Ecuaciones diferenciales

Modelado con EDOs de orden superior. Parte II

Semana 10: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Identificar** modelos lineales que describen el comportamiento de sistemas masa-resorte en movimiento amortiguado-forzado.
- **Analizar** y **resolver** modelos lineales que describen el comportamiento de sistemas masa-resorte en movimiento amortiguado-forzado.

SISTEMAS MASA-RESORTE AMORTIGUADO-FORZADO

1

Logros

- **Identifica** modelos lineales que describen el comportamiento de sistemas masa-resorte en movimiento amortiguado-forzado. (L.6.10.1.3)
- **Analiza** y **resuelve** modelos lineales que describen el comportamiento de sistemas masa-resorte en movimiento amortiguado-forzado. (L.6.10.1.4)

Sistema masa-resorte forzado

En esta sección investigaremos qué sucede cuando una fuerza externa $f(t)$, la cual depende del tiempo, se aplica al sistema masa-resorte.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = f(t), \tag{1}$$

donde γ es la constante de amortiguamiento.
La discusión está restringida a funciones de forzamiento de tipo sinusoidales, es decir:

$$f(t) = F\cos(\omega t) \tag{2}$$

¿Por qué es importante considerar esta fuerza del tipo sinusoidal?

- Este tipo de fuerzas suelen ser periódicas (vibraciones)
- Corrientes alternas en los circuitos.

El estudio de la respuesta forzada puede ser dividido en dos casos, dependiendo de si la fricción está presente, o no.

Caso 1: La fricción no está presente ($\gamma = 0$). La ecuación resulta ser:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F\cos(\omega t)$$

cuya solución está dado por:

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_p + C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t), \qquad \text{siendo } {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}.$$

El valor ω_0 se le conoce como frecuencia natural. Si $\omega_0 \neq \omega$, entonces

$$x_p = \frac{F}{k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

Si $\omega_0 = \omega$, se dice que el sistema está en resonancia pura.

Caso 2: La fricción está presente ($\gamma \neq 0$). La ecuación diferencial es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F\cos(\omega t)$$

donde la solución es dada por

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

Para determinar la solución particular $x_p(t)$ podemos utilizar el método de variación de parámetros o el método de coeficientes indeterminados.

Ejercicios

1. Una masa de $15\ kg$ alarga $5/32\ m$ un resorte. En $t = 0$ se libera la masa desde un punto que está $2\ m$ arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $4\ m/s$. Esta masa tiene asociado una fuerza externa de $f(t) = -945\cos(t)$. Determine la ecuación de movimiento. Considere $g = 10\ m/s^2$.

Solución:

Por Hooke:

$$150 = k\left(\frac{5}{32}\right) \quad \Rightarrow \quad k = 960\ \frac{N}{m}.$$

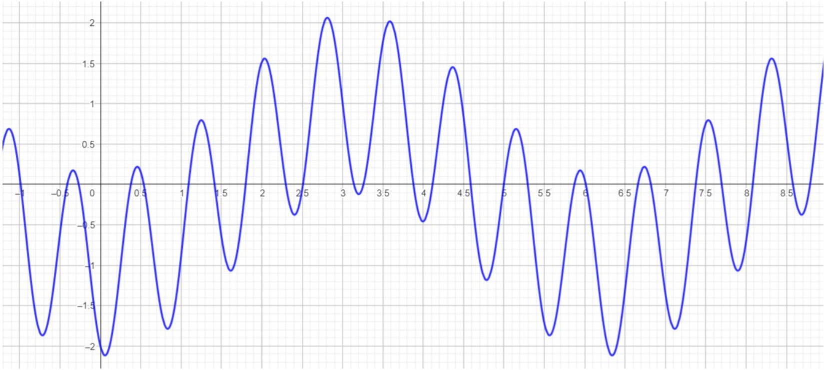
De la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + f(t)$$

$$\begin{cases} x'' + 64x = -63\cos(t) \\ x(0) = -2, \quad x'(0) = -4 \end{cases}$$

La solución de PVI anterior es

$$x(t) = -\cos(8t) - \frac{1}{2}\sin(8t) - \cos(t)$$

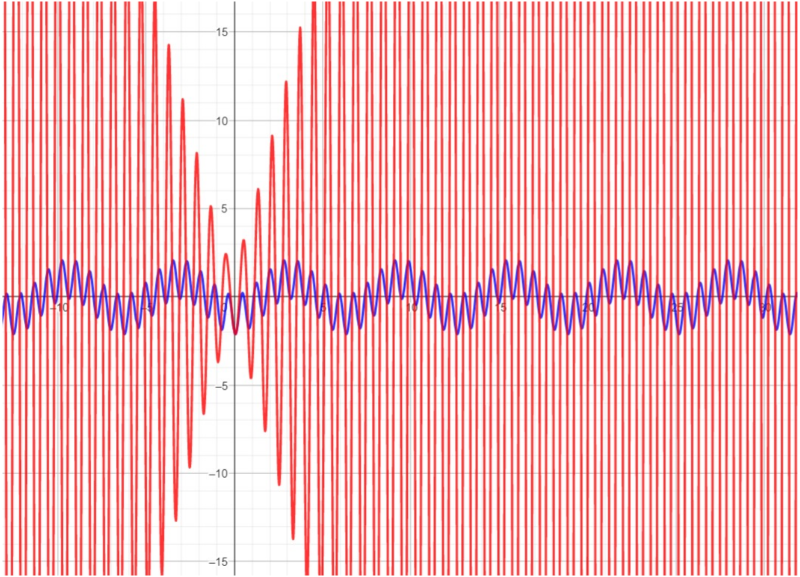


Podemos comparar el resultado anterior con el resultado de la ecuación

$$\begin{cases} x'' + 64x = -63\cos(8t) \\ x(0) = -2, \quad x'(0) = -4 \end{cases}$$

la cual está en resonancia pura (¿Por qué?). En este caso el resultado es:

$$x(t) = -2\cos(8t) - \frac{1}{2}\sin(8t) - \frac{63}{16}t\sin(8t)$$


15
10
5
−5
−10
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

Conclusiones

1. Los sistemas masa resorte también pueden ser forzados.
2. La teoría de ecuaciones diferenciales de segundo orden permite determinar las soluciones para los modelos masa-resorte y los ciruitos RLC.
3. Cuando la frecuencia natural del resorte es igual a la frecuencia de la fuerza externa se produce resonancia, es decir, la amplitud de la vibración es cada vez mayor.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA