Gittok Lecture Note

09 座標参照系

太田守重

2014

ここで学ぶこと

座標はものの位置を直接的に示す．一方，住所は間接的にものの位置を示す．とはいえ，両者とも，位置を示すためにある．これらの位置が従う基準を「参照系」という.
幾何プリミティブは地球上の位置を示す座標を属性とするが，例えば経度と緯度は，見た目は単なる角度である．これらは，地球の形状を回転楕円体とみなし，それぞれの基準となる子午線と赤道が設定されて，始めて座標としての意味をもつ．つまり座標は，その意味を定義づける基準がなければ，単なる数字の列でしかない．この，座標を定義づける基準を座標参照系 (Coordinate Reference System)という.
ここでは，直接または間接に地球上の位置を示す基準となる参照系について解説する.

参照系とその種類

任意の空間や時間の一部分を，他と識別するための基準を，**参照系**という.

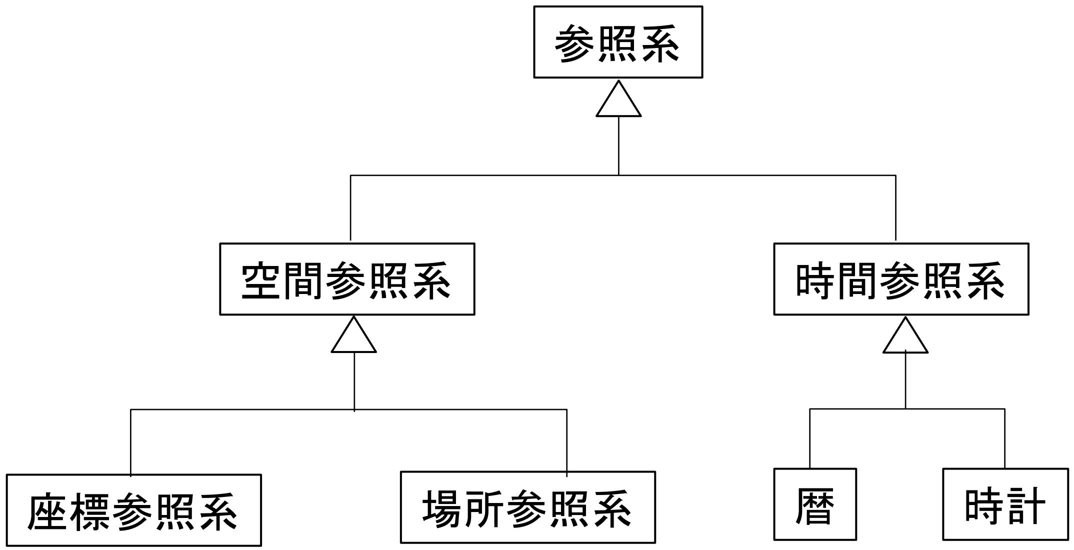
地球上の座標や場所を識別するための参照系は，**空間参照系**である.

座標で空間上の位置を表現するための参照系は，**座標参照系**である.

場所を示す符号（郵便番号など）は地理識別子という. 地理識別子と，座標または別の地理識別子との対の集まりは，**地名索引**（**Gazetteer**）という. 地名索引は地理識別子によって間接的に地球上の位置を示すための**場所参照系**である.

時点を特定するための基準は，**時間参照系**という.

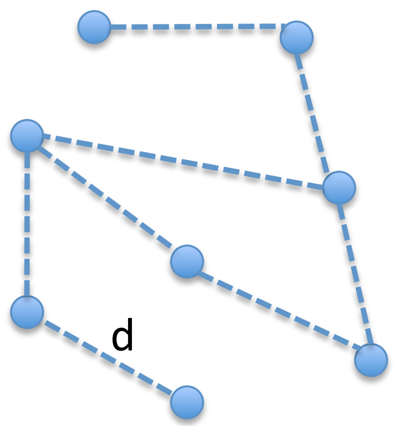
時点は暦や時計で表現する.



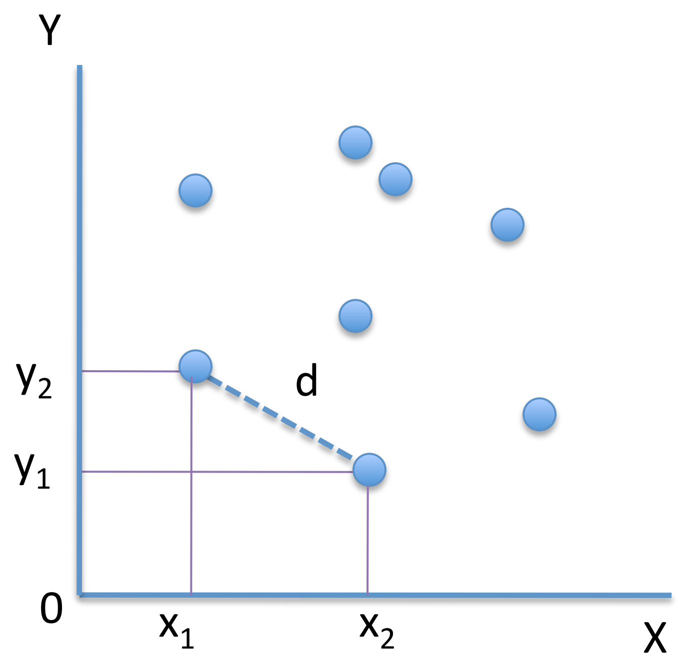
座標と座標系

空間上の座標

空間：互いに関連するもののの集合



例えば，距離による関連をもつ点の集合は距離空間



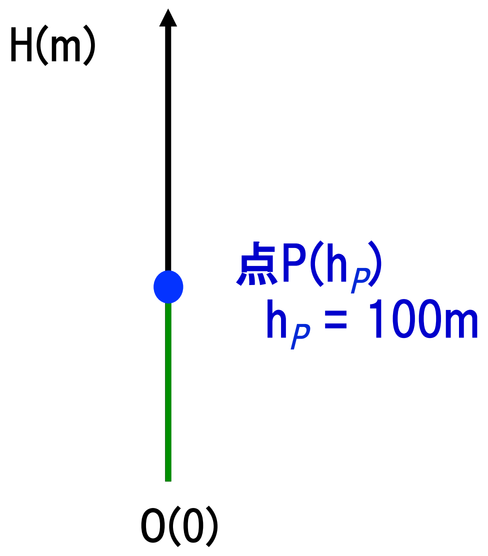
原点の位置と軸を定めると，距離空間中の要素の位置は“座標系”上で特定される．
上の例は，右手系（親指：X軸，人差し指：Y軸，角度の回転方向は反時計回り）の平面直交座標系
計測単位がメートルであれば，距離はdメートル

