Ecuaciones diferenciales

Sistemas masa-resorte

Semana 11: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

1. **Modelar** sistemas masa-resorte en diferentes configuraciones.
2. **Analizar** y **resolver** un sistema de dos resortes - una masa y un sistema de tres resortes - dos masas.

1

SISTEMAS MASA-RESORTE

Logros

- **Modela** sistemas masa-resorte en diferentes configuraciones. (L.7.11.1.1)
- **Analiza** y **resuelve** un sistema de dos resortes - una masa y un sistema de tres resortes - dos masas. (L.7.11.1.2)

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.
Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:

Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.
Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:

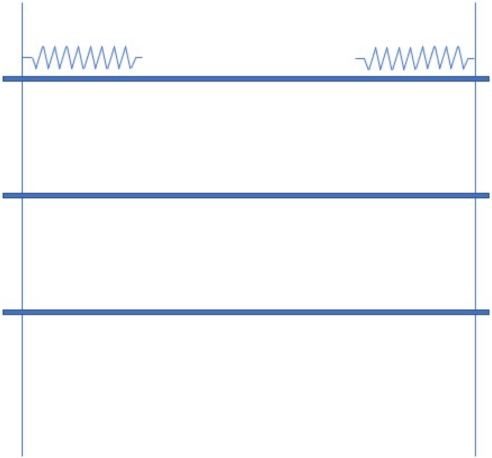
Dos resortes y una masa

Hemos analizado el movimiento libre, amortiguado y forzado de sistemas masa-resorte teniendo una masa y un resorte. Ahora estudiaremos un sistema que consta de una masa y dos resortes, uno a cada extremo, se analizará el comportamiento de la masa en los casos de movimiento libre, amortiguado y forzado.
Se tiene el siguiente sistema con dos resortes de constante elástica diferente:

Se colocará un bloque en medio, de tal manera de que ambos resortes serán estirados hasta llegar a una posición de equilibrio.

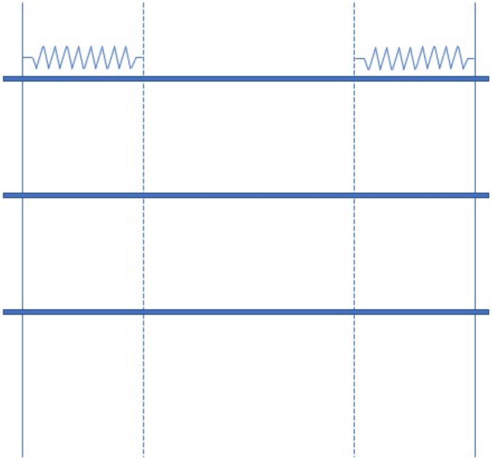
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



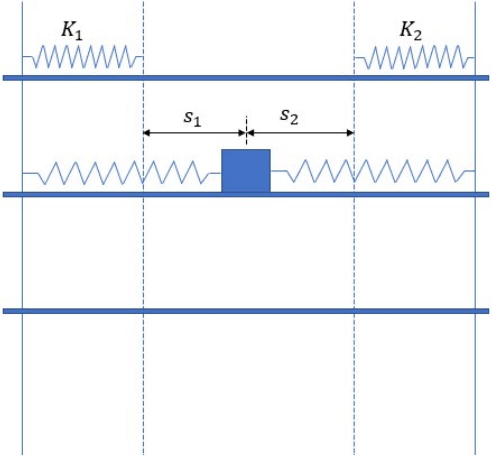
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



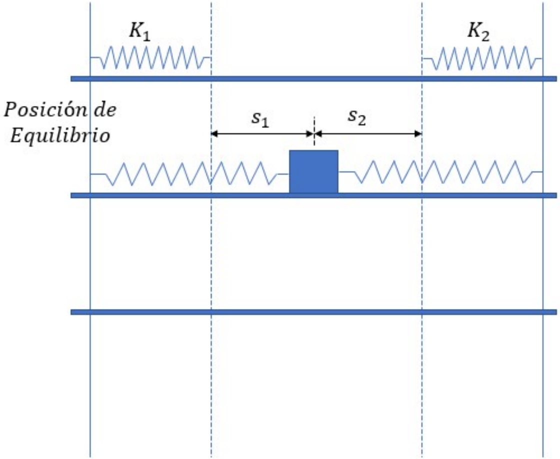
Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



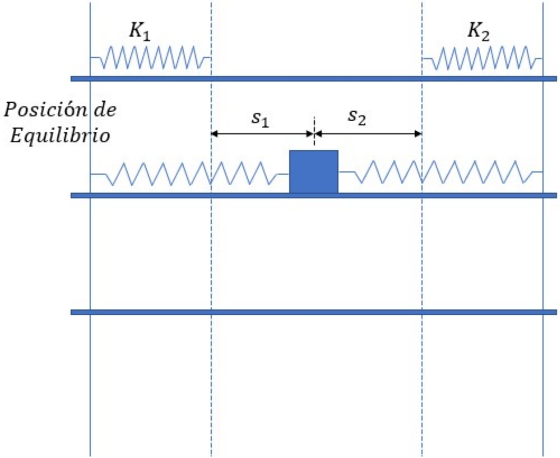
Dos resortes y una masa

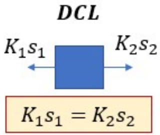
Analizando en la posición de equilibrio:



Dos resortes y una masa

Analizando en la posición de equilibrio:



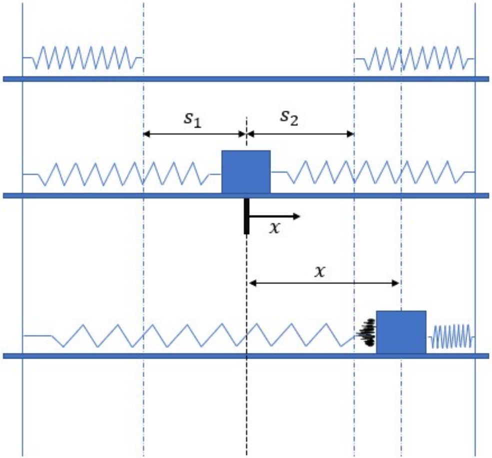


Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:

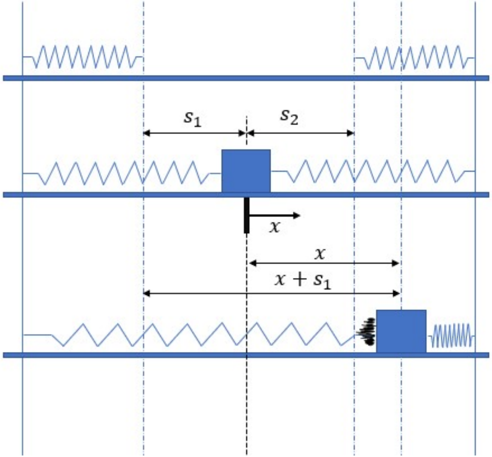
Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



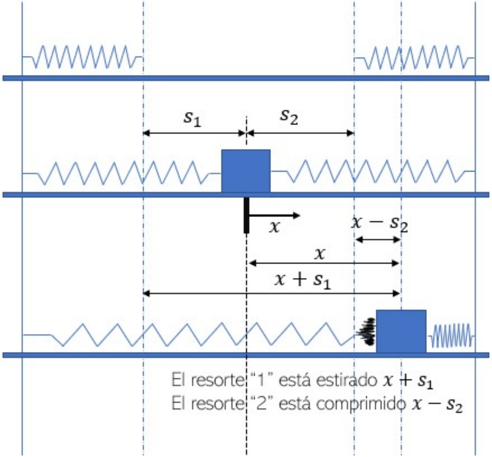
Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



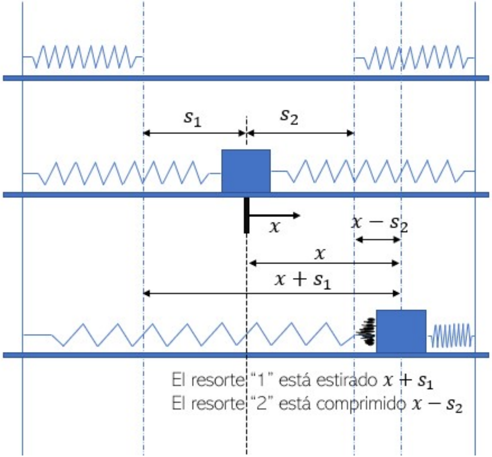
Dos resorte y una masa

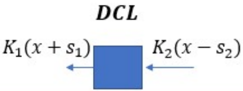
Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:



Dos resorte y una masa

Ahora analizaremos cuando la masa se encuentra en movimiento. Considerando el eje "X" a la derecha de la posición de equilibrio:





$$\boxed{mx'' = -K_1(x + s_1) - K_2(x - s_2)}$$

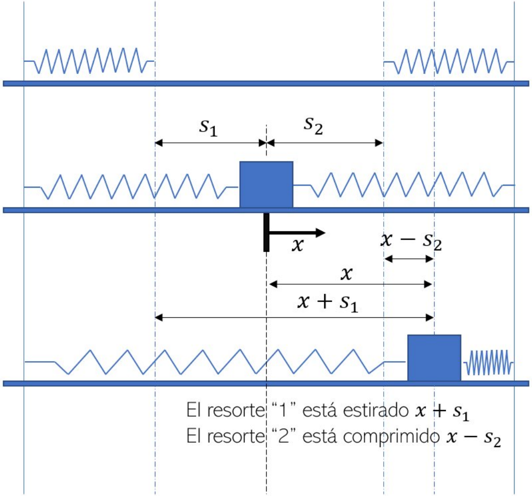
$$\boxed{mx'' + (K_1 + K_2)x = 0}$$

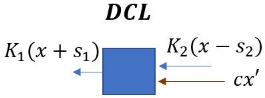
Dos resortes y una masa

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:

