Ecuaciones Diferenciales

Examen Final 2024-1. Tiempo: 100 minutos

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 Puntos)

Considere un circuito LC en serie conectado a una fuente de voltaje $V(t) = 10L\sin(\omega t)$ donde $LC = \frac{1}{36}$, siendo L el valor de la inductancia de la bobina y C el valor de la capacitancia del condensador. Suponga que $q(0) = 2$ y $q'(0) = 4$.

(a) (**3 ptos**) Modele la ecuación diferencial que determina la carga en el condensador y resuélvala. La solución debe estár en términos de ω.

Solución: La EDO que nos permite modelar la carga en el circuito es:

$$
\begin{aligned}
V(t) &= L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \\
10L\sin(\omega t) &= Lq'' + \frac{q}{C} \\
10\sin(\omega t) &= q'' + \frac{1}{LC}q \\
10\sin(\omega t) &= q'' + 36q
\end{aligned}
$$

Con las condiciones iniciales, $q(0) = 2$, $q'(0) = 4$. Ahora, resolveremos la EDO homogénea con el método de la ecuación característica:

$$
\begin{aligned}
r^2 + 36 &= 0 \\
r &= \pm 6i
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la solución homogénea es:

$$q_h(t) = C_1\cos(6t) + C_2\sin(6t)$$

Además proponemos la solución particular $q_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, luego:

$$
\begin{aligned}
q_p' &= -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\
q_p'' &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Reemplazamos en la EDO inicial:

$$
\begin{aligned}
10\sin(\omega t) &= -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) + 36(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \\
10\sin(\omega t) &= (-A\omega^2 + 36A)\cos(\omega t) + (36B - B\omega^2)\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Así:

$$A(36-\omega^2)=0$$
$$B(36-\omega^2)=10$$

Entonces $A=0$ y $B=\dfrac{10}{36-\omega^2}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_h(t)+q_p(t) \\ &= C_1\cos(6t)+C_2\sin(6t)+\frac{10\sin(\omega t)}{36-\omega^2} \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} q(0)=2 \quad &\Rightarrow \quad C_1=2 \\ q'(0)=4 \quad &\Rightarrow \quad 6C_2+\frac{10\omega}{36-\omega^2}=4 \\ &\Rightarrow \quad C_2=\frac{1}{3}\left(2-\frac{5\omega}{36-\omega^2}\right) \\ &\Rightarrow \quad C_2=\frac{1}{3}\left(\frac{72-2\omega^2-5\omega}{36-\omega^2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente la carga es:

$$q(t)=2\cos(6t)+\frac{1}{3}\left(\frac{72-2\omega^2-5\omega}{36-\omega^2}\right)\sin(6t)+\frac{10\sin(\omega t)}{36-\omega^2}$$

(b) (**3 ptos**) Halle la corriente cuando el circuito está en resonancia.
Sugerencia: Aplique la condición de resonancia (cuando la frecuancia natural es igual a la frecuencia de la fuente) y vuelva a resolver la ecuación.
Solución:
La condición de resonancia para nuestro problema es $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=6$, entonces la EDO a resolver es:

$$\begin{aligned} q''+36q &= 10\sin(6t) \\ q(0) &= 2 \\ q'(0) &= 4 \end{aligned}$$

Resolveremos con la transformada de Laplace, donde denotaremos $Q(s)=\mathscr{L}\{q(t)\}$:

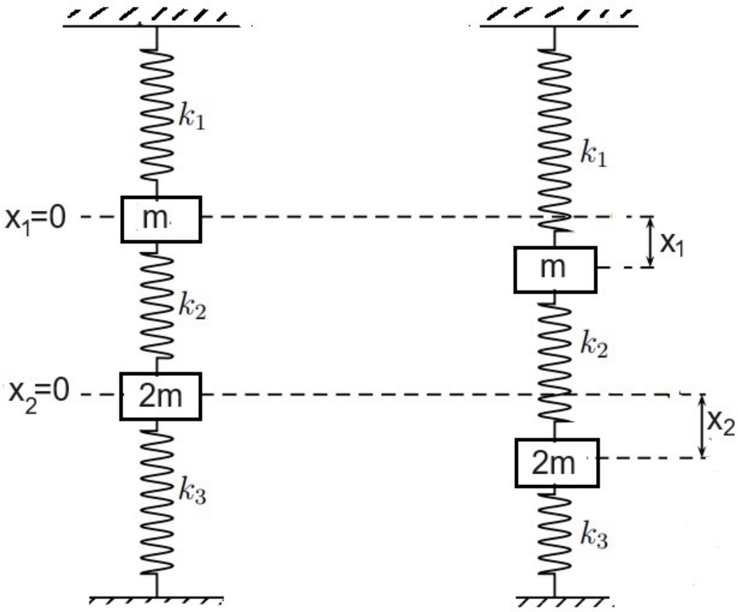
$$\begin{aligned} s^2Q(s)-sq(0)-q'(0)+36Q(s) &= 10\cdot\frac{6}{s^2+36} \\ Q(s)(s^2+36) &= \frac{60}{s^2+36}+2s+4 \\ Q(s) &= \frac{60}{(s^2+36)^2}+\frac{2s}{s^2+36}+\frac{4}{s^2+36} \end{aligned}$$

Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{60}{(s^2+36)^2}+\frac{2s}{s^2+36}+\frac{4}{s^2+36}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{60}{(s^2+36)^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+36}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+36}\right\} \\ &= \frac{5}{36}(\sin(6t)-6t\cos(6t))+2\cos(6t)+\frac{2}{3}\sin(6t) \\ &= \frac{29}{36}\sin(6t)-\frac{5t\cos(6t)}{6}+2\cos(6t) \end{aligned}$$

Problema 2 (6 Puntos)

(a) (**3 ptos**) Considere el sistema masa resorte de la figura:



Modele las ecuaciones diferenciales del sistema de tres resortes con constantes k_1, k_2 y k_3 respectivamente, acoplados a las masas m y $2m$, que permita determinar los desplazamientos $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Solución: Considerando el eje positivo hacia abajo, se obtiene

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ 2mx_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2, \end{aligned}$$

que equivale a escribir

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\ 2mx_2'' &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned}$$

(b) (**3 ptos**) Utilizando transformada de Laplace, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} x'' &= y - x \\ y'' &= x - y \end{aligned}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace en cada miembro de las ecuaciones, además denotaremos las transformadas de $x(t)$ e $y(t)$ con $X(s)$ e $Y(s)$ respectivamente. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) &= Y(s) - X(s) \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &= X(s) - Y(s) \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales y reordenando:

$$\begin{aligned}(s^2+1)X(s) - Y(s) &= -2 \\ -X(s) + (s^2+1)Y(s) &= 1\end{aligned}$$

Ahora, usamos la regla de Cramer para despejar $X(s)$ e $Y(s)$:

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & (s^2+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2+1) & -1 \\ -1 & (s^2+1) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-2s^2-1}{(s^2+1)^2-1} \\
&= \frac{-2s^2-1}{(s^2+2)s^2} \\
&= -\frac{2}{s^2+2} - \frac{1}{(s^2+2)s^2} \\
&= -\frac{2}{s^2+2} - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+2}\right] \\
Y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} (s^2+1) & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2+1) & -1 \\ -1 & (s^2+1) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2-1} \\
&= \frac{s^2-1}{(s^2+2)s^2} \\
&= \frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{(s^2+2)s^2} \\
&= \frac{1}{s^2+2} - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+2}\right]
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2}t \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2}t
\end{aligned}$$

Problema 3 (8 Puntos)

(a) (**2 ptos**) Resolver la siguiente ecuación diferencial, utilizando transformada de Laplace:

$$y' + 2y = 4e^{2t}$$

si $y(0) = 1$.

Solución:

Aplicaremos la transformada de Laplace a ambos miembros de la EDO y sea $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, luego:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y' + 2y\} &= \mathscr{L}\{4e^{2t}\} \\
sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= 4 \cdot \frac{1}{s-2} \\
(s+2)Y(s) &= \frac{4}{s-2} + 1 \\
(s+2)Y(s) &= \frac{s+2}{s-2} \\
Y(s) &= \frac{1}{s-2}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} \\
&= e^{2t}
\end{aligned}$$

(b) (**3 ptos**) Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & 1 \leq t < 4 \\ \cos(2t), & 4 \leq t \end{cases}$$

Halle $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Solución:

Primero escribimos f en términos de la función escalón unitario:

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2t^2 + (t^2 - 2t^2)\mathcal{U}(t-1) + (\cos(2t) - t^2)\mathcal{U}(t-4) \\
&= 2t^2 - t^2\mathcal{U}(t-1) + (\cos(2t) - t^2)\mathcal{U}(t-4)
\end{aligned}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace y usamos la segunda propiedad de traslación:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{2t^2\} - \mathscr{L}\{t^2\mathcal{U}(t-1)\} + \mathscr{L}\{(\cos(2t) - t^2)\mathcal{U}(t-4)\} \\
&= \frac{4}{s^3} - e^{-s}\mathscr{L}\{(t+1)^2\} + e^{-4s}\mathscr{L}\{(\cos(2(t+4)) - (t+4)^2\} \\
&= \frac{4}{s^3} - e^{-s}\mathscr{L}\{t^2 + 2t + 1\} + e^{-4s}\mathscr{L}\{(\cos(2t+8) - t^2 - 8t - 16\} \\
&= \frac{4}{s^3} - e^{-s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right] + e^{-4s}\left[\frac{s}{s^2+4}\cos(8) - \frac{2}{s^2+4}\sin(8) - \frac{2}{s^3} - \frac{8}{s^2} - \frac{16}{s}\right] \\
&= \frac{2}{s^3}\left[2 - e^{-s} - e^{-4s}\right] - \frac{2}{s^2}\left[e^{-s} + 4e^{-4s}\right] - \frac{1}{s}[e^{-s} + 16e^{-4s}] + \frac{\cos(8)se^{-4s}}{s^2+4} - \frac{2\sin(8)e^{-4s}}{s^2+4}
\end{aligned}$$

(c) (**3 ptos**) Halle la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{3s^2 - 4}{s^3 - 4s}$$

Solución:
Factorizamos el denominados de la función F:

$$F(s) = \frac{3s^2 - 4}{s(s+2)(s-2)}$$

Ahora, descomponemos utilizando el método de fracciones parciales, es decir:

$$\frac{3s^2 - 4}{s(s+2)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-2}$$

Luego,

$$3s^2 - 4 = A(s+2)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s+2)$$

Igualando términos, obtenemos: $A = B = C = 1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-2}\right\} \\ &= 1 + e^{-2t} + e^{2t} \end{aligned}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**1.5 ptos**) Dado el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned} x'' &= y - 4x \\ y'' &= 2x - y \end{aligned}$$

¿Es posible resolver utilizando autovalores y autovectores? De ser así, de qué orden es la matriz de la que se debe calcular los autovalores. Justifique su respuesta.
Solución:
Sí es posible, definimos las variables

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= x' \\ x_4 &= y' \end{aligned}$$

De esta manera, las ecuaciones se pueden reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_4 \\ x_3' &= x_2 - 4x_1 \\ x_4' &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Así, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

el cual puede ser resuelto mediante el método de eigenvalores y eigenvectores.

(b) (**1.5 ptos**) Escriba la definición de la transformada de Laplace de una función $f(t)$ y luego halle, por definición, la transformada de la función $f(t) = 2$.

Solución:

Calculemos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{2\} &= \int_0^{\infty} 2e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} 2e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left.\frac{2}{-s}e^{-st}\right|_0^N \\
&= \underbrace{\lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{-s}e^{-Ns}\right)}_{=0} + \frac{2}{s} \\
&= \frac{2}{s}
\end{aligned}
$$