Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales de orden superior. Parte I

Semana 04: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Objetivos

- **Modelar** el problema de caída de objetos con resistencia del aire.
- **Resolver** el problema de caída de objetos con resistencia del aire usando EDO.
- **Identificar** EDOs lineales homogéneas de orden superior.
- **Expresar** EDOs lineales de orden superior en términos de operadores diferenciales.
- **Determinar** si las soluciones de una EDO homogénea son linealmente independientes (LI) utilizando el Wronskiano

UTEC

CAÍDA DE OBJETOS CON RESISTENCIA DEL AIRE

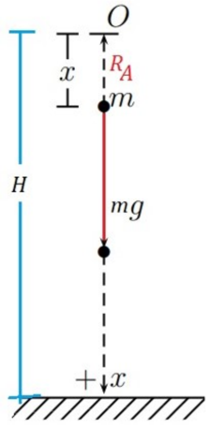
1

Logro

- **Modelar** el problema de caída de objetos con resistencia del aire. (L.3.4.2.13)
- **Resolver** el problema de caída de objetos con resistencia del aire usando EDO. (L.3.4.2.14)

Resistencia no lineal del aire

Supongamos que un objeto de masa m se suelta de una altura H. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea del cuerpo, se tiene:



Dónde

- v: velocidad del objeto
- g: gravedad
- R_A: kv^2

Usando la segunda ley de Newton, se tiene

$$m\frac{dv}{dt} = mg - R_A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \qquad \text{EDO no lineal}$$

Podemos resolver esta ecuación por separación de variables

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{m}{gm - kv^2} dv = \int dt + C$$

La integral de la izquierda puede resolverse usando sustitución trigonométrica

$$v = \sqrt{\frac{gm}{k}} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad dv = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cos(\alpha) d\alpha$$

por lo tanto

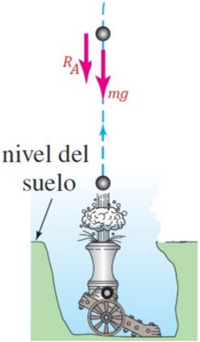
$$\int \frac{m}{gm - kv^2} dv = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \sec(\alpha) d\alpha = \sqrt{\frac{m}{gk}} \ln|\sec \alpha + \tan \alpha| = \sqrt{\frac{m}{gk}} \ln \left| \frac{\sqrt{gm} + v\sqrt{k}}{\sqrt{gm - kv^2}} \right|$$

Suponiendo que el objeto parte del reposo: $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Finalmente se obtiene una solución implícita

$$e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} = \frac{\sqrt{gm} + v\sqrt{k}}{\sqrt{gm - kv^2}}$$

Para el alumno

1. Una pequeña bala de cañon que pesa 16 libras se dispara verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de $300\ pies/s$, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, siendo la constante de proporcionalidad $k = 0.0003$ y $g = 32\ pies/s^2$,
   a) Encuentre la velocidad de la bala en un instante t.
   b) Determine la altura máxima que alcanza la bala.



ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

2

Logro

- **Identifica** EDOs lineales homogéneas de orden superior. (L.4.4.2.1)
- **Expresa** EDOs lineales de orden superior en términos de operadores diferenciales. (L.4.4.2.2)

Ecuaciones lineales homogéneas

Una EDO lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

se dice que es homogénea si es de la forma

$$\boxed{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,} \tag{1}$$

es decir, $g(x) = 0$. Si $g(x) \neq 0$ la EDO es no homogénea.

A su vez estas ecuaciones se separan en dos grupos: ecuaciones con **coeficientes constantes** y ecuaciones con **coeficientes variables.**

Operadores diferenciales

Llamamos a D **operador diferencial** puesto que convierte una función en su derivada:

$$Dy = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo

$$\text{Sea: } y(x) = 3\cos(5x) \quad \Rightarrow \quad Dy = -15\sin(5x)$$
$$\text{Sea: } y(x) = 2x^3 - 6x^2 \quad \Rightarrow \quad Dy = 6x^2 - 12x$$

Las derivadas de orden superior se escriben, en función del operador D, como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D^2y$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

Así, la expresión

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

se escribe como

$$a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y$$

Más aún, podemos definir el operador diferencial polinomial L como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x),$$

el cual es un operador lineal

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\} \quad \text{¡Verifique!}$$

Ejemplo

Sea la ecuación diferencial,

$$4y''' - 3y'' + 2y' - 7y = 3\cos(x) + x^2 - x$$

Se puede escribir como,

$$(4D^3 - 3D^2 + 2D - 7)y = 3\cos(x) + x^2 - x$$

En general, una ecuación no homogénea se puede escribir como

$$\boxed{Ly = g(x)}$$

Mientras que una ecuación homogénea se escribe como

$$\boxed{Ly = 0}$$

Teorema: Principio de superposición

Sean $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$ soluciones de una EDO lineal de n-ésimo orden. Entonces, la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k,$$

también es una solución de la ecuación siendo c_i constantes arbitrarias.

Ejemplo

Las funciones $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{7x}$ son soluciones de la ecuación $y'' - 9y' + 14y = 0$. Por el principio de superposición, la función

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{7x}$$

también es solución de la EDO.

3

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Logro

- **Determina** si las soluciones de una EDO homogénea son linealmente independientes (LI) utilizando el Wronskiano. (L.4.4.2.3)

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ es **linealmente dependiente** sobre un intervalo I si existen ciertas constantes c_1, c_2, $\ldots$, c_n **no todas nulas**, tales que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

Si el conjunto no es linealmente dependiente, entonces es **linealmente independiente.**

Definición: Funciones linealmente independientes

Un conjunto de funciones el linealmente independiente (LI) cuando,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

entonces que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ejemplo

Las funciones

$$f_1(x) = x^{1/2} + 5$$
$$f_2(x) = x^{1/2} + 5x$$
$$f_3(x) = x - 1$$
$$f_4(x) = x^2$$

son linealmente dependientes en el intervalo $(0, +\infty)$. En efecto:

$$1f_1 - 1f_2 + 5f_3 + 0f_4 = 0$$

Ejemplo

¿Las funciones $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$?

Wronskiano

Supogamos que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ posee al menos $n-1$ derivadas. El determiante

$$W(f_1,\ldots,f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Se llama **Wronskiano** de las funciones. El Wronskiano nos permitirá determinar si un conjunto de funciones son LI.

Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ soluciones de una EDO homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Este conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

para todo x en el intervalo I.

Definición: Conjunto fundamental de soluciones

Todo conjunto $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ de n soluciones linealmente independientes de una EDO homogénea de n-ésimo orden se llama conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo

Las funciones $y_1(x) = e^{3x}$, $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones de

$$y'' - 9y = 0; \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

Se observa que

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Por lo tanto, las soluciones son LI.

Ejemplo

Las funciones $y_1(x) = e^x \sin(x)$, $y_2(x) = e^x \cos(x)$ ¿Son linealmente independientes? Se observa que

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^x \sin(x) & e^x \cos(x) \\ e^x \sin(x) + e^x \cos(x) & e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \end{vmatrix} \\ &= -e^{2x} \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las funciones son LI en $(-\infty, +\infty)$.

Para el alumno

Compruebe que las funciones

$$y_1(x) = e^{-3x}, \qquad y_2(x) = e^{4x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

forman un conjunto fundamental de la ecuación

$$y'' - y' - 12y = 0.$$

Sugerencia: Debe demostrar que las funciones son soluciones y que son LI.

Conclusiones

1. Se determinó la solución de una ecuación diferencial para el modelo de la caída de un objeto con resistencia del aire y se analizó la influencia en el tiempo de caída.
2. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior se pueden clasificar como homogéneas y no homogéneas.
3. El Wronskiano ayuda a determinar si un conjunto de funciones son LI.
4. El orden de una EDO lineal determina la cantidad de funciones de su conjunto fundamental.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA