Математическое моделирование

Лабораторная работа №6

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построение простейшей модели по здаче об эпидемии.

2 Задание

Вариант 50

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $N = 4289$ в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 82$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 15$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$
2. если $I(0) > I^*$

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{,если } I(t) > I^* \\ 0 & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{,если } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{,если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.01
b = 0.02

N = 4289
I = 82
R = 15
S = N-I-R

tspan = (0, 100)
t = collect(LinRange(0, 200, 1000))
u0 = [S; I; R]

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = 0
    dy[2] = b*y[2]
    dy[3] = -b*y[2]
end
```

```
prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

plot(sol)

savefig("../report/image/01.png")

function syst(dy, y, p, t)
    dy[1] = -a*y[1]
    dy[2] = a*y[1] - b*y[2]
    dy[3] = b*y[2]
end

prob = ODEProblem(syst, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)

plot(sol)

savefig("../report/image/02.png")
```

4.2 Решение на OpenModelica

Первый случай:

```
model lab6_1
parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;

Real S(start=4289);
```

```
Real I(start=82);
Real R(start=15);

equation
  der(S) = 0;
  der(I) = b*I;
  der(R) = -b*I;

end lab6_1;
```

Второй случай:

```
model lab6_2
parameter Real a = 0.01;
parameter Real b = 0.02;

Real S(start=4289);
Real I(start=82);
Real R(start=15);

equation
  der(S) = -a*S;
  der(I) = a*S-b*I;
  der(R) = b*I;

end lab6_2;
```

4.3 Результаты работы

Результаты на Julia (рис. 4.1 и 4.2).

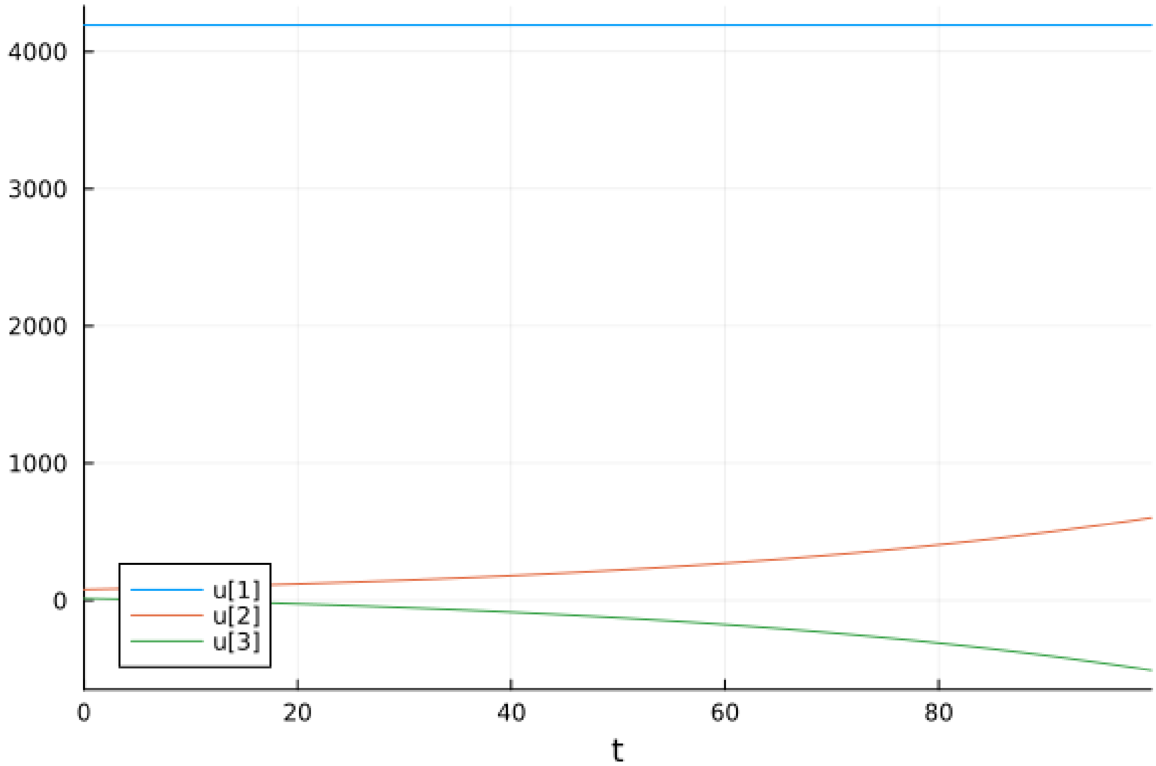

Рис. 4.1: Графики численности в случае $I(0) \leq I^*$

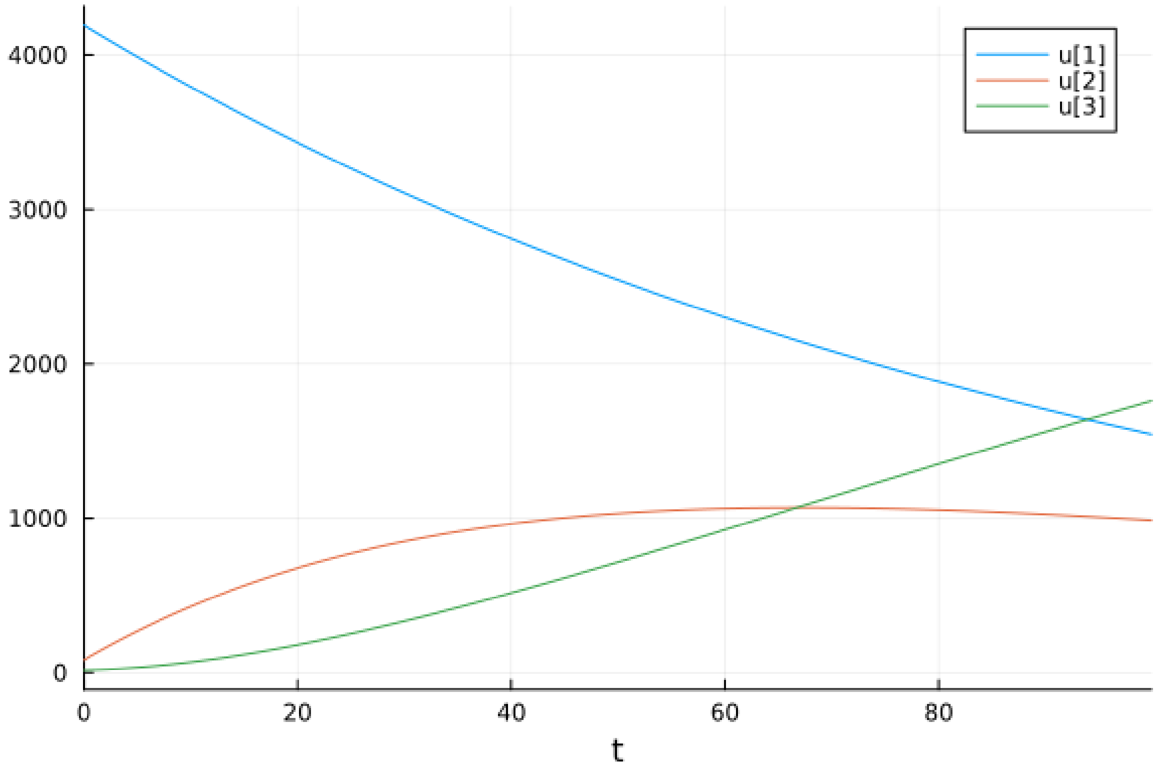

Рис. 4.2: Графики численности в случае $I(0) > I^*$

Результаты на OpenModelica (рис. 4.3 и 4.4).

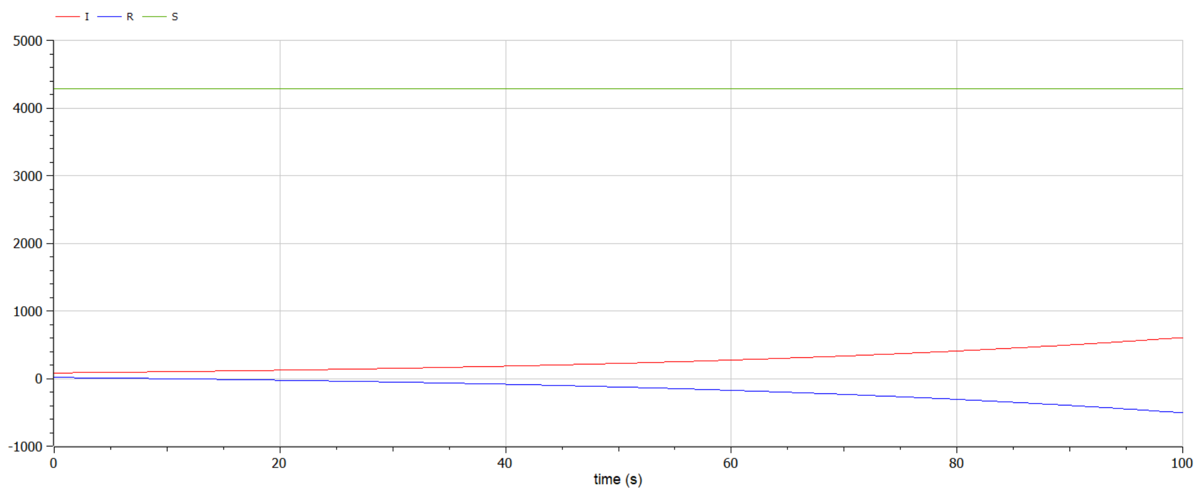

Рис. 4.3: Графики численности в случае $I(0) \leq I^*$

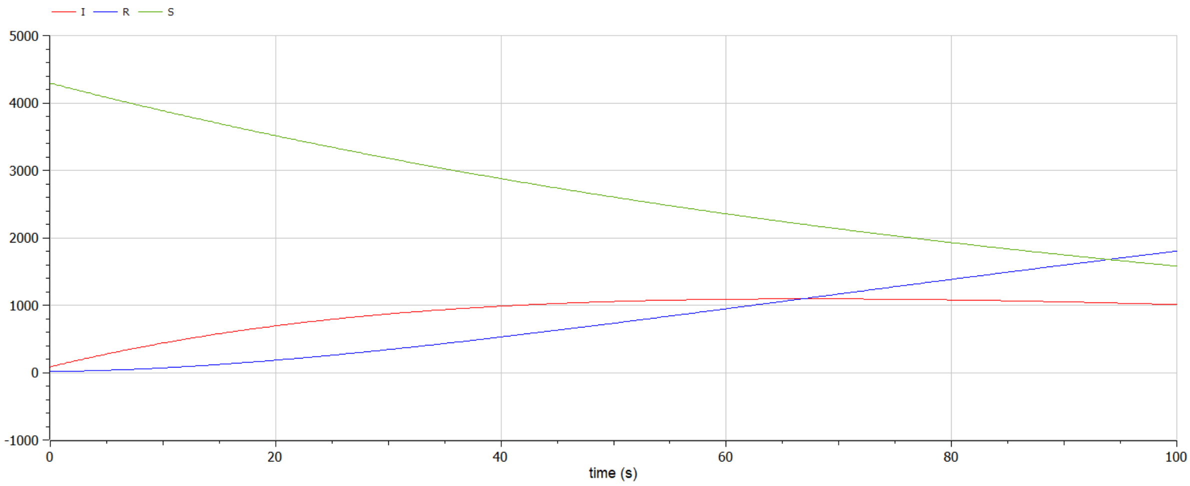

Рис. 4.4: Графики численности в случае $I(0) > I^*$

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы мы построили простейшую модель по здаче об эпидемии.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: https://openmodelica.org/useresresources/userdocumentation/.