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

座標系

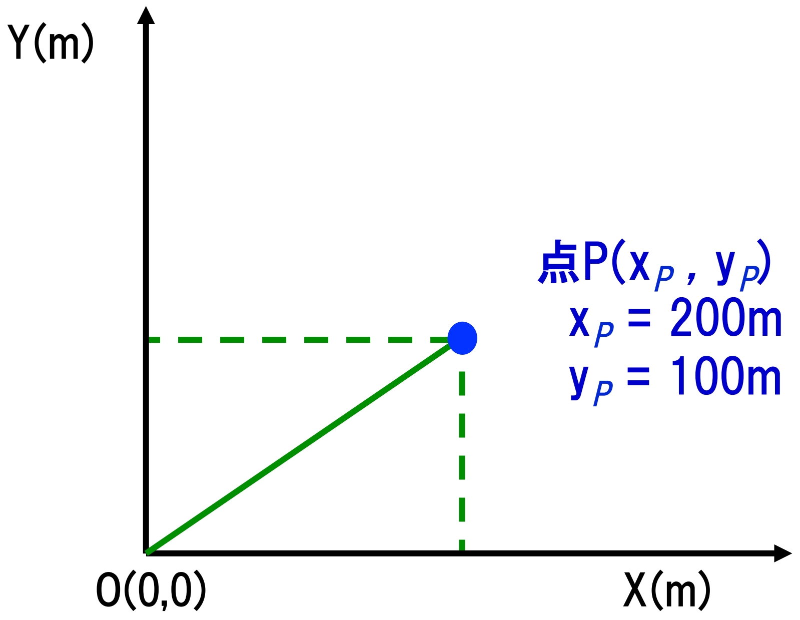
一次元座標系

原点と，距離の計測単位で定義



二次元座標系

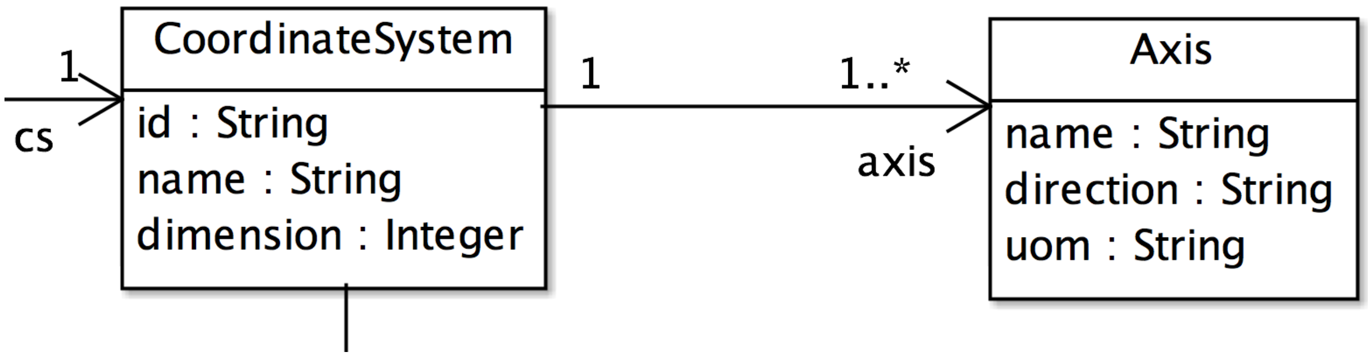
原点，X軸からY軸への回転方向，軸同士の角度，そして計測単位で定義



座標系を定義づける要素

座標系 (CoordinateSystem)
- 座標系識別子 (id)
- 座標系名 (name)
- 次元数 (dimension)

座標軸 (Axis)
- 名称 (name)
- 方向 (direction)
- 単位(uom)



座標参照系

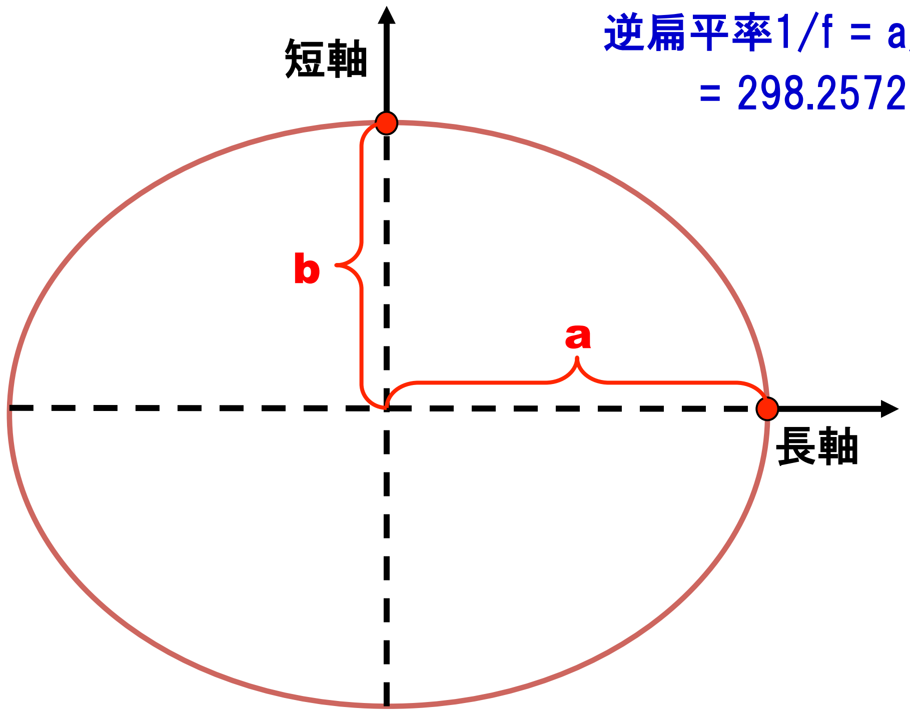
準拠楕円体

地球の形状は回転楕円体で近似できるが，これを地球楕円体という. 各国の測地系が準拠する地球楕円体は，準拠楕円体 (Reference Ellipsoid) という.

長半径a = 6378137m

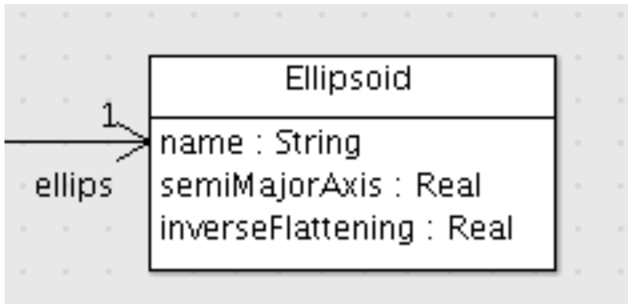
逆扁平率1/f = a/(a – b)

= 298.257222101



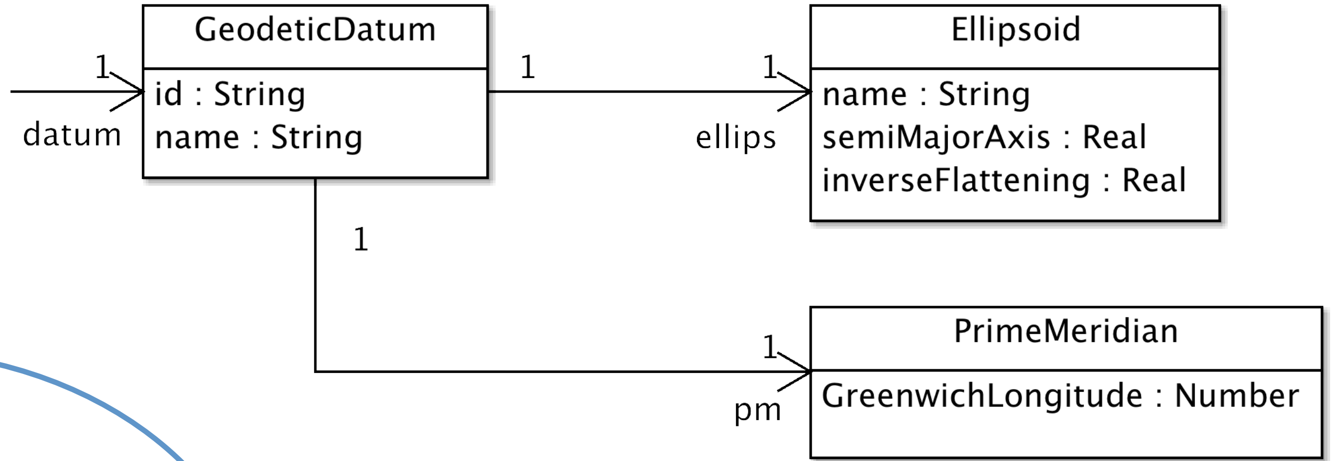
準拠楕円体

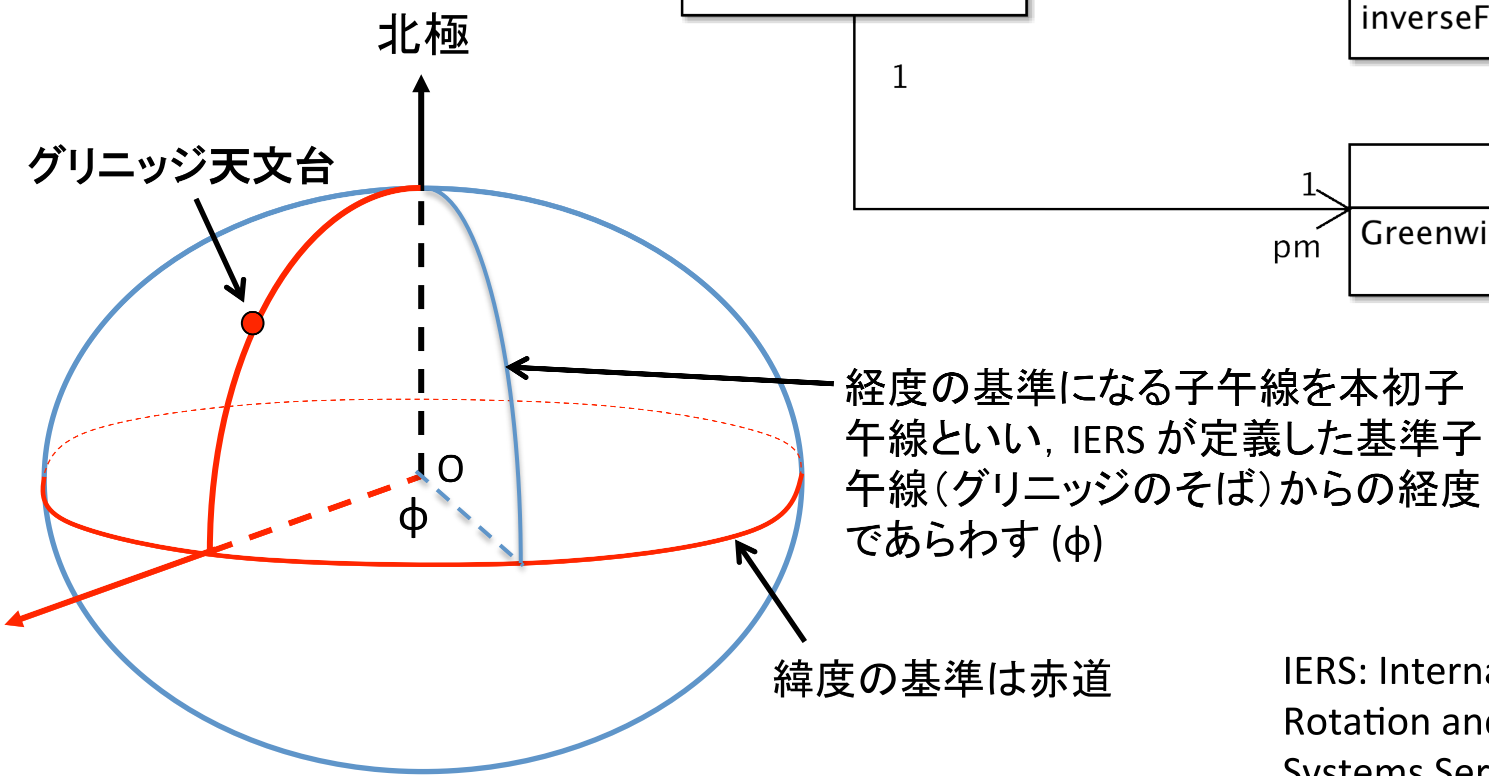
- 名前 (name)
- 長半径 (semi-magor axis)
- 逆扁平率 (inverse flatterning)



測地原子

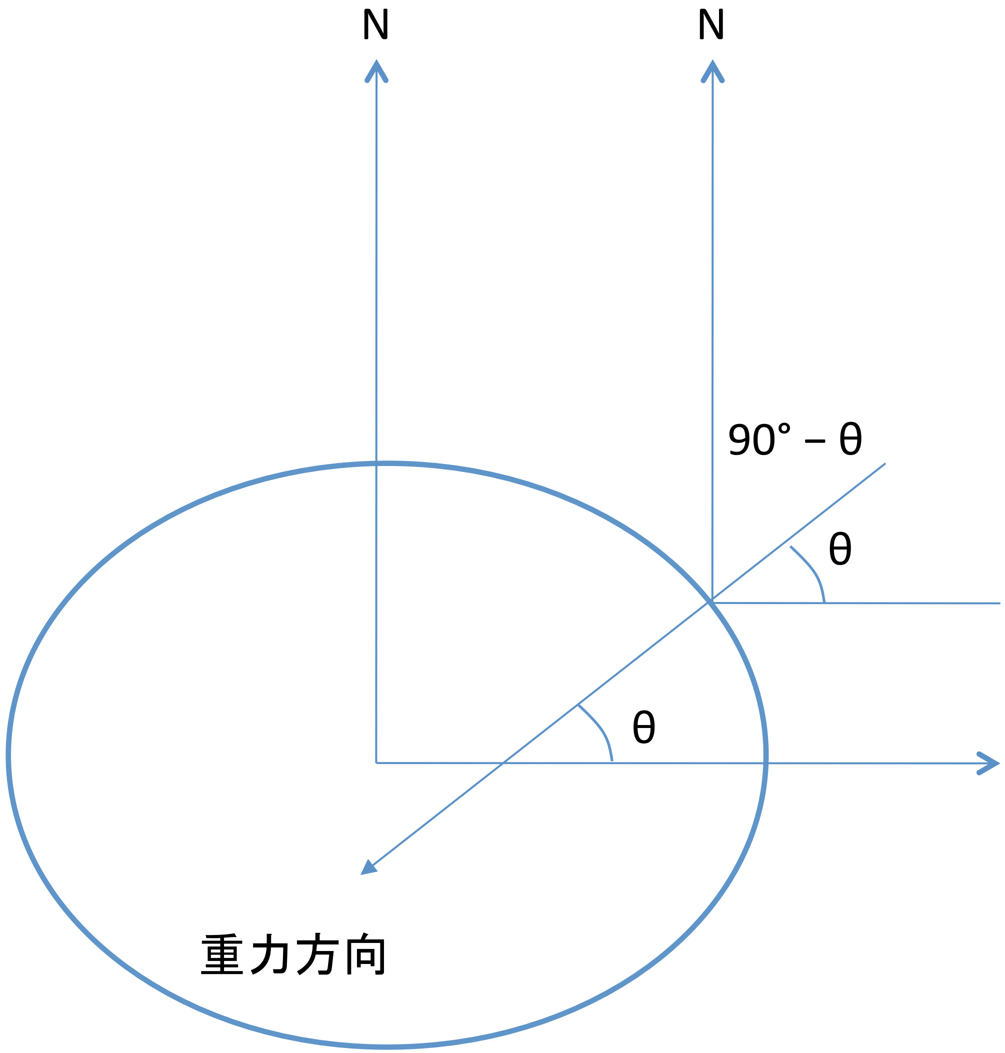
準拠楕円体のパラメータ及び本初子午線 (Prime Meridian) の定義を合わせて，測地原子(Geodetic Datum)という.





IERS: International Earth Rotation and Reference Systems Service
国際地球回転・基準事業

いろいろな緯度

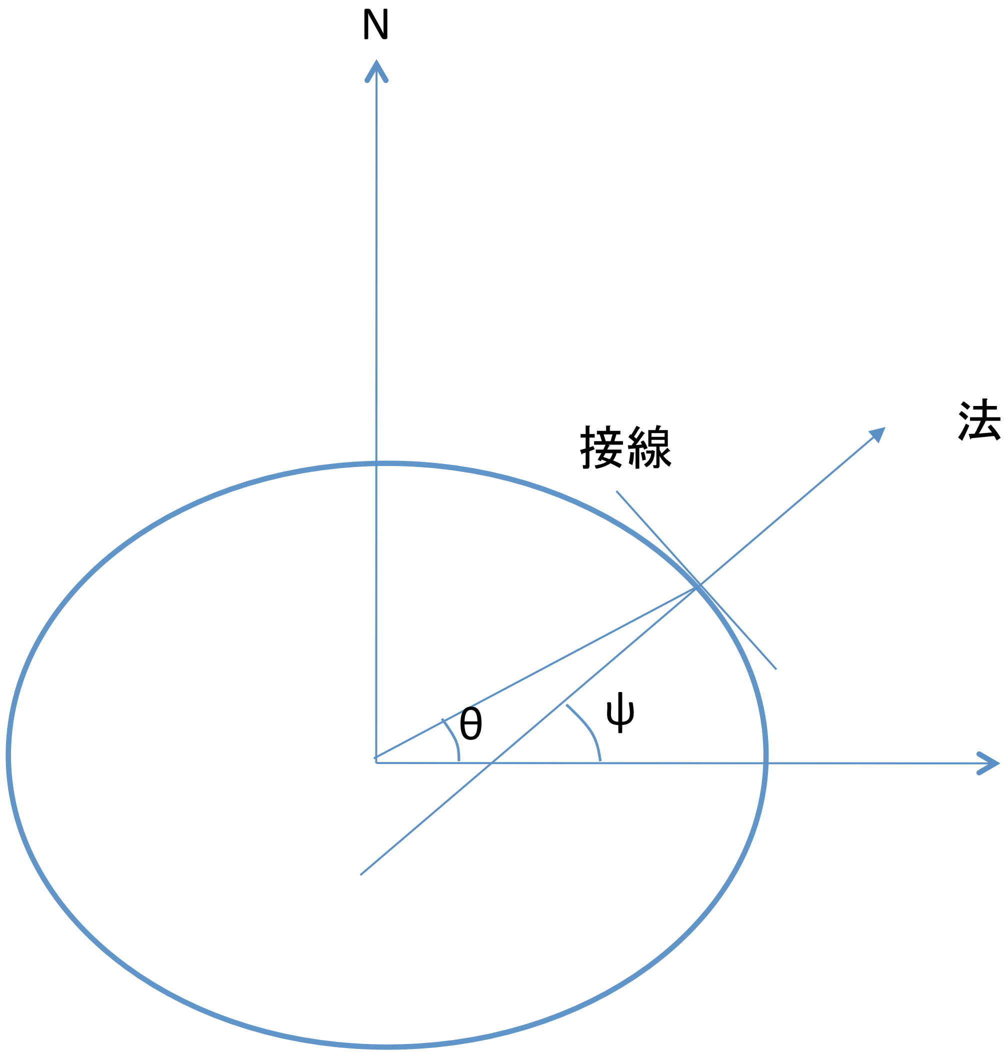


θ:天文緯度

　真北方向と天頂方向の角度は，90° – 緯度（θ）になる.
この緯度は天文緯度と呼ばれるが，地球の質量分布は一定ではないため，一般に鉛直方向，つまり天頂方向の角度は，楕円体面の垂線とは一致しない.

　この緯度は，かつて天体観測で緯度を測っていた時代に使われていた.

いろいろな緯度



θ　　地心緯度

準拠楕円体の中心を原点として測る緯度

ψ　測地（地理）緯度

準拠楕円体上の位置から延びる法線と赤道が作る面の交点の角度.

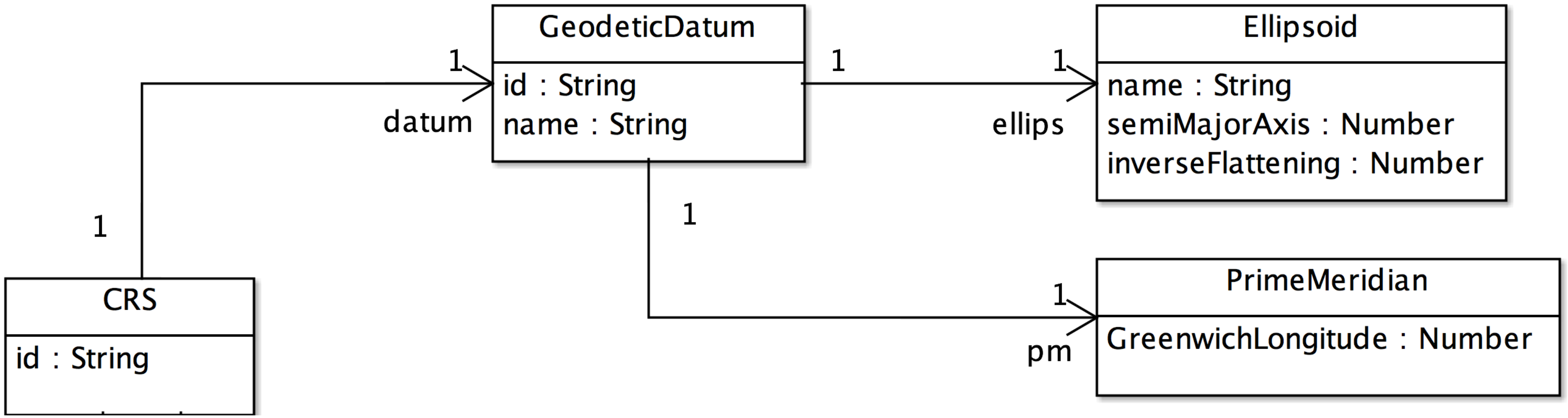
緯度といえば，普通は測地（地理）緯度を指す.

日本の測地原子

日本では，測量法で規定されている「測量の基準」が，日本測地系から世界標準である世界測地系に改正され，平成14(2002)年４月１日から施行された．ちなみに日本測地系に準拠する測地原子の英語表記はTokyo Datumだった．また世界測地系の場合はJapanese Geodetic Datum 2000 という．略称はそれぞれTD, JGD2000である (JIS X 7115:2005 附属書２（規定）日本における座標参照系の表記）．
さらに，2011年3月11日の東日本大震災の影響で日本経緯度原点及び日本
水準原点が移動したため，JGD2011が制定されているが，測地原子のパラメータは同一である．

なお測量法では，世界測地系を以下のように定義している．つまり，
「世界測地系」とは，地球を次に掲げる要件を満たす扁平な回転楕円体であると想定して行う地理学的経緯度の測定に関する測量の基準をいう．
一　その長半径及び扁平率が，地理学的経緯度の測定に関する国際的な決定に基づき政令で定める値であるものであること．
二　その中心が，地球の重心と一致するものであること．
三　その短軸が，地球の自転軸と一致するものであること．
　なお，座標参照系の指定は，InstanceSetの中で行う．

測地原子のXML表記



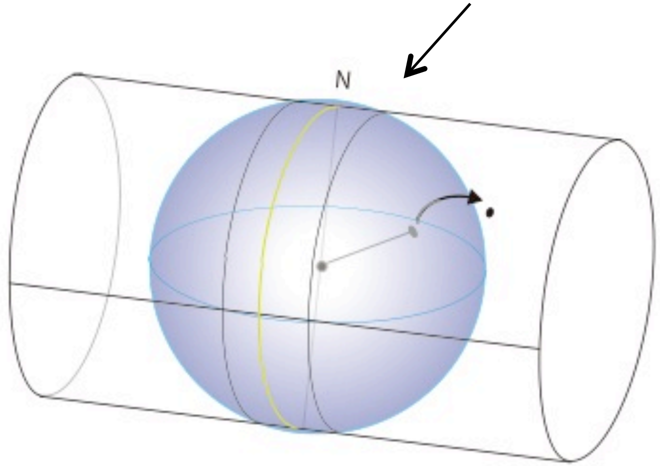

```
<CRS id="JGD2011, TP / 9(X, Y), H">
  <datum>
    <GeodeticDatum id="JGD2011" name="日本測地系2011">
      <ellips>
        <Ellipsoid name="GRS80" semiMajorAxis="6378137" inverseFlattening="298.257222101"/>
      </ellips>
      <pm>
        <PrimeMeridian greenwichLongitude="0"/>
      </pm>
    </GeodeticDatum>
  </datum>
  .........
</CRS>
```

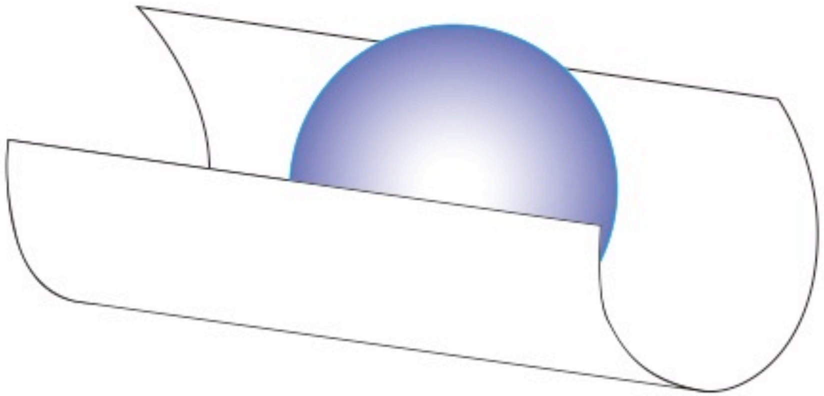
投影法

地上の位置を図示するには，紙面や画面などの平面上に位置を投影する．投影の方法は「投影法」または「図法」と言われる．代表的な方法に円筒図法がある．例えば右図の場合，円筒は地球の南北軸に垂直になるように，地球をカバーしている．そして，地球上の位置（例えば経緯度）を，何らかの方法で円筒上の位置に投影する．そして，円筒を開いて平面にすれば，地球上の位置を平面に投影したことになる．

次のページで説明するGauss-Kruger投影法のような，円筒を横向きにした投影法では，中央経線から東西に離れるに従って，中央経線からの水平位置が地球上の位置より大きくなるが，右図の様に，少し円筒の直径を地球のそれより小さくして，地球に埋め込ませることによって，ずれの絶対値を小さくすることができる．それでも，距離が離れるにつれてずれは拡大するので，有効な範囲（ゾーン）が決められ，その範囲で投影座標が使用される．

円筒は少し，めり込んでいる！





Gauss-Kruger投影法

横メルカトル図法の一種で円筒図法に分類される投影法．地球を回転楕円体とみなし，投影の中央に当たる中央子午線上の子午線弧長が保存されるように投影される．また同時に．地図上の任意の場所における微小な2つの線分が成す角を保存する等角写像となるように投影される正角図法．

http://ja.wikipedia.org/wiki/ガウス・クリューゲル図法

日本では，縮尺係数を0.9999とする平面直角座標系や，縮尺係数0.9996のUMT図法がよく使われるが，これらはGauss-Kruger投影による座標系である．

UTM図法

UTM (Universal Transverse Mercator) 図法は，円筒図法に属する投影法である．地球全体を60のゾーンに区切り，各ゾーン（図中のグレーの部分）の原点は中央経線 (図中のCM）と赤道の交点にある．最初の原点は経度180度に設定され，ゾーン番号1が与えられている．ちなみに東経135度はゾーン52の中央経線になる．実際に経度，緯度からUTM座標を求める方法の詳細については，この講義スライドの付録を参照してほしい．

http://ja.wikipedia.org/wiki/ユニバーサル横メルカトル図法

平面直角座標系

日本国内を測量するために制定された，直交座標系で，UTM図法と類似した方式で，地球上の緯度経度を平面上の座標に投影する．名前は座標系であるが，実際には投影法である．日本国内に19の区域を設け，それぞれに座標系の原点及び適用範囲を設定しているので，19座標系と呼ばれることもある．主に1万分の1以上の大縮尺地図やそれに相当する測量、位置決定に用いられる。実際に経度，緯度から平面直角座標を求める方法の詳細については，この講義スライドの付録や参考文献を参照してほしい．

http://ja.wikipedia.org/wiki/平面直角座標系

座標系の略号表記

日本工業規格 JIS X 7115:2013 において，座標系の略号表記の仕方が規定されているが，その詳細は日本工業標準調査会のHPで閲覧することができる.

http://www.jisc.go.jp/app/JPS/JPSO0020.html

水平座標系の略号表記

(B, L)	測地座標系
Zone No.(X, Y)	ゾーン番号を指定した平面直角座標系
Zone No.(E, N)	ゾーン番号を指定したUTM座標系

略号	定義	範囲
例：9(X, Y)	平面直角座標系第9系	東京都，埼玉県など

(X, Y)：平面直角座標系であることを示す記号
(E, N): UTM座標系であることを示す記号

鉛直原子

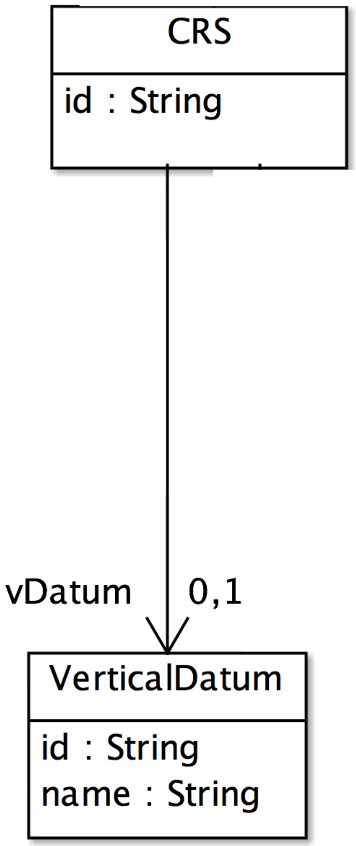
地球上の高さを示す座標には，例えば平均海面（ジオイド）上の高さ（標高）や
http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/geoid/geoid.html
準拠楕円体からの高さ（楕円体高）がある．これらの高さの基準となる地球の表面は鉛直原子と呼ばれる．

	高さの略号表記
H	平均海面上の高さ（標高）
h	準拠楕円体からの高さ（楕円体高）

平均海面は，地域によって異なるので，例えば東京湾平均海面を指定するときは略称(TP)が使われる．

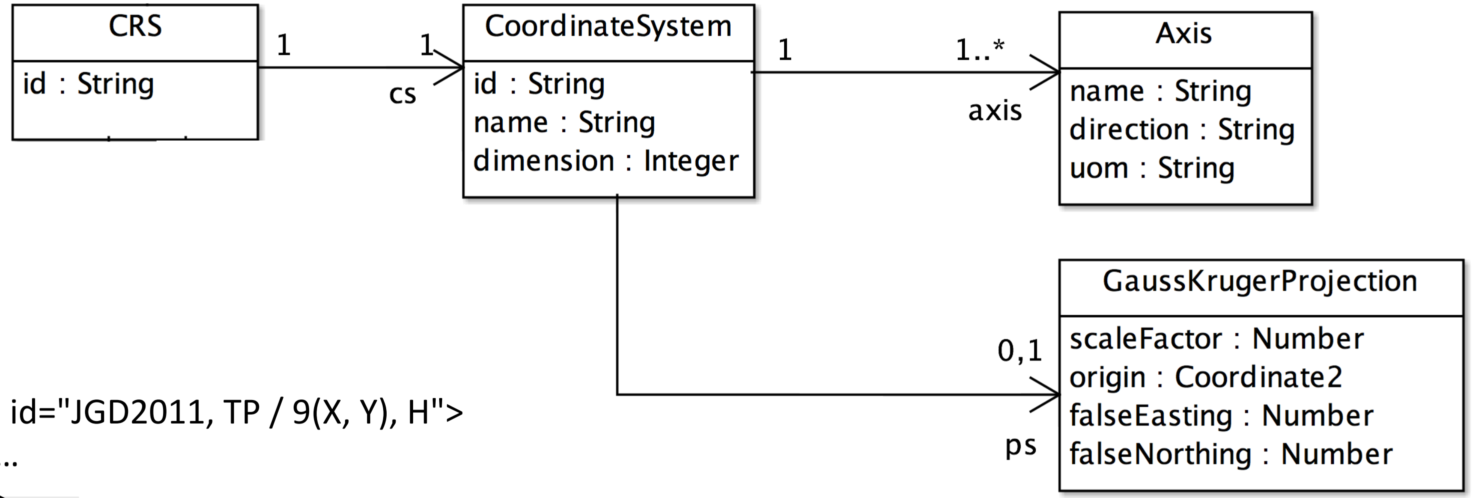
例：　“JGD2011, TP / 9(X, Y), H”
この例は，測地原子：日本測地系 2011 及び鉛直原子：東京湾平均海面を基準とし，平面直角座標第９系及び標高を使って，３次元の座標を表現する座標参照系を指す．

鉛直原子のXML記述



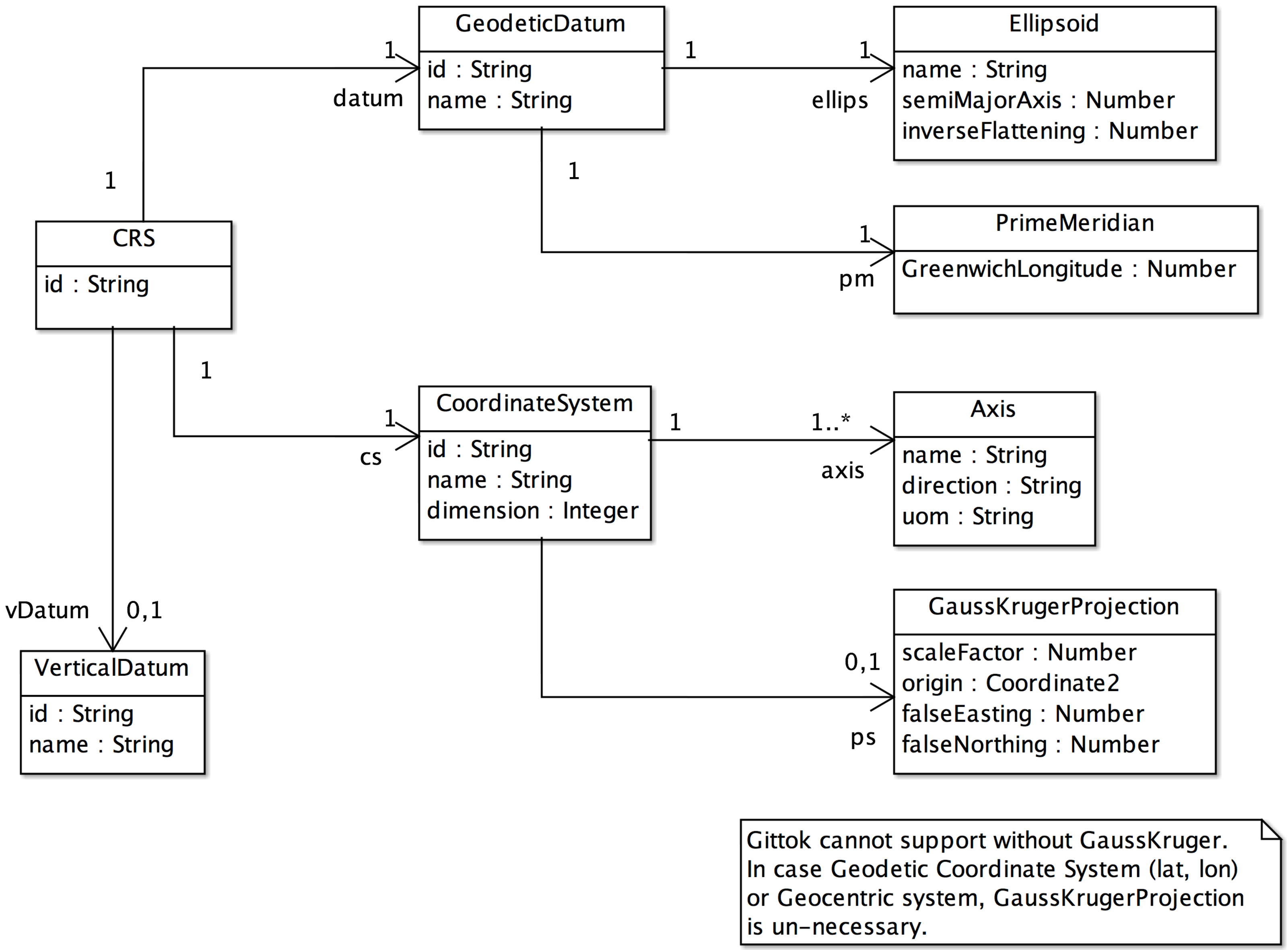
<CRS id="JGD2011, TP / 9(X, Y), H”>
……
<vDatum>
<VerticalDatum id="TP" name="東京湾平均海面"/>
</vDatum>
……
</CRS>

座標系とそのXML表記




```
<CRS id="JGD2011, TP / 9(X, Y), H">
 .........
 <cs>
  <CoordinateSystem id="TP / 9(X, Y), H" name="平面直角座標系第9系及び標高" dimension="3">
   <axis>
    <Axis name="X" direction="north" uom="m"/>
    <Axis name="Y" direction="east" uom="m"/>
    <Axis name="H" direction="vertical" uom="m"/>
   </axis>
   <ps>
    <GaussKrugerProjection scaleFactor="0.9999" falseEasting="0" falseNorthing="0">
     <origin>
      <Coordinate component="36,139.8333333" dimension="2"/>
     </origin>
    </GaussKrugerProjection>
   </ps>
  </CoordinateSystem>
 </cs>
</CRS>
```

座標参照系のスキーマ


GeodeticDatum
id : String
name : String
Ellipsoid
name : String
semiMajorAxis : Number
inverseFlattening : Number
PrimeMeridian
GreenwichLongitude : Number
CRS
id : String
CoordinateSystem
id : String
name : String
dimension : Integer
Axis
name : String
direction : String
uom : String
GaussKrugerProjection
scaleFactor : Number
origin : Coordinate2
falseEasting : Number
falseNorthing : Number
VerticalDatum
id : String
name : String
datum
ellips
pm
cs
axis
ps
vDatum
1
0,1
1..*
Gittok cannot support without GaussKruger.
In case Geodetic Coordinate System (lat, lon)
or Geocentric system, GaussKrugerProjection
is un-necessary.

座標参照系のXML記述例

```xml
<CRS id="JGD2011, TP / 9(X, Y), H">
 <datum>
  <GeodeticDatum id="JGD2011" name="日本測地系2011">
   <ellips>
    <Ellipsoid name="GRS80" semiMajorAxis="6378137" inverseFlattening="298.257222101"/>
   </ellips>
   <pm>
    <PrimeMeridian greenwichLongitude="0"/>
   </pm>
  </GeodeticDatum>
 </datum>
 <vDatum>
  <VerticalDatum id="TP" name="東京湾平均海面"/>
 </vDatum>
 <cs>
  <CoordinateSystem id="TP / 9(X, Y), H" name="平面直角座標系第９系及び標高" dimension="3">
   <axis>
    <Axis name="X" direction="north" uom="m"/>
    <Axis name="Y" direction="east" uom="m"/>
    <Axis name="H" direction="vertical" uom="m"/>
   </axis>
   <ps>
    <GaussKrugerProjection scaleFactor="0.9999" falseEasting="0" falseNorthing="0">
     <origin>
      <Coordinate component="36,139.8333333" dimension="2"/>
     </origin>
    </GaussKrugerProjection>
   </ps>
  </CoordinateSystem>
 </cs>
</CRS>
```

付　録

付録1：地球の形状を球で近似したときのメルカトル図法

一定の経度差に対応する緯線長を平行圏弧長というが，これは地球上では緯度の余弦に比例する．つまり，より高緯度になると平行圏弧長は短くなる．一方で，地図平面上ではメルカトル図法は円筒図法なので，緯線長は一定である．つまり，地図上では緯線が緯度の余弦の逆数に比例して拡大されて，一定の長さの緯線長が確保される．そこで，経線方向にも同じ割合で拡大すれば，地球上で測った角度と地図上で測る角度は一致する．これを正角性といい，この条件を満たす投影は等角投影といわれる．ただし，地球上の面積や距離と地図上のそれらの値は一致しない．

横メルカトル図法では，円筒が横置き，つまり準拠楕円体の短軸と直交するので，地図上の経線長は一定になり，緯線長は経線長の拡大率と同じ割合で拡大する．従って，経線の間隔は基準子午線から遠ざかるにつれ，徐々に長くなる．

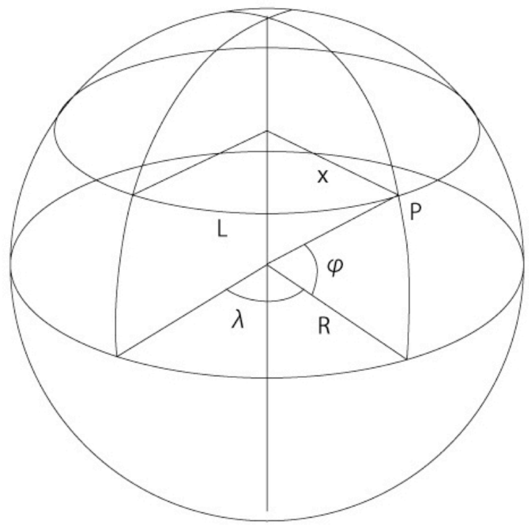


図-1 球と考えた地球の模式図

これから，上記の説明を数学的に行うが，説明を単純化するために，地球を球と考えてみよう（図-1参照）．任意の点Pの平行圏弧長Lは，以下の様に求められる．ここで，地球の半径を仮にR，Pの経度をλ，緯度を，回転軸からPまでの平行圏上の距離をxとする．

すると，xは，以下の式で求められる．

$$x = R\cos\varphi$$

また，Lは以下の式で求められる．

$$L = \lambda x$$

$$\therefore L = \lambda R\cos\varphi$$

この式をみると，緯度が高くなると値は小さくなることが分かる．一方でメルカトル図法は円筒図法であり，子午線は垂直である．ここで，経度λにおける，原点からの赤道上の平行圏弧長は，(1)によれば，L=λRになるので，点Pにおける平行圏弧長は，

$1/\cos\varphi = \sec\varphi$

を掛けなければ，子午線は垂直にならない．

ところで，赤道上の周長は2πRになる．また緯度 における平行圏が作る円周の長さは，

$2\pi R\cos\varphi$

になる．しかし，地図上では両者の長さは同じ2πRにならなければいけない．つまり，緯度 における平行圏の長さは

$\sec\varphi$

だけ掛ける必要がある．

さて，この緯度 φ 上の任意の位置に非常に小さな正方形があると考える．その辺の長さはhとする．この正方形の北東端から南西端に移動したとするとき，メルカトル図法の主旨（つまり角度は保存される）を考えれば，地上で正方形になるということは，図上でも正方形になるということであり，その大きさは，図上で

$2\pi R/2\pi R\cos\varphi = 1/\cos\varphi = \sec\varphi$

だけ大きくなるので，そのサイズは，

$h\sec\varphi$

になる．

ところで，hは微小な長さであるが，微小な緯度差に半径を掛けた値，といえるので，緯度 φから$\varphi+\Delta\varphi$までの長さhはR$\Delta\varphi$となる．従って，赤道から緯度φ までの，地図上の長さFは，以下の式で求めることができる．

$$F = R\int_0^{\varphi}\sec t\,dt \qquad (2)$$

この定積分を求めると以下のようになる．

$$F = R\ln(\tan(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})) \qquad (3)$$

ここで，ここで，lnは自然対数である．しかし，どうすれば(2)式から(3)式を求めることが出来るのだろうか．以下にその過程を示す．

$$f = \int\sec t\,dt$$
$$= \int\frac{\sec t+\tan t}{\sec t+\tan t}\sec t\,dt$$
$$= \int\frac{\sec^2 t+\sec t\tan t}{\sec t+\tan t}dt$$

ここで， $x = \tan t+\sec t$ とすると，

$dx = (\sec^2 t+\sec t\tan t)dt$ なので，

$$f = \int \frac{1}{x} dx$$
$$= \ln|x| + C$$
$$= \ln|\tan t + \sec t| + C$$

さて，

$$\tan t + \sec t$$
$$= \frac{\sin t + 1}{\cos t}$$
$$1 + \sin t = \sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = (\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2})^2$$
$$\cos t = \cos(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = (\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2})(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})$$

なので，

$$\frac{\sin t + 1}{\cos t} = \frac{\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}$$
$$= \tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$$

従って，

$$F = R\int_0^{\varphi} \sec t dt = R \ln|\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})|$$

ところで，地球上では緯度は-90度以上，90度以下なので，

$$-\frac{\pi}{4} \le \frac{\varphi}{2} \le \frac{\pi}{4}$$

である．つまり，$\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}) \ge 0$　なので，絶対値の符号は不要となり，結果として，

$$F = R\ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

となる．(Q.E.D)

さて，地球の半径を6378kmとすると，地球上の子午線弧長と，(3)式で計算した地図上の子午線弧長を比較すると表-1のようになる．

表-1 子午線弧長の比較

緯度（度）	地球上の弧長（km）	地図上の弧長（km）
15	1670	1689
30	3340	3503
45	5009	5621
60	6679	8400

表-1で示した経線及び緯線を平面上に描画すると図-2のようになる．

さて，メルカトル図法は，等角投影である．つまり，地図上で測った角度は地球上でも一致するはずである．そこで，原点から経度45度，緯度45度までの角度を図上で測った所，約48度であった．この値を使って，地球儀上に原点から線を引いてみた． 線は，緯度15度きざみの緯線毎に，都合3本の直線で近似した．ちなみにこの線は航程線という．結果として，経度45度，緯度45度に地点にたどり着く事ができた（図-3，図-4参照）．

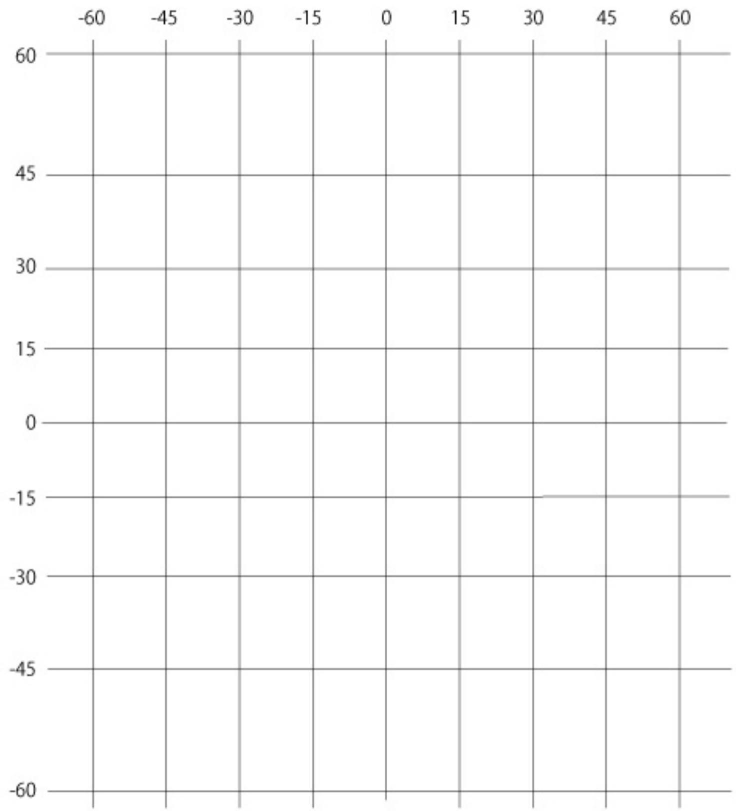


図-2 メルカトル投影の経緯線図

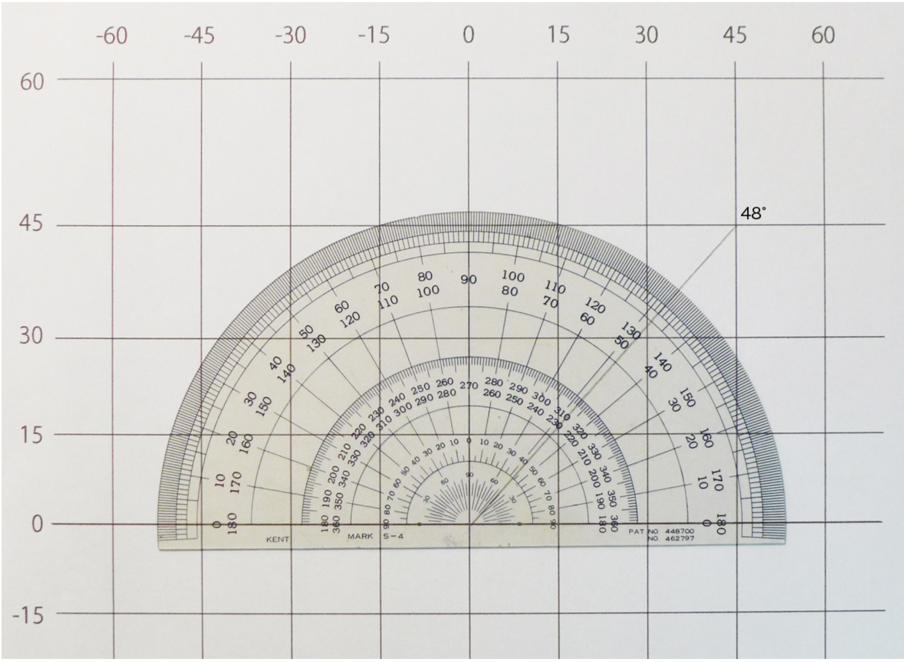


図-3 経緯度原点から経緯度共に45度の地点までの角度計測

図-4 地球儀上に描いた航程線

参考資料：http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html

付録2：Gauss-Kruger投影

地球の形状を近似する回転楕円体を準拠楕円体というが，JGD2000 を測地原子とする形状は，以下のパラメータで示される.

長半径 (a): 6378137m
短半径 (b): 6356752.314m
逆扁平率 (1/f): 298.257222101

これ以外に以下のパラメータも有用である.

第一離心率 (e)　$e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$

第二離心率 (e’)　$e'^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$

ガウス･クリューガーの投影は日本に19系ある平面直角座標系やUTM図法など，各国の平面座標系の基礎をなす投影座標系である. C.F.Gaussがハノーバーの測量に始めて使用し，L. Kruger及びV.K. Hristovが発展させたものといわれる. 基準子午線の両側に南北に細長い帯を考え，その中での投影式が求められている. ここでは，以下の変数が使われる.

卯酉（ぼうゆう）線曲率半径 (N)
準拠楕円体上に指定された1点からおろされた垂線（卯酉線）は，楕円体の短軸で交わるが，楕円体上の1点から，その交点までの距離を卯酉（ぼうゆう）線曲率半径 (N)とよぶ. 与えられた1点の経度，緯度を (λ, φ) とすると，Nは以下の式で求められる. なお，この式の求め方は付録3で示している.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

子午線弧長 (S)
楕円体上の1点から，赤道までおろした子午線の長さを，子午線弧長という. その長さは，以下の展開式を使って，充分な正確さで求めることができる.

$$S = a(1 - e^2)[A\varphi - \frac{B}{2}\sin 2\varphi + \frac{C}{4}\sin 4\varphi - \frac{D}{6}\sin 6\varphi + \frac{E}{8}\sin 8\varphi - \frac{F}{10}\sin 10\varphi]$$

ただし，

A = 1.005052501813087
B = 0.005063108622224
C = 0.000010627590263
D = 0.000000020820379
E = 0.000000000039324
F = 0.000000000000071

なお，
投影座標系原点の経緯度を (λ_0, φ_0)
求める投影座標を (x, y)
その経緯度を (λ, φ)
赤道から投影座標系の原点までの子午線弧長を S_0
赤道から求める点の緯度までの子午線弧長を S
経度と原点経度の差　$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$
その他，

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$

$$t = \tan\varphi$$

とする.

すると，経緯度から平面座標を求める式は，以下の通りになる.

$$x = \{(S - S_0) + \frac{N}{2}\cos^2\varphi \cdot t \cdot (\Delta\lambda)^2$$
$$+ \frac{N}{24}\cos^4\varphi \cdot t(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)(\Delta\lambda)^4$$
$$- \frac{N}{720}\cos^6\varphi \cdot t(-61 + 58t^2 - t^4 - 270\eta^2 + 330t^2\eta^2)(\Delta\lambda)^6$$
$$- \frac{N}{40320}\cos^8\varphi \cdot t(-1385 + 3111t^2 - 543t^4 + t^6)(\Delta\lambda)^8\}$$

$$y = \{N\cos\varphi \cdot \Delta\lambda$$
$$- \frac{N}{6}\cos^3\varphi(-1 + t^2 - \eta^2)(\Delta\lambda)^3$$
$$- \frac{N}{120}\cos^5\varphi(-5 + 18t^2 - t^4 - 14\eta^2 + 58t^2\eta^2)(\Delta\lambda)^5$$
$$- \frac{N}{5040}\cos^7\varphi(-61 + 479t^2 - 179t^4 + t^6)(\Delta\lambda)^7\}$$

上に示した投影式を使って，円筒を展開してできる平面上の位置から基準子午線までの距離に，1未満の縮尺係数を掛け，これをもってその点における平面座標とすることができる.

UTM図法では，基準子午線における係数を0.9996としている. これによって原点から東西約180kmの地点で線拡大率は1になる. また，x座標が負にならないよう，500kmを加えて表示する. つまりUTM座標(X,Y)は，以下の式で求まる.

$$X = 0.9996x + 500km$$
$$Y = 0.9996y$$

日本の平面直角座標系は，19系の座標系で成り立つが，この場合の座標は，原点を基準子午線上で適当な緯度(B_0)まで移動させ，実際の座標は以下の式で求めている. つまり，

$$X = 0.9999x$$
$$Y = 0.9999(y - B_0)$$

この座標系では，それぞれの座標系が半径約130km程度の範囲をカバーすることができる. その原点では縮尺係数が0.9999であり，経線方向130kmの位置では1.0001程度になる. 実際の有効範囲は，国土交通省告示第九号（平成十四年一月十日）に定められている.

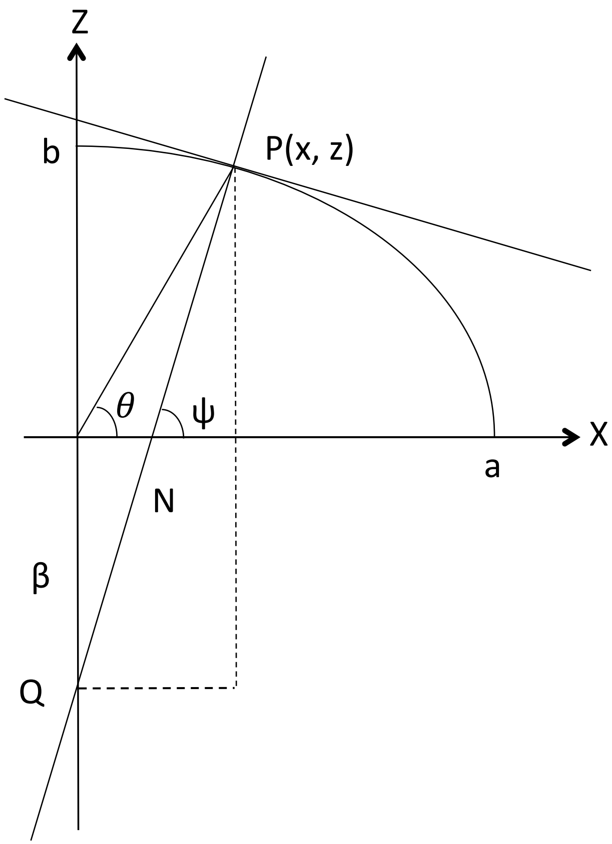
子午線弧長については，平成23年度の公共測量作業規定準則の改定にともない，ここで紹介した式が変更されている. 新しい式は，「それ以前までに規定されていた式よりも簡潔である上に収束が速く,将来の楕円体パラメータの変更に際しても汎用性を保持したものである」と言われている. gittokでは，新しい計算式で子午線弧長を求めている.

河瀬和重，『赤道からの子午線弧長を任意に与えて該当する緯度を求めるより簡明な計算方法』，地理院時報 2011 No.121
http://www.gsi.go.jp/common/000061215.pdf

なお，ガウス・クリューガーの投影法についてより詳細に学習したい場合は，例えば以下の参考文献にあたるとよい.

政春尋志著，『地図投影法』，2011.9，朝倉書店刊

付録3：卯酉（ぼうゆう）線曲率半径 (N)



Nの長さはPからQまでの長さである．Pは回転楕円体の重心から，地心緯度θの位置である．Qは，Pにおける子午線の接線に垂直な法線が地軸と交わる地点である．ここで，この法線と赤道面のなす角度を測地緯度または地理緯度といい，ψで表すことにする．我々が日常使っている緯度は測地緯度である．

Nは以下の手順で求める．

１．（x，z）をφφを使った式で表す．

２．直線PQの切片，つまりQのz座標(β)を求める．

３．$N^2 = x^2 + (z + |\beta|)^2$ を使って，Nを求める．

1. (x, z) をψを使った式で表す．

θを媒介変数とする，楕円の方程式は以下の通り．

$$x = a\cos\theta$$
$$z = b\sin\theta$$

ψを媒介変数とするxは以下の式になる．

$$x = N\cos\psi$$

Pにおける接線の傾き (dz/dx) は，

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sin\theta$$
$$\frac{dz}{d\theta} = -b\cos\theta$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{-b}{a\tan\theta}$$

すると，法線の傾きαは，

$$\alpha = \frac{-dx}{dz} = \frac{a\tan\theta}{b} = \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta} = \frac{a^2 z}{b^2 x}$$

一方で法線の傾きをψで表すと，$\tan\psi$であり，
$x = N\cos\psi$なので，

$$\frac{a^2 z}{b^2 x} = \tan\psi$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} x\tan\psi = \frac{b^2}{a^2} N\cos\psi \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{b^2}{a^2} N\sin\psi$$

これで，(x, z)を，測地緯度ψで表現できるようになった．
ところで，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{az}{bx} = \frac{a\frac{b^2}{a^2}N\sin\psi}{bN\cos\psi} = \frac{b\sin\psi}{a\cos\psi} = \frac{b}{a}\tan\psi$$

さて，法線の傾きは$\tan\psi$なので，切片をβとすると，その方程式は
となり，$z = x\tan\psi + \beta$

$$\beta = z - x\tan\psi = b\sin\theta - a\cos\theta\frac{a}{b}\tan\theta$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{b}\sin\theta$$

すると，ピタゴラスの定理により，また，a>bなので，北半球ではβは必ず負の値をとる，また，南半球ではβは正の値をとるが，z はマイナスになる，と考えれば，

$$N^2 = x^2 + (z-\beta)^2$$

$$N^2 = a^2\cos^2\theta + (b\sin\theta + \frac{a^2 - b^2}{b}\sin\theta)^2$$

$$= a^2\cos^2\theta + \frac{a^4}{b^2}\sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\theta)$$

$$= a^2(\frac{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta}{b^2}) = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\theta)$$

ここで，

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{b^2\tan^2\psi}{a^2 + b^2\tan^2\psi}$$

なので，

$$N^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + \frac{(a^2 - b^2)b^2\tan^2\psi}{a^2 + b^2\tan^2\psi})$$

$$= a^2(\frac{a^2 + b^2\tan^2\psi + (a^2 - b^2)\tan^2\psi}{a^2 + b^2\tan^2\psi})$$

$$= \frac{a^4(1+\tan^2\psi)}{a^2 + b^2\tan^2\psi} = \frac{a^4}{\cos^2\psi(a^2 + b^2\tan^2\psi)}$$

$$= \frac{a^4}{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi} = \frac{a^4}{a^2 - a^2\sin^2\psi + b^2\sin^2\psi}$$

$$= \frac{a^2}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\psi}$$

さて，$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ は第一離心率なので，結果としてNは，

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\psi}}$$

付録4：画面座標から地上平面座標への換算

画面座標を(x,y)，地上平面座標を（X,Y）とする．ここで地上平面座標とは，平面直角座標座標やUTM座標など，地上の位置を平面に投影した座標のことである．
この２種類の座標は，一次変換で換算できるが，画面の座標には多少の歪みが存在するかもしれないので，ここではアフィン変換を使って，座標の換算を行うものとする．
さて，係数行列の値を求めるためには，画面座標及び地上座標が対になる点が３点以上あればよい．つまり，以下の式を解けば，係数行列の最小二乗解を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

ここで，それぞれの行列を，A,a,Bで表す．つまり，A=aBなので，

$$a^T A = a^T aB$$

$$(a^T a)^{-1} a^T A = B$$

従って，係数行列Aは，

$$B = (a^T a)^{-1} a^T A$$

さて，地上座標は充分な正確度をもつ，言い換えれば真値と見なすことができると考えられるとき，画面座標の正確度は，Bを使って求めた値(A’)と，元々の地上座標(A)の差の平均値(E)及び，分散共分散行列(S)で表現することができる．

つまり，

$$dX_i = X'_i - X_i$$

$$dY_i = Y'_i - Y_i$$

$$E = \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} dX_i & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} dY_i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)^2 & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)(dY_i - E_y) \\ \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)(dY_i - E_y) & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dY_i - E_y)^2 \end{bmatrix}$$

平均値は，真値からのずれを表し，分散，共分散は誤差のばらつきを表す．ただし，最小二乗解の誤差の平均値は0になる．また，与えられた画面座標の誤差が大きく，Sの値が，一定の値を超えた時は，得られた係数行列に実用性はない．

結果として，実用的な係数行列が得られれば，

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

で，地上平面座標を求めることができる．

ところで，基準点のスクリーン座標の計測にバイアスがあった場合，その量は，再度より正確に基準点のスクリーン座標を指示して，それを地上座標にすることによって，差を評価することができる．

まとめ

任意の空間の一部分を，他と識別するための基準を，参照系という．ここでは，地理的な空間の位置を識別するための，座標参照系を解説した．その概要は以下の通りである．

地球上の位置や場所を識別するための参照系は，空間参照系である．

座標で空間上の位置を表現するための参照系は，座標参照系である．

座標参照系は，地球の形状，使用する座標の座標系，平面に投影するための投影法，そして高さの基準となるパラメータで示される．

謝辞：座標座標系に関して，政春尋志氏にご指導を賜った．記して謝意を表する．ただし，このノートの内容について，一切の責任は当方にある，