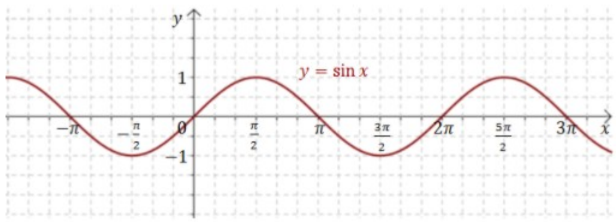
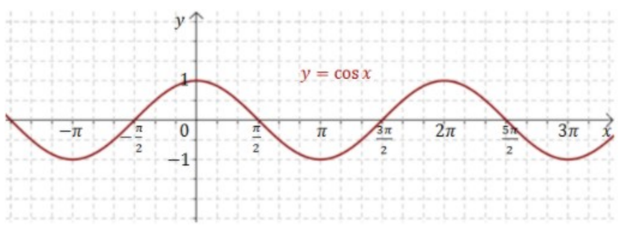
Ćwiczenia 4

Funkcje trygonometryczne

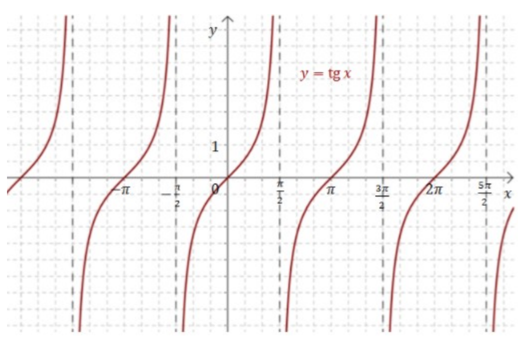
Funkcja trygonometryczna	$\alpha = 0°$	$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$	$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$	$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$	$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}(\alpha)$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



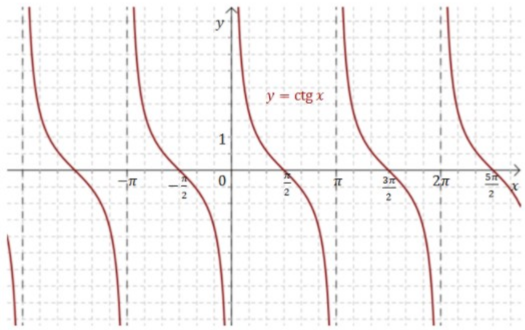
Wykres funkcji $y = \sin(x)$ *(czytaj: sinus)*
Dziedzina funkcji $y = \sin(x)$: zbiór $\mathbb{R}$



Wykres funkcji $y = \cos(x)$ *(czytaj: kosinus)*
Dziedzina funkcji $y = \cos(x)$: zbiór $\mathbb{R}$



Wykres funkcji $y = \mathrm{tg}(x)$ *(czytaj: tangens)*
Dziedzina funkcji $y = \mathrm{tg}(x)$: zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.



Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg}(x)$ *(czytaj: kotangens)*
Dziedzina funkcji $y = \operatorname{ctg}(x)$: zbiór $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$,
czyli $x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przydatne zależności trygonometryczne (prawdziwe oczywiście przy ograniczeniach zgodnych z dziedzinami):

W1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

W2) $\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{ctg}(x) = 1$,

W3) $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

W4) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}$,

W5) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$,

W6) $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)} = \frac{2}{\operatorname{ctg}(x)-\operatorname{tg}(x)}$,

W7) $\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2(x)-1}{2\operatorname{ctg}(x)} = \frac{\operatorname{ctg}(x)-\operatorname{tg}(x)}{2}$,

W8) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$,

W9) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$,

W10) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

W11) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$,

W12) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$,

W13) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)-\operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$,

W14) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta)-1}{\operatorname{ctg}(\alpha)+\operatorname{ctg}(\beta)}$,

W15) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha)\operatorname{ctg}(\beta)+1}{\operatorname{ctg}(\beta)-\operatorname{ctg}(\alpha)}$.

Pozostałe wzory można znaleźć w tablicach matematycznych.

Zadanie 1. Rozwiązać równania:

a) $\sin(2x) = 1$,

b) $\cos(3x) = -\frac{1}{2}$,

c) $\operatorname{ctg}(\frac{x}{3}) = -1$,

d) $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = \sqrt{3}$.

Zadanie 2. Rozwiązać równania:

a) $\operatorname{tg}^3(x) = \operatorname{tg}(x)$,

b) $\operatorname{tg}^2(x) - 2\operatorname{tg}(x) + 1 = 0$,

c) $\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2 = 0$,

d) $2\cos(2x) + 3 = 4\cos(x)$,

e) $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \frac{1}{2}$,

f) $3\sin(x) - \frac{6}{\sin(x)} = -3$,

g) $2\sin^3(x) - \sin(x)\cos(x) - 3\sin(x) = 0$.

Zadanie 3. Rozwiązać nierówności:

a) $\sin^2(x) < 1$,

b) $\operatorname{tg}^2(x) > 1$,

c) $\operatorname{ctg}^2(x) > 3$,

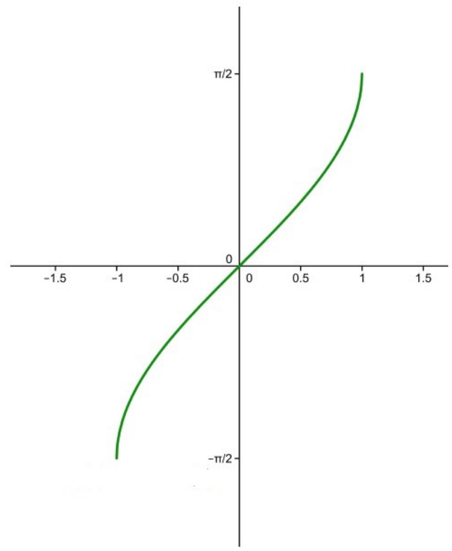
d) $\sin^3(x)\cos(x) + \cos^3(x)\sin(x) \leq \frac{1}{4}$,

e) $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$,

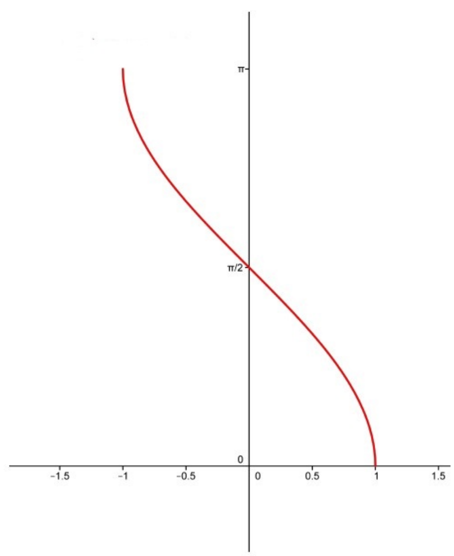
f) $\sin^3(x) - 4\sin^2(x) - \sin(x) + 4 \leq 0$.

Funkcje cyklometryczne

Funkcja cyklometryczna	$x=0$	$x=\frac{1}{2}$	$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=1$
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

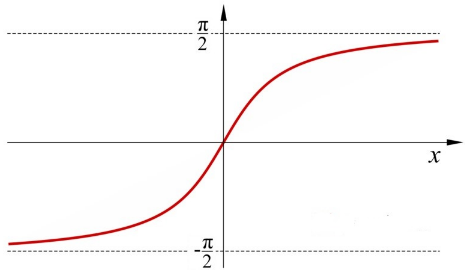


Wykres funkcji $y = \arcsin(x)$ *(czytaj: arkus sinus)*
Dziedzina funkcji $y = \arcsin(x)$: zbiór $[-1; 1]$.

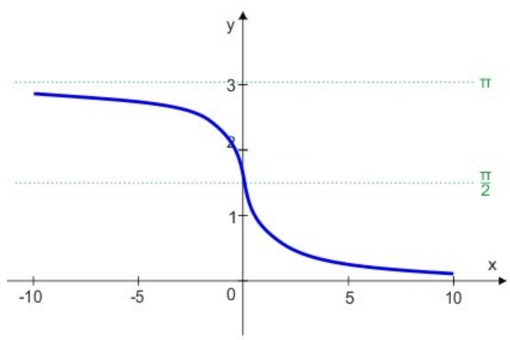


Wykres funkcji $y = \arccos(x)$ *(czytaj: arkus kosinus)*
Dziedzina funkcji $y = \arccos(x)$: zbiór $[-1; 1]$.

Funkcja cyklometryczna	$x=0$	$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x=1$	$x=\sqrt{3}$
$\operatorname{arc\,tg}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arc\,ctg}(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$



Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$ *(czytaj: arkus tangens)*
Dziedzina funkcji $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$: zbiór $\mathbb{R}$



Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,ctg}(x)$ *(czytaj: arkus kotangens)*
Dziedzina funkcji $y = \operatorname{arc\,ctg}(x)$: zbiór $\mathbb{R}$

Przydatne zależności funkcji cyklometrycznych (prawdziwe oczywiście przy ograniczeniach zgodnych z dziedzinami):

Z1) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$,

Z2) $\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{\pi}{2}$,

Z3) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$,

Z4) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$,

Z5) $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg}(x)$,

Z6) $\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg}(x)$,

Z7) dla $0 \le x \le 1$ zachodzi równość: $\arccos(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$,

Z8) dla $-1 \le x \le 0$ zachodzi równość: $\arccos(x) = \pi - \arcsin(\sqrt{1-x^2})$,

Zadanie 4. Oblicz:

a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

b) $\arcsin(-1)$,

c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

d) $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3})$,

e) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

f) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$,

g) $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

h) $\sin(\arcsin(1))$,

i) $\sin(\arccos(1))$,

j) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania:

a) $\arcsin(x) = -\frac{\pi}{3}$,

b) $\cos(\operatorname{arc\,tg}(x-1)^3) = \pi$,

c) $\arcsin(x) = \arccos(x)$,

d) $\operatorname{arc\,tg}(x) = \operatorname{arc\,ctg}(x)$,

e) $\operatorname{arc\,tg}^2(x) - \operatorname{arc\,tg}(x) = 0$,

f) $3\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{5}{6}\pi$,

g) $3\operatorname{arc\,tg}(x) + 2\operatorname{arc\,ctg}(x) = \frac{4}{3}\pi$.

Zadanie 6. Rozwiązać nierówności:

a) $\arccos(x+\pi) > \frac{\pi}{3}$,

b) $3\sin(\arccos(x)) < 3$,

c) $\frac{\pi}{2} < 3\arcsin(x) < \pi$,

d) $\arccos\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) \geq \arccos(2x)$,

e) $\arcsin\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right) < \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$,

f) $4\arccos^2(x) > \arccos(x)$,

g) $|\arcsin(2x)| \geq \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 7. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log\left(\frac{\pi}{6} - \arccos\left(\frac{x-5}{3}\right)\right)$,

b) $f(x) = \log\left(\arcsin\left(\frac{2x-1}{4}\right)\right)$,

c) $f(x) = \log\left(-\frac{\pi}{6} - \arcsin\left(x-3\right)\right)$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{6}\pi - \arccos\left(\log_{0,5}(2x)\right)}}$.