Application of GLM Advancements to Non-Life Insurance Pricing

Leonardo Stincone

Università degli Studi di Trieste

10 Maggio 2021

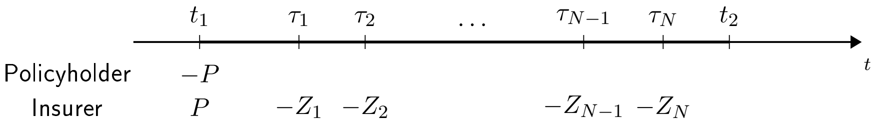
Table of Contents

Table of Contents

Contratto di Assicurazione, Art. 1882, Codice Civile Italiano

L'assicurazione è il contratto col quale l'**assicuratore**, verso il pagamento di un **premio**, si obbliga a rivalere l'**assicurato**, entro i limiti convenuti,

1. del **danno** ad esso prodotto da un **sinistro**,
2. ovvero a pagare un **capitale** o una **rendita** al verificarsi di un **evento** attinente alla **vita umana**.



Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

Sotto queste ipotesi diciamo che:

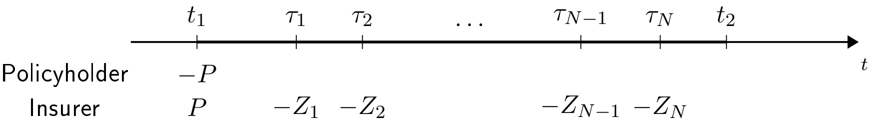
$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

Proprietà

$$\begin{tikzcd} F_N \arrow[dr] & & F_Z \arrow[dl] \\ & F_S & \end{tikzcd}$$

$$E(S) = E(N)E(Z)$$



Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

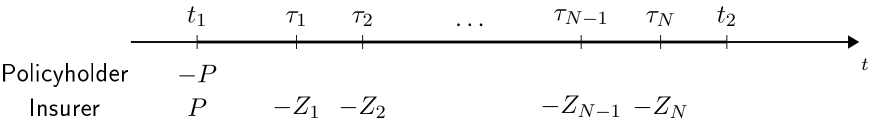
Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

Proprietà

$$E(S) = E(N)E(Z)$$



Distribuzione composta

Assumiamo che:

1. $\forall n > 0,\ Z_1|N = n,\ Z_2|N = n,\ \dots,\ Z_n|N = n$ siano i.i.d.;
2. la distribuzione di $Z_i|N = n,\ i \leq n$ non dipenda da n.

Sotto queste ipotesi diciamo che:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} Z_i & \text{if } N > 0 \end{cases}$$

ha distribuzione composta.

Proprietà

$$\begin{tikzcd} F_N \arrow[dr] & & F_Z \arrow[dl] \\ & F_S & \end{tikzcd}$$

$$E(S) = E(N)E(Z)$$

Variabili esplicative

Possibili variabili esplicative per il pricing delle assicurazioni motor:

- Informazioni sul veicolo assicurato;
- Informazioni generiche sul contraente;
- Informazioni assicurative sul contraente;
- Opzioni sulla polizza assicurativa;
- Dati telematici.

Queste variabili possono essere codificate come un vettore di numeri reali:

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$$

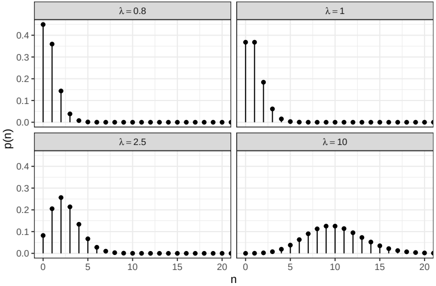
Regola di Pricing

Una *Regola di Pricing* è una funzione $f(\cdot)$ che da una $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{X}$ restituisce un prezzo P_i:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{X} &\longrightarrow R_+ \\ \boldsymbol{x}_i &\longmapsto P_i \end{aligned}$$

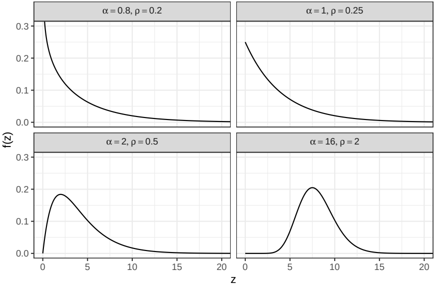
Distribuzione di Poisson

$$p_N(n) = P(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad \lambda > 0$$



Distribuzione Gamma

$$f_Z(z) = \frac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\rho z}, \quad \alpha > 0,\ \rho > 0$$



Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$
$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + E_i$$

$$\Big\downarrow$$

Altri Caricamenti
Vincoli Normativi
Commercializzazioni

$$P_i^{(\text{tariff})}$$
$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - D_i$$

Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

1. Pricing Tecnico
2. Aspettativa del Cliente
3. Strategia di Business

Ulteriori modelli

- New Business: Probabilità di Conversion
- Rinnovi: Probabilità di Retention

Definizione di Premio

$$P_i^{(\text{risk})} = E(S_i)$$
$$P_i^{(\text{tech})} = E(S_i) + E_i$$

Altri Caricamenti
Vincoli Normativi
Commercializzazioni

$$\downarrow$$

$$P_i^{(\text{tariff})}$$
$$P_i^{(\text{offer})} = P_i^{(\text{tariff})} - D_i$$

Ottimizzazione del Prezzo

Si basa su

1. Pricing Tecnico
2. Aspettativa del Cliente
3. Strategia di Business

Ulteriori modelli

- New Business: Probabilità di Conversion
- Rinnovi: Probabilità di Retention

Table of Contents

Modello Lineare Generalizzato (GLM)

Dato $\mathcal{D} = \{(\boldsymbol{x}_1, \omega_1, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_n, \omega_n, y_n)\}$
con $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ realizzazione di $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$.
Assumiamo che:

1. $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$ siano indipendenti con distribuzione appartenente a una stessa famiglia esponenziale lineare:

$$f(y_i; \theta_i, \phi, \omega_i) = \exp\left\{\frac{\omega_i}{\phi}\left[y_i\theta_i - b(\theta_i)\right]\right\} c(y_i, \phi, \omega_i), \quad y_i \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}$$

2. $\boldsymbol{x}_i = (1, x_{i1}, \ldots, x_{ip})^t$ agisca su Y_i tramite il predittore lineare η_i

$$\eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$

3. η_i sia legato a $\mu_i = E(Y_i)$ tramite la funzione legame $g(\cdot)$

$$g(\mu_i) = \eta_i = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{\beta}$$

Stimatore di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & (\boldsymbol{\beta}, \phi) & \longmapsto & f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) \end{array}$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\max}\, L\left(\boldsymbol{\beta}, \phi; \boldsymbol{y}\right)$$

Devianza

La devianza è

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{y}) = -2\phi \left(\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) - \ell_S \left(\boldsymbol{\beta}^*, \phi; \boldsymbol{y} \right) \right)$$

dove $\ell\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y}\right) = \log L\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y}\right)$
e $\boldsymbol{\beta}^*$ sono i parametri del modello saturo.

Lo stimatore di massima verosimiglianza può essere ottenuto come:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}}{\arg\min}\, D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$$

Stimatore di massima verosimiglianza

Data la funzione di verosimiglianza

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^{p+1} \times \Lambda & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & (\boldsymbol{\beta}, \phi) & \longmapsto & f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) \end{array}$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza è:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} L(\boldsymbol{\beta}, \phi; \boldsymbol{y})$$

Devianza

La devianza è

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{y}) = -2\phi \left(\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) - \ell_S \left(\boldsymbol{\beta}^*, \phi; \boldsymbol{y} \right) \right)$$

dove $\ell \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right) = \log L \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \phi; \boldsymbol{y} \right)$
e $\boldsymbol{\beta}^*$ sono i parametri del modello saturo.

Lo stimatore di massima verosimiglianza può essere ottenuto come:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{p+1}} D(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$$

Table of Contents