

# 自由潜水中的表现前沿 (Performance Frontier) :探索性分析

Tzu-Ming (Harry) Hsu

独立研究者

台北

台湾

stmharry@alum.mit.edu

张煦 (Josh Chang)

猫鱼小姐的海洋生活

恒春

台湾

joshfreediving@gmail.com

## Abstract

**背景：**自由潜水 (Freediving) 表现源于水下力学与闭气生理之间的紧密耦合。然而，训练实务与科学讨论常将表现视为孤立的个人最佳 (深度、时间)，而非一个有结构的权衡空间。本研究将自由潜水表现表述为时间-深度平面 (Time-Depth Plane) 中的可达区间 (Feasible Region)，并将其边界视为表现前沿 (Performance Frontier) 来加以研究。

**方法：**我们将一次下潜建模为由推进力在浮力、重量与阻力作用下产生的深度轨迹  $z(t)$ ，并同时受瞬时能力限制 (例如力量与功率上限) 以及累积式的生理预算 (氧气，以及必要时的二氧化碳) 所约束。机械需求透过一个以预算为导向的代谢代理模型映射为资源消耗，该模型纳入基础成本、力量产生与机械功率。可行下潜是指同时满足所有限制与预算者，而表现前沿则定义为此可行集合在参数空间中的边界。我们透过受约束的最佳化计算前沿，并以真实自由潜水者的资料 (含作者本人的下潜纪录) 拟合有效参数以具体化此框架。

**结果：**模型在总下潜时间  $T$  对最大深度  $D$  的时间-深度图 (T-D Diagram) 中产生结构化的可达区间，并得到与观测下潜群集在质性上相符的前沿。约束切换分析显示随深度变化的区段转换 (例如能力受限与预算受限的区段)，并指出沿著前沿最优侧写 (Frontier-Optimal Profile) 的特征性配速与推进力分配模式。在此建模之下，预测的可行边界与训练杠杆在入门与进阶潜水员之间相当一致，凸显前沿几何的实用性。

**意涵：**表现前沿提供一个量化视角以统一解释与介入：它能从下潜资料诊断可能的限制机制，并提出可操作的训练方向。例如，降低有效阻力、移动可用推进力上限、改善有效效率项，以及塑造配速／努力分配。更广泛地说，该框架以可计算的可行边界取代单点表现指标，提供一条比较潜水员、项目与训练状态的原则性途径。

## 1 引言

自由潜水 (Freediving) 是一项极限运动，遵循一条异常简单的规则：**吸一口气，然后一切**——动作、决策与安全——都必须以有限的内在资源来支付。这项运动涵盖多种项目，其表现轴向不同 (静态闭气 (Static Apnea) 的时间、泳池距离、以及开放水域深度)，但其支配性限制在各项目之间反复出现：流体力学与浮力决定穿越水体的机械代价；推进受力量与功率上限限制；而生理耐受度则受氧气可用性、二氧化碳累积，以及潜水员维持意识与协调能力所约束。

这种耦合带来一个实务挑战：自由潜水表现不是天然的单一纯量。即使在单一项目中，潜水员的结果仍取决于配速、侧写选择、技术，以及力学与生理之间的互动。因此，自由潜水训练多半仍以经验为基础：在优秀教练手中非常有效，但当进展停滞时，很难概化、量化或诊断。本研究想问的是，能否将非正式的「极限」概念转化为既能解释、又可操作的量化对象。

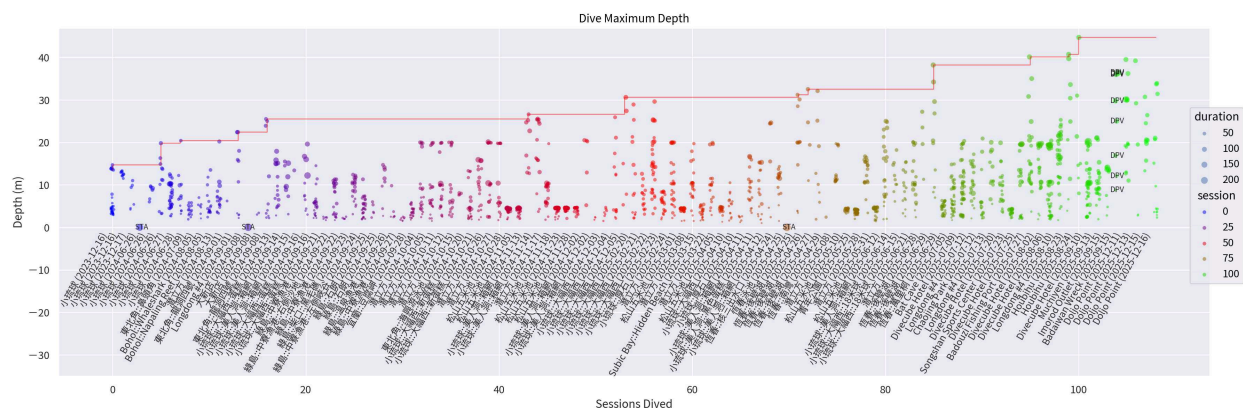


图 1: 下潜最大深度跨场次变化。这是直接从我的 Google Colab notebook 撷取的快照，用以追踪我个人的自由潜水进展。每个点代表一次下潜 ( $y$  轴：以公尺计的最大深度)，绘于累积场次 ( $x$  轴) 之上；点的大小随下潜时间缩放，颜色则编码场次进度。红色阶梯曲线追踪连续个人最佳，凸显最大深度随时间稳定提升。

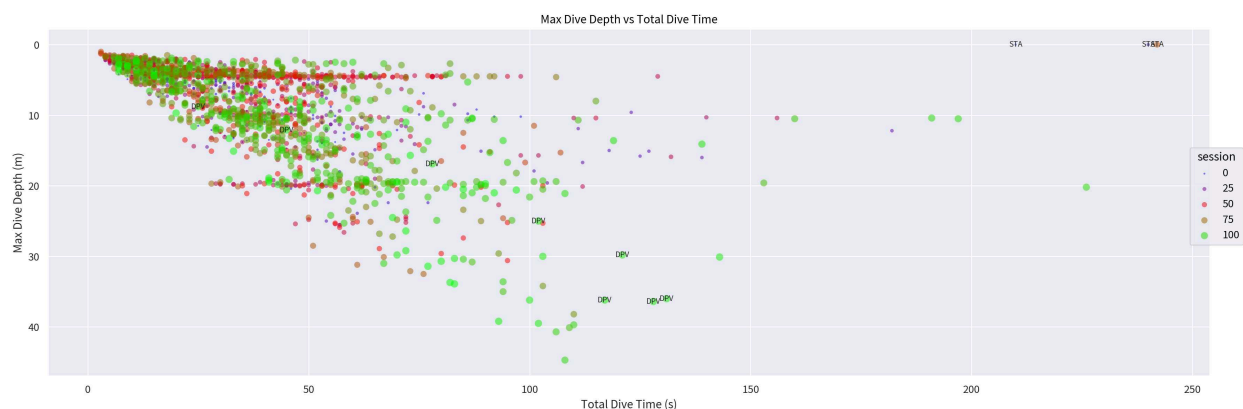


图 2: 最大深度与总下潜时间跨场次比较。每个点是一趟下潜，最大深度 (m) 对总下潜时间 (s)；颜色表示场次编号 (较早  $\rightarrow$  较晚)。点云呈现预期的时间-深度权衡 (Time-Depth Trade-Off)。短下潜聚集在近水面，而较长下潜可达更深的最大值，标示的 STA 点形成长时间、近水面的标记，DPV 点则标示在相近或较长时间下的辅助深潜。

我的动机直接来自个人的下潜纪录。自开始自由潜水以来，我几乎记录了所有下潜的深度时间序列，并用简单的摘要视觉化进展。其中两张图格外关键。第一张追踪跨场次的最大深度，并显示由个人最佳所点缀的阶梯式进展 (图 1)。第二张是时间-深度图：每次下潜的总下潜时间  $T$  对最大深度  $D$  (图 2)。令人注目的不仅是点形成一个一致的区域，而是其边界具有结构性：更深的下潜往往需要更长的总时间，但不是任意地增加；而「离群值」(例如辅助下潜) 则占据特定位置。此外，某一面向的训练进步可能会推动其他面向的表现，暗示背后存在共享的约束几何，而非彼此独立的技能。

