Gittok Lecture Note

12 空間解析

太田守重

2014

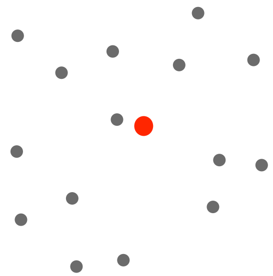
解析とは，事物の構成要素を調べて、その本質を明らかにすること
空間解析とは，地物の空間属性を使用する解析

例えば,
１．空間データの中心位置を求める
２．折れ線の長さを求める
３．２つの幾何の間の距離を求める
４．求める点や線の近傍領域（バッファ）を求める
５．多角形の面積を求める
６．点の分布から，それらを包含する最小の凸な多角形（凸包）を求める

では，具体的にはどのような方法で解析するのか？

空間データの中心位置を求める

点群の重心 (center of gravity　または　centriod という)

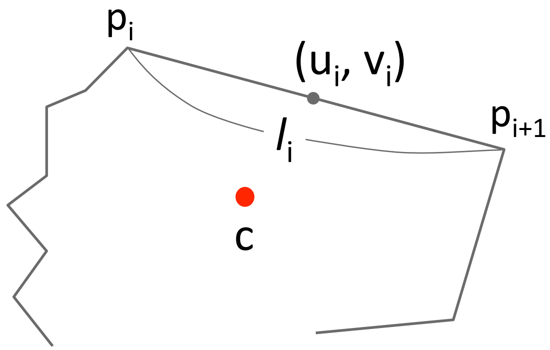


複数の点のx座標、y座標の平均値 (c_x, c_y)をもって点群の中心とすることができる。

$$c_x = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i$$

$$c_y = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

曲線の重心



点群と全く同じと考えると、重心は頂点の密度が高い方に引っ張られる。曲線の場合は、「線の重心」を考えるべきなので、曲線を構成するそれぞれの線分の中心に、その線分の長さを重みとして掛け、重量平均をとる。

$$u_i = (x_i + x_{i+1})/2$$

$$v_i = (y_i + y_{i+1})/2$$

$$dx_i = (x_{i+1} - x_i)$$

$$dy_i = (y_{i+1} - y_i)$$

$$l_i = \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2}$$

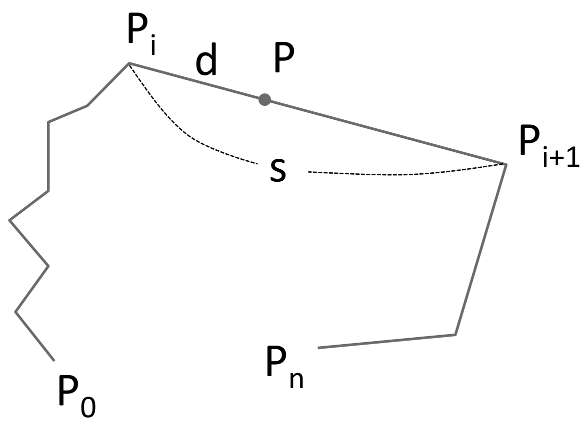
$$L = \sum_{i=0}^{n-2} l_i$$

$$c_x = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{n-2} l_i u_i$$

$$c_y = \frac{1}{L}\sum_{i=0}^{n-2} l_i v_i$$

空間データの中心位置を求める

曲線の中間点を求める



$$L = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

$$d = 0.5L - \sum_{j=0}^{i-1} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

$$s = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$P_y = \frac{d}{s}(y_{i+1} - y_i) + y_i$$

$$P_x = \frac{d}{s}(x_{i+1} - x_i) + x_i$$

曲線の重心は，曲線上にはないことが多いので，地図上に曲線を説明するラベルをおくときなど，不便なことがある．そこで，曲線の中間点が必要になる．

中間点は，曲線の長さの1/2の位置なので，以下のアルゴリズムで求めることができる．

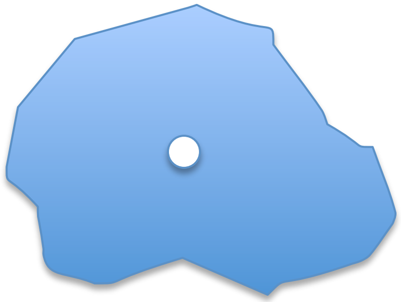
１．曲線の長さ (L) の1/2の長さを求める．

２．曲線の始点から順番に，隣り合う頂点を結ぶ線分の長さをもとめ，その和が中間点までの長さを超えるまで繰り返す．

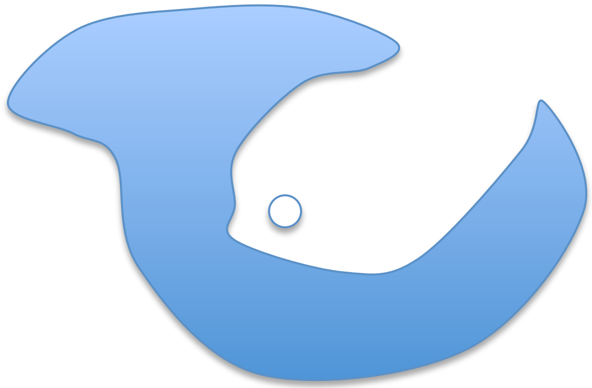
３．超える直前の点 (P_i)から中間点までの長さ (d) と，対象となる線分の長さ (s) の比を使って，中間点の位置 (P) を求める．

空間データの中心位置を求める

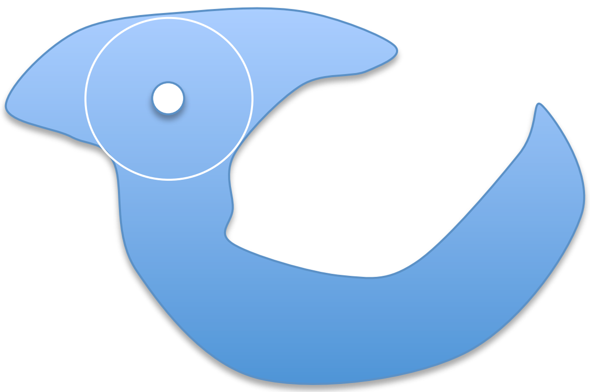
曲面の重心



境界座標の各成分の平均でできる座標。しかし、図形の外に出る場合がある。



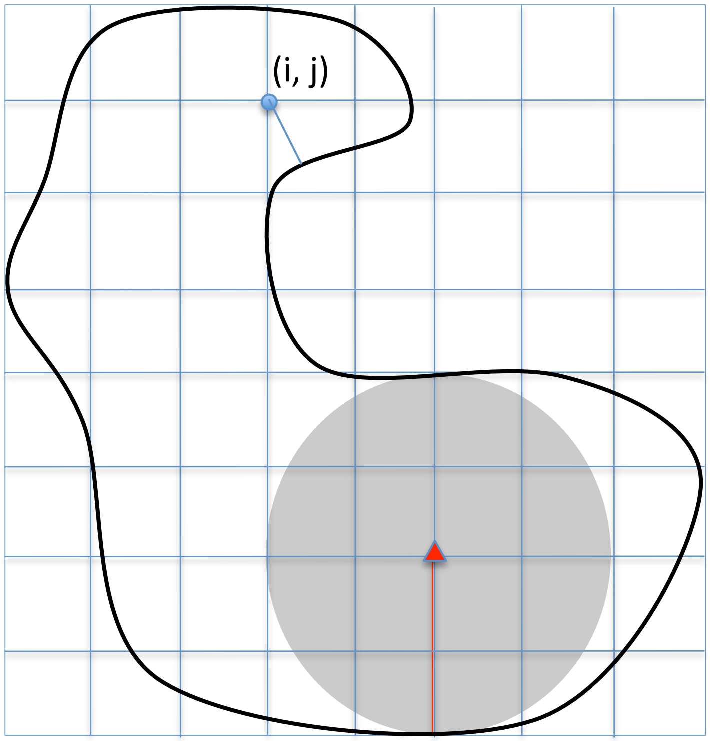
最大内接円中心 (center of maximal inscribed circle)



図形の中にあり，かつ，境界からの最短距離が最大になる，境界から最も遠い点．最大の内接円の中心は，境界から最も遠くにある点である。

これを使えば、曲面の注記の配置等が合理的にできる。

最大内接円中心を求める、**実用的な方法**



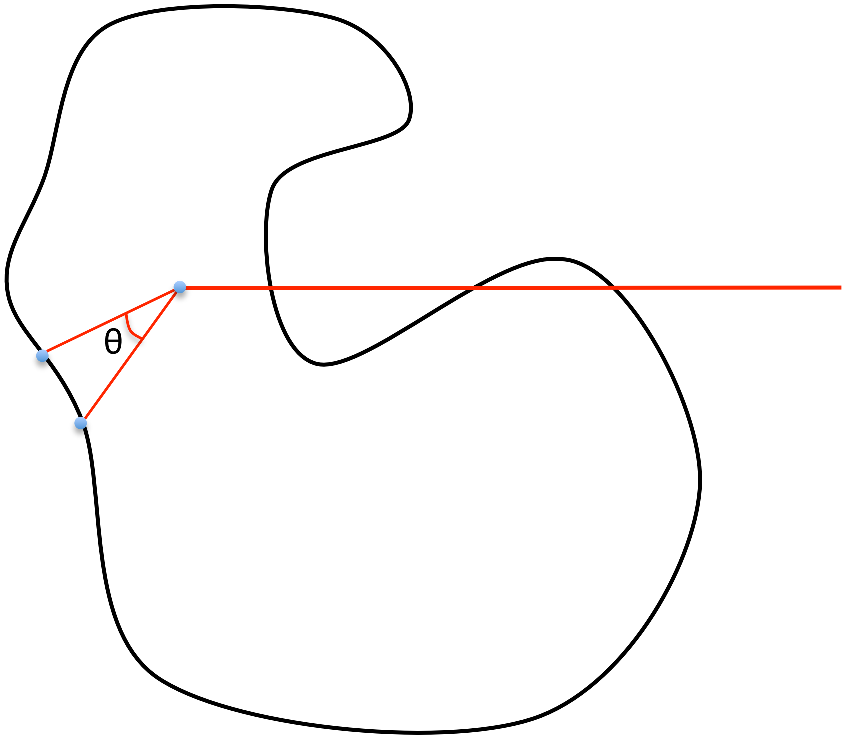
境界までの最短距離が最大になる格子点

適当な間隔をもつ，領域を覆うグリッドを設定する.

領域の中に入る格子点(i,j)から，

その点から見える全ての境界点までの最短距離を求める. この最短距離が最大値をとる格子点を，求める点とする. なお，境界を構成する点同士の間隔が不定の場合は，等間隔に内挿点を設け，最短距離の計算を行う.

点と領域の包含関係を知る方法（点位置決定法）



方法1

任意の点から水平（垂直）に引いた半直線と領域の境界との交点が奇数なら，その点は中にある．

でも，例外もあるので，気をつけよう．

方法2

境界上の隣り合う2点の，点pにおける挟角の和が360度なら，その点は内側にある．

距離と距離空間

集合Xの要素x,y,zに対して，実数を得る関数dが定義され，

1. d(x, y) ≥ 0

2. x = y ⇔ d(x, y) = 0

3. d(x, y) + d(y, z) ≥ d(x, z)が成り立つとき，

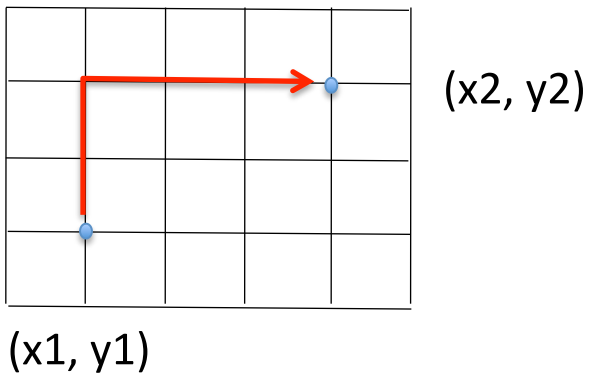
dを距離関数，あるいは単に，距離という。

例：n次元ユークリッド空間における距離

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{'})^2}$$

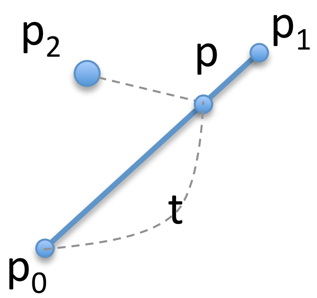
例：平面上のマンハッタン距離

$$d = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$$



マンハッタン距離は、距離の条件を満たすか？

点と線分の距離



p_0, p_1 (ただし，$p_0 \neq p_1$) を通る直線の方程式は，

$$\begin{aligned} p.x &= (p_1.x - p_0.x)\ t + p_0.x \\ p.y &= (p_1.y - p_0.y)\ t + p_0.y \end{aligned} \qquad (1)$$

p_2 と p の距離を L とすると，

$$L^2 = (p_2.x - p.x)^2 + (p_2.y - p.y)^2 \qquad (2)$$

ここで，(1) を (2) に代入して，

$w = p_1.x - p_0.x$

$u_x = p_2.x - p_0.x$

$v = p_1.y - p_0.y$

$u_y = p_2.y - p_0.y$

とすると，

L^2は以下のように変形できる.

$$L^2 = (u_x - wt)^2 + (u_y - vt)^2 \qquad (3)$$

距離 L が最小になる位置ではL^2も最小になり，t に対する一次微係数は 0 になる. つまり，

$$\frac{dL^2}{dt} = 0$$

(3)を t で微分すると，結果として t は，

$$t = \frac{(u_x w + u_y v)}{w^2 + v^2} \qquad (4)$$

(4)を使って t を求める. その値が

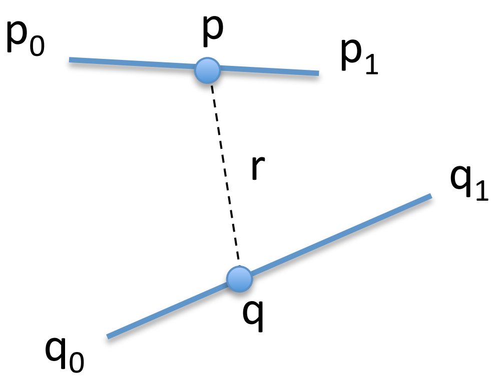
$0 < t < 1$ならば，t を (3) に代入して L を求める.

$t < 0$ ならば，p_2 とp_0の距離が L

$1 < t$ ならば，p_2とp_1の距離が L

以上

線分と線分の距離（1）



直感的には，線分同士の距離は，4つある端点それぞれから相手の線分までの距離の中で最小のものを選べば良い．
なぜなら，両者が平行のときは，距離はどこでも同じになるので，上の仮定がなりたつ．平行でないときは，接近する側の端点から相手への距離の短い方を求めればよいからである．

理論的には以下の通り．

$p.x = (p_1.x - p_0.x)\ t + p_0.x$

$p.y = (p_1.y - p_0.y)\ t + p_0.y$

$q.x = (q_1.x - q_0.x)\ s + q_0.x$

$q.y = (q_1.y - q_0.y)\ s + q_0.y$

ここで，
$r^2 = (p.x - q.x)^2 + (p.y - q.y)^2$

なので，$r^2＝R$　とすれば，Rの微分

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t}dt + \frac{\partial R}{\partial s}ds$$

が0になることを条件として，tとsを求める．

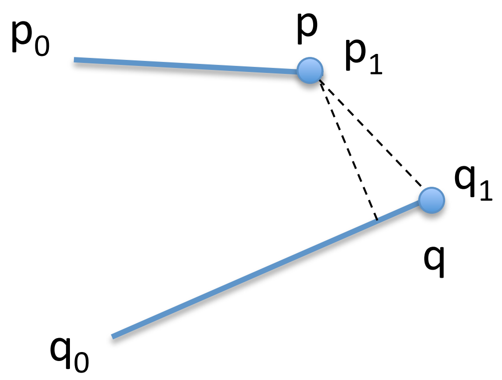
すると．

$w_x = p_1.x - p_0.x,\quad w_y = p_1.y - p_0.y$
$v_x = q_1.x - q_0.x,\quad v_y = q_1.y - q_0.y$
$u_x = p_0.x - q_0.x,\quad u_y = p_0.y - q_0.y$

$a = w_x^2 + w_y^2$
$b = v_x w_x + v_y w_y$
$c = -(u_x w_x + u_y w_y)$
$d = v_x^2 + v_y^2$
$e = -(u_x v_x + u_y v_y)$
$D = ad - b^2$

$t = (dc - be) / D,\quad s = (bc - ae) / D$

線分と線分の距離（2）



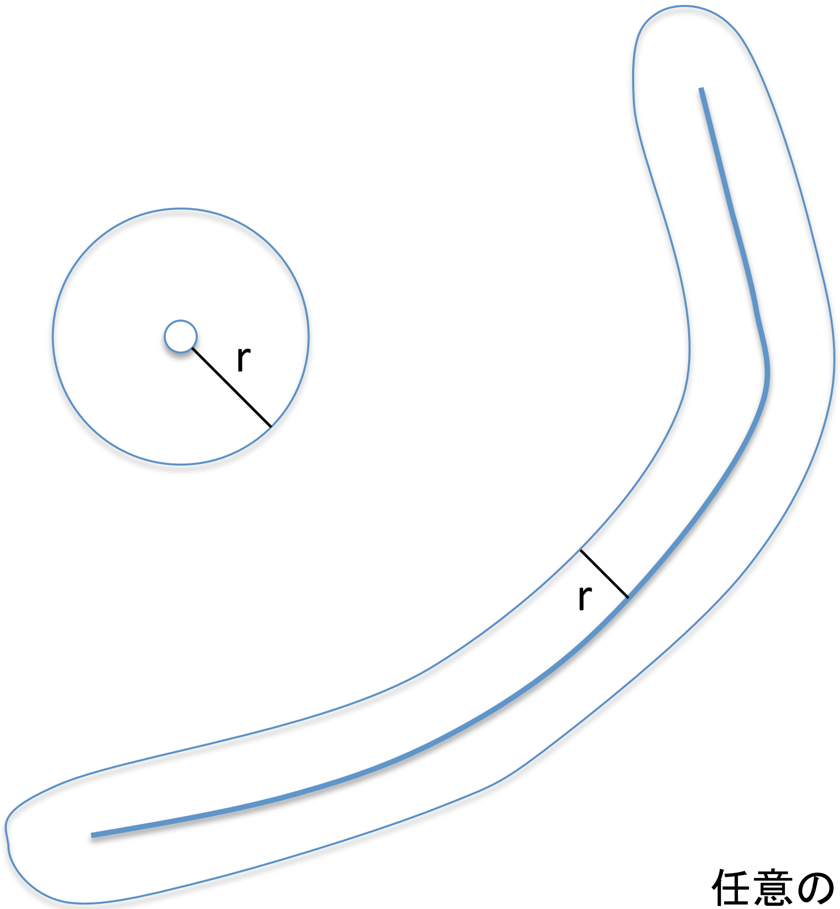
ただし $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ なので,
$t < 0$ のときは、$t = 0$,　　$s < 0$ のときは, $s = 0$
$t > 1$ のときは, $t = 1$,　　$s > 1$ のときは, $s = 1$
で計算する.

ところで,
t は p から相手への最短距離であり,
s は, q から相手への最短距離なので,
両方の最短距離が一致するわけではない.

従って, 最終的な解は両者のうちの小さい方
ということになる.

ちなみに, $D = 0$ のときは, 線分同士は平行である

点や線の近傍領域（バッファ）にかかる地物を求める.



r: バッファの幅 (width)

計画（例えば道路の拡幅）にかかる家屋の抽出

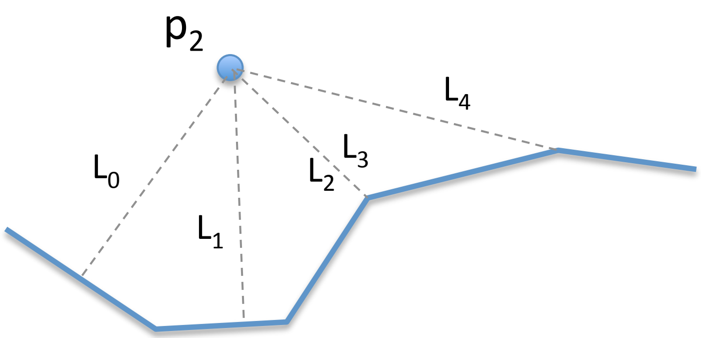
都市計画の用途規制,

施設（建物，道路，鉄道）周辺の環境影響評価（汚染，騒音や排気ガス）

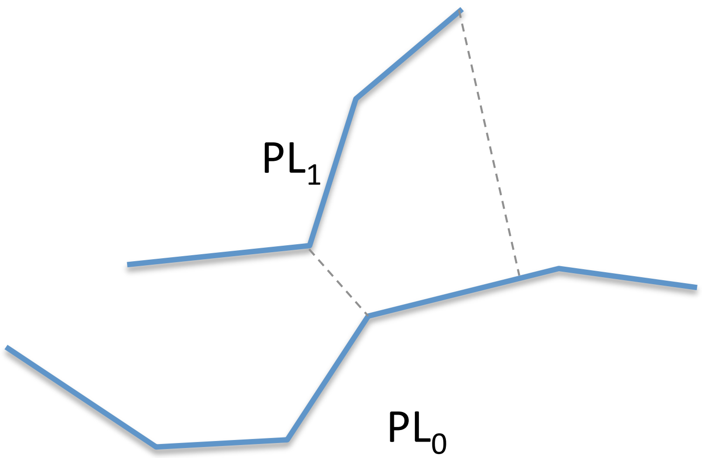
etc。

任意の点が、バッファの内側にあるか否かの判定はどうするのか？

任意の点や折れ線が，別の折れ線のバッファ内にあるか否かの判定

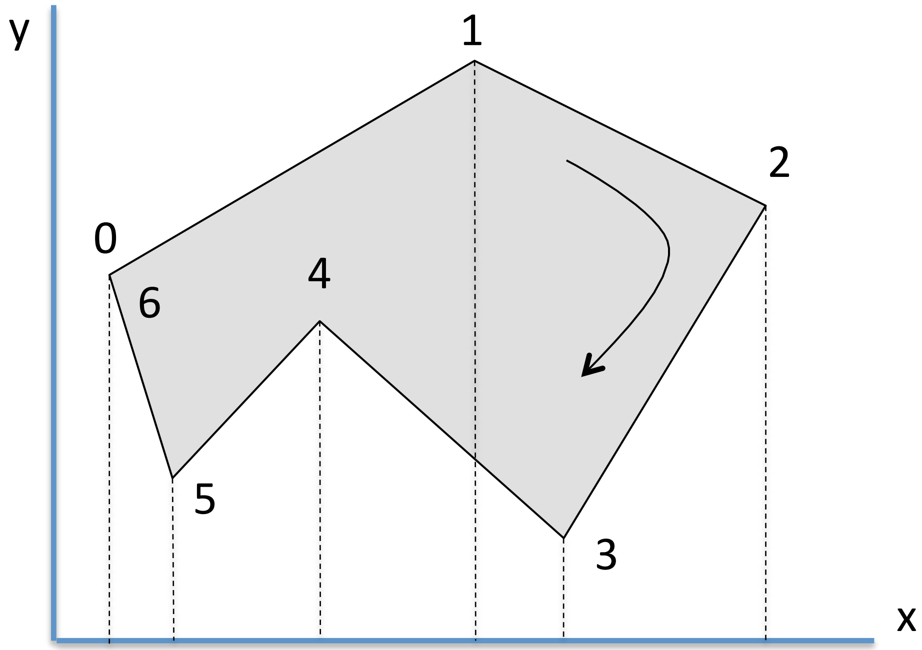


折れ線をn 本の線分の列と考える.
点と，それぞれの線分の距離 Li (i = 0 .. (n-1))をもとめ，
その最小値が，点と折れ線の間の最短距離になる.
これが，バッファの幅以下であれば，
点はバッファの内部.



折れ線を構成する線分同士の全ての距離を求めれば，
その中の最小値が折れ線同士の最短距離になる.
これがバッファの幅以下であれば，
折れ線はバッファにかかる.
一方，PL_1からPL_0を見た距離の最大値を求めれば，そ
れはPL_0からPL_1への最長距離になる.
これがバッファの幅以下であれば，
折れ線は全体としてバッファの中に入るであろう.

多角形の面積を求める



台形の面積は，（上底＋下底）×高さ／２

台形（0，1）の面積 a_0 は，

$a_0 = (y_0 + y_1) * (x_1 - x_0) / 2$

台形(i-1, i)の面積は，

$a_i = (y_{i-1} + y_i) * (x_i - x_{i-1}) / 2$

多角形の終点を含む頂点の数がnのとき，

aiの総和Aは，

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i-1} + y_i)(x_i - x_{i-1})$$

であるが，右辺を整理すると，

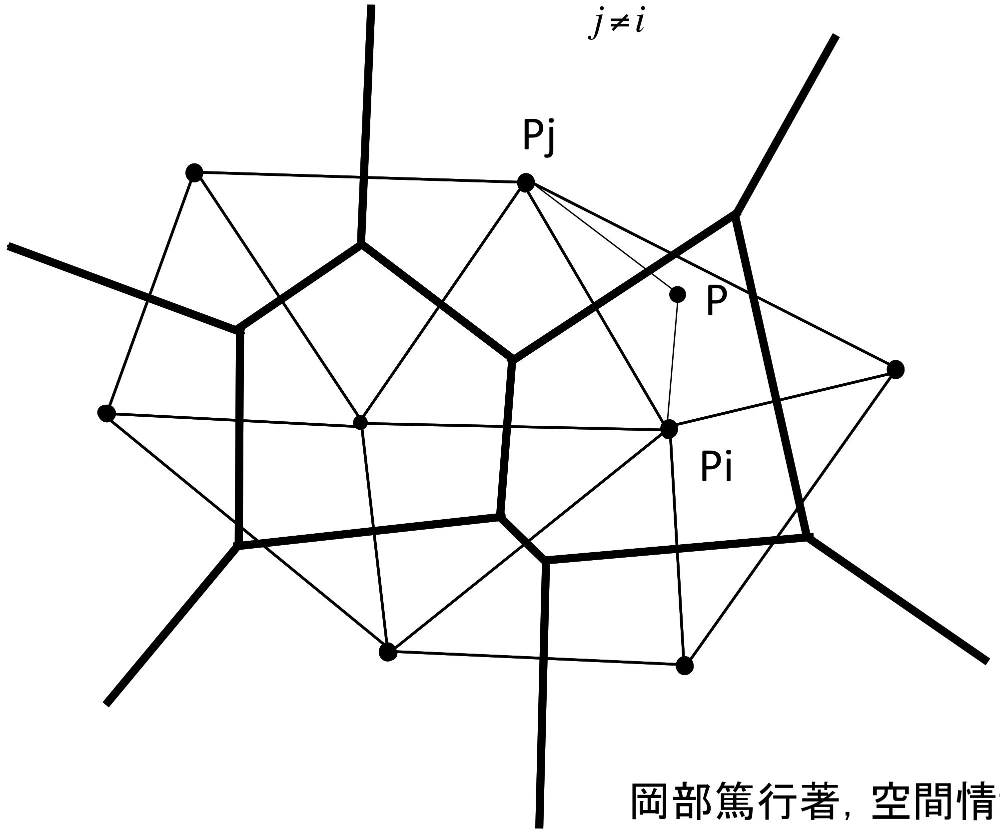
$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i-1}x_i - y_i x_{i-1})$$

座標の回転方向が逆のときは，面積がマイナスになるので，Aの絶対値を答えとする．

点の分布から，各点の勢力範囲を示す多角形複体（ボロノイ図）を求める

平面上にn個の点Pi(xi, yi) (i=1,.....n)が与えられたとき，点Piの勢力圏Vn(Pi)を以下の式でで定義する。ただし，PjはPiの隣接点（下図の場合は5点ある）であり，d(P, Pi)は，PとPiの距離とする。

$$V_n(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P \mid d(P,P_i) < d(P,P_j)\}$$

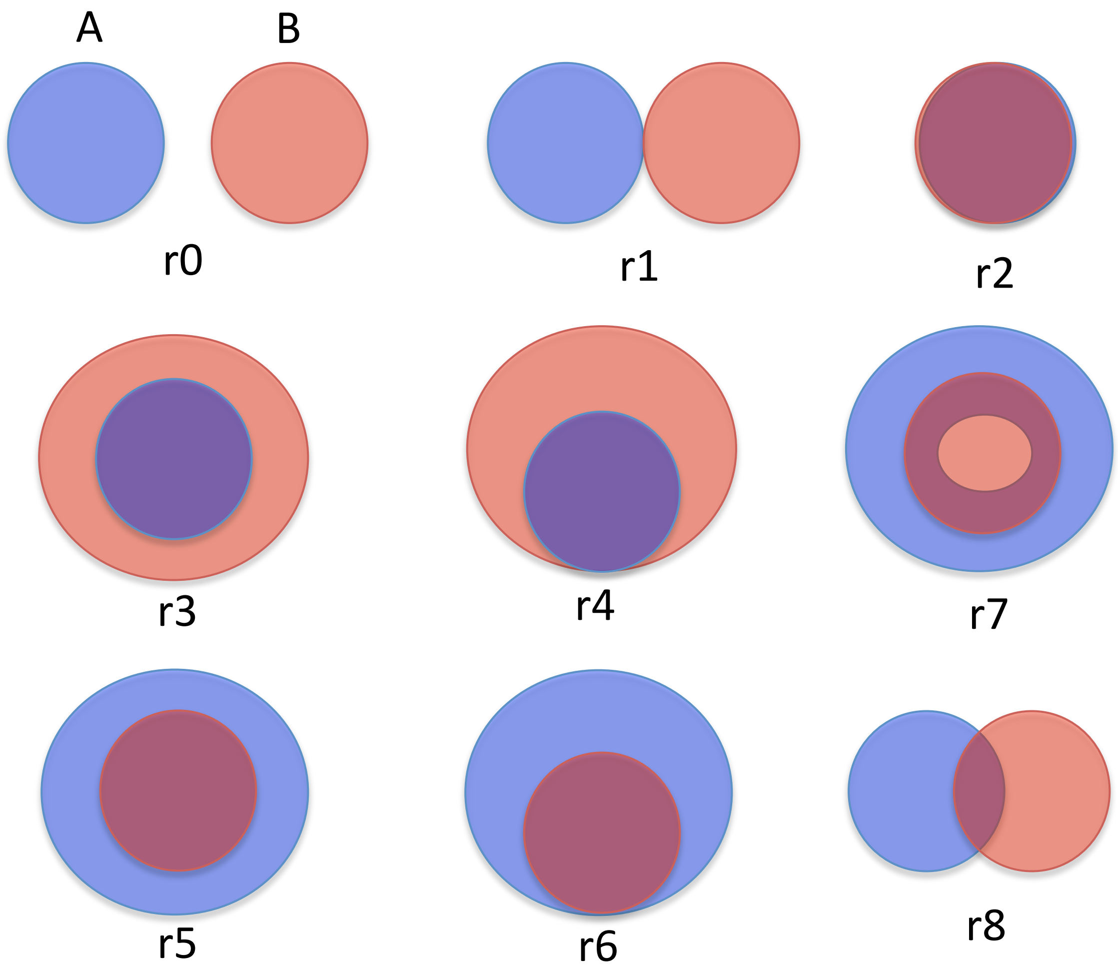


商圏，
生物の縄張り，
学校区，
防災拠点の配置，
交番の配置，
etc.

岡部篤行著，空間情報科学の挑戦，岩波科学ライブラリー，2001

空間データ同士の空間位相関係を求める

領域同士の場合

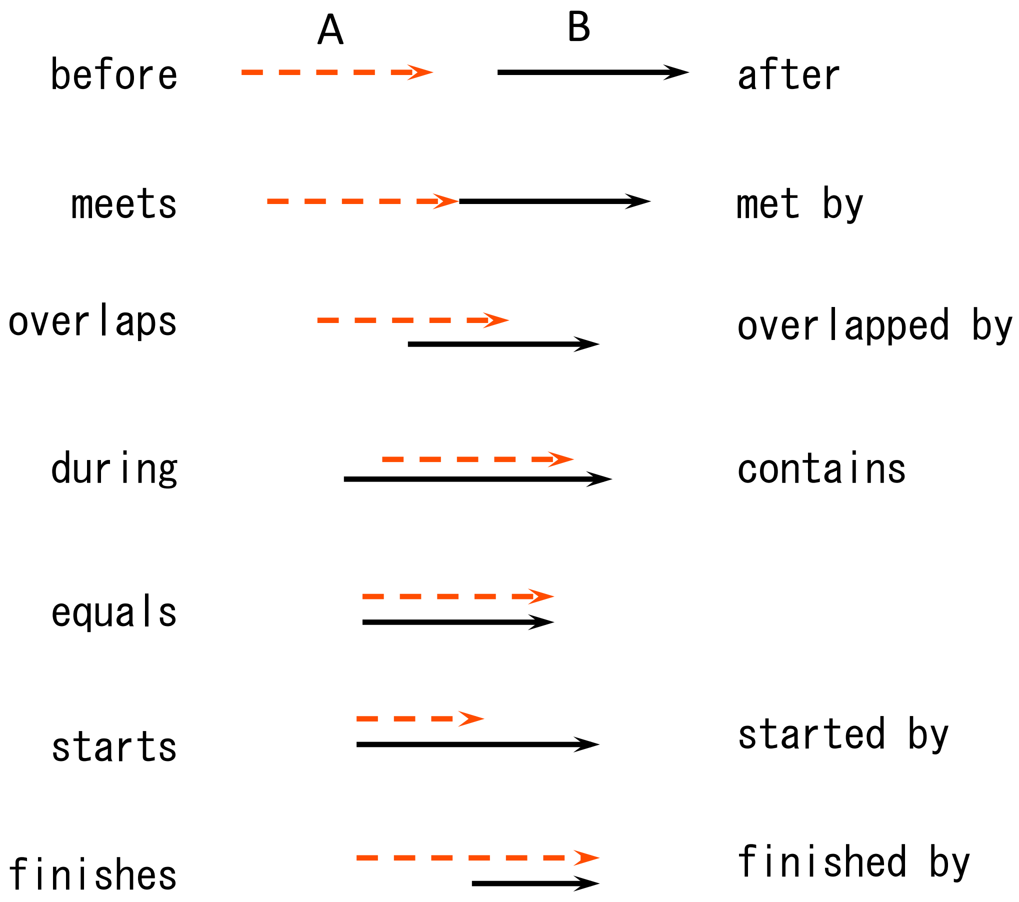


A~B

	∂∩∂	°∩°	∂∩°	°∩∂
r0	Φ	Φ	Φ	Φ
r1	¬Φ	Φ	Φ	Φ
r2	¬Φ	¬Φ	Φ	Φ
r3	Φ	¬Φ	¬Φ	Φ
r4	¬Φ	¬Φ	¬Φ	Φ
r5	Φ	¬Φ	Φ	¬Φ
r6	¬Φ	¬Φ	Φ	¬Φ
r7	Φ	¬Φ	¬Φ	¬Φ
r8	¬Φ	¬Φ	¬Φ	¬ϕ

Eigenhofer & franzosa, Point Set Topological Spatial Relations, International Journal of GIS, vol.5, no.2, 161-174, 1991

時間データ同士の時間位相関係を求める



Allen, J., Maintaining Knowledge about Temporal Intervals, Communication of the ACM, Vol. 26, No. 11, pp.832-843, 1983

ネットワーク中の二つのノード間の最短経路を求める

レベル修正法

ステップ1：出発点ノードsに特別なラベル(*, 0)をつけ、それ以外のノードにはラベル(φ, ∞)をつける。ここでφは未定義を示す。この時点では全てのノードは未探索の状態である。

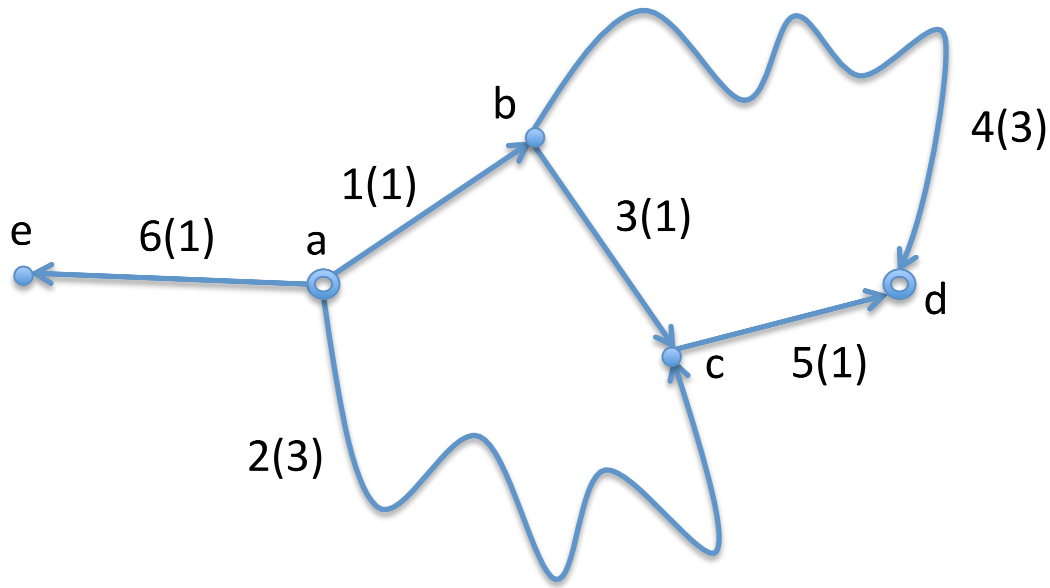
ステップ2：目的地ノードが既探索になったらステップ4にゆく。さもなければ未確定のノードnを選び、ステップ3にゆく。最初はsが選ばれる。

ステップ3：ノードnを探索する。すなわちnを始点ノードとするエッジeに対して、
p(eの終点) > p(n) + d(e)
ならば、eの終点ノードにラベル(e, p(n)+d(e))をつける。ノードnは既探索としてステップ2に戻る。

ステップ4: 目的地ノードから，ラベルに記されているエッジをたどり，出発点までの経路を求める。

ここで，
- p(n)は出発点ノードからnまでの距離
- d(e)はエッジeの長さ
- ラベル(e, p(n)+d(e))のeはこのノードの直前のエッジとして選ばれたエッジの名前

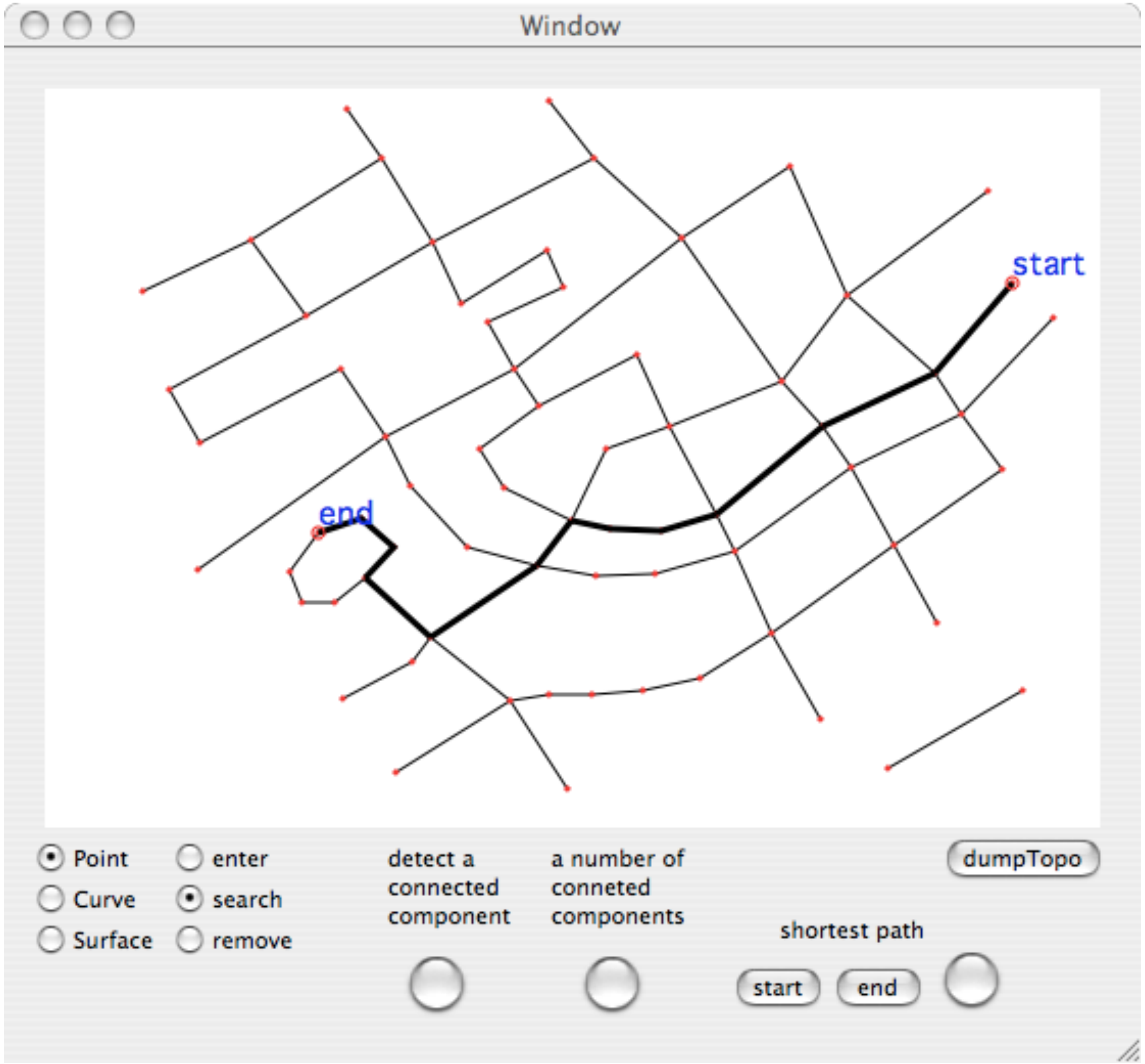
空間解析の例（有向グラフの最短経路探索）



1	2	3	4
a (*, 0) ●			
b (ϕ, ∞)	b (1, 1) ●		
c (ϕ, ∞)	c (2, 3)	c (3, 2) ●	
d (ϕ, ∞)	d (ϕ, ∞)	d(4, 4)	d (5, 3) ●
e (ϕ, ∞)	e (6, 1) ●		

伊理正夫監修，計算幾何学と情報処理，共立出版，1986, p. 152

空間解析の例(有向グラフの最短経路探索)



まとめ

事物の構成要素を細かく理論的に調べることによって，その本質を明らかにすることを空間解析という.

解析には,
与えられたデータ自体がもつ性質を発見する手法
他のデータとの関係を明らかにする手法
がある.

中心位置，延長距離，線の影響範囲を示すバッファ，点群の勢力範囲分布を示すボロノイ図などは前者の例.
点間距離，最短経路，そして空間位相関係などは後者の例.