Математическое моделирование

Лабораторная работа №4

Матюшкин Денис Владимирович (НПИбд-02-21)

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построение математической модели гармонических колебаний.

2 Задание

Вариант 50

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 3.5x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 11\dot{x} + 11x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 12\dot{x} + x = 2\cos 0.5t$

На итнтервале $t \in [0; 51]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = -1.2$

3 Теоретическое введение

Julia - это высокопроизводительный язык программирования, который сочетает в себе скорость компилируемых языков с удобством использования скриптовых языков. Он предназначен для научных вычислений, анализа данных и создания высокопроизводительных приложений. Julia поддерживает многопоточность, имеет обширную экосистему библиотек и является проектом с открытым исходным кодом [1].

OpenModelica - это свободная и открытая среда для моделирования и анализа динамических систем. Она предоставляет инструменты для создания и симуляции моделей в различных областях, таких как инженерия, наука, экономика [2].

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором [3]. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(\dot{t}_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Первый случай

В системе отсутствуют потери энергии (колебания без затухания).

Получаем уравнение:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

4.1.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 0
y0 = -1.2
u0 = [x0, y0]
t0 = 0
tmax = 51
t = collect(LinRange(t0, tmax, 1000))
tspan = (t0, tmax)
```

```
w = 3.5

function lorenz(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[2]
    dy[2] = -w*y[1]
end

prob = ODEProblem(lorenz, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)
plot(sol)
savefig("../report/image/case1j.png")

plot(sol, idxs=(1,2))
savefig("../report/image/case1_fasj.png")
```

4.1.2 Решение на OpenModelica

```
model case1

Real x(start=0);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w = 3.5;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -w*x;

end case1;
```

4.1.3 Результаты работы

Решение первого случая на Julia (рис. 4.1 и 4.2).

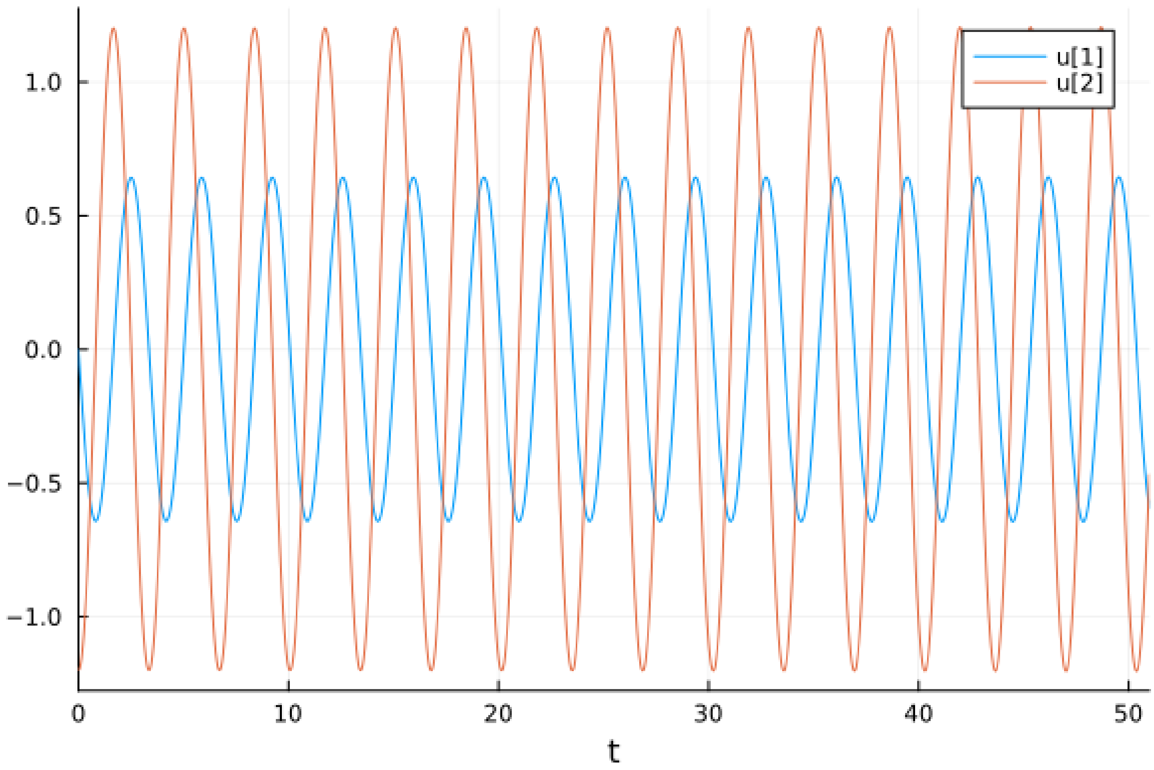

Рис. 4.1: Решение уравнения гармонического осциллятора в 1-ом случае (Julia)

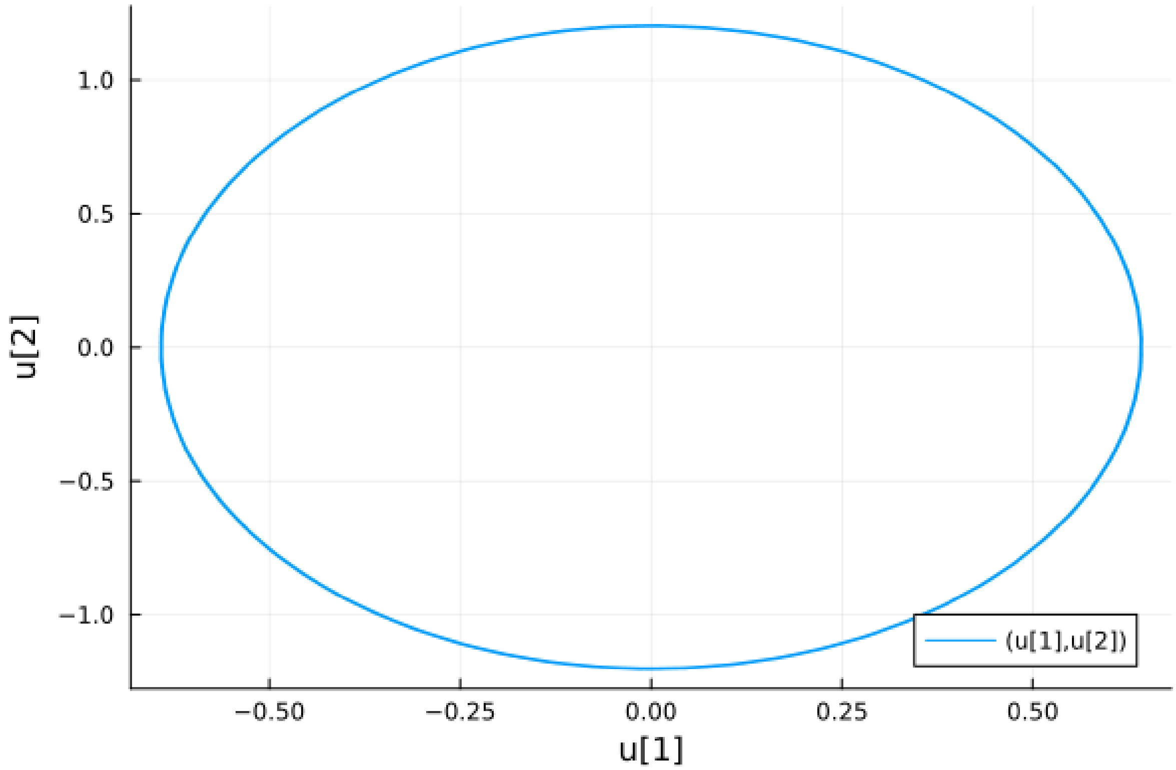

Рис. 4.2: Фазовый портрет гармонического осциллятора в 1-ом случае (Julia)

Решение первого случая на OpenModelica (рис. 4.3 и 4.4).

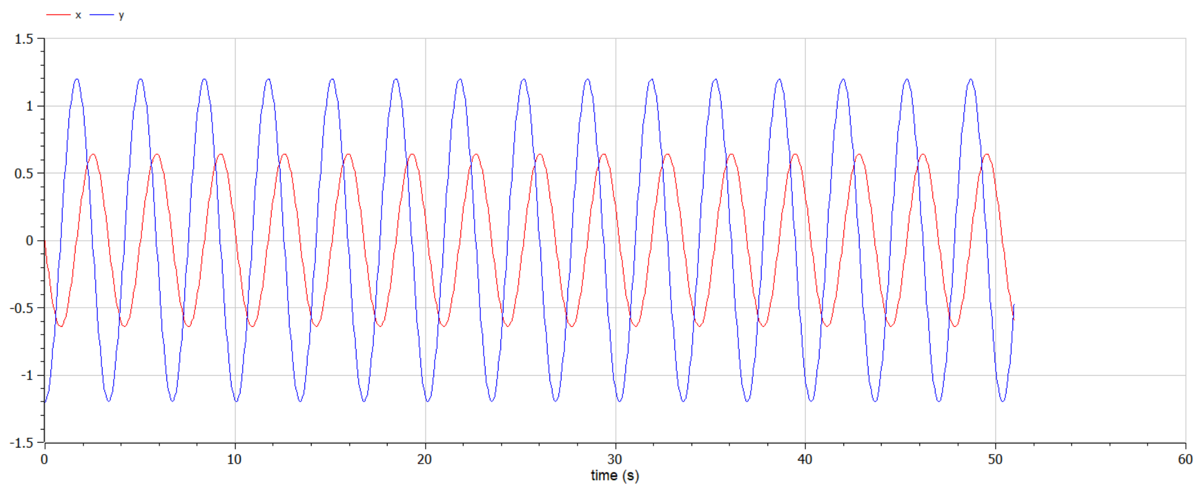

Рис. 4.3: Решение уравнения гармонического осциллятора в 1-ом случае (OpenModelica)

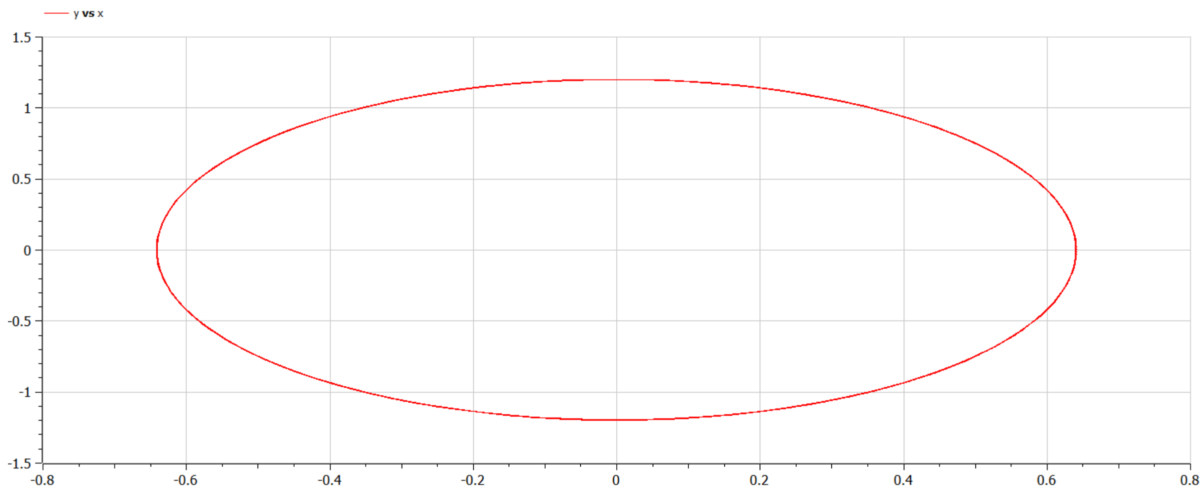

Рис. 4.4: Фазовый портрет гармонического осциллятора в 1-ом случае (OpenModelica)

4.2 Второй случай

В системе присутствуют потери энергии (колебания с затуханием).

Получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \end{cases}$$

4.2.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 0
y0 = -1.2
```

```
u0 = [x0, y0]
t0 = 0
tmax = 51
t = collect(LinRange(t0, tmax, 1000))
tspan = (t0, tmax)

w = 11
g = 11

function lorenz(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[2]
    dy[2] = -g*y[2] - w*y[1]
end

prob = ODEProblem(lorenz, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)
plot(sol)
savefig("../report/image/case2j.png")

plot(sol, idxs=(1,2))
savefig("../report/image/case2_fasj.png")
```

