Ecuaciones diferenciales

Problema de mezclas

Semana 03: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Objetivos

- **Identificar** y **Modelar** el problema de mezcla como una EDO de separación de variables o EDO lineal de primer orden.
- **Modelar** el problema de mezclas como una EDO de separación de variables o EDO lineal de primer orden.

1

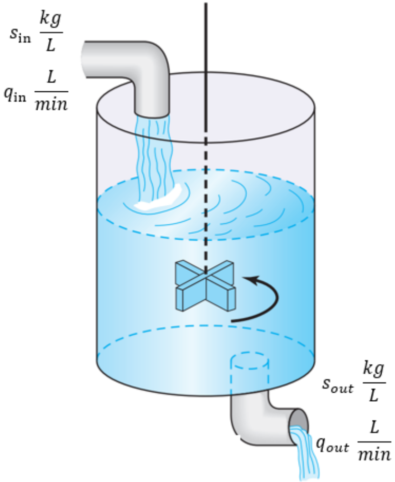
MODELAMIENTO DEL PROBLEMA

Logros

- **Identifica** y **modela** el problema de mezcla como una EDO de separación de variables o EDO lineal de primer orden. (L.3.3.1.3)

Modelado de una mezcla salina

- Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden que define la cantidad de sal contenida en la mezcla.
- Supongamos que, inicialmente, se tiene un recipiente con V litros de agua y m_0 kilos de sal diluida totalmente.



- Además, convengamos de que ingresa q_{in} litros por minutos de otra solución salina de s_{in} kilos por litro y que de la solución resultante, totalmente diluida, sale q_{out} litros por minuto.
- Si $A(t)$ denota la cantidad de sal contenida en el recipiente en el instante "t", la ecuación que rigue la dicha cantidad está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out}$$

donde R_{in} y R_{out} son la razón de entrada y salida de la sal, respectivamente. Donde

$$R_{in} = \underbrace{\left(q_{in}\frac{litros}{minuto}\right)}_{\text{Velocidad de entrada}}\underbrace{\left(s_{in}\frac{kilos}{litros}\right)}_{\text{Concentración de entrada}}$$

y de forma análoga para R_{out}.

Análisis del problema

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\textit{Razón de}}{entrada}\right) - \left(\frac{\textit{Razón de}}{salida}\right)$$

Para el análisis tenga en cuenta las siguientes preguntas

- ¿Cuándo un problema de Mezclas se resuelve con el método de variables separables y cuándo se resuelve con EDO Lineal?
- ¿Se vaciará el tanque luego de un tiempo?
- ¿La concentración de sal está aumentando o disminuyendo en el tiempo?
- Luego de mucho tiempo ¿Cuál será la concentración de la mezcla?
- ¿Cuál es el comportamiento de la función solución que define la cantidad de sal?

Analizar el volumen de la mezcla

Un aspecto clave que determina el comportamiento de la solución es el hecho de si el volumen inicial de la mezcla se mantiene o varía.

- **El volumen se mantiene:** En este caso el flujo de entrada es igual al flujo de salida, es decir, la cantidad de litros que entra por minuto es igual a la cantidad que sale por minuto.
  La concentración de la salmuera de entrada y salida no necesitan ser iguales.
- **El volumen no se mantiene:** En este caso el flujo de entrada no es igual al flujo de salida, es decir, la cantidad de litros que entra por minuto no es igual a la cantidad que sale por minuto.
  Esto ocasionará que el recipiente disminuya o aumente su volumen en el tiempo.

EJERCICIOS

2

Logros

- **Resuelve** el problema de mezclas en un solo tanque usando los métodos de variables separables y ecuaciones lineales. (L.3.3.1.4)

1 Supongamos que un tanque mezclador de 300 galones inicialmente contiene $50\ lb$ de salmuera. Otra solución de salmuera entra al tanque con una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada la concentración de sal es de 2 libras por galón. La velocidad de salida de la salmuera es la misma que la velocidad de entrada. Encuentre la cantidad de sal en el instante t.

Solución:

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out}$$

$$R_{in} = \left(2\frac{lb}{gal}\right)\left(3\frac{gal}{min}\right) = 6\frac{lb}{min}$$

$$R_{out} = \left(\frac{A}{300}\frac{lb}{gal}\right)\left(3\frac{gal}{min}\right) = \frac{A}{100}\frac{lb}{min}.$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

La ecuación es de variables separables

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dA}{6 - \frac{A}{100}} = \int dt$$

Integrando se obtiene que

$$-100 \ln \left| 6 - \frac{A}{100} \right| = t + C_0,$$

por lo tanto

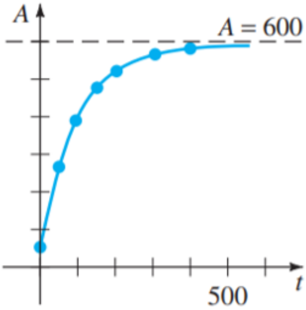
$$A(t) = 600 - Ce^{-\frac{t}{100}}.$$

Usando la condición inicial,

$$A(0) = 50 = 600 - Ce^{-\frac{0}{100}} \quad \Rightarrow \quad C = 550$$

Finalmente, la cantidad de sal en el recipiente está dado por

$$A(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$$



- La gráfica muestra el comportamiento de la cantidad de sal en el tanque en todo instante "t". Se puede observar que $A(t) \to 600$ conforme $t \to \infty$.
- Este resultado es lo que se espera intuitivamente puesto que después de un gran lapso de tiempo la cantidad de libras de sal en la solución debe ser

$$(300\ gal)\left(2\frac{lb}{gal}\right) = 600\ lb$$

2 En el ejercicio anterior, suponga ahora que la velocidad de salida de la mezcla es de 2 galones por minuto.

Solución: El volumen no se mantiene constante

$$V = 300\ gal + \left(3\frac{gal}{min} - 2\frac{gal}{min}\right)(t\ min) = 300 + t$$

Por lo tanto, la concentración de la salmuera que sale es

$$s_{out} = \frac{A}{300+t}\frac{lb}{gal}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt} = 6 - 2\left(\frac{A}{300+t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2}{300+t}A = 6$$

Hallamos el factor integrante de la ecuación lineal

$$\mu = e^{\int \frac{2}{300+t}dt} = e^{2\ln(300+t)} = (300+t)^2$$

Luego de multiplicar por el factor integrante se tiene

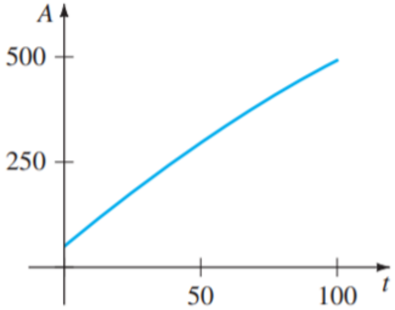
$$\frac{d}{dt}\left[(300+t)^2 A\right] = 6(300+t)^2$$
$$\int d\left[(300+t)^2 A\right] = \int 6(300+t)^2 dt$$
$$(300+t)^2 A = 2(300+t)^3 + C$$

Usando la condición inicial,

$$(300+0)^2 50 = 2(300+0)^3 + C \quad \Rightarrow \quad C = -4.95 \times 10^7$$

Finalmente, la cantidad de sal en el recipiente está dado por

$$A(t) = 600 + 2t - 4.95 \times 10^7 (300+t)^{-2}$$



La gráfica muestra el comportamiento de la cantidad de sal en el tanque en todo instante "t". Se puede observar que $A(t) \to \infty$ conforme $t \to \infty$.

3 La corriente sanguínea lleva un medicamente hacia el interior de un órgano a razón de $3\ cm^3/s$ y sale de él a la misma velocidad. El órgano tiene un volumen líquido de $125\ cm^3$, si la concentración del medicamento en la sangre que entra en el órgano es de $0.2\ g/cm^3$ ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante "t", si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento?¿Cuándo la concentración del medicamento en el órgano será de $0.1\ g/cm^3$?

Solución: Sea $x(t)$ la cantidad de gramos de medicamento en el instante t, entonces

$$\frac{dx}{dt} = 3(0.2) - 3\left(\frac{x}{125}\right)$$

La ecuación es de variables separables

$$\frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{3x}{125} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{75 - 3x}{125}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{75 - 3x} = \frac{dt}{125} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{75 - 3x} = \frac{dt}{125}$$

Integrando, se obtiene

$$-\frac{1}{3}\ln|75-3x| = \frac{t}{125}+C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(75-3x) = -\frac{3t}{125}+C_2$$

$$\Rightarrow \quad 75-3x = C_3 e^{-\frac{3t}{125}} \quad \Rightarrow \quad x = 25 - C_4 e^{-\frac{3t}{125}}$$

Usando la condición inicial,

$$x(0) = 25 - C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 25,$$

Así, la cantidad de de medicamento en el órgano está dado por

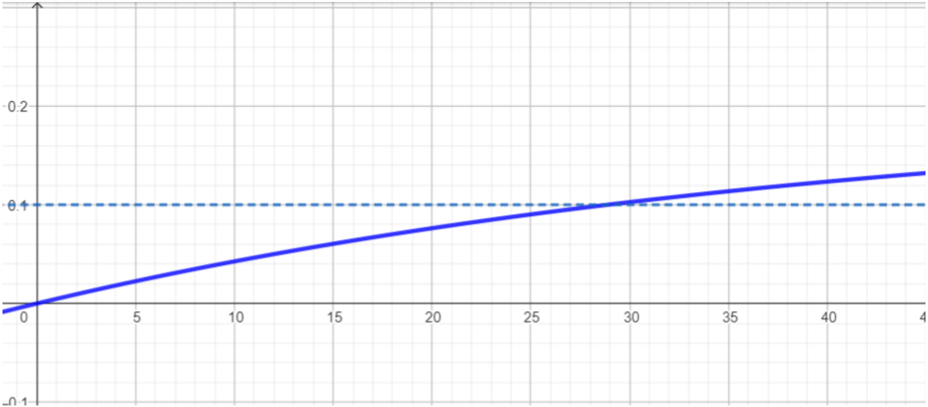
$$x(t) = 25 - 25e^{-\frac{3t}{125}}$$

La concentración en cualquier momento está dado por

$$\frac{x(t)}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-\frac{3t}{125}}$$

Ahora, se busca el tiempo en el que la concentración es $0.1\ g/cm^3$:

$$0.1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-\frac{3t}{125}} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{125}{3}\ln(0.5) = 28.881\ s$$



La gráfica muestra el comportamiento de la concentración del medicamento en el órgano en todo instante “t”. ¿A dónde tiende la concentración cuando $t \to \infty$?

Ejercicio para el alumno

1. En un tanque que contiene $500\ gal$ de agua, inicialmente se disuelven $100\ g$ de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de $4\ gal/min$ y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera a razón de $5\ gal/min$. Considerando que la solución que entra tiene sal con una concentración de $1\ g/gal$, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos.

   Solución:

   El volumen no se mantiene constante

$$V = 500\ gal + \left(4\frac{gal}{min} - 5\frac{gal}{min}\right)(t\ min) = 500 - t$$

   Por lo tanto, si $A(t)$ denota la cantidad de sal en el tanque, entonces

$$\frac{dA}{dt} = (4)(1) - 5\left(\frac{A}{500 - t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} + \left(\frac{5}{500 - t}\right)A = 4$$

Hallamos el factor integrante de la ecuación lineal

$$\mu = e^{\int \frac{5}{500-t}dt} = e^{-5\ln(500-t)} = (500-t)^{-5}$$

Luego de multiplicar por el factor integrante se tiene

$$\frac{d}{dt}\left[(500-t)^{-5}A\right] = 4(500-t)^{-5}$$

$$\int d\left[(500-t)^{-5}A\right] = \int 4(500-t)^{-5}dt$$

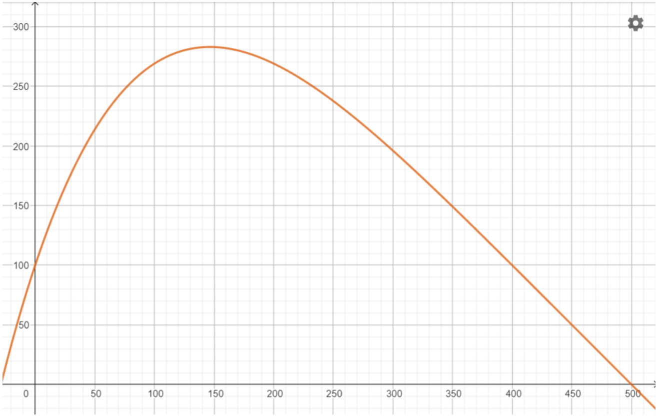
$$(500-t)^{-5}A = (500-t)^{-4} + C$$

Usando la condición inicial,

$$(500-0)^{-5}(100) = (500-0)^{-4} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{400}{500^5}$$

Finalmente, la cantidad de sal en el recipiente está dado por

$$A(t) = 500 - t - \frac{400}{500^5}(500-t)^5$$



La gráfica muestra el comportamiento de la cantidad de sal en el tanque en todo instante “t”. ¿Tiene sentido analizar la gráfica después de $t = 500$? ¿Qué pasa en este punto? ¿Cuánto es la cantidad máxima de sal que el tanque llega a contener y en que momento se da?

Ejercicio para el alumno

2 Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/minuto y la solución bien batida sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que debe transcurrir para que la concentración del colorante en el tanque alcance el 1 % de su valor inicial.

Respuesta: 460.52 minutos

Conclusiones

1. Los problemas de mezclas en tanques se resuelven con ecuaciones diferenciales de variables separables si la entrada tiene el mismo caudal que la salida, es decir, cuando el volumen es constante, pero si no lo es, la ecuación diferencial es lineal y se debe usar el factor integrante.
2. Es importante hacer un análisis previo al cálculo para interpretar el problema y lo que sucederá en el tiempo, de este modo, se puede precedir el comportamiento de la solución.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA