Application of GLM Advancements to Non-Life Insurance Pricing

Leonardo Stincone

Università degli Studi di Trieste

11 Maggio 2021

Indice

Contratto di Assicurazione, Art. 1882, Codice Civile Italiano

L'assicurazione è il contratto col quale l'**assicuratore**, verso il pagamento di un **premio**, si obbliga a rivalere l'**assicurato**, entro i limiti convenuti,

1. del **danno** ad esso prodotto da un **sinistro**,
2. ovvero a pagare un **capitale** o una **rendita** al verificarsi di un **evento** attinente alla **vita umana**.

Da un punto di vista matematico

	t_1	τ_1	τ_2	$\dots$	τ_{N-1}	τ_N	t_2	t
Assicurato	$-P$							
Assicuratore	P	$-Z_1$	$-Z_2$		$-Z_{N-1}$	$-Z_N$		

Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

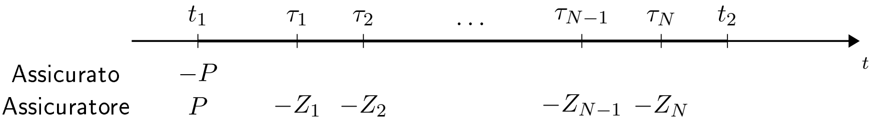
ha distribuzione composta.

Proprietà

$$\begin{tikzcd} F_N \arrow[dr] & & F_Z \arrow[dl] \\ & F_S & \end{tikzcd}$$

$$E(S) = E(N)E(Z)$$

Da un punto di vista matematico



Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

Proprietà

$$F_N \rightarrow F_S \leftarrow F_Z$$

$$E(S) = E(N)E(Z)$$

	t_1	τ_1	τ_2	$\dots$	τ_{N-1}	τ_N	t_2	t
Assicurato	$-P$							
Assicuratore	P	$-Z_1$	$-Z_2$		$-Z_{N-1}$	$-Z_N$		

Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

Proprietà

$$\begin{tikzcd} F_N \arrow[dr] & & F_Z \arrow[dl] \\ & F_S & \end{tikzcd}$$

$$E(S) = E(N)E(Z)$$

Personalizzazione e Variabili Esplicative

Variabili esplicative

Possibili variabili esplicative per il pricing delle assicurazioni motor:

- Informazioni sul veicolo assicurato;
- Informazioni generiche sul contraente;
- Informazioni assicurative sul contraente;
- Opzioni sulla polizza assicurativa;
- Dati telematici.

Queste variabili possono essere codificate come un vettore di numeri reali:

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^p$$

Regola di Pricing

Una *Regola di Pricing* è una funzione $f(\cdot)$ che da una $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}$ restituisce un prezzo P_i:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{X} &\longrightarrow R_+ \\ \boldsymbol{x}_i &\longmapsto P_i \end{aligned}$$

Modellare una variabile risposta

Modellare una variabile risposta Y_i significa stimare una funzione $r(\cdot)$ che da una $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}$ restituisce la distribuzione di Y_i o alcuni suoi momenti:

$$\begin{aligned} r: \quad \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \boldsymbol{x}_i &\longmapsto F_{Y_i}, E(Y_i), Var(Y_i) \end{aligned}$$

Variabili esplicative

Possibili variabili esplicative per il pricing delle assicurazioni motor:

- Informazioni sul veicolo assicurato;
- Informazioni generiche sul contraente;
- Informazioni assicurative sul contraente;
- Opzioni sulla polizza assicurativa;
- Dati telematici.

Queste variabili possono essere codificate come un vettore di numeri reali:

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$$

Regola di Pricing

Una *Regola di Pricing* è una funzione $f(\cdot)$ che da una $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}$ restituisce un prezzo P_i:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{X} & \longrightarrow & R_+ \\ & \boldsymbol{x}_i & \longmapsto & P_i \end{array}$$

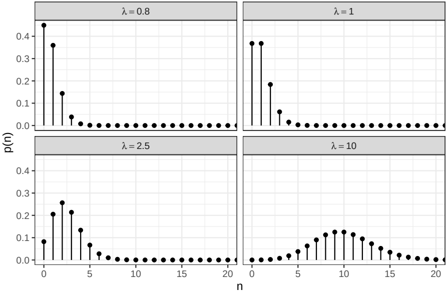
Modellare una variabile risposta

Modellare una variabile risposta Y_i significa stimare una funzione $r(\cdot)$ che da una $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}$ restituisce la distribuzione di Y_i o alcuni suoi momenti:

$$\begin{array}{cccc} r: & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & \boldsymbol{x}_i & \longmapsto & F_{Y_i}, E(Y_i), Var(Y_i) \end{array}$$

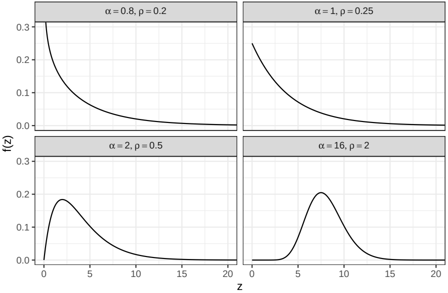
Distribuzione di Poisson

$$p_N(n) = P\left(N = n\right) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad \lambda > 0$$



Distribuzione Gamma

$$f_Z(z) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\rho z}, \quad \alpha > 0,\ \rho > 0$$



Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$
$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + \text{Expenses}_i$$

$\downarrow$

Altri Caricamenti
Vincoli Normativi
Commercializzazioni

$$P_i^{(\text{tariff})}$$
$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - \text{Discount}_i$$

Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

1. Pricing Tecnico
2. Aspettativa del Cliente
3. Strategia di Business

Ulteriori modelli

- New Business: Probabilità di Conversion
- Rinnovi: Probabilità di Retention

Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$
$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + \text{Expenses}_i$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{array}{l}\text{Altri Caricamenti}\\ \text{Vincoli Normativi}\\ \text{Commercializzazioni}\end{array}$$

$$P_i^{(\text{tariff})}$$
$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - \text{Discount}_i$$

Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

1. Pricing Tecnico
2. Aspettativa del Cliente
3. Strategia di Business

Ulteriori modelli

- New Business: Probabilità di Conversion
- Rinnovi: Probabilità di Retention

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Dato $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_1, \omega_1, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_n, \omega_n, y_n)\}$
con $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ realizzazione di $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$.

Assumiamo che:

1. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$ siano indipendenti con distribuzione appartenente a una stessa famiglia esponenziale lineare:

$$f(y_i; \theta_i, \phi, \omega_i) = \exp\left\{\frac{\omega_i}{\phi}\left[y_i\theta_i - b(\theta_i)\right]\right\} c(y_i, \phi, \omega_i), \quad y_i \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}$$

2. $\boldsymbol{x}_i = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})^t$ agisca su Y_i tramite il predittore lineare η_i

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$

3. η_i sia legato a $\mu_i = E(Y_i)$ tramite la funzione legame $g(\cdot)$

$$g(\mu_i) = \eta_i = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{\beta}$$

Stima di un GLM

Stima di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & (\boldsymbol{\beta}, \phi) & \longmapsto & f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) \end{array}$$

La stima di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\boldsymbol{\beta}, \phi; \boldsymbol{y})$$

Devianza

La devianza è

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{y}) = -2\phi \left(\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) - \ell_S \left(\boldsymbol{\beta}^*, \phi; \boldsymbol{y} \right) \right)$$

dove $\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) = \log L \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right)$
e $\boldsymbol{\beta}^*$ sono i parametri del modello saturo.

La stima di massima verosimiglianza può essere ottenuta come:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$$

Stima di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$
\begin{array}{rccc}
L: & \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda & \longrightarrow & [0, +\infty[\\
& (\boldsymbol{\beta}, \phi) & \longmapsto & f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi)
\end{array}
$$

La stima di massima verosimiglianza è:

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, L(\boldsymbol{\beta}, \phi; \boldsymbol{y})
$$

Devianza

La devianza è

$$
D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{y}) = -2\phi \left(\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) - \ell_S (\boldsymbol{\beta}^*, \phi; \boldsymbol{y}) \right)
$$

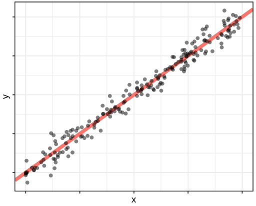
dove $\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) = \log L \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right)$
e $\boldsymbol{\beta}^*$ sono i parametri del modello saturo.

La stima di massima verosimiglianza può essere ottenuta come:

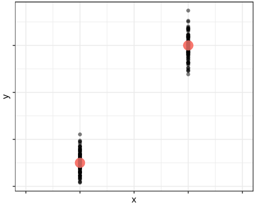
$$
\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})
$$

Effetto delle variabili in un GLM

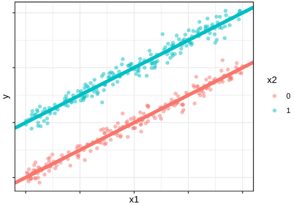
Quantitativa



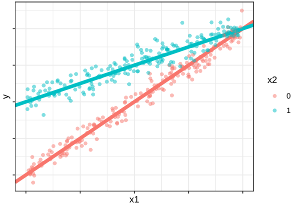
Qualitativa



Quantitativa e qualitativa senza interazione

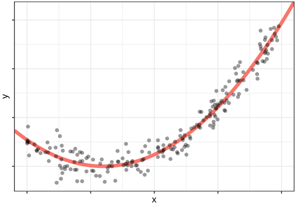


Quantitativa e qualitativa con interazione

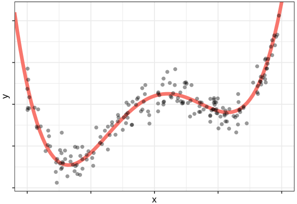


Variabili quantitative ed effetti non lineari

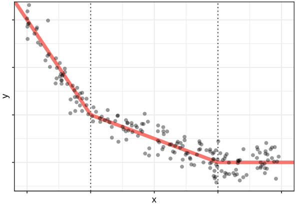
Polinomiale di grado 2



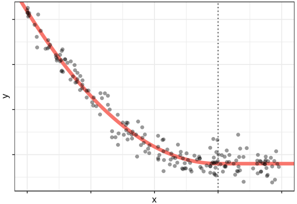
Polinomiale di grado 4

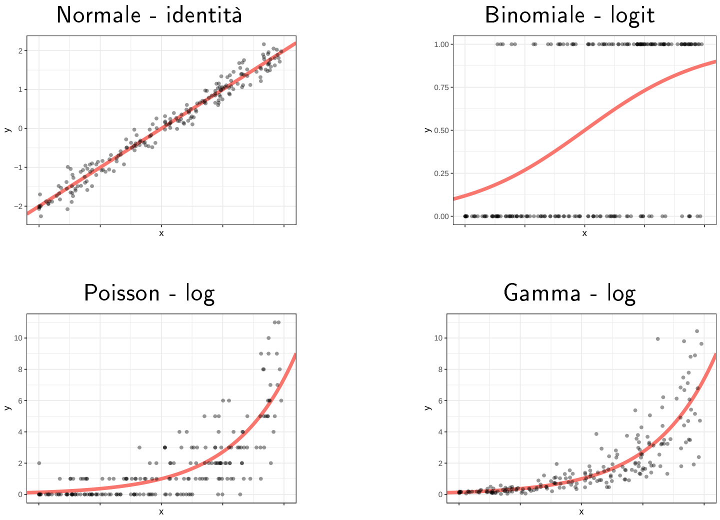


Piece-wise lineare



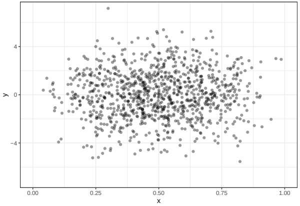
Piece-wise polinomiale di grado 2



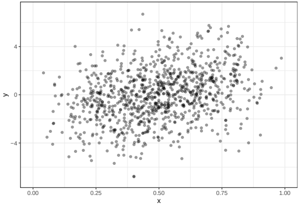

Normale - identità
Binomiale - logit
Poisson - log
Gamma - log
y
x
2
1
0
−1
−2
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
10
8
6
4
2
0

Grafici per visualizzare l'effetto delle variabili

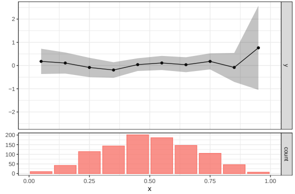
Nessun effetto - non raggruppati



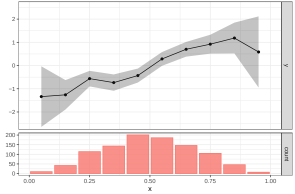
Effetto positivo - non raggruppati



Nessun effetto - raggruppati



Effetto positivo - raggruppati



Criteri per la selezione delle variabili

- Visualizzazione
- Test di verifica di ipotesi

$$\begin{cases} H_0: & \beta_{j_k} = 0 \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, s\} \\ H_1: & \exists k : \beta_{j_k} \neq 0 \end{cases}$$

- Criteri di informazione

$$AIC = -2\ell(\boldsymbol{\beta}) + 2(p+1)$$
$$BIC = -2\ell(\boldsymbol{\beta}) + \log(n)(p+1)$$

- Divisione del dataset tra training set e test set
- Cross validation

$\Longrightarrow$ Algoritmi stepwise

Modello Additivo Generalizzato (GAM)

1. Variabile risposta $\boldsymbol{Y}$ come GLM;
2. Predittore lineare

$$\eta_i = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{\beta} + \sum_{l=1}^{q} f_l(z_{i,l}), \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

   con $f_l(\cdot)$ spline cubica;
3. Funzione legame $g(\cdot)$ come GLM.

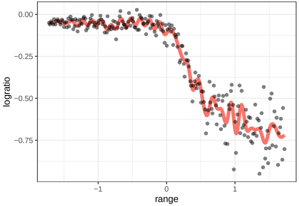
Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \arg\min_{\boldsymbol{f}} \left\{ D(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{y}) + \sum_{l=1}^{q} \lambda_l \int_{a_l}^{b_l} \left(f_l''(x_l)\right)^2 dx \right\}$$

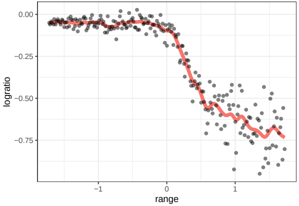
con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ iperparametri di smoothing.

GAM: esempio

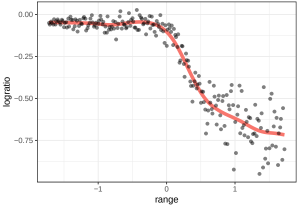
$\lambda = 0$



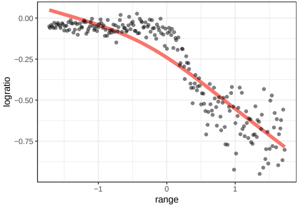
$\lambda = 10$



$\lambda = 10^3$

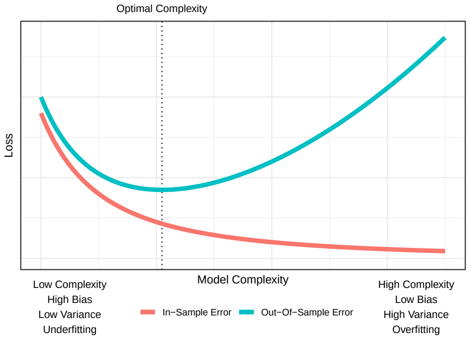


$\lambda = 10^6$



Scomposizione dello scarto quadratico medio (MSE)

$$MSE\left(\tilde{\beta}_j\right) \overset{\text{def}}{=} E\left(\left(\tilde{\beta}_j - \beta_j\right)^2\right) = \underbrace{\left(E(\tilde{\beta}_j) - \beta_j\right)^2}_{\text{Bias}^2} + \underbrace{Var\left(\tilde{\beta}_j\right)}_{\text{Variance}}$$



Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

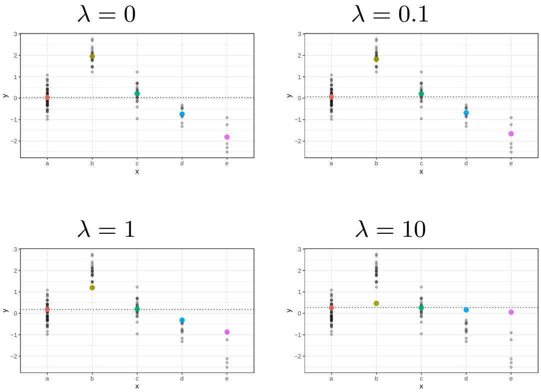
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min} \left\{ D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) + \lambda \|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_2^2 \right\}$$

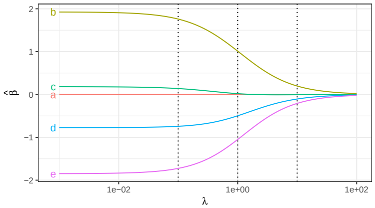
dove

- $\|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$
- $\lambda \geq 0$ iperparametro di penalizzazione

Modello sottostante:GLM

Regressione Ridge: esempio





Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

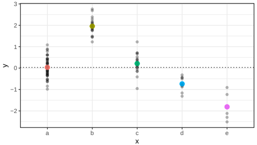
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min} \left\{ D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) + \lambda \|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_1 \right\}$$

dove

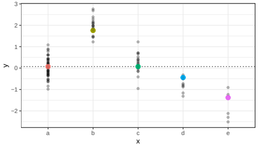
- $\|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |\beta_j|$
- $\lambda \geq 0$ iperparametro di penalizzazione

Modello sottostante:GLM

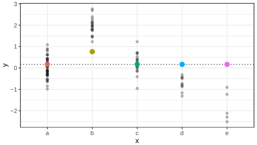
$\lambda = 0$



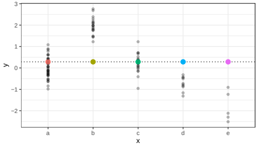
$\lambda = 0.1$

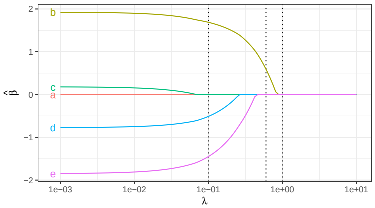


$\lambda = 1$



$\lambda = 10$





Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \left\{ D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) + \lambda \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha |\beta_j| + (1-\alpha)|\beta_j|^2 \right) \right\}$$

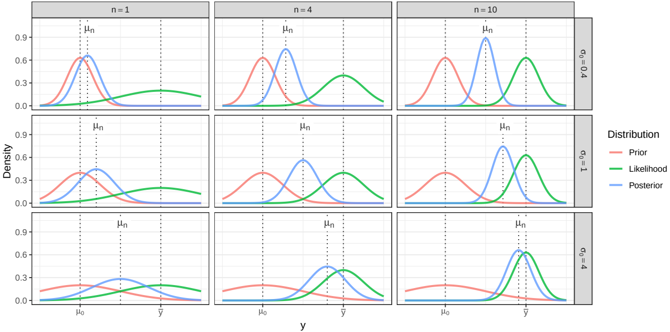
dove

- $\|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |\beta_j|$
- $\|\boldsymbol{\beta}_{\setminus 0}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$
- $\lambda \geq 0$ iperparametro di penalizzazione
- $\alpha \in [0, 1]$ iperparametro che determina il peso della LASSO

Modello sottostante:GLM

Teorema di Bayes

$$\pi(\theta|\boldsymbol{y}) = \frac{p(\boldsymbol{y}|\theta)\pi(\theta)}{p(\boldsymbol{y})}$$



Stimatori Bayesiani per i GLM

Stima di Massima Verosimiglianza

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ML} &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, L\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \ell\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, D\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}\right)
\end{aligned}
$$

Stima di Massimo a Posteriori

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}^{MAP} &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \pi\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \left\{L\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right)\pi(\boldsymbol{\beta})\right\} \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \left\{\ell\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) + \log\left(\pi(\boldsymbol{\beta})\right)\right\} \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, \left\{D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) - 2\phi\log\left(\pi(\boldsymbol{\beta})\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Stima di Massima Verosimiglianza

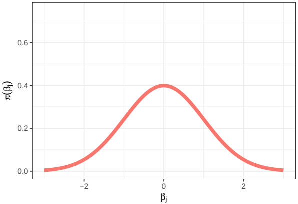
$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}^{ML} &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, L\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \ell\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, D\left(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}\right)
\end{aligned}$$

Stima di Massimo a Posteriori

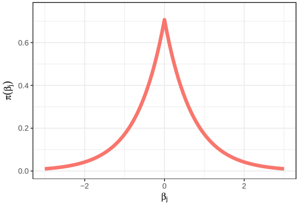
$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}^{MAP} &= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \pi\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \left\{L\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right)\pi(\boldsymbol{\beta})\right\} \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, \left\{\ell\left(\boldsymbol{\beta}, \phi \mid \boldsymbol{y}\right) + \log\left(\pi(\boldsymbol{\beta})\right)\right\} \\
&= \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, \left\{D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) - 2\phi\log\left(\pi(\boldsymbol{\beta})\right)\right\}
\end{aligned}$$

Regressione Ridge e LASSO come Stimatori Bayesiani

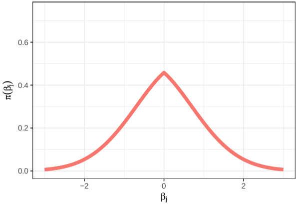
Distribuzione Normale



Distribuzione di Laplace



Distribuzion a priori
di un Elastic Net con $\alpha = \frac{1}{2}$



Titolo di prova