Ecuaciones diferenciales

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Semana 01: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Objetivos

- Presentar el curso: contenido, sistema de evaluación y sílabo.
- Definir y clasificar las ecuaciones diferenciales (ED).
- Comprobar las soluciones de ecuaciones diferenciales.

1

PRESENTACIÓN DEL CURSO

Contenidos

El curso está dividido en ocho unidades:

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales.
2. Ecuaciones diferenciales de primer orden.
3. Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden.
4. Ecuaciones diferenciales de orden superior.
5. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
6. Modelado con ecuaciones diferenciales de orden superior.
7. Modelado con sistemas de ecuaciones diferenciales.
8. La transformada de Laplace.

Sistema de evaluación

- Examen parcial 20%
- Examen final 30 %
- ABP 20%
- Evaluación continua 30%
  La evaluación continua se divide en tres partes
  - Quizzes en aula 75%
  - Tareas semanales 10%
  - Actividades grupales 15%

Calendario de evaluaciones

Ecuaciones Diferenciales									
Semanas			EVALUACIÓN CONTINUA					Proyecto	EXAMENES
			Quiz en Aula	Tareas Semanales	Actividades Grupales				
					Inicio	Final			
S1	1-abr	7-abr							
S2	8-abr	14-abr	Q1						
S3	15-abr	21-abr		TS1	AG1 (17-abr)				
S4	22-abr	28-abr	Q2			AG1 (27-abr)			
S5	29-abr	5-may							
S6	6-may	12-may	Q3	TS2	AG2 (8-may)				
S7	13-may	19-may				AG2 (18-may)		P1	
S8	20-may	26-may							Ex. Parcial
S9	27-may	2-jun							
S10	3-jun	9-jun	Q4	TS3	AG3 (5-jun)				
S11	10-jun	16-jun				AG3 (15-jun)			
S12	17-jun	23-jun	Q5	TS4					
S13	24-jun	30-jun			AG4 (26-jun)			P2	
S14	1-jul	7-jul	Q6			AG4 (06-jul)		EXP	
S15	8-jul	14-jul							
S16	15-jul	21-jul							Ex. Final
S17	22-jul	28-jul							

ABP

Estructura	
I	Resumen
II	Introducción
III	Objetivos
IV	Marco Teórico
V	Modelo Matemático
VI	Resolución y análisis
VII	Conclusiones
VIII	Referencias
IX	Apéndice

Ejemplo: Link

Puntos bonus

- Videos de Edpuzzle. 10 videos. **Sólo si ha obtenido una nota mayor o igual a 8 en el examen parcial y nota mayor o igual a 15 en la exposición.**

promedio mayor o igual a 18	$\Rightarrow$	+2 ptos al promedio de quizzes
promedio mayor o igual a 16	$\Rightarrow$	+1 pto al promedio de quizzes

- Cuestionarios en Auditorio. En cada auditorio puede obtener un punto que se suma a la nota de un quiz. Máximo 1 punto por quiz.

Semana 2 y 3	$\Rightarrow$	Quiz 1
Semana 4 y 5	$\Rightarrow$	Quiz 2
Semana 6 y 7	$\Rightarrow$	Quiz 3
Semana 9 y 10	$\Rightarrow$	Quiz 4
Semana 11 y 12	$\Rightarrow$	Quiz 5
Semana 13 y 14	$\Rightarrow$	Quiz 6

ECUACIONES DIFERENCIALES: DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

2

Logros

- **Define** y **clasifica** las ecuaciones diferenciales (ED). (L.1.1.1.1)
- **Comprueba** las soluciones de ecuaciones diferenciales. (L.1.1.1.2)

¿Qué es una ecuación diferencial?

Definición de ecuación diferencial

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación matemática que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes.

Ejemplo 1

$$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$$

Función incógnita: $y = y(x)$. Variable independiente: x

Ejemplo 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{t \sin(\pi x)}$$

Función incógnita: $u = u(t, x)$. Variable independiente: t, x

Ejemplo 3

$$y''' + y' - \sin(t)y' - y = te^{-t}$$

Función incógnita: $y = y(t)$. Variable independiente: t

Ejemplo 4

- Considere la función: $y(x) = e^{0.1x^2}$
- Usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$y' = 0.2x\,\underbrace{e^{0.1x^2}}_{y}$$

- Sustituyendo $e^{0.1x^2}$ en el lado derecho de la última ecuación por "y":

$$y' = 0.2xy$$

- Ahora imagine que un amigo construyó la **ecuación**: $\boxed{y' = 0.2xy}$ y no tiene idea cómo la construyó.

¿Qué función $y = y(x)$ satisface la ecuación?

Ejemplo 5

$$y'' + 5y' + 6y = 2\cos(4x)$$

Función incógnita: $y = y(x)$. Variable independiente: x

Ejemplo 6

$$y' + (4x^2 + 1)y = e^x y^3$$

Función incógnita: $y = y(x)$. Variable independiente: x

Clasificación de una ecuación diferencial
Clasificación por tipo

- **Ecuación diferencial ordinaria (EDO):** Cuando la función (o las funciones) incógnita depende de una sola variable independiente.

Ejemplo 7

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Función incógnita: $y = y(x)$. Variable independiente: x.

Ejemplo 8

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Funciones incógnita: $x = x(t), y = y(t)$. Variable independiente: t.

- **Ecuación diferencial parcial (EDP):** Cuando la función (o las funciones) incógnita depende de varias variables independientes.

Ejemplo 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Función incógnita: $u = u(x, y)$. Variables independientes: x, y.

Ejemplo 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

Función incógnita: $u = u(x, t)$. Variables independientes: x, t

Clasificación por orden

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada de la ecuación.

Ejemplo 11: Ecuación de segundo orden

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{Segundo orden}} - 5\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}_{\text{Primer orden}} + 6y = e^x$$

Ejemplo 12: Ecuación de tercer orden

$$\underbrace{\frac{d^3y}{dx^3}}_{\text{Tercer orden}} - 5\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}_{\text{Primer orden}} + 6y = e^x$$

Ejemplo 13: Ecuaciones de cuarto orden

$$\underbrace{\frac{d^4y}{dx^4}}_{\substack{\text{Cuarto}\\ \text{orden}}} - 5\underbrace{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4}_{\substack{\text{Segundo}\\ \text{orden}}} + 6y = e^x$$

$$\underbrace{\frac{d^4y}{dx^4}}_{\substack{\text{Cuarto}\\ \text{orden}}} - 5\underbrace{\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^7}_{\substack{\text{Tercer}\\ \text{orden}}} + 6y = e^x$$

$$\underbrace{\frac{d^4y}{dx^4}}_{\substack{\text{Cuarto}\\ \text{orden}}} - 5\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}_{\substack{\text{Primer}\\ \text{orden}}} + 6y = e^x$$

Clasificación por linealidad

Una ecuación diferencial ordinaria de $n-$ésimo orden se dice que es lineal si:

- La variable dependiente "y" y todas sus derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de estos términos es igual a 1.
- Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ son constantes o a lo más dependen de la variable independiente.

La ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n está dado, en forma general, por:

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)} \qquad (1)$$

Término independiente: x
Término dependiente: $y = y(x)$

Ejemplo 14: EDO lineales

$$2xy' + x^2y = 7x - 2$$
$$y' + y = 0$$
$$\cos(x)y' + 5xy = -1$$
$$y - 2y' + x = 0$$
$$7xv' + 7x^2v = 12x + 3$$
$$4x\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 1 + 4x$$
$$4x^2\frac{dy}{dx} - 3x = 2y$$
$$e^x\frac{d^2y}{dx^2} + (2x+5)\frac{dy}{dx} + x^2y = \cos(x)$$

Ejercicios

1. Compruebe que la función indicada es una solución de la E.D.

$$\frac{dy}{dx} + 20y = 24, \qquad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20x}$$

Solución:

- **Paso 1:** Derivar "y"

$$y' = 24e^{-20x}$$

- **Paso 2:** Sustituir en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} 24e^{-20x} + 20\left(\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20x}\right) &= 24 \\ \Rightarrow 24e^{-20x} + 24 - 24e^{-20x} &= 24 \\ \Rightarrow 24 &= 24 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2 Compruebe que la función indicada es una solución de la ED

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 13y = 0, \qquad y = e^{3x}\cos(2x)$$

Solución:

- **Paso 1:** Calcular la primera y segunda derivada de “y”

$$\begin{aligned} y' &= e^{3x}\left[3\cos(2x) - 2\sin(2x)\right] \\ y'' &= 3\left[3e^{3x}\cos(2x) + e^{3x}(-2\sin(2x))\right] - 2\left[3e^{3x}\sin(2x) + 2e^{3x}\cos(2x)\right] \\ &= e^{3x}\left[5\cos(2x) - 12\sin(2x)\right] \end{aligned}$$

- **Paso 2:** Sustituir en la ecuación diferencial

$$e^{3x}\left[5\cos(2x) - 12\sin(2x)\right] - 6\left(e^{3x}\left[3\cos(2x) - 2\sin(2x)\right]\right) + 13e^{3x}\cos(2x) = 0$$

$$\cancel{e^{3x}}\left[\cancel{5\cos(2x)} - \cancel{12\sin(2x)}\right] + \cancel{e^{3x}}\left[-\cancel{18\cos(2x)} + \cancel{12\sin(2x)}\right] + \cancel{e^{3x}}\cancel{13\cos(2x)} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

Conclusiones

1. Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación matemática que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes
2. La ecuaciones diferenciales se pueden clasificar como:
   - Ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias
   - Según su orden.
   - Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Bibliografía

- Dennis G. Zill (2015). *Ecuaciones diferenciales con con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning. 10ma ed.
- Edwards, Jr. Penny David (2008). *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Pearson College.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA