ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS

Nombre: Stiv Quishpe

Asignatura: Métodos Numéricos

Fecha de entrega: 10/11/2024

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1

Resuelva los siguientes ejercicios, tome en cuenta que debe mostrar el desarrollo completo del ejercicio.

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.
   a. $p = \pi, p^* = \frac{22}{7}$
      - $p = \pi \approx 3.14159265$
      - $p^* = 22/7 \approx 3.14285714$
      - $Error_{absoluto} = |p - p^*| = |3.14159265 - 3.14285714| = 1.2645 \times 10^{-3} \approx 0.0012645$
      - $Error_{relativo} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{0.00126449}{3.14159265}\right| = 4.0245 \times 10^{-4} \approx 0.00040245$

   b. $p = \pi, p^* = 3.1416$
      - $p = \pi \approx 3.14159265$
      - $p^* = 3.1416$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |3.14159265 - 3.1416| = 7.35 \times 10^{-6} \approx 0.00000735$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{0.00000735}{3.14159265}\right| = 2.34 \times 10^{-6} \approx 0.00000234$

   c. $p = e, p^* = 2.718$
      - $p = e \approx 2.71828183$
      - $p^* = 2.718$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |2.71828183 - 2.718| = 2.8183 \times 10^{-4} \approx 0.00028183$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{0.00028183}{2.71828183}\right| = 1.037 \times 10^{-4} \approx 0.0001037$

   d. $p = \sqrt{2}, p^* = 1.414$
      - $p = \sqrt{2} \approx 1.41421356$
      - $p^* = 1.414$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |1.41421356 - 1.414| = 2.136 \times 10^{-4} \approx 0.0002136$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{0.0002136}{1.41421356}\right| = 1.51001 \times 10^{-4} \approx 0.00015101$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.
   a. $p = e^{10}, p^* = 22000$
      - $p = e^{10} \approx 22026.47$
      - $p^* = 22000$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |22026.47 - 22000| = 26.47$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{26.47}{22026.47}\right| = 1.202 \times 10^{-3} \approx 0.001202$

   b. $p = 10^{\pi}, p^* = 1400$
      - $p = 10^{\pi} \approx 1385.46$
      - $p^* = 1400$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |1385.46 - 1400| = 14.54$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{14.54}{1385.46}\right| = 0.010495$

   c. $p = 8!, p^* = 39900$
      - $p = 8! \approx 40320$
      - $p^* = 39900$
      - $Error_{abs} = |p - p^*| = |40320 - 39900| = 420$
      - $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{420}{40320}\right| = 0.010417$

   d. $p = 9!, p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

- $p = 9! \approx 362880$
- $p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9 \approx 359536.87$
- $Error_{abs} = |p - p^*| = |362880 - 359536.87| = 3343.13$
- $Error_{rel} = \frac{|p-p^*|}{|p|} = \left|\frac{3343.13}{362880}\right| = 9.2128 \times 10^{-3} \approx 0.0092128$

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.

   a. π

   $p = \pi \approx 3.14159265$
   $\left|\frac{p - p^*}{p}\right| \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \leq \frac{p - p^*}{p} \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \cdot p \leq p - p^* \leq 10^{-4} \cdot p$
   $p - 10^{-4} \cdot p \leq p^* \leq p + 10^{-4} \cdot p$
   $p \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq p \cdot (1 + 10^{-4})$
   $3.14159265 \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq 3.14159265 \cdot (1 + 10^{-4})$
   $\boldsymbol{Intervalo\ p^*} = [3.14128, 3.14191]$

   b. e

   $p = e \approx 2.71828183$
   $\left|\frac{p - p^*}{p}\right| \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \leq \frac{p - p^*}{p} \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \cdot p \leq p - p^* \leq 10^{-4} \cdot p$
   $p - 10^{-4} \cdot p \leq p^* \leq p + 10^{-4} \cdot p$
   $p \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq p \cdot (1 + 10^{-4})$
   $2.71828183 \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq 2.71828183 \cdot (1 + 10^{-4})$
   $\boldsymbol{Intervalo\ p^*} = [2.71801, 2.71855]$

   c. $\sqrt{2}$

   $p = \sqrt{2} \approx 1.41421356$
   $\left|\frac{p - p^*}{p}\right| \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \leq \frac{p - p^*}{p} \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \cdot p \leq p - p^* \leq 10^{-4} \cdot p$
   $p - 10^{-4} \cdot p \leq p^* \leq p + 10^{-4} \cdot p$
   $p \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq p \cdot (1 + 10^{-4})$
   $1.41421356 \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq 1.41421356 \cdot (1 + 10^{-4})$
   $\boldsymbol{Intervalo\ p^*} = [1.41407, 1.41435]$

   d. $\sqrt[3]{7}$

   $p = \sqrt[3]{7} \approx 1.91293118$
   $\left|\frac{p - p^*}{p}\right| \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \leq \frac{p - p^*}{p} \leq 10^{-4}$
   $-10^{-4} \cdot p \leq p - p^* \leq 10^{-4} \cdot p$
   $p - 10^{-4} \cdot p \leq p^* \leq p + 10^{-4} \cdot p$
   $p \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq p \cdot (1 + 10^{-4})$
   $1.91293118 \cdot (1 - 10^{-4}) \leq p^* \leq 1.91293118 \cdot (1 + 10^{-4})$
   $\boldsymbol{Intervalo\ p^*} = [1.91274, 1.91312]$

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{6}{7}}{2e-5.4}$

	Real	Aproximado
13/14	0.92857	0.929
6/7	0.85714	0.857
2e	5.4365	5.44
5.4	5.4	5.4

$$\frac{\frac{13}{14}-\frac{6}{7}}{2e-5.4} = \frac{0.929-0.857}{5.44-5.4} = \frac{0.072}{0.04} = 1.8 \rightarrow Aprox. \quad 1.9569 \rightarrow Real$$
$$Error_{abs} = |p-p^*| = |1.9569-1.8| = 0.1569$$
$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.1569}{1.9569}\right| = 0.0801778$$

b. $10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

	Real	Aproximado
10π	31.415	31.4
6e	16.309	16.3
3/61	0.049180	0.0492

$$-10\pi + 6e - \frac{3}{61} = -31.4 + 16.3 - 0.0492 = -15.1492 \rightarrow Aprox. \quad -15.15518 \rightarrow Real$$
$$Error_{abs} = |p-p^*| = |-15.15518-(-15.1492)| = 5.98 \times 10^{-3} \approx 0.00589$$
$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.00589}{-15.15518}\right| = 3.9458 \times 10^{-4} \approx 0.00039458$$

c. $\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{11}\right)$

	Real	Aproximado
2/9	0.22222	0.222
9/11	0.81818	0.818

$$\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{11}\right) = 0.222 * 0.818 = 0.181596 \rightarrow Aprox. \quad 0.1818159596 \rightarrow Real$$
$$Error_{abs} = |p-p^*| = |0.1818159596-0.181596| = 2.1995 \times 10^{-4} \approx 0.00021995$$
$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.00022}{0.1818159596}\right| = 1.20979 \times 10^{-3} \approx 0.00120979$$

d. $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

	Real	Aproximado
$\sqrt{13}$	3.6055	3.61
$\sqrt{11}$	3.3166	3.32

$$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} = \frac{3.61+3.32}{3.61-3.32} = 23.89655172 \rightarrow Aprox. \quad 23.96019384 \rightarrow Real$$
$$Error_{abs} = |p-p^*| = |\,23.96019384-23.89655172| = 0.063642$$
$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.063642}{23.96019384}\right| = 2.6562 \times 10^{-3} \approx 0.0026562$$

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: $x - \left(\frac{1}{3}\right) x^3 + \left(\frac{1}{5}\right) x^5$. Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

$$p = \pi \approx 3.14159265$$

a. $4\left[arctan\left(\frac{1}{2}\right) + arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

$$Cálculo\ de\ \arctan\left(\frac{1}{2}\right): \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0.464583$$
$$Cálculo\ de\ \arctan\left(\frac{1}{3}\right): \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0.321811$$
$$p^* = 4(0.464583 + 0.321811) = 3.145576$$
$$Error_{abs} = |p-p^*| = |\,3.14159265 - 3.145576| = 3.9834 \times 10^{-3} \approx 0.0039834$$

$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.0039834}{3.14159265}\right| = 1.2679 \times 10^{-3} \approx 0.0012679$$

b. $16\ arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\ arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

$Cálculo\ de$ arctan $\left(\frac{1}{5}\right): \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^5 \approx 0.197397$

$Cálculo\ de$ arctan $\left(\frac{1}{239}\right): \frac{1}{239} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{239}\right)^5 \approx 4.1841 \times 10^{-3} \approx 0.0041841$

$p^* = 16(0.197397) - 4(0.0041841) = 3.1416156$

$Error_{abs} = |p - p^*| = |\ 3.14159265 - 3.1416156| = 2.295 \times 10^{-5} \approx 0.00002295$

$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.00002295}{3.14159265}\right| = 7.3052 \times 10^{-6} \approx 0.0000073052$$

6. El número e se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)$, donde $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ para $n \neq 0$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

$$p = e \approx 2.71828$$

a. $\sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$\sum_{n=0}^{5}\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$
$$= 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.04167 + 0.008333 \approx 2.7167$$

$Error_{abs} = |p - p^*| = |\ 2.71828 - 2.7167| = 1.58 \times 10^{-3} \approx 0.00158$

$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.00158}{2.71828}\right| = 5.8125 \times 10^{-4} \approx 0.00058125$$

b. $\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$
$$= 1 + 1 + 0.5 + 0.167 + 0.0417 + 0.00833 + 0.00139 + 0.000198 + 0.0000248 + 0.00000276 + 0.000000276 \approx 2.7186$$

$Error_{abs} = |p - p^*| = |\ 2.71828 - 2.7186| = 3.2 \times 10^{-4} \approx 0.00032$

$$Error_{rel} = \left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \left|\frac{0.00032}{2.71828}\right| = 1.1772 \times 10^{-4} \approx 0.00011772$$

7. Suponga que dos puntos $(x_0, y_0)\ y\ (x_1, y_1)$ se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}\ \ y\ \ x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

a. Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24) y\ (x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

Primera fórmula

$$x = \frac{(1.31)(5.76) - (1.93)(3.24)}{5.76 - 3.24} = \frac{7.5456 - 6.2532}{2.52} = \frac{1.2924}{2.52} \approx 0.5128571429$$

Segunda fórmula

$$x = 1.31 - \frac{(1.93 - 1.31)3.24}{5.76 - 3.24} = 1.31 - \frac{(0.62)3.24}{2.52} = 1.31 - \frac{2.0088}{2.52}$$

$x = 1.31 - 0.7971428571 \approx 0.5128571429$