Ecuaciones diferenciales

Modelado con EDOs de orden superior. Parte I

Semana 09: Teoría

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

1 Sistemas masa-resorte libre no amortiguado
2 Sistemas masa-resorte libre amortiguado

Objetivos

- **Identificar** los modelos lineales que describen el comportamiento de los sistemas resorte-masa, en movimientos libres no amortiguado y amortiguado.
- **Resolver** modelos lineales que describen el comportamiento de los sistemas resorte-masa, en movimientos libres no amortiguado y amortiguado.

SISTEMAS MASA-RESORTE LIBRE NO AMORTIGUADO

1

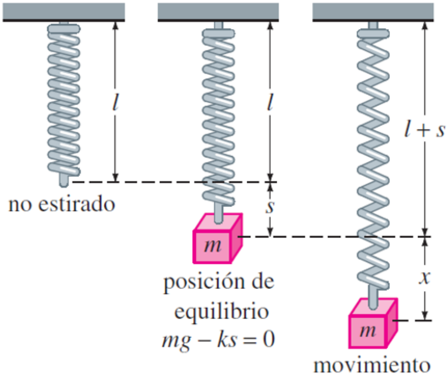
Logros

- **Identifica** los modelos lineales que describen el comportamiento de los sistemas resorte-masa, en movimientos libres no amortiguado y amortiguado. (L.6.9.2.1)
- **Resuelve** modelos lineales que describen el comportamiento de los sistemas resorte-masa, en movimientos libres no amortiguado y amortiguado.(L.6.9.2.2)

Sistema masa-resorte: Movimiento libre

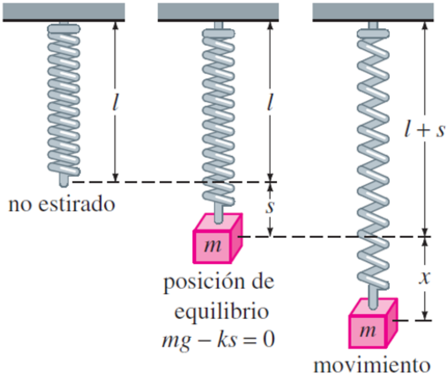
Sistema masa-resorte: Movimiento libre

Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m a su extremo libre.



Sistema masa-resorte: Movimiento libre

Suponga que un resorte se suspende verticalmente de un soporte rígido y luego se le fija una masa m a su extremo libre.



El resorte se va estirar, la longitud de elongación depende de la masa del objeto que se coloque.

Ley de Hooke

El resorte ofrece una fuerza restauradora opuesta y proporcional a la elongación s:

$$F = ks$$

donde k es la constante del resorte.

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x + s)$.

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.

Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas “Movimiento libre” se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas “Movimiento libre” se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas “Movimiento libre” se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas “Movimiento libre” se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas "Movimiento libre" se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

donde $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de la EDO (1) está dado por

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas "Movimiento libre" se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

donde $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de la EDO (1) está dado por

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i\omega$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas "Movimiento libre" se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

donde $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de la EDO (1) está dado por

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i\omega$$

Por lo tanto, la solución está dado por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t),$$

En el equilibrio $mg = ks$.

Si la masa se desplaza una distancia x de su posición de equilibrio la fruerza restauradora del resorte es $k(x+s)$.
Suponiendo que no hay fuerzas restauradoras que actúen sobre el sistema y suponiendo que la masa vibra libre de otras fuerzas externas "Movimiento libre" se puede aplicar la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x) + mg \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

donde $\omega^2 = k/m$. La ecuación auxiliar de la EDO (1) está dado por

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i\omega$$

Por lo tanto, la solución está dado por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \qquad \text{periodo } T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2}$$

Ejemplos

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $\frac{5}{32}\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}\ m$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Ejemplos

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $\frac{5}{32}\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}\ m$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

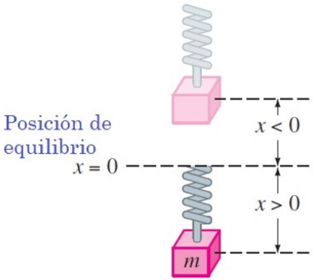
Ejemplos

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $\frac{5}{32}\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}\ m$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke:

$$150 = k\left(\frac{5}{32}\right)$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

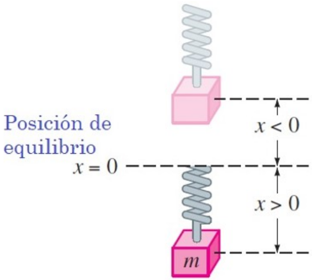
Ejemplos

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $\frac{5}{32}\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}\ m$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke:

$$150 = k\left(\frac{5}{32}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 960\ \frac{N}{m}$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

Ejemplos

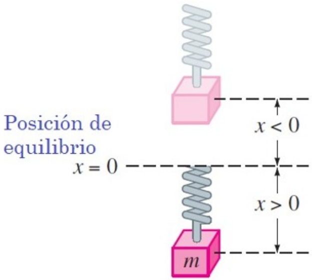
1. Una masa de 15 kg alarga $\frac{5}{32}$ m un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}$ m abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ m/s. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke:

$$150 = k\left(\frac{5}{32}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 960\ \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{960}{15} = 64$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

Ejemplos

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $\frac{5}{32}\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $\frac{2}{3}\ m$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

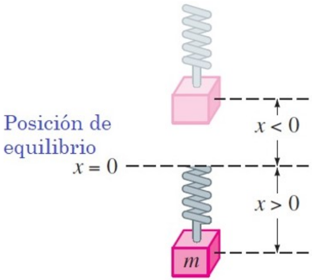
Por la ley de Hooke:

$$150 = k\left(\frac{5}{32}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 960\ \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{960}{15} = 64$$

Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es

$$\begin{cases} x'' + 64x = 0 \\ x(0) = \frac{2}{3},\ x'(0) = -\frac{4}{3} \end{cases}$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

La ecuación característica es:

$$r^2 + 64 = 0,$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 64 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 8i$$

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t) \tag{3}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 64 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 8i$$

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t) \tag{3}$$

derivando

$$x'(t) = -8c_1 \sin(8t) + 8c_2 \cos(8t). \tag{4}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 64 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 8i$$

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t) \tag{3}$$

derivando

$$x'(t) = -8c_1 \sin(8t) + 8c_2 \cos(8t). \tag{4}$$

Utilizando las condiciones iniciales en las ecuaciones (3) y (4), se obtiene

$$c_1 = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = -\frac{1}{6}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 64 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 8i$$

Por lo tanto, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t) \tag{3}$$

derivando

$$x'(t) = -8c_1 \sin(8t) + 8c_2 \cos(8t). \tag{4}$$

Utilizando las condiciones iniciales en las ecuaciones (3) y (4), se obtiene

$$c_1 = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = -\frac{1}{6}$$

Luego, la solución viene dado por

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos(8t) - \frac{1}{6}\sin(8t)$$

2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

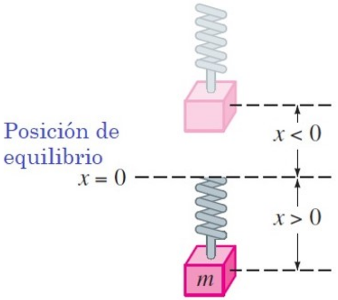
Solución:

2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke (Convertimos a unidades SI):

$$(0.02)(10) = k(0.05)$$



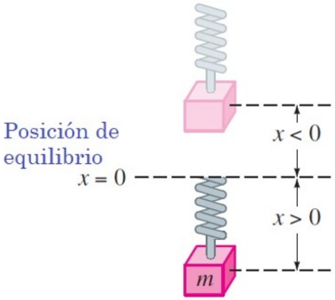
La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke (Convertimos a unidades SI):

$$(0.02)(10) = k(0.05) \quad \Rightarrow \quad k = 4\ \frac{N}{m}$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

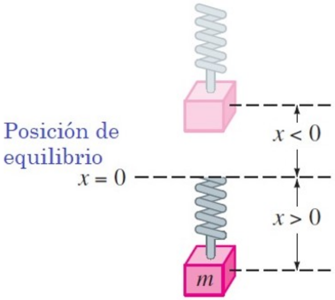
2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por la ley de Hooke (Convertimos a unidades SI):

$$(0.02)(10) = k(0.05) \quad \Rightarrow \quad k = 4\ \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{0.02} = 200$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

2 Una masa de $20\ g$ alarga $5\ cm$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está a $15\ cm$ abajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de $2\ m/s$. Determine la ecuación del movimiento. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

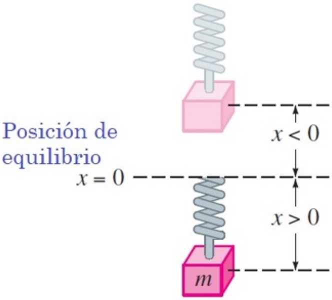
Por la ley de Hooke (Convertimos a unidades SI):

$$(0.02)(10) = k(0.05) \quad \Rightarrow \quad k = 4\ \frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{4}{0.02} = 200$$

Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es

$$\begin{cases} x'' + 200x = 0 \\ x(0) = 0.15,\ x'(0) = 2 \end{cases}$$



La dirección hacia abajo de la posición de equilibrio es positiva

La ecuación característica es:

$$r^2 + 200 = 0,$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 200 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 10\sqrt{2}i$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = c_1 \cos\left(10\sqrt{2}t\right) + c_2 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) \tag{5}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 200 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 10\sqrt{2}i$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = c_1 \cos\left(10\sqrt{2}t\right) + c_2 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) \tag{5}$$

derivando

$$x'(t) = -10\sqrt{2}c_1 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) + 10\sqrt{2}c_2 \cos\left(10\sqrt{2}t\right). \tag{6}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 200 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 10\sqrt{2}i$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = c_1 \cos\left(10\sqrt{2}t\right) + c_2 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) \tag{5}$$

derivando

$$x'(t) = -10\sqrt{2}c_1 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) + 10\sqrt{2}c_2 \cos\left(10\sqrt{2}t\right). \tag{6}$$

Utilizando las condiciones iniciales en las ecuaciones (5) y (6), se obtiene

$$c_1 = 0.15, \qquad c_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

La ecuación característica es:

$$r^2 + 200 = 0, \qquad r_{1,2} = \pm 10\sqrt{2}i$$

Por lo tanto, la solución es

$$x(t) = c_1 \cos\left(10\sqrt{2}t\right) + c_2 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) \tag{5}$$

derivando

$$x'(t) = -10\sqrt{2}c_1 \sin\left(10\sqrt{2}t\right) + 10\sqrt{2}c_2 \cos\left(10\sqrt{2}t\right). \tag{6}$$

Utilizando las condiciones iniciales en las ecuaciones (5) y (6), se obtiene

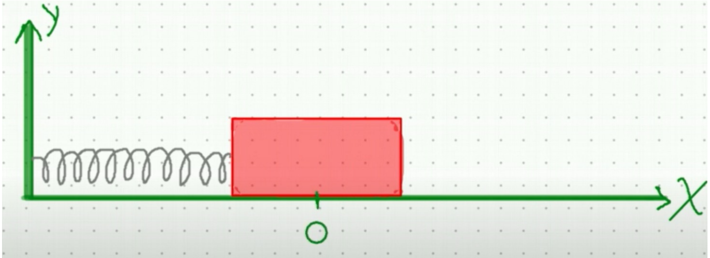
$$c_1 = 0.15, \qquad c_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, la solución final es

$$x(t) = 0.15 \cos\left(10\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{5\sqrt{2}} \sin\left(10\sqrt{2}t\right)$$

Para el alumno

Se tiene un resorte de longitud inicial $L_0 = 10\ m$ unido a un bloque de masa $m = 10\ kg$. El sistema se libera desde el reposo a una distancia de $2\ m$ a la derecha de la posición de equilibrio. Halle la ecuación que describe la posición del objeto si $k = 360\ N/m$. Considere que el origen del sistema coordenado es el punto de equilibrio.



Respuesta:

$$x(t) = 2\cos(6t)$$

SISTEMAS MASA-RESORTE LIBRE AMORTIGUADO

2

Sistema masa-resorte: Movimiento libre amortiguado

Sistema masa-resorte: Movimiento libre amortiguado

El sistema libre no amortiguado o movimiento armónico libre es un caso irreal, a menos que la masa se suspenda en un vacío perfecto. Ya que por lo menos habrá una fuerza de resistencia debido al medio circundante (Fricción).

Sistema masa-resorte: Movimiento libre amortiguado

El sistema libre no amortiguado o movimiento armónico libre es un caso irreal, a menos que la masa se suspenda en un vacío perfecto. Ya que por lo menos habrá una fuerza de resistencia debido al medio circundante (Fricción).

En el estudio de la mecánica, se considera que las fuerzas de amortiguamiento son proporcional a la velocidad instantánea.

Sistema masa-resorte: Movimiento libre amortiguado

El sistema libre no amortiguado o movimiento armónico libre es un caso irreal, a menos que la masa se suspenda en un vacío perfecto. Ya que por lo menos habrá una fuerza de resistencia debido al medio circundante (Fricción).

En el estudio de la mecánica, se considera que las fuerzas de amortiguamiento son proporcional a la velocidad instantánea.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{7}$$

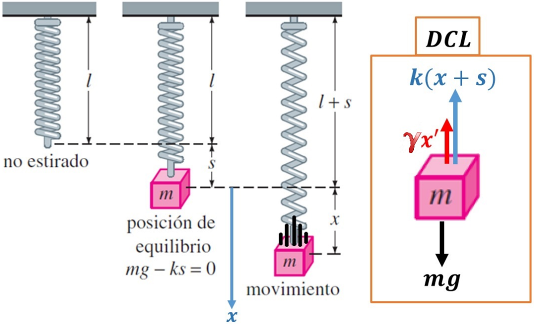
donde γ es la constante de amortiguamiento.

Modelamiento

Plantee la ecuación de un sistema masa resorte suspendido verticalmente si el aire ofrece una resistencia proporcional a la velocidad.

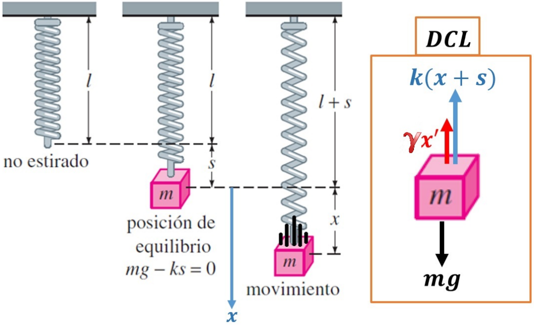
Modelamiento

Plantee la ecuación de un sistema masa resorte suspendido verticalmente si el aire ofrece una resistencia proporcional a la velocidad.



Modelamiento

Plantee la ecuación de un sistema masa resorte suspendido verticalmente si el aire ofrece una resistencia proporcional a la velocidad.



De la segunda ley de Newton

$$m\ddot{x} = \sum F.$$

Por lo tanto

$$m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x} - k(s+x)$$

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = mg - ks$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

Análisis de la Ecuación Diferencial

Del modelamiento usando la segunda Ley de Newton y Ley de Hooke, considerando además el amortiguamiento proporcional a la velocidad, se tiene la siguiente ED:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{8}$$

Análisis de la Ecuación Diferencial

Del modelamiento usando la segunda Ley de Newton y Ley de Hooke, considerando además el amortiguamiento proporcional a la velocidad, se tiene la siguiente ED:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{8}$$

Esta EDO tiene coeficientes constantes, así que podemos usar la ecuación auxiliar:

$$mr^2 + \gamma r + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \tag{9}$$

donde $\lambda = \frac{\gamma}{2m}$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Análisis de la Ecuación Diferencial

Del modelamiento usando la segunda Ley de Newton y Ley de Hooke, considerando además el amortiguamiento proporcional a la velocidad, se tiene la siguiente ED:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{8}$$

Esta EDO tiene coeficientes constantes, así que podemos usar la ecuación auxiliar:

$$mr^2 + \gamma r + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \tag{9}$$

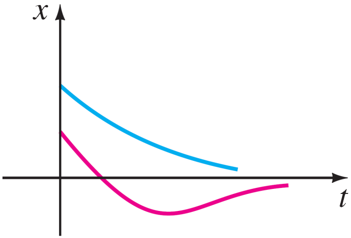
donde $\lambda = \frac{\gamma}{2m}$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Dependiendo del valor del discriminante $\triangle = \lambda^2 - \omega^2$, existen tres posibles formas de movimiento (Soluciones reales y diferentes, soluciones iguales o repetidas y soluciones complejas conjugadas).

Caso I: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 > 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right)$$

Caso I: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 > 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right)$$



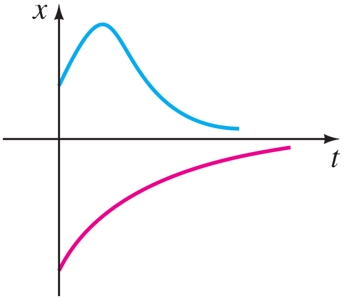
Es un movimiento uniforme y no oscilatorio.**El sistema está sobreamortiguado:** porque el coeficiente de amortiguamiento γ es grande comparado con la constante del resorte k.

Caso II: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 = 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 + c_2 t\right)$$

Caso II: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 = 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(c_1 + c_2 t)$$



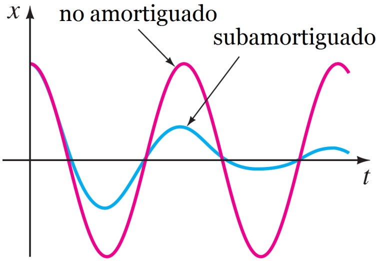
El sistema está críticamente amortiguado: porque cualquier disminución en la fuerza de estiramiento daría como resultado un movimiento oscilatorio.

Caso III: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 < 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 cos\sqrt{w^2 - \lambda^2}t + c_2 sen\sqrt{w^2 - \lambda^2}t\right)$$

Caso III: $\Delta = \lambda^2 - \omega^2 < 0$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{w^2-\lambda^2}\,t + c_2 \,\text{sen}\sqrt{w^2-\lambda^2}\,t\right)$$



El sistema está subamortiguado porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte.

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5)$$

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:
De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones:
$x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, viene dado por:

Ejemplos

1. Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantáneas. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

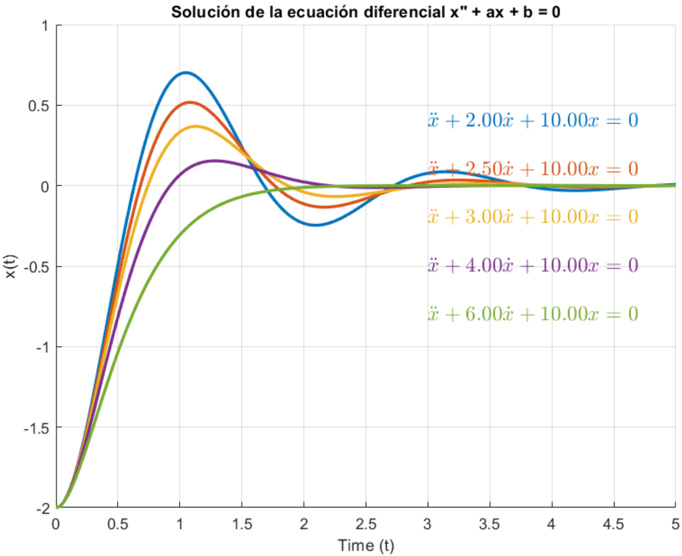
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones: $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, viene dado por:

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos(3t) - \frac{2}{3}\sin(3t)\right)$$

2 Grafique la solución de la ecuación $mx'' + \gamma x' + kx = 0$, sujeta a $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$ para diferentes valores de $m,\ \gamma,\ k$.

2 Grafique la solución de la ecuación $mx'' + \gamma x' + kx = 0$, sujeta a $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$ para diferentes valores de $m,\ \gamma,\ k$.



3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6 - 5)$$

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{7}{2}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{7}{2}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de esta ecuación sujeta a las condiciones: $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, está dado por:

3 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a 3.5 veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

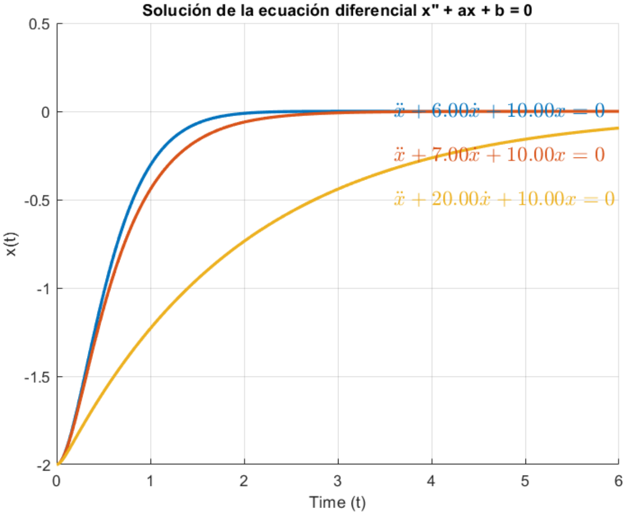
Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{7}{2}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de esta ecuación sujeta a las condiciones: $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, está dado por:

$$x(t) = -\frac{10}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-5t}$$

Gráfica de las ecuaciones dadas sujetas a $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$:



4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:
De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6 - 5)$$

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:
De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{10}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{10}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de esta ecuación sujeta a las condiciones: $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, está dado por:

4 Una masa de $0.5\ kg$ se une a un resorte que tiene una longitud de $5\ m$ de largo. En equilibrio mide $6\ m$. Si al inicio la masa se libera desde el reposo en un punto $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio. Encuentre la posición $x(t)$ en todo momento si además se sabe que el medio circundante ofrece una resistencia igual a $\sqrt{10}$ veces la velocidad instantánea. $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

De la ley de Hooke:

$$0.5(10) = k(6-5) \quad \Rightarrow \quad k = 5\ \frac{N}{m}.$$

Por lo tanto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{10}\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La solución de esta ecuación sujeta a las condiciones: $x(0) = -2,\ x'(0) = 0$, está dado por:

$$x(t) = -2e^{-\sqrt{10}t} - 2\sqrt{10}te^{-\sqrt{10}t}$$

5 Una masa de $0.25\ kg$ alarga $\frac{5}{8}\ m$ a un resorte, suponiendo que una fuerza amortiguadora es igual a dos veces la velocidad instantánea. Determine la ecuación del movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $3\ m/s$. Considere $g = 10\ m/s^2$.

5 Una masa de $0.25\ kg$ alarga $\frac{5}{8}\ m$ a un resorte, suponiendo que una fuerza amortiguadora es igual a dos veces la velocidad instantánea. Determine la ecuación del movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $3\ m/s$. Considere $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

5 Una masa de $0.25\ kg$ alarga $\frac{5}{8}\ m$ a un resorte, suponiendo que una fuerza amortiguadora es igual a dos veces la velocidad instantánea. Determine la ecuación del movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $3\ m/s$. Considere $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Resultado:

5 Una masa de $0.25\ kg$ alarga $\frac{5}{8}\ m$ a un resorte, suponiendo que una fuerza amortiguadora es igual a dos veces la velocidad instantánea. Determine la ecuación del movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $3\ m/s$. Considere $g = 10\ m/s^2$.

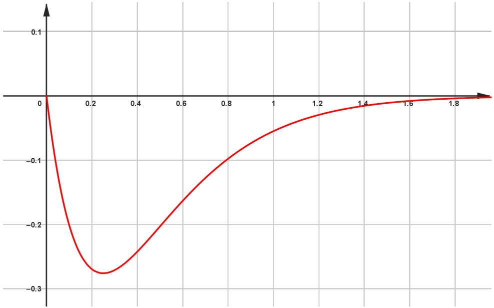
Solución:

Resultado: $x(t) = -3te^{-4t}$

5 Una masa de $0.25\ kg$ alarga $\frac{5}{8}\ m$ a un resorte, suponiendo que una fuerza amortiguadora es igual a dos veces la velocidad instantánea. Determine la ecuación del movimiento si la masa inicial se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $3\ m/s$. Considere $g = 10\ m/s^2$.

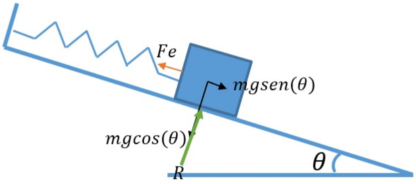
Solución:

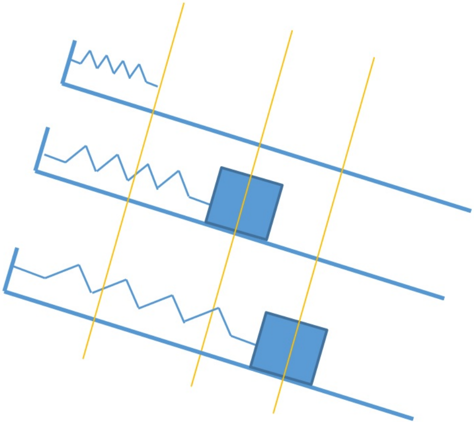
Resultado: $x(t) = -3te^{-4t}$



PLANO INCLINADO

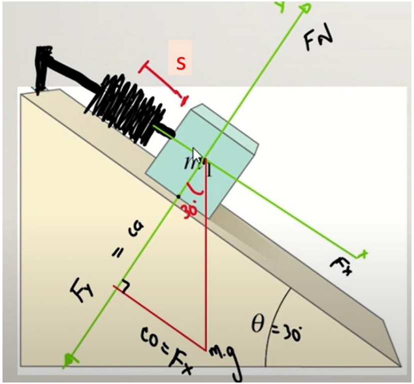
Plantee la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, el resorte se estira y luego se suelta.





Actividad en clase

En un plano inclinado de $30°$ se encuentra un bloque de piedra de $100\ kg$ en reposo sujetado por un resorte cuya constante elástica es de $2500\ N/m$. Suponga que no existe rozamiento. Considere $g = 10\ m/s^2$.



1. Dibuje el DCL del bloque.
2. Con ayuda del notion describa la ecuación diferencial para la masa. Considere el ángulo de inclinación $\theta = 30°$.
3. Proponga valores para las condiciones iniciales y resuelva el PVI. Varíe los parámetros de la ecuación y muestre cómo afectan a la solución.

Para el alumno

Se tiene el sistema del ejemplo anterior, donde la longitud inicial del resorte es $L_0 = 4\ m$. Se coloca una objeto de masa $m = 8\ kg$ en el extremo inferior del resorte y este se estira hasta que dicho extremo está en la posición $x = 6$ del sistema coordenado donde el vértice está en el punto más alto del plano inclinado y el eje x está en la dirección de elongación del resorte. Luego se libera desde el reposo el sistema (masa-resorte) en la posición $x = 5$. Si el aire ejerce una fuerza de resistencia numéricamente igual a tres veces la velocidad instantánea, plantee el problema de valores iniciales que describe al objeto en el sistema de coordenadas dado. Considere $g = 10\ m/s^2$ y el ángulo del plano (liso) inclinado es $\theta = 30^\circ$.

Respuesta

$$\begin{cases} 8x'' + 3x' + 20x = 120 \\ x(0) = 5, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Conclusiones

1. Se estudió el modelo de masa resorte ideal en el que no participan fuerzas disipativas como la resistencia del aire.
2. La dirección del eje x positivo puede estar en cualquier dirección.
3. En oscilaciones masa-resorte la fuerza del peso no participa de la ecuación de movimiento.
4. Se estudió el modelo masa resorte amortiguado.
5. Se pudo observar mediante una gráfica cómo las funciones soluciones se modifican a medida que la constante de amortiguación aumenta, manteniendo fijo la constante elástica del resorte.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA