

POLITECNICO DI TORINO

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale



**Politecnico
di Torino**

Meccanica del volo dell'elicottero

Analisi prestazionali e aeromeccaniche - Lynx MK7

Studente:

Matheus Henrique **PADILHA**

Matricola: **295953**

Professori:

Prof. Giorgio **GUGLIERI**

Prof.ssa. Elisa **CAPELLO**

Anno accademico 2021/2022

Premessa

Lo scopo di questo elaborato è fornire un riassunto delle caratteristiche prestazionali e aeromeccaniche dell'elicottero Westland Lynx MK7, elicottero utility bialbero e quadripala di fabbricazione inglese, entrato in produzione nel 1971 e tutt'ora in utilizzo.



Figura 1: Westland Lynx

Di seguito vengono riportate le caratteristiche geometriche, aerodinamiche e del sistema propulsivo del Lynx MK7, alle quali si fa riferimento durante le esercitazioni.

Dati del velivolo

- $n_b = 4$, il numero delle pale
- $M_A = 4313.7$ kg, la massa operativa dell'elicottero
- $n_e = 2$, il numero di motori presenti
- $x_{tr} = 7.660$ m, la distanza tra albero rotore principale e albero rotore di coda
- $h_R = 1.274$ m, la distanza mozzo-baricentro lungo l'asse del mozzo
- $l_R = 0$ m, distanza mozzo-baricentro lungo l'asse longitudinale della fusoliera
- $f_R = 0$ m, distanza mozzo-baricentro lungo l'asse laterale della fusoliera
- $l_{tR} = 7.660$ m, distanza rotore di coda-baricentro lungo l'asse longitudinale della fusoliera
- $h_{tR} = 1.146$ m, distanza rotore di coda-baricentro lungo l'asse del mozzo
- $P_{a,sl} = 850$ bhp, la potenza di un motore @sl
- $bhp_to_W = 745.7$, il fattore di conversione tra british horse power e watt
- $\eta = 1$, l'efficienza della trasmissione di potenza
- $C_{D0} = 0.008$, il coefficiente di resistenza del profilo delle pale
- $k = 1.16$, l'induced power factor
- $K = 4.7$, il coefficiente dovuto al volo in avanti
- $f = 1.26$ m², l'equivalent wetted area

Dati del rotore principale (main rotor):

- $c = 0.391$ m, la corda media aerodinamica della pala
- $R = 6.4$ m, il raggio della pala
- $\Omega = 35.63$ rad/s, la velocità angolare del rotore principale

Dati del rotore di coda (tail rotor):

- $R_{tr} = 1.106$ m, il raggio del rotore di coda
- $\sigma_{tr} = 0.208$, la solidità del rotore di coda (tabella)
- $\Omega_{tr} = 6\Omega$

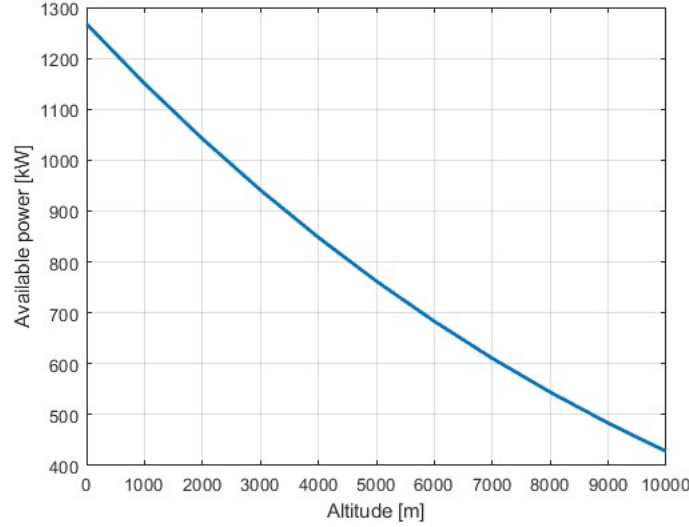


Figura 2: Potenza disponibile al variare della quota

1 Esercitazione 1A - Valutazione delle prestazioni e delle potenze disponibili e richieste di un elicottero al variare delle condizioni di volo

1.1 Parte A - Condizioni a punto fisso

1.1.1 Valutazione della potenza disponibile al variare della quota

Si vuole analizzare la potenza disponibile al variare della quota, da 0 a 10000 m. I dati necessari per l'esercitazione sono le caratteristiche geometriche del velivolo e dei rotori principali e di coda, le caratteristiche dell'impianto propulsivo e le caratteristiche aerodinamiche delle pale ($x_{tr}, n_b, M_A, P_{a,sl}, C_{D0}, k, K, f, c, R, \Omega, R_{tr}, \sigma_{tr}$) e possono essere tutti trovati in premessa.

- Ipotesi: non ci sono perdite di efficienza $\implies \eta = 1$

La potenza disponibile al variare della quota può essere formulata come:

$$P_a = \eta P_{a,sl} \frac{\rho}{\rho_{sl}} \quad \text{con } \rho = \rho_{sl} \left(\frac{T}{T_{sl}} \right)^{4.25} \quad \text{e la temperatura: } T = T_{sl} + ah$$

dove $\rho_{sl} = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $T_{sl} = 288.15 \text{ K}$ e $a = -6.5 \text{ K/km}$, il gradiente termico. La potenza disponibile, al variare della quota è diagrammata in Fig. 2.

Si osserva che l'andamento della potenza disponibile è fortemente influenzato dalle condizioni atmosferiche del volo principalmente dalla **quota di volo**. Tale andamento è fortemente non lineare (ci sono dei modelli di densità che lo possono approssimare come *esponenziale*) e presenta una riduzione del 50% della potenza disponibile a circa 7000 m di quota. Infatti, la **potenza disponibile** è uno dei parametri **più limitanti** nell'utilizzo del velivolo ad ala ruotante a quote elevate.

E' importante evidenziare anche l'indipendenza della potenza disponibile dal peso del velivolo e dalla sua velocità di volo (è la stessa sia per il volo a punto fisso o *hovering* che per il volo traslato)

1.1.2 Valutazione della potenza necessaria al variare della quota per il volo a punto fisso

Attraverso la teoria del disco attuatore (TDA), è possibile ottenere una prima stima delle potenze richieste in volo. Tale teoria deve essere corretta per considerare eventuali altre perdite legate al profilo delle pale, agli effetti viscosi e all'interazione pala-rotore-fusoliera. Infatti, con la TDA è possibile risalire alla sola potenza indotta (o potenza ideale, chiamata così proprio in quanto viene definita per il caso ideale non viscoso).

Si noti ancora che, per il nostro caso, non utilizziamo la potenza minima indotta P_i^* , bensì la potenza indotta **effettiva** P_i , che è la potenza minima corretta dal fattore k .

Le potenze che entrano in gioco per il volo a punto fisso sono:

- Potenza indotta - rotore principale, $P_i = kWv^*$
- Potenza di profilo - rotore principale, $P_o = \rho S(\Omega R)^3 C_{p0}$

E' la potenza richiesta per vincere le perdite viscosi dovute al **profilo delle pale**. Dove $C_{p0} = \frac{\sigma C_{d0}}{8}$, il coefficiente di potenza di profilo (in hover).

Per il rotore di coda invece, non si può assumere che la sua trazione sia da eguagliare il peso, bensì la coppia di reazione generata dal motore principale: $T_{tr} = \frac{P_{mr} R}{\Omega R x_{tr}}$. La potenza indotta e di profilo si ricavano come per il rotore principale.

- Potenza indotta - rotore di coda, $P_{i,tr} = k T_{tr} \sqrt{\frac{T_{tr}}{2\rho S_{tr}}}$
- Potenza di profilo - rotore di coda, $P_{o,tr} = \rho S_{tr}(\Omega R)_{tr}^3 \frac{\sigma_{tr} C_{d0,tr}}{8}$
Dove supponiamo $\Omega_{tr} \approx 6\Omega$, $C_{d0,tr} = C_{d0}$.

La potenza totale del rotore principale è data da: $P_{mr} = P_i + P_o$, mentre quella del rotore di coda è $P_{tr} = P_{i,tr} + P_{o,tr}$. In Fig. 3, si possono trovare le potenze richieste dai motori principale e di coda per il volo a punto fisso.

1.1.3 Valutazione della quota di tangenza

La quota di tangenza si trova annullando l'eccesso di potenza (definito dalla differenza tra la potenza disponibile e la potenza totale richiesta). Tale condizione è conosciuta come **condizione di tangenza (ceiling)** e definisce il limite di attuazione dell'elicottero in quota nel volo a punto fisso. Per l'elicottero Lynx MK7 nella configurazione studiata, si trova una quota di tangenza $h_c \approx 3800$ m.

Uno *snippet* dello script MATLAB utilizzato per trovarla è rappresentato qua sotto:

```
% Ceiling (quota di tangenza)
%to find the ceiling condition we shall refine the density profile
h=0:100:10000;
Pa=ne*Pa_sl*bhp_w*eta.*rho./rho_sl; %[W] available power for 2 engines
P_tot=P_mr+P_tr;
%to find ceiling, assume the point of inversion the one that has an excess power of at most 1 kW
dP=Pa-P_tot;
v=find(abs(dP)<1000,1,'first'); %finds the first value where the excess of power in magnitude is lower than 1
h_c=h(v); %[m] ceiling quote
```

Si osserva che mentre la potenza di profilo diminuisce con la quota, la potenza indotta tende a aumentare significativamente, quasi raddoppiando il suo contributo a 10000 m. Mentre al livello del mare la potenza indotta contribuisce

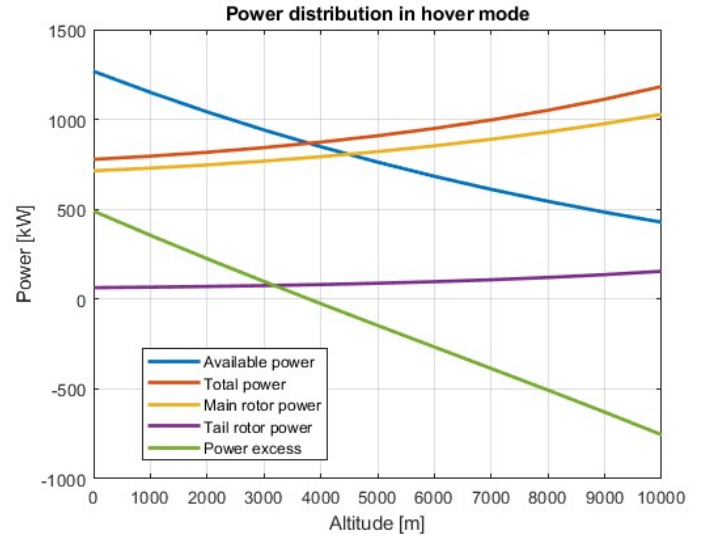
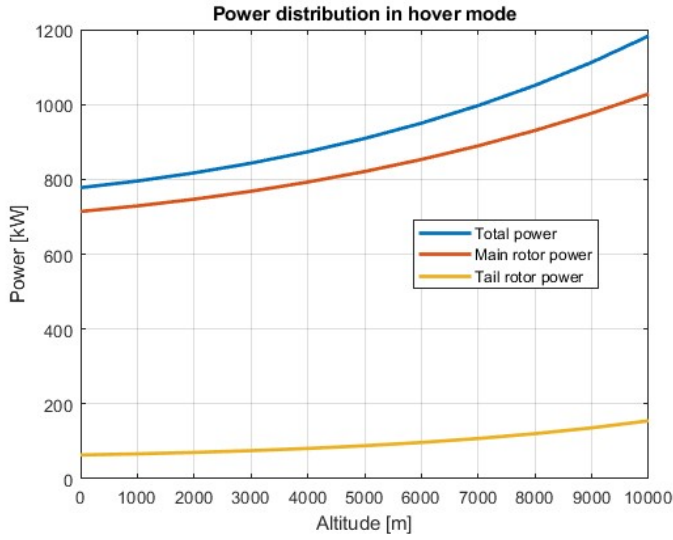


Figura 3: Distribuzione di potenza - volo a punto fisso

all'80% della potenza del rotore principale, a 10000 m essa arriva ad essere responsabile per il 90% della potenza richiesta. Infatti, la resistenza indotta è l'effetto più limitante per la condizione di tangenza di un elicottero.

h [m]	ρ [kg/m ³]	P_a [kW]	P_o [kW]	P_i [kW]	$P_{o,tr}$ [kW]	$P_{i,tr}$ [kW]
0	1.2250	1267.69	145.39	568.72	12.94	50.60
1000	1.1118	1150.54	131.96	596.97	11.75	54.77
2000	1.0068	1041.85	119.49	627.34	10.64	59.69
3000	0.9095	941.19	107.95	660.03	9.61	65.49
4000	0.8196	848.15	97.27	695.30	8.66	72.33
5000	0.7366	762.30	87.43	733.40	7.78	80.41
6000	0.6603	683.27	78.36	774.66	6.98	89.98
7000	0.5901	610.66	70.04	819.42	6.23	101.34
8000	0.5258	544.10	62.40	868.09	5.56	114.87
9000	0.4670	483.24	55.42	921.13	4.93	131.05
10000	0.4133	427.73	49.06	979.08	4.37	150.48

Tabella 1: Potenza disponibile e densità dell'aria al variare della quota

1.2 Parte B - Condizione di volo in avanti

Per il volo in avanti ulteriori perdite - che a loro volta si traducono in potenza richiesta aggiuntiva - dovranno essere considerate. Uno dei parametri più importanti da considerare è il **parametro di avanzamento** $\mu = \frac{V}{\Omega R}$, con V la velocità di avanzamento. In casi di funzionamento nominale, si ha che μ va da 0 (*hover*) a circa 0.5 (velocità massima di avanzamento). Per l'analisi prestazionale in *forward flight*, ipotizziamo il funzionamento a livello del mare (@sl, quota costante e peso operativo) con una velocità di avanzamento in avanti tra 0 e 120 m/s.

Le perdite di profilo, oltre ad essere funzione della compressibilità del flusso, saranno anche influenzate dal **reverse flow**. La potenza di profilo, già vista per la parte A, ora richiede che il coefficiente di potenza di profilo venga

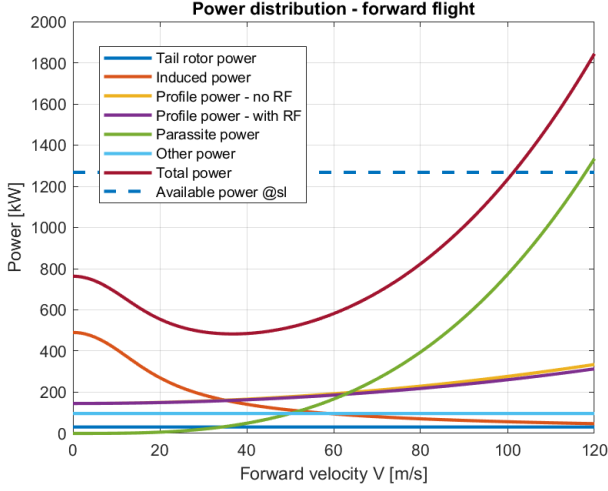


Figura 4: Distribuzione di potenza - volo in avanti

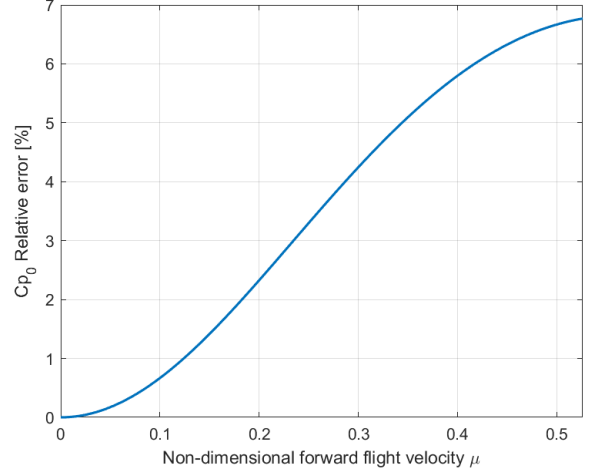


Figura 5: Effetto del reverse flow nella potenza di profilo

ulteriormente elaborato per tener conto del volo in avanti. Infatti, si ottengono due espressioni per C_{p0} , a seconda che si consideri il *reverse flow* o meno:

$$C_{p0} = \frac{\sigma C_{d0}}{8}(1 + K\mu^2) \quad , \text{ no reverse flow} \quad \quad C_{p0} = \frac{\sigma C_{d0}}{8}(1 + 4\mu^2 + 5/8\mu^4) \quad , \text{ with reverse flow}$$

Gli altri termini da aggiungere alla potenza di profilo sono: la **potenza indotta**, la **potenza parassita**, la **potenza del rotore di coda** e le **altre potenze**:

$$P_i = T \sqrt{\sqrt{\frac{V^4}{4} + v^{*4}} - \frac{V^2}{2}} \quad , \text{ la potenza indotta e} \quad P_p = \frac{1}{2} \rho f V^3 \quad , \text{ la potenza parassita}$$

$$P_{tr} = T_{tr} u_{0T} \quad \text{la potenza del rotore di coda,} \quad T_{tr} = \frac{kW}{\Omega x_{tr}} \sqrt{\frac{W}{2\rho A}}, \quad u_{0T} = \sqrt{\frac{T_{tr}}{A_{tr}}}$$

$$P_{oth} = 0.17kW \sqrt{\frac{W}{2\rho A}}, \quad \text{le altre potenze}$$

$f = k_f c_f k_w A$, v^* = velocità indotta in hover

Si noti che, nel volo avanzato, non si calcola la potenza di profilo per il rotore di coda. Possiamo definire la potenza totale richiesta nel volo in avanti: $P_{tot} = P_o + P_i + P_p + P_{tr} + P_{oth}$

In Fig. 4 è possibile osservare l'andamento delle potenze rispetto alla potenza disponibile.

Mentre le potenze del rotore di coda e "other" rimangono costanti con la velocità di avanzamento, possiamo osservare che la potenza parassita cresce in modo molto accentuato con la velocità, mentre la potenza indotta, che a basse velocità è la maggiore responsabile per la potenza richiesta, diminuisce all'aumentare di V . La potenza di profilo, sebbene in modo meno accentuato, cresce con la velocità. L'effetto congiunto di tutti questi elementi è la riduzione della potenza richiesta fino a $V = 38$ m/s per poi crescere nuovamente.

L'effetto del reverse flow, anche se piccolo rispetto alle altre potenze in gioco per il volo avanzato, non è trascurabile. La zona "limite" dove il reverse flow deve o meno essere considerato è tradizionalmente $= 0.2 \div 0.25$. In Fig. 5 è possibile osservare la differenza della potenza di profilo con o senza il reverse flow, dove è possibile osservare che

l'errore relativo di $C_{p0} = \frac{|C_{p0,reverse flow} - C_{p0,no reverse flow}|}{C_{p0,reverse flow}} * 100\%$ è **pressoché trascurabile per rapporti**

di avanzamento molto bassi, arrivando a valori di circa il 5-10% per rapporti di avanzamento più elevati. L'effetto, se osservato nella potenza totale richiesta dal rotore, si traduce in una differenza di circa 20 kW, l'equivalente a una differenza dell'1.2%.

2 Esercitazione 1B - Analisi prestazionale per il volo in avanti

2.1 Andamento della potenza al variare della velocità e del peso

Si sceglie di variare il peso dell'elicottero fino al 140% del peso operativo: $W = W_{op} \div 1.4W_{op}$, con degli scarti di 3000 N (circa 300 kg). I parametri del velivolo necessari rimangono gli stessi dell'esercitazione precedente.

Le potenze in gioco possono essere definite come in sezione 1.2 per il volo in avanti, trascurando il *reverse flow*. In Fig. 6 è possibile osservare l'andamento della potenza totale richiesta al variare del peso. Da questo grafico è possibile osservare che le diverse configurazioni di peso al decollo inficiano significativamente la potenza richiesta principalmente a bassi rapporti di avanzamento, mentre per valori di μ alti ($\mu \approx 0.4$ o $V \approx 90$ m/s), le curve tendono a convergere a valori simili di potenza richiesta. La curva tratteggiata definisce la potenza disponibile e l'intersezione tra essa e le curve parametrizzate con il peso, definiscono i rapporti di avanzamento massimi teorici per ciascuna configurazione, oltre i quali non è possibile mantenere il volo livellato.

L'andamento della potenza richiesta è particolarmente influenzato dalla potenza indotta e dalla potenza parassita. Mentre la prima assume un massimo in volo a punto fisso e diminuisce con l'aumentare del rapporto di avanzamento, la seconda ha un comportamento antagonista: partendo da 0 in hover fino ai valori massimo per valori di μ elevati. Tale comportamento fa sì che la **potenza totale richiesta diminuisca passando dal volo a punto fisso al volo avanzato, raggiunga il suo valore minimo per $\mu \approx 0.15 - 0.2$, e poi torni a crescere esponenzialmente con la potenza parassita**. E' importante però esplicitare che mentre la potenza indotta è proporzionale a $W^{3/2}$ e quindi varia con il peso, la potenza parassita è dipendente solo dalla velocità di volo e si mantiene quindi costante al variare del peso, così come la potenza di profilo. Le potenze "other" del rotore di coda sono legate alle potenze indotte in hover e quindi sono dipendenti dal peso ma non dalla velocità di avanzamento.

2.2 Andamento della potenza al variare della velocità e della quota

In questa sezione si analizza l'effetto della quota alla richiesta di potenza. Si ipotizza di variare la quota dalla condizione a livello del mare fino ad una quota di 5000 m, con scarti di 1000 m. Si considera inoltre il peso operativo del velivolo e la stessa variazione di rapporto di avanzamento delle analisi precedenti.

In Fig. 7 è possibile osservare l'andamento della potenza richiesta al variare della quota. Si osserva che, a velocità di avanzamento più basse, la variazione della quota inficia poco sulla potenza mentre a velocità più alte si ha una netta distinzione tra le curve, ossia la dipendenza dalla quota diventa più evidente.

L'andamento **prima decrescente e poi crescente della potenza** è influenzato maggiormente dalla potenza **indotta** che diminuisce con l'aumento della velocità e dalle potenze di **profilo e parassita** che aumentano con μ . Se si ragiona poi in termini di quota, possiamo osservare che la potenza di profilo, così come la potenza parassita, è direttamente proporzionale alla densità dell'aria e dovrà diminuire con l'aumento della quota. La potenza indotta invece segue un andamento inversamente proporzionale alla radice quadra della densità e allora osserverà un aumento (meno marcato) con la quota. Inoltre, l'analisi dell'andamento delle potenze permette concludere che mentre le potenze indotta e di profilo variano in modo meno marcato con la quota, ossia le curve sono abbastanza vicine tra di loro, la **potenza parassita** vede il suo andamento sempre più **dipendente dalla quota all'aumentare del rapporto di avanzamento**. Essendo essa significativa per μ elevati, il suo comportamento viene poi osservato anche nella potenza totale, con una maggiore dipendenza della quota all'aumentare della velocità. Le potenze del rotore di coda e le potenze aggiuntive ("other") sono invarianti con la velocità ma aumentano con l'aumentare della

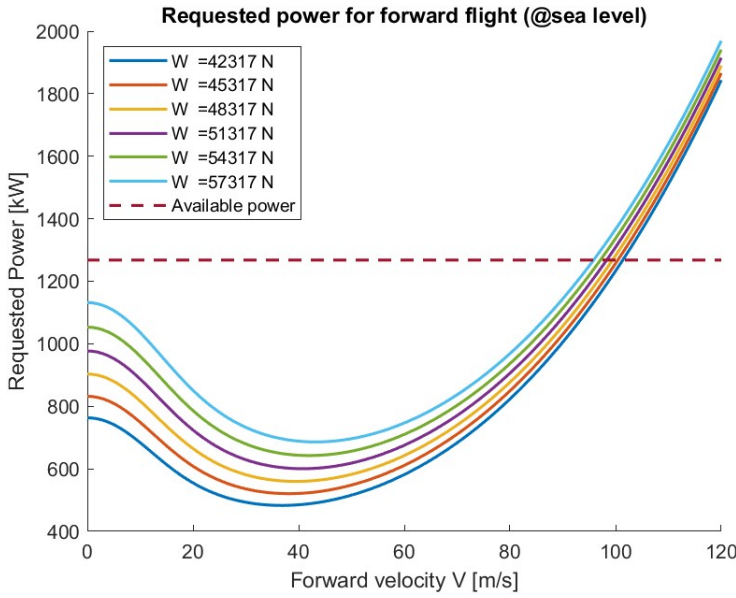


Figura 6: Potenza richiesta per il volo in avanti al variare del peso @sea level

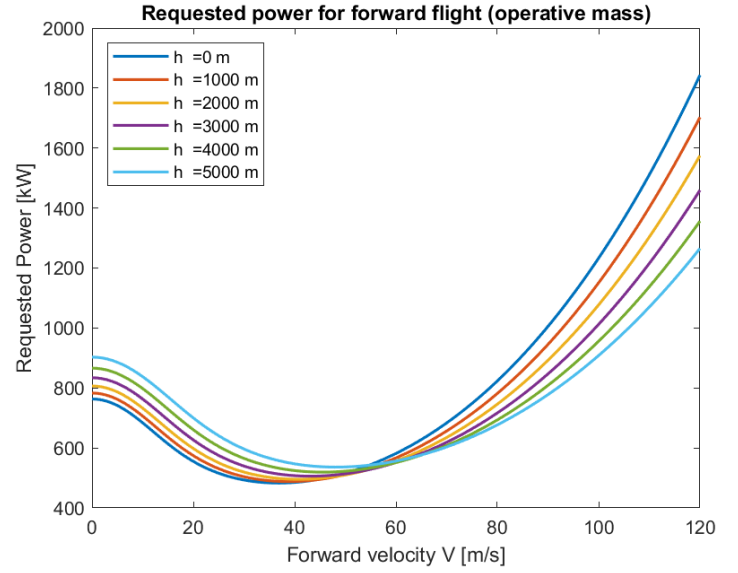


Figura 7: Potenza richiesta al variare della quota con il peso operativo

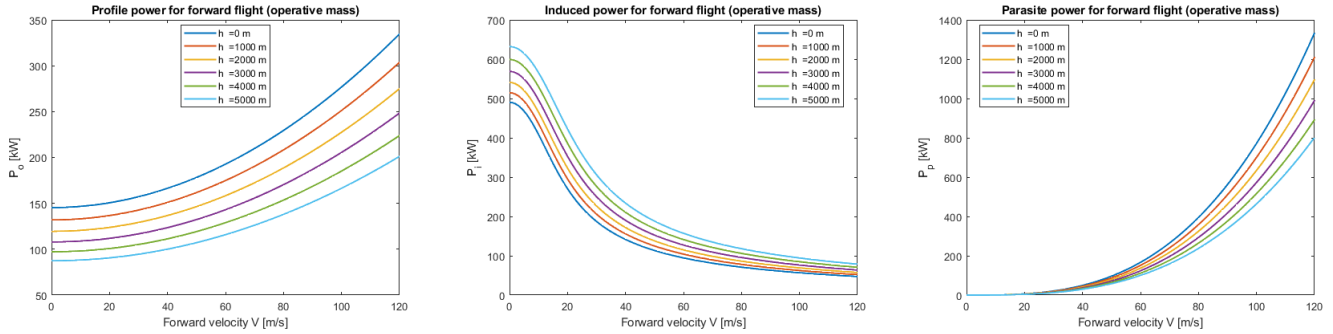


Figura 8: Andamento delle potenze di profilo (a sinistra), indotta (centro) e parassita (a destra)

quota.

Si verifica inoltre una **zona d'inversione dell'andamento della potenza** a circa 50-60 m/s ($\mu \approx 0.2 - 0.26$). Essa viene chiamata "zona d'inversione" in quanto per valori di μ bassi, si ha che la potenza totale aumenta con la quota mentre per valori di μ alti (oltre la zona d'inversione), avviene l'opposto, con la potenza che diminuisce con la quota. Se si analizzano i **singoli contributi**, l'**inversione non si verifica per nessuno di loro**. Infatti, questo fenomeno è "**globale**" ed è dovuto all'unione dei diversi comportamenti delle potenze in gioco al variare dell'avanzamento e della quota. L'andamento delle potenze principali in gioco (P_o , P_i e P_p) per questa trattazione si trova in Fig. 8.

La zona d'inversione di potenza è di particolare interesse nello studio prestazionale dell'elicottero in quanto si verifica in corrispondenza della **velocità di potenza minima** $V_{P_{n,min}}$, una delle velocità caratteristiche per gli aeromobili.

2.3 Lift-to-Drag ratio L/D

Si valuta ora il rapporto portanza e resistenza aerodinamica sia per il rotore principale, sia per l'elicottero completo. Per farlo si considera il volo a livello del mare con lo stesso range di velocità di avanzamento utilizzato precedentemente.

Il rapporto L/D è associato all'efficienza dell'aeromobile e può essere valutato come:

$$\frac{L}{D} = \frac{WV}{\sum P} \quad (1)$$

Dove P sono le potenze in gioco. Per l'elicottero completo abbiamo che $(\sum P)_{elicottero} = P_o + P_i + P_p + P_{oth} + P_{tr}$, mentre per il rotore principali abbiamo che le uniche potenze in gioco sono le potenze di profilo e indotta $\implies (\sum P)_{mr} = P_o + P_i$.

L'andamento del Lift-to-Drag ratio per entrambi le trattazioni può essere osservato in Fig. 9. Si osserva che l'efficienza per il rotore principale ha un comportamento crescente al variare della velocità. Questo perché il termine al denominatore è crescente con la velocità mentre quello al denominatore è dato dall'effetto della potenza di profilo e indotta: mentre la prima tende a crescere con la velocità, la seconda tende a diminuire. All'inizio (a velocità più basse), la curva ha una pendenza maggiore e positiva ed è maggiormente influenzata dalla potenza indotta, che a quelle velocità è quella più significativa e che si riduce molto rapidamente per velocità basse. All'aumentare della velocità si osserva che la curva assume una pendenza più bassa ma sempre positiva, che viene spiegata dal fatto che a velocità maggiori la potenza indotta è sempre decrescente ma in minore intensità mentre quella di profilo tende ad aumentare e diventare significativa, ma non al punto d'invertire l'andamento della curva.

Analizzando ora l' L/D per il velivolo completo, si osserva che esso assume un andamento crescente all'inizio fino ad un massimo che si osserva a $L/D \approx 4.5$ per poi decrescere. Nuovamente l'andamento si spiega analizzando il comportamento di ciascuna delle potenze in gioco in separato e poi insieme e valutando i termini predominanti a ciascuna velocità. Si osserva che è la **potenza parassita a spiegare la riduzione del rapporto L/D ad alte velocità**, in quanto diventa sempre più importante e difficile da contrastare.

Infatti, l'**aumento della velocità è un bene e un male nell'elicottero** in quanto aumentare la velocità aumenta anche $L = WV$ ma allo stesso tempo contribuisce in modo espressivo all'aumento della P_p , che finisce per penalizzare le prestazioni del velivolo, spiegando la sempre presente problematica del volo avanzato nel velivolo ad ala rotante.

Al valore di efficienza massima $E_{max} = L/D|_{max} = 4.38$, si verifica la velocità di efficienza massima $V_{E_{max}} = 64$ m/s.

2.4 Rate of climb R/C

Per il rateo di salita si considera il velivolo @sea level, peso operativo e $V = 0 - 120$ m/s. Si può approssimare il rateo di salita come:

$$(R/C) = \frac{\Delta P}{W} = \frac{P_a - P_n}{W} \quad (2)$$

Dove P_a = potenza disponibile e P_n = potenza necessaria.

In Fig. 10 viene diagrammato il rateo di salita a livello mare. Al rateo di salita massimo viene associata la velocità di potenza minima, ossia la velocità che permette di avere il maggiore eccesso di potenza disponibile, utile per salire in quota. Si trova un $(R/C)_{max} = 18.55$ m/s ad una velocità $V_{P_{n,min}} = 37$ m/s.

Si osserva che fino alla velocità di potenza minima, un aumento di velocità di avanzamento porta a un aumento del rateo di salita, ossia a un aumento dell'eccesso di potenza disponibile. Per velocità maggiori di $V_{P_{n,min}}$, l'eccesso di potenza si riduce con l'aumento di velocità e, di conseguenza, si riduce anche il rateo di salita. Per $V > 101$ m/s il R/C diventa addirittura negativo, ossia non si ha un rateo di salita ma un rateo di discesa. Questo perché a queste velocità il velivolo non ha potenza sufficiente per mantenere né un volo un salita né un volo livellato.

2.5 Quota di tangenza e velocità di potenza minima per il volo in avanti

La quota di tangenza per il volo in avanti può essere individuata usando un algoritmo che implementi due cicli, uno per la variazione di quota e l'altro per la velocità, e che cerchi la condizione che fornisce sia un $\Delta P \approx 0$ ma anche che garantisca che tale condizione si raggiunga una volta sola al variare delle velocità, ossia che ci sia un punto di tangenza tra la potenza disponibile e quella richiesta. Di seguito viene riportato uno *snippet* dello *script* utilizzato:

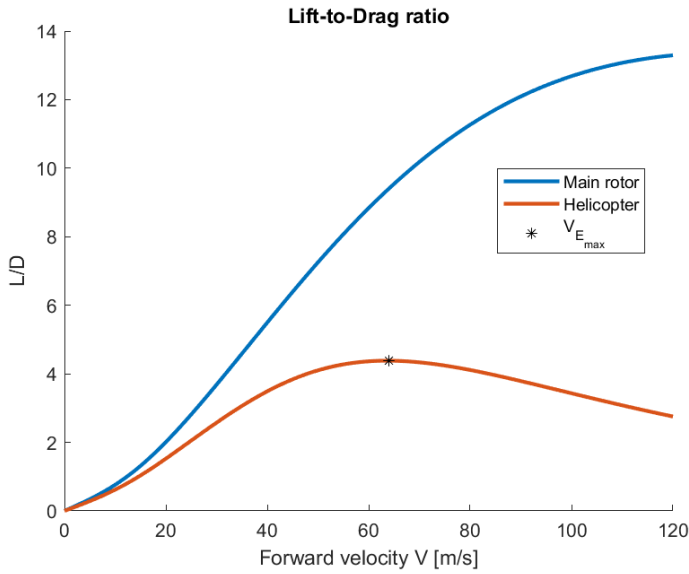


Figura 9: Lift-to-Drag ratio

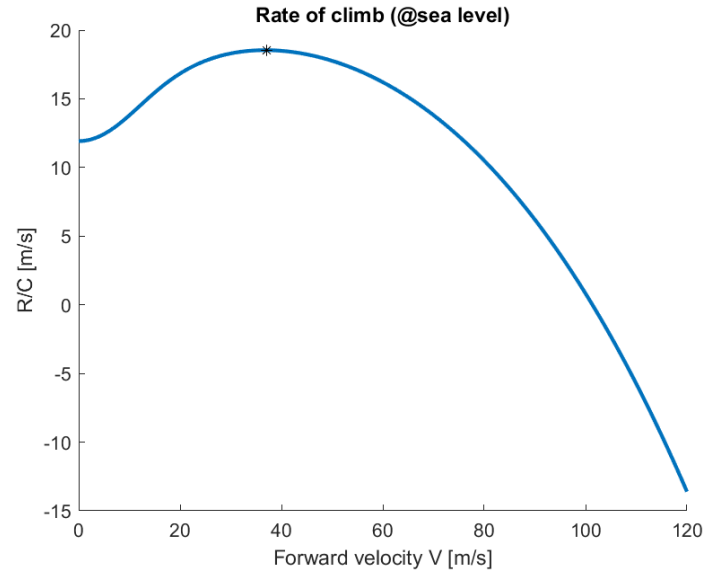


Figura 10: Rateo di salita (R/C) @sea level

```

%% Ceiling condition
%W = operative weight
h = 0:1:10000; %[m] altitude
V = 0:1:120;
for i=1:length(h)
    for j=1:length(V)
        [Pa, Po, Pi, P_p, P_tr, P_other, P_tot] = power_forwardflight(W, h(i), V(j), 1);
        if abs(Pa-P_tot)<70
            dP=abs(Pa-P_tot);
            h_c = h(i); % ceiling altitude
            V_c = V(j); % velocity at ceiling altitude
        end
    end
end
end
h_c
V_c

```

N.B.: la funzione *power_forwardflight* restituisce tutte le potenze in gioco per il peso, quota e velocità indicati. In Fig. 11 viene diagrammata le potenze richieste e disponibile alla condizione di tangenza, dov'è possibile osservare l'andamento menzionato prima, con un solo punto (o una piccola zona di punti) che soddisfa la condizione $\Delta P \approx 0$. Alla **quota di tangenza** $h_c = 7310$ m è possibile individuare inoltre la velocità di potenza minima come la velocità alla quale si identifica la condizione $\Delta P \approx 0 \Rightarrow V_{P_{n,min}} = 55$ m/s (@ceiling).

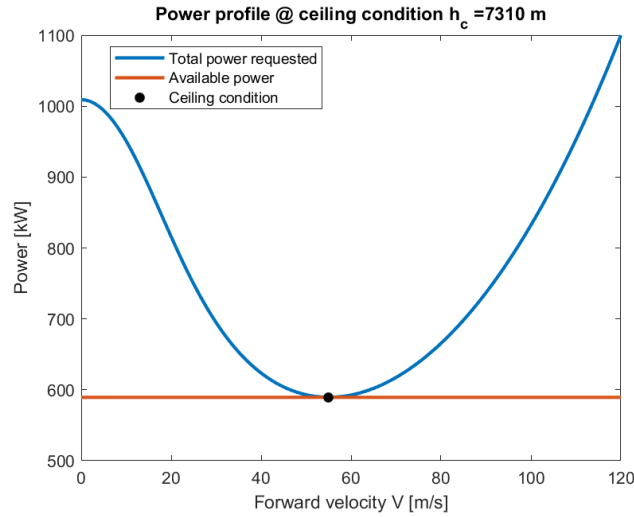


Figura 11: Andamento della potenza alla condizione di tangenza per il volo avanzato

3 Esercitazione 02 - Stati di equilibrio per il volo a punto fisso

Lo stato di equilibrio di un elicottero è dato da **8 parametri** che possono essere studiati separatamente:

- Piano longitudinale del rotore principale: $\theta_0, a_{1s} = a_1 - B_1, \Theta, \lambda$
- Piano latero-direzionale del rotore principale: $b_{1s} = b_1 + A_1, \Phi$
- Piano longitudinale del rotore di coda: θ_{0t}, λ_t

Questi parametri fondamentali sono dipendenti dalla quota (densità dell'aria) e dalle caratteristiche geometriche e aerodinamiche dei rotori.

L'angolo B_1 si riferisce al comando ciclico longitudinale e assume valori positivi in configurazione "*nose down*", ossia in picchiata. Volendo studiare l'equilibrio a punto fisso, è valido assumere che la trazione è tale da equilibrare il peso del velivolo ($T \approx W$), considerando in questo caso la massa operativa di 4313.7 kg.

Le equazioni di equilibrio vengono sviluppate rispetto al punto O (intersezione tra l'asse mozzo e l'asse fusoliera), il quale in generale non coincide con il baricentro del velivolo.

Utilizzando la **teoria delle piccole perturbazioni** si ricavano le equazioni di **equilibrio longitudinale**, dalle quali è possibile ricavare i parametri caratteristici di questo piano.

Il parametro di influsso λ per il volo in avanti è:

$$\lambda = \frac{v}{\Omega R} = \lambda_i - \mu \tan \alpha = \frac{1}{\Omega R} \sqrt{\frac{W}{2\rho S}} - \frac{V}{\Omega R} \sin \alpha = \sqrt{\frac{C_T}{2}} - \frac{V}{\Omega R} \sin \alpha \quad (3)$$

Con λ_i il **parametro di influsso per il volo a punto fisso**.

Dall'espressione della trazione, ricavata con la TEP, è possibile ricavare il **passo collettivo** θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{3}{2} \left(\lambda + \frac{4W}{n_b \rho a c \Omega^2 R^3} \right) \quad (4)$$

Dall'equazione di equilibrio orizzontale, trascurando il drag (per ipotesi) e assumendo $T = W$, si trova $H = W(B_1 - \Theta)$. Inoltre, dall'equazione di rotazione rispetto a O, considerando la distanza tra il mozzo e il baricentro lungo l'asse

longitudinale $lR = 0$ e ancora che il momento al mozzo sia nullo ($M_S = 0$), si ha che $T \cdot hR \cdot B_1 = H \cdot hR \implies B_1 = \frac{H}{T} = \frac{H}{W}$. Sostituendo l'angolo B_1 nell'equazione dell'equilibrio orizzontale, si trova che l'unico modo in cui essa può essere soddisfatta è con

$$\Theta = 0$$

N.B.: è valido se in condizione di velivolo trimmato.

Dall'equilibrio alla rotazione rispetto a O rispetto all'asse del disco e sapendo che $T = T_D \cos a_1 \approx T_D$ e ancora che $H = H_D + T_D \sin a_1 \approx H_D + T_D a_1$, assunto inoltre che $H_D \approx 0$, si ha $B_1 = a_1$ e allora

$$a_{1s} = a_1 - B_1 = 0$$

N.B.: $B_1 = a_1$ vuol dire che il pilota deve mantenere il ciclico in una posizione fissa. **L'elicottero non è intrinsecamente stabile e un comportamento staticamente stabile si ottiene soltanto a comandi bloccati.**

Per quanto riguarda **l'equilibrio latero-direzionale**, scrivendo le equazioni di equilibrio laterale e direzionale, oltre che il momento rispetto all'intersezione tra l'asse mozzo e l'asse laterale di fusoliera è possibile ricavare:

- **Angolo tra l'asse di controllo e l'asse del disco**, $b_{1s} = A_1 + b_1 = -\frac{T_t \cdot h_t R}{W \cdot h R}$
- **Angolo di rollio**, $\Phi = -\frac{T_t}{W} - b_{1s}$

E per il **rotore di coda**:

- **Parametro di inflow del rotore di coda**, $\lambda_t = \sqrt{\frac{T_t}{2\rho A_t \Omega_t^2 R_t^2}} = \sqrt{\frac{C_{Tt}}{2}}$
- **Passo collettivo del rotore di coda**, $\theta_{0t} = \frac{3}{2} \left(\lambda_t + \frac{4T_t}{n_{b,tr} \rho a c_{tr} \Omega_t^2 R_{tr}^3} \right)$

Con $T_t = \frac{Q}{l_t R}$ la trazione sviluppata dal rotore di coda, dove $Q = \frac{1}{8} n_b (c_d + \lambda a (\theta_0 - \lambda)) \rho c \Omega^2 R^4$ e $c_d = c_{d0} + k a^2 (\theta_0 - \lambda)^2$.

Inoltre, abbiamo $c_{tr} = \frac{\sigma_{tr} A_{tr}}{n_{b,tr} R_{tr}}$ la corda media aerodinamica del rotore di coda ($n_{b,tr} = 4$, il numero di pale del rotore di coda).

Per la valutazione degli stati di equilibrio consideriamo $a = 2\pi$, $c_{d0} = 1/100$ e $k = 1/90$, a differenza di quanto riportato in premessa. I risultati della trattazione possono essere osservati in Tabella 2.

Piano longitudinale - main rotor				Piano latero-direzionale		Piano longitudinale - tail rotor	
λ	θ_0 [deg]	Θ [deg]	a_{1s} [deg]	b_{1s} [deg]	Φ [deg]	λ_t	θ_{0t} [deg]
0.0508	7.9979	0	0	-3.3900	-0.3786	0.0727	9.0319

Tabella 2: Stati di equilibrio per il volo a punto fisso - riassunto

Di particolare interesse è l'angolo di rollio Φ che assume un valore **negativo**. Quest'andamento che all'inizio può sembrare "anomalo" è, in realtà, necessario e può essere spiegato analizzando l'architettura del velivolo ad ala ruotante: l'utilizzo di una architettura a singolo rotore richiede la presenza di un rotore di coda per bilanciare la coppia di reazione. Il rotore di coda a sua volta non è allineato con l'asse longitudinale di fusoliera (baricentrico) e la trazione da esso generata genera come effetto secondario (e non desiderato) una coppia di rollio. Per contrastarla, il rotore principale si inclina, in questo caso di $\Phi \approx -0.38^\circ$, e utilizza una parte della trazione per **generare la coppia di rollio richiesta ad annullare il momento di rollio complessivo**.

4 Esercitazione 03 - Analisi della dinamica di flappeggio

Si vuole ricavare la dinamica del flappeggio nella forma massa-molla-smorzatore

$$\beta^{**} + c\beta^* + k\beta = F(t)$$

utilizzando due metodi diversi: il metodo del bilanciamento armonico e il metodo di Galerkin. Per farlo si ipotizza l'**elicottero a comandi bloccati** secondo la legge

$$\theta = \theta_0 + \theta_{1s} \sin \psi + \theta_{1c} \cos \psi$$

con i comandi dati dal pilota: $\theta_0 = 0.2$ rad, $\theta_{1s} = -0.1$ rad e $\theta_{1c} = 0.1$ rad e si vuole valutare la risposta di flappeggio considerando i diversi casi possibili.

Si suppone la velocità angolare Ω costante, le velocità di rollio e beccheggio allineate al sistema non ruotante e l'eccentricità delle cerniere trascurabile. Inoltre, si ipotizza anche che l'angolo di flappeggio β sia piccolo e che i momenti aerodinamici M_A e inerziali M_I siano mediamente uguali sul giro. Inoltre, le velocità angolari da considerare sono $p = 20$ rad/s e $q = 30$ rad/s.

Dalle equazioni di equilibrio scritte nel sistema rotante si osserva che la **dinamica di flappeggio non inficia in nessun modo sulla dinamica di passo** e di **brandeggio** (piccole perturbazioni). Ciò rende possibile la trattazione separata della dinamica di flappeggio.

Utilizzando la Teoria dell'Elemento di Pala (TEP) e ipotizzando che le velocità di rollio e di beccheggio abbiano delle variazioni modeste, tali da poter approssimare ($\dot{p} = \dot{q} = 0$), è possibile ricavare le accelerazioni della pala e il momento dovuto ai carichi inerziali $M_I = \Omega^2 I_b \left[2 \left(\frac{q}{\Omega} \right) \sin \psi - 2 \left(\frac{p}{\Omega} \right) \cos \psi + \beta^{**} + \beta \right]$, con $I_b = R^3 \int_0^1 m \chi^2 d\chi$, il momento d'inerzia della pala in flappeggio. Infine, ricordando che, per ipotesi, $M_A = M_I$, possiamo trovare:

$$\beta^{**} + \beta = \frac{M_A}{\Omega^2 I_b} - 2 \left(\frac{q}{\Omega} \right) \sin \psi + 2 \left(\frac{p}{\Omega} \right) \cos \psi \quad (5)$$

Dove il termine di smorzamento β^* è nascosto dentro il momento aerodinamico M_A . Infine, in forma espansa abbiamo:

$$\begin{aligned} \beta^{**} + \frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sin \psi \right) \beta^* + \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{4}{3} \mu \cos \psi + \mu^2 \sin(2\psi) \right) \right] \beta = \frac{\gamma}{8} \left[\left(1 + \frac{8}{3} \mu \sin \psi + 2\mu^2 \sin^2 \psi \right) \theta + \right. \\ \left. - \left(\frac{4}{3} + 2\mu \sin \psi \right) \lambda + \frac{q}{\Omega} \left(\cos \psi + \frac{2}{3} \mu \sin \psi \right) + \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sin \psi \right) \frac{p}{\Omega} \sin \psi \right] - 2 \left(\frac{q}{\Omega} \right) \sin \psi + 2 \left(\frac{p}{\Omega} \right) \cos \psi \end{aligned} \quad (6)$$

Con γ il numero di Lock, pari a 7.12.

4.1 Metodo del bilanciamento armonico

Il metodo del bilanciamento armonico consiste nella sostituzione delle armoniche fondamentali. Nel caso del moto di flappeggio, è possibile trovare una soluzione esatta utilizzando una rappresentazione del primo ordine per la dinamica:

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi$$

Metodo del bilanciamento armonico					
Caso	p [rad/s]	q [rad/s]	β_0 [deg]	β_{1c} [deg]	β_{1s} [deg]
1	0	0	6.5271	0.8965	4.0231
2	20	0	6.5937	0.3237	5.2424
3	0	30	6.5271	2.8272	4.8486
4	20	30	6.5937	2.2544	6.0679

Tabella 3: Dinamica di flappeggio con il metodo del bilanciamento armonico con armoniche di primo ordine

Sostituendo all'eq. (6) la legge armonica del primo ordine, trascurando i termini di ordine superiore e ricordando che la forzante è data dal comando $[\theta = \theta_0 + \theta_{1s} \sin \psi + \theta_{1c} \cos \psi]$, si trova:

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{8} \left[(1 + \mu^2) \theta_0 - \frac{4}{3} \lambda + \frac{4}{3} \mu \theta_{1s} + \frac{2}{3} \mu \frac{p}{\Omega} \right] \quad (7)$$

$$\beta_{1s} = -\frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{2}} \left(\frac{4}{3} \mu \beta_0 - \frac{q}{\Omega} - \frac{16}{\gamma} \frac{p}{\Omega} \right) + \theta_{1c} \quad (8)$$

$$\beta_{1c} = \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{2}} \left[-2\mu \left(\frac{4}{3} \theta_0 - \lambda \right) - \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) \theta_{1s} + \left(\frac{16}{\gamma} \frac{q}{\Omega} - \frac{p}{\Omega} \right) \right] \quad (9)$$

I risultati per la dinamica di flappeggio con il bilanciamento armonico sono individuati in Tabella 3.

4.2 Metodo di Galerkin

I metodi numerici vengono di solito utilizzati nei casi in cui non esista una soluzione chiusa in forma analitica. Uno di questi metodi è il metodo di Galerkin che utilizza le serie di Fourier (o metodo dei residui pesati) per approssimare le equazioni differenziali a delle equazioni algebriche. Si può pensare di approssimare il moto della pala come un moto periodico, il quale può essere espresso da una serie armonica di Fourier

$$\beta(\psi) \approx \beta_0 + \sum_{k=1}^n [\beta_{kc} \cos(k\psi) + \beta_{ks} \sin(k\psi)]$$

Per la dinamica di flappeggio, è possibile avere dei buoni risultati già con $n = 2$, ossia con una serie armonica del secondo ordine. In questo caso, la dinamica di flappeggio viene approssimata come:

$$\beta(\psi) \approx \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos(2\psi) + \beta_{2s} \sin(2\psi)$$

Il metodo di Galerkin consiste quindi nel trovare i coefficienti $\beta_0, \beta_{ks}, \beta_{kc}$ che rendano minimo il residuo. Sostituendo la soluzione approssimata in quella esatta, troviamo un'equazione del tipo:

$$\beta^{**} + X_c \beta^* + X_k \beta = L_\theta \theta - L_\lambda \lambda + L_q \frac{q}{\Omega} + L_p \frac{p}{\Omega} \quad (10)$$

I termini a destra sono le diverse **forzanti**, che dipendono dal comando (θ), dal parametro di inflow (λ) e dalle velocità di beccheggio (q) e di rollio (p). Definiamo inoltre $F(\beta, \beta^*, \beta^{**}, \psi) = \beta^{**} + X_c \beta^* + X_k \beta$ e $l(\psi) = L_\theta \theta - L_\lambda \lambda + L_q \frac{q}{\Omega} + L_p \frac{p}{\Omega}$, la soluzione approssimata è data da

$$F(\beta, \beta^*, \beta^{**}, \psi) - l(\psi) = E(c, \psi)$$

Metodo di Galerkin							
Caso	p [rad/s]	q [rad/s]	β_0 [deg]	β_{1c} [deg]	β_{1s} [deg]	β_{2c} [deg]	β_{2s} [deg]
1	0	0	6.5260	0.8877	3.9961	-0.2089	0.0643
2	20	0	6.5911	0.3037	5.2190	-0.1839	0.1469
3	0	30	6.5267	2.8242	4.8381	-0.0810	0.0217
4	20	30	6.5919	2.2402	6.0610	-0.0560	0.1043

Tabella 4: Dinamica di flappeggio con il metodo di Galerkin con armoniche di secondo ordine

con $c = \{\beta_0, \beta_{1s}, \beta_{1c}, \beta_{2s}, \beta_{2c}\}$. Utilizzando come base dello spazio delle soluzioni lineari

$$u = \{1, \cos \psi, \sin \psi, \cos(2\psi), \sin(2\psi)\}^T$$

il sistema da risolvere è

$$\int_0^{2\pi} [u_i \cdot E(c, \psi)] d\psi = 0 \quad i \in 1 : 5 \quad (11)$$

Che in notazione matriciale può essere scritto come:

$$\int_0^{2\pi} ([A]\{c\} - \{L\}) d\psi = 0 \quad (12)$$

I risultati della dinamica di flappeggio con il metodo di Galerkin sono individuati in Tabella 4.

Dai casi 1 e 3, è possibile osservare che la **velocità di beccheggio non influisce la conicità del rotore** β_0 , che cambia soltanto con il rollio. Si noti inoltre che, tale osservazione è esatta per il metodo del bilanciamento armonico mentre per il metodo di Galerkin è "quasi" esatta in quanto tra il caso 1 e il caso 3 la conicità cambia di un valore molto piccolo (e si ha la stessa cosa per l'effetto del rollio nei casi 2-4). Questo si verifica perché la soluzione attraverso il bilanciamento armonico del primo ordine è detta **esatta** mentre quella trovata con il metodo di Galerkin, che a sua volta è basato sulla minimizzazione dell'errore, fornisce sempre delle soluzioni approssimate.

Inoltre, la soluzione con il metodo di Galerkin mette in luce il **maggior contributo delle armoniche di primo ordine rispetto a quelle del secondo ordine**. Nel caso del flappeggio laterale (β_{ks}) si osserva che β_{1s} è due ordini di grandezza più grande rispetto a β_{2s} . Infatti, lo sviluppo di una **legge armonica del secondo ordine è più che sufficiente** per simulare la dinamica del flappeggio e un aumento nel numero di contributi (con l'aumentare degli ordini armonici) porterebbe a un **incremento di costo per il calcolo numerico senza un aumento giustificabile di precisione nella soluzione**.

Infine è possibile osservare che sebbene il coefficiente di flappeggio longitudinale del primo ordine (β_{1c}) sia positivo, il rispettivo termine di secondo ordine è sempre negativo ($\beta_{2c} < 0$).

Dal caso a punto fisso (1) al caso del rollio puro (2), è possibile osservare il funzionamento della meccanica dell'elicottero: la richiesta di un moto di rollio porta il rotore a dover inclinarsi lateralmente e il tutto si traduce in un aumento del **flappeggio laterale** β_{1s} , con una diminuzione di quello longitudinale e un aumento della conicità del rotore. Nel caso invece del beccheggio puro (3) si osserva l'effetto preponderante sul flappeggio longitudinale β_{1c} , con un lieve incremento del flappeggio laterale (effetto secondario). Nel caso 4 si ha sia il moto di rollio, sia il moto di beccheggio e si verifica un incremento in tutti gli angoli che compongono il moto di flappeggio.

5 Esercitazione 04 - Calcolo degli autovalori

La valutazione dei modi propri del velivolo ad ala rotante parte dallo studio delle derivate aerodinamiche. Per l'esercitazione 04, si scelgono 3 velocità di avanzamento: 0, 40 e 80 kt, per le quali le **derivate aerodinamiche**

Derivate aerodinamiche - Lynx MK7									
V [kts]	X_u	X_w	X_q	Z_u	Z_w	Z_q	M_u	M_w	M_q
0	-0.0199	0.0215	0.6674	0.0237	-0.3108	0.0134	0.0468	0.0055	-1.8954
40	-0.0146	0.0347	-0.5681	-0.1186	-0.6156	20.6855	0.0319	0.0212	-2.1033
80	-0.0322	0.0403	-0.2262	-0.0010	-0.8018	41.0936	0.0271	0.0288	-2.3350
V [kts]	Y_v	Y_p	Y_r	L'_v	L'_p	L'_r	N'_v	N'_p	N'_r
0	-0.0351	-0.6840	0.0995	-0.2715	-10.9759	-0.0203	-0.0137	-1.9367	-0.2743
40	-0.0915	0.5342	-20.3077	-0.1949	-10.7839	-0.1441	0.0316	-1.8857	-0.6860
80	-0.1535	0.2134	-40.7844	-0.1659	-10.5388	-0.2668	0.0662	-1.8331	-1.0840
V [kts]	X_v	X_p	X_r	Z_v	Z_p	Z_r	M_v	M_p	M_r
0	-0.0205	-0.1600	0.0000	-0.0028	-0.0054	0.0000	0.0588	0.4562	0.0000
40	-0.0083	-0.1321	0.0000	-0.0180	-0.2022	0.0000	0.0277	0.4210	0.0000
80	-0.0021	-0.1086	0.0000	-0.0194	-0.4512	0.0000	0.0104	0.4102	0.0000
V [kts]	Y_u	Y_w	Y_q	L'_u	L'_w	L'_q	N_u	N_w	N_q
0	0.0207	0.0002	-0.1609	0.3397	0.0236	-2.6449	0.0609	0.0089	-0.4766
40	0.0070	0.0184	-0.1303	-0.0255	0.3040	-2.1361	-0.0325	0.0314	-0.2522
80	0.0032	0.0143	-0.1287	-0.0371	0.2344	-1.9959	-0.0227	0.0025	-0.0877

Tabella 5: Derivate aerodinamiche - Lynx MK7

vengono **riportate in Tabella 5**.

L'analisi dei modi del elicottero va fatta a **comandi bloccati**, la quale si traduce in $\Delta B_1 = 0$.

Per trovare i modi propri, si può fare una prima trattazione a piani disaccoppiati (piano longitudinale e piano latero-direzionale) e poi la trattativa completa per analizzare come gli accoppiamenti inficiano i modi.

Il sistema lineare che caratterizza la dinamica del velivolo è dato da $\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{u}$, con \vec{X} = il vettore variabili di stato, A = la matrice di stato, B = la matrice di controllo e \vec{u} = il vettore delle variabili di controllo.

5.1 Trattazione a piani disaccoppiati

5.1.1 Piano longitudinale

L'equazione nello spazio degli stati per il piano longitudinale disaccoppiato diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & -g \cos \tau \\ Z_u & Z_w & Z_q + V & -g \sin \tau \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

N.B.: Siccome lavoriamo a comandi bloccati, consideriamo $\theta_0 = B_1 = 0$. Gli autovalori per il piano longitudinale vengono rappresentati in Tabella 6.

N.B.: le derivate sono scalate dalle caratteristiche di massa e d'inerzia.

Nel piano longitudinale si verificano 3 modi caratteristici: **Fugoida, Heave e Pitch**. Il **modo fugoida** viene rappresentato da $\lambda_{2,3}$. E' un modo **periodico** e leggermente instabile ($Re(\lambda) > 0$) che tende a destabilizzarsi con l'aumentare del rapporto di avanzamento ossia, la parte reale diventa sempre più positiva. Il **modo di Heave** è un modo aperiodico (autovalore reale), stabile a punto fisso e tende a diventare sempre più stabile con l'aumentare

Piano longitudinale			
V [kt]	0	40	80
λ_1	$-2.0240 + 0.0000i$	$-2.3937 + 0.0000i$	$-2.9167 + 0.0000i$
λ_2	$0.0556 + 0.4732i$	$0.0560 + 0.3901i$	$0.1054 + 0.3828i$
λ_3	$0.0556 - 0.4732i$	$0.0560 - 0.3901i$	$0.1054 - 0.3828i$
λ_4	$-0.3133 + 0.0000i$	$-0.4518 + 0.0000i$	$-0.4630 + 0.0000i$

Tabella 6: Autovalori del piano longitudinale (piani disaccoppiati)

della velocità e viene rappresentato da λ_4 . A sua volta, il **modo di Pitch** è un modo aperiodico, rappresentato da λ_1 , molto stabile (molto negativo) già a punto fisso ($\lambda \approx 2$). Con l'aumentare della velocità di avanzamento tende a diventare sempre più stabile.

In Fig. 12 è possibile osservare il comportamento del sistema longitudinale e i modi caratteristici. Si osservi che l'andamento del modo di **Heave** diventa sempre meno dipendente dalla velocità di avanzamento progressivamente che essa aumenta.

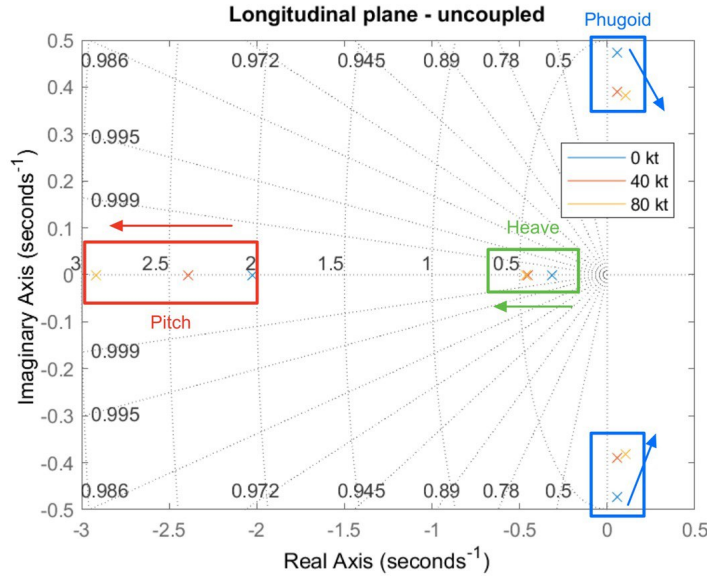


Figura 12: Poli del sistema longitudinale al variare della velocità di avanzamento

Si osserva che l'autovalore che definisce il **heave** λ_H assume **valori vicini alla derivata aerodinamica** Z_w , nel volo a punto fisso e lo stesso si verifica per il modo di **pitch** ($\lambda_P \approx M_q$), segno della maggior dipendenza di questi modi da queste particolari derivate aerodinamiche.

5.1.2 Piano latero-direzionale

L'equazione di stato del piano latero-direzionale è data da:

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_r - V & g \cos \tau_c & 0 \\ L'_v & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_v & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (14)$$

Gli autovalori della matrice di stato sono espressi in Tabella 7 e l'andamento dei modi al variare della velocità viene rappresentato in Fig. 13.

Piano latero-direzionale			
V [kt]	0	40	80
λ_1	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
λ_2	-11.0180 + 0.0000i	-10.8844 + 0.0000i	-10.7176 + 0.0000i
λ_3	0.0043 + 0.4894i	-0.2970 + 1.1895i	-0.5071 + 1.9507i
λ_4	0.0043 - 0.4894i	-0.2970 - 1.1895i	-0.5071 - 1.9507i
λ_5	-0.2758 + 0.0000i	-0.0829 + 0.0000i	-0.0445 + 0.0000i

Tabella 7: Autovalori del piano latero-direzionale (piani disaccoppiati)

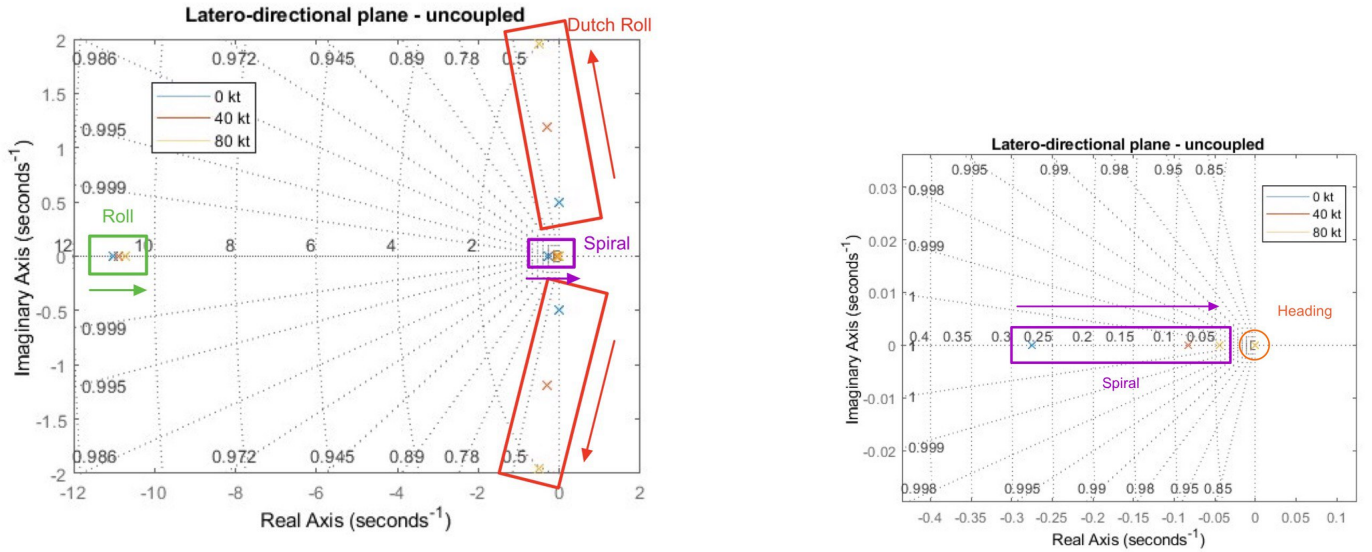


Figura 13: Poli del sistema latero-direzionale al variare della velocità di avanzamento (sx) e dettaglio del modo spirale e di heading (dx)

Piani accoppiati					
V [kt]	0	40	80	Mode	Piano di riferimento
λ_1	$0.0000 + 0.0000i$	$0.0000 + 0.0000i$	$0.0000 + 0.0000i$	<i>Heading</i>	Latero-direzionale
λ_2	$-10.8738 + 0.0000i$	$-10.7412 + 0.0000i$	$-10.5564 + 0.0000i$	<i>Roll</i>	Latero-direzionale
λ_3	$-2.2186 + 0.0000i$	$-2.6667 + 0.0000i$	$-3.1922 + 0.0000i$	<i>Pitch</i>	Longitudinale
λ_4	$0.2345 + 0.5463i$	$-0.3164 + 1.2213i$	$-0.5120 + 1.9606i$	<i>Dutch Roll</i>	Latero-direzionale
λ_5	$0.2345 - 0.5463i$	$-0.3164 - 1.2213i$	$-0.5120 - 1.9606i$	<i>Dutch Roll</i>	Latero-direzionale
λ_6	$-0.1509 + 0.5861i$	$0.0919 + 0.4099i$	$0.1378 + 0.3798i$	<i>Phugoid</i>	Longitudinale
λ_7	$-0.1509 - 0.5861i$	$0.0919 - 0.4099i$	$0.1378 - 0.3798i$	<i>Phugoid</i>	Longitudinale
λ_8	$-0.3130 + 0.0000i$	$-0.3886 + 0.0000i$	$-0.4045 + 0.0000i$	<i>Heave</i>	Longitudinale
λ_9	$-0.2733 + 0.0000i$	$-0.0493 + 0.0000i$	$-0.0437 + 0.0000i$	<i>Spiral</i>	Latero-direzionale

Tabella 8: Autovalori del sistema a piani accoppiati

Il sistema latero-direzionale ha 4 modi caratteristici: **Dutch Roll**, **Spiral mode**, **Roll mode** e **Heading mode**. Il modo di **dutch roll** è un moto periodico ed è individuato dalla coppia di autovalori complessa coniugata. E' un modo leggermente instabile a hover che tende a stabilizzarsi con l'aumentare della velocità di avanzamento. Il modo di **rollio** (roll mode) è un modo aperiodico altamente stabile e viene individuato dall'autovalore λ_2 , che ha parte reale negativa e grande in modulo. Si osserva che questo modo tende a destabilizzarsi con l'aumentare di V. Tuttavia, essendo altamente stabile ($\lambda \ll 1$), anche a velocità elevati si mantiene come un modo molto stabile.

Il modo **spirale** è anch'esso aperiodico e viene rappresentato da λ_5 , è un modo leggermente stabile che tende a destabilizzarsi con l'aumento del rapporto di avanzamento, per l'elicottero in studio. Infine, il modo di **heading** è rappresentato dall'autovalore λ_1 , sempre nullo, non influisce in nessun modo l'aeromeccanica del velivolo.

5.2 Trattazione a piani accoppiati

In Tabella 8 vengono rappresentati gli autovalori della matrice di stato se invece si considera la trattazione completa, con le derivate di accoppiamento tra i due piani. Notiamo che i modi sono 7, e sono esattamente gli stessi della trattazione a piani disaccoppiati, ma ora con dei valori leggermente diversi. Tale differenza è dovuta alle derivate di accoppiamento tra i due piani, ossia le derivate che rappresentano effetti in un piano dovuti ad un effetto o azione presente nell'altro e sono tutte le derivate che non sono state considerate nella trattazione a piani disaccoppiati. Seguendo le descrizioni dei modi descritti nella sezione precedente e analizzando l'ordine di grandezza degli autovalori, è possibile risalire senza grandi difficoltà ai modi caratteristici dell'elicottero nel sistema completo.

Si osservi che, nel caso del Lynx, la trattazione a piani disaccoppiati, oltre ad essere molto più semplice, ha anche un elevato grado di accuratezza in quanto i modi hanno, in linea di massima, lo stesso comportamento, con piccole variazioni degli autovalori e senza l'apparizione di modi diversi da quelli della trattazione disaccoppiata.

5.3 Derivate aerodinamiche

Per capire il comportamento aeromeccanico di un velivolo, sia esso ad ala fisso o ad ala rotante, è importante studiare le derivate aerodinamiche e come esse vengono influenzate dal volo. Per lo studio delle derivate aerodinamiche del Lynx, oltre ai valori riportati in questa sezione, si utilizzano come riferimento i grafici che ne riportano l'andamento sul libro *Helicopter Flight Dynamics* (Padfield, G. D.), in quanto permettono un'analisi più completa. Le derivate M_u e M_w vengono utilizzate per valutare la **stabilità statica longitudinale** e per averla è necessario che $M_u > 0$ e $M_w < 0$. Si osserva che la derivata M_u diminuisce (diventa meno positiva) con l'aumento della velocità principalmente

nel tratto 0-40 nodi, dopo il quale subisce variazioni meno significative e si mantiene sempre positiva. M_w invece parte da valori vicini allo zero (ma positivi) e tende a diventare sempre più positiva, ossia, è una derivata che **destabilizza il velivolo**.

Le derivate X_v, Y_u, L'_u, L'_w appartengono alle derivate di **"cross-coupling"**, ossia le derivate di accoppiamento. X_v e Y_u sono legate alle variazioni di forze dovute alle velocità e tendono ad essere **maggiormente influenti a basse velocità**, mentre per alte velocità tendono a non dipendere più dalla velocità e assumo valori molto più bassi, che le rendono "meno influenti" nel sistema. X_v assume valori negativi mentre Y_u valori positivi, per tutto il range considerato. L'_u e L'_w rappresentano il contributo al rollio dato dalle variazioni di u e v , rispettivamente. L'_u assume un valore positivo a hover e diminuisce con l'aumento della velocità. Già a 40 nodi assume valori negativi che tendono a stabilizzarsi a valori negativi con l'aumento di V , ossia, diventa **meno dipendente della velocità**. **Questa derivata è particolarmente influenzata dall'influsso non uniforme**. L'_w a sua volta assume valori sempre positivi ed è particolarmente crescente tra 0-20 nodi, tende a stabilizzarsi tra 20 e 40 nodi, dove assume il suo valore massimo, per poi scendere in modo meno ripido e raggiungere un asintoto a velocità maggiori di 80 nodi.

La derivata M_q rappresenta lo **smorzamento in beccheggio** dovuta alla velocità di beccheggio che, a sua volta, è **influenzata dalla risposta in flappeggio longitudinale e determina maggiormente il modo di beccheggio (pitch)**. Infatti, si osserva che a punto fisso $\lambda_{pitch} \approx M_q$. E' una derivata negativa (infatti è di smorzamento) e tende ad annullare l'effetto della velocità di beccheggio, garantendo la **stabilità al velivolo**. Tale derivata tende a diventare **sempre più negativa con l'aumento di V , rendendo il modo di pitch sempre più stabile**. N'_w a sua volta è associata al **Dutch Roll** e nel caso del Lynx ha un andamento crescente fino ai 20 nodi, che inoltre **destabilizza il modo di DR** (infatti in hover il dutch roll è instabile), per poi scendere fino a 80 nodi e poi ricrescere. In tutto il range si mantiene positiva ma diminuisce la sua influenza nel tratto 20-80 nodi, ciò che contribuisce a stabilizzare il modo di DR in questo intervallo di velocità. N'_q è la derivata che accoppia la velocità di beccheggio (piano longitudinale) al momento di imbardata (piano latero-direzionale). Assume dei valori negativi a punto fisso e cresce con la velocità, mantenendosi sempre negativa nell'intervallo 0-80 nodi, dove l'aumento della velocità la rende sempre meno influente.

L'_v e N'_v sono legate alla **stabilità latero-direzionale**. La prima rappresenta l'**effetto diedro** e assume valori negativi via via crescenti con l'avanzamento, riducendo la sua "efficacia". La seconda invece è legata alla **stabilità direzionale**, assume valori negativi a hover (che sono legati all'instabilità) e diventa stabile con l'aumento della velocità di avanzamento. E' inoltre legata alla frequenza di risposta del dutch roll ($\omega_n \approx \sqrt{V \cdot N'_v}$). N'_r a sua volta rappresenta lo **smorzamento in imbardata indotto dal rotore di coda**, è negativo e decrescente con V . **Nel volo a punto fisso è rappresentativo del modo spirale** con $\lambda_{spiral} \approx N'_r$. Con l'aumento della velocità anche l'impennaggio di coda diventa collaborante a questo termine smorzante. Infine, N'_p è legato all'effetto dell'*adverse yaw*, è sempre negativa con un andamento crescente, ossia diventa meno negativa con l'aumento della velocità V e spiega la **tendenza imbardante del velivolo durante una virata (rollio non nullo)**.

6 Esercitazione 5A - Risposta longitudinale nel dominio del tempo

Si vuole valutare la risposta nel tempo del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ dopo l'introduzione di un comando longitudinale $\Delta\theta_0 = 1$ cm e di un comando ciclico longitudinale $\Delta B_1 = 1$ cm, separatamente. Si considera il velivolo in volo a punto fisso, per il quale si è già analizzata la matrice di stato nell'esercitazione 04, i quali autovalori sono riportati in Tabella 9. Si considera il sistema disaccoppiato del piano longitudinale con

Piano longitudinale @hover			
λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
-2.0240 + 0.0000i	0.0556 + 0.4732i	0.0556 - 0.4732i	-0.3133 + 0.0000i

Tabella 9: Autovalori del piano longitudinale per il volo a punto fisso

Trattazione semplificata @hover		
λ_1	λ_2	λ_3
-2.0102 + 0.0000i	0.0474 + 0.4755i	0.0474 - 0.4755i

Tabella 10: Autovalori della trattazione approssimata del fugoide per il volo a punto fisso

$$A = \begin{bmatrix} -0.0199 & 0.0215 & 0.6674 & -9.81 & -0.0205 & -0.16 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0237 & -0.3108 & 0.0134 & 0 & -0.0028 & -0.0054 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0468 & 0.0055 & -1.8954 & 0 & 0.0588 & 0.4562 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0207 & 0.0002 & -0.1609 & 0 & -0.0351 & -0.684 & 0.0995 & 9.81 & 0 \\ 0.3397 & 0.0236 & -2.6449 & 0 & -0.2715 & -10.9759 & -0.0203 & 0 & 0 \\ 0.0609 & 0.0089 & -0.4766 & 0 & -0.0137 & -1.9367 & -0.2743 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6.9417 & -9.2860 \\ -93.9179 & -0.0020 \\ 0.9554 & 26.4011 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N.B.: Per l'elicottero in studio, le derivate aerodinamiche sono date rispetto a θ_{1s} piuttosto che B_1 e allora ove richiesto (comando), si dovranno fare gli accorgimenti necessari per tener conto di queste modifiche. Inoltre, tutte le derivate vengono esplicitate in unità di misure del sistema internazionale.

La **risposta del sistema dinamico a un comando pari a $\Delta\theta_0 = 1$ cm** può essere visualizzata in Fig. 14. Si osserva che tutte le variabili in output partono dalla condizione stabile a valore nullo e possiedono tutte un andamento instabile con l'amplificazione del disturbo nel tempo. Tale caratteristica è dovuta ad almeno un modo proprio dell'elicottero che è instabile e, nel caso in studio, è il modo **fugoide a destabilizzare** la dinamica dell'elicottero. Infatti, l'esistenza di un solo modo instabile rende tutta la dinamica instabile. Dalla Fig. 14 si può capire i rischi dell'instabilità dinamica alla sicurezza del velivolo, che si trova in una situazione dove la perturbazione diventa sempre più significativa e difficile da controllare. In questi casi, per rendere il velivolo stabile si fa necessario un sistema di controllo (aumento) della stabilità, che ha come obbiettivo principale quello di rendere tutti i modi del velivolo stabili. I poli del sistema longitudinale possono essere osservati in Fig. 12. Ricordando che il fugoide è rappresentato da $\lambda_{1,2}$, è possibile definire la frequenza del modo fugoide come $\omega_n = \sqrt{Re(\lambda_{ph})^2 + Im(\lambda_{ph})^2} \approx 0.476$ rad/s.

E' possibile inoltre fare una **trattazione semplificata del modo fugoide** se si considera che è possibile trascurare il modo di heave, i quali autovalori vengono riportati in Tabella 10. La rappresentazione grafica di entrambi le trattazioni è individuata in Fig. 16 (si noti che il metodo di heave non viene rappresentato per il sistema semplificato).

E' possibile anche in questo caso calcolare la frequenza del modo fugoide allo stesso modo, per il quale si trova $\omega_n|_{approx} \approx 0.478$. Lo smorzamento ("*damping*") in entrambi i casi può essere definito come $\zeta = -\frac{Re(\lambda_{ph})}{\omega_n}$, il quale fornisce come valori $\zeta|_{long} \approx -0.1167$ e $\zeta|_{approx} \approx -0.0992$. In entrambi i casi, siccome lo smorzamento è negativo,

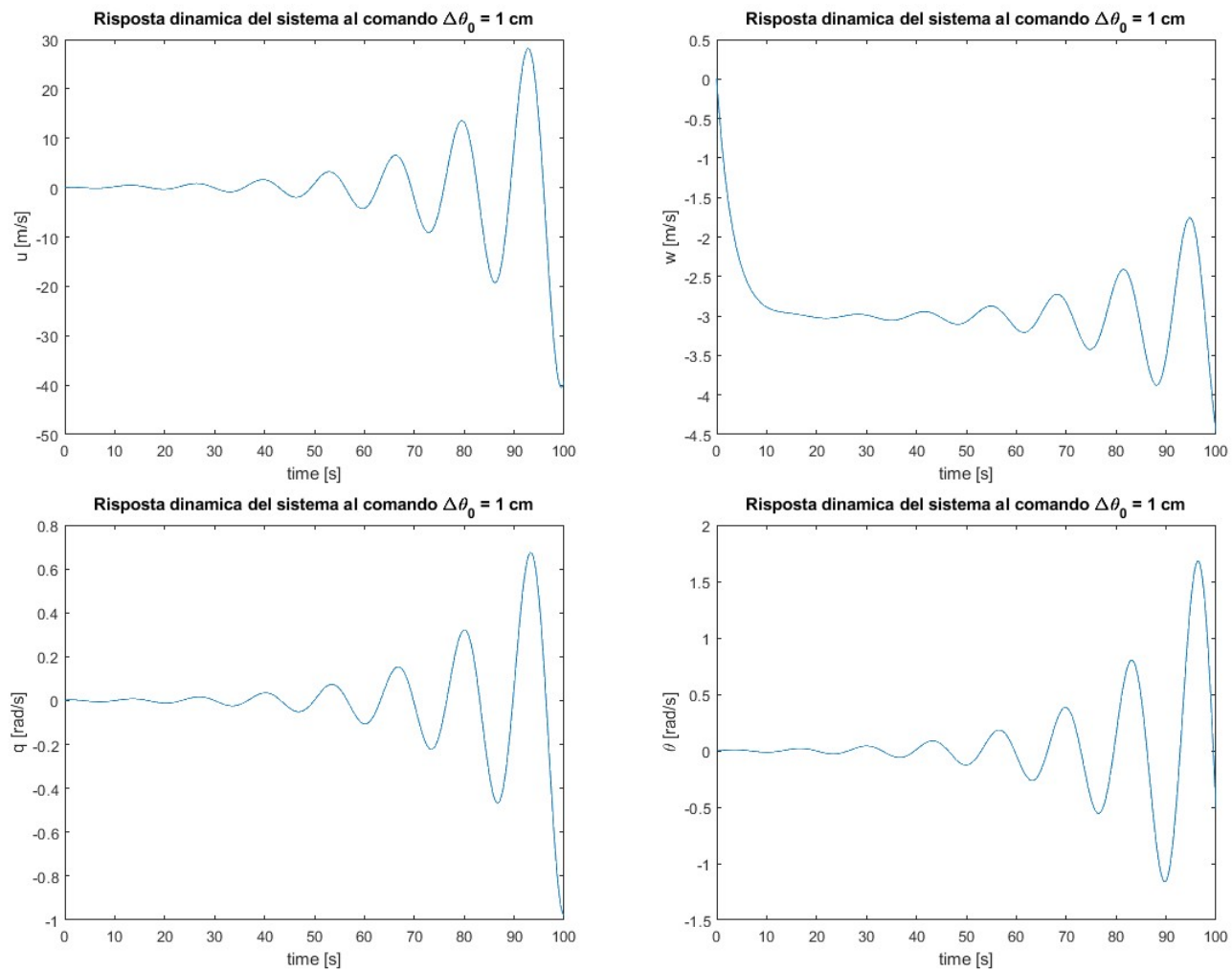


Figura 14: Risposta dinamica del sistema al comando collettivo $\Delta\theta_0$

abbiamo un modo instabile, che rende instabile il velivolo.

6.1 Risposta al comando

Volendo capire la risposta $w(t)$ al comando del velivolo, si introduce una variazione di comando collettivo a gradino pari a $\Delta\theta_0 = 0.01$ m. Considerando il problema del tipo "State-Space model" e semplificandolo con il modello tipo SISO (*Single Input Single Output*), è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento e analizzare la risposta del comando nel tempo. Per farlo si considera come *input* il comando $\Delta\theta_0$ oppure B_1 e come *output* la risposta della velocità verticale $w(t)$ oppure del beccheggio $q(t)$.

Inoltre, sapendo che la risposta dell'elicottero ai comandi è una funzione di primo ordine dipendente da una costante di smorzamento, un'effetto di inerzia e da una forza esterna (il comando), è possibile definire analiticamente la

risposta del velivolo come $w(t) = \frac{F_0}{c} \left[1 - \exp\left(-\frac{c}{m}t\right) \right]$

Dove $F_0/m = -Z_{\theta_0}\Delta\theta_0$, $c/m = Z_w$. Volendo valutare la risposta $q(t)$ al comando ciclico longitudinale, si introduce questa volta una variazione del ciclico longitudinale pari a $\Delta\theta_{1s} = -0.01$ m ($B_1 = -\theta_{1s}$). Per ottenere la soluzione numerica si procede in modo analogo al precedente: $q(t) = \frac{M_{B_1}}{M_q} B_1 (1 - \exp(M_q t))$

Con $M_{B_1} = -M_{\theta_{1s}}$, $B_1 = 0.01$ m.

In Fig. 15 vengono rappresentate le risposte dinamiche numeriche e analitiche per entrambi i casi considerati. Si noti che, in entrambi i casi la soluzione analitica assume la forma esponenziale caratteristica dei sistemi dinamici di primo ordine, per i quali è possibile definire inoltre la costante caratteristica di tempo: $\tau|_{w(t)} \approx -\frac{1}{Z_w} = 3.2175$ s e

$\tau|_{q(t)} \approx -\frac{1}{M_q} = 0.5276$ s ($\tau = t_{0.63}$).

La soluzione numerica in entrambi i casi è instabile e ciò è dovuto all'instabilità del modo di fugaide che destabilizza tutto l'elicottero. Per renderlo stabile, un **Stability Augmentation System SAS** si fa necessario.

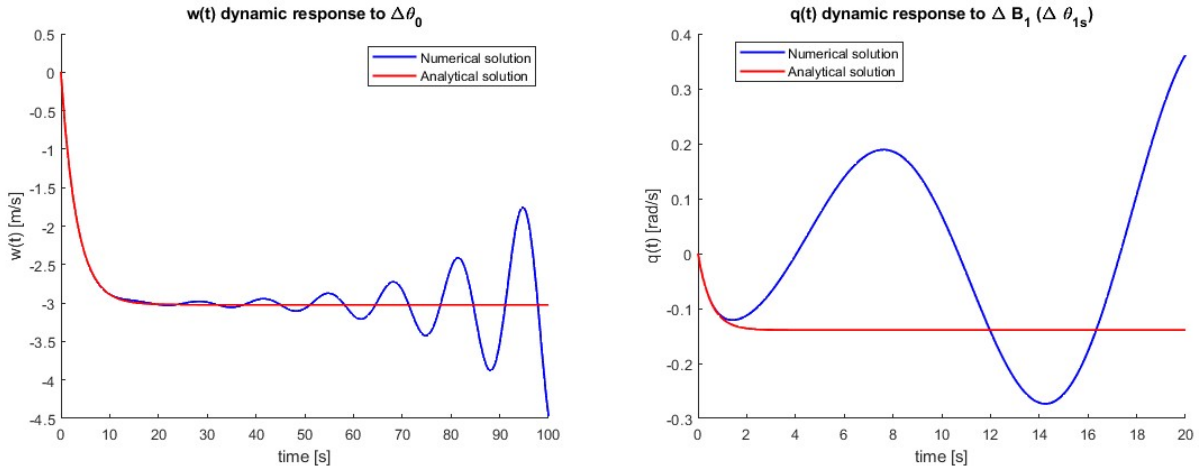


Figura 15: Risposta dinamica della velocità verticale al comando collettivo (sx) e della velocità di beccheggio al comando ciclico longitudinale (dx)

7 Esercitazione 5B - Risposta longitudinale nel dominio della frequenza

Utilizzando i dati delle esercitazioni 04 e 5A, si vuole determinare la risposta in frequenza del sistema. Essendo il sistema lineare, è possibile applicare la trasformata di Laplace al sistema, attraverso le funzioni di trasferimento per un sistema SISO. Uno dei parametri più importanti, che viene utilizzato dalle normative elicotteristiche è la funzione di trasferimento $\frac{\theta}{B_1}(\omega)$, che deve essere **stabile**. E' facile capire che è necessario stabilizzare il sistema e per farlo si introduce un controllore proporzionale che lavora sul ciclico longitudinale. Con un comando proporzionale $k_{24} = 0.1$ si ottengono già dei buoni risultati di stabilizzazione, ossia si ottiene una risposta non troppo smorzata (che risulterebbe in un comando *stiff*) e neanche che ci metta troppo a stabilizzarsi. Infatti, con il sistema stabilizzato si ottiene uno smorzamento $\zeta = 0.5647$.

In Fig. 17 è possibile osservare la risposta di θ al gradino ΔB_1 e in Tabella 11 vengono riportati gli autovalori del sistema stabilizzato. Questa risposta può essere inoltre visualizzata nel dominio della frequenza utilizzando il

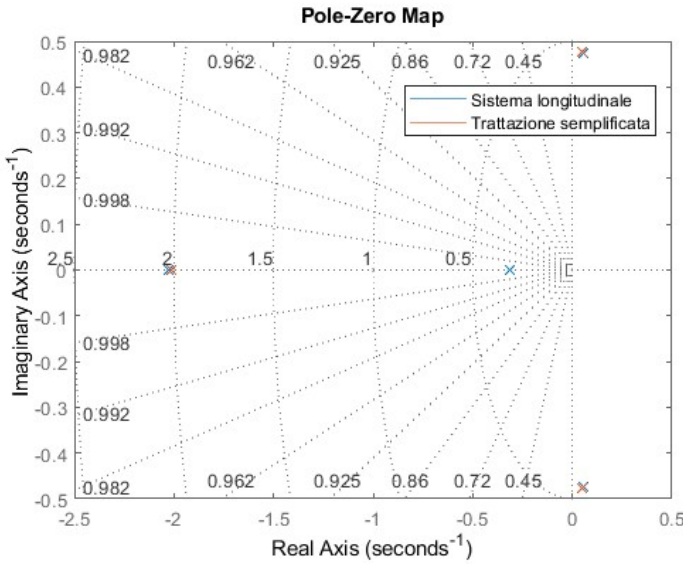


Figura 16: Poli della trattazione separata (longitudinale) e approssimata del modo fugoide per il volo a punto fisso

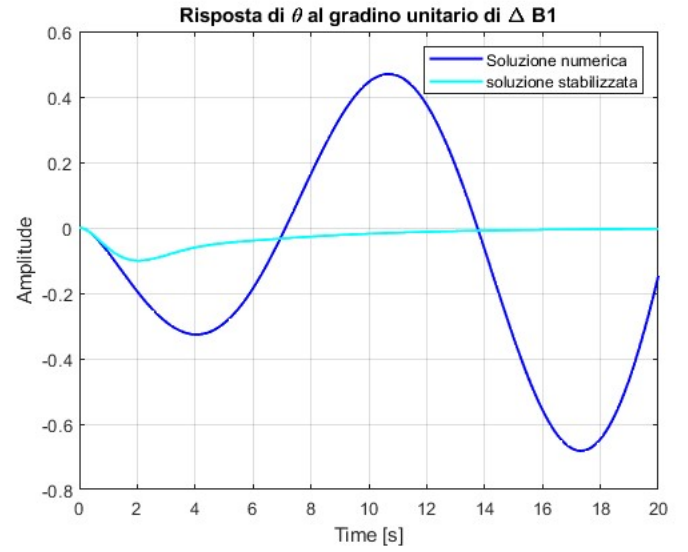


Figura 17: Risposta dinamica di θ al comando ciclico longitudinale per il sistema stabilizzato

Piano longitudinale @hover - Sistema stabilizzato			
λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
$-0.8560 + 1.2511i$	$-0.8560 - 1.2511i$	$-0.2038 + 0.0000i$	$-0.3104 + 0.0000i$

Tabella 11: Autovalori per il sistema aumentato - piano longitudinale @hover

diagramma di Bode, necessario all'analisi delle *handling qualities*, la quale va analizzata considerando non solo il sistema stabilizzato ma anche corretto dalla catena di comando del piatto oscillante. Tale correzione viene effettuata con una funzione di trasferimento di secondo ordine $\frac{B_1}{\delta}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$, con $\zeta = 0.7$ e $\omega_n = 52$ rad/s. Dunque,

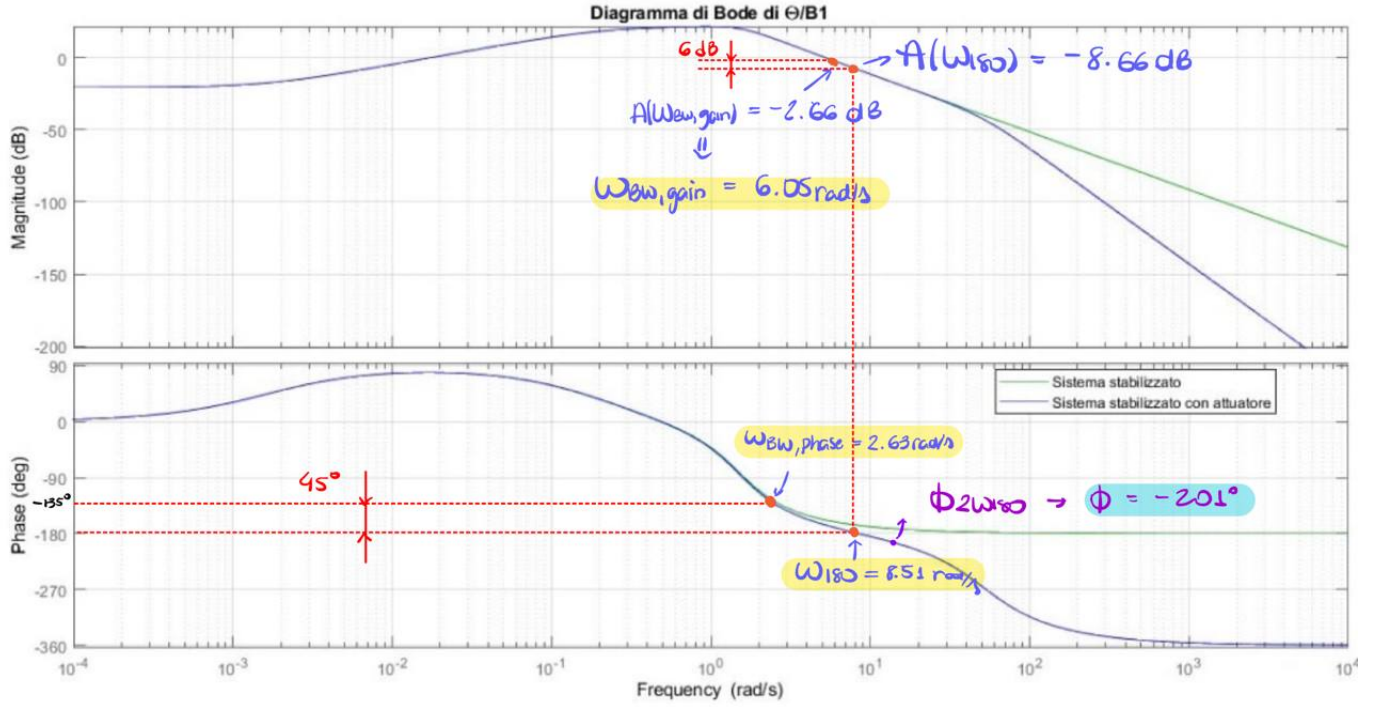


Figura 18: Diagramma di Bode del sistema stabilizzato

la funzione di trasferimento da considerare per la normativa è:

$$\frac{\theta}{B_1} \frac{B_1}{\delta} = \frac{\theta}{\delta} \quad (15)$$

I modi dell'attuatore sono $\lambda = -36.4000 \pm 37.1354i$ e vanno aggiunti a quelli del sistema stabilizzato (Tabella 11). In Fig. 18 vengono rappresentati i diagrammi di Bode sia per il sistema stabilizzato, sia per il sistema corretto con la catena di comando dall'attuatore.

7.1 Normativa ADS-33: Handling Qualities per la risposta longitudinale

Dal diagramma di Bode della risposta in frequenza, è possibile stabilire i diversi parametri che definiscono le *Handling Qualities HQ* del velivolo. Nel caso in studio si vuole studiare la risposta al comando longitudinale e capire se essa è soddisfacente.

Per valutare le HQ secondo la normativa ADS-33, è necessario prima definire alcuni parametri:

- ω_{180} : chiamata frequenza di stabilità neutra, è la frequenza che si verifica alla fase $\phi = -180^\circ \Rightarrow \omega_{180} = 8.51 \text{ rad/s}$
- $\omega_{BW,phase}$: è la frequenza che si trova con un margine di fase di 45° rispetto alla fase di -180° , ossia è la frequenza alla fase $\phi = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ \Rightarrow \omega_{BW,phase} = 2.63 \text{ rad/s}$
- $\omega_{BW,gain}$: è la frequenza che si trova con un margine di guadagno di 6 dB rispetto alla ω_{180} . Si ha che $A(\omega_{180}) = -8.66 \text{ dB}$ e allora $A(\omega_{BW,gain}) = -8.66 + 6 = -2.66 \text{ dB} \Rightarrow \omega_{BW,gain} = 6.05 \text{ rad/s}$
- $\Delta\phi_{2\omega_{180}}$: è la fase che si verifica per $2\omega_{180}$. In questo caso $\phi(2\omega_{180}) = -201^\circ$

La frequenza alla quale la normativa ADS-33 fa riferimento è anche chiamata *bandwidth* o banda passante ed è la massima frequenza con cui il pilota può agire in retroazione sui comandi senza compromettere la stabilità del velivolo e viene definita come $\omega_{BW_\theta} = \min(\omega_{BW,\text{phase}}, \omega_{BW,\text{gain}})$ che nel caso in studio è $\omega_{BW_\theta} = \omega_{BW,\text{phase}} = 2.63 \text{ rad/s}$.

Il ritardo è invece una misura di quanto rapidamente lo sfasamento tra comando in ingresso e risposta del sistema aumenta oltre la frequenza di stabilità neutra ed è definito come $\tau_p = \frac{\Delta\Phi_{2\omega_{180}}}{57.3 \cdot 2\omega_{180}} = 0.2059 \text{ s}$

La risposta di corto periodo (*Short-term response*) può essere valutata confrontando la coppia $(\omega_{BW_\theta}, \tau_p)$ con la normativa. Nel caso in studio, utilizzando le indicazioni della normativa per la manovra di *Target Acquisition and Tracking (pitch)*, è possibile concludere che si soddisfa il **livello 1** della scala Cooper-Harper. Ossia, il velivolo ha una buona risposta al comando ed è "*adequate for mission flight phase*".

La valutazione della *mid-term response* richiede la conoscenza della frequenza del fugoide e il suo smorzamento ma considerando il **sistema stabilizzato con attuatore**. Con una semplice analisi degli autovalori del modo fugoide è possibile trovare la frequenza naturale del modo e il suo smorzamento: $\omega_n = 1.5159 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.5647$ Per valutare la *mid-term response*, la normativa prevede la conoscenza di:

$$-\zeta\omega_n = -0.8560 \quad \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.2511$$

. Che permette concludere che il velivolo soddisfa il **livello 1** anche per la risposta *mid-term*. In Fig. 19 vengono riportati i grafici utilizzati dalla normativa ADS-33 per la valutazione delle due risposte per l'elicottero in studio.

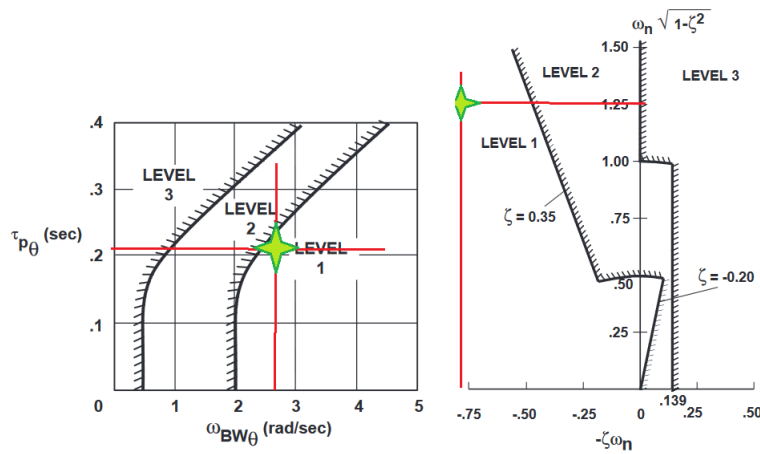


Figura 19: Normativa ADS-33 - *Handling Qualities*: risposta di corto periodo (sx) e medio periodo (dx) per la manovra di *Target Acquisition and Tracking (pitch)*