Ecuaciones diferenciales

Transformada de Laplace. Parte II

Semana 12: Teoría

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Cesar Vergaray Albujar

Índice

Objetivos

- **Determinar** la transformada de Laplace Inversa de una función utilizando fracciones parciales.
- **Aplicar** la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.
- **Resolver** ecuaciones diferenciales utilizando el primer teorema de traslación (Traslación en el eje "s").

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

1

Transformada Inversa de Laplace

Ahora nos concentraremos en el problema inverso, es decir, dada una función $F(s)$ nos interesa conocer la función $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Esa es la idea principal de la transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s} & \Rightarrow \quad & \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = 1 \\
F(s) &= \frac{1}{s^2} & \Rightarrow \quad & \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = t \\
F(s) &= \frac{2!}{s^3} & \Rightarrow \quad & \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = t^2 \\
F(s) &= \frac{1}{s+3} & \Rightarrow \quad & \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-3t}
\end{aligned}
$$

Transformada inversa de algunas funciones

$F(s)$	$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n\,, n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$
$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$
$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$
$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$

Linealidad de la transformada inversa

Al igual que con la transformada directa $\mathscr{L}$, aquí con la transformada inversa $\mathscr{L}^{-1}$ también se cumpla la linealidad. Es decir:

- $\mathscr{L}^{-1}$ es una transformación lineal

$$\mathscr{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Ejemplo

Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s^4+2s-2}{s^5-s^4}\right\}$

Solución:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s^4+2(s-1)}{s^4(s-1)}\right\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s^4}{s^4(s-1)}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\tfrac{2(s-1)}{s^4(s-1)}\right\}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\tfrac{2}{s^4}\right\}$$
$$4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\tfrac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\tfrac{2(3)}{s^4}\right\}$$
$$4e^t+\tfrac{1}{3}.t^3$$

Ejemplo

Calcule $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{9s-1}{(s-1)(s+3)}\right\}$

Solución: Usaremos fracciones parciales para descomponer la función, es decir:

$$\frac{9s-1}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A(s+3) + B(s-1) = 9s-1 \tag{1}$$

- Si $s=-3$, reemplazando en (1):

$$B\cdot(-4) = -28$$

$$B = 7$$

- Si $s = 1$, reemplazando en (1),

$$
\begin{aligned}
A \cdot (4) &= 8 \\
A &= 2
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{9s-1}{(s-1)(s+3)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{7}{s+3}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s+3}\right\} \\
&= 2 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 7 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\
&= 2e^{t} + 7e^{-3t}
\end{aligned}
$$

RESOLUCIÓN DE EDOs CON LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

2

Logros

- **Determina** la transformada de derivada de una función. (L.8.12.2.4)
- **Resuelve** EDO lineales con condiciones iniciales utilizando transformada de Laplace.(L.8.12.2.5)
- **Determina** la transformada de Laplace utilizando el primer teorema de traslación (Traslación en el eje "s"). (L.8.13.1.6)
- **Expresa** funciones continuas por tramos en términos de la función escalón unitario. (L.8.13.1.8)

Transformada de la derivada

El objetivo inmediato es usar la transformada de Laplace para *resolver ecuaciones diferenciales*. Para tal fin, es necesaria evaluar cantidades cómo $\mathscr{L}\{f'\}$ o $\mathscr{L}\{f''\}$. Calculemos $\mathscr{L}\{f'\}$. Por definición

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

Usando el método de integración por partes

$$\begin{cases} u = e^{-st}, & dv = f'(t)dt \\ du = -se^{-st}dt, & v = f(t) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f'(t)\} &= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \underbrace{\lim_{K\to\infty} \left[e^{-st} f(t)\right]}_{0} - \underbrace{e^{-s(0)}}_{1} f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)}$$

Similarmente, aplicando integración por partes dos veces, se obtiene

$$\boxed{\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)}$$

Transformada de una derivada: El resultado general

Los casos vistos anteriormente son resultados particulares del siguiente teorema:

Teorema 1: Transformada de una derivada

Si $f,\ f',\ \ldots,\ f^{(n-1)}$ son continuas en $[0,\infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Resolviendo PVI

Dada una ecuación lineal con coeficientes constantes con condiciones iniciales en $t_0 = 0$:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = g(t) \tag{2}$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \tag{3}$$

Se sigue los siguientes pasos:

- Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace a la ecuación (2) y usar el teorema 1 y las condiciones (3).
- Paso 2: Despejar $\mathscr{L}\{f(t)\}$
- Paso 3: Aplicar la transformada inversa a $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

Ejemplos

1. Resuelva el siguiente PVI

$$\frac{dy}{dt} + 3y = -6.5\sin(2t), \qquad y(0) = 1.$$

Solución:

$\mathscr{L}\{y'\} + 3\mathscr{L}\{y\} = -6.5\mathscr{L}\{\sin(2t)\}$

$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = -6.5\frac{2}{s^2+4}$

$sY(s) - 1 + 3Y(s) = -\frac{13}{s^2+4}$

$Y(s)(s+3) = \frac{s^2-9}{s^2+4}$

$Y(s) = \frac{s-3}{s^2+4}$

$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} - 1.5\frac{2}{s^2+4}$

$y = cos(2t) - 1.5\sin(2t)$

2 Resuelva el siguiente PVI

$$y'' - y' = -2x, \qquad y(0) = 2. \quad y'(0) = 2$$

Solución:

$$\begin{gathered}
\mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} = -\mathscr{L}\{x\} \\
(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - (sY(s) - y(0)) = -2\tfrac{1}{s^2} \\
s^2Y(s) - 2s - 2 - sY(s) + 2 = -\tfrac{2}{s^2} \\
(s^2 - s)Y(s) = 2s - \tfrac{2}{s^2} \\
s(s-1)Y(s) = 2.\tfrac{s^3-1}{s^2} \\
s(s-1)Y(s) = \tfrac{2(s-1)(s^2+s+1)}{s^2} \\
Y(s) = \tfrac{2(s^2+s+1)}{s^3} \\
Y(s) = \tfrac{2}{s} + \tfrac{2}{s^2} + \tfrac{2}{s^3} \\
y = 2 + 2t + t^2
\end{gathered}$$

Para el alumno

3 Resuelva el siguiente PVI

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-4t}, \qquad y(0) = 1. \quad y'(0) = 5$$

Solución:

UTEC

3

PROPIEDADES OPERACIONALES

Traslación en el eje s

Si se conoce la transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f(t)\}$ de una función f es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de f, es decir, $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$.

Teorema 2: Primer teorema de traslación

Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Prueba: La prueba es inmediato. De la definición

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)}f(t)dt = F(s-a)$$

Ejemplos

1. Evalúe $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$.

   Solución:

$$\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathscr{L}\{t^3\}\Big|_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\Bigg|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}$$

2. Evalúe $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos(4t)\}$.

   Solución:

$$\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos(4t)\} = \mathscr{L}\{\cos(4t)\}|_{s\to s-(-2)} = \frac{s}{s^2+16}\Bigg|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$

Forma inversa del teorema 2

Para calcular la inversa de $F(s-a)$ se debe seguir los siguientes pasos:

- Reconocer $F(s)$.
- Calcular $f(t)$ tomando la transformada inversa de Laplace de $F(s)$.
- Multiplicar $f(t)$ por la función exponencial e^{at}.

De manera simbólica, este procedimiento se resume de la siguiente manera

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t).$$

donde $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ejemplo

Evalúe $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$ sin usar fracciones parciales.

Solución:

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6+6+5}{(s-3)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2}\right\}$$

Sea

$$F(s) = \frac{2s+11}{s^2} = \frac{2}{s} + \frac{11}{s^2}$$

entonces

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-3)\} = e^{3t}f(t)$$

donde

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{11}{s^2}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 11\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 2 + 11t$$

Finalmente,

$$h(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t}$$

Ejercicios para el alumno

1. Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 17$

Respuesta:

$$y(t) = 2e^{3t} + 11te^{3t} + \frac{1}{12}t^4 e^{3t}$$

2 Una masa de $4\ kg$ estira un resorte $2\ m$. La masa se libera a partir del reposo $1\ m$ arriba de la posición de equilibrio y el movimiento resultante tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea. Use la transformada de Laplace para encontrar la ecuación de movimiento $y(t)$.

Respuesta:

$$y(t) = -e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

3 Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Respuesta:

$$y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\sin(\sqrt{2}t)$$

Actividad I

Un circuito en serie está compuesto por una resistencia de 2 Ohmios, un inductor de 1 Henrio y un capacitor de 1/5 Faradios. Se aplica una fuerza electromotriz de $24\sin(t)$ voltios.

1) **Modelamiento del problema:**
   Para el cicruito planteado. determina la ecuación diferencial que describe el voltaje del capacitor en función del tiempo. **Nota:**
   - Aplique la Ley de Kirchhoff de voltajes (KVL) en el circuito con el resistor, el inductor y el capacitor.
   - Exprese todos los voltajes de la ecuación previa en términos del voltaje del capacitor.

Actividad II

2) **Implementación de Algoritmos:**
Resuelva la ecuación diferencial mediante Transformada de Laplace.
Considere las siguientes condiciones iniciales:

$$V(0) = 0, \quad \frac{dV}{dt}(0) = 0$$

Nota:

- Aplique el Teorema de la Transformada de la derivada en la ecuación diferencial para el voltaje del capacitor.
- Use la tabla de transformadas de Laplace para llegar a una ecuación para la transformada del voltaje del capacitor.
- Aplique la transformada de Laplace inversa para hallar el voltaje del capacitor.

Actividad III

3) **Aplicación Práctica de Conceptos Teóricos:**
   Resuelva la ecuación anterior por un método directo y compare con la solución mediante la Transformada de Laplace. Identifique si hay un voltaje estacionario en el capacitor.
   - Halle la solución homogénea a partir de la ecuación auxiliar de la ecuación diferencial lineal de segundo orden.
   - Halle la solución particular por el método de variación de parámetros.
   - Halle la solución general e identifique la solución estacionaria.
4) **Desafío de Pensamiento Crítico:**
   Suponga que la fuente de voltaje $E(t)$ tiene un proceso de amortiguamiento de tal manera que $24e^{-t/4}\sin(t)$. Explique cómo afectaría esto a la ecuación diferencial y qué diferencias esperaría observar respecto de la fuente alterna sin amortiguamiento.

Conclusiones

1. La descomposición en fracciones parciales y el uso de tablas nos permiten calcular la transformada inversa de Laplace.
2. Las ecuaciones diferenciales lineales pueden resolverse algebraicamente usando la transformada de Laplace.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA