

# Application of GLM Advancements to Non-Life Insurance Pricing

Leonardo Stincone

Università degli Studi di Trieste

11 Maggio 2021



## 1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

## 2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

- Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

- Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

- Stimatori Shrinkage per i GLM

- Stimatori Bayesiani per i GLM

- Algoritmi di Machine Learning

- Confronto tra i modelli

## 3. Applicazione Pratica



## 1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

## 2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

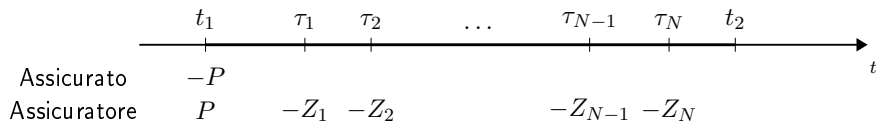
## 3. Applicazione Pratica



## Contratto di Assicurazione, Art. 1882, Codice Civile Italiano

L'assicurazione è il contratto col quale l'**assicuratore**, verso il pagamento di un **premio**, si obbliga a rivalere l'**assicurato**, entro i limiti convenuti,

- ① del **danno** ad esso prodotto da un **sinistro**,
- ② ovvero a pagare un **capitale** o una **rendita** al verificarsi di un **evento** attinente alla **vita umana**.



## Distribuzione composta

Assumiamo che:

- 1  $\forall n > 0$ ,  $Z_1|N = n$ ,  $Z_2|N = n$ ,  $\dots$ ,  $Z_n|N = n$  siano i.i.d.;
- 2 la distribuzione di  $Z_i|N = n$ ,  $i \leq n$  non dipenda da  $n$ .

Sotto queste ipotesi diciamo che:

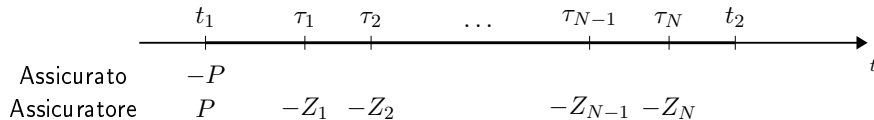
$$S = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N Z_i & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

## Proprietà



$$E(S) = E(N)E(Z)$$



## Distribuzione composta

Assumiamo che:

- 1  $\forall n > 0, Z_1|N = n, Z_2|N = n, \dots, Z_n|N = n$  siano i.i.d.;
- 2 la distribuzione di  $Z_i|N = n, i \leq n$  non dipenda da  $n$ .

Sotto queste ipotesi diciamo che:

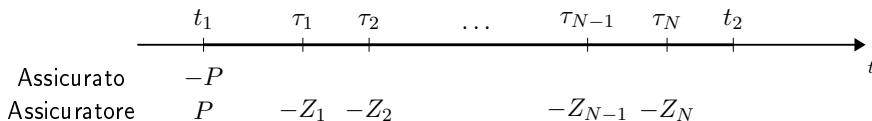
$$S = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N Z_i & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

## Proprietà



$$E(S) = E(N)E(Z)$$



## Distribuzione composta

Assumiamo che:

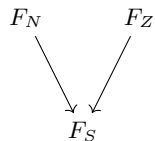
- ①  $\forall n > 0, Z_1|N = n, Z_2|N = n, \dots, Z_n|N = n$  siano i.i.d.;
- ② la distribuzione di  $Z_i|N = n, i \leq n$  non dipenda da  $n$ .

Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{se } N = 0 \\ \sum_{i=1}^N Z_i & \text{se } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

## Proprietà



$$E(S) = E(N)E(Z)$$

## Variabili esplicative

Possibili variabili esplicative per il pricing delle assicurazioni motor:

- Informazioni sul veicolo assicurato;
- Informazioni generiche sull'assicurato;
- Informazioni assicurative sull'assicurato;
- Opzioni della polizza assicurativa;
- Informazioni sull'assicurato in quanto cliente;
- Dati telematici.

Queste variabili possono essere codificate come un vettore di numeri reali:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$$

## Regola di Pricing

Una *Regola di Pricing* è una funzione  $f(\cdot)$  che da una  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  restituisce un prezzo  $P_i$ :

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathcal{X} & \longrightarrow R_+ \\ & \mathbf{x}_i & \longmapsto P_i \end{array}$$

## Modellare una variabile risposta

Modellare una variabile risposta  $Y_i$  significa stimare una funzione  $r(\cdot)$  che da una  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  restituisce la distribuzione di  $Y_i$  o alcuni suoi momenti:

$$\begin{array}{ccc} r : & \mathcal{X} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ & \mathbf{x}_i & \longmapsto F_{Y_i}, E(Y_i), Var(Y_i) \end{array}$$



## Variabili esplicative

Possibili variabili esplicative per il pricing delle assicurazioni motor:

- Informazioni sul veicolo assicurato;
- Informazioni generiche sull'assicurato;
- Informazioni assicurative sull'assicurato;
- Opzioni della polizza assicurativa;
- Informazioni sull'assicurato in quanto cliente;
- Dati telematici.

Queste variabili possono essere codificate come un vettore di numeri reali:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$$

## Regola di Pricing

Una *Regola di Pricing* è una funzione  $f(\cdot)$  che da una  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  restituisce un prezzo  $P_i$ :

$$\begin{array}{lll} f : & \mathcal{X} & \longrightarrow R_+ \\ & \mathbf{x}_i & \longmapsto P_i \end{array}$$

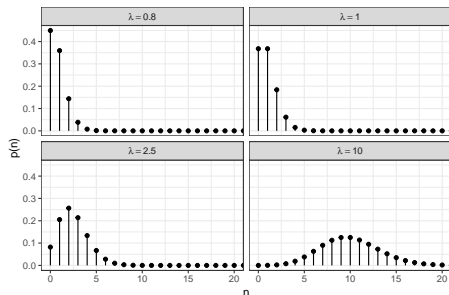
## Modellare una variabile risposta

*Modellare una variabile risposta*  $Y_i$  significa stimare una funzione  $r(\cdot)$  che da una  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$  restituisce la distribuzione di  $Y_i$  o alcuni suoi momenti:

$$\begin{array}{lll} r : & \mathcal{X} & \longrightarrow \mathcal{C} \\ & \mathbf{x}_i & \longmapsto F_{Y_i}, E(Y_i), Var(Y_i) \end{array}$$

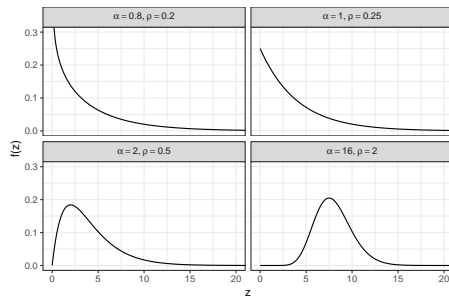
## Distribuzione di Poisson

$$p_N(n) = P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \lambda > 0$$



## Distribuzione Gamma

$$f_Z(z) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\rho z}, \quad \alpha > 0, \rho > 0$$



## Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$

$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + \text{Expenses}_i$$

Altri Caricamenti  
Vincoli Normativi  
Commercializzazioni

$$P_i^{(\text{tariff})}$$

$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - \text{Discount}_i$$

## Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

- 1 Pricing Tecnico
- 2 Aspettativa del Cliente
  - ▶ New Business: *Probabilità di Conversion*
  - ▶ Rinnovi: *Probabilità di Retention*
- 3 Strategia di Business
  - ▶ *Lifetime value*
  - ▶ *Profitti/crescita*

## Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$

$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + \text{Expenses}_i$$

Altri Caricamenti  
Vincoli Normativi  
Commercializzazioni

$$P_i^{(\text{tariff})}$$

$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - \text{Discount}_i$$

## Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

- ① Pricing Tecnico
- ② Aspettativa del Cliente
  - ▶ New Business: *Probabilità di Conversion*
  - ▶ Rinnovi: *Probabilità di Retention*
- ③ Strategia di Business
  - ▶ *Lifetime value*
  - ▶ Profitti/crescita

## 1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

## 2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

## 3. Applicazione Pratica



## Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Dato  $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_1, \omega_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, \omega_n, y_n)\}$

con  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$  realizzazione di  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$ .

Assumiamo che:

- 1  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^t$  siano indipendenti con distribuzione appartenente a una stessa famiglia esponenziale lineare:

$$f(y_i; \theta_i, \phi, \omega_i) = \exp \left\{ \frac{\omega_i}{\phi} [y_i \theta_i - b(\theta_i)] \right\} c(y_i, \phi, \omega_i), \quad y_i \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}$$

- 2  $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ip})^t$  agisca su  $Y_i$  tramite il predittore lineare  $\eta_i$

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}$$

- 3  $\eta_i$  sia legato a  $\mu_i = E(Y_i)$  tramite la funzione legame  $g(\cdot)$

$$g(\mu_i) = \eta_i = \mathbf{x}_i^t \boldsymbol{\beta}$$



## Stima di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ (\beta, \phi) &\longmapsto f_Y(\mathbf{y}; \theta, \phi) \end{aligned}$$

La stima di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\beta, \phi; \mathbf{y})$$

## Devianza

La devianza è

$$D(\hat{\beta}, \mathbf{y}) = -2\phi \left( \ell(\hat{\beta}, \phi; \mathbf{y}) - \ell_s(\beta^*, \phi; \mathbf{y}) \right)$$

dove  $\ell(\hat{\beta}, \phi; \mathbf{y}) = \log L(\hat{\beta}, \phi; \mathbf{y})$   
e  $\beta^*$  sono i parametri del modello saturo.

La stima di massima verosimiglianza può essere ottenuta come:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\beta, \mathbf{y})$$



## Stima di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ (\boldsymbol{\beta}, \phi) &\longmapsto f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) \end{aligned}$$

La stima di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\boldsymbol{\beta}, \phi; \mathbf{y})$$

## Devianza

La devianza è

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{y}) = -2\phi \left( \ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \mathbf{y}) - \ell_S(\boldsymbol{\beta}^*, \phi; \mathbf{y}) \right)$$

dove  $\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \mathbf{y}) = \log L(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \mathbf{y})$   
e  $\boldsymbol{\beta}^*$  sono i parametri del modello saturo.

La stima di massima verosimiglianza può essere ottenuta come:

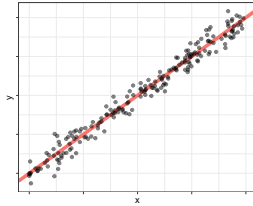
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{y})$$



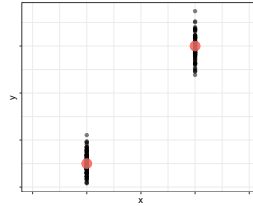


# Effetto delle variabili in un GLM

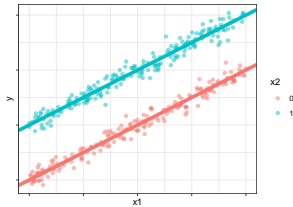
Quantitativa



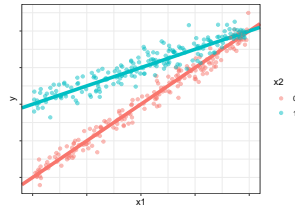
Qualitativa



Quantitativa e qualitativa  
senza interazione

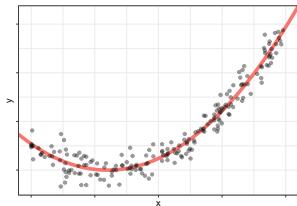


Quantitativa e qualitativa  
con interazione

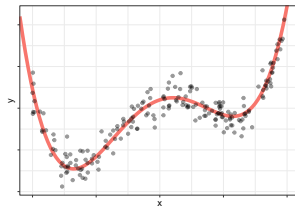


# Variabili quantitative ed effetti non lineari

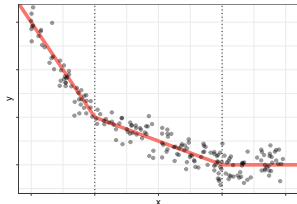
Polinomiale di grado 2



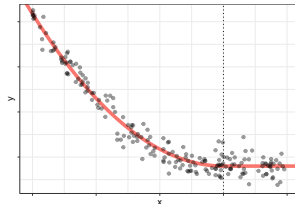
Polinomiale di grado 4



Piece-wise lineare

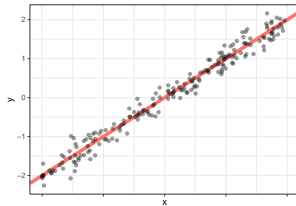


Piece-wise polinomiale di grado 2

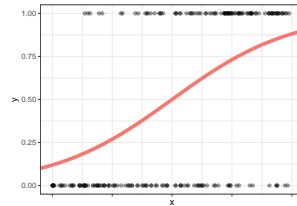


# Funzione Legame e Risposta

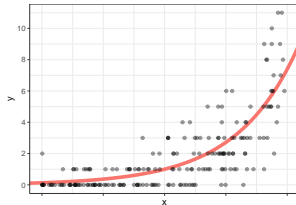
Normale - identità



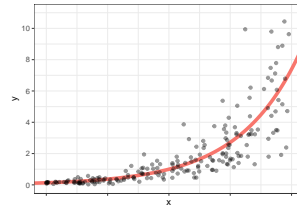
Binomiale - logit



Poisson - log

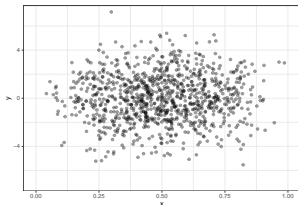


Gamma - log

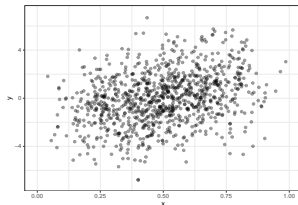


# Grafici per visualizzare l'effetto delle variabili

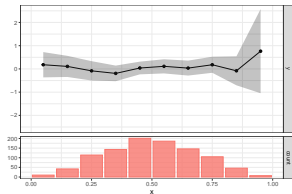
Nessun effetto - non raggruppati



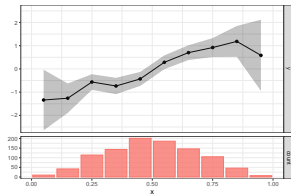
Effetto positivo - non raggruppati



Nessun effetto - raggruppati



Effetto positivo - raggruppati



## Criteri per la selezione delle variabili

- Visualizzazione
- Test di verifica di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \beta_{j_k} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, s\} \\ H_1 : \exists k : \beta_{j_k} \neq 0 \end{cases}$$

- Criteri di informazione

$$AIC = -2\ell(\beta) + 2(p + 1)$$

$$BIC = -2\ell(\beta) + \log(n)(p + 1)$$

- Divisione del dataset tra training set e test set
- Cross validation

$\implies$  Algoritmi stepwise



1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

3. Applicazione Pratica



## Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

- 1 Variabile risposta  $\mathbf{Y}$  come GLM;
- 2 Predittore lineare

$$\eta_i = \mathbf{x}_i^t \boldsymbol{\beta} + \sum_{l=1}^q f_l(z_{i,l}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

con  $f_l(\cdot)$  spline cubica;

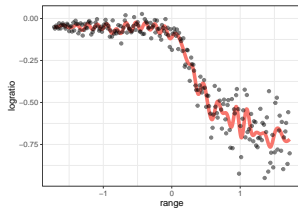
- 3 Funzione legame  $g(\cdot)$  come GLM.

## Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

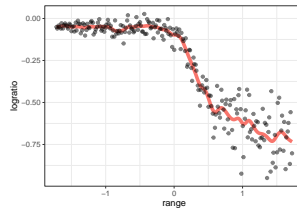
$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ D(\mathbf{f}, \mathbf{y}) + \sum_{l=1}^q \lambda_l \int_{a_l}^{b_l} (f_l''(x_l))^2 dx \right\}$$

con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  iperparametri di smoothing.

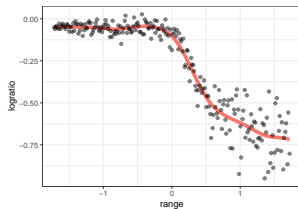
$\lambda = 0$



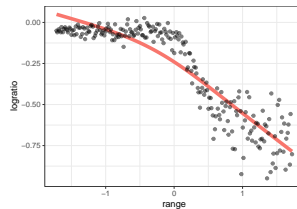
$\lambda = 10$



$\lambda = 10^3$



$\lambda = 10^6$





## 1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

## 2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

**Stimatori Shrinkage per i GLM**

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

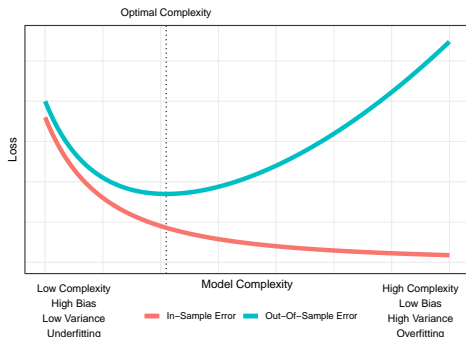
Confronto tra i modelli

## 3. Applicazione Pratica



## Scomposizione dello scarto quadratico medio (MSE)

$$MSE(\tilde{\beta}_j) \stackrel{\text{def}}{=} E\left((\tilde{\beta}_j - \beta_j)^2\right) = \underbrace{\left(E(\tilde{\beta}_j) - \beta_j\right)^2}_{\text{Bias}^2} + \underbrace{\text{Var}(\tilde{\beta}_j)}_{\text{Variance}}$$



## Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left\{ D(\beta, \mathbf{y}) + \lambda \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right\}$$

con

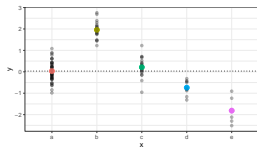
- $\lambda \geq 0$  iperparametro di penalizzazione

Modello sottostante: GLM

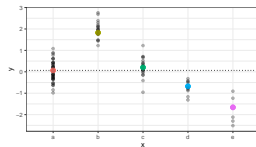


# Regressione Ridge: esempio

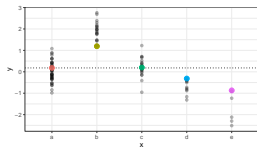
$\lambda = 0$



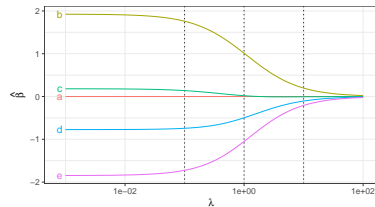
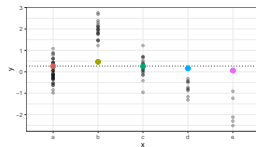
$\lambda = 0.1$



$\lambda = 1$



$\lambda = 10$



## Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left\{ D(\beta, \mathbf{y}) + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j| \right\}$$

con

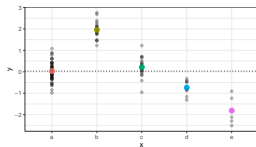
- $\lambda \geq 0$  iperparametro di penalizzazione

Modello sottostante: GLM

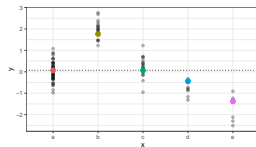


# Regressione LASSO: esempio

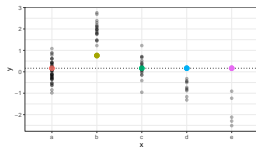
$\lambda = 0$



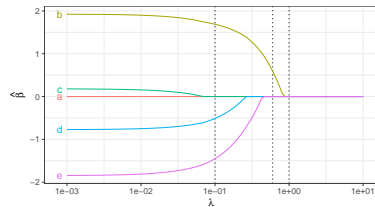
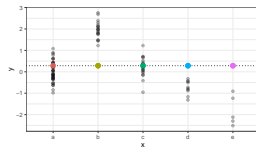
$\lambda = 0.1$



$\lambda = 1$



$\lambda = 10$



## Stima di Massima Verosimiglianza con Penalizzazione

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \left\{ D(\beta, \mathbf{y}) + \lambda \sum_{j=1}^p (\alpha |\beta_j| + (1 - \alpha) |\beta_j|^2) \right\}$$

dove

- $\lambda \geq 0$  iperparametro di penalizzazione
- $\alpha \in [0, 1]$  iperparametro che determina il peso della penalizzazione LASSO
  - ▶  $\alpha = 0 \implies$  Regressione Ridge
  - ▶  $\alpha = 1 \implies$  Regressione LASSO

Modello sottostante: GLM



1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

**Stimatori Bayesiani per i GLM**

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

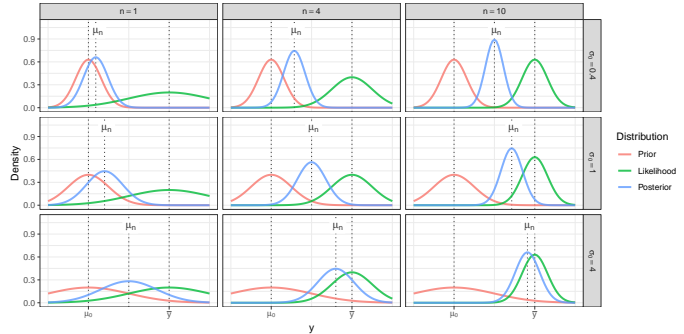
3. Applicazione Pratica





## Teorema di Bayes

$$\pi(\theta|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\theta)\pi(\theta)}{p(\mathbf{y})}$$



## Stima di Massima Verosimiglianza

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{ML} &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \ell(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\beta, \mathbf{y})\end{aligned}$$

## Stima di Massimo a Posteriori

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{MAP} &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \pi(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{L(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \pi(\beta)\} \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{\ell(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) + \log(\pi(\beta))\} \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{D(\beta, \mathbf{y}) - 2\phi \log(\pi(\beta))\}\end{aligned}$$

## Stima di Massima Verosimiglianza

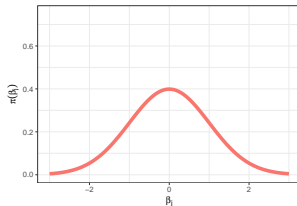
$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{ML} &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \ell(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\beta, \mathbf{y})\end{aligned}$$

## Stima di Massimo a Posteriori

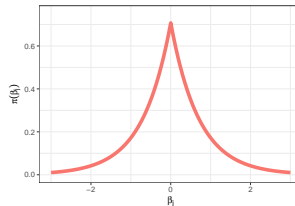
$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{MAP} &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \pi(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{L(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) \pi(\beta)\} \\ &= \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{\ell(\beta, \phi \mid \mathbf{y}) + \log(\pi(\beta))\} \\ &= \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \{D(\beta, \mathbf{y}) - 2\phi \log(\pi(\beta))\}\end{aligned}$$

# Regressione Ridge e LASSO come Stimatori Bayesiani

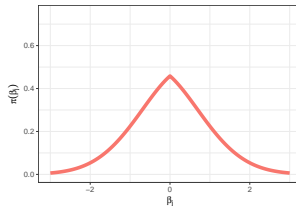
Distribuzione Normale  
⇒ Regressione Ridge



Distribuzione di Laplace  
⇒ Regressione LASSO



Distribuzione intermedia  
⇒ Elastic Net



## Altre distribuzioni a priori

- Diverse varianze a priori

$$\beta_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$$

- Diverse medie a priori

$$\beta_j \sim \mathcal{N}(\beta_{j0}, \sigma_j^2)$$

- Altre distribuzioni a priori

$$\pi(\beta_j) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_j^2} & \text{if } \beta_j \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Vantaggi stimatori Bayesiani

- Introduzione informazione esterna ai dati con una robusta metodologia statistica

- Rimpiazzamento degli offset  
Scelgo  $\sigma_j^2$  tale che  $\hat{\beta}^{MAP} = \hat{\beta}^{\text{offset}}$

- ▶ Ho accortezza di quanto è forte la correzione applicata
- ▶ Se cambio qualche altro parametro e rifitto il modello, in automatico  $\hat{\beta}^{MAP}$  viene ristimato

## Altre distribuzioni a priori

- Diverse varianze a priori

$$\beta_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2)$$

- Diverse medie a priori

$$\beta_j \sim \mathcal{N}(\beta_{j0}, \sigma_j^2)$$

- Altre distribuzioni a priori

$$\pi(\beta_j) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_j^2} & \text{if } \beta_j \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

## Vantaggi stimatori Bayesiani

- Introduzione informazione esterna ai dati con una robusta metodologia statistica

- Rimpiazzamento degli offset

Scelgo  $\sigma_j^2$  tale che  $\hat{\beta}^{MAP} = \hat{\beta}^{\text{offset}}$

- ▶ Ho accortezza di quanto è forte la correzione applicata
- ▶ Se cambio qualche altro parametro e rifitto il modello, in automatico  $\hat{\beta}^{MAP}$  viene ristimato

## 1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

## 2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

## 3. Applicazione Pratica



## Modelli di Machine Learning

- Gradient Boosting Machine (GBM)
- Random Forest (RF)
- Neural Network (NN)
- Altri ...

## Caratteristiche

- Funzione di regressione con minime assunzioni

$$E(Y_i) = f(x_{i1}, \dots, x_{ip})$$

- Sofisticati algoritmi per prevenire l'overfitting



## Modelli di Machine Learning

- Gradient Boosting Machine (GBM)
- Random Forest (RF)
- Neural Network (NN)
- Altri ...

## Caratteristiche

- Funzione di regressione con minime assunzioni

$$E(Y_i) = \boldsymbol{f}(x_{i1}, \dots, x_{ip})$$

- Sofisticati algoritmi per prevenire l'overfitting

1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni

2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni

Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

Modelli Additivi Generalizzati (GAM)

Stimatori Shrinkage per i GLM

Stimatori Bayesiani per i GLM

Algoritmi di Machine Learning

Confronto tra i modelli

3. Applicazione Pratica



|                                  | GLM<br>Classici | GBM/RF/NN | GLM<br>Advancements |
|----------------------------------|-----------------|-----------|---------------------|
| Interpretabilità                 | ★★★★            | ★★★☆☆     | ★★★★                |
| Controllo delle variabili        | ★★★★            | ★★★☆☆     | ★★★★                |
| Utilizzo di informazioni esterne | ★★★★☆           | ★★★☆☆     | ★★★★                |
| Automazione e scalabilità        | ★★★☆☆           | ★★★★      | ★★★★☆               |
| Flessibilità                     | ★★★☆☆           | ★★★★      | ★★★★☆               |

# L'importanza del Controllo delle Variabili nel Pricing

## Il pricing si basa su

- Osservazioni sul portafoglio passato
- Assunzioni sul portafoglio futuro

### Necessità tecniche per il controllo delle variabili

- Dati non rappresentativi del portafoglio futuro
- Stime con alta varianza su certi cluster

### Necessità commerciali per il controllo delle variabili

- Vincoli normativi
- Pricing opzioni
- Aspettative del cliente
- Strategia di business



# L'importanza del Controllo delle Variabili nel Pricing

## Il pricing si basa su

- Osservazioni sul portafoglio passato
- Assunzioni sul portafoglio futuro

## Necessità tecniche per il controllo delle variabili

- Dati non rappresentativi del portafoglio futuro
- Stime con alta varianza su certi cluster

## Necessità commerciali per il controllo delle variabili

- Vincoli normativi
- Pricing opzioni
- Aspettative del cliente
- Strategia di business



1. Il Pricing nelle Assicurazioni Danni
2. Modelli Statistici per il Pricing nelle Assicurazioni Danni
  - Modelli Lineari Generalizzati (GLM)
  - Modelli Additivi Generalizzati (GAM)
  - Stimatori Shrinkage per i GLM
  - Stimatori Bayesiani per i GLM
  - Algoritmi di Machine Learning
  - Confronto tra i modelli
3. Applicazione Pratica



## Origine del Dataset

Portafoglio RCA costituito da polizze di una provincia italiana nel periodo 2014-2019

| Set   | Osservazioni | Esposizione<br>(rischi anno) | Assicurati | Esposizione per<br>Assicurato | Numero<br>Sinistri | Frequenza<br>Sinistri |
|-------|--------------|------------------------------|------------|-------------------------------|--------------------|-----------------------|
| Train | 227 226      | 107 998.4                    | 27 346     | 3.95                          | 4 823              | 0.045                 |
| Test  | 56 603       | 26 806.3                     | 6 824      | 3.93                          | 1 131              | 0.042                 |
| Tot   | 283 829      | 134 804.7                    | 34 170     | 3.95                          | 5 954              | 0.044                 |

| Descrizione                                    | Numero di variabili<br>per categoria |
|--|--------------------------------------|
| Informazioni sul veicolo assicurato            | 12                                   |
| Informazioni generiche sull'assicurato         | 14                                   |
| Informazioni assicurative sull'assicurato      | 9                                    |
| Opzioni della polizza assicurativa             | 11                                   |
| Informazioni sull'assicurato in quanto cliente | 2                                    |
| Dati telematici                                | 4                                    |
| <b>Totale</b>                                  | <b>52</b>                            |



## Modelli considerati

| Id   | Model           |
|------|-----------------|
| Mod1 | GLM Tot         |
| Mod2 | Elastic Net Tot |
| Mod3 | Ridge Tot       |
| Mod4 | GLM AIC         |
| Mod5 | Elastic Net AIC |
| Mod6 | GAM AIC         |
| Mod7 | GBM Tot         |

## Valutazione

### Metrica di confronto:

Devianza della distribuzione di Poisson  
calcolata sul test set

$$D(\hat{\beta}, \mathbf{y}) = 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right\}$$

## Modelli considerati

| Id   | Model           |
|------|-----------------|
| Mod1 | GLM Tot         |
| Mod2 | Elastic Net Tot |
| Mod3 | Ridge Tot       |
| Mod4 | GLM AIC         |
| Mod5 | Elastic Net AIC |
| Mod6 | GAM AIC         |
| Mod7 | GBM Tot         |

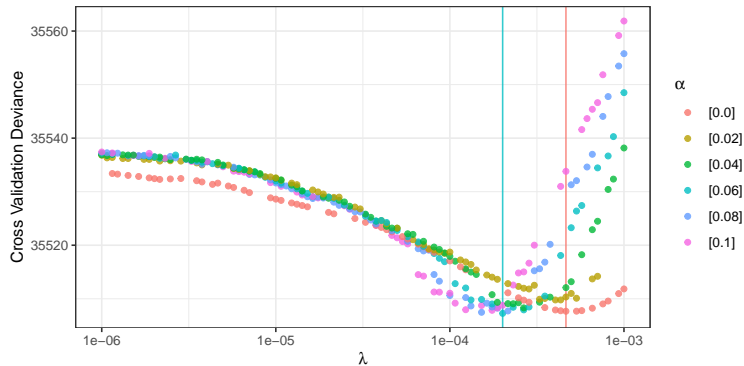
## Valutazione

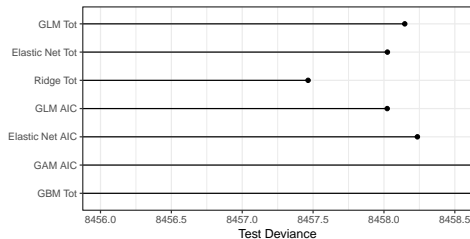
### Metrica di confronto:

Devianza della distribuzione di Poisson  
calcolata sul test set

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{y}) = 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right\}$$

# Elastic Net: Tuning degli Iperparametri





| Id   | Model            | Test Deviance    | Time   | $\alpha$ | $\lambda$ |
|------|------------------|------------------|--------|----------|-----------|
| Mod1 | GLM Tot          | 8 458.147        | 2.7s   | 0        | 0         |
| Mod2 | Elastic Net Tot  | 8 458.024        | 1h 30m | 0.06     | 2.01e-04  |
| Mod3 | <b>Ridge Tot</b> | <b>8 457.465</b> | 1h 30m | 0        | 4.64e-04  |
| Mod4 | GLM AIC          | 8 458.023        | 7h 27m | 0        | 0         |
| Mod5 | Elastic Net AIC  | 8 458.236        | 8h 54m | 0        | 1.63e-05  |
| Mod6 | GAM AIC          | 9 728.570        | 7h 45m | 0        | 0         |
| Mod7 | GBM Tot          | 8 504.178        | 2h 30m |          |           |

- Utilizzare diverse distribuzioni a priori per i diversi  $\beta_j$
- Considerare interazioni
- Ulteriore esplorazione sui GAM
- Modelli geografici
- Implementare i modelli su dataset più grandi con adeguate implementazioni informatiche

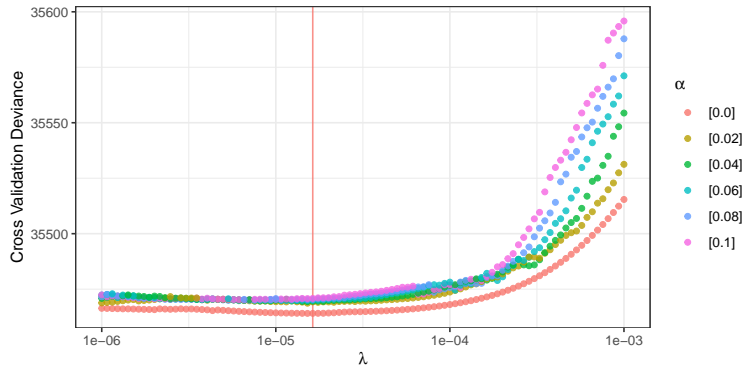
Grazie per l'attenzione



# Backup

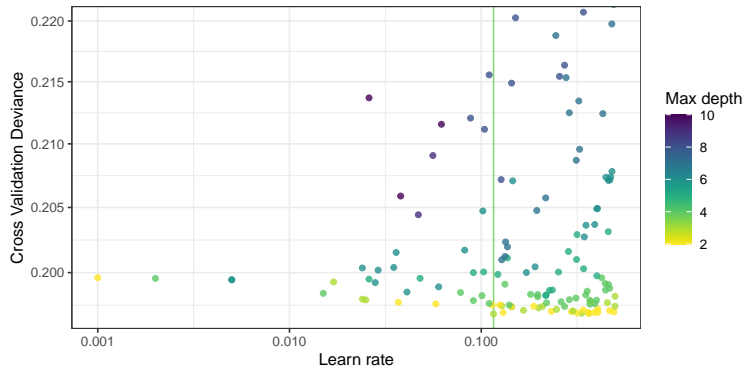


# Elastic Net AIC: Tuning degli Iperparametri

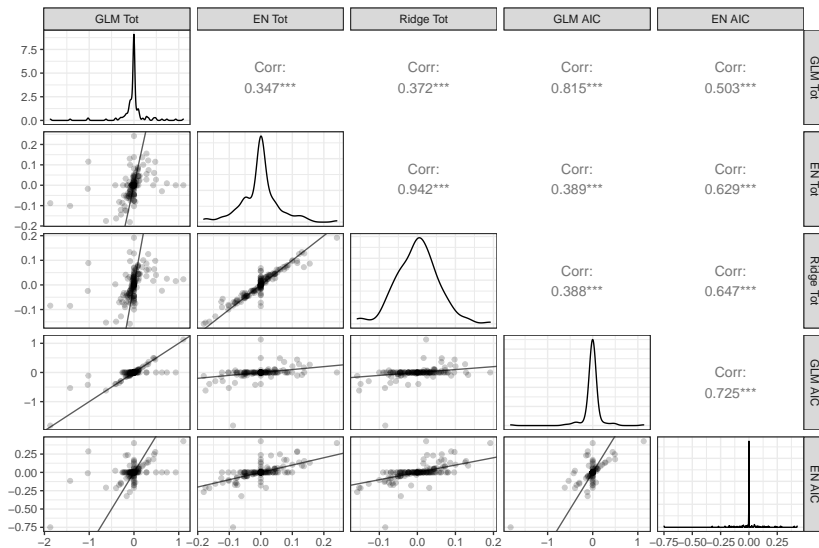




# Elastic Net AIC: Tuning degli Iperparametri



# Confronto tra i coefficienti



| model     | value  |
|-----------|--------|
| GLM Tot   | -6.447 |
| EN Tot    | 0.000  |
| Ridge Tot | -0.003 |
| GLM AIC   | -6.574 |
| EN AIC    | -0.095 |

| GLM Tot  | Elastic Net Tot | GLM AIC  | n  |     |
|----------|-----------------|----------|----|-----|
| $\neq 0$ | $\neq 0$        | $\neq 0$ | 51 | 121 |
| $\neq 0$ | $\neq 0$        | 0        | 48 |     |
| $\neq 0$ | 0               | $\neq 0$ | 6  |     |
| $\neq 0$ | 0               | 0        | 16 |     |
| 0        | $\neq 0$        | 0        | 23 | 38  |
| 0        | 0               | 0        | 15 |     |