ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS

Nombre: Stiv Quishpe

Asignatura: Métodos Numéricos

Fecha de entrega: 10/11/2024

CONJUNTO DE EJERCICIOS

1. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.

$$c = \frac{a+b}{2}$$

a. [0, 1]

- Iteración 1: a = 0, b = 1
  $c = \frac{0+1}{2} = 0.5$
  $f(c) = f(0.5) = (0.5)^3 - 7(0.5)^2 + 14(0.5) - 6 = -0.625$
  $como\ f(0.5) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.5,1]$
- Iteración 2: a = 0.5, b = 1
  $c = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$
  $f(c) = f(0.75) = (0.75)^3 - 7(0.75)^2 + 14(0.75) - 6 = 0.984$
  $como\ f(0.75) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.5, 0.75]$
- Iteración 3: a = 0.5, b = 0.75
  $c = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$
  $f(c) = f(0.625) = (0.625)^3 - 7(0.625)^2 + 14(0.625) - 6 = 0.2598$
  $como\ f(0.625) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.625, 0.75]$
- Iteración 4: a = 0.625, b = 0.75
  $c = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875$
  $f(c) = f(0.6875) = (0.6875)^3 - 7(0.6875)^2 + 14(0.6875) - 6 = 0.6414$
  $como\ f(0.6875) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.6875, 0.75]$
- Iteración 5: a = 0.6875, b = 0.75
  $c = \frac{0.6875+0.75}{2} = 0.719$
  $f(c) = f(0.719) = (0.719)^3 - 7(0.719)^2 + 14(0.719) - 6 = 0.819$
  $como\ f(0.719) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [\ 0.6875,0.719]$

b. [1, 3.2]

- Iteración 1: a = 1, b = 3.2
  $c = \frac{1+3.2}{2} = 2.1$
  $f(c) = f(2.1) = (2.1)^3 - 7(2.1)^2 + 14(2.1) - 6 = 1.791$
  $como\ f(2.1) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [2.1, 3.2]$
- Iteración 2: a = 2.1, b = 3.2
  $c = \frac{2.1+3.2}{2} = 2.65$
  $f(c) = f(2.65) = (2.65)^3 - 7(2.65)^2 + 14(2.65) - 6 = 0.55$
  $como\ f(2.5) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [2.1, 2.65]$
- Iteración 3: a = 2.1, b = 2.65
  $c = \frac{2.1+2.65}{2} = 2.375$
  $f(c) = f(2.375) = (2.375)^3 - 7(2.375)^2 + 14(2.375) - 6 = 1.16$
  $como\ f(2.375) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [2.1, 2.375]$
- Iteración 4: a = 2.1, b = 2.375

$$c = \frac{2.1 + 2.375}{2} = 2.2375$$
$$f(c) = f(2.2375) = (2.2375)^3 - 7(2.2375)^2 + 14(2.2375) - 6 = 1.482$$
$$como\ f(2.2375) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [2.1, 2.2375]$$

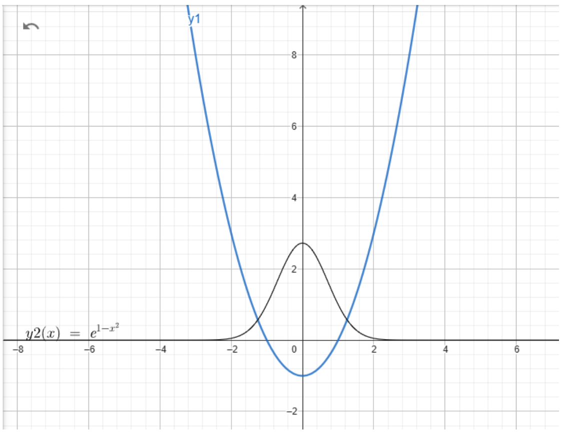
- Iteración 5: a = 2.1, b = 2.2375
$$c = \frac{2.1 + 2.2375}{2} = 2.16875$$
$$f(c) = f(2.16875) = (2.16875)^3 - 7(2.16875)^2 + 14(2.16875) - 6 = 1.6389$$
$$como\ f(2.16875) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [2.16875, 2.2375]$$

c. [3.2, 4]

- Iteración 1: a = 3.2, b = 4
$$c = \frac{3.2 + 4}{2} = 3.6$$
$$f(c) = f(3.2) = (3.2)^3 - 7(3.2)^2 + 14(3.2) - 6 = 0.336$$
$$como\ f(3.2) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [3.2, 3.6]$$
- Iteración 2: a = 3.2, b = 3.6
$$c = \frac{3.2 + 3.6}{2} = 3.4$$
$$f(c) = f(3.4) = (3.4)^3 - 7(3.4)^2 + 14(3.4) - 6 = -0.016$$
$$como\ f(3.4) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [3.2, 3.4]$$
- Iteración 3: a = 3.2, b = 3.4
$$c = \frac{3.2 + 3.4}{2} = 3.3$$
$$f(c) = f(3.3) = (3.3)^3 - 7(3.3)^2 + 14(3.3) - 6 = -0.093$$
$$como\ f(3.3) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [3.3, 3.4]$$
- Iteración 4: a = 3.3, b = 3.4
$$c = \frac{3.2 + 3.6}{2} = 3.35$$
$$f(c) = f(3.35) = (3.35)^3 - 7(3.35)^2 + 14(3.35) - 6 = -0.062$$
$$como\ f(3.35) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [3.3, 3.35]$$
- Iteración 5: a = 3.3, b = 3.4
$$c = \frac{3.3 + 3.4}{2} = 3.325$$
$$f(c) = f(3.325) = (3.325)^3 - 7(3.325)^2 + 14(3.325) - 6 = -0.079$$
$$como\ f(3.325) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [3.325, 3.3]$$

2.

a. Dibuje las gráficas para $y = x^2 - 1$ y $y = e^{1-x^2}$.



b. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-3} para un valor en $[-2,0]$ con $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$.

0.001

La función organizada quedaría:

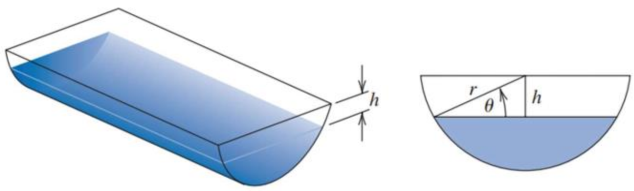
$$f(x) = x^2 - 1 - e^{1-x^2} = 0$$

- Iteración 1: a = -2, b = 0
$c = \frac{-2+0}{2} = -1$
$f(c) = f(-1) = (-1)^2 - 1 - e^{1-(-1)^2} = -1$
$como\ f(-1) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [-2, -1]$
- Iteración 2: a = -2, b = -1
$c = \frac{-2+(-1)}{2} = -1.5$
$f(c) = f(-1.5) = (-1.5)^2 - 1 - e^{1-(-1.5)^2} = 0.963$
$como\ f(-1.5) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [-1.5, -1]$
- Iteración 3: a = -1.5, b = -1
$c = \frac{-1.5+(-1)}{2} = -1.25$
$f(c) = f(-1.25) = (-1.25)^2 - 1 - e^{1-(-1.25)^2} = -0.00728$
$como\ f(-1.25) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [-1.5, -1.25]$
- Iteración 4: a = -1.5, b = -1.25
$c = \frac{-1.5+(-1.25)}{2} = -1.375$
$f(c) = f(-1.375) = (-1.375)^2 - 1 - e^{1-(-1.375)^2} = 0.48$
$como\ f(-1.375) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [-1.375, -1.25]$
- Iteración 5: a = -1.375, b = -1.25
$c = \frac{-1.375+(-1.25)}{2} = -1.3125$
$f(c) = f(-1.3125) = (-1.3125)^2 - 1 - e^{1-(-1.3125)^2} = 0.237$
$como\ f(-1.3125) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [-1.3125, -1.25]$
- Iteración 6: a = -1.3125, b = -1.25
$c = \frac{-1.3125+(-1.25)}{2} = -1.28125$
$f(c) = f(-1.28125) = (-128125)^2 - 1 - e^{1-(-1.28125)^2} = 0.115$
$como\ f(-1.28125) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [-1.28125, -1.25]$

EJERCICIOS APLICADOS

1. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r. (Consulte la figura adjunta) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2 arcsen\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$



Suponga que $L = 10\ cm, r = 1\ cm\ y\ V = 12.4\ cm^3$. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01 cm.

$$12.4 = 10\left[0.5\pi(1)^2 - (1)^2 arcsen\left(\frac{h}{1}\right) - h((1)^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

$$12.4 = 10\left[0.5\pi - arcsen(h) - h\sqrt{1-h^2}\right]$$
$$1.24 = 0.5\pi - arcsen(h) - h\sqrt{1-h^2}$$
$$f(h) = arcsen(h) + h\sqrt{1-h^2} - (0.5\pi - 1.24)$$

Método de bisección evaluado en el intervalo [0, 1]

- Iteración 1
$$h = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$
$$f(h) = arcsen(0.5) + 0.5\sqrt{1-(0.5)^2} - (0.5\pi - 1.24) = 30.10$$
$como\ f(0.5) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.5, 1]$
- Iteración 2 [0.5,1]
$$h = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$
$$f(h) = arcsen(0.75) + 0.75\sqrt{1-(0.75)^2} - (0.5\pi - 1.24) = 48.76$$
$como\ f(0.75) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.75, 1]$
- Iteración 3 [0.75,1]
$$h = \frac{0.75+1}{2} = 0.875$$
$$f(h) = arcsen(0.75) + 0.75\sqrt{1-(0.75)^2} - (0.5\pi - 1.24) = 48.76$$
$como\ f(0.75) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [0.75, 1]$

Código del ejercicio:

```
import math
def f(h):
return math.asin(h) + h * math.sqrt(1 - h**2) - (0.5 * math.pi - 1.24)

def metodoBiseccion (a, b, tolerancia):
if f(a) * f(b) >= 0:
    print("El método de bisección no puede aplicarse.")
    return None

  print(f"f(a) = {f(a)}, f(b) = {f(b)}")
  while (b - a) / 2.0 > tolerancia:
    # Calcular punto medio
    midpoint = (a + b) / 2.0
    if f(midpoint) == 0:
      return midpoint
    elif f(a) * f(midpoint) < 0:
      b = midpoint
    else:
      a = midpoint
  return (a + b) / 2.0

a = 0
b = 1
tolerancia = 0.01
h_approximada = metodoBiseccion (a, b, tolerancia)
if h_approximada is not None:
  print(f"La profundidad aproximada del agua es: {h_approximada:.4f} cm")
```

2. Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así com a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa *m* cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de *t* segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

Donde $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ y k representa el coeficiente de resistencia del aire en $\frac{Ns}{m}$. Suponga $s_0 = 300\ m, m = 0.25\ kg\ y\ k = 0.1\frac{Ns}{m}$. Encuentre, dentro de 0.01 *segundos*, el tiempo que tarda un cuarto de kg en golpear el piso.

$$s(t) = 300 - \frac{0.25 * 9.81}{0.1}t + \frac{(0.25)^2 * 9.81}{(0.1)^2}(1 - e^{-0.1t/0.25})$$

$$\frac{0.25 * 9.81}{0.1} = 24.525$$

$$\frac{(0.25)^2 * 9.81}{(0.1)^2} = 61.3125$$

$$s(t) = 300 - 24.525t + 61.3125(1 - e^{-0.1t/0.25})$$

- Iteración 1 [0, 30]

$$t = \frac{0 + 30}{2} = 15$$

$$s(t) = 300 - 24.525(15) + 61.3125\left(1 - e^{-\frac{0.1(15)}{0.25}}\right) = -6.71$$

$como\ s(15) < 0, la\ raíz\ está\ en\ [0, 15]$

- Iteración 2 [0, 15]

$$t = \frac{0 + 15}{2} = 7.5$$

$$s(t) = 300 - 24.525(15) + 61.3125\left(1 - e^{-\frac{0.1(15)}{0.25}}\right) = 174.32$$

