Gittok Lecture Note

09 参照系

太田守重

2013

ここで学ぶこと

ここでは，直接または間接に位置を示す参照系について解説する.
例えば，幾何プリミティブは位置を属性とするが，それは，地球上の空間位置である. しかし，例えば経度と緯度は，見た目は単なる角度である. これらは，地球の形状を回転楕円体とみなし，それぞれの原点となる子午線と赤道が設定されて，始めて位置としての意味をもつ. つまり座標は，その意味を定義づける基準がなければ，単なる数字の列でしかない. この，位置を定義づける基準を参照系 (Reference System)という.
一方私たちは，日常生活で座標を使用することはほとんどない. その代わり住所を使用する. しかし，住所は地球上の座標と関連しなければ，価値がない. つまり，住所は地球上の位置と関連することが保証されている，間接的な位置表現である. このような，場所の表現を地理識別子とよび，地理識別子と位置の対が集まると地名辞典(Gazetteer)と呼ぶ. これは参照系と同じ働きをする.
ここでは，直接または間接に位置を示す参照系について解説する.

参照系とその種類

任意の空間の一部分を，他と識別するための基準を，**参照系**という.

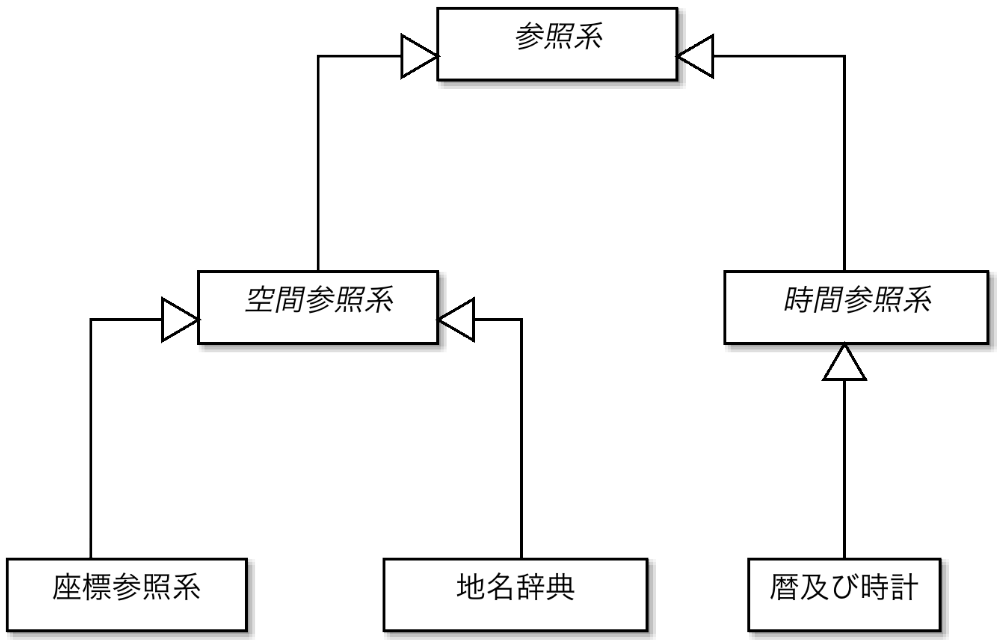
地球上の位置や場所を識別するための参照系は，**空間参照系**である.

座標で空間上の位置を表現するための参照系は，**座標参照系**である.

場所を示す符号（郵便番号など）は地理識別子という. 地理識別子と，座標または別の地理識別子との対の集まりは，**地名辞典**（**Gazetteer**）という. 地名辞典は地理識別子によって間接的に位置を示すための空間参照系である.

時点を特定するための基準は，**時間参照系**という.

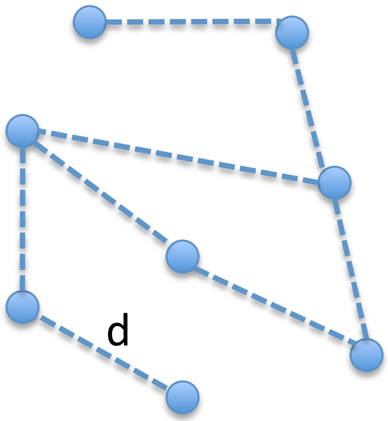
時点は暦や時計で表現する.

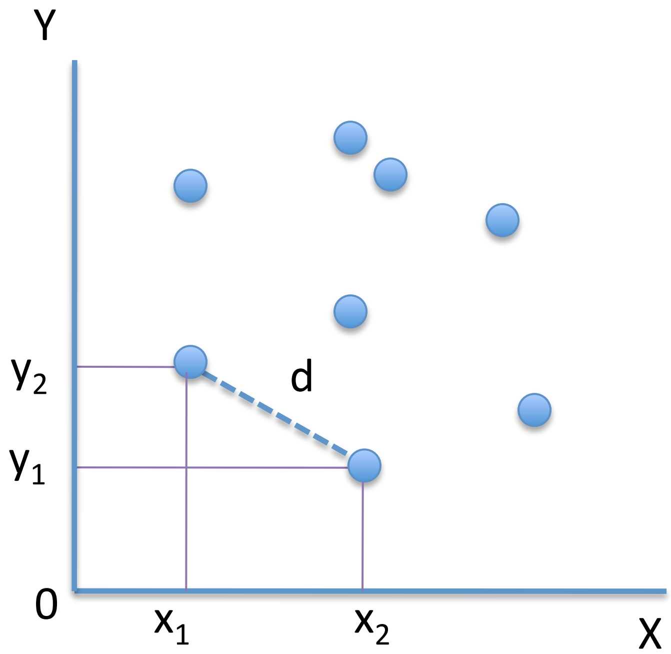


座標と座標系

空間上の座標

空間：互いに関連するものの集合





例えば，距離による関連をもつ点の集合は距離空間

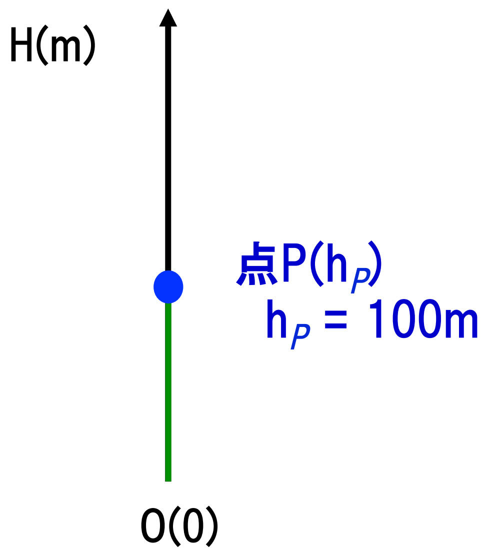
原点の位置と軸を定めると，距離空間中の要素の位置は“座標系”上で特定される．
上の例は，右手系（親指：X軸，人差し指：Y軸，角度の回転方向は反時計回り）の平面直交座標系
計測単位がメートルであれば，距離はdメートル

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

座標系

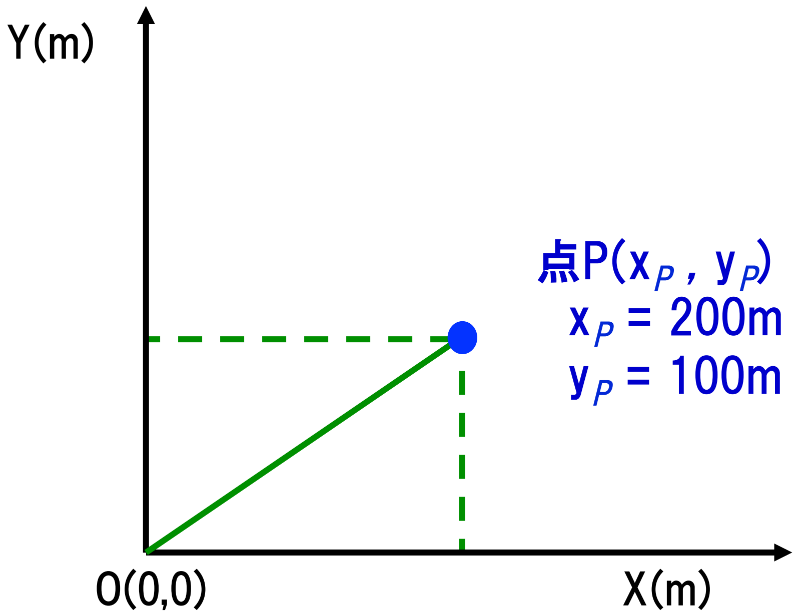
一次元座標系

原点と，距離の計測単位で定義



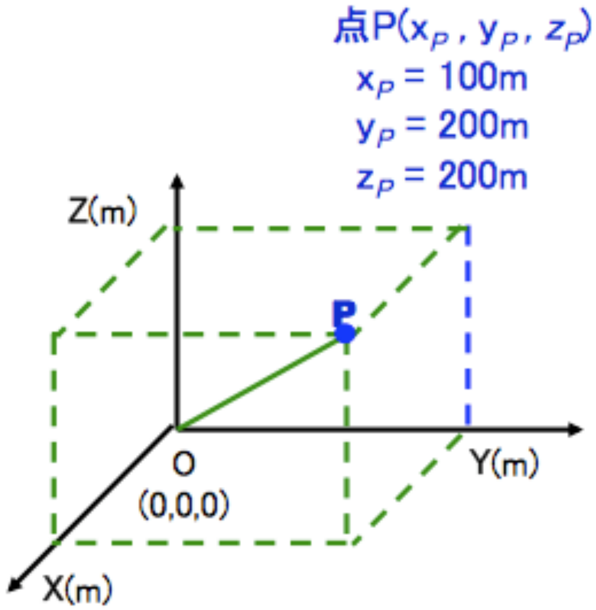
二次元座標系

原点，X軸からY軸への回転方向，軸同士の角度，そして計測単位で定義



三次元直交座標系

（水平＋鉛直成分）

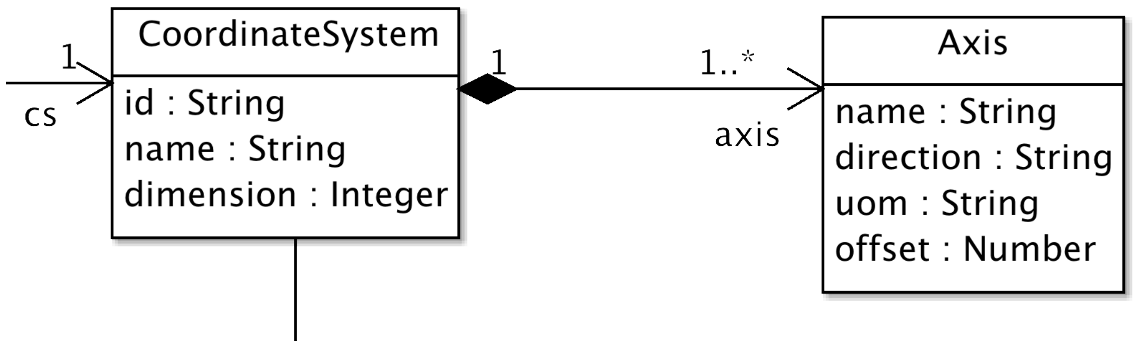


座標系を定義づける要素

- □ **座標系識別子**
- □ **座標系名**
- □ **次元数**
- □ **軸の名称，方向，単位，オフセット**

direction :
 easting
northing
vertical

offset:
座標値を常に正の数にするためのシフト量．false eastingまたはfalse northingという．
UTM座標系 (後述) で使用される．

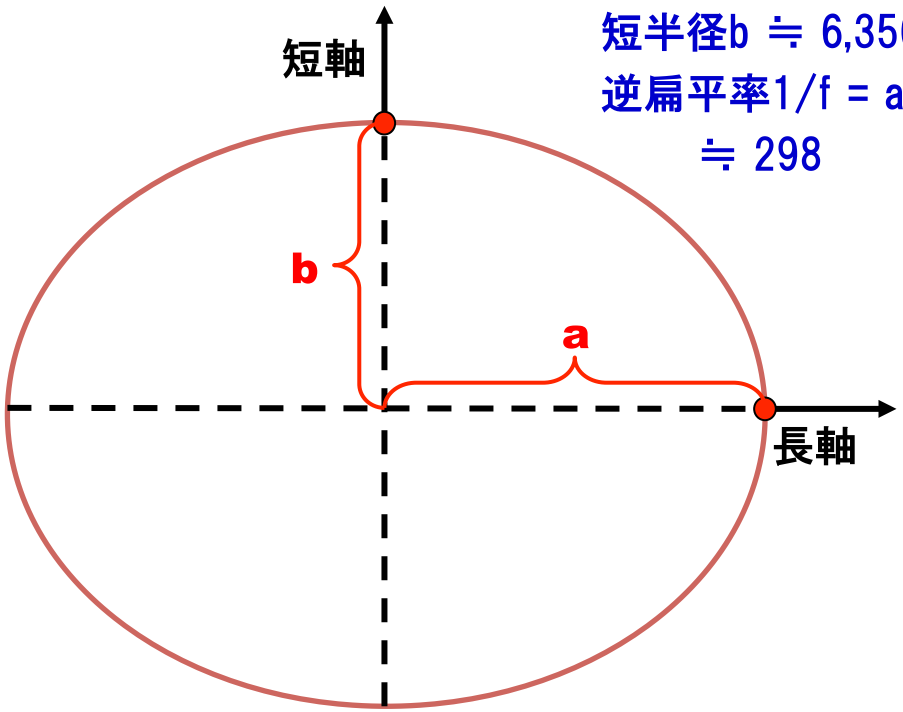


座標参照系

座標参照系と準拠楕円体

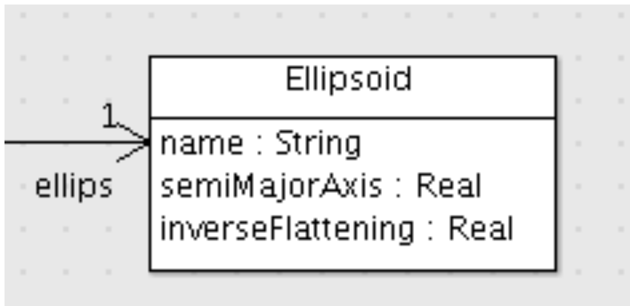
地球上の位置を座標で示すための基準は座標参照系という．地球の形状は回転楕円体で近似できるが，これを地球楕円体という．各国の測地系が準拠する地球楕円体は，準拠楕円体(Reference Ellipsoid)という．

長半径a ≒ 6,378km
短半径b ≒ 6,356km
逆偏平率1/f = a/(a – b)
≒ 298



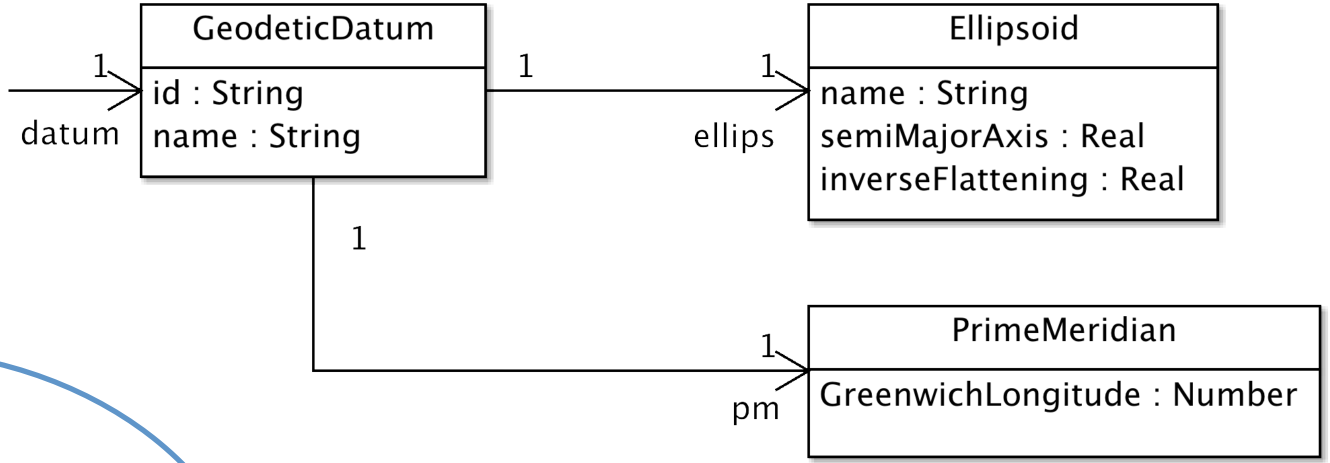
楕円体の要素

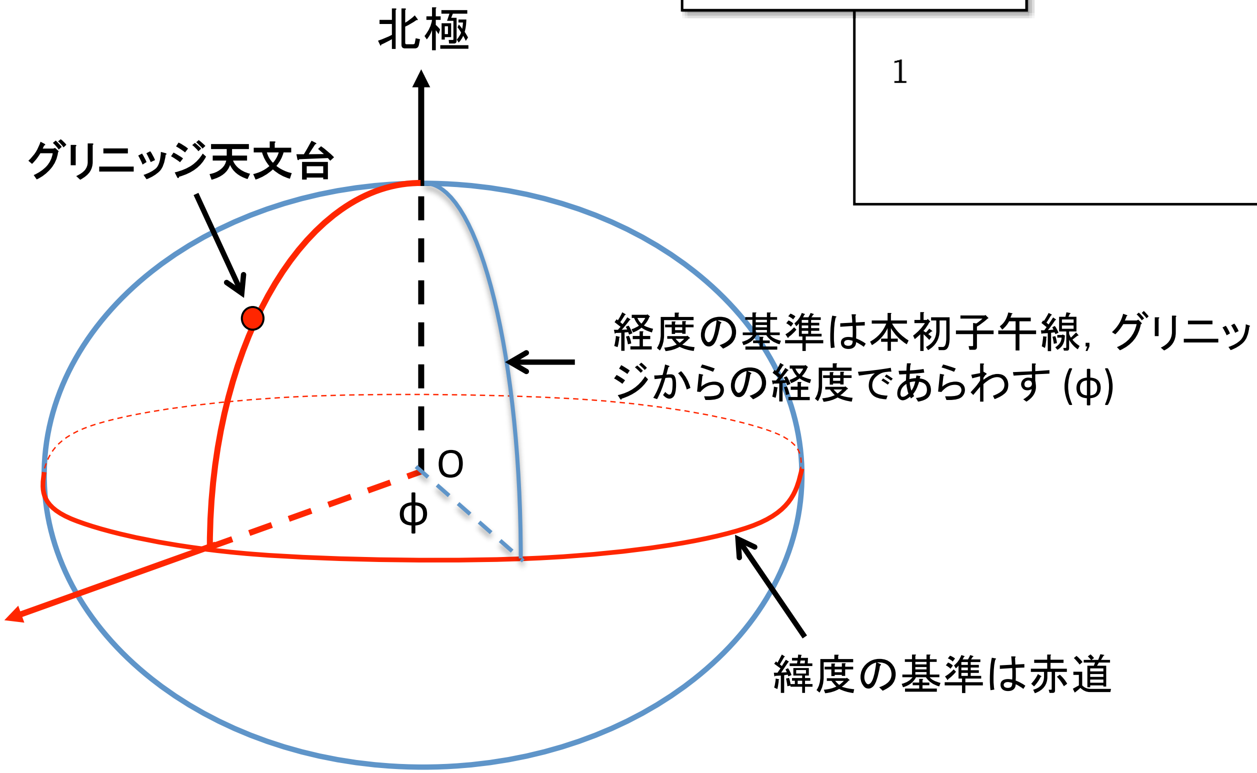
- □ 長半径
- □ 逆偏平率



測地原子

準拠楕円体のパラメータ及び本初子午線子午線(Prime Meridian) の定義を合わせて，測地原子(Geodetic Datum)という.



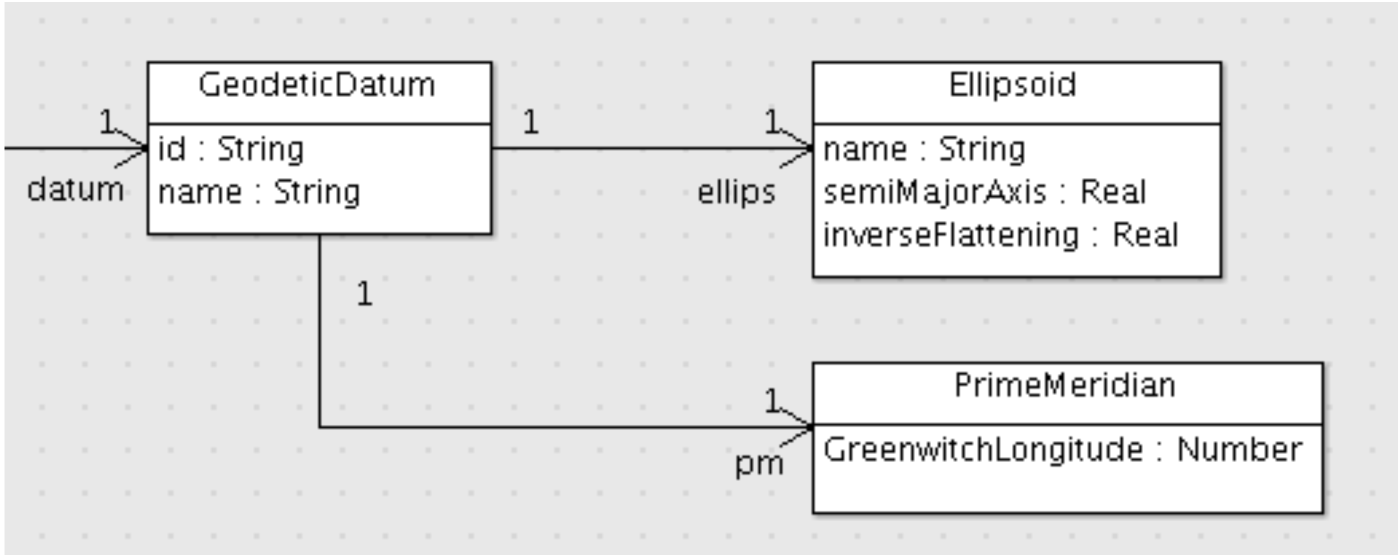


日本の測地原子

日本では，測量法で規定されている「測量の基準」が，日本測地系から世界標準である世界測地系に改正され，平成14(2002)年４月１日から施行された．ちなみに日本測地系に準拠する測地原子の英語表記はTokyo Datumだった．また世界測地系の場合はJapanese Geodetic Datum 2000 という．略称はそれぞれTD, JGD2000である (JIS X 7115:2005 附属書２（規定）日本における座標参照系の表記）．
さらに，2011年3月11日の東日本大震災の影響で日本経緯度原点及び日本
水準原点が移動移動したため，JGD2011が制定されているが，測地原子のパラメータは同一である.

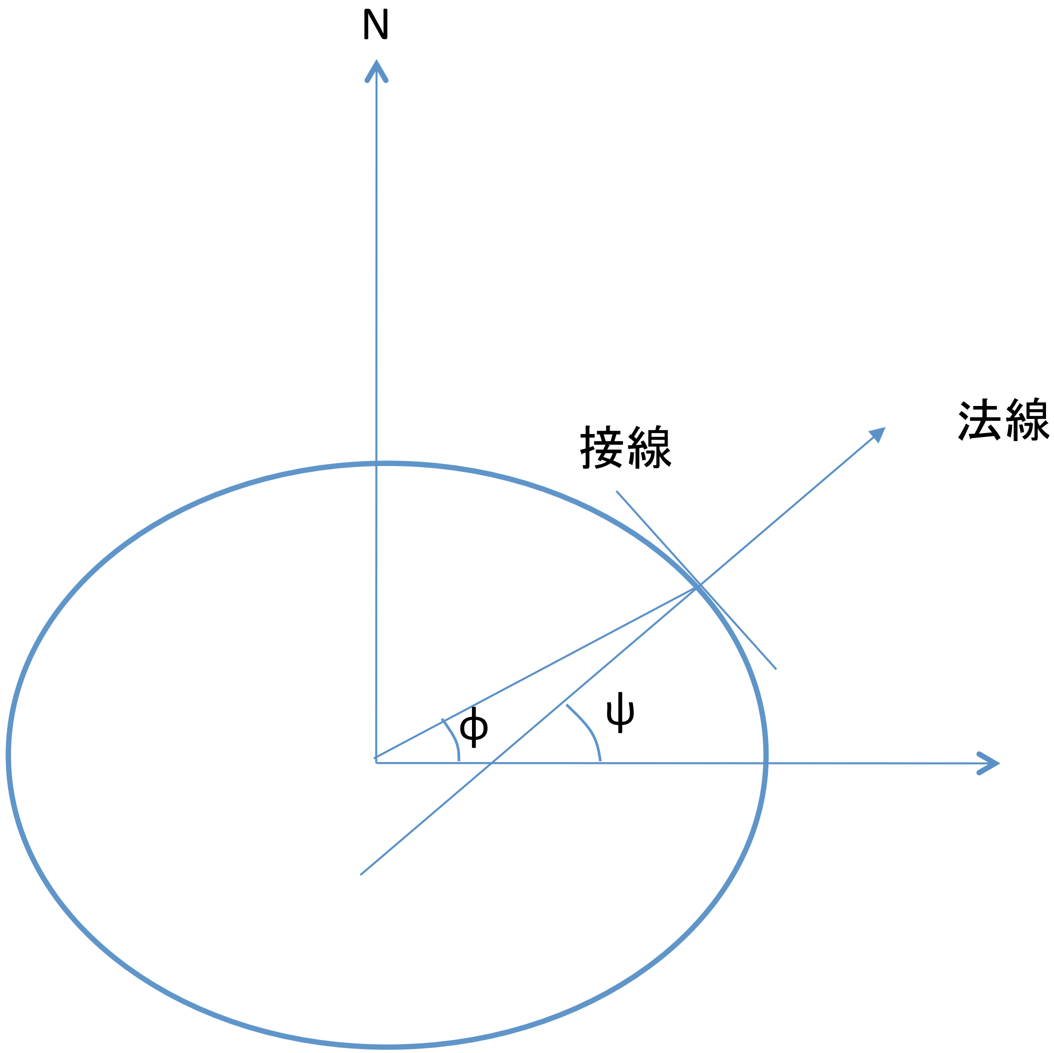
なお測量法では，世界測地系を以下のように定義している．つまり，
「世界測地系」とは，地球を次に掲げる要件を満たす扁平な回転楕円体であると想定して行う地理学的経緯度の測定に関する測量の基準をいう.
一　その長半径及び扁平率が，地理学的経緯度の測定に関する国際的な決定に基づき政令で定める値であるものであること.
二　その中心が，地球の重心と一致するものであること.
三　その短軸が，地球の自転軸と一致するものであること.
　なお，座標参照系の指定は，InstanceSetの中で行う.

測地原子のXML表記




```
<GeodeticDatum id="JGD2011" name="Japan Geodetic Datum 2011">
  <Ellipsoid name="GRS80" semiMajorAxis="6378137" inverseFlattening="298.257222101"/>
  <PrimeMeridian greenwitchLongitude="0"/>
</GeodeticDatum>
```

いろいろな緯度



φ　地心緯度

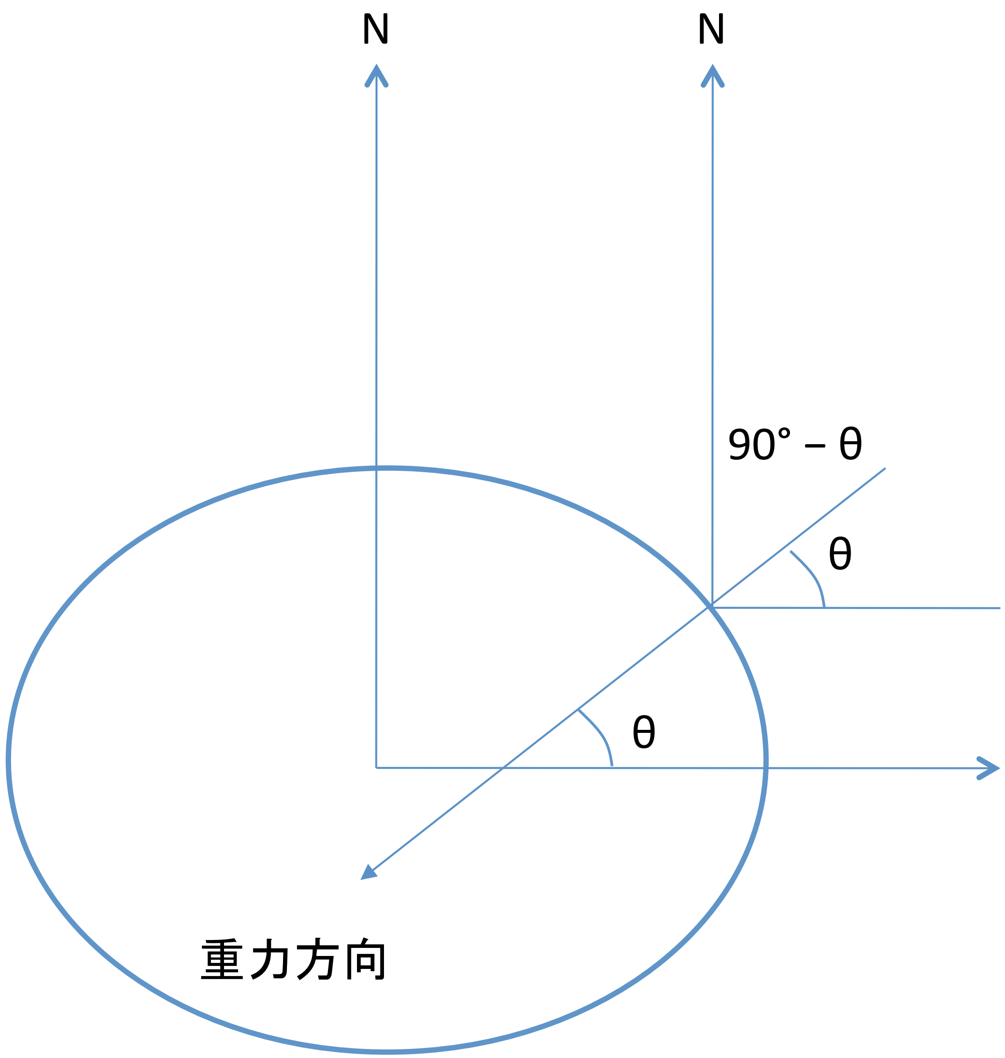
準拠楕円体の中心を原点として測る緯度

ψ　測地（地理）緯度

準拠楕円体上の位置から延びる法線と赤道が作る面の交点の角度.

緯度といえば，普通は測地緯度を指す.