Dos resortes y una masa

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:





$$\boxed{mx'' = -K_1(x + s_1) - K_2(x - s_2) - cx'}$$

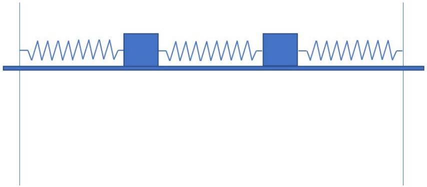
$$\boxed{mx'' + cx' + (K_1 + K_2)x = 0}$$

Ejemplo

Se tiene un sistema horizontal con dos resortes, las constantes de los resortes son $K_1 = 6N/m$ y $K_2 = 4N/m$. Se coloca un objeto de masa $m = 1\ kg$ en medio hasta ubicarla en su posición de equilibrio. Se nota que, en esta posición, el resorte 1 (de la izquierda) se ha estirado $1\ m$. Se sabe que el medio ofrece una resistencia igual a 2 veces la velocidad de la masa. Si se lanza el bloque a la derecha desde la posición de equilibrio con velocidad de $3m/s$. Describa el movimiento del objeto, defina qué tipo de amortiguamiento es y su gráfica.

Tres resortes y dos masas

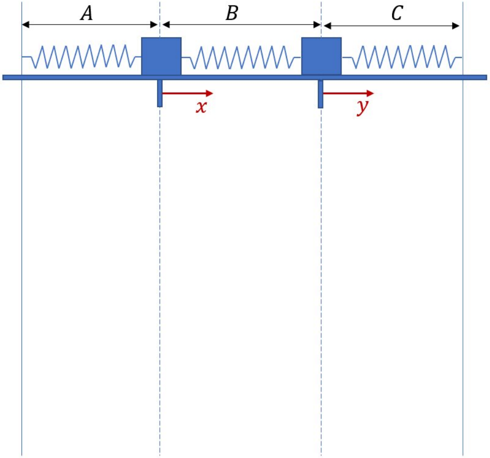
Ahora se busca resolver el siguiente sistema:



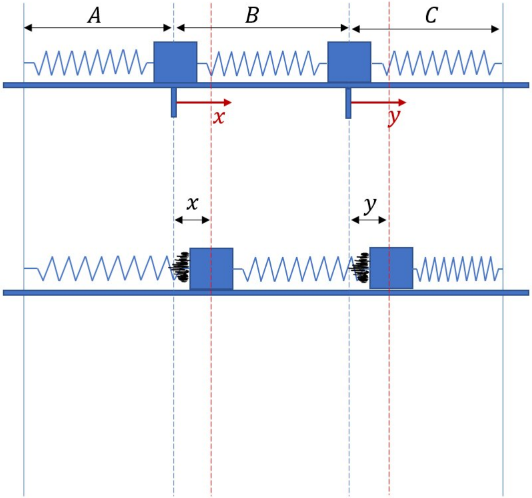
El problema consiste en determinar la posición de los bloques en cualquier instante.

Tres resortes y dos masas

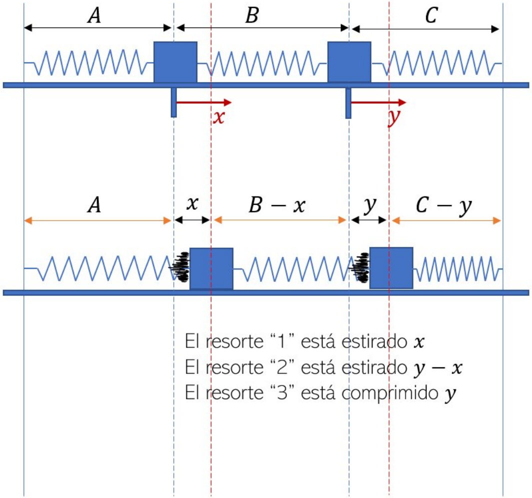
Las posiciones son medidas respecto de la posición de equilibrio:



Tres resortes y dos masas



Tres resortes y dos masas

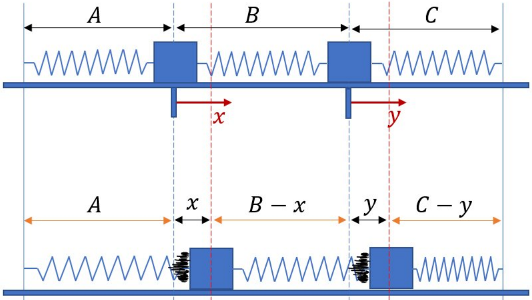


Resorte “1”:
Al inicio medía: A
Ahora mide: $A + x$

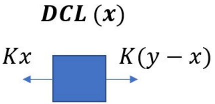
Resorte “2”:
Al inicio medía: B
Ahora mide: $B - x + y$

Resorte “3”:
Al inicio medía: C
Ahora mide: $C - y$

Tres resortes y dos masas

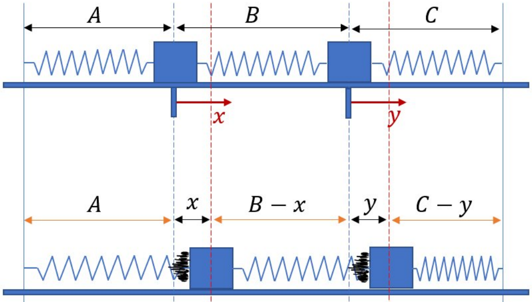


El resorte "1" está estirado x
El resorte "2" está estirado $y - x$
El resorte "3" está comprimido y



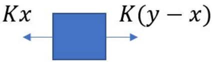
$$\boxed{\begin{aligned} mx'' &= K(y-x) - Kx \\ mx'' + 2Kx - Ky &= 0 \end{aligned}}$$

Tres resortes y dos masas



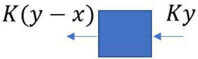
El resorte "1" está estirado x
El resorte "2" está estirado $y-x$
El resorte "3" está comprimido y

$\boldsymbol{DCL\ (x)}$



$$mx'' = K(y-x) - Kx$$
$$mx'' + 2Kx - Ky = 0$$

$\boldsymbol{DCL\ (y)}$



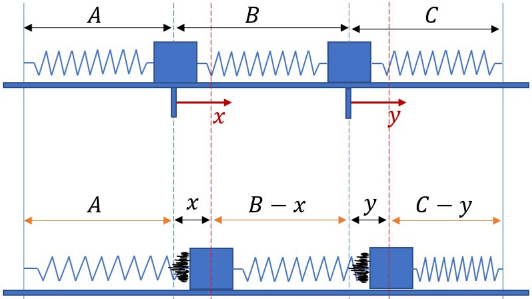
$$my'' = -K(y-x) - Ky$$
$$my'' + 2Ky - Kx = 0$$

Tres resortes y dos masas

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:

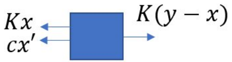
Tres resortes y dos masas

Para el caso cuando el sistema es amortiguado se obtiene lo siguiente:



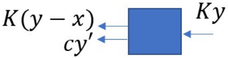
El resorte "1" está estirado x
El resorte "2" está estirado $y-x$
El resorte "3" está comprimido y

$\boldsymbol{DCL\ (x)}$



$$\boxed{\begin{aligned} mx'' &= K(y-x) - Kx - cx' \\ mx'' + cx' + 2Kx - Ky &= 0 \end{aligned}}$$

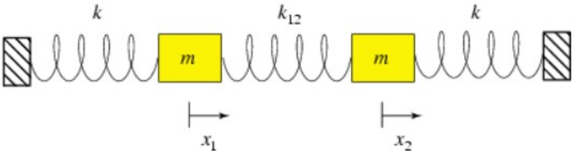
$\boldsymbol{DCL\ (y)}$



$$\boxed{\begin{aligned} my'' &= -K(y-x) - cy' - Ky \\ my'' + cy' + 2Ky - Kx &= 0 \end{aligned}}$$

Para el alumno

Consideremos tres resortes en paralelo, con dos de los resortes con constante elástica k y sujetos a dos paredes en cada extremo, y el tercer resorte de constante elástica k_{12} colocado entre las dos masas iguales m.



Determine las ecuaciones que modela las posiciones de los bloques.

Respuesta:

$$
\begin{aligned}
mx_1'' &= -(k + k_{12})x_1 + k_{12}x_2 \\
mx_2'' &= k_{12}x_1 - (k + k_{12})x_2
\end{aligned}
$$

Conclusiones

1. Es posible analizar diferentes configuraciones de sistemas masa-resorte aplicando los mismos principios físicos que para un resorte con una masa.
2. En general, los principios físicos nos ayudan a determinar las ecuaciones diferenciales que modelan un sistema.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA