Ecuaciones Diferenciales

Examen Final 2024-1. Tiempo: 100 minutos

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo intento de copia o sospecha de copia, se anulará el examen sin opción de reclamo.

1. Modelamiento y Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (6 Puntos)

Cuando una masa de 1 kg se une a un resorte causa en éste un alargamiento de $\frac{5}{8}$ m hasta que se alcanza la posición de equilibrio. Ahora, considere que la masa se libera 1 m por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 5 m/s y el movimiento posterior toma lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 10 veces la velocidad instantánea.

(a) (**3 ptos**) Determine la ecuación diferencial que modela el problema masa-resorte, si una fuerza externa $f(t)$ se aplica a la masa. Indicar las condiciones iniciales. Considere $g = 10\ m/s^2$
Solución:
En la posición de equilibrio tenemos:

$$\begin{aligned} kx &= mg \\ k \cdot \frac{5}{8} &= 1 \cdot 10 \\ k &= 16 \end{aligned}$$

Luego, la EDO que modela el movimiento de la masa es,

$$mx'' + \beta x' + kx = f(t)\,,$$

donde β es factor de amortiguamento. Entonces:

$$x'' + 10x' + 16x = f(t)$$

sujeto a las condiciones iniciales: $x(0) = 1, x'(0) = 5$.

(b) (**3 ptos**) Resuelva la ecuación diferencial

$$x'' + 2x' + 17x = 48e^{-2t}\cos(3t)$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1$$

Solución:
Resolvamos la ecuación homogénea asociada:

$$x'' + 2x' + 17x = 0$$

Luego, tenemos la ecuación característica:

$$r^2 + 2r + 17 = 0$$

Usaremos la fórmula general para obtener las raíces:

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

Así, tenemos $r_1 = -1 + 4i$ y $r_2 = -1 - 4i$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = C_1 e^{-t} \cos(4t) + C_2 e^{-t} \sin(4t)$$

Para la solución particular, usaremos el método de coeficientes indeterminados, es por ello que proponemos $x_p = e^{-2t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$. Luego:

$$\begin{aligned} x_p' &= e^{-2t}((-2A + 3B)\cos(3t) - (3A + 2B)\sin(3t)) \\ x_p'' &= e^{-2t}((-5A - 12B)\cos(3t) + (12A - 5B)\sin(3t)) \end{aligned}$$

Reemplazando en la EDO original, y reagrupando:

$$\begin{aligned} 48e^{-2t}\cos(3t) = &((-5A - 12B) + 2(-2A + 3B) + 17A)e^{-2t}\cos(3t) \\ &+ ((12A - 5B) + 2(-2B - 3A) + 17B)e^{-2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

Agrupamos los coeficientes de $\cos(3t)$ y $\sin(3t)$:

$$(-5A - 12B) + 2(-2A + 3B) + 17A = 48$$

$$(12A - 5B) + 2(-2B - 3A) + 17B = 0$$

Simplificamos y obtenemos dos ecuaciones lineales en dos variables:

$$8A - 6B = 48$$

$$6A + 8B = 0$$

Resolviendo:

$$A = 96/25$$

$$B = -72/25$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ x(t) &= e^{-t}(C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)) + e^{-2t}\left(\frac{96}{25}\cos(3t) - \frac{72}{25}\sin(3t)\right) \end{aligned}$$

Usamos las condiciones iniciales para encontrar C_1 y C_2:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ C_1 + \frac{96}{25} &= 0 \\ C_1 &= -\frac{96}{25} \end{aligned}$$

Calculamos la derivada

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{-t}\left((-C_1+4C_2)\cos(4t)-(4C_1+C_2)\sin(4t)\right) \\ &\quad -\frac{408}{25}e^{-2t}\cos(3t)-\frac{144}{25}e^{-2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

Además $x'(0)=1$, entonces:

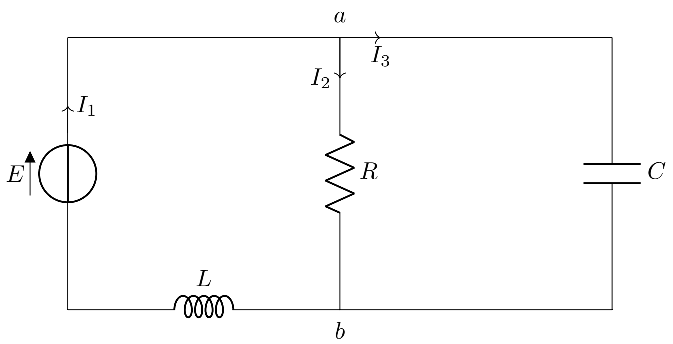
$$\begin{aligned} -C_1+4C_2-\frac{408}{25} &= 1 \\ C_2 &= \frac{337}{100} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x(t) = e^{-t}\left(-\frac{96}{25}\cos(4t)+\frac{337}{100}\sin(4t)\right)+e^{-2t}\left(\frac{96}{25}\cos(3t)-\frac{72}{25}\sin(3t)\right)$$

Problema 2 (6 Puntos)

(a) (**3 ptos**) Considere el circuito mostrado en la siguiente figura:



Modele las ecuaciones diferenciales en la malla derecha e izquierda que permitan encontrar las corrientes $I_1(t)$ y $I_2(t)$. Seguidamente, exprese el sistema de ecuaciones diferenciales en la forma $\mathbf{X}'=A\mathbf{X}+b$, donde $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t)\end{bmatrix}$.

Solución:

Usamos la ley de mallas, en la malla de la izquierda:

$$I_2R+LI_1'=E(t)$$

También, en la malla derecha:

$$-\frac{Q}{C}+I_2R=0$$

Derivando esta ecuación:

$$\begin{aligned} -\frac{I_3}{C}+I_2'R &= 0 \\ \frac{I_2-I_1}{C}+I_2'R &= 0 \end{aligned}$$

Reordenando, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} I_1' &= -\frac{RI_2}{L}+\frac{E(t)}{L} \\ I_2' &= \frac{I_1}{RC}-\frac{I_2}{RC} \end{aligned}$$

Matricialmente, tenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E(t)}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) (**3 ptos**) Utilizando transformada de Laplace, resolver la siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} x'' &= x' - 5x + y \\ y' &= 5x - y \end{aligned}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

Solución:
Aplicamos la transformada de Laplace en cada miembro de las ecuaciones, además denotaremos las transformadas de $x(t)$ e $y(t)$ con $X(s)$ e $Y(s)$ respectivamente. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} s^2X(s) - sx(0) - x'(0) &= sX(s) - x(0) - 5X(s) + Y(s) \\ sY(s) - y(0) &= 5X(s) - Y(s) \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales y reordenando:

$$\begin{aligned} (s^2 - s + 5)X(s) - Y(s) &= s \\ -5X(s) + (s+1)Y(s) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, usamos la regla de Cramer para despejar $X(s)$ e $Y(s)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & (s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2 - s + 5) & -1 \\ -5 & (s+1) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{s(s+1)}{(s^2 - s + 5)(s+1) - 5} \\ &= \frac{s(s+1)}{s(s^2+4)} \\ &= \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} \\ Y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} (s^2 - s + 5) & s \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2 - s + 5) & -1 \\ -5 & (s+1) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{5s}{(s^2 - s + 5)(s+1) - 5} \\ &= \frac{5s}{s(s^2+4)} \\ &= \frac{5}{s^2+4} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+4}\right\} \\
&= \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{5}{2}\sin(2t)
\end{aligned}
$$

Problema 3 (8 Puntos)

(a) (**2 ptos**) Resolver el problema de valor inicial $y'' = 10,\ y(0) = y'(0) = 0$ utilizando el método de la transformada de Laplace.

Solución:

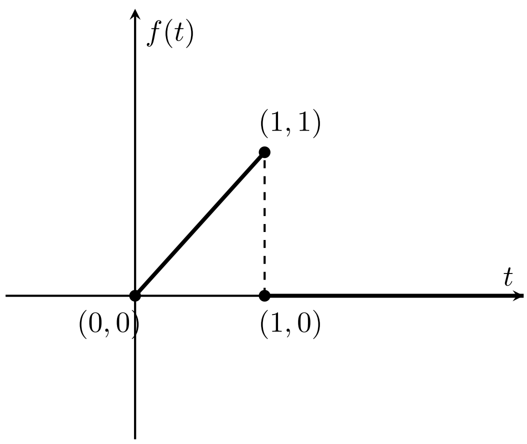
Aplicamos la transformada de Laplace, denotaremos con $Y(s)$ la transformada $y(t)$:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''\} &= \frac{10}{s} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) &= \frac{10}{s} \\
Y(s) &= \frac{10}{s^3}
\end{aligned}
$$

Luego, calculemos $y(t)$ usando la transformada inversa:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} \\
&= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} \\
&= 5t^2
\end{aligned}
$$

(b) (**3 ptos**) Dada la gráfica de la función $f(t)$:



Halle $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Solución:

Encontraremos la regla de correspondencia de f en $0 \leq t < 1$, para ello notemos que es una recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$:

$$\begin{aligned} y - 1 &= 1(t-1) \\ y &= t\,, \end{aligned}$$

así, la función f queda:

$$f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \leq t < 1 \\ 0\,, & 1 \leq t \end{cases}$$

Podemos escribirla en términos de la función escalón unitario:

$$f(t) = t - t \cdot \mathcal{U}(t-1)$$

Ahora, aplicamos la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{t\} - \mathscr{L}\{t \cdot \mathcal{U}(t-1)\} \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\mathscr{L}\{(t+1)\} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

(c) (**3 ptos**) Halle la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{5(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+13)}$$

Solución:
Descomponemos la función racional usando el método de fracciones parciales:

$$\frac{5(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+13)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13}$$

Luego:

$$5(s+1) = A(s^2+4s+13) + (Bs+C)(s+3)$$

Igualando términos y resolviendo, tenemos: $A = -1$, $B = 1$, $C = 6$. Luego, calculamos la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5(s+1)}{(s+3)(s^2+4s+13)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s+3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s^2+4s+13}\right\} \\ &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{(s+2)^2+9}\right\} \\ &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s+2)^2+9}\right\} \\ &= -e^{-3t} + e^{-2t}\cos(3t) + \frac{4}{3}e^{-2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

(a) (**2 ptos**) Se investiga el crecimiento poblacional en un ecosistema de dos especies $x(t)$ y $y(t)$ interactuando entre sí . Donde $x(t)$ representa la población de conejos y $y(t)$ la población de zorros. El sistema de ecuaciones diferenciales que modela este comportamiento es:

$$x'(t) = 4x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = -2x(t) + y(t)$$

Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales que describe la dinámica poblacional de presas y depredadores en un ecosistema, usando el método de eigenvalores y eigenvectores.

Solución:

Escribimos el sistema de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Luego, el polinomio característico es:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Así, los eigenvalores son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Ahora calculemos los eigenvectores:

- Para $\lambda_1 = 2$: Debemos resolver,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene $K_2 = -2K_1$ y entonces $\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ -2K_1 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Luego un vector propio asociado a λ_1 es $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- Para $\lambda_2 = 3$: Debemos resolver,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene $K_2 = -K_1$ y entonces $\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ -K_1 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Luego un vector propio asociado a λ_2 es $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Finalmente la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

Observación: Note que el alumno podría escribir otro par de eigenvectores paralelos a v_1 y v_2 respectivamente.

(b) (**1 pto**) Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, demuestre que:

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

Sugerencia: Use la definición de transformada de Laplace.

Solución:

De la definición:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st+at}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$