4.2.2 Решение на OpenModelica

```
model case2

Real x(start=0);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w = 11;
```

```
parameter Real g = 11;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g*y-w*x;

end case2;
```

4.2.3 Результаты работы

Решение второго случая на Julia (рис. 4.5 и 4.6).

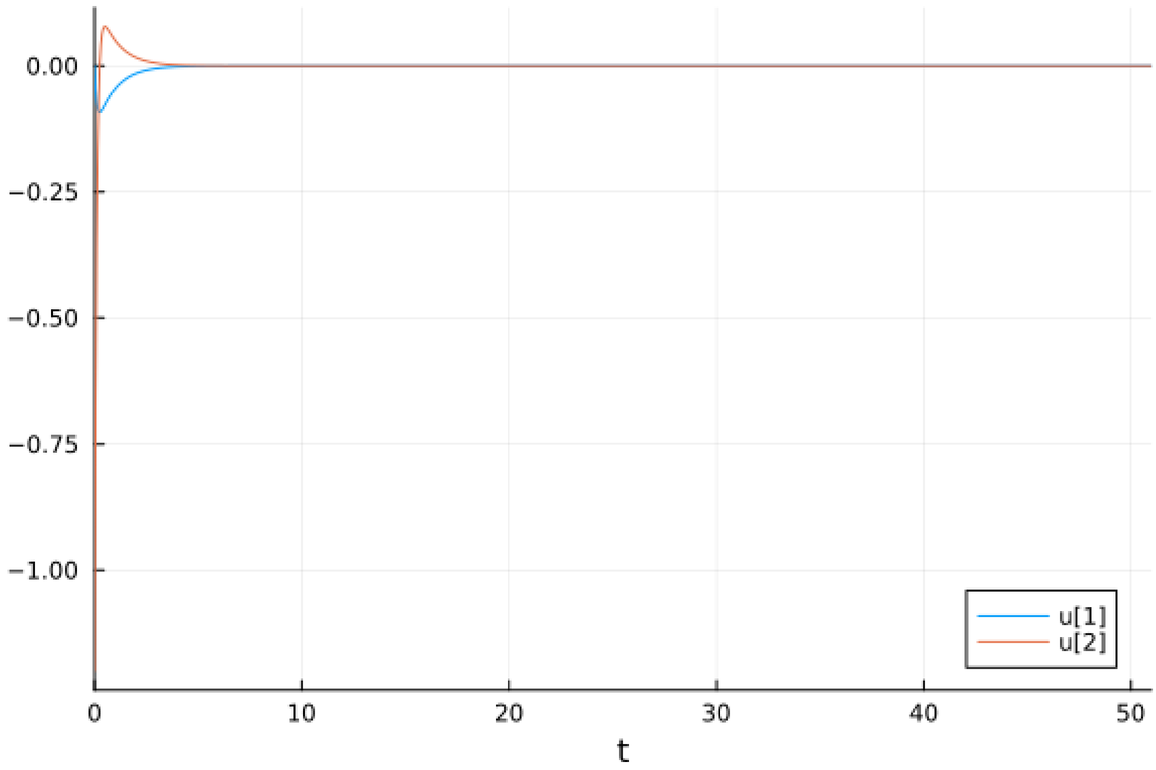

Рис. 4.5: Решение уравнения гармонического осциллятора во 2-ом случае (Julia)

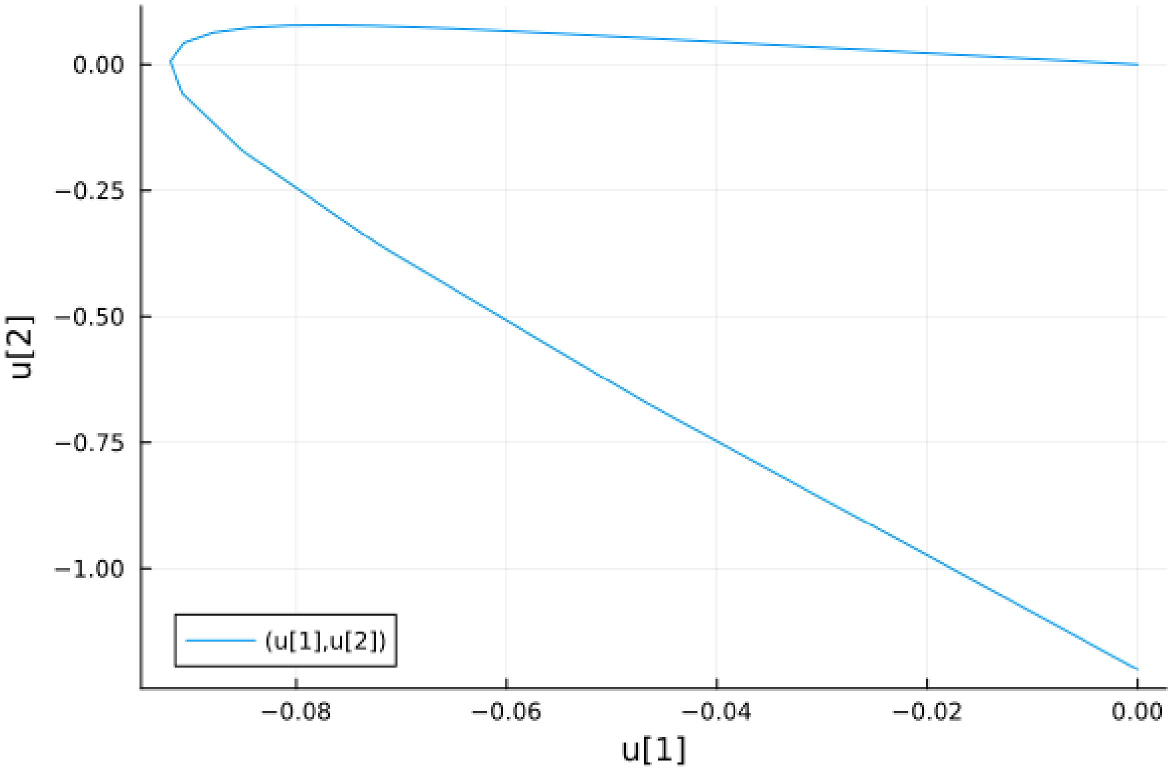

Рис. 4.6: Фазовый портрет гармонического осциллятора во 2-ом случае (Julia)

Решение второго случая на OpenModelica (рис. 4.7 и 4.8).

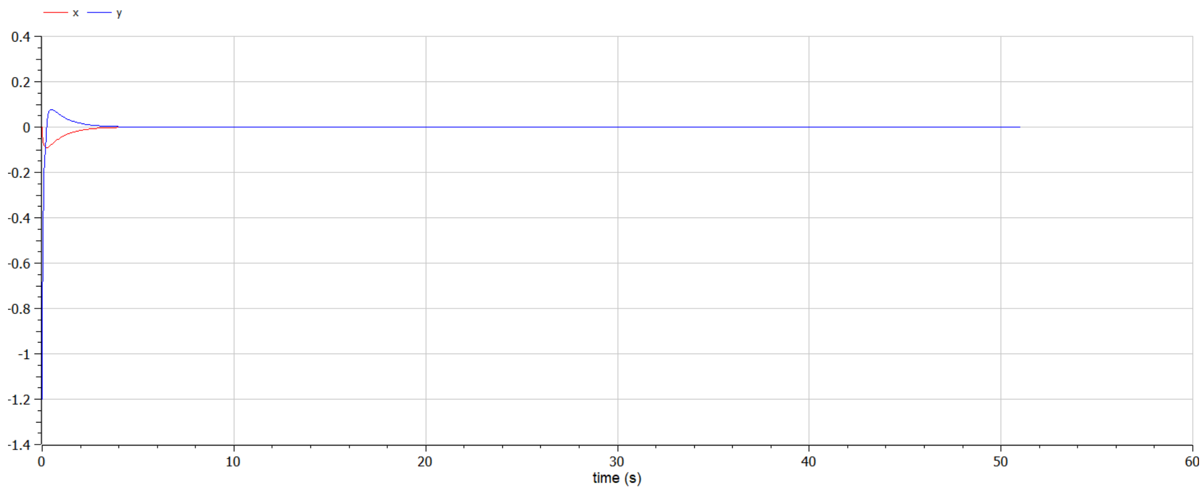

Рис. 4.7: Решение уравнения гармонического осциллятора во 2-ом случае (OpenModelica)

