Ecuaciones diferenciales

Transformada de Laplace: Sistemas lineales

Semana 14: Teoría

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivos

- **Resolver** sistemas lineales de coeficientes constantes de orden superior utilizando la Transformada de Laplace.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1

Logros

- **Resuelve** sistemas lineales de coeficientes constantes de orden superior utilizando la Transformada de Laplace. (L.8.14.2.9)

Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con condiciones iniciales en $t = 0$, como por ejemplo,

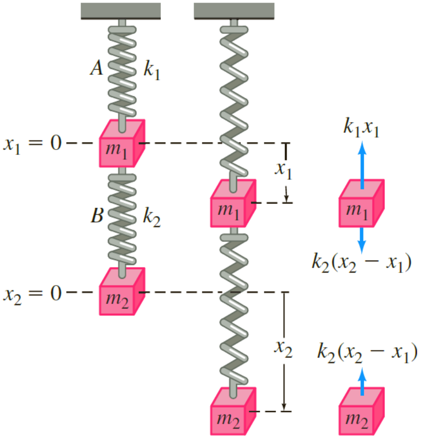
$$
\begin{aligned}
a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y &= f(t) \\
b_n x^{(n)} + b_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + b_0 x &= g(t),
\end{aligned}
$$

entonces

- La transformada de Laplace reduce el sistema a un conjunto de ecuaciones algebraicas de las funciones transformadas. En el ejemplo $Y(s)$ y $X(s)$.
- Resolvemos el sistema de ecuaciones algebraicas para cada una de las funciones transformadas.
- A continuación, obtenemos las transformadas inversas de Laplace de la manera habitual.

Ejercicios

1. Dado el sistema mostrado en la figura. Donde se muestra el sistema en equilibrio, en movimiento y las fuerzas respectivamente.



Entonces, el sistema que modela las posiciones está dado por

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1}$$

Resuelva este sistema utilizando la transformada de Laplace. Considere $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = m_2 = 1$. Además, las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \quad x_1'(0) = 1 \\ x_2(0) &= 0, \quad x_2'(0) = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

Solución: Reemplazando valores en la ecuación (1)

$$
\begin{aligned}
x_1'' + 10x_1 - 4x_2 &= 0 \\
x_2'' - 4x_1 + 4x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{x_1''\} + 10\mathscr{L}\{x_1\} - 4\mathscr{L}\{x_2\} &= 0 \\
\mathscr{L}\{x_2''\} - 4\mathscr{L}\{x_1\} + 4\mathscr{L}\{x_2\} &= 0.
\end{aligned}
$$

Sea $\mathscr{L}\{x_1\} = X_1(s)$ y $\mathscr{L}\{x_2\} = X_2(s)$, entonces

$$
\begin{aligned}
s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\
s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) - 4X_1(s) + 4X_2(s) &= 0
\end{aligned}
$$

Reemplazando las condiciones iniciales (2) y factorizando

$$
(s^2 + 10)X_1(s) - 4X_2(s) = 1 \tag{3}
$$

$$
-4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) = -1 \tag{4}
$$

Multiplicando (3) por (s^2+4), (4) por 4 y sumando las ecuaciones resultantes se elimina $X_2(s)$:

$$
\begin{aligned}
(s^2+4)(s^2+10)X_1(s) - 16X_1(s) &= (s^2+4) - 4 \\
\Rightarrow \quad \Big[(s^2+4)(s^2+10) - 16\Big] X_1(s) &= s^2 \\
\Rightarrow \quad \Big[s^4 + 14s^2 + 24\Big] X_1(s) &= s^2
\end{aligned}
$$

$$
X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{1}{5}\frac{1}{s^2+2} + \frac{6}{5}\frac{1}{s^2+12} \tag{5}
$$

Reemplazando (5) en (3)

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \frac{s^2+10}{4}\left[\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)}\right] - \frac{1}{4} \\
&= \frac{(s^2+10)s^2 - (s^2+2)(s^2+12)}{4(s^2+2)(s^2+12)} \\
&= \frac{-4s^2-24}{4(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)}
\end{aligned}
$$

Por fracciones parciales

$$X_2(s) = -\frac{2}{5}\frac{1}{s^2+2} - \frac{3}{5}\frac{1}{s^2+12} \tag{6}$$

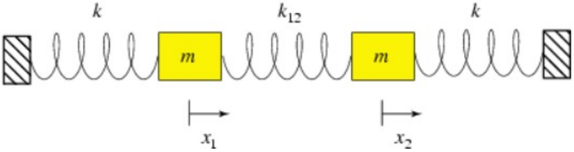
Finalmente, de (5)

$$\begin{aligned} x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\} &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\sin\left(\sqrt{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{5}\sin\left(2\sqrt{3}t\right). \end{aligned}$$

Similarmente, de (6)

$$\begin{aligned} x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_2(s)\} &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\sin\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{10}\sin\left(2\sqrt{3}t\right). \end{aligned}$$

2 En la semana 11 se halló que el modelo del siguiente sistema



está dado por

$$\begin{aligned} mx_1'' &= -(k+k_{12})x_1 + k_{12}x_2 \\ mx_2'' &= k_{12}x_1 - (k+k_{12})x_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Resuelva el sistema utilizando la transformada de Laplace. Considere $m = 1$, $k = 4$, $k_{12} = 5$. Además

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad x_1'(0) = 1 \\ x_2(0) &= 2, \quad x_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Observación: ¿Cómo se resolvería estos sistemas utilizando el método de autovalores y autovectores?.

Solución: Reemplazando valores en la ecuación (7)

$$\begin{aligned} x_1'' &= -9x_1 + 5x_2 \\ x_2'' &= 5x_1 - 9x_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Tomando transformada de Laplace tenemos:

$$\begin{aligned} s^2\mathscr{L}\{x_1(t)\} - sx_1(0) - x_1'(0) &= -9\mathscr{L}\{x_1(t)\} + 5\mathscr{L}\{x_2(t)\} \\ s^2\mathscr{L}\{x_2(t)\} - sx_2(0) - x_2'(0) &= 5\mathscr{L}\{x_1(t)\} - 9\mathscr{L}\{x_2(t)\} \end{aligned}$$

Obteniendo

$$(s^2+9)\mathscr{L}\{x_1(t)\} - 5\mathscr{L}\{x_2(t)\} = s+1 \tag{10}$$

$$-5\mathscr{L}\{x_1(t)\} + (s^2+9)\mathscr{L}\{x_2(t)\} = 2s \tag{11}$$

De (11)

$$\mathscr{L}\{x_2(t)\} = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s^2+9}\mathscr{L}\{x_1(t)\} \tag{12}$$

Reemplazando este último resultado en (10)

$$(s^2+9)\mathscr{L}\{x_1(t)\} - 5\left(\frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s^2+9}\mathscr{L}\{x_1(t)\}\right) = s+1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(s^2+9-\frac{25}{s^2+9}\right)\mathscr{L}\{x_1(t)\} &= s+1+\frac{10s}{s^2+9} \\
\left((s^2+9)^2-25\right)\mathscr{L}\{x_1(t)\} &= (s+1)(s^2+9)+10s \\
(s^2+14)(s^2+4)\mathscr{L}\{x_1(t)\} &= s^3+s^2+19s+9
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}\{x_1(t)\} = \frac{s^3+s^2+19s+9}{(s^2+14)(s^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-s+1}{s^2+14}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3s+1}{s^2+4}\right) \tag{13}$$

Reemplazando (13) en (12)

$$\mathscr{L}\{x_2(t)\} = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s^2+9}\left(\frac{s^3+s^2+19s+9}{(s^2+14)(s^2+4)}\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{x_2(t)\} &= \frac{2s(s^2+14)(s^2+4)+5(s^3+s^2+19s+9)}{(s^2+9)(s^2+14)(s^2+4)} \\
&= \frac{2s^5+41s^3+5s^2+207s+45}{(s^2+9)(s^2+14)(s^2+4)} \\
&= \frac{2s^5+23s^3+5s^2+18s^3+207s+45}{(s^2+9)(s^2+14)(s^2+4)} \\
&= \frac{s^2(2s^3+23s+5)+9(s^3+23s+5)}{(s^2+9)(s^2+14)(s^2+4)} \\
&= \frac{(s^2+9)(2s^3+23s+5)}{(s^2+9)(s^2+14)(s^2+4)} \\
&= \frac{2s^3+23s+5}{(s^2+14)(s^2+4)}
\end{aligned}$$

Por fracciones parciales

$$\mathscr{L}\{x_2(t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{s-1}{s^2+14}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3s+1}{s^2+4}\right). \tag{14}$$

Tomando la transformada inversa de (13)

$$\begin{aligned} x_1(t) = &-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+14}\right\} + \frac{1}{2\sqrt{14}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{14}}{s^2+14}\right\} \\ &+ \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{2(2)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \end{aligned}$$

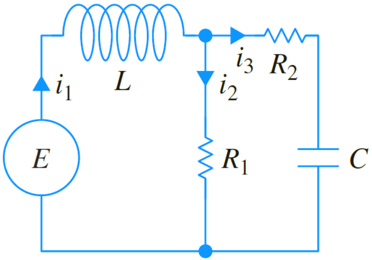
$$\Rightarrow \quad x_1(t) = -\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{14}t\right) + \frac{\sqrt{14}}{28}\sin\left(\sqrt{14}t\right) + \frac{3}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

Finalmente, de (14)

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+14}\right\} - \frac{1}{2\sqrt{14}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{14}}{s^2+14}\right\} + \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{1}{2(2)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad x_2(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{14}t\right) - \frac{\sqrt{14}}{28}\sin\left(\sqrt{14}t\right) + \frac{3}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$$

3 Determine un sistema de ecuaciones en términos de $i_2(t)$ y $i_3(t)$ del siguiente sistema



Resuelva el sistema considerando $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 0.2\ F$,

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Además, $i_2(0) = 0$ y $i_3(0) = 0$.

Solución: El sistema que modela las corrientes $i_2(t)$ y $i_3(t)$ está dado por

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$
$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0$$

Reemplazando los datos se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + 10i_2 &= 120 - 120\mathscr{U}(t-2) \\ -10\frac{di_2}{dt} + 5\frac{di_3}{dt} + 5i_3 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

sujeto a las condiciones $i_2(0) = 0$ y $i_3(0) = 0$. Por lo tanto

$$\mathscr{L}\{i_2'(t)\} = sX(s)$$
$$\mathscr{L}\{i_3'(t)\} = sY(s)$$

donde $X(s) = \mathscr{L}\{i_2(t)\}$ y $Y(s) = \mathscr{L}\{i_3(t)\}$

Aplicando la transformada de Laplace al sistema (15)

$$(s+10)X(s)+sY(s)=\frac{120}{s}-120\frac{e^{-2s}}{s} \tag{16}$$

$$-10sX(s)+(5s+5)Y(s)=0 \tag{17}$$

De (17),

$$Y(s)=\frac{2s}{s+1}X(s) \tag{18}$$

Reemplazando la ecuación (18) en (16):

$$(s+10)X(s)+s\left(\frac{2s}{s+1}\right)X(s)=\frac{120}{s}-120\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$\Big((s+10)(s+1)+2s^2\Big)X(s)=120\frac{s+1}{s}-120\frac{e^{-2s}(s+1)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad X(s)=120\frac{s+1}{s(3s+5)(s+2)}-120e^{-2s}\frac{s+1}{s(3s+5)(s+2)} \tag{19}$$

Haciendo la descomposición por fracciones parciales

$$X(s) = 120\left[\frac{1}{10s} + \frac{6}{5}\frac{1}{3s+5} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right] - 120e^{-2s}\left[\frac{1}{10s} + \frac{6}{5}\frac{1}{3s+5} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{12}{s} + \frac{48}{s+5/3} - \frac{60}{s+2} - e^{-2s}\left[\frac{12}{s} + \frac{48}{s+5/3} - \frac{60}{s+2}\right] \tag{20}$$

Reemplazando (19) en (17)

$$\begin{aligned} Y(s) &= 240\frac{1}{(3s+5)(s+2)} - 240e^{-2s}\frac{1}{(3s+5)(s+2)} \\ &= 240\left[\frac{3}{3s+5} - \frac{1}{s+2}\right] - 240e^{-2s}\left[\frac{3}{3s+5} - \frac{1}{s+2}\right] \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{240}{s+5/3} - \frac{240}{s+2} - e^{-2s}\left[\frac{240}{s+5/3} - \frac{240}{s+2}\right] \tag{21}$$

Aplicando la transformada inversa a (20)

$$
\begin{aligned}
i_2(t) =& 12\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 48\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5/3}\right\} - 60\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\
& - \left[12\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s}\right\} + 48\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+5/3}\right\} - 60\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+2}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Aplicando el teorema de traslación en el eje t

$$
i_2(t) = 12 + 48e^{-5t/3} - 60e^{-2t} - \left[12 + 48e^{-5(t-2)/3} - 60e^{-2(t-2)}\right]\mathscr{U}(t-2)
$$

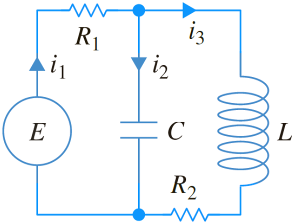
Similarmente, de (21)

$$
\begin{aligned}
i_3(t) =& 240\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5/3}\right\} - 240\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\
& - \left[240\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+5/3}\right\} - 240\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s+2}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad i_3(t) = 240e^{-5t/3} - 240e^{-2t} - \left[240e^{-5(t-2)/3} - 240e^{-2(t-2)}\right]\mathscr{U}(t-2)
$$

Para el alumno

Determine un sistema de ecuaciones en términos de la carga en el capacitor $q(t)$ y la corriente $i_3(t)$ del siguiente sistema



Determine la carge $q(T)$ considerando $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 1\ F$,

$$E(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 50e^{-t}, & t \geq 1. \end{cases}$$

Además, $q(0) = 0$ y $i_3(0) = 0$.

Respuesta: El sistema es

$$R_1\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q+R_1 i_3=E(t)$$
$$L\frac{di_3}{dt}+R_2 i_3-\frac{1}{C}q=0$$

Carga en el capacitor

$$q(t)=50e^{-t}\sin(t-1)\mathscr{U}(t-1)$$

Conclusiones

1. La transformada de Laplace también es útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.
2. La transformada de Laplace convierte un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA