Predikátová logika

Úvod do výpočtovej logiky

Jozef Šiška

2013/2014

Syntax

Definícia (Jazyk)

Jazyk $\mathcal{L}$ prvorádovej logiky bude pozostávať z nasledovných symbol:

- $\mathcal{V}$ – spočitateľná množina symbolov pre *indivíduové premenné*: x, y, $\ldots$;
- $\mathcal{C}$ – množina symbolov pre konštanty: a, b, c, $\ldots$;
- $\mathcal{F}$ – množina funkčných symbolov s priradenou aritou: f^2, g^1, $\ldots$;
- $\mathcal{P}$ – množina predikátových symbolov s priradenou aritou: P^1, Q^3, $\ldots$;
- symboly pre logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$;
- symboly pre kvatifikátory: $\forall$, $\exists$;
- pomocné symboly: (,) a ,.

Term

Definícia (Term)

Term jazyka $\mathcal{L}$ je postupnosť symbolov vytvorená nasledovnými rekurzívnymi pravidlami:

- Symbol pre premennú je term;
- symbol pre konštanu je term;
- ak f^n je n-árny funkčný symbol a $t_1, \dots, t_n$ sú termy, tak $f(t_1, \dots, t_n)$ je term.

Formula

Definícia (Formula)

Formula jazyka $\mathcal{L}$ je postupnosť symbolov vytvorená nasledovnými rekurzívnymi pravidlami:

- Ak P^n je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy, tak $P(t_1, \ldots, t_n)$ je (atomická) formula jazyka $\mathcal{L}$;
- ak ϕ, ψ sú formuly jazyka $\mathcal{L}$, potom $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $\neg\phi$ sú formuly jazyka $\mathcal{L}$;
- ak ϕ je formula jazyka $\mathcal{L}$ a x je premenná, potom $\forall x \phi$ a $\exists x \phi$ sú formuly jazyka $\mathcal{L}$.

Príklad: termy, formuly

Príklad

Nech jazyk $\mathcal{L}$ obsahjuje konštantu a, funkčné symboly f^2 a g^1 a predikátové symboly P^1, Q^2 (a samozrejme spočitateľnú množinu premenných $x, y, \dots$). Možné termy potom sú:

$$a, x, y, \dots, f(a), f(x), \dots, f(f(a)), f(f(x)), \dots$$

$$g(a, a), g(x, x), g(x, a), g(a, x), \dots, g(f(g(f(f(a)), x)), f()), \dots$$

Možné atomické formule:

$$P(a), \quad P(x), \quad P(f(a)), \quad P(f(f(x))), \quad P(f(g(a, f(x)))), \dots$$

$$Q(a, a), \quad Q(a, x), \quad Q(x, a), \quad Q(g(a, f(x)), \quad f(g(x, a))), \dots$$

Možné formule:

$$P(a), \quad P(x), \quad (P(a) \to P(x)), \quad (Q(f(a), y) \wedge P(g(a, f(a))))$$

$$\forall x P(a), \quad \exists y Q(f(y), g(x, a)), \quad \forall x (P(x) \vee \forall y Q(g(x, y), a))$$

Definícia (Voľné a viazané premenné)

- Každý výskyt premennej x v atomickej formuly je *voľný*.
- Každý voľný (viazaný) výskyt premennej x vo formulách ϕ, ψ je zároveň voľný (viazaný) výskyt premennej x vo formulách $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ a $\neg\phi$.
- Každý výskyt premennej x vo formulách $\forall x\phi$ a $\exists x\phi$ je viazaný. Každý voľný (viazaný) výskyt premennej y inej ako x vo formule ϕ je zároveň voľný (viazaný) výskyt premennej y vo formulách $\forall x\phi$ a $\exists x\phi$.

Príklad

Uvažujme formulu $\phi = \exists y \ rovnaSa(x, krat(2, y))$. Ak chceme určiť jej pravdivostnú hodnotu, potrebujeme vedieť iba hodnotu premennej x. Pravdivostná hodnota ϕ nezávisí od y, pretože priradenie hodnoty jej sa deje "vo vnútri" ϕ pomocou kvantifikátora. Celú formulu ϕ by sme mohli preformulovať aj bez použitia premennej y: "x je deliteľné dvomaälebo "x je párne".

Definícia (Uzavretá, otvorená formula)

Formula ϕ je uzavretá ak neobsahuje žiadne voľné výskyty premenných. Formula ϕ je otvorená, ak neobsahuje žiadne kvantifikátory.

Definícia (Substitúcia)

Nech t je term, ϕ formula, nech $x1, \ldots, x_n$ sú premenné a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy. Potom $t_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ je term, ktorý vznikne súčasným dosadením t_i za každý výskyt premennej x_i v t. Rovnako $\phi_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ je formula, ktorá vznikne súčasným dosadením t_i za každý *voľný* výskyt premennej x_i v t.

Štruktúra

Definícia (Štruktúra)

Štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ je dvojica $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je neprázdna množina (doména) a i je interpretačná funkcia, ktorá priraďuje "zmysel" konštantám, funkčným a predikátovým symbolom:

- $i(c) \in D$
- $i(f^n) \in D^n \mapsto D$
- $i(P^n) \subseteq D^n$

Interpretačná funkcia priraďuje konštantám nejaký prvok domény, funkčným symbolom nejakú skutočnú funkciu nad doménou (správnej arity) a predikátom určuje, pre ktoré kombinácie argumentov (prvkov z domény) sú vlastne pravdivé.

Ohodnotenie premenných, termov

Definícia (Ohodnotenie premenných)

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, ohodnotenie premenných e je ľubovoľná funkcia $\mathcal{V} \mapsto D$ (teda priraďuje premenným indivíduá z domény). Zápis $e(x/a)$ bude označovať ohodnotenie premenných, ktoré priraďuje premennej x hodnotu a, a všetky ostatné premenné priraďuje rovnako ako e.

Definícia (Ohodnotenie termov)

Nech $M = (D, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných, hodnota $t^{\mathcal{M}}[e]$ termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e je prvok D určený nasledovne:

$$\begin{aligned} x^{\mathcal{M}}[e] &= e(x) \\ (f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{M}}[e] &= i(f)(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]) \end{aligned}$$

Pravdivosť formuly v štruktúre

Definícia (Pravdivosť formuly)

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra, nech e je ohodnotenie premenných. Platnosť (pravdivosť) formuly v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení e značíme $\mathcal{M} \models \phi[e]$ a je definovaná nasledovne:

$$\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ vtt } \left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$$

$$\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi) \text{ vtt } \mathcal{M} \models \phi \text{ a zárveň} \mathcal{M} \models \psi$$

$$\mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi) \text{ vtt } \mathcal{M} \models \phi \text{ alebo} \mathcal{M} \models \psi$$

$$\mathcal{M} \models (\phi \rightarrow \psi) \text{ vtt } \mathcal{M} \not\models \phi \text{ alebo} \mathcal{M} \models \psi$$

$$\mathcal{M} \models \exists x \phi[e] \text{ vtt existuje } a \in D \text{ také, že } \mathcal{M} \models \phi[e(x/a)]$$

$$\mathcal{M} \models \forall x \phi[e] \text{ vtt pre všetky } a \in D \text{ platí } \mathcal{M} \models \phi[e(x/a)]$$

Pravdivosť formuly

Definícia

Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra. Formula ϕ je pravdivá v štruktúre $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \models \phi$), ak je pravdivá pri v štruktúre $\mathcal{M}$ pri všetkých ohodnoteniach e.

Definícia

Formula ϕ je *platná*, ak je pravdivá v každej štruktúre $\mathcal{M}$.
Formula ϕ je *splniteľná*, ak existuje aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ v ktorej je pravdivá.
Formula ϕ *vyplýva* z množiny formúl $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ ak je pravdivá v každej štruktúre $\mathcal{M}$, v ktorej sú pravdivé všetky formuly $\psi_1, \psi_2, \dots$.

Príklad: štruktúra

Príklad

Nech jazyk $\mathcal{L}$ obsahjuje konštantu a, funkčný symbol f^2 a predikátový symboly E^2. Uvažujme formuly

$$\phi = \forall x \ E(x, f(x, a)), \qquad \psi = \forall x \forall y \ E(f(x, y), f(y, x))$$

Nech $D = Z$ (množina celých čísel). Nech i_1 je definovaná nasledovne:

$$i_1(a) = 0, \quad i_1(E) = \{(k, k) \ k \in Z\}, \quad i_1(f) = x, y \mapsto x + y$$

Obidve formuly sú pravdivé v $\mathcal{M}_1 = (D, i_1)$ (pri ľubovoľnom priradení premenných, kedže žiadna premenná nie je voľná). Keby sme ale zmenili interpretáciu konštanty a ($i_2(a) = 1$) alebo funkčného symbolu f ($i_3(f) = x, y \mapsto x - y$), tak by prvá resp. druhá formula prestala platiť.

Tablová metóda pre prvorádovú logiku

Tablová metóda pre prvorádovú logiku je podobná tej z výrokovej logiky. Vytvára sa rovnaký strom, len k pôvodným ôsmim pravidlám z VL pribudnú ešte štyri nové pravidlá pre kvatifikátory (ktoré sú zatriedené do nových dvoch typov).

$$\alpha: \quad \frac{T\phi \wedge \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ T\psi \end{array}} \qquad \frac{F\phi \vee \psi}{\begin{array}{c} F\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{F\phi \rightarrow \psi}{\begin{array}{c} T\phi \\ F\psi \end{array}} \qquad \frac{T\neg\phi}{F\phi} \qquad \frac{F\neg\phi}{T\phi}$$

$$\beta: \quad \frac{F\phi \wedge \psi}{F\phi \mid F\psi} \qquad \frac{T\phi \vee \psi}{T\phi \mid T\psi} \qquad \frac{T\phi \rightarrow \psi}{F\phi \mid T\psi}$$

$$\gamma: \quad \frac{T\forall x\phi}{T\phi_x(t)} \qquad \frac{F\exists x\phi}{F\phi_x(t)} \qquad t \text{ je ľub. term}$$

$$\delta: \quad \frac{F\forall x\phi}{F\phi_x(a)} \qquad \frac{T\exists x\phi}{T\phi_x(a)} \qquad a \text{ je } \textbf{nová} \text{ premenná}$$