いろいろな緯度



θ：天文緯度

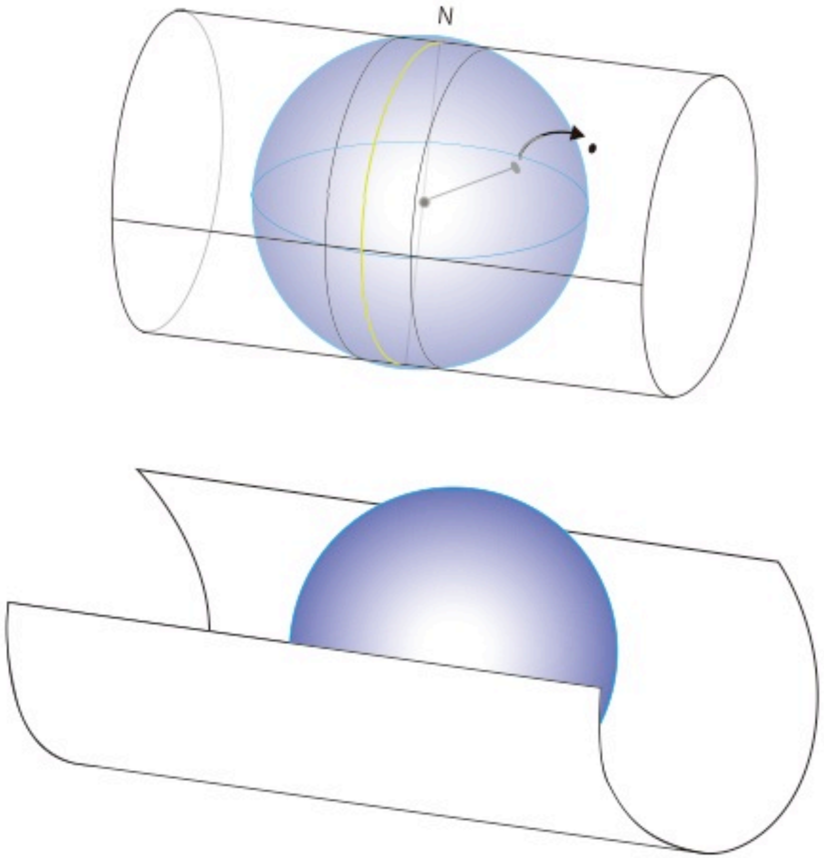
　真北方向と天頂方向の角度は，90° – 緯度（θ）になる．この緯度は天文緯度と呼ばれるが，地球の質量分布は一定ではないため，一般に鉛直方向，つまり天頂方向の角度は，楕円体面の垂線とは一致しない．

　この緯度は，かつて天文観測で緯度を測っていた時代に使われていた．

投影法

地上の位置を図示するには，紙面や画面などの平
上に位置を投影する．投影の方法は「投影法」または
「図法」と言われる．代表的な方法に円筒図法がある
例えば右図の場合，円筒は地球の南北軸に垂直に
るように，地球をカバーしている．そして，地球上の位
置（例えば経緯度）を，何らかの方法で円筒上の位置
に投影する．そして，円筒を開いて平面にすれば，地
球上の位置を平面に投影したことになる．

UTM座標系や平面直角座標系のような（付録1，2
照），円筒を横向きにした投影法では，中央経線から
東西に離れるに従って，中央経線からの水平位置が
地球上の位置より大きくなるが，右図の様に，少し円
筒の直径を地球のそれより小さくして，地球に埋め込
ませることによって，ずれの絶対値を小さくすることが
できる．それでも，距離が離れるにつれてずれは拡大
するので，有効な範囲（ゾーン）が決められ，その範囲
で投影がなされる．



Gauss-Kruger投影

日本では，縮尺係数を0.9999とする19系からなる平面直角座標系
http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/patchjgd/download/Help/jpc/jpc.htm
や縮尺係数0.9996のUMT図法
http://ja.wikipedia.org/wiki/ユニバーサル横メルカトル図法
がよく使われるが，これらはGauss-Kruger投影による座標系である.

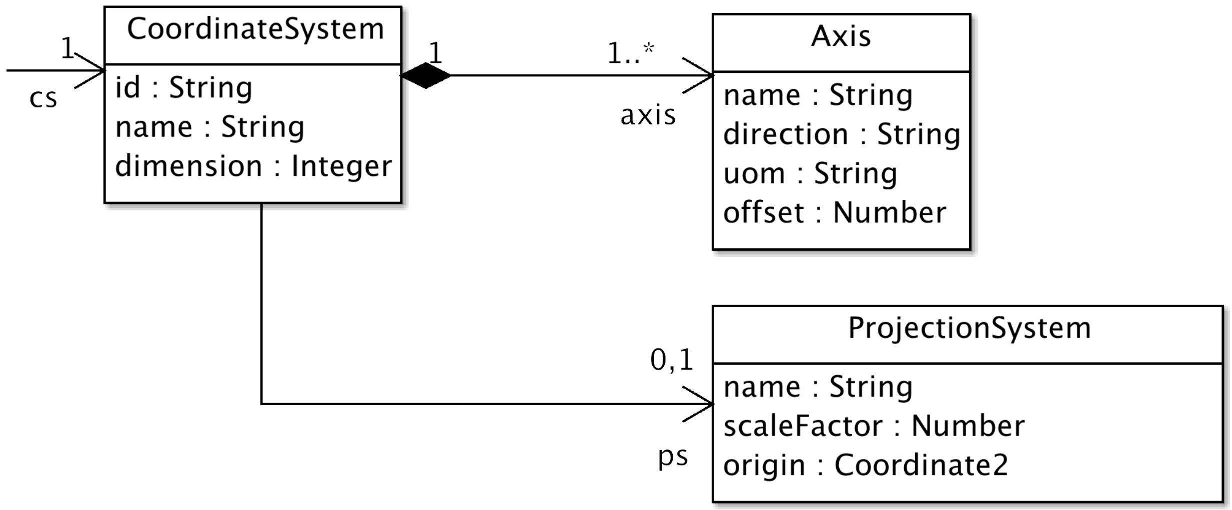
水平座標系の略号表記

(B, L)	測地座標系
Zone No.(X, Y)	ゾーン番号を指定した平面直角座標系
Zone No.(E, N)	ゾーン番号を指定したUTM座標系

略号	定義	範囲
例：9(X, Y)	平面直角座標系第９系	東京都，埼玉県など

(X, Y)：平面直角座標系であることを示す記号
(E, N): UTM座標系であることを示す記号

平面直角座標系（第９系）とそのXML表記




```
<CoordinateSystem id="9(X, Y)" name="Plane Rectangular Coordinate System 9" dimension="2">
  <axis>
    <Axis name="X" direction="north" uom="m" offset=”0"/>
    <Axis name="Y" direction="east" uom="m" offset=”0"/>
    <Axis name="H" direction="vertical" uom="m" offset=”0"/>
  </axis>
  <ps>
    <ProjectionSystem name="Gauss-Kruger" scaleFactor="0.9999">
      <origin>
        <Coordinate component="36,139.8333333" dimension="2"/>
      </origin>
    </ProjectionSystem>
  </ps>
</CoordinateSystem>
```

鉛直座標系

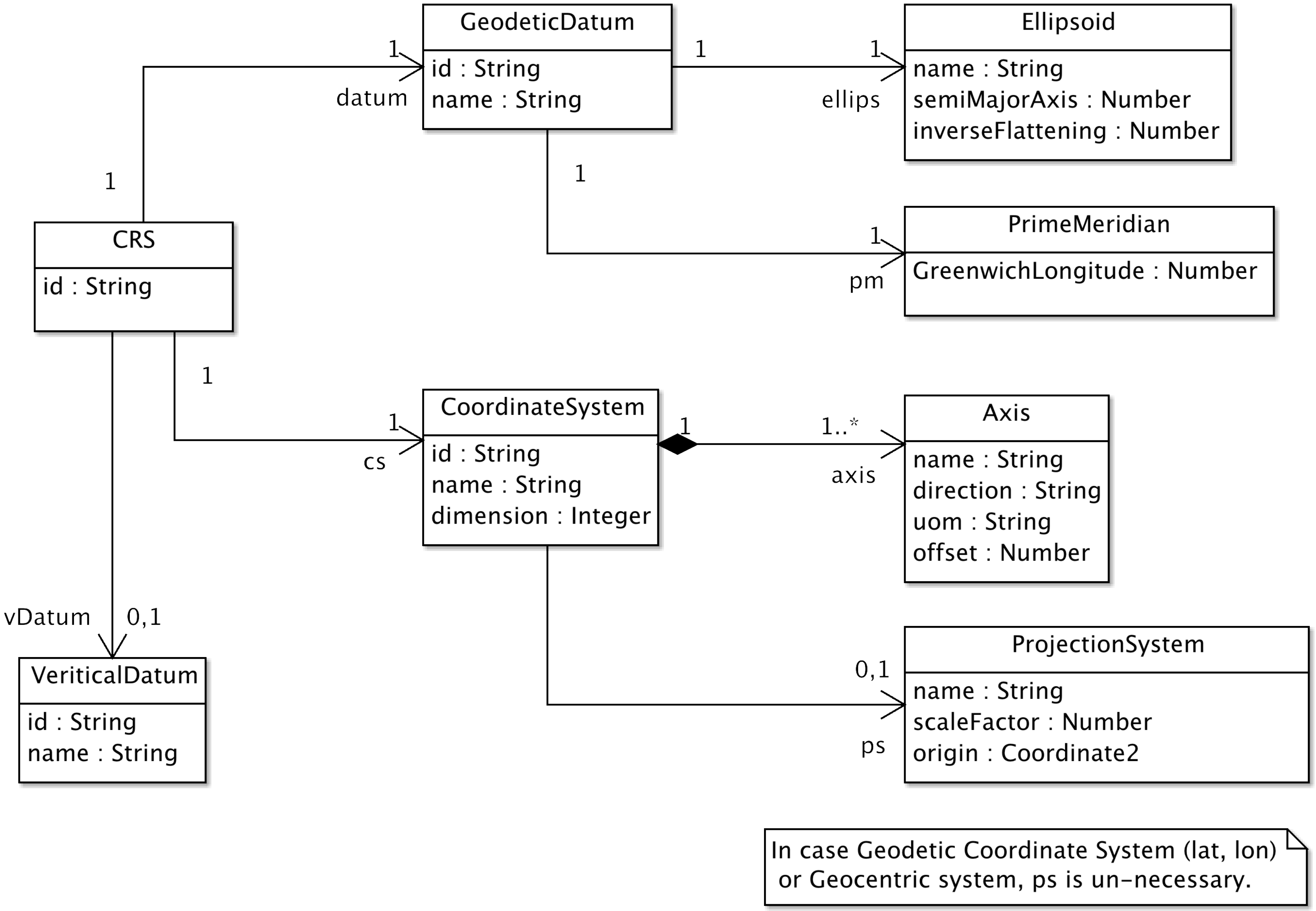
地球上の高さを示す座標には，例えば平均海面（ジオイド）上の高さ（標高）や
http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/geoid/geoid.html
準拠楕円体からの高さ（楕円体高）がある．これらの基準は鉛直座標系と呼ばれる．

	鉛直座標系の略号表記
H	平均海面上の高さ
h	準拠楕円体からの高さ標系

平均海面（鉛直原子）は，地域によって異なるので，例えば東京湾平均海面を指定するときは略称(TP)が使われる．

例：“JGD2011, TP / 9(X, Y), H”
この例は，日本測地系 2011 及び東京湾平均海面を座標参照系とし，平面直角座標第９系及び平均海面上の高さを使って，３次元の座標を表現することを指す．

座標参照系の構造

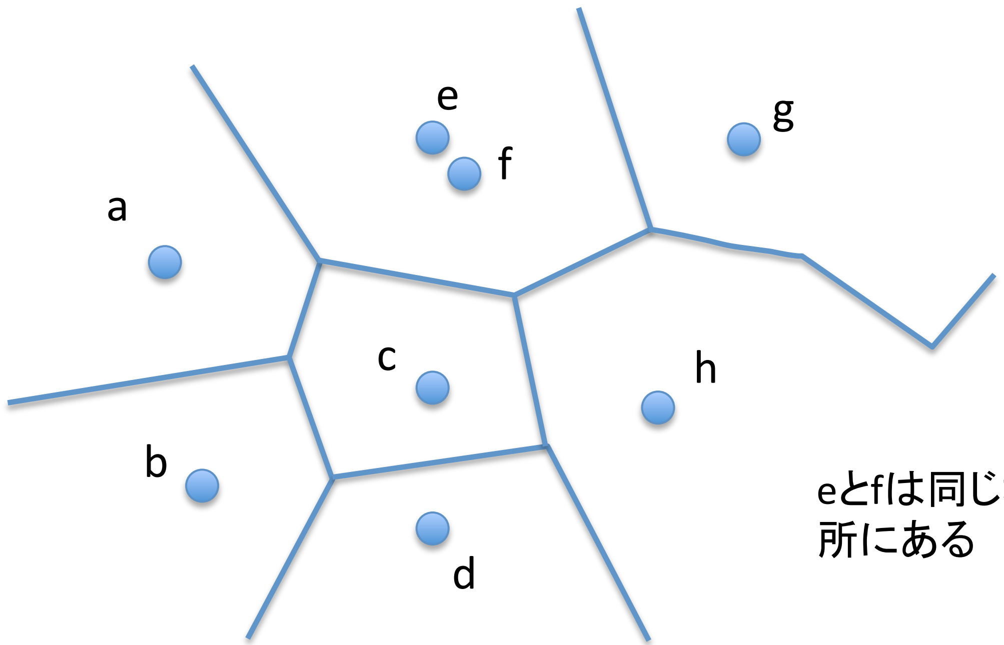

GeodeticDatum
id : String
name : String
Ellipsoid
name : String
semiMajorAxis : Number
inverseFlattening : Number
PrimeMeridian
GreenwichLongitude : Number
CRS
id : String
CoordinateSystem
id : String
name : String
dimension : Integer
Axis
name : String
direction : String
uom : String
offset : Number
ProjectionSystem
name : String
scaleFactor : Number
origin : Coordinate2
VeriticalDatum
id : String
name : String
datum
ellips
pm
cs
axis
ps
vDatum
1
1..*
0,1
In case Geodetic Coordinate System (lat, lon)
or Geocentric system, ps is un-necessary.

座標参照系のXML記述例

```
<CRS id="JGD2011, TP / 9(X, Y), H">
 <datum>
  <GeodeticDatum id="JGD2011" name="Japanese Geodetic datum 2011">
   <ellips>
    <Ellipsoid name="GRS80" semiMajorAxis="6378137" inverseFlattening="298.257222101"/>
   </ellips>
   <pm>
    <PrimeMeridian greenwichLongitude="0"/>
   </pm>
  </GeodeticDatum>
 </datum>
 <cs>
  <CoordinateSystem id="9(X, Y)" name="Plane Rectangular Coordinate System 9" dimension="2">
   <axis>
    <Axis name="X" direction="north" uom="m" offset="NaN"/>
    <Axis name="Y" direction="east" uom="m" offset="NaN"/>
    <Axis name="H" direction="vertical" uom="m" offset="NaN"/>
   </axis>
   <ps>
    <ProjectionSystem name="Gauss-Kruger" scaleFactor="0.9999">
     <origin>
      <Coordinate component="36,139.8333333" dimension="2"/>
     </origin>
    </ProjectionSystem>
   </ps>
  </CoordinateSystem>
 </cs>
 <vDatum>
  <VerticalDatum id="TP" name="Mean See Level of Tokyo Bay"/>
 </vDatum>
</CRS>
```

地理識別子と地名辞典

地理識別子による空間参照



eとfは同じ場所にある

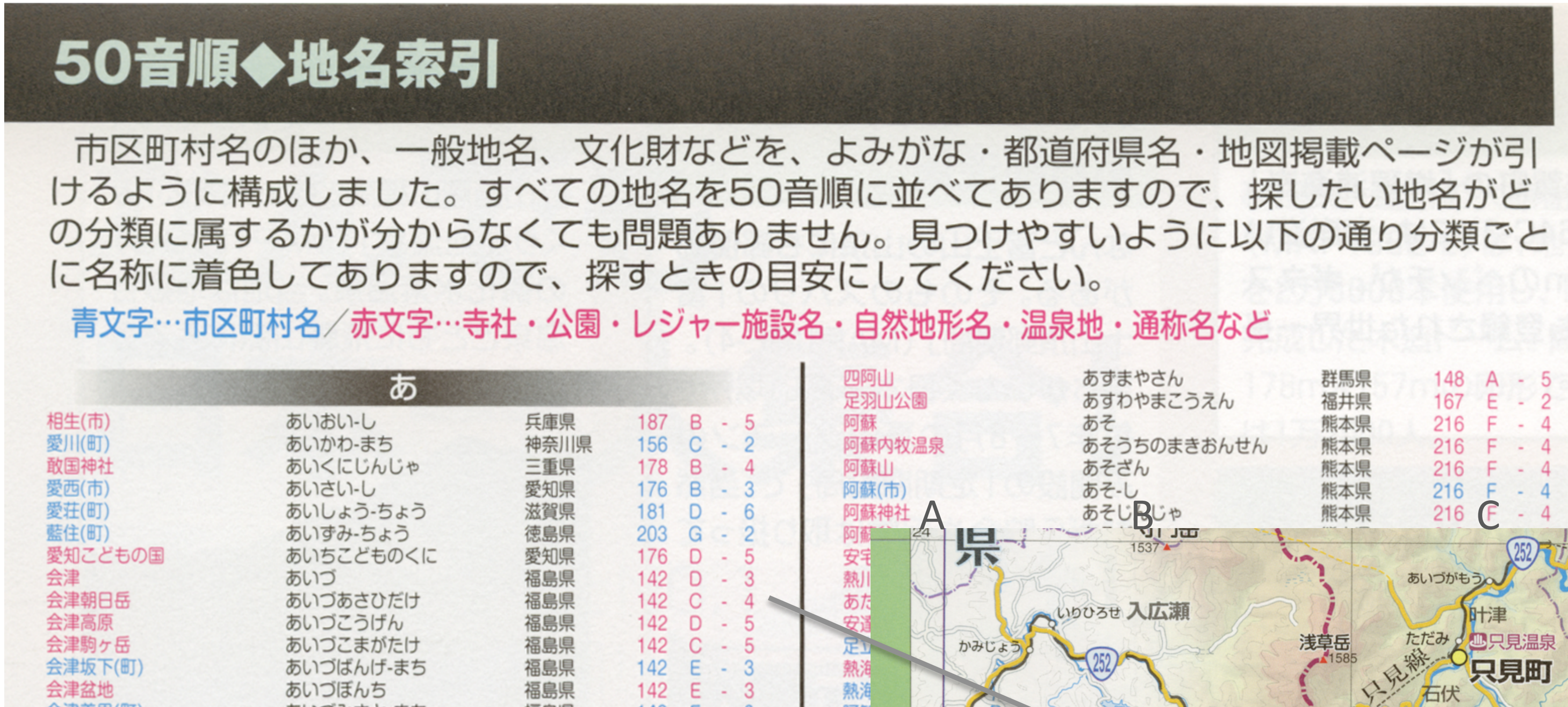
Gazetteer

名前	識別情報
a	本町一丁目
b	本町二丁目
c	北町二丁目
d	南町三丁目
e	北町一丁目
f	北町一丁目
g	北町五丁目
h	那賀町一丁目

空間上に存在するものに与えた名前と，場所を識別する地理識別子（場所の識別情報）を組にすると，空間上の要素が同じ場所にあるか否かがわかる．

Gazetteerが，場所識別の根拠，つまり場所の参照系を示す．識別情報が座標ならば，間接的に座標参照系を使うことになる．

地図帳の地名索引



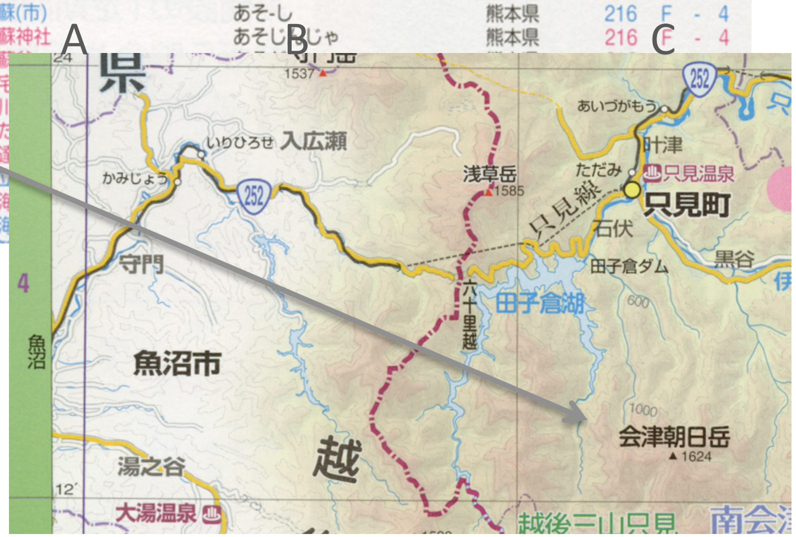
50音順◆地名索引

市区町村名のほか、一般地名、文化財などを、よみがな・都道府県名・地図掲載ページが引けるように構成しました。すべての地名を50音順に並べてありますので、探したい地名がどの分類に属するかが分からなくても問題ありません。見つけやすいように以下の通り分類ごとに名称に着色してありますので、探すときの目安にしてください。

青文字…市区町村名／赤文字…寺社・公園・レジャー施設名・自然地形名・温泉地・通称名など

あ

相生(市)	あいおい-し	兵庫県	187	B - 5
愛川(町)	あいかわ-まち	神奈川県	156	C - 2
敢国神社	あいくにじんじゃ	三重県	178	B - 4
愛西(市)	あいさい-し	愛知県	176	B - 3
愛荘(町)	あいしょう-ちょう	滋賀県	181	D - 6
藍住(町)	あいずみ-ちょう	徳島県	203	G - 2
愛知こどもの国	あいちこどものくに	愛知県	176	D - 5
会津	あいづ	福島県	142	D - 3
会津朝日岳	あいづあさひだけ	福島県	142	C - 4
会津高原	あいづこうげん	福島県	142	D - 5
会津駒ヶ岳	あいづこまがたけ	福島県	142	C - 5
会津坂下(町)	あいづばんげ-まち	福島県	142	E - 3
会津盆地	あいづぼんち	福島県	142	E - 3
四阿山	あずまやさん	群馬県	148	A - 5
足羽山公園	あすわやまこうえん	福井県	167	E - 2
阿蘇	あそ	熊本県	216	F - 4
阿蘇内牧温泉	あそうちのまきおんせん	熊本県	216	F - 4
阿蘇山	あそざん	熊本県	216	F - 4
阿蘇(市)	あそ-し	熊本県	216	F - 4
阿蘇神社	あそじんじゃ	熊本県	216	F - 4



地図帳では，地名索引の地名は地理識別子，ページとグリッドの記号が座標の代わりになる．

『GLOBAL MAPPLE 世界＆日本地図帳』
昭文社,2009より

地名辞典の利用

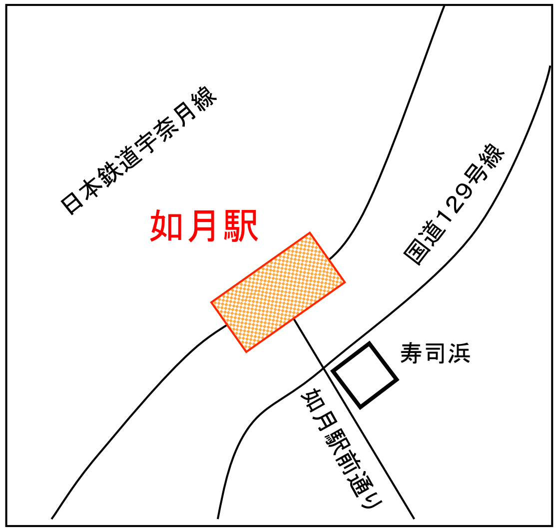
「如月駅」
で検索！

地理識別子

例：駅名辞典

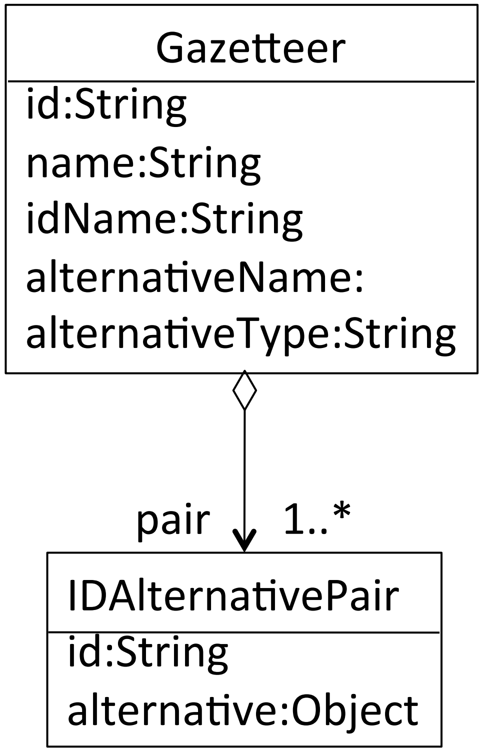
駅名	位置
松原駅	p1
如月駅	p2
弥生駅	p3
玉造駅	p4
·····	···

“p2”を中心にして
地図を表示！



地名辞典(Gazetteer)は場所を別の場所や位置に変換する関数として機能する.

地名辞典の構造とXML表記



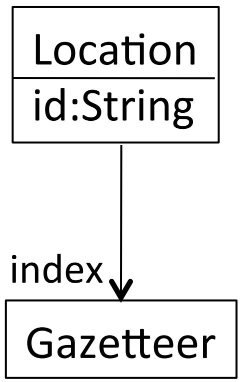

```
<Gazetteer
        id="st01"
        name="駅名辞典"
        idName="駅名"
        alternativeName="位置"
        alternativeType="Point"
>
   <aggregation>
        <pair idref="松原駅">
        <pair idref="如月駅">
        ・・・・・・・  以下省略
   </aggregation>
</Gazetteer>

<IDAlternativePair id="松原駅">
        <alternative idref="p1"/>
</IDAlternativePair>
<IDAlternativePair id="如月駅">
        <alternative idref="p2"/>
</IDAlternativePair>
・・・・・・・・・  以下省略
```

場所属性 (Location)

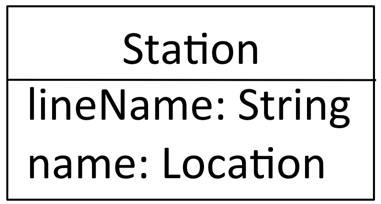
地理識別子は地物の場所属性になる.

その地理識別子が地名辞典中のIDValuePairのidになる場合は,

該当する地名辞典のidが必要.



場所属性の表現例




```
<Station lineName="日本鉄道宇奈月線">
    <name idref="如月駅"/>
</station>

<Location id="如月駅">
    <association>
        <index idref="ga001"/>
    </association>
</Location>
```

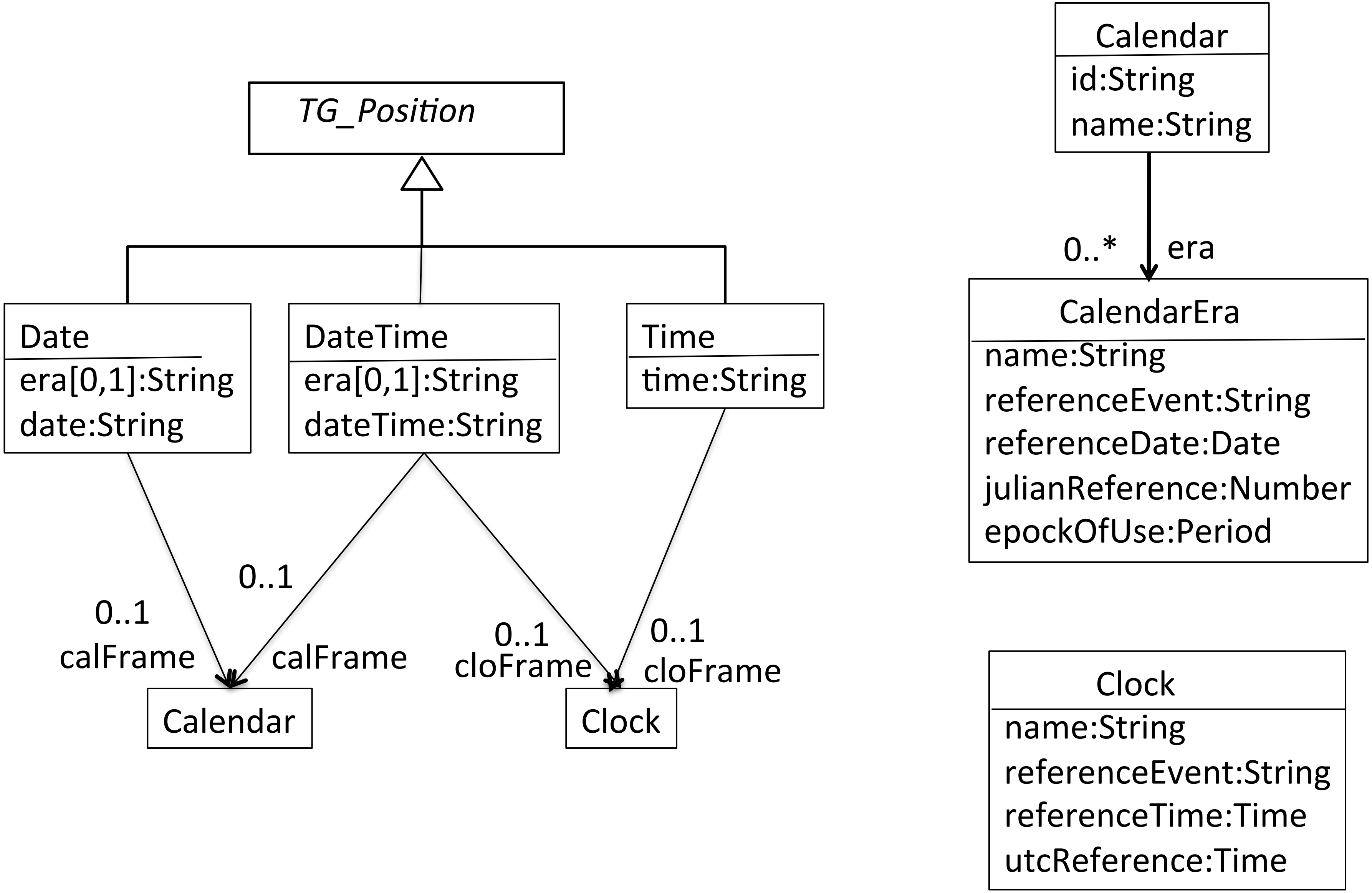
地名辞典のid

時間と時間参照系

時間位置

- 計量的な時間位置はDate, Time, Date and Timeで示される.
- その時間参照系は,
  - “Date” の場合，グレゴリオ暦や日本の新暦など.
  - “ Time” の場合は，協定世界時Universal Coordinated Time (UTC) のような時計
  - “DateTme” の場合は，暦＋時計，またはユリウス日数
    - 時間参照系はISO 19108:2002 – 時間スキーマで定義されている.

時間位置の再定義



TG_Position
Date
era[0,1]:String
date:String
DateTime
era[0,1]:String
dateTime:String
Time
time:String
0..1
calFrame
0..1
calFrame
0..1
cloFrame
0..1
cloFrame
Calendar
Clock
Calendar
id:String
name:String
0..*
era
CalendarEra
name:String
referenceEvent:String
referenceDate:Date
julianReference:Number
epockOfUse:Period
Clock
name:String
referenceEvent:String
referenceTime:Time
utcReference:Time

時間位置の実装表現（例）

<TG_Instant id="t11” position=“2002-11-25T13:20:20Z” />

この時間位置”t11”はデフォルトの時間参照系である，ローカルなグレゴリオ暦と協定世界時に従い，
西暦2002年11月25日13時20分20秒である．この表記はISO 8601に従う．

```
<TG_Instant era="Meiji” dateTime=“0025-03-12T09:10:10Z”>
    <calFrame idref=“http://my.big.org/TRS/calendars/japanese” />
    <cloFrame idref=“http://my.big.org/TRS/clocks/japanese” />
</Instant>
```

この時間位置は，http://my.big.org/TRS/calendars/というURIにある和暦(japanese)の年号(era)である”Meiji”を使用し，
http://my.big.org/TRS/clocks/japaneseというURIにある時計(japanese)従う．

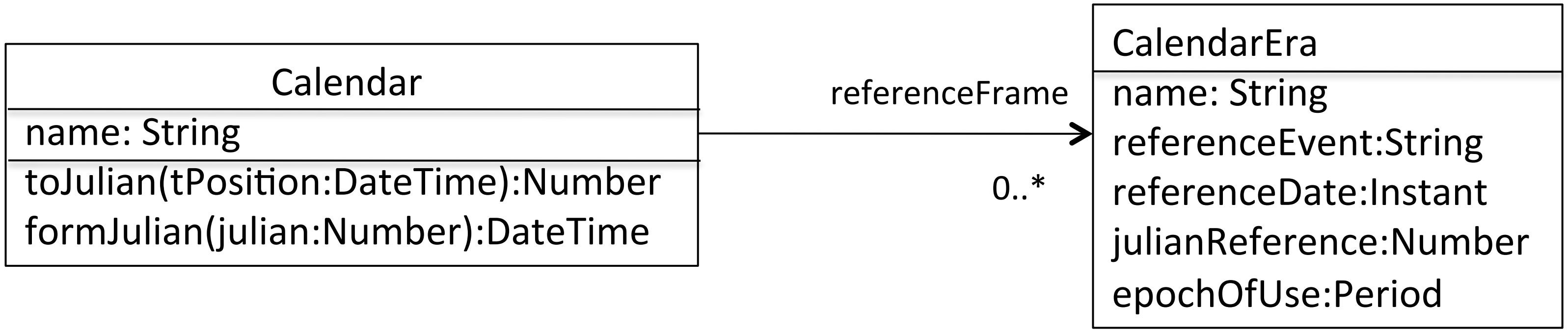
明治25年3月12日9時10分10秒を指す．

時間参照系（暦）

暦(Calendar)は，一日を分解能とする時間位置を示す離散的な時間参照系.

暦は名称と，年代（元号）(CalrendarEra)の列をもち，

ユリウス日数との間で，相互変換ができる.



ユリウス日数(Julian day number)：
紀元前4713年1月1日の正午から数える時間長で,日数は整数,時刻は小数で示される．グレゴリオ暦は不連続なので，連続性が確保されたユリウス日数が暦の基準として使用されることが多い.

年代（元号）は,
その名称,
それが開始される理由
開始される基準日
基準となるユリウス日数
使用期間
で定義する.

現代の和暦における元号の定義

元号	理由	基準日	基準となるユリウス日数	使用期間
明治	改暦	明治6.1.1	2405160	明治6.1.1 – 明治45.7.30
大正	改元	大正1.7.31	2419615	大正1.7.31 – 大正15.12.25
昭和	改元	昭和1.12.26	2424876	昭和1.12.16 – 昭和64.1.7
平成	改元	平成1.1.8	2447535	平成1.1.8 – 現在

グレゴリオ暦

ユリウス日数

現代の和暦

現代の和暦参照系のXML表記

```
<Calrendar id="ca01" name="現代の和暦">
        <assoication>
                <referenceFrame idref="ce01"/>
                ・・・・・
        </association>
</Calendar>

<CalendarEra id="ce01" name="明治" referenceEvent="改元"
julianReference="2405160">
        <referenceDate idref="ins01"/>
        <epochOfUse idref="per01"/>
</CalendarEra>
・・・・・

<Instant id=“ins01”>
        <Date timePoint=“M06.01.01” />
</Instant>
<Instant id="ins02">
        <Date timePoint="M45.07.30" />
</Instant>
・・・・・
```

```
<Period id="per01">
   <association>
        <begin idref="ins01"/>
   </association>
   <association>
        <end idref="ins02"/>
   </association>
</Period>
・・・・・
```

時間座標系

UTCに準拠する時刻は，Time型に従って表記すればよい（08 時間スキーマ参照）．

競走の記録のような，任意の原点からの時間は，時間座標系に準拠する．時間座標系は，その名前，原点になる瞬間（もしあれば），計測単位によって定義される．

TemporalCoodinateSystem
name: String origin[0,1]: Instant unit: String

付　録

付録1：地球の形状を球で近似したときのメルカトル図法

一定の経度差に対応する緯線長を平行圏弧長というが，これは地球上では緯度の余弦に比例する．つまり，より高緯度になると平行圏弧長は短くなる．一方で，地図平面上ではメルカトル図法は円筒図法なので，緯線長は一定である．つまり，地図上では緯線が緯度の余弦の逆数に比例して拡大されて，一定の長さの緯線長が確保される．そこで，経線方向にも同じ割合で拡大すれば，地球上で測った角度と地図上で測る角度は一致する．これを正角性といい，この条件を満たす投影は等角投影といわれる．ただし，地球上の面積や距離と地図上のそれらの値は一致しない．

横メルカトル図法では，円筒が横置き，つまり準拠楕円体の短軸と直交するので，地図上の経線長は一定になり，緯線長は経線長の拡大率と同じ割合で拡大する．従って，経線の間隔は基準子午線から遠ざかるにつれ，徐々に長くなる．

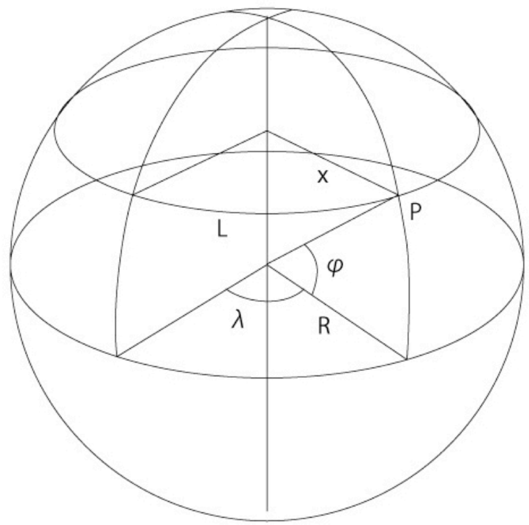


図-1 球と考えた地球の模式図

これから，上記の説明を数学的に行うが，説明を単純化するために，地球を球と考えてみよう（図-1参照）．任意の点Pの平行圏弧長Lは，以下の様に求められる．ここで，地球の半径を仮にR，Pの経度をλ，緯度を，回転軸からPまでの平行圏上の距離をxとする．

すると，xは，以下の式で求められる．

$$x = R\cos\varphi$$

また，Lは以下の式で求められる．

$$L = \lambda x$$

$$\therefore L = \lambda R\cos\varphi$$

この式をみると，緯度が高くなると値は小さくなることが分かる．一方でメルカトル図法は円筒図法であり，子午線は垂直である．ここで，経度λにおける，原点からの赤道上の平行圏弧長は，(1)によれば，L=λRになるので，点Pにおける平行圏弧長は，

$1/\cos\varphi = \sec\varphi$

を掛けなければ，子午線は垂直にならない．

ところで，赤道上の周長は2πRになる．また緯度 における平行圏が作る円周の長さは，

$2\pi R\cos\varphi$

になる．しかし，地図上では両者の長さは同じ2πRにならなければいけない．つまり，緯度 における平行圏の長さは

$\sec\varphi$

だけ掛ける必要がある．

さて，この緯度 φ 上の任意の位置に非常に小さな正方形があると考える．その辺の長さはhとする．この正方形の北東端から南西端に移動したとするとき，メルカトル図法の主旨（つまり角度は保存される）を考えれば，地上で正方形になるということは，図上でも正方形になるということであり，その大きさは，図上で

$2\pi R/2\pi R\cos\varphi = 1/\cos\varphi = \sec\varphi$

だけ大きくなるので，そのサイズは，

$h\sec\varphi$

になる．

ところで，hは微小な長さであるが，微小な緯度差に半径を掛けた値，といえるので，緯度 φ から $\varphi + \Delta\varphi$ までの長さhはR$\Delta\varphi$となる．従って，赤道から緯度 φ までの，地図上の長さFは，以下の式で求めることができる．

$$F = R\int_0^{\varphi} \sec t\,dt \qquad (2)$$

この定積分を求めると以下のようになる．

$$F = R\ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})) \qquad (3)$$

ここで，ここで，lnは自然対数である．しかし，どうすれば(2)式から(3)式を求めることが出来るのだろうか．以下にその過程を示す．

$$f = \int \sec t\,dt$$
$$= \int \frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t}\sec t\,dt$$
$$= \int \frac{\sec^2 t + \sec t\tan t}{\sec t + \tan t}dt$$

ここで，$x = \tan t + \sec t$ とすると，

$dx = (\sec^2 t + \sec t\tan t)dt$ なので，

$$f = \int \frac{1}{x} dx$$
$$= \ln|x| + C$$
$$= \ln|\tan t + \sec t| + C$$

さて,

$$\tan t + \sec t$$
$$= \frac{\sin t + 1}{\cos t}$$

$$1 + \sin t = \sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = (\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2})^2$$

$$\cos t = \cos(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = (\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2})(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})$$

なので,

$$\frac{\sin t + 1}{\cos t} = \frac{\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{t}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{t}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{t}{2}\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \tan(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4})$$

従って,

$$F = R\int_0^{\varphi} \sec t dt = R\ln|\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})|$$

ところで,地球上では緯度は-90度以上,90度以下なので,

$$-\frac{\pi}{4} \le \frac{\varphi}{2} \le \frac{\pi}{4}$$

である.つまり, $\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}) \ge 0$ なので,絶対値の符号は不要となり,結果として,

$$F = R\ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

となる.(Q.E.D)

さて，地球の半径を6378kmとすると，地球上の子午線弧長と，(3)式で計算した地図上の子午線弧長を比較すると表-1のようになる.

表-1 子午線弧長の比較

緯度（度）	地球上の弧長（km）	地図上の弧長（km）
15	1670	1689
30	3340	3503
45	5009	5621
60	6679	8400

表-1で示した経線及び緯線を平面上に描画すると図-2のようになる.

さて，メルカトル図法は，等角投影である．つまり，地図上で測った角度は地球上でも一致するはずである．そこで，原点から経度45度，緯度45度までの角度を図上で測った所，約48度であった．この値を使って，地球儀上に原点から線を引いてみた． 線は，緯度15度きざみの緯線毎に，都合3本の直線で近似した．ちなみにこの線は航程線という．結果として，経度45度，緯度45度に地点にたどり着く事ができた（図-3，図-4参照）.

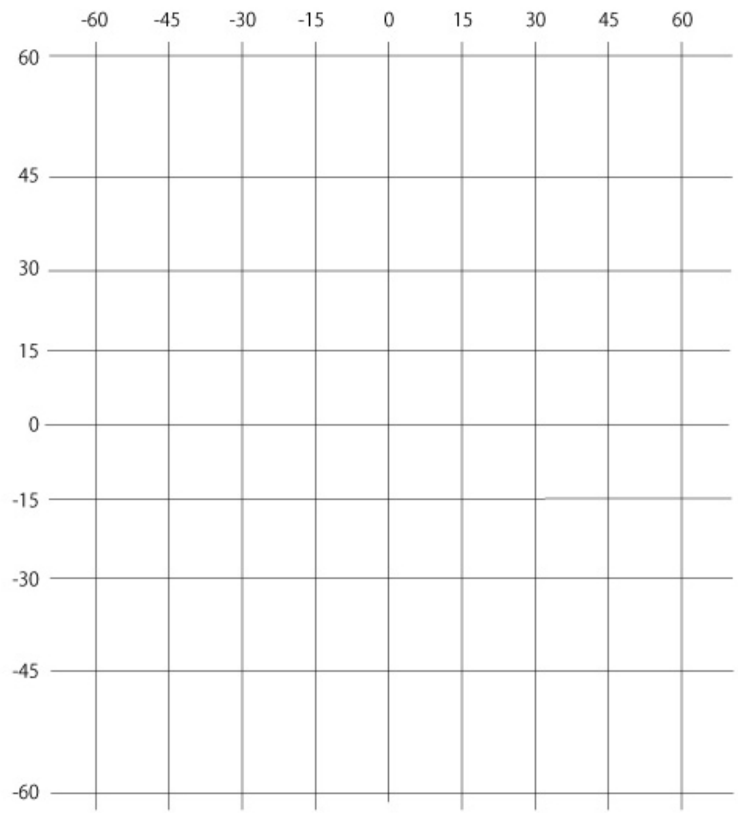


図-2 メルカトル投影の経緯線図

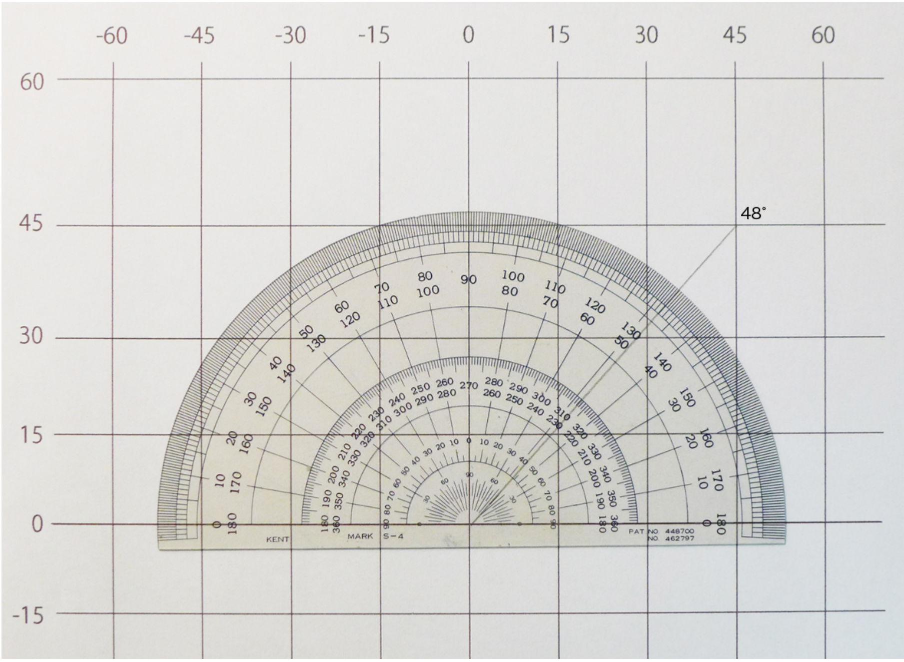


図-3 経緯度原点から経緯度共に45度の地点までの角度計測

図-4 地球儀上に描いた航程線

参考資料：http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html

付録2：Gauss-Kruger投影

地球の形状を近似する回転楕円体を準拠楕円体というが，JGD２０００を測地原子とする形状は，以下のパラメータで示される．

長半径 (a): 6378137m
短半径 (b): 6356752.314m
逆扁平率 (1/f): 298.257222101

これ以外に以下のパラメータも有用である．

第一離心率 (e) $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

第二離心率 (e’) $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

ガウス･クリューガーの投影は日本に１９系ある平面直角座標系やUTM図法など，各国の平面座標系の基礎をなす投影座標系である．C.F.Gaussがハノーバーの測量に始めて使用し，L. Kruger及びV.K. Hristovが発展させたものといわれる．基準子午線の両側に南北に細長い帯を考え，その中での投影式が求められている．ここでは，以下の変数が使われる．

卯酉（ぼうゆう）線曲率半径 (N)
準拠楕円体上に指定された１点からおろされた垂線（卯酉線）は，楕円体の短軸で交わるが，楕円体上の１点から，その交点までの距離を卯酉（ぼうゆう）線曲率半径 (N)とよぶ．与えられた１点の経度，緯度を (λ, φ) とすると，Nは以下の式で求められる．

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

子午線弧長 (S)
楕円体上の１点から，赤道までおろした子午線の長さを，子午線弧長という．その長さは，以下の展開式を使って，充分な正確さで求めることができる．

$$S = a(1 - e^2)[A\varphi - \frac{B}{2}\sin 2\varphi + \frac{C}{4}\sin 4\varphi - \frac{D}{6}\sin 6\varphi + \frac{E}{8}\sin 8\varphi - \frac{F}{10}\sin 10\varphi]$$

ただし，

A = 1.005052501813087
B = 0.005063108622224
C = 0.000010627590263
D = 0.000000020820379
E = 0.000000000039324
F = 0.000000000000071

なお，
投影座標系原点の経緯度を (λ_0, φ_0)
求める投影座標を (x, y)
その経緯度を (λ, φ)
赤道から投影座標系の原点までの子午線弧長を S_0
赤道から求める点の緯度までの子午線弧長を S
経度と原点経度の差 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$
その他，

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$
$$t = \tan\varphi$$

とする．

すると，経緯度から平面座標を求める式は，以下の通りになる．

$$
\begin{aligned}
x = \{&(S - S_0) + \frac{N}{2}\cos^2\varphi \cdot t \cdot (\Delta\lambda)^2 \\
&+ \frac{N}{24}\cos^4\varphi \cdot t(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)(\Delta\lambda)^4 \\
&- \frac{N}{720}\cos^6\varphi \cdot t(-61 + 58t^2 - t^4 - 270\eta^2 + 330t^2\eta^2)(\Delta\lambda)^6 \\
&- \frac{N}{40320}\cos^8\varphi \cdot t(-1385 + 3111t^2 - 543t^4 + t^6)(\Delta\lambda)^8\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \{&N\cos\varphi \cdot \Delta\lambda \\
&- \frac{N}{6}\cos^3\varphi(-1 + t^2 - \eta^2)(\Delta\lambda)^3 \\
&- \frac{N}{120}\cos^5\varphi(-5 + 18t^2 - t^4 - 14\eta^2 + 58t^2\eta^2)(\Delta\lambda)^5 \\
&- \frac{N}{5040}\cos^7\varphi(-61 + 479t^2 - 179t^4 + t^6)(\Delta\lambda)^7\}
\end{aligned}
$$

上に示した投影式を使って，円筒を展開してできる平面上の位置から基準子午線までの距離に，1未満の縮尺係数を掛け，これをもってその点における平面座標とすることが行われている．

UTM図法では，基準子午線における係数を0.9996としている．これによって原点から東西約180kmの地点で線拡大率は1になる．また，x座標が負にならないよう，500kmを加えて表示する．つまりUTM座標(X,Y)は，以下の式で求まる．

$$
\begin{aligned}
X &= 0.9996x + 500km \\
Y &= 0.9996y
\end{aligned}
$$

日本の平面直角座標系は，19系の座標系で成り立つが，この場合の座標は，原点を基準子午線上で適当な緯度(B_0)まで移動させ，実際の座標は以下の式で求めている．つまり，

$$
\begin{aligned}
X &= 0.9999x \\
Y &= 0.9999(y - B_0)
\end{aligned}
$$

この座標系では，それぞれの座標系が半径約130km程度の範囲をカバーすることができる．その原点では縮尺係数が0.9999であり，経線方向130kmの位置では1.0001程度になる．実際の有向範囲は，国土交通省告示第九号（平成十四年一月十日）に定められている．

なお，ガウス･クリューガーの投影法についてより詳細に学習したい場合は，例えば以下の参考文献にあたるとよい．

測地学会発行，『測地学の概観』，昭和49年4月29日
政春尋志著，『地図投影法』，2011.9，朝倉書店刊

付録2：画面座標から地上平面座標への換算

画面座標を(x,y)，地上平面座標を（X,Y）とする．ここで地上平面座標とは，平面直角座標座標やUTM座標など，地上の位置を平面に投影した座標のことである．
この2種類の座標は，一次変換で換算できるが，画面の座標には多少の歪みが存在するかもしれないので，ここではアフィン変換を使って，座標の換算を行うものとする．
さて，係数行列の値を求めるためには，画面座標及び地上座標が対になる点が3点以上あればよい．つまり，以下の式を解けば，係数行列の最小二乗解を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

ここで，それぞれの行列を，A,a,Bで表す．つまり，A=aBなので，

$$a^T A = a^T aB$$

$$(a^T a)^{-1} a^T A = B$$

従って，係数行列Aは，

$$B = (a^T a)^{-1} a^T A$$

さて，地上座標は充分な正確度をもつ，言い換えれば真値と見なすことができると考えられるとき，画面座標の正確度は，Bを使って求めた値(A’)と，元々の地上座標(A)の差の平均値(E)及び，分散共分散行列(S)で表現することができる．

つまり，

$$dX_i = X'_i - X_i$$

$$dY_i = Y'_i - Y_i$$

$$E = \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} dX_i & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} dY_i \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)^2 & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)(dY_i - E_y) \\ \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dX_i - E_x)(dY_i - E_y) & \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}(dY_i - E_y)^2 \end{bmatrix}$$

平均値は，真値からのずれを表し，分散，共分散は誤差のばらつきを表す．ただし，最小二乗解の誤差の平均値は0になる．また，与えられた画面座標の誤差が大きく，Sの値が，一定の値を超えた時は，得られた係数行列に実用性はない．

結果として，実用的な係数行列が得られれば，

$$\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

で，地上平面座標を求めることができる．

ところで，基準点のスクリーン座標の計測にバイアスがあった場合，その量は，再度より正確に基準点のスクリーン座標を指示して，それを地上座標にすることによって，差を評価することができる．

まとめ

任意の空間の一部分を，他と識別するための基準を，参照系という．ここでは，地理的な空間の位置を識別するための，空間参照系及び，時間上の位置の基準となる時間参照系を解説した．その概要は以下の通りである．

地球上の位置や場所を識別するための参照系は，空間参照系である．

座標で空間上の位置を表現するための参照系は，座標参照系である．

場所を示す符号（郵便番号など）は地理識別子という．地理識別子と座標または，別の地理識別子との対の集まりは，地名辞典（Gazetteer）という．地名辞典は地理識別子によって間接的に位置を示す空間参照系である．

時点を特定するための基準は，時間参照系という．

時点は暦や時計で表現することが多い．

謝辞：投影座標系の解説に関して，政春尋志氏にご指導を賜った．記して謝意を表する．

参考文献

1. 有川正俊，太田守重監修（2007）『GISのためのモデリング入門』ソフトバンククリエイティブ
2. （財）日本規格協会，JIS X 7108:2004 地理情報ー時間スキーマ
3. （財）日本規格協会，JIS X 7111:2004 地理情報ー座標による空間参照
4. （財）日本規格協会，JIS X 7112:2006 地理情報ー地理識別子による空間参照
5. （財）日本規格協会，JIS X 7115:2005 地理情報ーメタデータ