Ecuaciones diferenciales

Transformada de Laplace

Semana 12: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Objetivos

- **Determinar** la transformada de Laplace de una función mediante definición y reconocer la linealidad de la transformada.

1

PRELIMINARES

Integrales impropias

Dada una función continua definida en $[a, +\infty]$, podemos definir la *integral impropia*:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{K\to\infty} \int_a^K f(t)\,dt$$

siempre que dicho límite exista.
La integral impropia goza de las siguientes propiedades:

$$\int_a^\infty [f(t) \pm g(t)]\,dt = \int_a^\infty f(t)\,dt \pm \int_a^\infty g(t)\,dt$$
$$\int_a^\infty c\cdot f(t)\,dt = c\cdot \int_a^\infty f(t)\,dt$$

siempre y cuando todas las integrales involucradas existan.

Algunos límites conocidos

En esta sección recordaremos algunos límites que nos serán de utilidad en el desarrollo del tema que veremos hoy.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > 0$, se tiene:

$$\lim_{K \to \infty} K^n e^{-sK} = \lim_{K \to \infty} \frac{K^n}{e^{sK}} = 0$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s < 0$, se tiene:

$$\lim_{K \to \infty} K^n e^{-sK} = +\infty$$

- Sea f una función acotada y $s > 0$, entonces:

$$\lim_{K \to \infty} e^{-sK} f(K) = \lim_{K \to \infty} \frac{f(K)}{e^{sK}} = 0$$

  Notemos que podemos reemplazar f por cualquier función acotada que conozcamos, por ejemplo $\sin, \cos, \ldots$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

2

La transformada de Laplace

Definición

Sea f una función definida para todo $t \geq 0$. Definimos la **transformada de Laplace** de f, $\mathscr{L}\{f(t)\}$, como:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt}_{\text{El valor de esta integral depende de } s} \tag{1}$$

siempre que la integral exista.

De la definición notemos que para cada valor de s la integral (1) puede o no existir, en ese sentido, la transformada de Laplace de f está definida solo para ciertos valores de s.

Observación: Usualmente denotaremos con letras minúsculas las funciones y con mayúsculas sus respectivas transformadas. Es decir:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= F(s) \\
\mathscr{L}\{g(t)\} &= G(s) \\
\mathscr{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\
\vdots \quad &= \quad \vdots
\end{aligned}$$

Ejemplo

Determine $\mathscr{L}\{1\}$.

Solución: De la definición tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}dt &= \lim_{K\to\infty}\int_0^{K} e^{-st}dt \\
&= \lim_{K\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^K dt \\
&= \lim_{K\to\infty}\left[-\frac{e^{-Ks}}{s}+\frac{1}{s}\right] \\
&= -\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-Ks}}{s}+\lim_{K\to\infty}\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

De donde, si $s > 0$ entonces $\lim\limits_{K\to\infty}\frac{e^{-Ks}}{s} = 0$ y por lo tanto:

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0.$$

En adelante, adoptaremos la siguiente notación:

$$\lim_{K\to\infty} h(t)\Big|_0^K = h(t)\Big|_0^\infty$$

Ejemplo

Calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si:

$$f(t) = \begin{cases} 2, 0 \leq t < 3 \\ 6, 3 \leq t < 4 \\ 0, 4 \leq t < \infty \end{cases}$$

Solución: De la definición

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{2}$$

La integral se debe expresar en 3 partes:
$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^3 e^{-st}.(2)\, dt + \int_3^4 e^{-st}.(6)\, dt + \int_4^{\infty} e^{-st}.(0)\, dt$
Luego se calcula cada integral:
$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{2e^{-st}}{-s}|_0^3 + \frac{6e^{-st}}{-s}|_3^4 + 0$
$\mathscr{L}\{f(t)\} = -\frac{2e^{-3s}-2e^{0}}{s} - \frac{6e^{-4s}-6e^{-3s}}{s}$
efectuando, se obtiene:
$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{2+4e^{-3s}-6e^{-4s}}{s}.$

TL de algunas funciones elementales

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,, n \in \mathbb{N}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$

Linealidad de la transformada

- $\mathscr{L}$ es una transformación lineal

$$\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathscr{L}\{f(t)\}+b\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

Ejemplo:
Evalúe $\mathscr{L}\{(e^t+e^{-t})(e^t-e^{-t})\}$
Solución:
Usando diferencia de cuadrados:

$$\mathscr{L}\{e^{2t}-e^{-2t}\}$$

Por linealidad:

$$\mathscr{L}\{e^{2t}-e^{-2t}\}$$

y usando la tabla de transformadas:

$$\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}$$

Ejemplo

Evalúe $\mathscr{L}\{2e^{3t+\pi}+(t-3)^2\}$

Solución:

Desarrollando:

$$\mathscr{L}\{2e^{3t}.e^{\pi}+(t^2-6t+9)\}$$

Aquí se usa la propiedad de linealidad:

$$2e^{\pi}.\mathscr{L}\{e^{3t}\}+\mathscr{L}\{t^2\}-6\mathscr{L}\{t\}+\mathscr{L}\{9\}$$

y haciendo uso de la tabla de transformadas, se obtiene:

$$2e^{\pi}.\tfrac{1}{s-3}+\tfrac{2!}{s^3}-6.\tfrac{1}{s^2}+\tfrac{9}{s}$$

Ejercicios para el alumno

Halle las siguientes transformadas:

- $\mathscr{L}\{\sqrt{t^4+4t^2+4}+\sqrt{e^{4t}}\}$
- $\mathscr{L}\{6\sin(2t)cos(2t)-(3t)^3\}$

Halle las siguientes transformadas inversas:

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s^2-4s+2}{s^6}\right\}$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+9}{s^2-9}\right\}$

Respuestas:

- $\frac{6}{s^3}+\frac{2}{s}+\frac{1}{s-2}$
- $\frac{12}{s^2+16}-\frac{162}{s^4}$
- $t^3-\frac{t^4}{6}+\frac{t^5}{60}$
- $2\cosh(3t)+3\sinh(3t)$

PROBLEMA PARA EL ALUMNO

Calcule $\mathscr{L}\{t\}$.

Solución: De la definición

$$\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt \tag{3}$$

Recordemos la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

En nuestro problema, escogemos:

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

y de esa manera la integral (3) queda:

$$\int_0^\infty e^{-st}t\,dt = -\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^\infty - \left(-\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\,dt\right)$$

$$= -\lim_{K\to\infty}\frac{Ke^{-sK}}{s} - \left(-\frac{0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s}\right) + \frac{1}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\,dt}_{\mathscr{L}\{1\}}$$

Si consideremos $s > 0$, tenemos $\lim_{K\to\infty}\frac{Ke^{-sK}}{s} = 0$ y así:

$$\int_0^\infty e^{-st}t\,dt = 0 + 0 + \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}\,(s > 0)$$

PROBLEMA PARA EL ALUMNO

Evalúe $\mathscr{L}\{\sin 2t\}$

Solución: Tenemos:

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin 2t \, dt$$

Nuevamente utilizamos integracion por partes, tomando $u = \sin 2t$ y $dv = e^{-st}$, luego:

$$u = \sin 2t \Rightarrow du = 2\cos 2t$$

$$dv = e^{-st} dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s} dt$$

De esta manera, la integral pedida queda:

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin 2t \, dt = -\left.\frac{e^{-st}\sin 2t}{s}\right|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t \, dt$$

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} - \left.\frac{e^{-st}\sin 2t}{s}\right|_0^\infty - \left(-\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt\right)$$
$$= -\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\sin 2K}{s} + \frac{\sin 0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s} + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

Considerando $s > 0$, $\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\sin 2K}{s} = 0$, luego:

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = 0 + 0 + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt = \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t \tag{4}$$

De esta manera, para completar el ejercicio necesitamos calcular la integral en azul. Para ello, utilizamos una vez más integración por partes con $u = \cos 2t$ y $dv = e^{-st}$:

$$u = \cos 2t \Rightarrow du = -2\sin 2t$$
$$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t &= -\left.\frac{e^{-st}\cos 2t}{s}\right|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t \\
&= -\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\cos 2K}{s} + \frac{\cos 0\cdot e^{-s\cdot 0}}{s} - \frac{2}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t}_{\mathscr{L}\{\sin 2t\}}
\end{aligned}
$$

Para $s > 0$, tenemos $\lim_{K\to\infty}\frac{e^{-sK}\cos 2K}{s} = 0$ y luego:

$$
\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t = 0 + \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\} \tag{5}
$$

Reemplazando (5) en (4) :

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s}\mathscr{L}\{\sin 2t\}\right]$$

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA