

Ecuaciones diferenciales

Modelamiento con
EDOs de primer orden

Semana 04: Auditorio

Profesores del curso:

Hermes Pantoja Carhuavilca

Sergio Quispe Rodríguez

Patricia Reynoso Quispe

Cristina Navarro Flores

Orlando Galarza Gerónimo

César Barraza Bernaola

Daniel Camarena Pérez



Profesores: Utec-Ciencias

Índice

- 1 Ecuación logística
- 2 Circuitos eléctricos



Objetivos

- **Modelar** el problema de la ecuación logística.
- **Modelar** el problema de circuitos eléctricos RC.
- **Resolver** el problema de la ecuación logística como una EDO.
- **Resolver** el problema de circuitos eléctricos RC como una EDO.

Ecuación Logística

1



Logro

- **Modela** el problema de la ecuación logística. (L.3.4.1.9)
- **Resuelve** el problema de la ecuación logística como una EDO. (L.3.4.1.11)

Ecuación logística

Alrededor de 1840 P.F. Verhulst, matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países, una de las ecuaciones que estudió fue **la ecuación logística**:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \quad a > 0, b > 0$$

cuya solución es **la función logística**. Usando el método de separación de variables, se obtiene:

$$\int \frac{dP}{P(a - bP)} = \int dt + C \quad \text{Use fracciones parciales}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \ln |P| - \frac{1}{a} \ln |a - bP| = t + c \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{P}{a - bP} \right| = at + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{P}{a - bP} = c_2 e^{at} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{ac_2}{bc_2 + e^{-at}}$$

Usando la condición inicial $P(0) = P_0$ entonces $c_2 = P_0/(a - bP_0)$. Por lo tanto

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

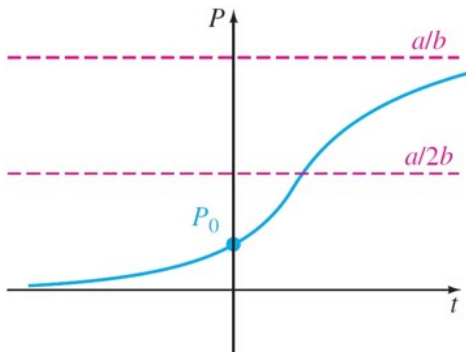


Figure: Se ha comprobado que las curvas logísticas predicen con bastante exactitud el crecimiento de cierto tipo de bacterias, protozoarios, pulgas de agua y moscas de la fruta.

Ejercicios

- 1 Suponga que un estudiante es portador del virus de la gripe y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que con la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados. Determine la cantidad de estudiantes infectados después de 6 días si además se observa que después de 4 días hay 50 estudiantes infectados.

Solución: Sea $x(t)$ el número de infectados en el día t , entonces

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x) \Rightarrow \frac{dx}{x(1000 - x)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1000 - x)} = kt + c_1$$

Usando fracciones parciales

$$\frac{1}{1000} \ln \left| \frac{x}{1000 - x} \right| = kt + c_1 \Rightarrow x(t) = \frac{1000c_2}{c_2 + e^{-1000kt}}$$

¿Cuál es la condición inicial? ¿Cómo calculamos el valor de k ? Termine de resolver el problema.

- 2 La población $P(t)$ de bacterias de una placa de Petri satisface la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = 2P \left(6 - \frac{P}{8000} \right)$$

donde t está medida en horas y la población inicial es de 700 bacterias.

- a) ¿Cuál es la capacidad de carga de la población?
- b) ¿Cuál es el tamaño de la población cuando esta crece más rápido?

Solución: Resolvemos la ecuación usando separación de variables. Obteniéndose como respuesta:

$$P(t) = \frac{48000A}{A + e^{-12t}}$$

Usando la condición inicial $P(0) = 700$, se obtiene que $A = 7/473$

Responda a las preguntas. Para la parte b), ¿En qué punto la función crece más?

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

2



Logro

- **Modela** el problema de circuitos eléctricos RC. (L.3.4.1.10)
- **Resuelve** el problema de circuitos eléctricos RC como una EDO. (L.3.4.1.12)

Circuitos eléctricos

El diagrama de un circuito RC en serie consiste en un resistor y un capacitor como se muestra en la siguiente figura.

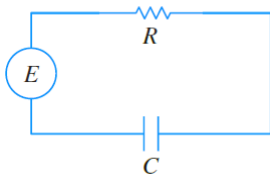


Figure: Circuito RC en serie

En este tipo de problemas, el objetivo es calcular la corriente I que circula por la malla, aunque lo primero que se halla es la carga. $I = \frac{dQ}{dt}$

- Para plantear la ecuación, primero debemos conocer la caída de voltaje de cada componente eléctrico.
- Utilizando la ley de mallas de Kirchoff, se plantea que

$$V(t) - V_R(t) - V_C(t) = 0$$

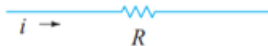
Por lo tanto,

$$V(t) - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

Finalmente, se obtiene

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t)$$

Resistor
resistencia R : ohms (Ω)
caída de voltaje: iR



Capacitor
capacitancia C : farads (f)
caída de voltaje: $\frac{1}{C} q$



Ejercicio

- 1 En un circuito RC en serie se tiene una fuente constante de 50 V, además $R = 100\Omega$ y $C = 5 \times 10^{-3} F$. Si inicialmente el condensador está descargado ¿Cuánto tiempo tarda aproximadamente en cargarse?

Solución

En este circuito no hay un inductor, $L = 0$, por lo tanto, la ecuación de la carga está dado por

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V(t).$$

Reemplazando valores

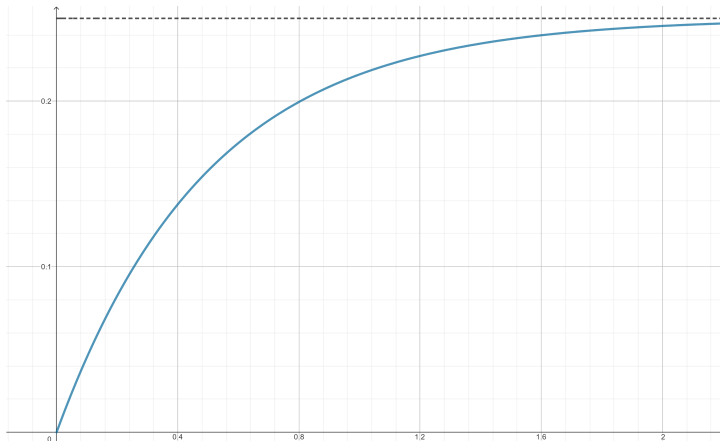
$$100 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{5 \times 10^{-3}} Q = 50 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{500 \times 10^{-3}} Q = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + 2Q = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$Q(t) = \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$$

Usando la condición inicial, $Q(0) = 0$, se obtiene que $C = -\frac{1}{4}$. Con lo cual

$$Q(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$



Conclusiones

- 1 Se demostró que la ecuación diferencial no lineal que estudia la población logística tiene un límite de crecimiento.
- 2 Por medio de las EDOs de primer orden se puede calcular la carga eléctrica de un circuito RC en serie.

Gracias

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

