Ecuaciones diferenciales

Transformada de Laplace. Parte V

Semana 14: Auditorio

Profesores del curso:
Hermes Pantoja Carhuavilca
Sergio Quispe Rodríguez
Patricia Reynoso Quispe
Cristina Navarro Flores
Orlando Galarza Gerónimo
César Barraza Bernaola
Daniel Camarena Pérez

Índice

Objetivo

- **Resolver** ecuaciones diferenciales utilizando la propiedad de la derivada de una transformada.

DERIVADA DE UNA TRANSFORMADA

1

Logro

- **Resuelve** ecuaciones diferenciales utilizando la propiedad de la derivada de una transformada. (L.8.13.2.7)

Recordando

Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{1}$$

La forma inversa de este teorema está dado por

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a) \tag{2}$$

Además, el teorema anterior se puede escribir, de forma equivalente, como

$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\} \tag{3}$$

Derivada de una transformada

Suponiendo que $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe y que es posible intercambiar el orden de diferenciación e integración, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-st}f(t)\right]dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt = -\mathscr{L}\{tf(t)\}.\end{aligned}$$

Es decir

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \tag{4}$$

Podemos usar el resultado (4) para encontrar la transformada de Laplace de $t^2f(t)$:

$$\mathscr{L}\{t^2f(t)\} = \mathscr{L}\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Teorema 1: Derivadas de las transformaciones

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$ entonces

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \tag{5}$$

Ejemplo: Si

$$f(t) = \sin(kt), \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

entonces

$$\mathscr{L}\{t \sin(kt)\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\sin(kt)\} - \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$$

Observación: Para calcular la transformada de Laplace de una función de la forma

$$f(t) = t^n e^{at}$$

podemos usar el primer teorema de traslación (traslación en el eje s) o el teorema 1 de arriba.

Ejemplo

Usando el teorema de traslación en el eje s,

$$\mathscr{L}\{te^{3t}\} = \mathscr{L}\{t\}|_{s\to s-3} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s\to s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Mientras que, del teorema 1,

$$\mathscr{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Ejercicios

1. **Un problema de valor inicial.** Resuelva $y'' + 16y = \cos(4t)$, sujeto a $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Solución

Aplicando la transformada de Laplace

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 16Y(s) = \frac{s}{s^2+16}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}.$$

Del ejemplo anterior, $\mathscr{L}\{t\sin(kt)\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$. Por lo tanto, para $k = 4$,

$$\mathscr{L}\{t\sin(4t)\} = \frac{8s}{(s^2+16)^2}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t)$$

2 Resuelva $y'' + 16y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos(4t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

Solución

La ecuación es

$$y'' + 16y = \cos(4t) - \cos(4t)\mathscr{U}(t-\pi).$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 16\mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{\cos(4t) - \cos(4t)\mathscr{U}(t-\pi)\} \\ (s^2+16)\mathscr{L}\{y\} &= 1 + \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos(4(t+\pi))\} \\ (s^2+16)\mathscr{L}\{y\} &= 1 + \frac{s}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+16}e^{-\pi s} \\ \mathscr{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}\mathscr{L}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} = \frac{1}{8}t\,\text{sin}(4t).$$

Ahora, utilizando la forma inversa del teorema de traslación en el eje t:

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathscr{U}(t-a),$$

entonces, tomando

$$F(t) = \frac{s}{(s^2+16)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{8}t\,\text{sin}(4t)$$

se tiene que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s}\right\} = \frac{1}{8}(t-\pi)\,\text{sin}\left(4(t-\pi)\right)\mathscr{U}(t-\pi)$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{8}t\sin(4t) - \frac{1}{8}(t-\pi)\sin(4t)\mathscr{U}(t-\pi)$$

Para el alumno

Considere un circuito RLC con voltaje constante E_0. Utilice la transformada de Laplace para hallar la carga si se sabe que $q(0) = 0$, $i(0) = 0$.

Solución:

La ecuación del sistema es

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}.$$

Sea $2\lambda = \frac{R}{L}$ y $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, entonces

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega^2 q = \frac{E_0}{L}.$$

$$q(t) = \begin{cases} E_0 C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\sinh\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t\right)\right)\right], & \lambda > \omega \\ E_0 C\left[1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\right], & \lambda = \omega \\ E_0 C\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\cosh\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}\sinh\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right)\right)\right], & \lambda < \omega \end{cases}$$

Conclusiones

1. Las propiedades de la transformada de Laplace nos permiten resolver ecuaciones diferenciales más fácilmente.
2. Es importante reconocer la forma de las funciones en las propiedades para calcular la transformada inversa.
3. El método de la transformada de Laplace es sencillo de seguir, la dificultad radica en la descomposición de fracciones parciales.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA