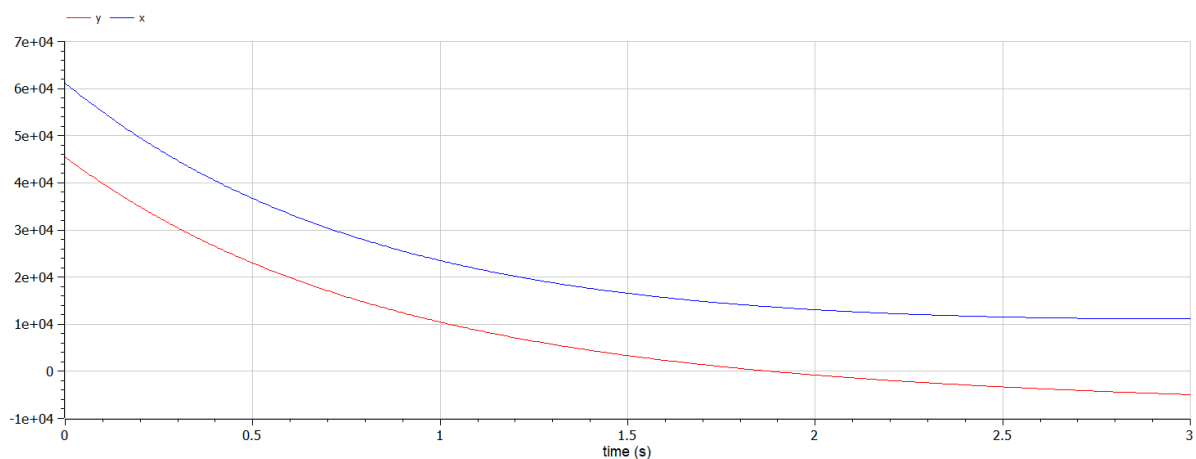


Рис. 4.3: Боевые действия между регулярными войсками

Программа для второго случая:

```

model lab3_2
  Real x;
  Real y;
  Real a = 0.37;
  Real b = 0.675;
  Real c = 0.432;
  Real d = 0.42;
  Real t = time;
initial equation

```

```

x = 61100;
y = 45400;
equation
  der(x) = -a*x - b*y + 2*abs(sin(t));
  der(y) = -c*x*y - d*y + cos(t) + 2;
end lab3_2;

```

График второго случая на OpenModelica (рис. 4.4).

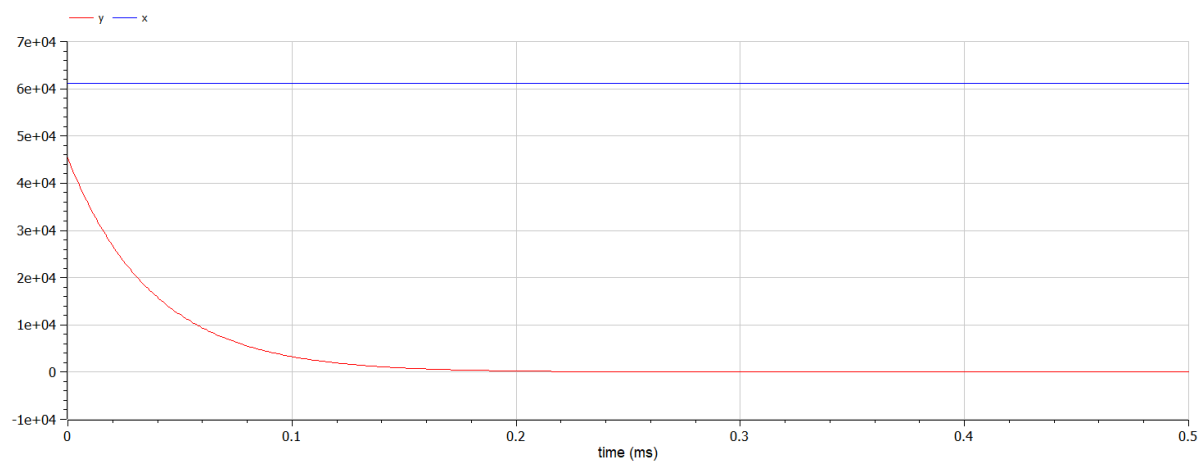


Рис. 4.4: Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

5 Выводы

В ходе этой лабораторной работы мы построили математическую модель простейшей модели боевых действий – модели Ланчестера.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: <https://docs.julialang.org/en/v1/>.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: <https://openmodelica.org/useresources/usersdocumentation/>.
3. Егоров Д.Л. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. 1-е изд. Казань, 2020. 108 с.
4. Сазанова Л.А. Модель Ланчестера как дискретная управляемая система // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. г. Екатеринбург, Россия, 2016. Т. 1, № 1. С. 202–204.