Ecuaciones diferenciales

Sistemas no homogéneos de ecuaciones diferenciales

Semana 09: Auditorio

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivo

Resolver sistemas ED de primer orden no homogéneo.

Sistemas no homogéneos de ED lineales

1

Logros

Resuelve sistemas ED de primer orden no homogéneo. L.5.9.1.4

Sistemas de EDL no homogéneo

Recordemos que, en general los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales tienen la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)\\
\vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}$$

Los cuales se pueden escribir matricialmente como $X' = AX + F(t)$, donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Resolver un sistema no homogéneo

Primero: Resolver el sistema homogéneo asociado utilizando las técnicas aprendidas anteriormente.
Segundo: Encontrar la solución particular mediante alguno de los siguientes métodos:

- Coeficientes indeterminados
- Variación de parámetros

Método de coeficientes indeterminados

El método de coeficientes indeterminados puede ser utilizado para encontrar una solución particular para el sistema de EDL $X' = AX + F(t)$, solo cuando se cumplan:

- A es una matriz de tamaño $n \times n$ con **entradas constantes.**
- $F(t)$ es un vector cuyas entradas son **constantes, polinomios, exponenciales, senos, cosenos, o alguna combinación finita de estas (mediante suma o producto).**

Así, este método consiste en proponer una solución particular X_p motivado por la clase de funciónes que aparezcan en el vector $F(t)$.

Ejemplo 1

Resuelva el sistema:

$$x' = -x + 2y - 8$$
$$y' = -x + y + 3$$

Solución:

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Primero: Resolvemos el sistema homogéneo asociado (Para el alumno)

$$X_H = c_1 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$X_H = c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

Segundo: Para determinar la solución particular X_p, vemos que:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

es un vector constante, luego la solución particular se supone también constante

$$X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ; X_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando en el sistema original

$$X_p' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X_p + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{donde} \;\; X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$0 = -a + 2b - 8$$
$$0 = -a + b + 3$$

resolviendo el sistema se obtiene $a = 14$ y $b = 11$ de esta manera la solución particular es

$$X_p = \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución general del sistema de ED es $X = X_h + X_p$

$$X = c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Para el alumno

Resuelva el sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{bmatrix} \text{ en } < -\infty, +\infty >$$

<u>Solución</u>:

La solución general $X = X_h + X_p$ es:

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -4 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} + \begin{bmatrix} -2 \\ \\ 6 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \\ \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

Método de variación de parámetros

Sean $X_1,\ X_2, ..., \ X_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $X' = AX$, entonces la solución general

$$X_h = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + \ c_nX_n$$

se puede representar de la siguiente manera:

$$X_h = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}}_{\Phi(t)}$$

Llamaremos a $\Phi(t)$: **MATRIZ FUNDAMENTAL.**

Propiedades de la Matriz fundamental

Se requiere dos propiedades de la matriz fundamental

- Una matriz fundamental Φ tiene inversa ($\det \Phi(t) \neq 0$, para todo t)
- Φ es una matriz fundamental del sistema $X' = AX$ entonces $\Phi'(t) = A\Phi(t)$

De forma análoga a variación de parámetros para una ecuación diferencial, se plantea una solución particular para el sistema no homogéneo:

$$X_p = \Phi(t)U(t) \qquad \text{donde } U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Donde:

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt \tag{2}$$

Ejemplo

Resuelva el sistema:

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>:

Primero:

Resolvemos el sistema homogéneo asociado.

$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} X$$

Usando el método de los valores y vectores propios, calculamos los eigenvalores de A:

$$\det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+5) = 0$$

Luego, los eigenvalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. Determinando sus vectores propios asociados respectivamente

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución homogénea es

$$X_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

Damos la forma para reconocer los términos

$$X_c = c_1 \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}}_{X_1} + c_2 \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{bmatrix}}_{X_2}$$

Y formamos la matriz fundamental $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Segundo: Usamos variación de parámetros para determinar a X_p.

Determinamos la inversa de $\Phi(t)$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}$$

Utilizando la siguiente fórmula:

$$X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}} dt$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} dt$$

La integral en el vector se realiza para cada componente, obteniéndose

$$
\begin{aligned}
X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución general $X = X_h + X_p$ es:

$$
X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}
$$

$$\Rightarrow X = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -2 \end{bmatrix} e^{-5t} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} t - \begin{bmatrix} \frac{27}{50} \\ \\ \frac{21}{50} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t}$$

Conclusiones

1. Los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros utilizados para determinar la solución particular para EDOs lineles no homogéneas en una ecuación, se puedo adaptar para determinar la solución particular para un sistemas de ecuaciones lineales no homogéneas.
2. El método de variación de parámetros tiene mayor alcance para determinar la solución particular.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA