Výroková logika - úvod

Úvod do výpočtovej logiky

Jozef Šiška

2013/2014

Syntax

- Formula
- Štruktúra

Sémantika

- Boolovské ohodnotenie
- Interpretácia
- Splniteľnosť, tautológie, vyplývanie

Vlastnosti

Syntax

Definícia (Jazyk)

Jazyk prvorádovej logiky bude pozostávať z nasledovných symbol:

- *Var* – spočitateľná množina symbolov pre *výrokové premenné*: $p_1, p_2, \ldots;$
- symboly pre logické spojky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$;
- pomocné symboly: (a).

Definícia (Formula)

Formula je postupnosť symbolov vytvorená nasledovnými rekurzívnymi pravidlami:

- Každá výroková premenná je formula (atomická formula).
- Ak A je formula, tak aj $\neg A$ je formula.
- Ak A a B sú formuly, tak aj $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly.

Množinu všetkých formúl budeme označovať E.

Formula – alternatívna definícia

Definícia (Vytvárajúca postupnosť)

Vytvárajúca postupnosť je ľubovoľná konečná postupnosť, ktorej každý člen je výroková premenná, alebo má tvar $\neg A$, pričom A je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.

Definícia (Formula)

Postupnosť symbolov A je formula, ak existuje vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je A. Túto postupnosť voláme tiež vytvárajúca postupnosť pre A.

Jednoznačnosť rozkladu

Pre každú formulu X platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- X je výroková premenná.
- Existuje práve jedna formula A taká, že $X = \neg A$.
- Existuje práve jedna dvojica formúl A,B a jedna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ taká, že $X = (AbB)$.

Definícia (Vytvárajúci strom)

Vytvárajúci strom pre formulu X je binárny strom T obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedného syna, ktorý obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu (AbB), kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dvoch synov, pričom ľavý syn obsahuje formulu A a pravý formulu B,
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

Definícia (Priama podformula)

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly A a B.

Definícia (Podformula)

- Ak X je priama podformula Y, tak X je podformula Y.
- Ak X je podformula Y a Y je podformula Z, tak X je podformula Z.

Definícia (Stupeň formuly $deg(X)$)

- Premenná je nultého stupňa.
- Ak A je n-tého stupňa, tak $\neg A$ je $(n+1)$-ho stupňa.
- Ak A je n_1-ho stupňa a B je n_2-ho stupňa, tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú $(n_1 + n_2 + 1)$-ho stupňa.

Sémantika

- Syntax
  - pravidlá, ako formuly vyzerajú, ako ich spájame
  - sú to len reťazce symbolov, bez nejakého významu
- Sémantika
  - priraďuje formulám zmysel, význam
  - pravdivostná hodnota, ohodnotenie formúl
  - chceme ale aby spĺňalo nejaké podmienky (vzhľadom na štruktúru formuly)

Definícia (Ohodnotenie)

Ohodnotenie množiny formúl S je zobrazenie v, ktoré každej formule z S priradí jednu z pravdivostných hodnôt t (pravda) a f (nepravda). Hovoríme, že formula X je pravdivá pri v, ak v priraďuje X hodnotu t ($v(X) = t$), a nepravdivá pri X ak v priraďuje X hodnotu f ($v(X) = f$).

Boolovské ohodnotenie

Definícia

Ohodnotenie v množiny E sa nazýva *boolovské*, ak pre každú formulu A a B z E platí:

- Formula $\neg A$ je pravdivá pri v (má hodnotu t) ak A je nepravdivá pri v, a naopak.
- Formula $(A \wedge B)$ je pravdivá pri v ak A aj B sú pravdivé pri v, ináč je $(A \wedge B)$ nepravdivá.
- Formula $(A \vee B)$ je pravdivá pri v ak aspoň jedna z A a B je pravdivá pri v, ináč je $(A \vee B)$ nepravdivá.
- Formula $(A \to B)$ je nepravdivá pri v ak A je pravdivá pri v a B je nepravdivá pri v, ináč je $(A \vee B)$ nepravdivá.

Definícia

Nech $S_1 \subset S_2$ sú množiny formúl, nech v_1 je ohodnotenie formúl z S_1 a v_2 ohodnotenie formúl z S_2. Hovoríme, že v_2 je *rozšírením* v_1 ak sa zhodujú na každej formule X z S_1 (t.j. $v_1(X) = v_2(X)$).

Definícia

Interpretácia je ohodnotenie množiny výrokových premenných (Var).

Pozorovanie

Každá interpretácia v_0 sa dá rozšíriť na práve jedno boolovské ohodnotenie v (množiny E).

Definícia

Hovoríme, že formula X je pravdivá (nepravdivá) pri interpretácii v_0 ak je pravidvá (nepravdivá) pri jej rozšírení v na množinu všetkých formúl E.

Pozorovanie

Ak sa dve boolovské ohodnotenia zhodujú na množine všetkých premenných, potom sa zhodujú na množine všetkých formúl E.

Dôkaz.

Tvrdenie očividne platí pre formuly stupňa 0 (premenné). Rozobraním jednotlivých prípadov v definícii boolovského ohodnotenia ľahko overíme, že ak sa dve ohodnotenia zhodujú na nejakých formulách A a B, potom sa musia zhodovať aj na formulách $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ (ktoré majú stupeň o jedna väčší ako súčet stupňov A a B). Indukciou na stupeň formuly teda dostávame, že sa musia zhodovať na všetkých formulách z E

. $\square$

Pozorovanie

Každá interpretácia v_0 sa dá rozšíriť na práve jedno boolovské ohodnotenie v (množiny E).

Dôkaz.

- že sa interpretácia dá rozšíriť nanajvýš na jedno boolovské ohodnotenie vyplýva z predchádzajúceho pozorovania.
- že sa vôbec dá rozšíriť na nejaké ohodnotenie ukážeme tak, že induktívne podľa stupňa formuly zostrojíme ohodnotenie v:
  - $v(X) = v_0(X)$ pre všetky $X \in Var$
  - Nech X je formula stupňa $n > 0$. Táto formula musí byť tvaru $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ alebo $(A \to B)$, pričom $deg(A) < n$ a $deg(B) < n$. Podľa indukčného predpokladu teda existuje ohodnotenie $v(A)$ a $v(B)$. Rozobraním prípadov v definícii boolovského ohodnotenia zistíme, že existuje práve jeden spôsob ako priradiť hodnotu $v(X)$ formule (X).

$\square$

Definícia (Tautológia)

Formula X je *tautológia* vtt X je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení (množiny E).

Definícia (Splniteľnosť)

Formula X je výrokovologicky *splniteľná* vtt X je pravdivá pri aspoň jednom boolovskom ohodnotení.
Množina formúl S je *súčasne výrokovologicky splniteľná* vtt existuje aspoň jedno boolovské ohodnotenie, pri ktorom sú všetky formule z S pravdivé. Hovoríme, že takého ohodnotenie *spĺňa* množinu S alebo aj, že je *modelom* S.

Definícia (Vyplývanie)

Z množiny formúl S *výrokovologicky vyplýva* formula X (X je *výrokovologickým dôsledkom* S) ak X je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení, ktoré spĺňa S.

Definícia (Ekvivalencia)

Dve formuly X a Y sú *výrokovologicky ekvivalentné* vtt X a Y sú pravdivé pri tých istých boolovských ohodnoteniach.

Pozorovanie

Pravdivostná hodnota formuly X závisí iba od ohodnotenia (konečne veľa) premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.

Dôkaz.

Uvažujme vytvárajúci strom pre formulu X. Očividne ohodnotenie nejakého vrcholu závisí iba od ohodnotenia jeho potomkov. $\square$

Vieme teda vždy (v konečnom čase) rozhodnúť, či je formula tautológia, či sú dve formuly ekvivalentné, alebo či z konečného počtu formúl vyplýva nejaká formula: stačí nám vždy skontrolovať 2^n možných ohodnotení.

Pozorovanie

Formula X je tautológia vtt keď $\neg X$ je nesplniteľná.

Dôkaz.

Nech X je tautológia, teda je pravdivá pri každom boolovskom ohodnotení. To znamená, že $\neg X$ je nepravdivá pri každom boolovskom ohodnotení (podľa definície bool. ohodnotenia) a teda neexistuje žiadne ohodnotenie, pri ktorom by $\neg X$ bola pravdivá. Opačne, nech $\neg X$ je nesplniteľná. To znamená, že pri každom boolovskom ohodnotení je $\neg X$ nepravdivá a podľa definície bool. ohodnotenia je teda X pri každom ohodnotení pravdivá a teda je tautológia. $\square$

Pozorovanie

Formula X výrokovologicky vyplýva z množiny formúl $S = \{X_1, X_2, \ldots, S_n\}$ vtt keď je množina $S' = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \neg X\}$ nesplniteľná.

Dôkaz.

Predpokladajme, že X vyplýva z množiny S, nech v je nejaké boolovské ohodnotenie. Potrebujeme ukázať, že v nesplĺňa S'. Máme dve možnosti:

- Ak v nesplĺňa S, tak nesplĺňa ani S'.
- Ak v splĺňa S, tak X musí byť pravdivá pri v (definícia splniteľnosti). To znamená, že $\neg X$ je nepravidvá pri v a teda v nesplĺňa S'.

Opačne, nech S' je nesplniteľná a nech v je nejaké boolovské ohodnotenie. v teda nesplĺňa S'. Potrebujeme ukázať, že ak v splĺňa S, tak potom X je pravdivé pri v. Ak v splĺňa S, tak každé X_i je pravdivé pri v. Keďže ale v nesplĺňa S', musí byť $\neg X$ (jediná zostávajúca formula z S') nepravdivé pri v, čo znamená, že X je pravdivé pri v. $\square$