Ecuaciones diferenciales

ED no homogéneas.
Coeficientes Indeterminados:
Método de Superposición

Semana 05: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Identificar** la solución general de una EDO lineal no homogénea.
- **Aplicar** el método de coeficientes indeterminados - método de superposición, en la resolución EDOs lineales no homogéneas de coeficientes constantes

COEFICIENTES INDETERMINADOS: MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

1

Logros

- **Identifica** la solución general de una EDO lineal no homogénea. (L.4.5.2.5)
- Aplica el método de coeficientes indeterminados - método de superposición, en la resolución EDOs lineales no homogéneas de coeficientes constantes. (L.4.5.2.6)

Solución de una EDO lineal no homogénea

Dada una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad g(x) \neq 0. \quad (1)$$

Cualquier función $y_p(x)$ que verifique esta ecuación, se dice que es una **solución particular.**

Sea $y_p(x)$ una solución particular de (1) y sea $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a (1). Entonces la **solución general** de (1) está dado por

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)}_{y_H} + y_p(x) \quad (2)$$

A la función $y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ se le conoce como **función complementaria** de la ecuación (1).

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial no homogénea $y'' + 9y = 27$. Para hallar su solución general primero debemos resolver la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + 9y = 0,$$

La solución de esta ecuación es $y_H(x) = c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x)$. Ahora hallamos una solución particular, en este caso la solución particular es: $y_p(x) = 3$.
Por lo tanto, la solución general de la ecuación inicial es

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x) + 3$$

Uno de los métodos para hallar la solución particular de una ecuación no homogénea se explica en las siguientes diapositivas.

Ejercicio

1. Sabiendo que la función $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} + 6e^x$ es la solución general de la ecuación
$$y'' - 7y' + 10y = 24e^x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
Identifique las partes de la solución.

Solución:

La forma de la solución sugiere que la función

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x}$$

es la solución de la ecuación homogénea asociada: $y'' - 7y' + 10y = 0$. Para corroborar esta afirmación debemos demostrar que las funciones $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{5x}$ son soluciones de la ecuación homogénea y que además son linealmente independientes.

Verifique que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea.

Para corroborar que son LI debemos calcular el Wronskiano:

$$W(e^{2x}, e^{5x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = 3e^{7x} \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, son soluciones LI.
Por otro lado, a partir de la elección anterior, resulta evidente que la solución particular es

$$y_p(x) = 6e^x.$$

Verifique que esta solución satisface la ecuación (3).

En resumen, la solución de una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden esta dado por

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

donde $y_H(x)$ tiene la forma de $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, mientras que $y_P(x)$ es una función que no depende de ninguna constante.

Coeficientes indeterminados: Método de superposición

Dada la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \quad g(x) \neq 0. \tag{4}$$

este método permite hallar la solución particular y_p. El método se basa en la siguiente idea:

Existen ciertas funciones que al ser derivadas n veces, siguen teniendo la misma forma o similar a la función original, ejemplo de este tipo de funciones son las funciones senos, cosenos, exponenciales y polinómicas.

Para hallar la solución particular y_p de la ecuación (4) debemos hacer lo siguiente:

- Primer paso: Reconocer la forma de la función $g(x)$.
- Segundo paso: Plantear la solución particular $y_p(x)$ de acuerdo a la forma de la función $g(x)$, pero colocando coeficientes literales.
- Tercer paso: Reemplazar la solución planteada en la ecuación original.

Ejemplo

Resolver la ecuación $y'' - 4y = e^{3x}$

- Primer paso: $g(x) = e^{3x}$ es una función exponencial.
- Segundo paso: Se plantea que $y_p(x) = Ae^{3x}$. ¿Por qué?
- Tercer paso: Reemplazando en la ecuación se obtiene el valor $A = 1/5$, luego $y_p(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$.

La idea de este método es plantear soluciones que dependen de algunas constantes literales y luego calcular sus valores adecuados que satisfacen a la ecuación.

La solución particular de prueba y_p de la ecuación (4) depende del tipo de función $g(x)$.

- $g(x) = constante \Rightarrow$ Solución particular de prueba: $y_p = A$.
- $g(x)$= polinomio de grado 1 $\Rightarrow$ Solución particular de prueba: $y_p = Ax + B$.
- $g(x)$= polinomio de grado 2 $\Rightarrow$ Solución particular de prueba: $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
- $g(x) = me^{\alpha x} \Rightarrow$ Solución particular de prueba: $y_p = Ae^{\alpha x}$.
- $g(x) = m\sin(\beta x)$ o $g(x) = m\cos(\beta x) \Rightarrow y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$.
- $g(x) = m\sin(\beta x) + n\cos(\beta x) \Rightarrow y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$.

En la siguiente lámina, mostramos ejemplos de la forma que adquiere $y_p(x)$ para diferentes funciones $g(x)$.

TABLA Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. $\operatorname{sen} 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Figure: Soluciones particulares de prueba de acuerdo a la forma de la función $g(x)$.

Ejercicios

1. Determinar la solución particular de la ecuación $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Solución:

- Primer paso: $g(x) = 2x^2 - 3x + 6$ es una función polinómica de grado 2.
- Segundo paso: Planteamos la solución particular:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

- Tercer paso: Reemplazar la solución planteada en la ecuación original. Tener en cuenta que

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \qquad y_p''(x) = 2A,$$

Por lo tanto

$$2A + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow \quad -2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 4B - 2C) = 2x^2 - 3x + 6$$

$$\Rightarrow \quad A = -1, \quad B = -5/2, \quad C = -9 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

2 Determinar la solución particular de la ecuación $y'' - y' + y = 2\sin(3x)$.

Solución:

- Primer paso: $g(x) = 2\sin(3x)$ es una función senoidal.
- Segundo paso: Planteamos la solución particular:

$$y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$$

- Tercer paso: Reemplazar la solución planteada en la ecuación original. Tener en cuenta que

$$y_p'(x) = 3A\cos(3x) - 3B\sin(3x)$$
$$y_p''(x) = -9A\sin(3x) - 9B\cos(3x).$$

Por lo tanto, al reemplazar en la ecuación original y luego de efectuar:

$$[-8A + 3B]\sin(3x) + [-8B - 3A]\cos(3x) = 2\sin(3x)$$
$$\Rightarrow \quad A = -\frac{16}{73}, \quad B = \frac{6}{73}$$
$$\Rightarrow \quad y_p(x) = -\frac{16}{73}\sin(3x) + \frac{6}{73}\cos(3x)$$

3 Hallar la solución general de $y''' + y'' = e^x \cos(x)$.

Solución:

Parte 1: Hallando la solución homogénea y_H

La ecuación auxiliar está dado por

$$
\begin{aligned}
& r^3 + r^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & r^2(r+1) = 0 \\
\Rightarrow \quad & r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = -1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$y_H(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{-x} = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

Parte 2: Hallando la solución particular y_p

- Primer paso: $g(x) = e^x \cos(x)$.
- Segundo paso: Planteamos la solución particular:

$$y_p(x) = Ae^x \sin(x) + Be^x \cos(x)$$

- Tercer paso: Reemplazar la solución planteada en la ecuación original. Tener en cuenta que

$$
\begin{aligned}
y_p'(x) &= (A-B)e^x \sin(x) + (A+B)e^x \cos(x)\\
y_p''(x) &= -2Be^x \sin(x) + 2Ae^x \cos(x)\\
y_p'''(x) &= -2(A+B)e^x \sin(x) + 2(A-B)e^x \cos(x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
[4A+B]e^x \cos(x) + [-2A-4B]e^x \sin(x) &= e^x \cos(x)\\
\Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}, \quad B &= -\frac{1}{10}\\
\Rightarrow \quad y_p(x) &= \frac{1}{5}e^x \sin(x) - \frac{1}{10}e^x \cos(x)
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución general de la ecuación inicial es

$$
y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{5}e^x \sin(x) - \frac{1}{10}e^x \cos(x)
$$

4 Resolver la EDO: $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

Solución: Aquí debe hallarse la solución general.

Parte 1: Hallando la solución homogénea y_H

La ecuación auxiliar está dado por

$$\begin{aligned} r^2 - 2r - 3 &= 0 \\ \Rightarrow \quad (r+1)(r-3) &= 0 \\ \Rightarrow \quad r_1 = -1, \quad r_2 &= 3, \end{aligned}$$

Por lo tanto: $y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

Parte 2: Hallando la solución particular y_p

$g(x)$ consta de tipos de funciones: Polinomios y exponencial:

- Primer paso: $g(x) = (4x - 5) + (6x)e^{2x}$.
- Segundo paso: Planteamos la solución particular:

$$y_p(x) = (Ax + B) + (Cx + D)e^{2x}$$

- Tercer paso: Reemplazar la solución planteada en la ecuación original. Tener en cuenta que

$$
\begin{aligned}
y_p'(x) &= A + Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2De^{2x} \\
y_p''(x) &= 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4De^{2x}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación:

$$
\begin{aligned}
&[-3A]x + [-2A - 3B] + [-3C]xe^{2x} + [2C - 3D]e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x} \\
&\Rightarrow \quad A = -\frac{4}{3}, \quad B = \frac{23}{9}, \quad C = -2, \quad D = -\frac{4}{3} \\
&\Rightarrow \quad y_p(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}
\end{aligned}
$$

Finalmente la solución general de la ecuación inicial es

$$
y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}
$$

5 La EDO $y'' + my' + ny = -16xe^x$
tiene por solución general $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + y_p$
Halle la solución particular.

Solución:

Notar que la solución de su homogénea asociada es $y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$, lo que implica que las raíces de la ecuación auxiliar son $r = 2$ y $r = -3$.
La ecuación auxiliar factorizada será $(r-2)(r+3) = 0$
Ecuación auxiliar: $r^2 + r - 6 = 0$.
Ecuación homogénea asociada: $y'' + y' - 6y = 0$
Se ha determinado la EDO: $y'' + y' - 6y = -16xe^x$.
Por lo tanto $y_p = (Ax + B)e^x$, luego:
$y'(x) = (Ax + A + B)e^x$
$y'' = (Ax + 2A + B)e^x$
Reemplazando en la EDO no homogénea, se tiene:
$(-4Ax + (3A - 4B))e^x = -16xe^x$
De donde se halla: $A = 4$ y $B = 3 \Rightarrow y_p = (4x + 3)e^x$.

6 Hallar la solución general de la EDO $y'' + y = 4\sin^2 x$

Solución: Resolviendo la homogénea:

$$y'' + y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$r^2 + 1 = 0$$

Resolviendo: $r = 0 \pm 1i$

Solución de la homogénea:

$$y_H = c_1 e^{0x}\cos(x) + c_2 e^{0x}\sin(x)$$

$$y_H = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$$

Ahora se hallará la solución particular, pero primero recordar que:

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Reemplazando en la EDO se tiene:

$$y'' + y = 2 - 2\cos(2x)$$

Luego:

$$y_p = A + (B\cos(2x) + C\sin(2x))$$
$$y_p' = -2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)$$
$$y''p = 4B\cos(2x) - 4C\sin(2x)$$

Reemplazando en la EDO no homogénea anterior:

$$A + 5B\cos(2x) - 3C\sin(2x) = 2 - 2\cos(2x)$$

y comparando los coeficientes respectivos se halla:
$A = 2$, $B = -2/5$, $C = 0$.
Finalmente la solución general será:

$$y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + (2 + \frac{2}{5}\cos(2x))$$

Conclusiones

1. Para resolver EDOs lineales no homogéneas, primero se debe resolver la EDO homogénea asociada y luego encontrar la solución particular.
2. El método de coeficientes indeterminados parte de la hipótesis que la solución tiene una forma similar al resto de la EDO, $g(x)$, esto se asume pues al derivar ciertas funciones n veces se llega a una expresión similar a la planteada originalmente y así se determinan los coeficientes.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA