Chapter 12 流体シミュレーション

参考文献
Lengyel 著，狩野訳
“ゲームプログラミングのためのグラフィックス数学”
ボーンデジタル，2002

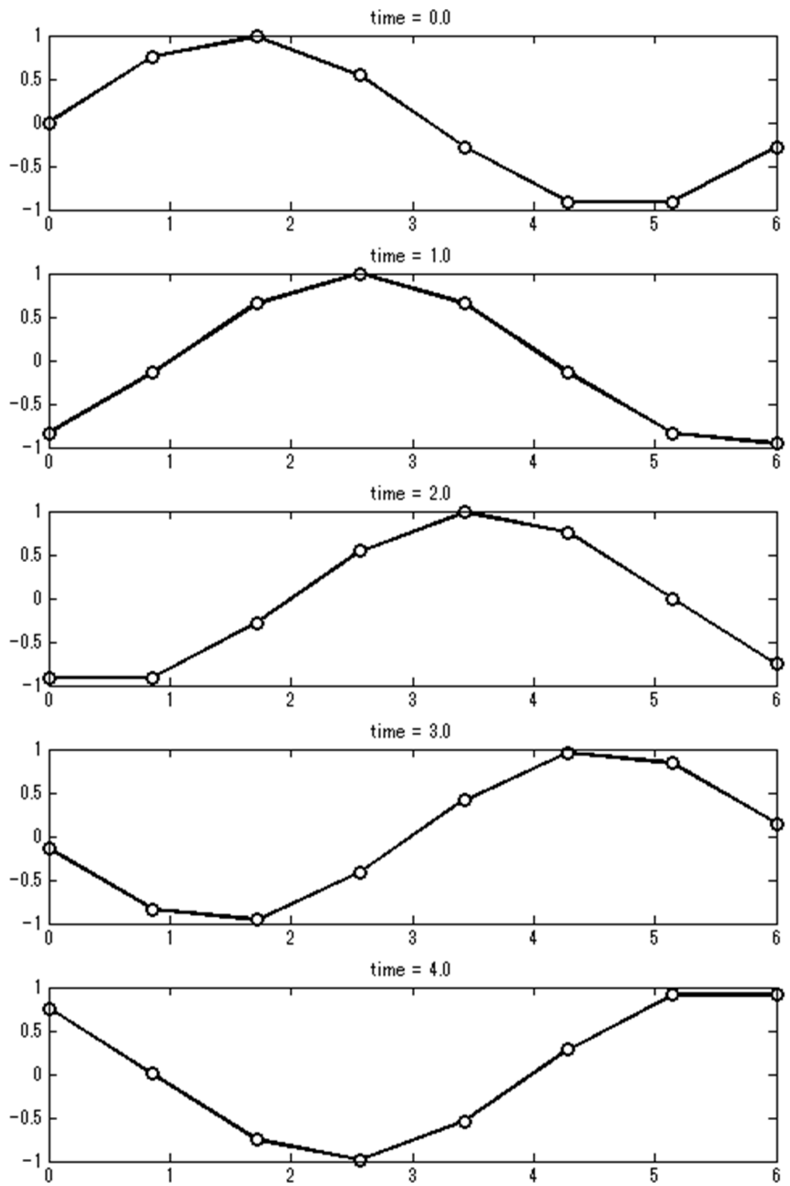
問2.1
水平に置かれた長さ L のひもを考える. 時刻 t, 位置 x におけるひもの高さ $z(t,x)$ を

$$z(t,x) = \sin(x - t)$$

とする. ひもの概形をアニメーション表示するスクリプト scr2_1.m を作成せよ.

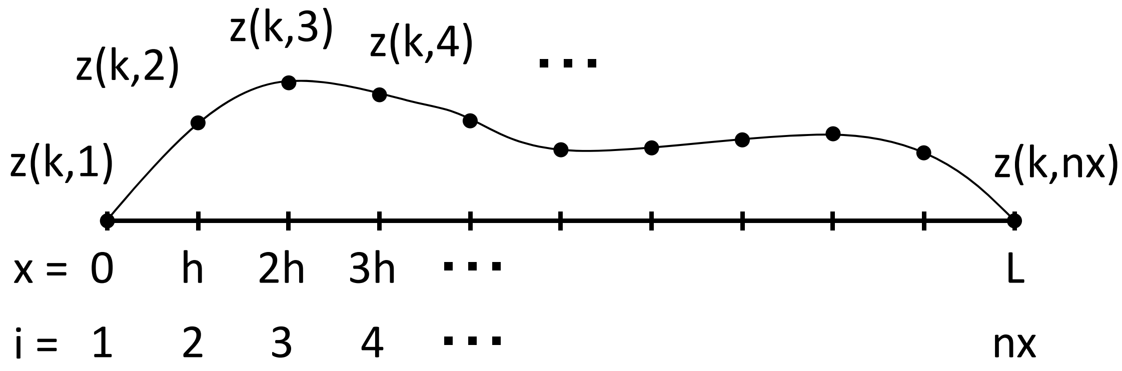
問2.1解答例 (scr2_1.m)

```
clear; % 変数をすべて削除

% ユーザが指定するパラメータ
L = 6; % ひもの長さ
tmax = 4; % 時刻の最大値
nx = 8; % 空間分割数
nt = 5; % 時間分割数

% 離散化
x = linspace(0, L, nx); % n 個の節点
time = linspace(0, tmax, nt); % nt 個の時刻

% 各時刻IDにおける波の高さを格納する2次元配列を確保
z = zeros(nt, nx);

% 各時刻ID (k = 1, 2, ..., nt) について
for k = 1: nt,
  % 時刻ID k における波形を求める
  z(k, :) = sin(x - time(k));
end

% アニメーション表示
figure(1);
for k = 1: nt,
  clf;
  plot(x, z(k, :), 'ko-'); % 時刻ID k の波形を描画
  axis equal; % 縦横のスケールを揃える
  axis([0, L, -1, 1]); % 描画範囲を指定
  title(['time = ', num2str(time(k), '%.1f')]); % 時刻表示
  pause(0.3); % 0.3 秒間停止
end
```



問2.1補足：時系列データの格納

時刻インデックス k における波形



2次元配列への格納

	i=1	i=2	…	i=nx
時刻 ID k=1 における波形	z(1,1)	z(1,2)	…	z(1,nx)
時刻 ID k=2 における波形	z(2,1)	z(2,2)	…	z(2,nx)
⋮	⋮	⋮		⋮
時刻 ID k=nt における波形	z(nt,1)	z(nt,2)	…	z(nt,nx)

波動方程式

（1次元）

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,t) - \mu \frac{\partial}{\partial t} z(x,t)$$

c: 波の速度

μ: 粘性パラメータ

波動方程式

（2次元）

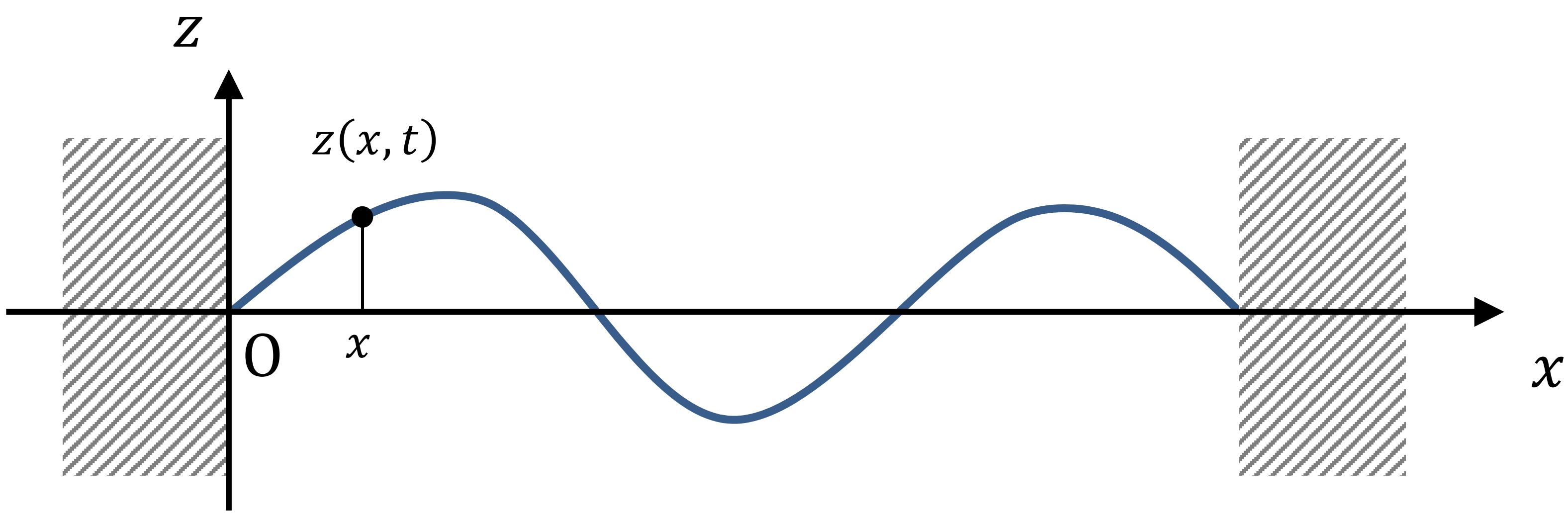
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,y,t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,y,t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x,y,t) \right)$$

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} z(x,y,t)$$

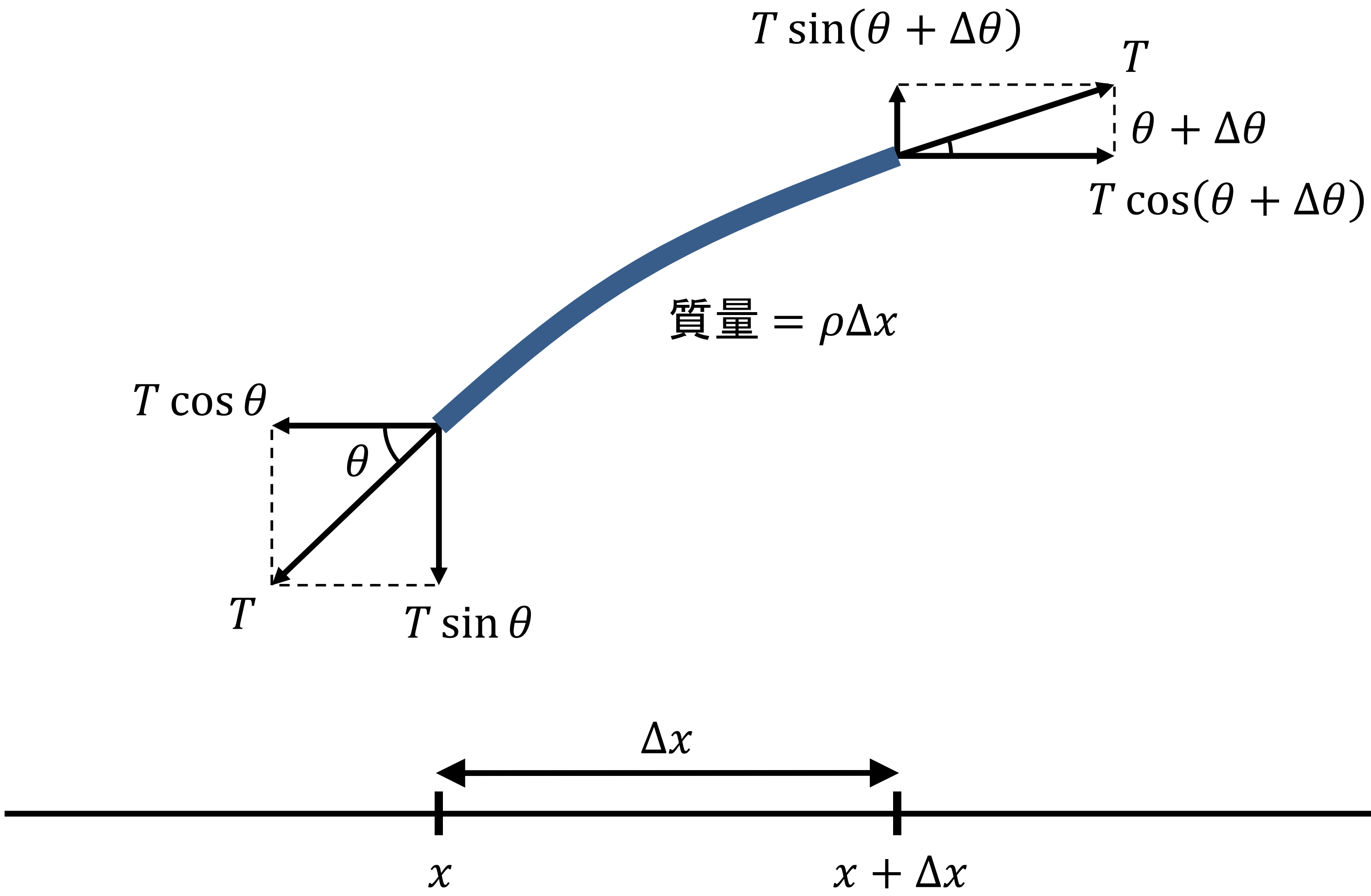
c: 波の速度

μ: 粘性パラメータ

波動方程式の導出（1/6）



波動方程式の導出（2/6）


$T\sin(\theta+\Delta\theta)$
T
$\theta+\Delta\theta$
$T\cos(\theta+\Delta\theta)$
質量 $=\rho\Delta x$
$T\cos\theta$
θ
T
$T\sin\theta$
Δx
x
$x+\Delta x$

波動方程式の導出（3/6）

仮定

$$T\cos\theta \approx T\cos(\theta + \Delta\theta) \approx T$$ 仮定1

$$\tan\theta \approx \frac{\partial}{\partial x} z(x, t)$$ 仮定2

$$V(x, t) \equiv T\sin\theta$$ 仮定3

抵抗加速度 $-\mu \frac{\partial}{\partial t} z(x, t)$ 仮定4

波動方程式の導出（4/6）

水平方向の運動方程式

$$
\begin{aligned}
(\rho \Delta x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(x,t) &= T\cos(\theta + \Delta\theta) - T\cos\theta \\
&\approx T - T \\
&= 0
\end{aligned}
$$

仮定1

垂直方向の運動方程式

$$
\begin{aligned}
(\rho \Delta x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,t) &= T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin\theta \\
&= V(x+\Delta x, t) - V(x,t)
\end{aligned}
$$

仮定３

波動方程式の導出（5/6）

垂直方向の運動方程式（続き）

両辺を $\rho\Delta x$ で割ると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,t) &\approx \frac{1}{\rho} \cdot \frac{V(x+\Delta x, t) - V(x,t)}{\Delta x} \\
&\to \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) \qquad (\text{as } \Delta x \to 0) \\
&= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (T \cos\theta \tan\theta) \\
&\approx \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (T \tan\theta) && \text{仮定１} \\
&= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} z(x,t) \right) && \text{仮定２} \\
&= \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,t) \\
&= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,t) && c \equiv \sqrt{T/\rho}
\end{aligned}
$$

波動方程式の導出（6/6）

垂直方向の運動方程式（続き）

抵抗加速度 $-\mu \frac{\partial}{\partial t} z(x,t)$ （仮定4）を加えると，波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} z(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x,t) - \mu \frac{\partial}{\partial x} z(x,t)$$

が得られる.

波動方程式（離散化）

（1次元）

$$z(k+1,i)=\frac{4-4c^2\Delta t^2/h^2}{\mu\Delta t+2}z(k,i)+\frac{\mu\Delta t-2}{\mu\Delta t+2}z(k-1,i)+\frac{2c^2\Delta t^2/h^2}{\mu\Delta t+2}\left(z(k,i+1)+z(k,i-1)\right)$$

c: 波の速度

h: 1要素の長さ

μ: 粘性パラメータ

Δt: 時間ステップ間隔

$$\left(\text{時間ステップ間隔の上限: }\ \Delta t<\frac{\mu+\sqrt{\mu^2+16c^2/h^2}}{4c^2/h^2}\right)$$

波動方程式（離散化）

（2次元）

$$
\begin{aligned}
z(k+1,i,j) = {} & \frac{4-8c^2\Delta t^2/h^2}{\mu\Delta t+2} z(k,i,j) + \frac{\mu\Delta t-2}{\mu\Delta t+2} z(k-1,i,j) \\
& + \frac{2c^2\Delta t^2/h^2}{\mu\Delta t+2} \big(z(k,i+1,j) + z(k,i-1,j) \\
& \qquad + z(k,i,j+1) + z(k,i,j-1)\big)
\end{aligned}
$$

c: 波の速度　　　　h: 1要素の1辺の長さ

μ: 粘性パラメータ　　　　Δt: 時間ステップ間隔

$$\left(\text{時間ステップ間隔の上限: } \Delta t < \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 32c^2/h^2}}{8c^2/h^2}\right)$$

波動方程式（初期値と境界条件）

（1次元）
初期値: 時間インデックス k = 1, 2 の波形
境界条件: 両端点（位置インデックス i = 1, n）の値

	i=1	i=2	…	i=n-1	i=n
k=1	z(1,1)	z(1,2)	…	z(1,n-1)	z(1,n)
k=2	z(2,1)	z(2,2)	…	z(2,n-1)	z(2,n)
k=3	z(3,1)	z(3,2)	…	z(3,n-1)	z(3,n)
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
k=nt	z(nt,1)	z(nt,2)	…	z(nt,n-1)	z(nt,n)

問2.2

長さ L のひもを考える．ひもの高さ $z(t,x)$ をアニメーション表示するスクリプト scr2_2.m を作成せよ．ただし，初期値と境界条件はそれぞれ

$$\text{初期値}: z(t_1,x) = z(t_2,x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$\text{境界条件}: z(t,0) = z(t,L) = 0 \quad (0 \leq t \leq t_{\max})$$

として与え，その他は波動方程式により求めよ.

※ c や μ の他，空間・時間分割数などのパラメータを変更しながら，波の動きの変化を観察せよ．ただし，パラメータは「時間ステップ間隔の上限」の条件式を満たす必要があるため，この条件をプログラム内で判定し，満たされなければ停止するように設計せよ.

Chapter 12 流体シミュレーション

問2.2解答例 (scr2_2.m)

```
clear; % 変数をすべて削除

% ユーザが指定するパラメータ
l = 4; % ひもの長さ
tmax = 10; % 時刻の最大値
nx = 40; % 空間分割数
nt = 800; % 時間分割数
c = 4; % 波の速さ
mu = 0.5; % 粘性パラメータ

% 離散化に伴う変数
h = l / (nx - 1); % ひも1要素の長さ
x = linspace(0, l, nx)'; % n 個の節点
dt = tmax / (nt - 1); % 1時間ステップの大きさ
time = linspace(0, tmax, nt)'; % nt 個の時刻

% 安定性チェック
                    ???

% 計算式に登場する定数
c1 = (4 - 4 * c * c * dt * dt / (h * h)) / (mu * dt + 2);
c2 = (mu * dt - 2) / (mu * dt + 2);
c3 = (2 * c * c * dt * dt / (h * h)) / (mu * dt + 2);

% 各時間ステップの波の高さを格納する2次元配列を確保
z = zeros(nt, nx);

% 初期値を指定する（初期波形）
z(1, :) = ???; % 時刻ID k = 1 における波形
z(2, :) = ???; % 時刻ID k = 2 における波形
```

```
% 境界条件を指定する（ひもの両端の高さ）
z(:, 1) = 0; % 左端の高さ
z(:, nx) = 0; % 右端の高さ

% 各時刻ID k = 2, 3, ..., nt - 1 について
for k = 2: nt - 1,
  % ひもの各位置 i = 2, 3, ..., n - 1 について（両端を除く）
  for i = 2: nx - 1,
    % 時刻ID k + 1 におけるひもの高さを求める
    z(k + 1, i) =
                    ???
  end
end

% アニメーション表示
figure(1);
for k = 1: nt,
  clf; % グラフをクリアする
  plot(x, z(k, :), 'ko-'); % 時刻ID k の波形を描画
  axis equal; % 縦横のスケールを揃える
  axis([0, l, -1, 1]); % 描画範囲を指定
  title(['t = ', num2str(time(k), '%.1f')]); % 時刻を表示
  pause(0.001); % 0.001 秒間停止
end
```

問2.3

問2.2の初期値を変更して波動方程式を解き，アニメーション表示するスクリプト scr2_3.m を作成せよ.

問2.4

問2.2の初期値と境界条件をそれぞれ

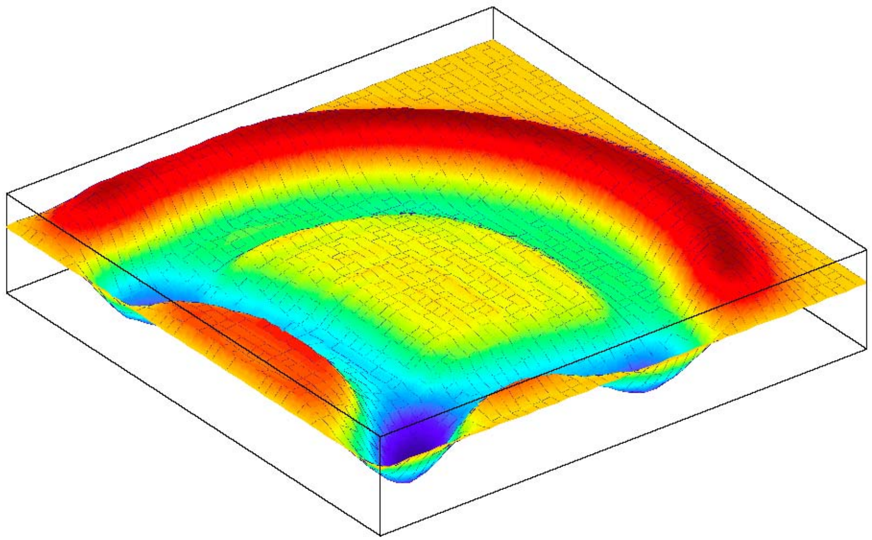
初期値：$z(t_1, x) = z(t_2, x) = 0 \quad (0 \le x \le L)$

境界条件：$\begin{cases} z(t, 0) = \boxed{\quad * \quad} \\ z(t, L) = \boxed{\quad * \quad} \end{cases} \quad (0 \le t \le t_{\max})$

として波動方程式を解き，アニメーション表示するスクリプト scr2_4.m を作成せよ. ただし，$\boxed{\quad * \quad}$ には独自の境界条件を t の関数として与えること.

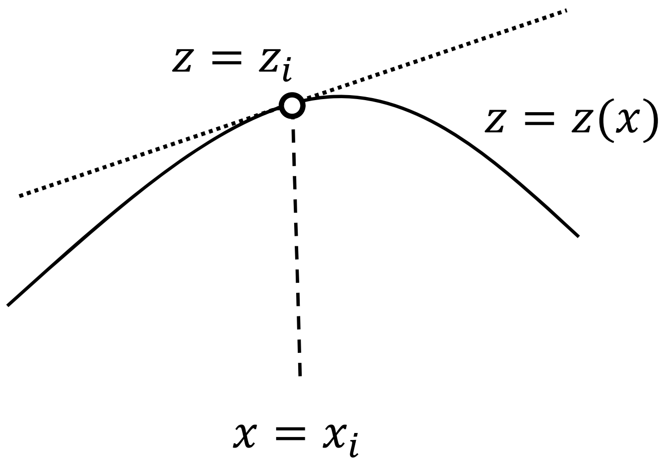
問2.5（発展）

2次元の波動方程式を解き，アニメーション表示するスクリプト scr2_5.m を作成せよ．初期条件，境界条件は任意に設定してよい．

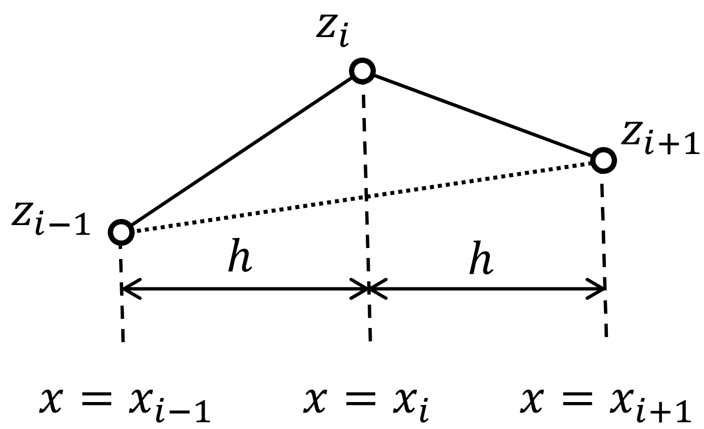


補足：1階微分の離散化

接線の傾き $= \dfrac{dz(x_i)}{dx}$

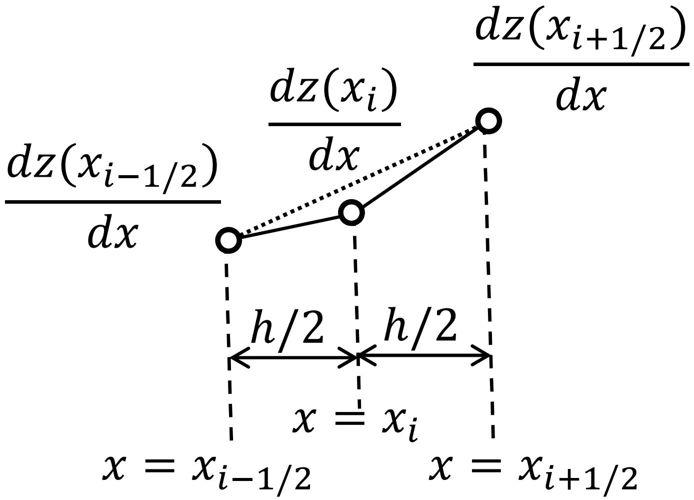


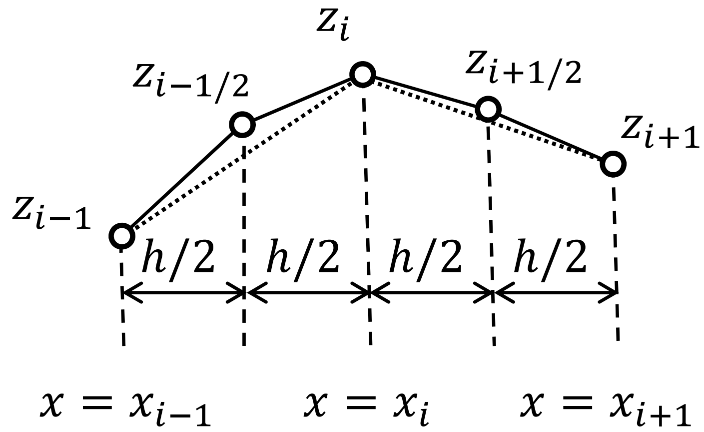
接線の傾き $\approx \dfrac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h}$



$$\therefore \frac{dz(x_i)}{dx} \approx \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h}$$

補足:2階微分の離散化





$$\frac{dz(x_{i-1/2})}{dx} \approx \frac{z_i - z_{i-1}}{h}$$

$$\frac{dz(x_{i+1/2})}{dx} \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{h}$$

$$\frac{d^2z(x_i)}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dz(x_i)}{dx}\right)}{dx} \approx \frac{\frac{dz(x_{i+1/2})}{dx} - \frac{dz(x_{i-1/2})}{dx}}{h}$$

$$\therefore \frac{d^2z(x_i)}{dx^2} \approx \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2}$$

補足:1次元波動方程式の離散化

（波動方程式）

$$\frac{\partial^2 z(t_k, x_i)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(t_k, x_i)}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial z(t_k, x_i)}{\partial t}$$

↓ 離散化

$$\frac{z(t_{k+1}, x_i) - 2z(t_k, x_i) + z(t_{k-1}, x_i)}{\Delta t^2}$$

$$= c^2 \frac{z(t_k, x_{i+1}) - 2z(t_k, x_i) + z(t_k, x_{i-1})}{h^2} - \mu \frac{z(t_{k+1}, x_i) - z(t_{k-1}, x_i)}{2\Delta t}$$

c: 波の速度
μ: 粘性パラメータ

h: 1要素の長さ
Δt: 時間ステップ間隔