Contents

1 Definzione

1.0.1 Nota storica, perchè esiste questa cosa?

L'anello è stato introdotto per fare da denominatore comune a bene o male ogni contesto in cui puoi fare somma e prodotto di qualcosa, cosa comunque abbastanza utile quando sei nel 1900 e la gente sta provando ad assiomatizzare e logicizzare ogni aspetto della matematica mai concepito da essere vivente.

Quindi qualche decennio fa il genio di turno ha visto che c'erano parecchie cose in comune tra interi, matrici, reali, complessi, razionali e quant'altro, e ha deciso di definire questa `interface` comune.

1.1 Definzione a grandi linee

Un anello è un insieme per cui abbiamo definito le basi basi per poterci fare calcoli, in questo caso

- Una somma (la sottrazione fai la somma con i negativi)
- Un prodotto (la divisione fai il prodotto con l'inverso, se esiste)
- Uno 0 che si comporta da 0 (neutro per la somma e il prodotto fa 0)
- Un 1 che si comporta da 1 (neutro per il prodotto)
- Numeri positivi e negativi (i negativi servono per fare la sottrazione)

Per mettere un minimo di arrosto sotto a sto fumo prendiamo l'insieme degli interi $\mathbb{Z}$, tutto quello che abbiamo fatto con gli interi e che sappiamo sugli interi ha come basi:

- Il fatto che lo 0 e l'1 si comportano da 0 e 1
- Il fatto che abbiamo una somma con certe proprietà
- Il fatto che abbiamo un prodotto con certe proprietà
- Il fatto che se abbiamo x allora abbiamo anche $-x$ e ci possiamo fare le somme algebriche

1.2 Definizione più rigorosa

Un insieme

$$(R, 0, +, 1, \cdot)$$

è un anello quando

- $0, 1 \in R$
- la somma $+$ è un operatore binario [1] da $R \times R$ [2] in R che [3]
  - è commutativo ($a + b = b + a$ quando $a, b \in R$)
  - è associativo ($a + (b + c) = (a + b) + c$ quando $a, b, c \in R$)
- il prodotto $\cdot$ è un operaTore binario da $R \times R$ in R che
  - è associativo [4]
- 0 è l'elemento neutro della somma ($a + 0 = a \forall a \in R$)
- 1 è l'elemento neutro del prodotto ($a \cdot 1 = a \forall a \in R$)

---

[1] vuole dire solo che la somma è definita solo tra due elementi, tanto quando sommi si fa la somma si fa comunque tra 2 addendi alla volta, non cambia niente

[2] che ha in ingresso 2 elementi dell'anello

[3] che ha come uscita un elemento dell'anello

[4] la proprietà commutativa del prodotto non vale di default perchè altrimenti le matrici si arrabbiano, gli anelli per cui la moltiplicazione è commutativa ($\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q} \dots$) si dicono *anelli commutativi* e faremo bene o male solo queli