$como\ s(7.5) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [7.5, 15]$

- Iteración 3 [7.5, 15]

$$t = \frac{7.5 + 15}{2} = 11.25$$

$$s(t) = 300 - 24.525(11.25) + 61.3125\left(1 - e^{-\frac{0.1(11.25)}{0.25}}\right) = 84.73$$

$como\ s(11.25) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [11.25, 15]$

- Iteración 4 [11.25, 15]

$$t = \frac{11.25 + 15}{2} = 13.125$$

$$s(t) = 300 - 24.525(13.125) + 61.3125\left(1 - e^{-\frac{0.1(13.125)}{0.25}}\right) = 39.1$$

$como\ s(13.125) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [13.125, 15]$

- Iteración 5 [13.125, 15]

$$t = \frac{13.125 + 15}{2} = 14.53315$$

$$s(t) = 300 - 24.525(14.0625) + 61.3125\left(1 - e^{-\frac{0.1(14.0625)}{0.25}}\right) = 16.20$$

$como\ s(14.0625) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [14.0625, 15]$

El tiempo aproximado que tarda la masa en golpear el piso se encuentra en el intervalo [14.0625, 15].

Código del ejercicio:

```
import math
def s(t):
    g = 9.81
    s0 = 300
    m = 0.25
    k = 0.1
    return s0 - ((m*g)/k)*t + ((m**2*g) / k**2) * (1 - math.e**(-k * t/m))

def metodoBiseccion(a, b, tolerancia):
    if s(a) * s(b) >= 0:
        print("El método de bisección no puede aplicarse.")
        return None
    while (b-a)/2.0 > tolerancia:
        midpoint = (a+b)/2.0
        if s(midpoint) == 0:
            return midpoint
        elif s(a) * s(midpoint) < 0:
            b = midpoint
        else:
            a = midpoint
    return (a+b)/2.0

a = 0
b = 30
tolerance = 0.01
t_final = metodoBiseccion(a, b, tolerance)
print(f"El tiempo aproximado para golpear el piso es: {t_final:.4f} segundos")
```

EJERCICIOS TEÓRICOS

1. Use el teorema 2.1 para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo [1, 2]. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

El teorema establece que el número mínimo n de iteraciones deber ser:

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}{\log\left(\frac{1}{L}\right)}$$

Por lo tanto, primero se necesita encontrar el valor mínimo en el intervalo de la función derivada.

$$f'^{(1)} = 3(1)^2 - 1 = 2$$
$$f'(2) = 3(2)^2 - 1 = 11$$

Sustitución de valores: a = 1, b = 2, $\epsilon = 10^{-4}$ y L = 2

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{2-1}{10^{-4}}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\approx n \geq \frac{\log(1000)}{\log(0.5)}$$

$$\approx n \geq -13.28 \rightarrow 14\ iteraciones$$

Ahora con el método de bisección se encuentra una aproximación

- Iteración 1 [1, 2]

$$c = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(c) = (1.5)^3 - 1.5 - 1 = 0.875$$
$$como\ f(1.5) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [1.5, 2]$$

- Iteración 2 [1.5, 2]

$$c = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75$$
$$f(c) = (1.75)^3 - 1.75 - 1 = 2.61$$
$$como\ f(1.75) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [1.75, 2]$$

- Iteración 3 [1.75, 2]

$$c = \frac{1.75 + 2}{2} = 1.875$$
$$f(c) = (1.875)^3 - 1.875 - 1 = 3.72$$
$$como\ f(1.875) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [1.875, 2]$$

- Iteración 3 [1.875, 2]

$$c = \frac{1.875 + 2}{2} = 1.9375$$
$$f(c) = (1.9375)^3 - 1.9375 - 1 = 4.334$$
$$como\ f(1.9375) > 0, la\ raíz\ está\ en\ [1.9375, 2]$$

Continua con el mismo procedimiento hasta alcanzar las 14 iteraciones.