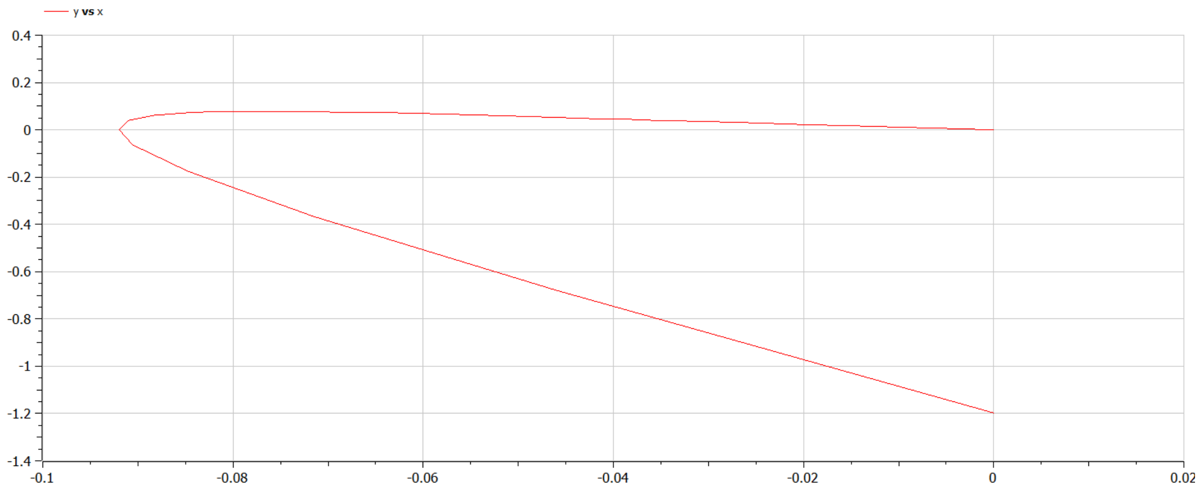

Рис. 4.8: Фазовый портрет гармонического осциллятора во 2-ом случае (OpenModelica)

4.3 Третий случай

На систему действует внешняя сила.

Получаем уравнение:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

Переходим к двум дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(t) - 2\gamma y - \omega_0^2 x \end{cases}$$

4.3.1 Решение на Julia

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 0
y0 = -1.2
```

```
u0 = [x0, y0]
t0 = 0
tmax = 51
t = collect(LinRange(t0, tmax, 1000))
tspan = (t0, tmax)

w = 1
g = 12

function F(t)
    return 2*cos(0.5*t)
end

function lorenz(dy, y, p, t)
    dy[1] = y[2]
    dy[2] = -g*y[2] - w*y[1] + F(t)
end

prob = ODEProblem(lorenz, u0, tspan)
sol = solve(prob, saveat=t)
plot(sol)
savefig("../report/image/case3j.png")

plot(sol, idxs=(1,2))
savefig("../report/image/case3_fasj.png")
```

4.3.2 Решение на OpenModelica

```
model case3
```

```
Real x(start=0);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w = 1;
parameter Real g = 12;

equation
  der(x) = y;
  der(y) = -g*y-w*x + 2*cos(0.5*time);

