スプライン補間

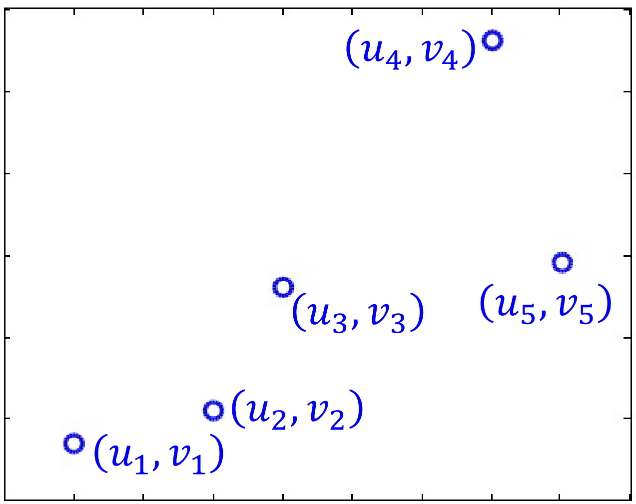
参考文献

菅野他，Cによるスプライン関数，東京電機大学出版局

スプライン補間

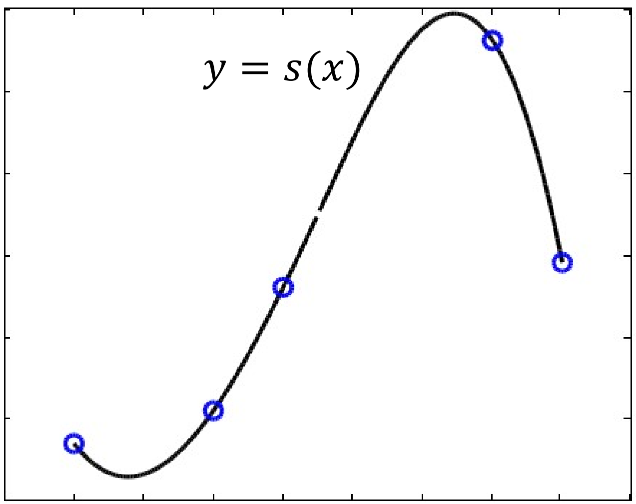
目的：離散値から，それを補間する連続値を生成する．

条件：生成される連続値は区分的な n 次多項式である．



入力：離散値

$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$

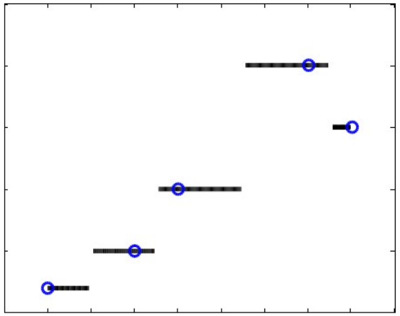


出力：連続値

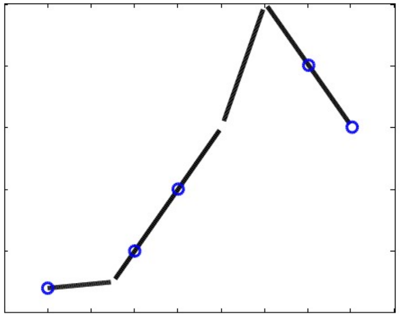
$y = s(x)$

スプライン補間

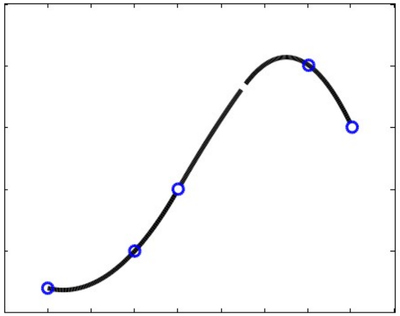
多項式の次数とスプライン補間関数



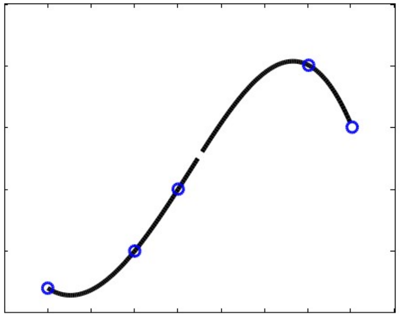
区分的0次多項式
$(K = 1)$



区分的1次多項式
$(K = 2)$

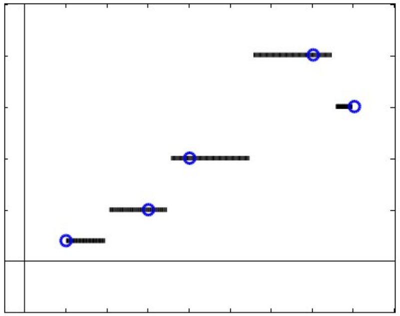


区分的2次多項式
$(K = 3)$



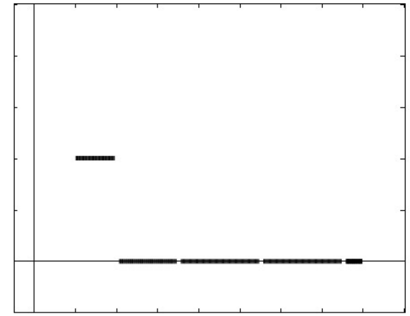
区分的3次多項式
$(K = 4)$

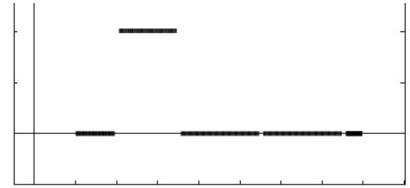
スプライン補間

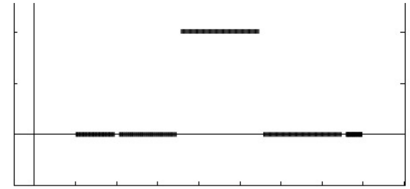


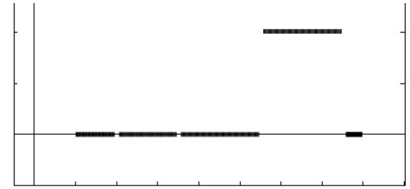
区分的0次多項式 ($K = 1$)

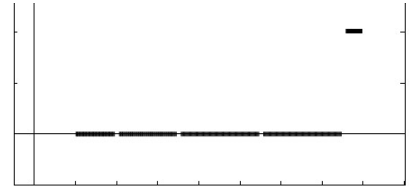
$$s(x) = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j B_{j,1}(x)$$

$= \quad \alpha_1 \times$  $B_{1,1}(x)$

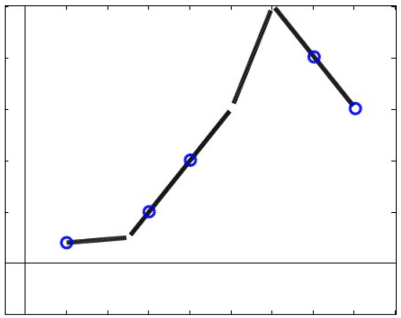
$+ \alpha_2 \times$  $B_{2,1}(x)$

$+ \alpha_3 \times$  $B_{3,1}(x)$

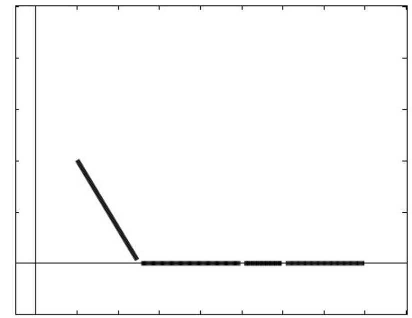
$+ \alpha_4 \times$  $B_{4,1}(x)$

$+ \alpha_5 \times$  $B_{5,1}(x)$

スプライン補間

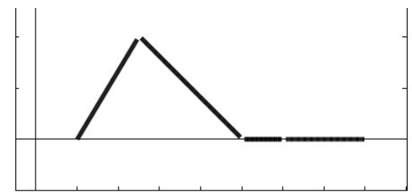


$=$ $\alpha_1 \times$



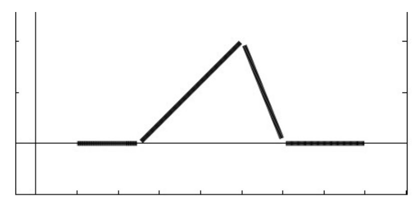
$B_{1,2}(x)$

$+\ \alpha_2 \times$



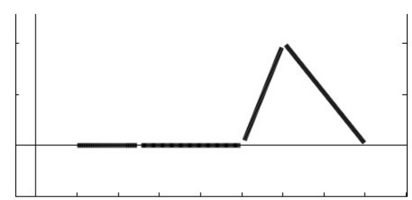
$B_{2,2}(x)$

$+\ \alpha_3 \times$



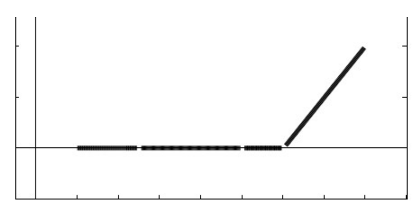
$B_{3,2}(x)$

$+\ \alpha_4 \times$



$B_{4,2}(x)$

$+\ \alpha_5 \times$

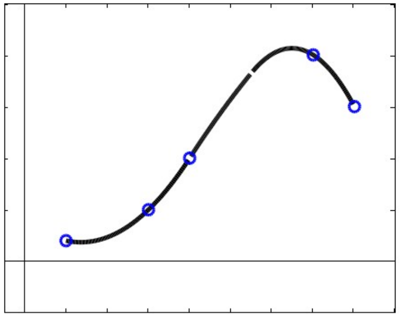


$B_{5,2}(x)$

区分的1次多項式 ($K = 2$)

$$s(x) = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j B_{j,2}(x)$$

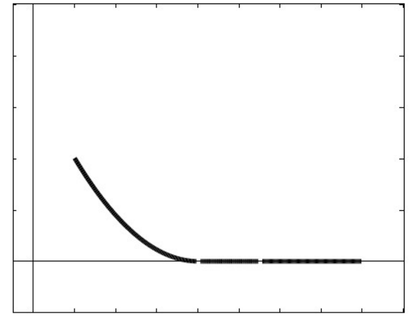
スプライン補間



区分的2次多項式 ($K = 3$)

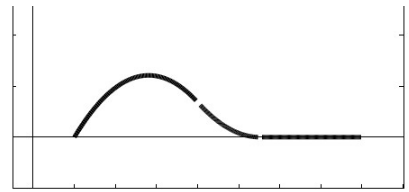
$$s(x) = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j B_{j,3}(x)$$

$= \alpha_1 \times$



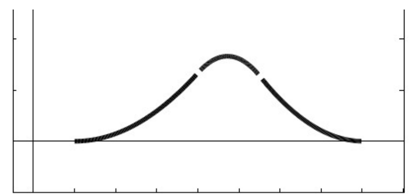
$B_{1,3}(x)$

$+ \alpha_2 \times$



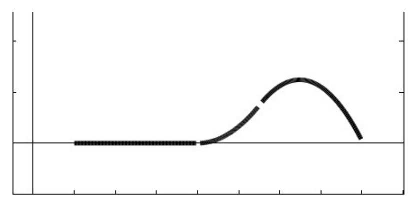
$B_{2,3}(x)$

$+ \alpha_3 \times$



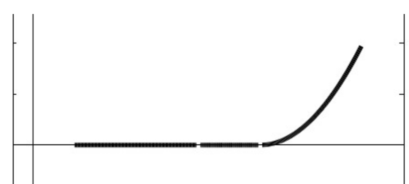
$B_{3,3}(x)$

$+ \alpha_4 \times$



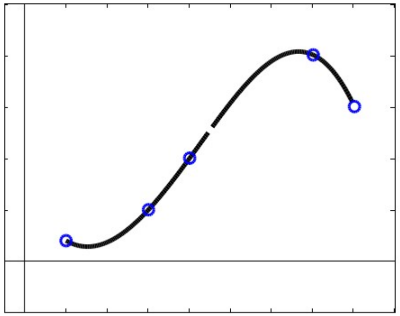
$B_{4,3}(x)$

$+ \alpha_5 \times$



$B_{5,3}(x)$

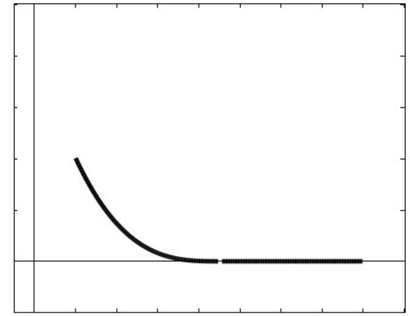
スプライン補間



区分的3次多項式 ($K = 4$)

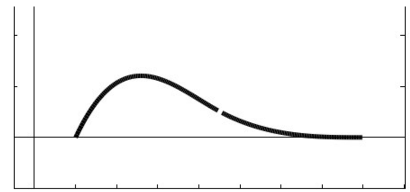
$$s(x) = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j B_{j,4}(x)$$

$=$ $\alpha_1 \times$



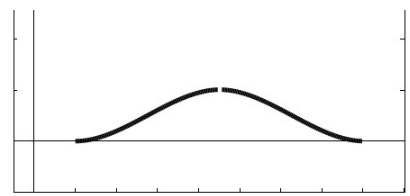
$B_{1,4}(x)$

$+ \alpha_2 \times$



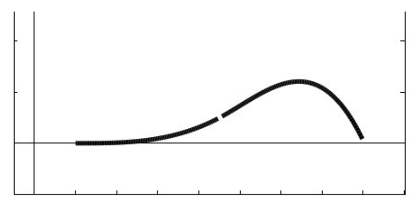
$B_{2,4}(x)$

$+ \alpha_3 \times$



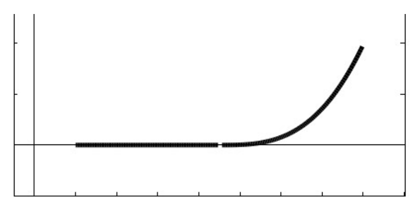
$B_{3,4}(x)$

$+ \alpha_4 \times$



$B_{4,4}(x)$

$+ \alpha_5 \times$



$B_{5,4}(x)$

2-2 B-スプライン

N 個のデータ点

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$$

$N + K$ 個の節点

$$q_1, q_2, \dots, q_{N+K}$$

N 個の $(K - 1)$ 次B-スプライン

$$B_{1,K}(x), B_{2,K}(x), \dots, B_{N,K}(x)$$

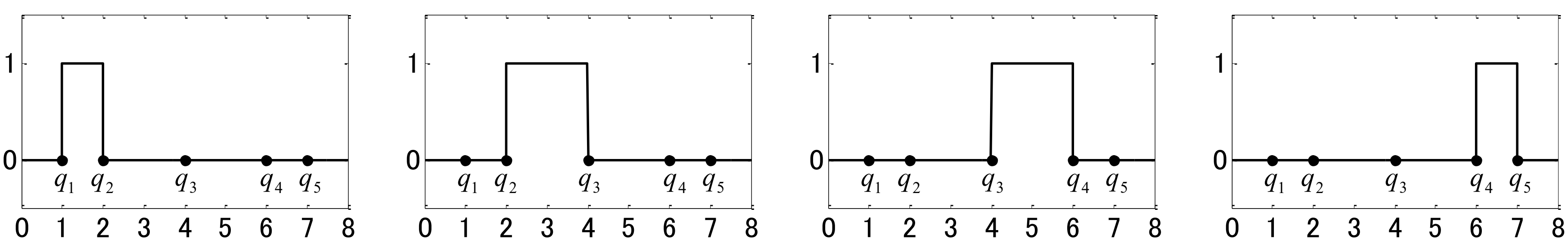
2-2 B-スプライン

$K = 1$ の場合（0次B-スプライン）

$N + 1$ 個の節点 $q_1, q_2, \dots, q_{N+1}$

N 個の0次B-スプライン $B_{1,1}(x), B_{2,1}(x), \dots, B_{N,1}(x)$

例: $N = 4$, $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5] = [1, 2, 4, 6, 7]$ の場合



$y = B_{1,1}(x)$　　$y = B_{2,1}(x)$　　$y = B_{3,1}(x)$　　$y = B_{4,1}(x)$

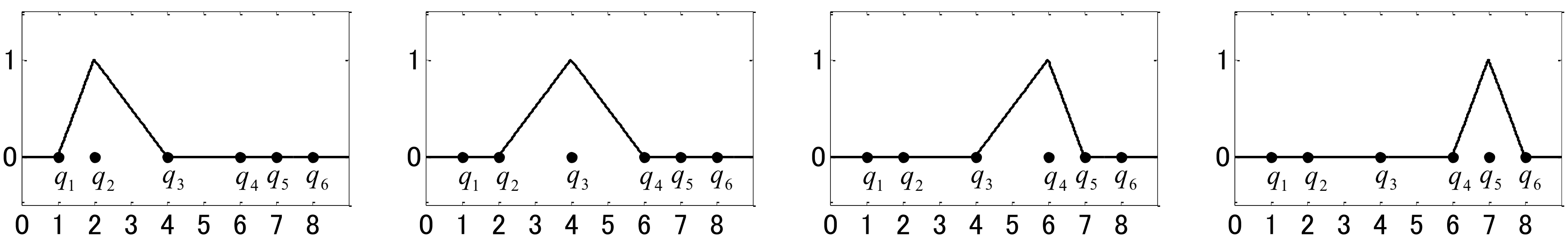
2-2 B-スプライン

$K=2$ の場合（1次B-スプライン）

$N+2$ 個の節点 $q_1, q_2, \ldots, q_{N+2}$

N 個の1次B-スプライン $B_{1,2}(x), B_{2,2}(x), \ldots, B_{N,2}(x)$

例： $N=4$, $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] = [1, 2, 4, 6, 7, 8]$ の場合



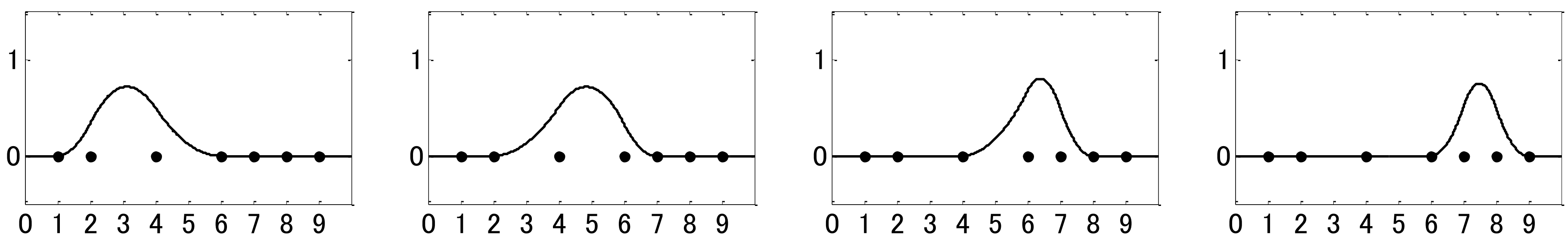
$y = B_{1,2}(x)$ $y = B_{2,2}(x)$ $y = B_{3,2}(x)$ $y = B_{4,2}(x)$

2-2 B-スプライン

$K=3$ の場合（2次B-スプライン）

$N+3$ 個の節点 $q_1, q_2, \dots, q_{N+3}$
N 個の2次B-スプライン $B_{1,3}(x), B_{2,3}(x), \dots, B_{N,3}(x)$

例：$N=4$, $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7] = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$ の場合



$y = B_{1,3}(x)$　　$y = B_{2,3}(x)$　　$y = B_{3,3}(x)$　　$y = B_{4,3}(x)$

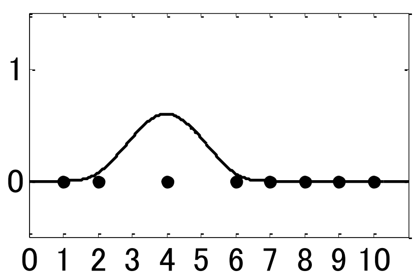
2-2 B-スプライン

$K = 4$ の場合（3次B-スプライン）

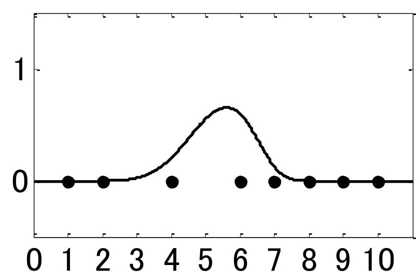
$N + 4$ 個の節点 $q_1, q_2, \ldots, q_{N+4}$

N 個の3次B-スプライン $B_{1,4}(x), B_{2,4}(x), \ldots, B_{N,4}(x)$

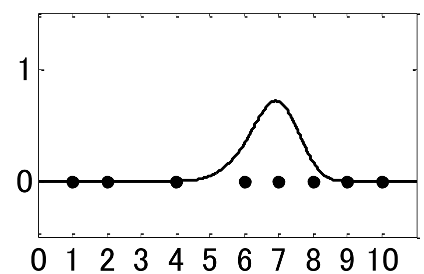
例: $N = 4$, $[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8] = [1, 2, 4, 6, 7,8,9,10]$ の場合



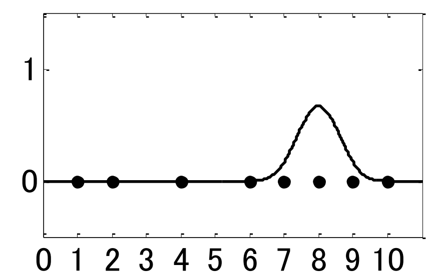
$y = B_{1,4}(x)$



$y = B_{2,4}(x)$



$y = B_{3,4}(x)$



$y = B_{4,4}(x)$

de Boor-Cox の算法

$$B_{j,1}(x) = \begin{cases} 1 & (q_j \leq x < q_{j+1}) \\ 0 & (x < q_j, x \geq q_{j+1}) \end{cases} \quad (K = 1)$$

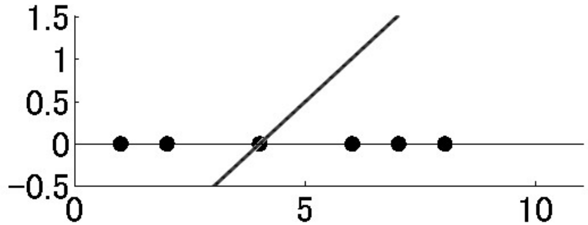
$$B_{j,K}(x) = \frac{x - q_j}{q_{j+K-1} - q_j} B_{j,K-1}(x) + \frac{q_{j+K} - x}{q_{j+K} - q_{j+1}} B_{j+1,K-1}(x) \quad (K \geq 2)$$

2-2 B-スプライン

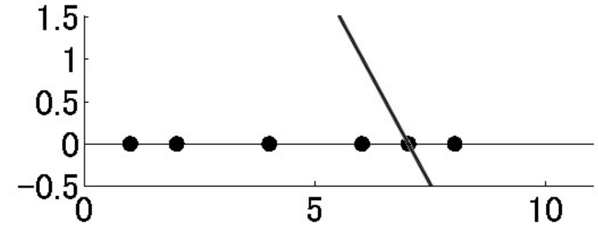
de Boor-Cox の算法の例（$K = 2,\ [q_1, \dots, q_6] = [1,2,4,6,7,8],\ j = 3$）

$$B_{3,2}(x) = \underbrace{\frac{x - q_3}{q_4 - q_3}}_{(1)} \underbrace{B_{3,1}(x)}_{(2)} + \underbrace{\frac{q_5 - x}{q_5 - q_4}}_{(3)} \underbrace{B_{4,1}(x)}_{(4)}$$

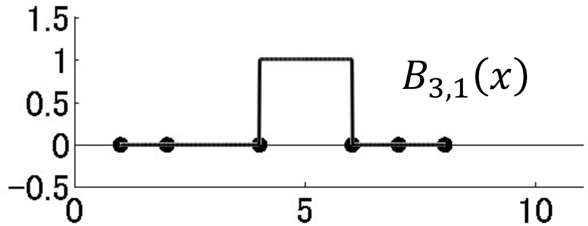
(1)



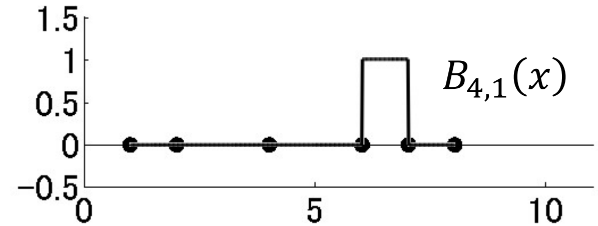
(3)



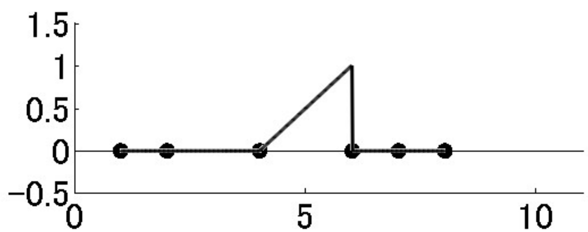
(2)



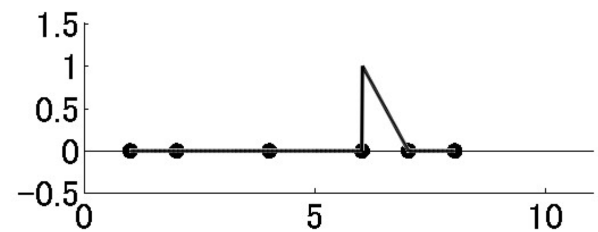
(4)



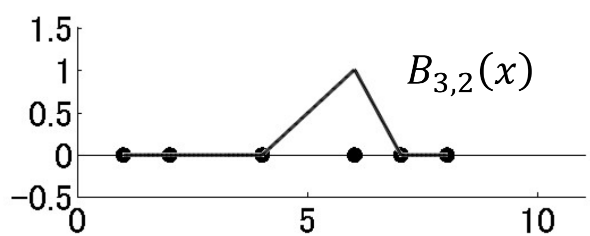
(1)×(2)



(3)×(4)



(1)×(2)+(3)×(4)

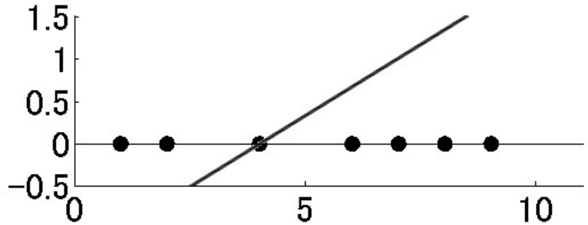


2-2 B-スプライン

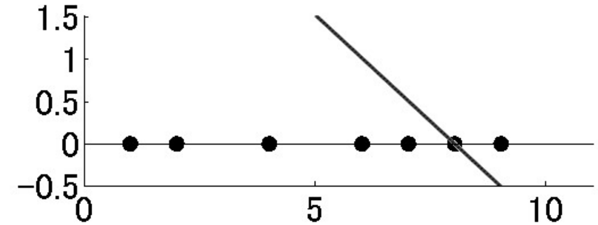
de Boor-Cox の算法の例（$K = 3$, $[q_1, \dots, q_7] = [1,2,4,6,7,8,9]$, $j = 3$）

$$B_{3,3}(x) = \frac{x - q_3}{\underbrace{q_5 - q_3}_{(1)}} \underbrace{B_{3,2}(x)}_{(2)} + \frac{q_6 - x}{\underbrace{q_6 - q_4}_{(3)}} \underbrace{B_{4,2}(x)}_{(4)}$$

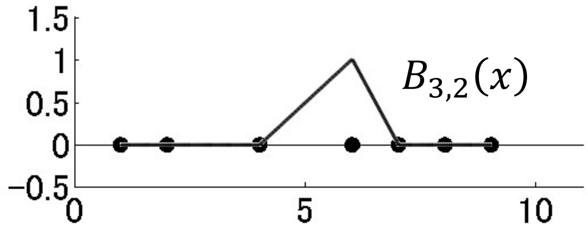
(1)



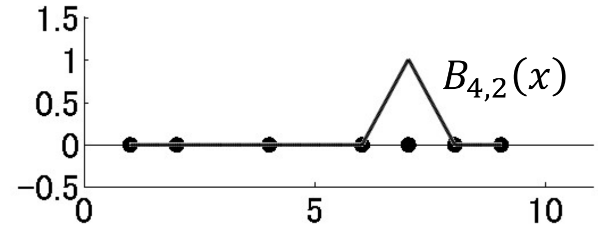
(3)



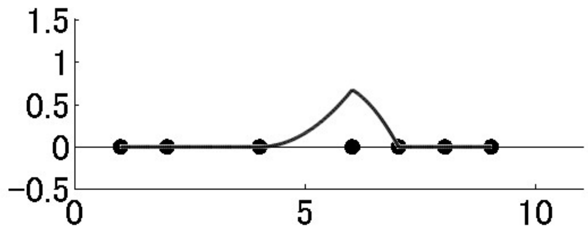
(2)



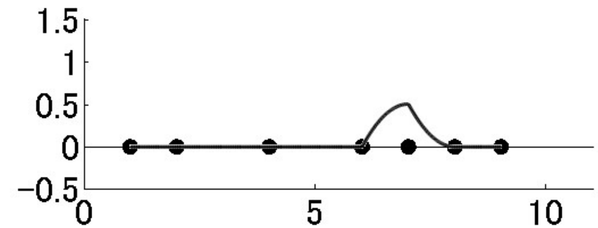
(4)



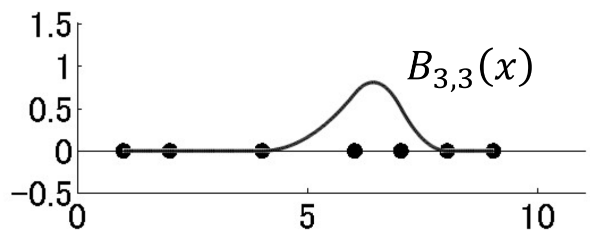
(1)×(2)



(3)×(4)



(1)×(2)+(3)×(4)

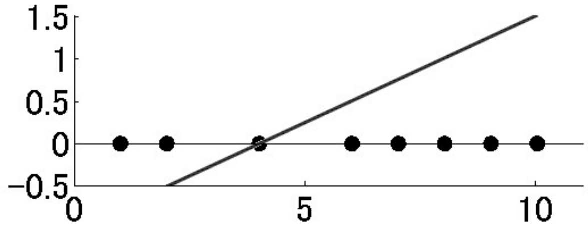


2-2 B-スプライン

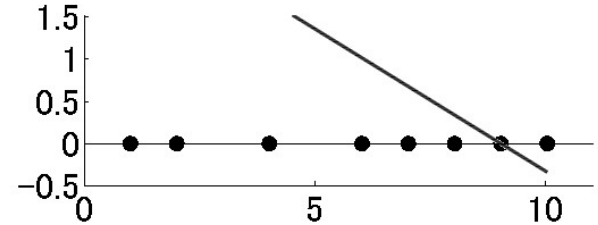
de Boor-Cox の算法の例（$K = 4$, $[q_1, \dots, q_8] = [1,2,4,6,7,8,9,10]$, $j = 3$）

$$B_{3,4}(x) = \underbrace{\frac{x - q_3}{q_6 - q_3}}_{(1)} \underbrace{B_{3,3}(x)}_{(2)} + \underbrace{\frac{q_7 - x}{q_7 - q_4}}_{(3)} \underbrace{B_{4,3}(x)}_{(4)}$$

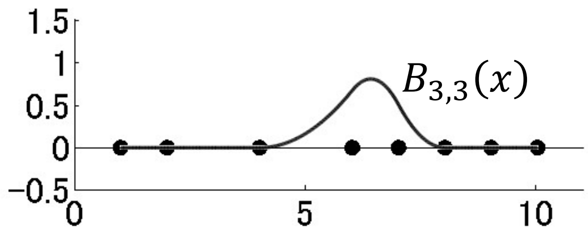
(1)



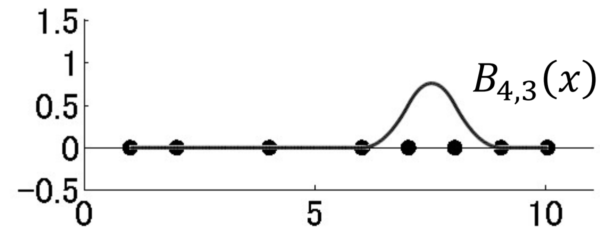
(3)



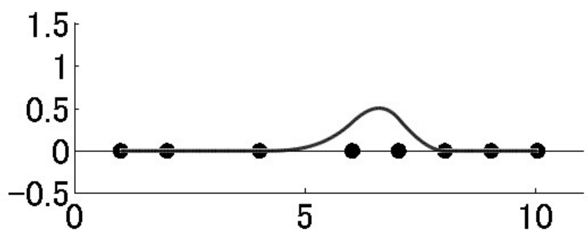
(2)



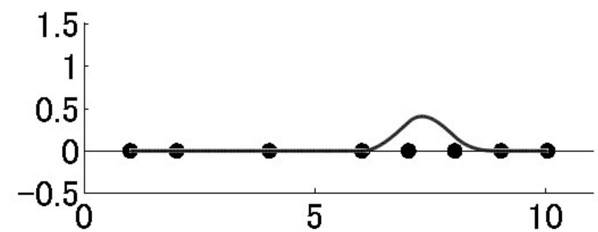
(4)



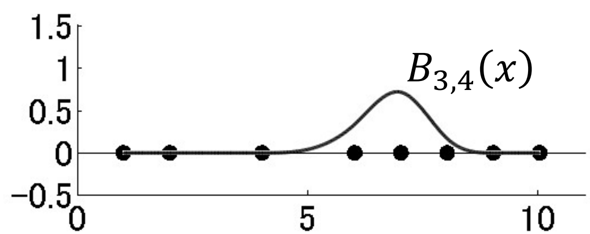
(1)×(2)



(3)×(4)

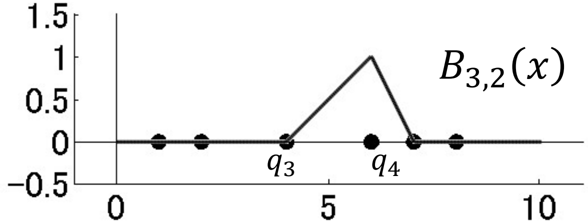


(1)×(2)+(3)×(4)

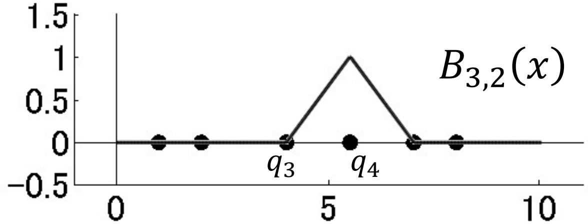


2-2 B-スプライン

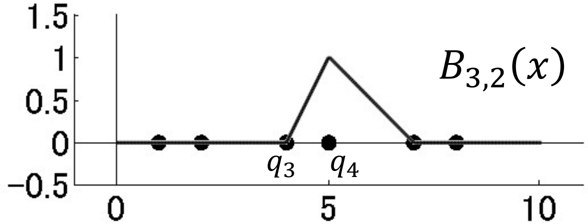
節点の重複とB-スプライン（$K = 2,\ [q_1, \ldots, q_6] = [1,2,4,q_4,7,8],\ j = 3$）



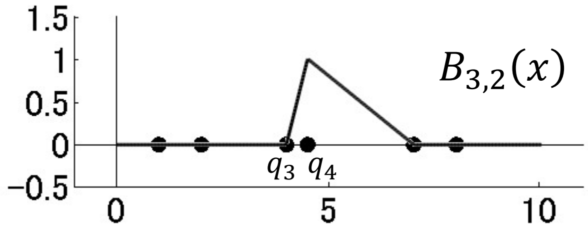
$q_3 = 4, q_4 = 6$



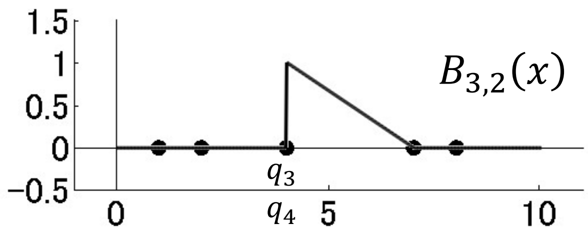
$q_3 = 4, q_4 = 5.5$



$q_3 = 4, q_4 = 5$



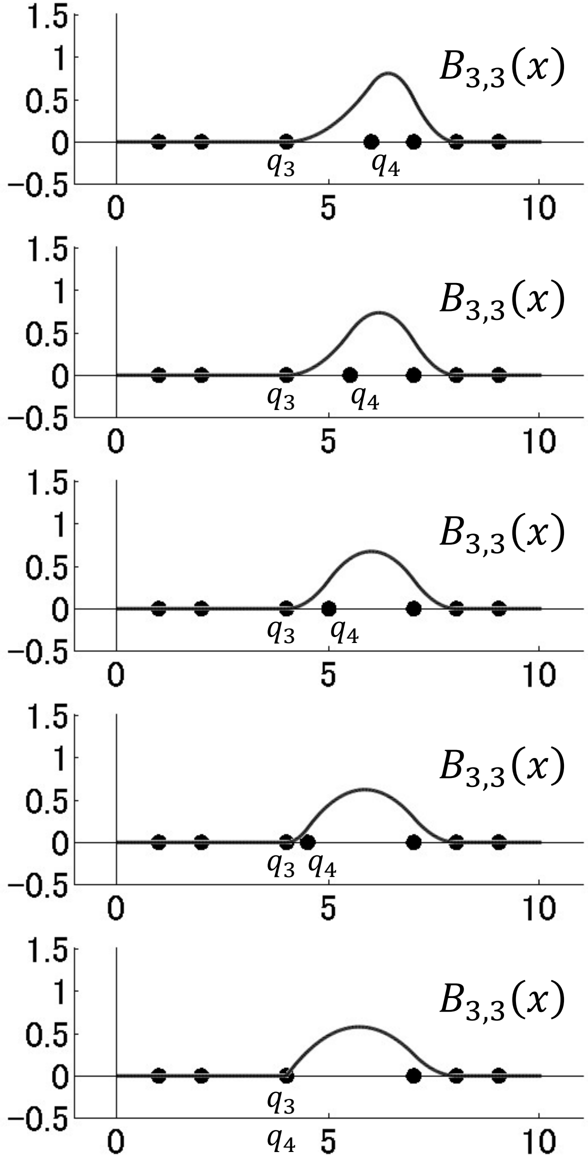
$q_3 = 4, q_4 = 4.5$



$q_3 = 4, q_4 = 4$

2-2 B-スプライン

節点の重複とB-スプライン（$K=3$, $[q_1,\dots,q_7]=[1,2,4,q_4,7,8,9]$, $j=3$）



$q_3=4, q_4=6$

$q_3=4, q_4=5.5$

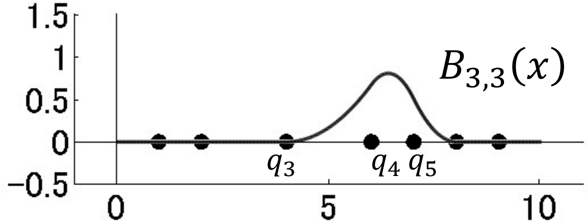
$q_3=4, q_4=5$

$q_3=4, q_4=4.5$

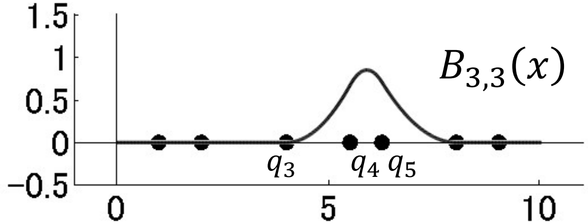
$q_3=4, q_4=4$

2-2 B-スプライン

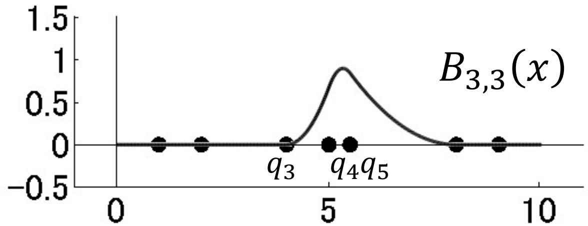
節点の重複とB-スプライン（$K = 3$, $[q_1, \ldots, q_7] = [1,2,4, q_4, q_5, 8,9]$, $j = 3$）



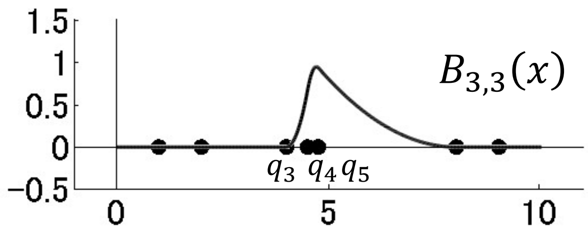
$q_3 = 4, q_4 = 6, q_5 = 7$



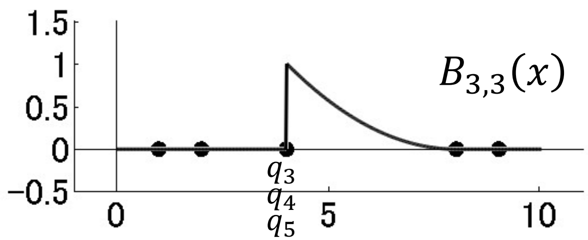
$q_3 = 4, q_4 = 5.5, q_5 = 6.25$



$q_3 = 4, q_4 = 5, q_5 = 5.5$



$q_3 = 4, q_4 = 4.5, q_5 = 4.75$



$q_3 = 4, q_4 = 4, q_5 = 4$

2-2 B-スプライン

節点の重複とB-スプライン：計算上の注意事項

【再掲】de Boor-Cox の算法

$$B_{j,1}(x) = \begin{cases} 1 & \left(q_j \le x < q_{j+1}\right) \\ 0 & \left(x < q_j, x \ge q_{j+1}\right) \end{cases} \qquad (K = 1)$$

$$B_{j,K}(x) = \boxed{\frac{x - q_j}{\boxed{q_{j+K-1} - q_j}_{(1)}} B_{j,K-1}(x)}_{(2)} + \boxed{\frac{q_{j+K} - x}{\boxed{q_{j+K} - q_{j+1}}_{(1)}} B_{j+1,K-1}(x)}_{(2)} \qquad (K \ge 2)$$

(1) がゼロ（重複節点） ⇒ (2) をゼロにする

問1.1

0 次 B-スプライン $B_{j,1}(x)$ を評価する関数

y = fun_bspline1(x, j, q) （ファイル名 : fun_bspline1.m）

を作成し，さらに $B_{j,1}(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_1.m を作成せよ.

関数 fun_bspline1 の引数

x:　関数値を評価する点の座標（スカラまたはベクトル）

j:　B-スプラインの添え字（スカラ）

q:　節点（ベクトル）

2-2 B-スプライン

問1.1 の回答例

```
function y = fun_bspline1(x, j, q)

nx = length(x); % ベクトル x の要素数
y = zeros(nx, 1); % ベクトル y の領域確保(ゼロで初期化)
for k = 1: nx,
  if ((q(j) <= x(k)) && (x(k) < q(j + 1))),
    y(k) = 1;
  end
end
```

fun_bspline1.m

```
q = [1; 2; 4; 6; 7]; % 節点を設定
j = 3; % j番目のB-スプライン

x = linspace(0, 10, 100)'; % x 座標を設定
y = fun_bspline1(x, j, q); % 関数値を求める

figure(1); % 描画ウィンドウ1を開く
clf; % 描画ウィンドウをクリア
plot(x, y, 'b-'); % グラフの描画
hold on; % 上書き描画の指定
plot(q, zeros(length(q), 1), 'ro'); % 節点の描画
axis([0, 10, -1, 2]); % 描画領域の指定
```

scr1_1.m
（変更を加えて提出すること）

問1.2

$(K-1)$ 次 B-スプライン $B_{j,K}(x)$ を評価する関数

y = fun_bspline(x, j, K, q) （ファイル名 : fun_bspline.m）

を作成し, さらに $B_{j,K}(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_2.m を作成せよ.

関数 fun_bspline の引数

- x:　関数値を評価する点の座標（スカラまたはベクトル）
- j:　B-スプラインの添え字（スカラ）
- K:　K （スカラ）
- q:　節点（ベクトル）

2-2 B-スプライン

問1.2 の回答例

エディター – C:¥cygwin¥tmp¥fun_bspline.m

ファイル(F) 編集(E) テキスト(T) 移動(G) セル(C) ツール(O)

```
function y = fun_bspline(x, j, K, q)

if (K >= 2) % K≧2 のとき

  if (q(j + K - 1) - q(j) > 0.00001) % 分母≠0のとき
    tmp1 = (x - q(j)) / (q(j + K - 1) - q(j));
    tmp2 = fun_bspline(x, j, K - 1, q);
    y1 = tmp1 .* tmp2;
  else % 分母＝0のとき
    y1 = zeros(size(x));
  end

  if (q(j + K) - q(j + 1) > 0.00001) % 分母≠0のとき
    tmp1 = (q(j + K) - x) / (q(j + K) - q(j + 1));
    tmp2 = fun_bspline(x, j + 1, K - 1, q);
    y2 = tmp1 .* tmp2;
  else % 分母＝0のとき
    y2 = zeros(size(x));
  end

  y = y1 + y2;

else % K == 1 のとき
  y = fun_bspline1(x, j, q);
end
```

fun_bspline.m

エディター – C:¥cygwin¥tmp¥scr1_2.m

ファイル(F) 編集(E) テキスト(T) 移動(G) セル(C) ツール(O)

```
q = [1; 2; 4; 6; 7; 8; 9; 10]; % 節点を設定
j = 3; % j番目のB-スプライン
K = 4; % (K-1)次B-スプライン

x = linspace(0, 11, 100)'; % x 座標を設定
y = fun_bspline(x, j, K, q); % 関数値を求める

figure(1); % 描画ウィンドウ1を開く
clf; % 描画ウィンドウをクリア
plot(x, y, 'b-'); % グラフの描画
hold on; % 上書き描画の指定
plot(q, zeros(length(q), 1), 'ro'); % 節点の描画
axis([0, 11, -1, 2]); % 描画領域の指定
```

スクリプト　行 1　列 25　上書き

scr1_2.m
（変更を加えて提出すること）

2-2 B-スプライン

B-スプラインの線形結合でスプライン関数を作る

$N+K$ 個の節点: $q_1, q_2, \dots, q_{N+K}$

N 個の B−スプライン: $B_{1,K}(x), B_{2,K}(x), \dots, B_{N,K}(x)$

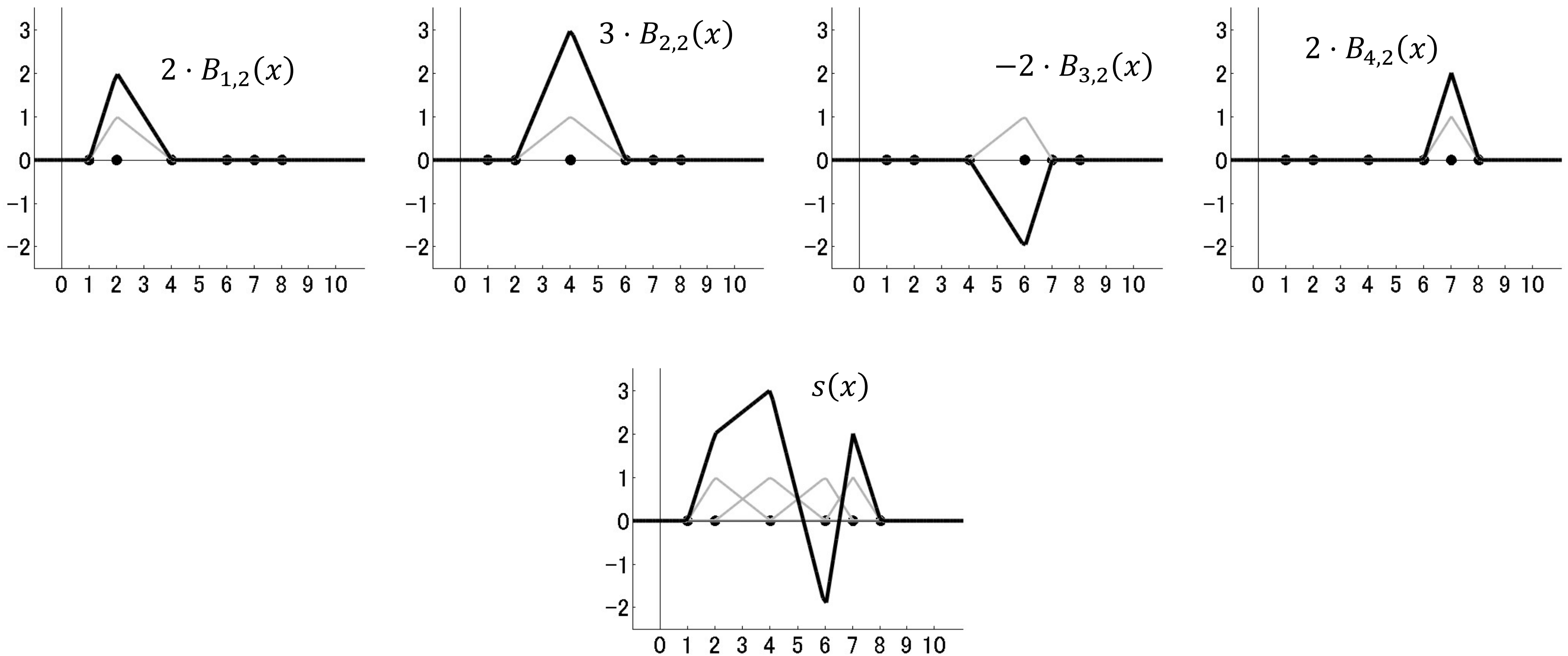
N 個の係数: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$

$\Rightarrow$ スプライン関数 $s(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$

B-スプラインの線形結合でスプライン関数を作る

例: $N = 4,\ K = 2,$

$[q_1, \dots, q_6] = [1, 2, 4, 6, 7, 8]$, $[\alpha_1, \dots, \alpha_4] = [2, 3, -2, 2]$ の場合

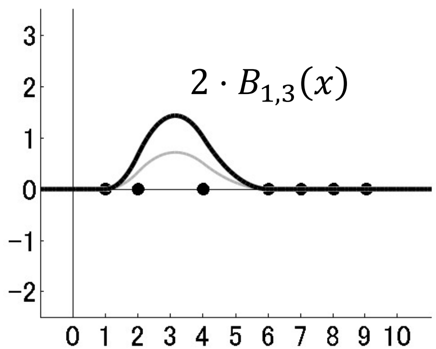


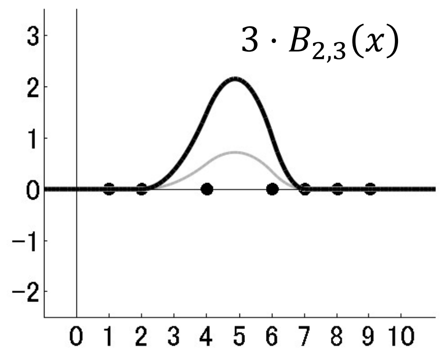
$$s(x) = 2 \cdot B_{1,2}(x) + 3 \cdot B_{2,2}(x) - 2 \cdot B_{3,2}(x) + 2 \cdot B_{4,2}(x)$$

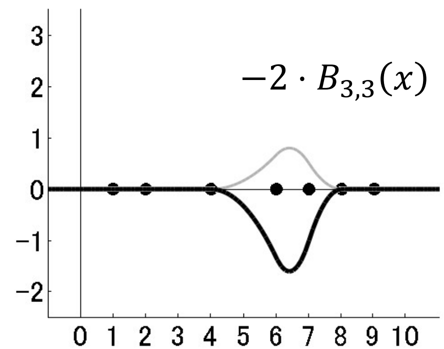
B-スプラインの線形結合でスプライン関数を作る

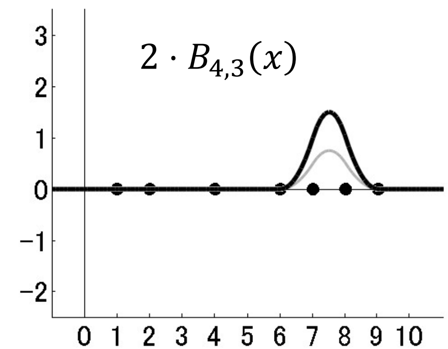
例: $N = 4,\ K = 3,$

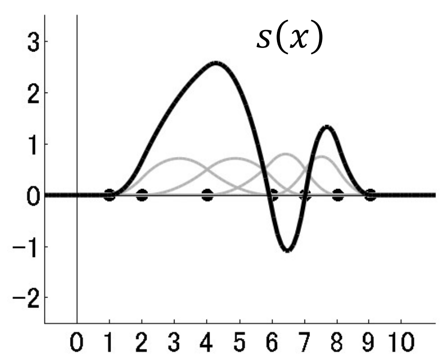
$[q_1, \ldots, q_7] = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$, $[\alpha_1, \ldots, \alpha_4] = [2, 3, -2, 2]$ の場合











$$s(x) = 2 \cdot B_{1,3}(x) + 3 \cdot B_{2,3}(x) - 2 \cdot B_{3,3}(x) + 2 \cdot B_{4,3}(x)$$

問1.3
与えられた係数に対して $(K-1)$ 次スプライン関数 $s(x)$ を評価する関数
　　y = fun_spline(x, K, q, alpha) （ファイル名 : fun_spline.m）
を作成し，さらに $s(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_3.m を作成せよ.

関数 fun_spline の引数
- x: 関数値を評価する点の座標（スカラまたはベクトル）
- K: K（スカラ）
- q: 節点（ベクトル）
- alpha: 係数（ベクトル）

2-2 B-スプライン

問1.3 の回答例

```
function y = fun_spline(x, K, q, alpha)

N = length(alpha); % 係数の数（=B-スプラインの数）
y = zeros(size(x)); % x と同じ大きさの配列を確保
```

ここで y の値を決定する

$$\left(y = s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boxed{B_{j,K}(x)}\right)$$

問1.2の fun_bspline(x, j, K, q) を使おう！

```
K = 3; % (K - 1)次B-スプライン
q = [1; 2; 4; 6; 7; 8; 9]; % 節点を設定
alpha = [1; 2; -0.5; 1]; % 係数を設定

x = linspace(0, 11, 100)'; % x 座標を設定
y = fun_spline(x, K, q, alpha); % 関数値を求める

figure(1); % 描画ウィンドウ1を開く
clf; % 描画ウィンドウをクリア
plot(x, y, 'b-'); % グラフの描画
hold on; % 上書き描画の指定
plot(q, zeros(length(q), 1), 'ro'); % 節点の描画
axis([0, 11, -1, 2]); % 描画領域の指定
```

scr1_3.m
（変更を加えて提出すること）

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

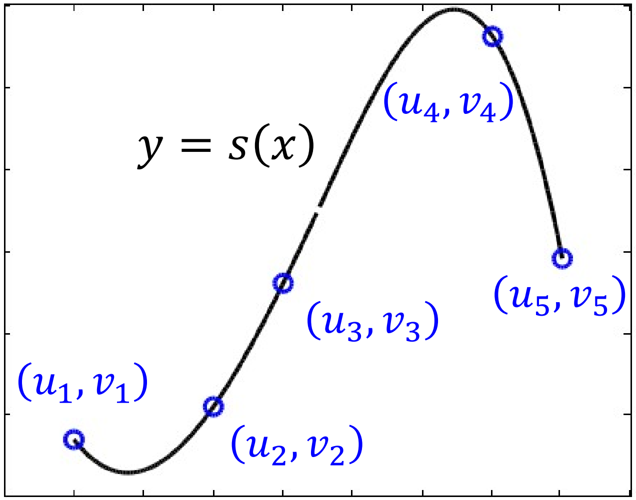
データ点を補間するスプライン関数を作る

$N+K$ 個の節点: $q_1, q_2, \ldots, q_{N+K}$

N 個のデータ点: $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_N, v_N)$

$$\Rightarrow \text{スプライン補間関数 } s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$$

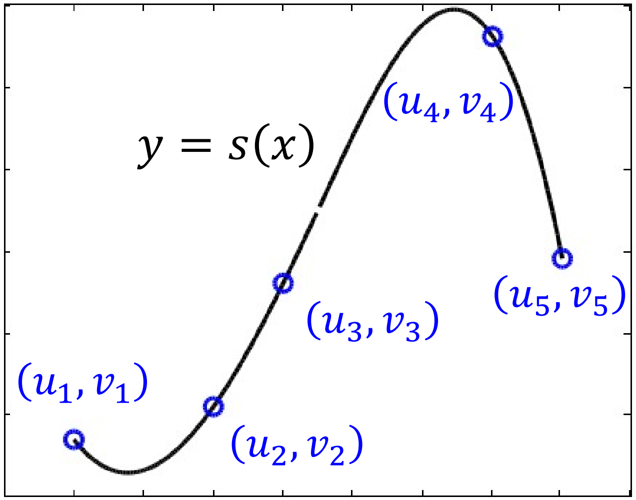
（補間条件: $s(u_i) = v_i \ (i = 1,2, \ldots, N)$）



3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

スプライン補間関数 $s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$

「課題1：節点 $q_1, q_2, \ldots, q_{N+K}$ をどうやって決める？」
「課題2：係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ をどうやって決める？」



3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

「課題1: 節点 $q_1, q_2, \ldots, q_{N+K}$ をどうやって決める？」の解決方法 (1/2)

スプライン補間関数は $s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$.

