Ecuaciones diferenciales

Repaso

Semana 15: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

REPASO
EXAMEN FINAL

1

Sistema masa - resorte

Se tiene un sistema amortiguado que consiste en una masa de $2\ kg$ unida a un resorte con constante de elasticidad $k = 50\ N/m$. La masa se libera a $1\ m$ por encima de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $1\ m/s$, y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 12 veces la velocidad instantánea.

a) Modele la ecuación diferencial e indique las condiciones iniciales.
Solución: La ecuación que modela es sistema está dado por

$$my'' + \beta y' + ky = 0$$

Reemplazando valores, se obtiene el sistema de valores iniciales pedido (suponemos que el sistema coordenado es positivo hacia abajo),

$$2y'' + 12y' + 50y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(0) = -1. \tag{1}$$

b) Use la transformada de Laplace para determinar la posición de la masa para cualquier instante de tiempo t.

Solución: Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (1),

$$2\mathcal{L}\{y''\} + 12\mathcal{L}\{y'\} + 50\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad [s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + 6[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] + 25\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (s^2 + 6s + 25)\mathcal{L}\{y\} = -s - 7$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-s-7}{s^2+6s+25}$$

$$= -\frac{s+3}{(s+3)^2+16} - \frac{4}{(s+3)^2+16}$$

$$y(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+16}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+3)^2+16}\right\}$$

se obtiene el resultado final

$$y(t) = -e^{-3t}\cos(4t) - e^{-3t}\sin(4t)$$

Anuncios

1. **Respecto a la exposición**
   - La exposición es grupal pero la nota es individual.
   - Se expone todo el trabajo.
   - Cada participante debe exponer la misma cantidad de tiempo.
   - La exposición tiene una duración máxima de 20 minutos. Luego el evaluador tendrá 5 minutos para hacer preguntas.
   - Para la exposición se debe preparar un poster.
   - El evaluador llamará a los grupos a exponer aleatoriamente. El grupo que no esté presente cuando se le llame tendrán puntos en contra.
2. **Respecto al examen final**
   - El examen final es el viernes 19 de julio.
   - Se publicó el horario. Los alumnos que tienen cruce deben solicitar un cambio de horario hasta el miércoles 10 de julio.
3. **No hay consideraciones ni trabajos adicionales.**

Transformada de Laplace

Se sabe que la temperatura de un pastel que será horneado sigue el siguiente proceso: en $t = 0$ la mezcla de pastel está a temperatura ambiente de $70^\circ F$. La temperatura inicial dentro del horno al colocar el pastel también es $70^\circ F$; luego la temperatura del horno aumenta linealmente hasta $t = 4$ minutos, alcanzando el valor deseado de $300^\circ F$; Después de 4 minutos la temperatura ambiente del horno se mantiene constante en $300^\circ F$.

a) Verifique que la temperatura dentro del horno (Tm) es:

$$Tm = \begin{cases} \frac{230}{4}t + 70, & 0 \leq t < 4 \\ 300, & t \geq 4 \end{cases} \tag{2}$$

Solución:

La temperatura inicia en $A(0, 70)$ y en el instante $t = 4$, la gráfica pasa por el punto $B(4, 300)$. Además sabemos que en este lapso de tiempo la temperatura cambia linealmente, entonces

$$Tm - 70 = \frac{300 - 70}{4 - 0}(t - 0) \quad \Rightarrow \quad Tm = \frac{230}{4}t + 70, \qquad 0 \leq t < 4.$$

Como para $t \geq 4$, la temperatura del horno es constante e igual a 300, se obtiene la función (2) para Tm.

b) Determine la temperatura ambiente (T_m) al interior del horno en términos de la función escalón unitario.
Solución:

$$
\begin{aligned}
Tm &= \frac{230}{4}t + 70 + \left(300 - \frac{230}{4}t - 70\right)\mathcal{U}(t-4) \\
Tm &= \frac{230}{4}t + 70 + \left(230 - \frac{230}{4}t\right)\mathcal{U}(t-4) \\
\Rightarrow \quad Tm &= \frac{230}{4}t + 70 - \frac{230}{4}(t-4)\mathcal{U}(t-4) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

c) Describa la ecuación diferencial para la temperatura del pastel mientras está dentro del horno e indique la condición inicial. Use la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton considerando la constante de proporcionalidad $k = -0.3$.

Solución:

De la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, se obtiene la ecuación diferencial que modela la temperatura del pastel,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} - kT = -kTm$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{3}{10}T = \frac{3}{10}\left[\frac{230}{4}t + 70 - \frac{230}{4}(t-4)\mathcal{U}(t-4)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{3}{10}T = \frac{69}{4}t + 21 - \frac{69}{4}(t-4)\mathcal{U}(t-4) \tag{4}$$

sujeta a la condición inicial

$$T(0) = 70 \tag{5}$$

d) Utilizando la transformada de Laplace, resuelva la ecuación diferencial correspondiente a la temperatura del pastel dentro del horno.

Solución:

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4),

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dT}{dt}\right\}+\frac{3}{10}\mathcal{L}\{T\}=\frac{69}{4}\mathcal{L}\{t\}+21\mathcal{L}\{1\}-\frac{69}{4}\mathcal{L}\{(t-4)\mathcal{U}(t-4)\}$$

$$s\mathcal{L}\{T\}-T(0)+\frac{3}{10}\mathcal{L}\{T\}=\frac{69}{4}\frac{1}{s^2}+21\frac{1}{s}-\frac{69}{4}e^{-4s}\frac{1}{s^2}$$

Usando la condición inicial (5),

$$\left(s+\frac{3}{10}\right)\mathcal{L}\{T\}=\frac{69}{4}\frac{1}{s^2}+21\frac{1}{s}-\frac{69}{4}e^{-4s}\frac{1}{s^2}+70$$

$$\mathcal{L}\{T\}=\frac{69}{4}\frac{1}{s^2(s+\frac{3}{10})}+21\frac{1}{s(s+\frac{3}{10})}-\frac{69}{4}e^{-4s}\frac{1}{s^2(s+\frac{3}{10})}+70\frac{1}{s+\frac{3}{10}}$$

Aplicando fracciones parciales

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{T\} =& \frac{69}{4}\left[-\frac{100}{9s}+\frac{10}{3s^2}+\frac{100}{9(s+\frac{3}{10})}\right]+21\left[\frac{10}{3s}-\frac{10}{3(s+\frac{3}{10})}\right] \\
&-\frac{69}{4}e^{-4s}\left[-\frac{100}{9s}+\frac{10}{3s^2}+\frac{100}{9(s+\frac{3}{10})}\right]+70\frac{1}{s+\frac{3}{10}}
\end{aligned}
$$

Aplicando la transformada inversa

$$
\begin{aligned}
T(t) =& \frac{69}{4}\left[-\frac{100}{9}+\frac{10}{3}t+\frac{100}{9}e^{-\frac{3}{10}t}\right]+21\left[\frac{10}{3}-\frac{10}{3}e^{-\frac{3}{10}t}\right] \\
&-\frac{69}{4}\left[-\frac{100}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s}\right\}+\frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s^2}\right\}+\frac{100}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-4s}}{s+\frac{3}{10}}\right\}\right] \\
&+70e^{-\frac{3}{10}t}
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicando las propiedades de la transformada de Laplace

$$
\begin{aligned}
T(t) =& \frac{69}{4}\left[-\frac{100}{9}+\frac{10}{3}t+\frac{100}{9}e^{-\frac{3}{10}t}\right]+21\left[\frac{10}{3}-\frac{10}{3}e^{-\frac{3}{10}t}\right] \\
& -\frac{69}{4}\left[-\frac{100}{9}\mathcal{U}(t-4)+\frac{10}{3}(t-4)\mathcal{U}(t-4)+\frac{100}{9}e^{-\frac{3}{10}(t-4)}\mathcal{U}(t-4)\right] \\
& +70e^{-\frac{3}{10}t}
\end{aligned}
$$

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA