Ecuaciones diferenciales

Modelos de circuitos eléctricos

Semana 10: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Objetivos

- **Analizar** y **resolver** circuitos LC y circuitos RCL.
- **Analizar** las soluciones estacionario de un circuito RCL.

RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS MEDIANTE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

1

Logros

- **Analiza** y **resuelve** circuitos LC y circuitos RCL. (L.6.10.2.5)
- **Analiza** las soluciones estacionario de un circuito RCL. (L.6.10.2.6)

Conocimientos previos

En un circuito donde hay resistencias, capacitancias e inductancias, se cumple que la caída de voltaje en estos elementos es:

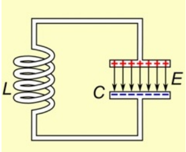
Elementos	RESISTENCIA 	CAPACITANCIA 	INDUCTANCIA 
Denotados por:	R	C	L
Voltaje	V = R I	$V = \frac{Q}{C}$	V = L (di/dt)

También tomar en cuenta que la corriente es la derivada de la carga que hay en un condensador: $i = \frac{dQ}{dt}$. Usaremos también las leyes de Kirchoff:

- 1era Ley. La suma de corrientes que entran es igual a la suma de corrientes que salen en un nodo.
- 2da Ley. La suma de caídas de voltaje en un lazo cerrado es cero.

Circuitos LC

Se tiene un circuito LC (sin fuente externa), como se muestra en la imagen:



La ecuación diferencial (usando las leyes de Kirchoff) es la siguiente:

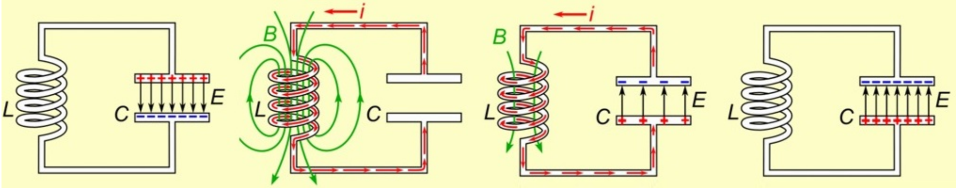
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \tag{1}$$

La velocidad a la que fluye y regresa la corriente desde el condensador a la bobina y viceversa, se produce con una frecuencia propia f, denominada frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Analogía con Masa-Resorte

Al estar el condensador y la bobina en paralelo, la energía almacenada por el campo eléctrico del condensador (en forma de cargas electrostáticas), es absorbida por la bobina, que la almacena en su campo magnético, pero a continuación es absorbida y almacenada por el condensador; nuevamente en forma de campo eléctrico; para ser nuevamente absorbida por la bobina, y así sucesivamente.



Esto crea un vaivén de la corriente (cargas eléctricas) entre el condensador y la bobina.

Ejemplo

Se carga con $4\mu\, C$ un condensador de $2\mu\, F$ y luego se conecta a una bobina de $6\mu\, H$. ($\mu = 10^{-6}$)

(a) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación?

(b) ¿Cuál es el valor máximo de corriente?

Solución:

Para (a),

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}\mu}.$$

Para (b), debemos resolver la ecuación diferencial

$$6\mu\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{2\mu}Q = 0$$

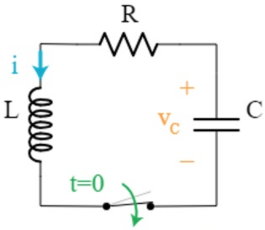
sujeta a las condiciones iniciales:

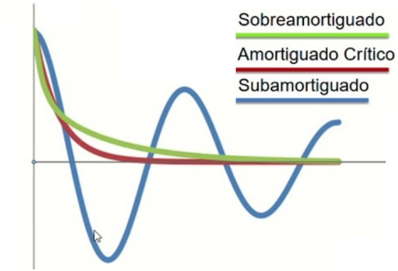
$$Q(0) = 4\mu, \qquad Q'(0) = 0$$

Circuitos RLC

Al añadir una resistencia al circuito anterior, se tiene un amortiguamiento, ya que la energía se disipa poco a poco en la resistencia en forma de calor (efecto Joule). Esta es una ecuación diferencial muy similar al movimiento masa-resorte amortiguado.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0,$$





Circuito RLC en serie

En un circuito RLC se tiene la siguiente ecuación para la carga:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t)$$

Para cuando $V(t) = 0$ se dice que es un circuito libre. En este caso la ecuación auxiliar es:

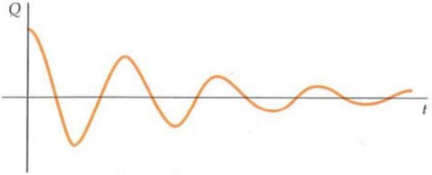
$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0.$$

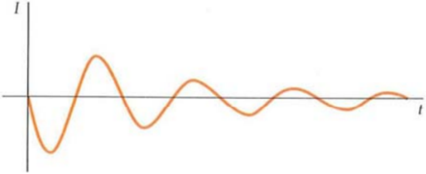
Dependiendo del discriminante $\triangle = R^2 - 4L/C$, se dice que el circuito es (al igual que en los sistemas masa-resorte):

Sobreamortiguado si	$R^2 - \frac{4L}{C} > 0$
Críticamente amortiguado si	$R^2 - \frac{4L}{C} = 0$
Subamortiguado si	$R^2 - \frac{4L}{C} < 0$

Ejemplo

Se carga con $4\mu\ C$ un condensador de $2\mu\ F$ y luego se conecta a una bobina de $6\mu\ H$. Pero ahora se considera una resistencia que amortiguará el circuito. Al medir la carga del condensador y la corriente que pasa por el circuito se tiene las siguientes gráficas:

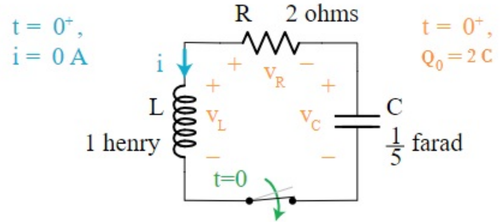




¿Cuales son los posibles valores que puede tomar la resistencia R de modo que la gráfica mostrada sea coherente?
Sugerencia: De la gráfica, determine el tipo de amortiguamiento.

Ejemplo

En este punto es útil hacer un ejemplo específico con algunos valores de los componentes para ver cómo es una solución particular. Aquí está nuestro circuito de ejemplo:



Ejemplo de la respuesta natural del circuito RLC. El capacitor tiene
No hay corriente que fluye en el inductor en el momento
en que se cierra el interruptor.

Solución

La ecuación diferencial para el circuito RLC es:

$$1\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\frac{dQ}{dt} + 5Q = 0$$

- La frecuencia de resonancia es: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{5}$
- La ecuación auxiliar es: $r^2 + 2r + 5 = 0$ y las raices son: $r = -1 \pm 2i$
- Las condiciones iniciales son: $Q_0 = 2; i_0 = Q_0' = 0$

La solución de la ED (luego de aplicar las condiciones iniciales) es:

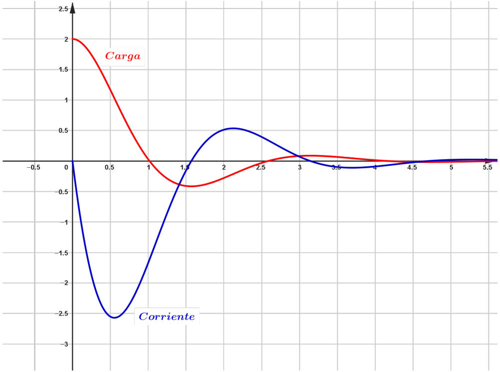
$$Q = 2e^{-t}cos(2t) + e^{-t}sin(2t)$$

Derivando, se obtiene la corriente:

$$i = -5e^{-t}sin(2t)$$

Ejemplo

Se grafica la solución de carga y corriente:



Circuito RLC con fuente

La ecuación de un circuito RLC en serie (con fuente $V = V_0 \sin(\omega t)$) es la siguiente:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin(\omega t), \tag{2}$$

cuya solución general está dada por: $Q = Q_H + Q_p$.

- Esta ecuación diferencial es muy similar al movimiento oscilatorio forzado, la fuente externa haría las veces de fuerza externa que puede ser un valor constante (fuente continua $V = cte$) o variable senoidal (fuente alterna $V = V_0 \sin(\omega t)$).
- Se analiza de la misma manera del movimiento oscilatorio forzado, incluso se puede determinar cuándo podría ocurrir una resonancia.

Para determinar la solución particular de la ecuación (2) podemos utilizar el método de coeficientes indeterminados o variación de parámetros.

Ejemplo

Del ejemplo anterior, considere que además se tiene una fuente: $V = 3cos(\sqrt{5}t)$

Solución:

Usando coeficientes indeterminados, se tiene:

$$Q_p = Asen(\sqrt{5}t) + Bcos(\sqrt{5}t)$$

Resolviendo, usando la respuesta del problema anterior y utilizando los mismos datos iniciales se tiene que la solución es:

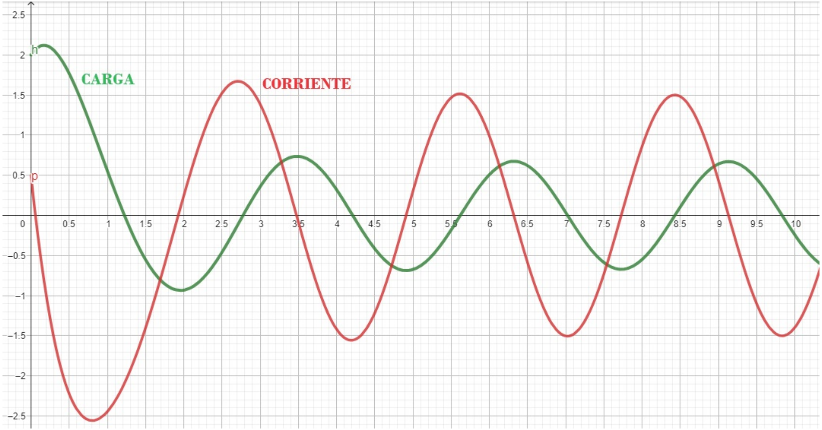
$$Q = Q_h + Q_p$$

$$Q = 2e^{-t}cos(2t) + e^{-t}sin(2t) + \frac{3}{2\sqrt{5}}sen(\sqrt{5}t)$$

Se puede intuir que hay dos partes de la solución y que luego de un tiempo considerable, solo la segunda parte es la que predomina.

Ejemplo

Se grafica la solución de carga y corriente:



Respuesta estacionaria y transitoria

La ecuación de un circuito RLC en serie (con fuente $V = V_0 \sin(\omega t)$) es la siguiente:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin(\omega t), \tag{3}$$

cuya solución general está dada por: $Q = Q_H + Q_p$.

- A la solución homogénea Q_H se le suele llamar solución transitoria debido a que $\lim_{t\to\infty} x_H = 0$.
- A la solución particular Q_p se le suele llamar solución estacionaria porque es la solución que prevalece a medida que pasa el tiempo.

Para determinar la solución estacionaria de la ecuación (3) podemos utilizar el método de coeficientes indeterminados.

Ejemplo

Encuentre la corriente y carga estacionaria en un circuito RLC en serie, cuando $L = 1\ H$, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.25\ F$ y $E(t) = 50\cos(t)\ V$.

Solución:

La ecuación del circuito es

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\frac{dQ}{dt} + 4Q = 50\cos(t)$$

La solución de la parte homogénea es $Q_H = e^{-t}\left(\cos(\sqrt{3}t) + \sin(\sqrt{3}t)\right)$.La corriente estacionaria tiene la forma

$$Q_P = A\cos(t) + B\sin(t).$$

Sustituyendo en la ecuación encontramos que

$$(3A + 2B)\cos(t) + (3B - 2A)\sin(t) = 50\cos(t)$$

Por lo tanto,

$$A = \frac{150}{13}, \quad B = \frac{100}{13}$$

De modo que la carga estacionaria está dada por

$$Q_P = \frac{150}{13}\cos(t) + \frac{100}{13}\sin(t).$$

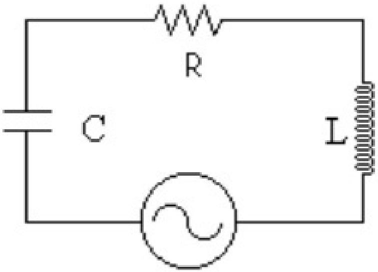
Derivando obtenemos la corriente estacionaria.

$$I_P = -\frac{150}{13}\sin(t) + \frac{100}{13}\cos(t)$$

Actividad en aula

Se tiene el circuito RLC con fuente, donde $L = 1$ Henry, una resistencia $R = 2$ Ohms, con un condensador $C = \dfrac{1}{7}$ Faradios y donde la fuente tiene un voltaje $V(t) = v_0 \sin(4t)$, considerando que la carga al inicio es 3 Coulomb y una corriente $I_0 = 0$ Amperios

1. Determine la ecuación diferencial de la carga en el circuito.
2. Resuelva la ecuación diferencial.
3. Determine la solución estacionaria.
4. Determine la solución transitoria.
5. Grafique la solución para $v_0 = 5$



Para el alumno

Determine la carga estacionaria y la corriente estacionaria de un circuito RLC donde la fuente tiene un voltaje dado por $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$.

Solución:

Buscamos la solución particular de la ecuación:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin(\omega t)$$

Por coeficientes indeterminados, la solución particular es de la forma

$$Q_p = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{4}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Q_p' &= A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \\ Q_p'' &= -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$L\left(-A\omega^2\sin(\omega t)-B\omega^2\cos(\omega t)\right)+R\left(A\omega\cos(\omega t)-B\omega\sin(\omega t)\right)$$
$$+\frac{1}{C}\left(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)=V_0\sin(\omega t).$$

De dónde

$$\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)A-R\omega B=V_0 \tag{5}$$
$$R\omega A+\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)B=0. \tag{6}$$

Despejando A de la ecuación (6) y reemplazando en (5), se obtiene

$$B=-\frac{V_0R\omega}{\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)^2+R^2\omega^2}=\frac{-V_0R}{\omega\left[\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2\right]} \tag{7}$$

Reemplazando en (6):

$$A = \frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) B = \frac{-V_0\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{\omega\left[\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2\right]} \tag{8}$$

Introduciendo las variables

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}, \qquad Z = \sqrt{X^2 + R^2}$$

Entonces la carga estacionaria está dada por

$$Q_p = -\frac{V_0 X}{\omega Z^2}\sin(\omega t) - \frac{V_0 R}{\omega Z^2}\cos(\omega t),$$

y la corriente estacionaria

$$I_p = Q_p' = \frac{V_0}{Z}\left(\frac{R}{Z}\sin(\omega t) - \frac{X}{Z}\cos(\omega t)\right)$$

X y Z son llamadas reactancia e inductancia respectivamente.

Conclusiones

1. El análisis de circuitos eléctricos es análogo al análisis de sistemas masa-resorte.
2. La solución estacionaria es la solución que prevalece en el tiempo. Esto también se aplica a sistemas masa-resorte.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA