Algebra
Wykład 3
Algebra macierzy

Jacek Rogowski

Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Definicja

Prostokątną tablicę postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{13} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

w której $a_{ij} \in \mathbb{R}$ lub $a_{ij} \in \mathbb{C}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $j \in 1, 2, \dots, n$, nazywamy **macierzą** o k **wierszach** i n **kolumnach** (lub krótko: **macierzą wymiaru** $k \times n$), o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$.
Często używa się również zapisu: $A = [a_{ij}]_{\substack{i \leqslant k \\ j \leqslant n}}$ lub po prostu $A = [a_{ij}]$.

Macierz wymiaru $n \times n$, czyli macierz o tej samej liczbie wierszy i kolumn, nazywamy **macierzą kwadratową**.

Rozważmy macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [3, -2].$$

- Macierz A jest macierzą wymiaru 2×3,
- macierz B jest macierzą o 3 wierszach i 1 kolumnie (czyli: macierzą wymiaru 3×1),
- macierz C jest macierzą kwadratową wymiaru 2×2,
- macierz D ma wymiar 1×2.

Definicja

Macierz wymiaru $k \times 1$ nazywamy **wektorem pionowym** lub **kolumną**.
Macierz wymiaru $1 \times n$ nazywamy **wektorem poziomym** lub **wierszem**.

Definicja

- **Macierzą zerową** wymiaru $k \times n$ nazywamy macierz $\mathbb{O}$ o k wierszach i n kolumnach, której wszystkie wyrazy są równe 0.
- **Macierzą jednostkową** stopnia n nazywamy macierz kwadratową $\mathbb{I} = \mathbb{I}_{n\times n}$ wymiaru $n \times n$ postaci

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierze $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ nazywamy **równymi**, jeżeli

- obie macierze są tego samego wymiaru $k \times n$,
- dla każdego $i \leqslant k$ oraz każdego $j \leqslant n$ zachodzi równość $a_{ij} = b_{ij}$.

Przykład.

- Macierz $A = [a_{ij}]_{\substack{i \leqslant k \\ j \leqslant n}}$ jest macierzą zerową wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{ij} = 0$ dla wszystkich liczb naturalnych $i \leqslant k$ oraz $j \leqslant n$.
- Macierze zerowe
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
nie są równe, ponieważ mają różne wymiary.

Definicja

Sumą macierzy $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ tego samego wymiaru $k \times n$ nazywamy macierz
$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

PRZYKŁAD.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą **przeciwną** do macierzy $A = [a_{ij}]$ wymiaru $k \times n$ nazywamy macierz $-A$ wymiaru $k \times n$ zdefiniowaną wzorem
$$-A = [-a_{ij}].$$

Oczywiście $A + (-A) = \mathbb{O}$.

Definicja

Różnicą macierzy $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ tego samego wymiaru $k \times n$ nazywamy macierz

$$A - B = A + (-B).$$

PRZYKŁAD. Znajdziemy macierz X, która jest rozwiązaniem równania

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz X musi mieć wymiar 2×2, bo w innym przypadku lewa strona równania nie miałaby sensu. Po odjęciu macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ od obu stron powyższego równania dostajemy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]$ przez liczbę c nazywamy macierz

$$cA = [ca_{ij}].$$

PRZYKŁAD.

$$5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej liczby c i każdej macierzy A:

- macierze A i cA mają ten sam wymiar,
- $0A = \mathbb{O}$,
- $c\mathbb{O} = \mathbb{O}$,
- $1A = A$,
- $(-1)A = -A$.

Twierdzenie

Niech $A, B, C \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ *będą dowolnymi macierzami i* $p, q \in \mathbb{K}$ *będą dowolnymi liczbami. Wtedy*

1. $A + B = B + A$,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
3. *istnieje taka macierz* $\mathbb{O} \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$, *że* $\mathbb{O} + D = D$ *dla każdej macierzy* $D \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$,
4. *istnieje taka macierz* $-A$, *że* $A + (-A) = \mathbb{O}$,
5. $(pq)A = p(qA)$,
6. $p(A + B) = pA + pB$,
7. $(p + q)A = pA + qA$,
8. $1A = A$.

Zbiór $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ jest przykładem **przestrzeni liniowej**.

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ będzie dowolną macierzą. **Macierzą transponowaną** do A nazywamy macierz $A^T = [a'_{ij}] \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{K})$ o wyrazach zdefiniowanych wzorem $a'_{ij} = a_{ji}$, a więc

$$A^T = [a_{ji}].$$

Równość definiująca macierz A^T oznacza, że kolejne wyrazy j-tego wiersza tej macierzy są równe kolejnym wyrazom j-tej kolumny macierzy A.

PRZYKŁAD. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

macierzą do niej transponowaną jest

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie

Niech $A, B \in \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ *będą dowolnymi macierzami i* $c \in \mathbb{K}$ *będzie dowolną liczbą. Wówczas*

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(cA)^T = cA^T$,
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Dowód

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$. Mamy

(1) $(A^T)^T = \left([a_{ij}]^T\right)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A.$

(2) $(cA)^T = ([ca_{ij}])^T = [ca_{ji}] = c[a_{ji}] = cA^T.$

(3) $(A+B)^T = \left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T =$
$= [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T.$

$\square$

Definicja

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą i niech dane będą dwa wektory: poziomy (czyli wiersz) i pionowy (czyli kolumna):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$. **Iloczynem wiersza $\mathbf{x}$ przez kolumnę $\mathbf{y}$** nazywamy liczbę:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Uwaga: Nie definiujemy iloczynu $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ kolumny przez wiersz, a więc iloczyn wiersza przez kolumnę jest działaniem nieprzemiennym (pomimo, że istnieje suma po prawej stronie powyższej równości).

Definicja

Niech $A \in \mathbb{M}_{k\times p}(\mathbb{K})$ i $B \in \mathbb{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ będą dwiema macierzami o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$. Oznaczmy:

- i-ty wiersz macierzy A przez A_{i*}, $i = 1, 2, \ldots, k$,
- j-tą kolumnę macierzy B przez B_{*j}, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Macierz

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1*}\cdot B_{*1} & A_{1*}\cdot B_{*2} & A_{1*}\cdot B_{*3} & \ldots & A_{1*}\cdot B_{*n} \\ A_{2*}\cdot B_{*1} & A_{2*}\cdot B_{*2} & A_{2*}\cdot B_{*3} & \ldots & A_{2*}\cdot B_{*n} \\ A_{3*}\cdot B_{*1} & A_{3*}\cdot B_{*2} & A_{3*}\cdot B_{*3} & \ldots & A_{3*}\cdot B_{*n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k*}\cdot B_{*1} & A_{k*}\cdot B_{*2} & A_{k*}\cdot B_{*3} & \ldots & A_{k*}\cdot B_{*n} \end{bmatrix}$$

nazywamy **iloczynem macierzy A przez macierz B**.

Uwaga: Wiersze A_{i*} i kolumny B_{*j} są wektorami o p wyrazach.

Przyjmijmy, że

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant k,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \qquad B = [b_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Wówczas

$$A_{i*} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix}, \quad B_{*j} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$$

oraz

$$A_{i*} \cdot B_{*j} = \sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{sj}.$$

W konsekwencji

$$AB = \left[\sum_{s=1}^{p} a_{is} b_{sj} \right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Przykład. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 3} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 2}.$$

Wówczas $AB \in \mathbb{M}_{2\times 2}$ oraz

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Podobnie: $BA \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ oraz

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}.$$

Wówczas A^2, AB i BA są macierzami wymiaru 2×2 oraz

$$A^2 = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -16 \\ 9 & 24 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Uwagi:

- Iloczyn AB macierzy A wymiaru $k \times p$ przez macierz B wymiaru $q \times n$ istnieje tylko wtedy, gdy $p = q$. Ale nawet wówczas nie musi istnieć iloczyn BA.
- Jeżeli istnieją oba iloczyny AB i BA, to na ogół $AB \neq BA$ (czyli mnożenie macierzy jest **nieprzemienne**). Dzieje się tak nawet w przypadku, gdy obie macierze są kwadratowe.
- Z faktu, że $AB = \mathbb{O}$ na ogół nie wynika, że $A = \mathbb{O}$ lub $B = \mathbb{O}$.
- Jeżeli $\mathbf{x} \in \mathbb{M}_{1\times p}$ jest wierszem (wektorem poziomym) i $\mathbf{y} \in \mathbb{M}_{p\times 1}$ jest kolumną (wektorem pionowym), to zdefiniowany wcześniej iloczyn wiersza przez kolumnę $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ jest liczbą, którą można utożsamiać z macierzą wymiaru 1×1, którą otrzymamy w wyniku mnożenia macierzy $\mathbf{xy} = [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}]$. Z drugiej strony, iloczyn $\mathbf{yx}$ *macierzy* $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$ jest macierzą wymiaru $p \times p$.

Twierdzenie

Załóżmy, że r jest dowolną liczbą i A, B, C są macierzami takich wymiarów, że wskazane działania są wykonalne. Wówczas

1. $\mathbb{I}A = A\mathbb{I} = A$,
2. $(AB)C = A(BC)$,
3. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$,
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$,
5. $(AB)^T = B^T A^T$.

DOWÓD własności (3): $A(B+C) = AB + AC$

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{n\times p}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_{n\times p}$. Wtedy $B + C = [b_{ij} + c_{ij}]$ i wyraz (i,j) macierzy $A(B+C)$ jest równy:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

a to jest wyraz (i,j) macierzy $AB + AC$.

DOWÓD własności (5): $(AB)^T = B^T A^T$

Oznaczmy $A^T = [a'_{ij}]$ i $B^T = [b'_{ij}]$. Oczywiście $a'_{ij} = a_{ji}$ oraz $b'_{ij} = b_{ji}$. Stąd wyraz (i,j) macierzy $B^T A^T$ jest równy

$$\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}.$$

Jest to wyraz (j,i) macierzy AB, czyli wyraz (i,j) macierzy $(AB)^T$.

Definicja

Jeżeli A jest macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$ i istnieje macierz B tego samego wymiaru spełniająca równości

$$AB = BA = \mathbb{I},$$

to macierz B nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A i oznaczamy ją symbolem A^{-1}.

PRZYKŁAD. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{i} \ BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego B jest macierzą odwrotną do A.

Definicja

Macierz kwadratową, która ma macierz odwrotną, nazywamy macierzą **odwracalną**.

Macierz kwadratowa może nie być odwracalna. Istotnie, niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnej macierzy kwadratowej $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mamy

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego $AB \neq \mathbb{I}$ dla każdej macierzy B.

Twierdzenie

Zakładamy, że macierze A, B, o których mowa poniżej, są macierzami kwadratowymi tego samego wymiaru.

1. $\mathbb{I}$ *jest macierzą odwracalną, przy czym* $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.
2. *Jeżeli* A *jest macierzą odwracalną, to* A^{-1} *również i* $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. *Jeżeli* A *i* B *są macierzami odwracalnymi, to* AB *również i* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Jeżeli* $c \neq 0$ *jest liczbą i* A *jest macierzą odwracalną, to* cA *również i* $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
5. *Jeżeli* A *jest macierzą odwracalną, to* A^T *również i* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Twierdzenie

Niech A będzie macierzą kwadratową. Wówczas macierz A jest odwracalna i macierzą do niej odwrotną jest macierz B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg operacji elementarnych (wykonywanych na wierszach macierzy), który macierz $\left[A\ \mathbb{I}\right]$ zamienia na macierz $\left[\mathbb{I}\ B\right]$.

Przykład. Znajdziemy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Mamy

$$\left[A\ \mathbb{I}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Przykład. W przypadku macierzy, która nie jest odwracalna, powyższa procedura zatrzyma się i nie doprowadzi do otrzymania macierzy postaci $[\mathbb{I}\ B]$. Rozważmy macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Mamy

$$\begin{bmatrix} A & \mathbb{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}w_1 \\ \frac{1}{2}w_2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nie można przekształcić do macierzy jednostkowej za pomocą operacji elementarnych, więc macierz A nie ma macierzy odwrotnej.