補間係数が存在するための十分条件

＝ j 番目のB-スプライン $B_{j,K}(x)$ の値が，$x = u_j$ の位置で非零であること.

（$B_{j,K}(u_j) \neq 0$）

節点の選び方には自由度がある！

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

「課題1: 節点 $q_1, q_2, \ldots, q_{N+K}$ をどうやって決める？」の解決方法 (2/2)

節点の選び方の例:

$$q_1 = \cdots = q_K = u_1$$
$$q_{i+K} = (u_i + u_{i+K})/2 \qquad (i = 1, \ldots, N-K)$$
$$q_{N+1} = \cdots = q_{N+K} = u_N \underline{+ \varepsilon}$$

小さな値を足す（$x = u_N$ を定義域に含めるため）

$[u_1, \ldots, u_5] = [1,3,4,7,8]$, $K = 2$ のとき,

$$[q_1, \ldots, q_7] = [1, 1, 2.5, 5, 6, 8.001, 8.001]$$

$[u_1, \ldots, u_5] = [1,3,4,7,8]$, $K = 3$ のとき,

$$[q_1, \ldots, q_8] = [1, 1, 1, 4, 5.5, 8.001, 8.001, 8.001]$$

$[u_1, \ldots, u_5] = [1,3,4,7,8]$, $K = 4$ のとき,

$$[q_1, \ldots, q_9] = [1, 1, 1, 1, 4.5, 8.001, 8.001, 8.001, 8.001]$$

3-1 (*K*-1) 次のスプライン補間関数

「課題2：係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ をどうやって決める？」の解決方法 (1/3)

スプライン補間関数は $s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$ ⋯(1)

補間条件は $s(u_i) = v_i$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ ⋯(2)

条件 (2) の $s(u_i)$ を，等式 (1) で展開すれば，

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_1) = v_1$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_2) = v_2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_N) = v_N$$

という N 個の方程式ができる（未知数は N 個の係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$）.

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

「課題2：係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ をどうやって決める？」の解決方法 (2/3)

N 個の方程式を整理する.

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_1) = v_1 \\
\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_2) = v_2 \\
\qquad\vdots \\
\sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(u_N) = v_N
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
B_{1,K}(u_1)\cdot\alpha_1 + B_{2,K}(u_1)\cdot\alpha_2 \dots + B_{N,K}(u_1)\cdot\alpha_N = v_1 \\
B_{1,K}(u_2)\cdot\alpha_1 + B_{2,K}(u_2)\cdot\alpha_2 \dots + B_{N,K}(u_2)\cdot\alpha_N = v_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
B_{1,K}(u_N)\cdot\alpha_1 + B_{2,K}(u_N)\cdot\alpha_2 \dots + B_{N,K}(u_N)\cdot\alpha_N = v_N
\end{cases}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
B_{1,K}(u_1) & B_{2,K}(u_1) & \cdots & B_{N,K}(u_1) \\
B_{1,K}(u_2) & B_{2,K}(u_2) & \cdots & B_{N,K}(u_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
B_{1,K}(u_N) & B_{2,K}(u_N) & \cdots & B_{N,K}(u_N)
\end{bmatrix}}_{= A}
\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}}_{= \boldsymbol{\alpha}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}}_{= \boldsymbol{v}}
$$

3-1 (*K*-1) 次のスプライン補間関数

「課題2：係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ をどうやって決める？」の解決方法 (3/3)

つまり，連立1次方程式 $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{v}$

$$\left(A = \begin{bmatrix} B_{1,K}(u_1) & B_{2,K}(u_1) & \cdots & B_{N,K}(u_1) \\ B_{1,K}(u_2) & B_{2,K}(u_2) & \cdots & B_{N,K}(u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,K}(u_N) & B_{2,K}(u_N) & \cdots & B_{N,K}(u_N) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \right)$$

を解けば，補間条件 (2) を満たす係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ が決まる！

3-1 (*K*-1) 次のスプライン補間関数

N 個のデータ点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_N, v_N)$ を通るスプライン関数

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(x)$$

を生成する手順

1. データ点の x 座標 $u_1, \ldots, u_N$ から節点 $q_1, \ldots, q_{N+K}$ を生成する

$$q_1 = \cdots = q_K = u_1$$

$$q_{i+K} = (u_i + u_{i+K})/2 \qquad (i = 1, \ldots, N-K)$$

$$q_{N+1} = \cdots = q_{N+K} = u_N \underline{+\,\varepsilon}$$

小さな値を足す（$x = u_N$ を定義域に含めるため）

2. 行列 A を作る

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,K}(u_1) & \cdots & B_{N,K}(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,K}(u_N) & \cdots & B_{N,K}(u_N) \end{bmatrix}$$

3. 連立1次方程式 $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{v}$ を解く

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

3-1 (*K*-1) 次のスプライン補間関数

問1.4 (a)

データ点の x 座標 $u_1, \ldots, u_N$ から節点 $q_1, \ldots, q_{N+K}$ を生成する関数

q = fun_genNode(u, K) （ファイル名 : fun_genNode.m）

を作成せよ.

関数 fun_genNode の引数

u: データ点の x 座標（ベクトル）

K: K（スカラ）

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

問1.4 (b)

データ点の x 座標 $u_1, \dots, u_N$ と節点 $q_1, \dots, q_{N+K}$ から行列 A を生成する関数

A = fun_genMat(u, K, q) （ファイル名 : fun_genMat.m）

を作成せよ.

関数 fun_genMat の引数

- u: データ点の x 座標（ベクトル）
- K: K（スカラ）
- q: 節点（ベクトル）

実行例

```
>> K = 3;
>> u = [1; 3; 4; 7; 8];
>> q = fun_genNode(u, K)
q =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    4.0000
    5.5000
    8.0001
    8.0001
    8.0001

>> A = fun_genMat(u, K, q)
A =
    1.0000         0         0         0         0
    0.1111    0.5926    0.2963         0         0
         0    0.3333    0.6667         0         0
         0         0    0.1000    0.5400    0.3600
         0         0    0.0000    0.0001    0.9999
```

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

問1.4 (c)

スプライン補間の係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ と節点 $q_1, \dots, q_{N+K}$ を返す関数

[alpha, q] = fun_interpCoeff(u, v, K) （ファイル名 : fun_interpCoeff.m）

を作成し，さらに $y = s(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_4.m を作成せよ.

関数 fun_interpCoeff の引数

- u, v: データ点の x 座標と y 座標（ベクトル）
- K: K（スカラ）
- alpha: 補間係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$（ベクトル）
- q: 節点（ベクトル）

実行例

```
>> K = 3;
>> u = [1; 3; 4; 7; 8];
>> v = [0.2; 0.5; 1; 2; 1.5];
>> [alpha, q] = fun_interpCoeff(u, v, K)
alpha =
    0.2000
    0.0750
    1.4625
    2.4329
    1.4999

q =
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    4.0000
    5.5000
    8.0001
    8.0001
    8.0001
```

3-1 (K-1) 次のスプライン補間関数

問1.4(c) scr1_4.m の回答例

```
u = [1; 3; 4; 7; 8]; % データ点 (x座標)
v = [0.2; 0.5; 1; 2; 1.5]; % データ点 (y座標)
K = 4; % (K-1)次スプライン

[alpha, q] = fun_interpCoeff(u, v, K); % 補間係数と節点を求める

x = linspace(1, 8, 100)'; % グラフのプロットのための x 座標
y = fun_spline(x, K, q, alpha); % スプライン関数の値を求める
```

ここで $y = s(x)$ のグラフを描画する

scr1_4.m
（変更を加えて提出すること）

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

$N+1$ 個のデータ点

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_N, v_N), (u_{N+1}, v_{N+1})$$

（ただし，周期は $T = u_{N+1} - u_1$ であり，$v_1 = v_{N+1}$ を満たす）

を通る $(2M-1)$ 次の周期スプライン関数：

$$s(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B_{j,2M}(x)$$

$$(\alpha_j = \alpha_{j+kN}, \qquad k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

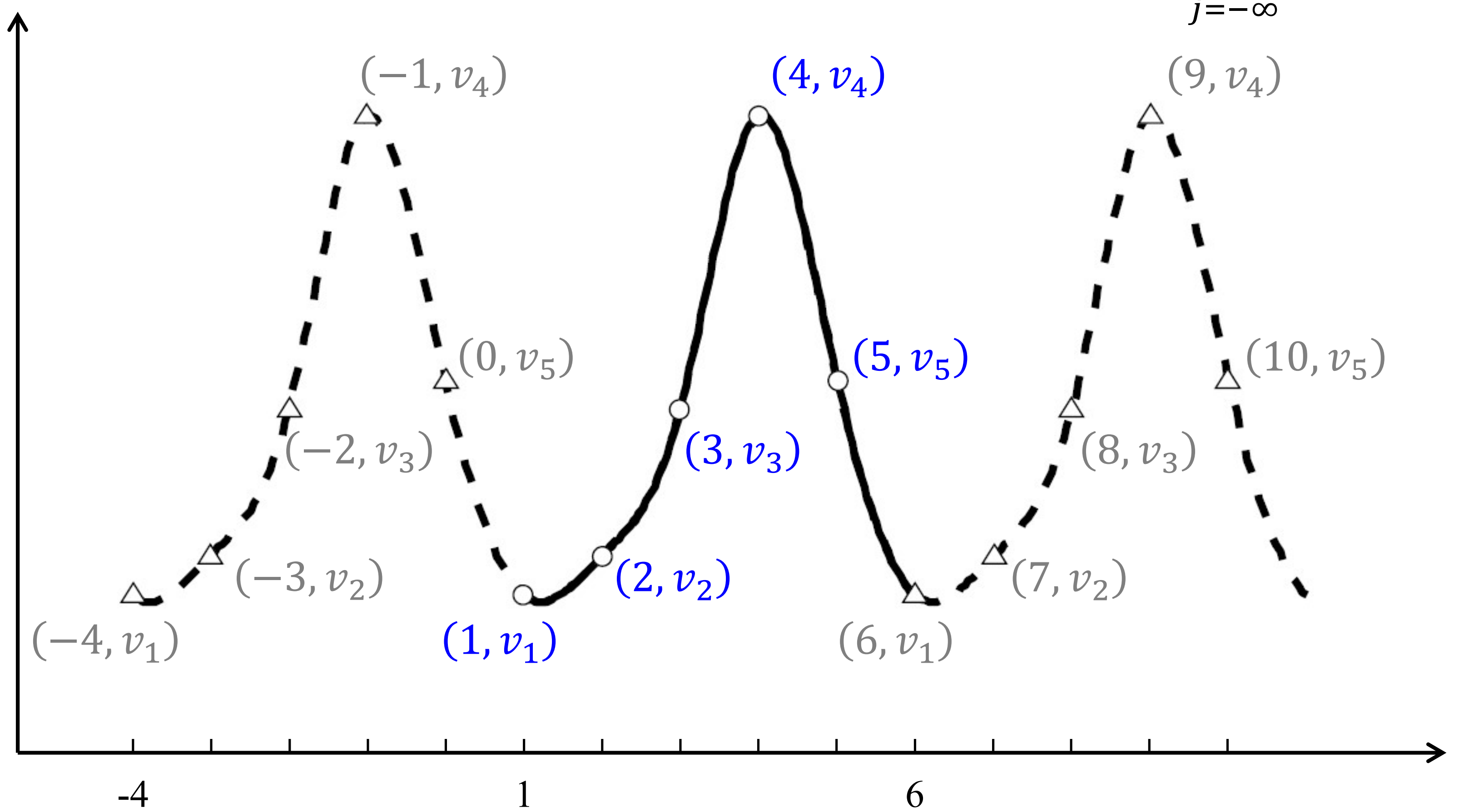
以降，簡単のため $u_i = i$ とし，$B_{j,2M}(x)$ を構成する $2M+1$ 個の節点は

$$[j-M, j-M+1, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, j+M-1, j+M]$$

とする.

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

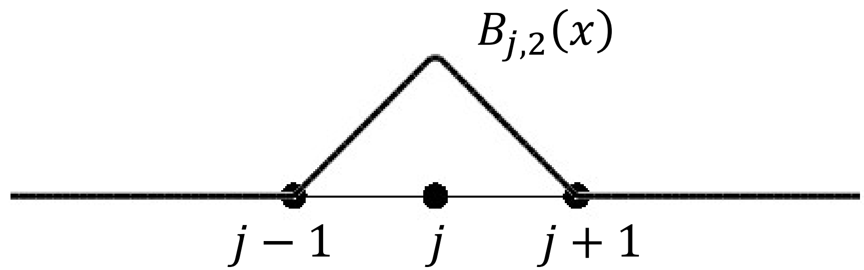
$$s(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B_{j,2M}(x)$$

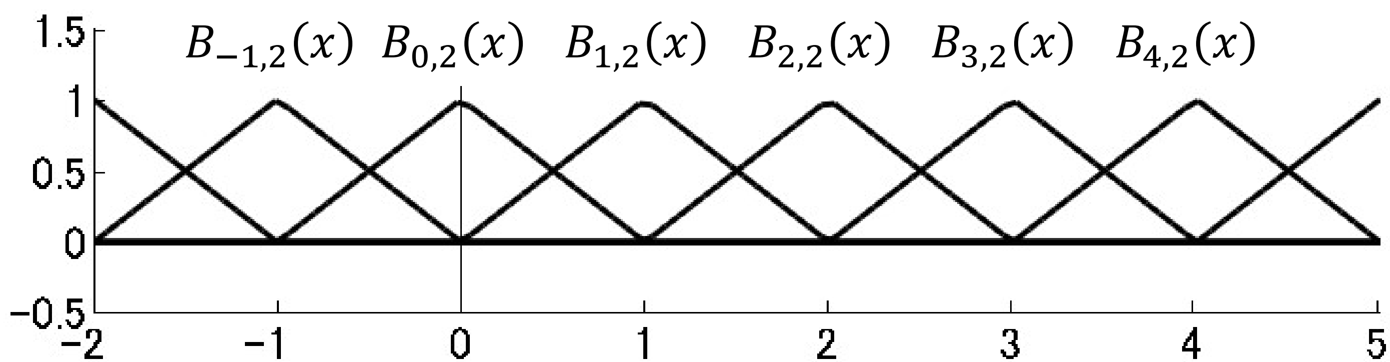


3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

周期スプライン補間のための B-スプライン

例: $M = 1$ ($K = 2$, 1次 B-スプライン）の場合

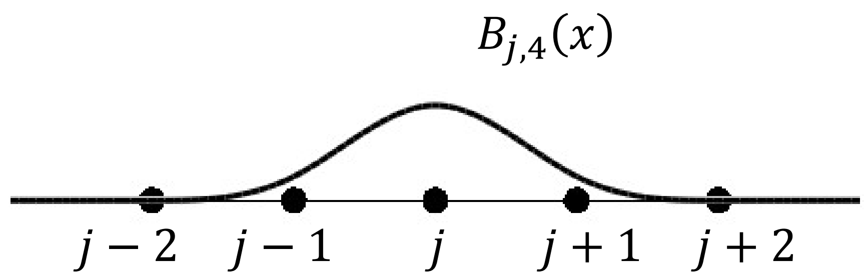


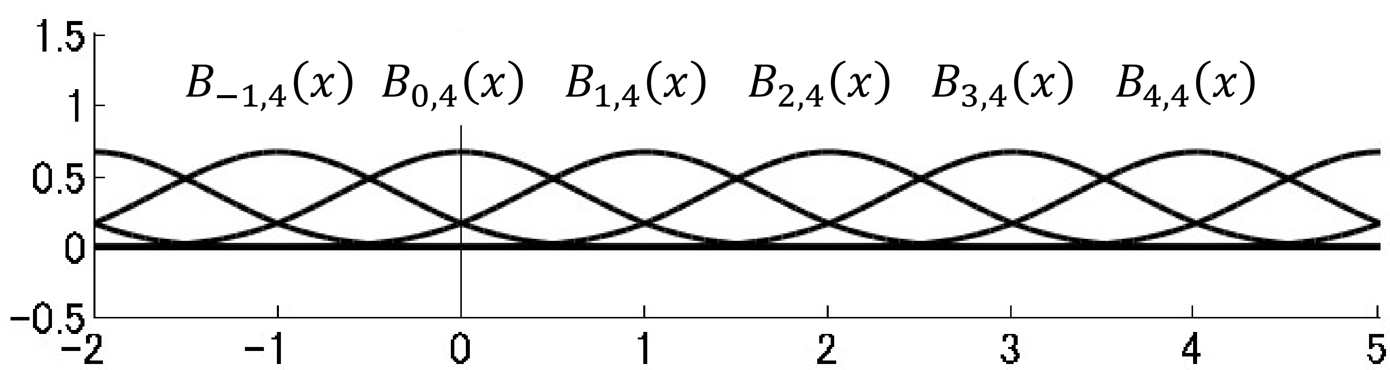


3-7 (2M-1) 次の周期スプライン補間関数

周期スプライン補間のための B-スプライン

例: $M=2$ ($K=4$, 3次 B-スプライン）の場合





3-7 (2M-1) 次の周期スプライン補間関数

問1.5

B-スプライン $B_{j,2M}(x)$ を評価する関数

y = fun_bsplinePeriod(x, j, M) （ファイル名：fun_bsplinePeriod.m）

を作成し，さらに $y = B_{j,2M}(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_5.m を作成せよ.

関数 fun_bsplinePeriod の引数

x:　関数値を評価する点の座標（スカラまたはベクトル）

j:　B-スプラインの添え字（スカラ）

M:　M（スカラ）

ヒント：

ここでの $B_{j,2M}(x)$ は，3-1節で節点 $q_1, \ldots, q_{2M+1}$ を $j-M, \ldots, j, \ldots, j+M$ としたときの $B_{1,2M}(x)$ に等しいことを利用しよう.

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

係数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ を未知数とする連立1次方程式の構成の例 (1/2)
（例: $M = 2,\ N = 5$ の場合）

$$
\begin{cases}
s(1) = & \alpha_0 B_{0,4}(1) & +\alpha_1 B_{1,4}(1) & +\alpha_2 B_{2,4}(1) & & & & \\
s(2) = & & \alpha_1 B_{1,4}(2) & +\alpha_2 B_{2,4}(2) & +\alpha_3 B_{3,4}(2) & & & \\
s(3) = & & & \alpha_2 B_{2,4}(3) & +\alpha_3 B_{3,4}(3) & +\alpha_4 B_{4,4}(3) & & \\
s(4) = & & & & \alpha_3 B_{3,4}(4) & +\alpha_4 B_{4,4}(4) & +\alpha_5 B_{5,4}(4) & \\
s(5) = & & & & & \alpha_4 B_{4,4}(5) & +\alpha_5 B_{5,4}(5) & +\alpha_6 B_{6,4}(5)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
= & \alpha_1 B_{1,4}(1) & +\alpha_2 B_{2,4}(1) & & & +\alpha_5 B_{0,4}(1) \\
= & \alpha_1 B_{1,4}(2) & +\alpha_2 B_{2,4}(2) & +\alpha_3 B_{3,4}(2) & & \\
= & & \alpha_2 B_{2,4}(3) & +\alpha_3 B_{3,4}(3) & +\alpha_4 B_{4,4}(3) & \\
= & & & \alpha_3 B_{3,4}(4) & +\alpha_4 B_{4,4}(4) & +\alpha_5 B_{5,4}(4) \\
= & \alpha_1 B_{6,4}(5) & & & +\alpha_4 B_{4,4}(5) & +\alpha_5 B_{5,4}(5)
\end{cases}
$$

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を未知数とする連立1次方程式の構成の例 (2/2)
（例: $M = 2, N = 5$ の場合）

$$
= \begin{bmatrix} B_{1,4}(1) & B_{2,4}(1) & & & B_{0,4}(1) \\ B_{1,4}(2) & B_{2,4}(2) & B_{3,4}(2) & & \\ & B_{2,4}(3) & B_{3,4}(3) & B_{4,4}(3) & \\ & & B_{3,4}(4) & B_{4,4}(4) & B_{5,4}(4) \\ B_{6,4}(5) & & & B_{4,4}(5) & B_{5,4}(5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}
$$

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を未知数とする連立1次方程式の構成：一般の場合 (1/3)
（データ数 N は $2M-1$ 個以上とする）

$$s(i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B_{j,2M}(i)$$

$$= \sum_{j=i-M+1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{0} \alpha_j B_{j,2M}(i) + \sum_{j=1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (i-M+1 \leq 0) \\ \displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (1 \leq i-M+1, i+M-1 \leq N) \\ \displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{N} \alpha_j B_{j,2M}(i) + \sum_{j=N+1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (N+1 \leq i+M-1) \end{cases}$$

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ を未知数とする連立1次方程式の構成: 一般の場合 (2/3)

$$
= \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{0} \alpha_{j+N} B_{j,2M}(i) + \sum_{j=1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (i - M + 1 \leq 0) \\
\displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (1 \leq i - M + 1, i + M - 1 \leq N) \\
\displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{N} \alpha_j B_{j,2M}(i) + \sum_{j=N+1}^{i+M-1} \alpha_{j-N} B_{j,2M}(i) & (N + 1 \leq i + M - 1)
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=i-M+1+N}^{N} \alpha_j B_{j-N,2M}(i) + \sum_{j=1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (1 \leq i \leq M - 1) \\
\displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{i+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(i) & (M \leq i \leq N - M + 1) \\
\displaystyle\sum_{j=i-M+1}^{N} \alpha_j B_{j,2M}(i) + \sum_{j=1}^{i+M-1-N} \alpha_j B_{j+N,2M}(i) & (N - M + 2 \leq i \leq N)
\end{cases}
$$

3-7 (2M-1) 次の周期スプライン補間関数

係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を未知数とする連立1次方程式の構成：一般の場合 (3/3)

$$
= \begin{cases}
\left[B_{1,2M}(i), \ldots, B_{i+M-1,2M}(i), 0, \ldots, 0, B_{i-M+1,2M}(i), \ldots, B_{0,2M}(i)\right]\boldsymbol{\alpha} & (1 \le i \le M-1) \quad (*\,1) \\
\left[0, \ldots, 0, B_{i-M+1,2M}(i), \ldots, B_{i+M-1,2M}(i), 0, \ldots, 0\right]\boldsymbol{\alpha} & (M \le i \le N-M+1) \quad (*\,2) \\
\left[B_{N+1,2M}(i), \ldots, B_{i+M-1,2M}(i), 0, \ldots, 0, B_{i-M+1,2M}(i), \ldots, B_{N,2M}(i)\right]\boldsymbol{\alpha} & (N-M+2 \le i \le N) \quad (*\,3)
\end{cases}
$$

$$
(*\,1) \quad (1 \le i \le M-1) \quad \Rightarrow \quad (A)_{ij} = \begin{cases} B_{j,2M}(i) & (1 \le j \le i+M-1) \\ B_{j-N,2M}(i) & (i-M+1+N \le j \le N) \end{cases}
$$

$$
(*\,2) \quad (M \le i \le N-M+1) \quad \Rightarrow \quad (A)_{ij} = B_{j,2M}(i) \quad (i-M+1 \le j \le i+M-1)
$$

$$
(*\,3) \quad (N-M+2 \le i \le N) \quad \Rightarrow \quad (A)_{ij} = \begin{cases} B_{j+N,2M}(i) & (1 \le j \le i+M-1-N) \\ B_{j,2M}(i) & (i-M+1 \le j \le N) \end{cases}
$$

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

N 個のデータ点 $(1, v_1), (2, v_2), \dots, (N, v_N)$ を通るスプライン関数

$$s(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B_{j,2M}(x)$$

を生成する手順

1. データ点の x 座標 $u_1, \dots, u_N$ とB-スプライン $B_{j,2M}(x)$ から行列 A を作る.

$$A = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (A)_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

2. 連立1次方程式 $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{v}$ を解いて，係数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ を求める.

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

問1.6 (a)

行列 A を生成する関数

　　A = fun_genMatPeriod(N, M) （ファイル名 : fun_genMatPeriod.m）

を作成せよ.

関数 fun_genMatPeriod の引数

　　N: 　　データ点の数（スカラ）

　　M: 　　M（スカラ）

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

問1.6 (b)

周期スプライン補間係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を生成する関数

alpha = fun_interpCoeffPeriod(v, M)

（ファイル名 : fun_interpCoeffPeriod.m）

を作成し，さらに $y = s(x)$ のグラフを描画するスクリプト scr1_6.m を作成せよ.

関数 fun_interpCoeffPeriod の引数

v: データ点の y 座標（ベクトル）

M: M（スカラ）

alpha: 補間係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$（ベクトル）

3-7 (2*M*-1) 次の周期スプライン補間関数

問1.6 のヒント:
$s(x)$ を区間 $[1, N]$ でプロットする場合（N はデータ点数），$s(x)$ の計算式は j の範囲を制限して $s(x) = \sum_{j=-M+2}^{N+M-1} \alpha_j B_{j,2M}(x)$ とすればよい．ただし，j は区間 $1 \leq j \leq N$ 以外の値を取りうる，つまり，配列 alpha(1), …, alpha(N) の外側の要素（例えば alpha(0), alpha(-1), …) を参照することがあるので，この場合は $\alpha_j = \alpha_{j+kN}$ という性質を利用して，alpha(1), …, alpha(N) を参照すればよい．例えば，alpha(0) の値が必要な場合は，代わりに alpha(N) を利用する．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & = & \alpha_{-2N+1} & = & \alpha_{-N+1} & = & \alpha_1 & = & \alpha_{N+1} & = & \alpha_{2N+1} & = & \cdots \\
\cdots & = & \alpha_{-2N+2} & = & \alpha_{-N+2} & = & \alpha_2 & = & \alpha_{N+2} & = & \alpha_{2N+2} & = & \cdots \\
 & = & & & & & \vdots & & & & & & \\
\cdots & = & \alpha_{-N} & = & \alpha_0 & = & \alpha_N & = & \alpha_{2N} & = & \alpha_{3N} & = & \cdots
\end{array}
$$

4-2 (*K*-1) 次のパラメトリックスプライン

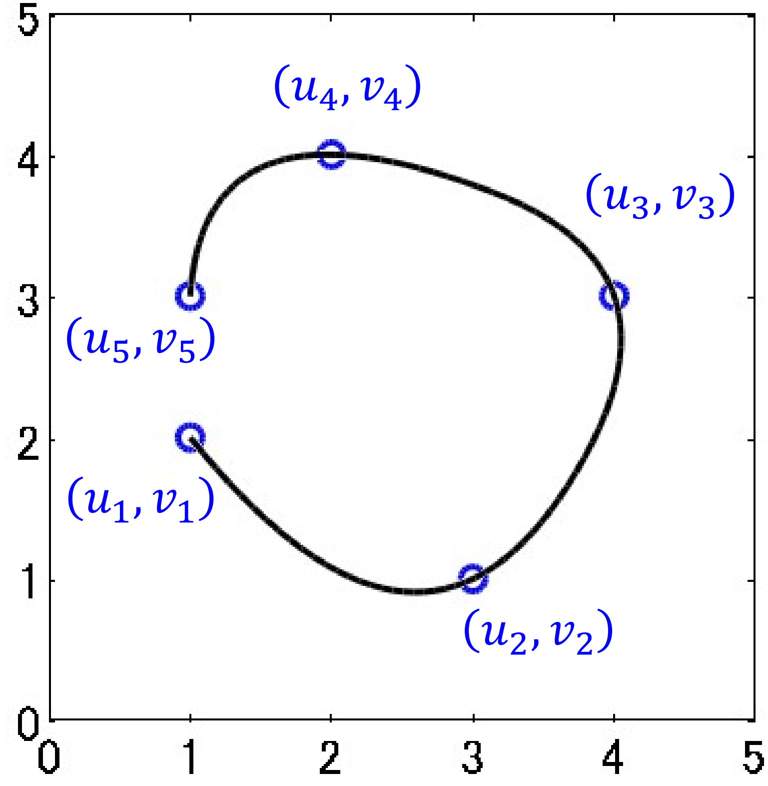
N 個のデータ点

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_N, v_N)$$

を通る $(K-1)$ 次のパラメトリックスプライン:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_{j,K}(t)$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j B_{j,K}(t)$$



4-2 (*K*-1) 次のパラメトリックスプライン

N 個のデータ点におけるパラメータの例:

$$t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_N = N$$

1. $(N+K)$ 個の節点の生成:

$$q_1 = \cdots = q_K = 1$$
$$q_{i+K} = i + K/2$$
$$q_{N+1} = \cdots = q_{N+K} = N + \varepsilon$$

2. 係数行列 A の生成:

$$A = \begin{bmatrix} B_{1,K}(t_1) & \cdots & B_{N,K}(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,K}(t_N) & \cdots & B_{N,K}(t_N) \end{bmatrix}$$

3. 2つの連立1次方程式 $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{u}$ と $A\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}$ を解く

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

4-2 (*K-1*) 次のパラメトリックスプライン

問1.7

N 個のデータ点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$ からパラメトリックスプライン補間係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, $\beta_1, \dots, \beta_N$ を生成する関数

[alpha, beta, q] = fun_interpCoeffParam(u, v, K)

（ファイル名 : fun_interpCoeffParam.m）

を作成し，さらに点 $\big(x(t), y(t)\big)$ の軌跡を描画するスクリプト scr1_7.m を作成せよ.

関数 fun_interpCoeffParam の引数

- u:　データ点の x 座標（ベクトル）
- v:　データ点の y 座標（ベクトル）
- K:　K（スカラ）
- alpha, beta: 補間係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, $\beta_1, \dots, \beta_N$（ベクトル）
- q:　節点 $q_1, \dots, q_{N+K}$（ベクトル）

4-5 パラメトリック周期スプライン

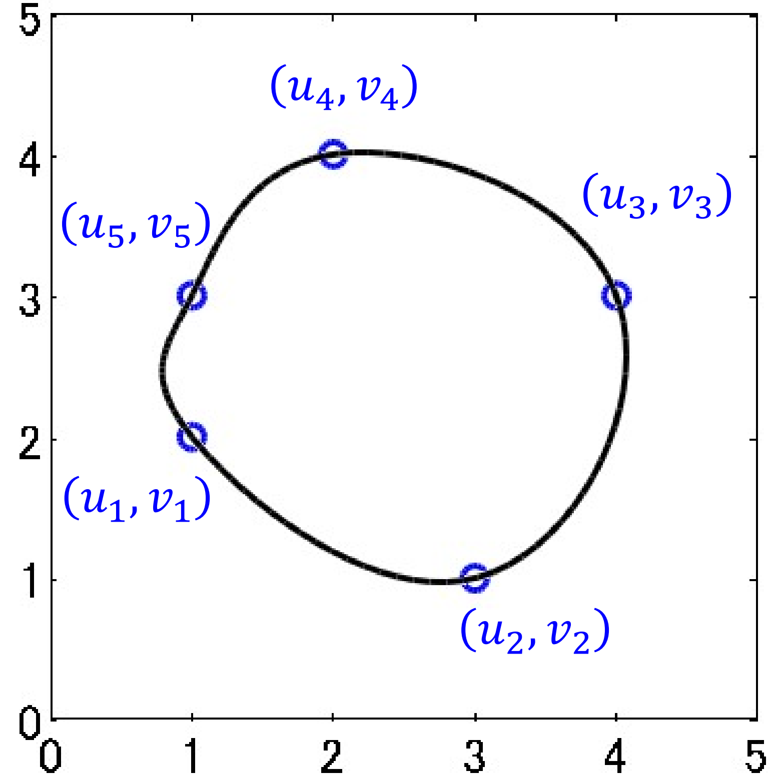
N 個のデータ点

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$$

を通る $(2M-1)$ 次のパラメトリック周期スプライン:

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j B_{j,2M}(t)$$

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j B_{j,2M}(t)$$



4-5 パラメトリック周期スプライン

問1.8

N 個のデータ点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_N, v_N)$ からパラメトリック周期スプライン補間係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_N$ を生成する関数

[alpha, beta] = fun_interpCoeffParamPeriod(u, v, M)

（ファイル名 : fun_interpCoeffParamPeriod.m）

を作成し，さらに点 $\big(x(t), y(t)\big)$ の軌跡を描画するスクリプト scr1_8.m を作成せよ.

関数 fun_interpCoeffParamPeriod の引数

u:　データ点の x 座標（ベクトル）

v:　データ点の y 座標（ベクトル）

M:　M（スカラ）

alpha, beta: 補間係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, $\beta_1, \ldots, \beta_N$（ベクトル）