end case3;
```

4.3.3 Результаты работы

Решение третьего случая на Julia (рис. 4.9 и 4.10).

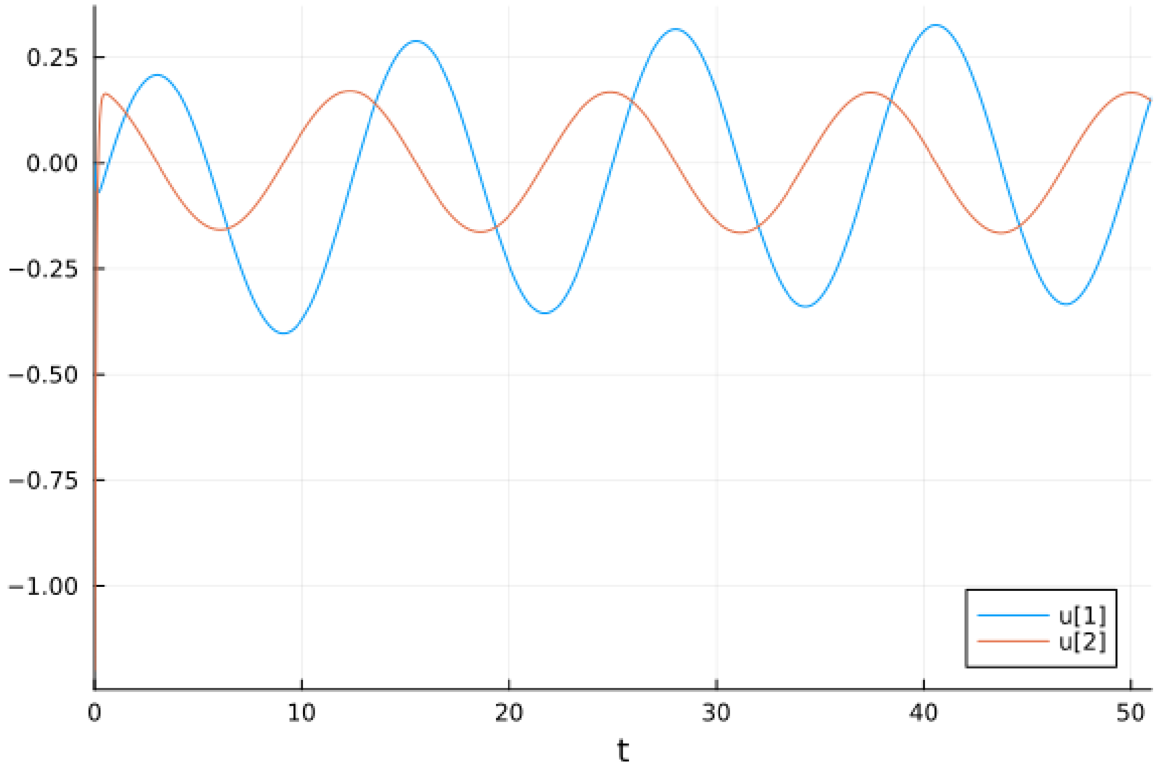

Рис. 4.9: Решение уравнения гармонического осциллятора в 3-ем случае (Julia)

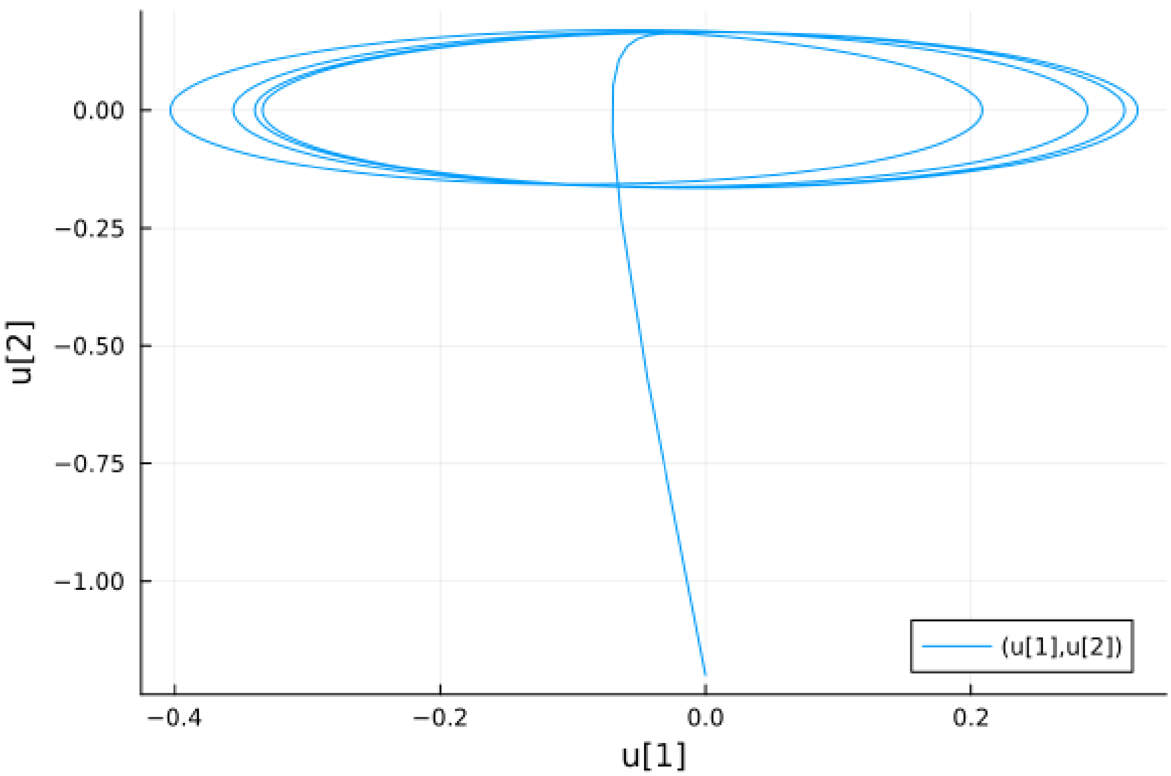

Рис. 4.10: Фазовый портрет гармонического осциллятора в 3-ем случае (Julia)

Решение третьего случая на OpenModelica (рис. 4.11 и 4.12).

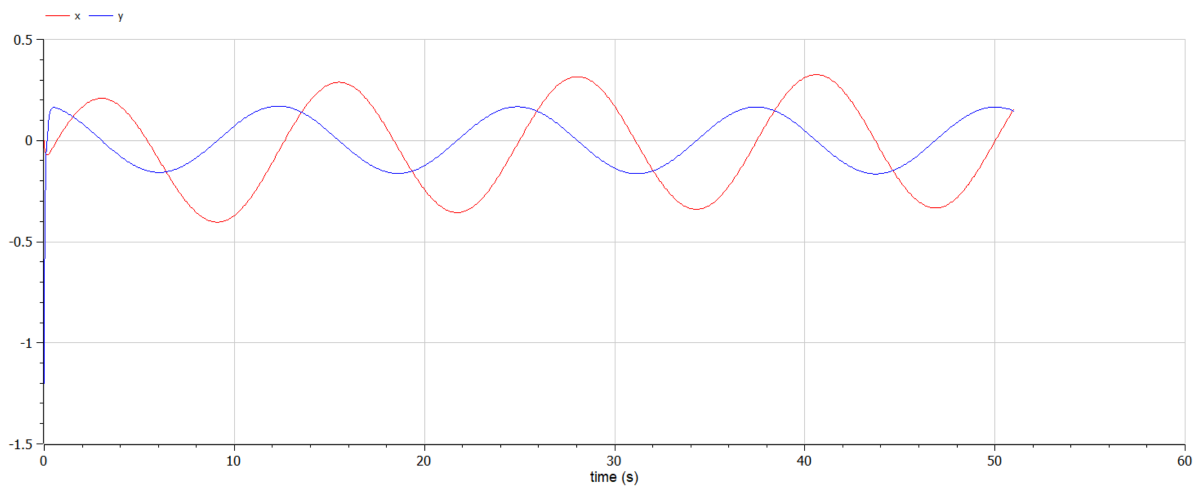

Рис. 4.11: Решение уравнения гармонического осциллятора в 3-ем случае (OpenModelica)

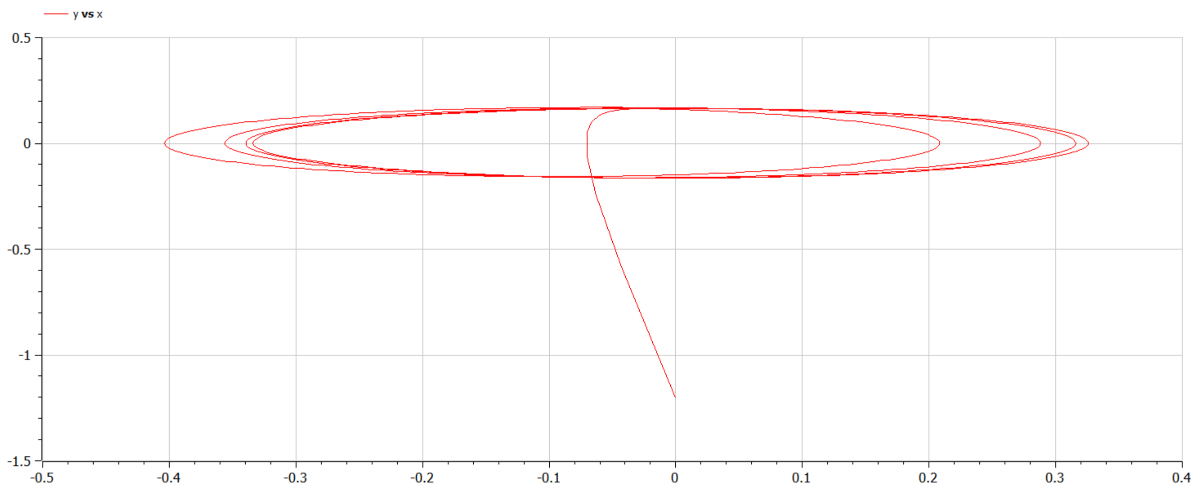

Рис. 4.12: Фазовый портрет гармонического осциллятора в 3-ем случае (OpenModelica)

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы мы построили математической модели гармонических колебаний.

Список литературы

1. Julia 1.10 Documentation [Электронный ресурс]. Matrix Laboratory, 2023. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/.
2. User Documentation [Электронный ресурс]. Open Source Modelica Consortium, 2013. URL: https://openmodelica.org/useresresources/userdocumentation/.
3. Трубецкой Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания. 1-е изд. Саратов, 2011. 108 с.