我开始将这些图视为可行性的地图。与其问「我的最大深度是多少？」或「我的最大时间是多少？」，更具揭示性的问题是：在力学与生理耦合约束下，总时间与深度的哪些组合是可行的？若此可行集合存在，其边界(潜水员口语所称的「极限」)也应是可用数学定义的对象。这导向本论文的核心构件：在  $(T, D)$  平面上的自由潜水表现前沿 (Performance Frontier)。

本论文提出一个端到端的量化框架，(i) 形式化定义时间-深度可行集合 (Time-Depth Feasible Set)，(ii) 由精简但明确的水下运动与资源使用模型推导之，(iii) 透过最佳化计算前沿包络，并 (iv) 以真实自由潜水员资料具体化此框架。从高层次而言，我们将一次下潜建模为由推进力/力量历史在浮力、重量与阻力作用下生成的时间深度侧写。可行性由瞬时限制(例如力量与功率上限)与累积式生理预算共同决定。为了将力学连接至生理，我们建立代谢模型，将机械功率与力量产生映射为耗氧与二氧化碳累积。

---

在此框架下，表现前沿自然分解为两个互补的包络：**最快表现前沿 (Fast Frontier)**（给定深度的最小可行时间）与**最慢表现前沿 (Slow Frontier)**（给定深度的最大可行时间）。这些包络不只是描述性曲线。由于它们源自受约束的最佳化，因此同时提供预测与诊断：辨识不同深度与配速区段中哪些约束会成为主导，并暗示可与观测行为比较的结构化最优侧写。

本研究的主要贡献可概括为四大支柱：

1. **前沿之计算的形式化**。据我们所知，这是首个以正式术语建立自由潜水表现前沿，并以涵盖流体力学、力与运动约束、以及资源受限生理建模的量化工具加以推导的框架。
2. **资料锚定的具体化**。本框架并非纯理论：我们展示如何用真实自由潜水员资料校准并拟合有效模型参数，得到潜水员特定的可达区间与前沿预测。
3. **透过约束切换的机制诊断**。前沿被用作诊断工具：自由潜水表现中的观测现象，可透过约束切换分析与沿前沿的区段转换来解释。
4. **可操作的训练意涵**。模型不仅解释既有行为，也提出训练杠杆——降低有效阻力、在力量／功率上限内移动可用推进力上限、改善有效效率项，以及塑造配速／努力分配——并与论文后段讨论的经验性启发一致。

范畴刻意聚焦。我们以适合可行性分析与训练诠释的层级建模力学、资源累计与侧写最佳化。我们不试图建模耳压平衡技巧、细致的心理因素，或更高阶的生理机制（例如脾脏收缩、精细的血液位移动态），除非其整体效果能被吸收为有效参数或视为未建模变异。目标是建立一个严谨的系统模型，足以解释并提供指引，但不宣称能模拟闭气下潜的完整生物复杂性。

本论文后续结构如下。[章节 2](#) 回顾闭气生理、自由潜水训练效果，以及其他运动中的表现前沿相关研究。[章节 3](#) 介绍本论文使用的定义、假设与精简的机械与代谢模型。[章节 4](#) 形式化时间-深度可行集合并以最佳化推导最快与最慢前沿。最后，[章节 5](#) 以真实潜水员资料具体化此框架，解读前沿与约束绑定结果，并讨论对训练与表现的实务意涵。

## 2 相关研究

### 2.1 自由潜水生理

闭气自由潜水位于**气体交换限制、循环控制与环境压力效应**的特殊交会点。实用的总览框架是：表现与安全共同受到 (i) 身体可用氧储备 (Usable Oxygen Reserve) 的大小与可及性、(ii) 该储量在移动与恢复阶段的消耗速率，以及 (iii) 深度相依的风险与限制 (地面运动所无) 所塑形。广泛的综述统整了这些交互机制与已知失效模式 (例如低氧昏厥、肺部挤压、氮相关效应) (Ferretti, 2001; Lindholm and Lundgren, 2009; Patrician et al., 2021)。

经济性的核心「内建控制系统」是潜水反射：具刻板性的心搏减缓与周边血管收缩，倾向于保留对心脏与大脑的供氧，同时降低对较不紧急组织的灌流。此反射并非单一旋钮；其启动与幅度取决于脸部浸水、闭气时间、温度与训练状态等因素，且其表现与运动与压力的竞合需求并存。以机制为导向的处理 (包含可实验存取多个环节的动物生理) 强调，此反射最好被理解为维持生存的控制策略，其涌现效果常在闭气下降低有效耗氧率，特别是在休息或低动作条件中 (Michael Panneton, 2013)。

这些生理视角启发本文后续采用的两项建模选择：(i) 将耗氧视为**可用氧储量 (Usable Oxygen Reserve) 的预算化资源**，而非直接可观测的纯量；以及 (ii) 让「基准」消耗与有效储量大小反映情境依赖的生理状态，而非视为普遍常数。换言之，耗氧代理模型中的基础项应被解读为闭气/浸水下的**条件化代谢率** (而非陆上静息代谢率)，而总可用储量也应被视为模型依赖，因为不同研究对隔室的操作性定义与估计方式不同 (Ferretti, 2001; Lindholm and Lundgren, 2009)。

### 2.2 自由潜水训练效果

自由潜水训练研究涵盖「技能型」进步 (放松、配速、技术、心理耐受) 以及可能同时改变可用氧储量与其消耗型态的生理适应。一个实务切入点是闭气表训练，这些方案刻意操弄  $O_2$  与  $CO_2$  压力，以针对闭气时间上的不同限制。例如，对新手进行  $O_2$  与  $CO_2$  表训练的对照研究指出，基准容量指标 (例如肺容量、静息氧合代理) 与对渐进性低氧/高碳酸的耐受能力，是可分离的闭气表现贡献因素，而不同训练方案可偏向改善其中一个组成 (Declercq et al., 2024)。

超越单一方案的研究，后设分析显示多种闭气训练模式能显著提升最大静态闭气时间，同时也指出受试者背景、方案细节与结果量测的异质性——使得难以对所有族群宣称单一「最佳」介入 (Massini et al., 2022)。试验性介入研究同样回报静态闭气训练造成的心肺与表现相关变化，与「训练可改变经济性与耐受地景」的概念一致，即便研究规模与设计限制了强因果主张 (Bezruk et al., 2024)。

就表现前沿模型而言，重点并非某一方案最优，而是训练可能透过**多重杠杆**影响模型组件：(i) 提升有效储量 (隔室利用与可及性)，(ii) 在闭气/浸水下降低基础消耗 (透过强化潜水反射与放松)，以及 (iii) 降低单位距离的移动成本 (技术与流体力学)。因此，我们将拟合参数视为**运动员与状态特定的交互适应摘要**，而非固定的生物常数。

### 2.3 其他运动中的表现前沿

「表现前沿 (Performance Frontier)」的概念在运动科学中已相当成熟，通常作为区分可持续与不可持续努力的边界，或作为竞争表现目标之间的最佳权衡曲线。这些前沿具价值，是因为它们同时支持诊断 (「哪个限制因子主导？」) 与处方 (「哪些训练最有效地移动边界？」)。

这些前沿之所以重要，是因为它们同时支援诊断 (「哪个限制因子主导？」) 与处方 (「哪些训练能最有效移动边界？」)。自由潜水的物理与生理情境有所不同，但同样能受益于相同的概念工具组。

一个经典范例是**功率-持续时间** (或**速度-持续时间**) 边界，其中双曲关系将可持续输出连结到耐力耗竭时间，并引入与疲劳相关的渐近线。奠基性的研究将此关系形式化于肌肉工作，后续综述与现代处理则将「临界功率 (critical power)」视为耐力表现具有诊断价值的实用疲劳阈值 (Monod and Scherrer, 1965; Poole et al., 2016)。与之密切相关的是以乳酸动力学为基础的阈值型前沿，其中最大乳酸稳态 (MLSS) 被视为准稳态生理控制与渐进性代谢不稳定之间的边界 (Billat et al., 2003)。

在爆发性与混合型运动中，前沿以**力-速度**与**功率-速度**侧写呈现。这些框架将表现视为受神经肌肉能力与力学限制，并透过塑造运动员侧写朝向任务的「最优」配置 (如跳跃) 来达成最佳化，而非仅提升峰值力量或



峰值功率 (Samozino et al., 2012)。更广泛地，机制化的运动分析提供一个范本，将表现拆解为可解释的组件，并可差异化训练 (González-Badillo and Sánchez-Medina, 2010)。

前沿思维也出现在训练系统中的最佳化问题：如何分配训练强度与量，以推进边界而不超出可恢复负荷。针对强度分布（如极化 vs. 阈值为方法）的量化研究，以及关于巅峰化／减量的科学理据，展示了如何将经验实务形式化为边界感知的训练决策 (Padilla, 2003; Seiler and Kjerland, 2006)。最后，环境适应研究（热与高海拔）提供外在限制如何重塑生理边界，以及介入如何选择性移动它们的例子 (Levine and Stray-Gundersen, 1997; Périard et al., 2015)。

这些传统支持本论文的方法论立场：结合 (i) 物理基础的外在需求与 (ii) 资源预算约束，建构明确的前沿模型，再将偏差与参数移动解读为技术、生理与训练历史的可操作讯号。

## 2.4 能量学与流体力学

流体力学 (Hydrodynamics) 与移动能量学构成任何量化自由潜水模型的机械骨架：它们决定力量与功率如何随速度、姿态与装备缩放，并因此决定「机械努力」如何转化为预算支出。游泳研究提供成熟的量测与建模工具，包括 (i) 阻力刻画（拖曳试验、速度衰减法与计算流体力学，CFD），(ii) 阻力成分与姿态效应的分解，以及 (iii) 以效率与成本为基础的表现摘要。

被动阻力与阻力系数估计已透过解析程序与数值模拟研究，支持在相关区间将阻力建模为近似随  $v^2$  增长，并将形态与姿态合并为有效系数／面积替代量 (Barbosa et al., 2018)。CFD 分析进一步显示姿态改变可在水下滑行时产生显著且系统性的阻力系数差异，强化「流线化」应被视为量化上有意义的状态，而非仅是质性提示 (Cortesi and Gatta, 2015; Marinho et al., 2009)。深度亦重要：波浪阻力效应在近水面主导，随潜入而减弱，在流线滑行条件下于中等深度后趋于饱和的深度相依阻力降低 (Novais et al., 2012)。

在能量学方面，经典与现代研究以总效率 (Gross Efficiency) 与技术相依的推进力学连结机械功、流体阻力与代谢成本 (Toussaint et al., 1990; Toussaint and Hollander, 1994; Zamparo et al., 2020)。对推进贡献（手臂 vs 腿部）与牵引力关系的实证研究，也提供从可测力学到表现结果的桥接 (Deschodt et al., 1999; Morouço et al., 2011; 2015)。

装备效应在自由潜水项目中特别关键（双蛙鞋 vs 单蛙鞋）。对水面蛙鞋游泳的研究量化了能量成本的显著下降与效率变化，且随蛙鞋特性而异，支持将「推进模式」视为参数区间，而非微小扰动 (Zamparo et al., 2006)。与竞技动态闭气 (DYN) 最直接相关的近期量测报告了单位距离的能量成本，并区分有氧／无氧贡献，凸显节省氧气与最小化机械成本同等重要，且蛙鞋选择可显著改变能量地景 (Vinetti et al., 2025)。

最后，闭气下潜移动的理论研究强调在浮力与阻力约束下，交替主动游动与长时间滑行的能量重要性，并提供以力学为先的先例，用于在代谢预算下最佳化移动速度与滑行分配 (Trassinelli, 2016)。

## 3 理论前导

### 3.1 定义、范畴与假设

我们分析由潜水电脑记录的闭气下潜，并将其视为深度的时间序列。对每次下潜，令  $z(t)$  表示深度（公尺）， $z = 0$  在自由水面，向下为正。我们定义两个主要观测量：

- **下潜时间 (Dive Time)**  $T$ ：对深度项目而言， $t = 0$  为连续下潜前在水面的最后一刻（即入水下潜的开始）， $T$  为上浮结束返回水面的第一刻。对静态闭气 (Static Apnea, STA) 而言， $t = 0$  为水面开始闭气的时间， $T$  为闭气结束（第一口恢复呼吸）。实务上，潜水电脑的深度讯号在水面附近可能抖动，但概念性定义仍为「入水至返水」（深度）或「闭气起至闭气终」（STA）。
- **最大深度 (Maximum Depth)**  $D$ ： $D := \max_t z(t)$ 。对 STA 下潜， $D = 0$  由定义给定。

示意侧写与上述定义如 图 3 所示。

**下潜范畴。** 我们仅聚焦于深度场次与静态场次的下潜：CWT/CWTB/FIM 与 STA。

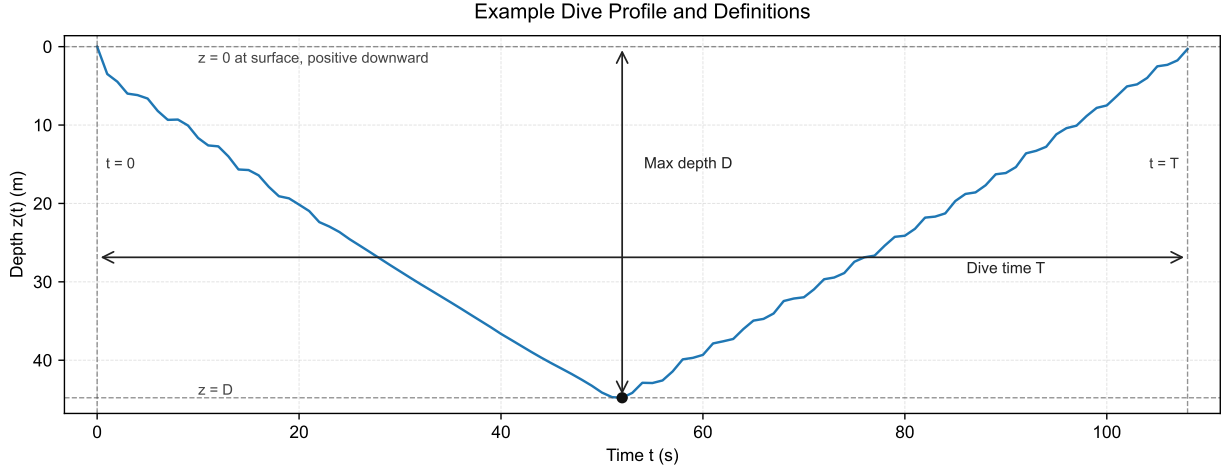


图 3: 下潜侧写与定义示例。深度轨迹  $z(t)$  以水面  $z = 0$  为基准（向下为正）。下潜时间  $T$  跨越入水至返水，最大深度  $D$  为侧写最深点。

**失效准则。**在最大努力下潜中，尝试在第一个限制因素被触发时结束。我们以资源预算建模此过程，并将至少使一个预算饱和的下潜定义为表现前沿。在这个探索性分析中，我们追踪自由潜水文献中最可量化的两种资源：可用氧储量（Usable Oxygen Store）与可用二氧化碳耐受度（Usable CO<sub>2</sub> Tolerance）。正式的预算与努力定义将在 [章节 3.4.4](#) 提供。

**噪音与未建模变异。**全文中，「噪音」指所有影响观测表现但未在方程中明确表示的变数：环境条件（浪况、海流、温度）、装备配置（防寒衣厚度、配重、蛙鞋选择）、日常生理状态、技术变异与量测误差。我们将这些因素视为吸收于有效参数（如阻力、效率、预算）中的扰动，而非新增的模型状态变数。换言之，模型旨在解释时间-深度包络的主导结构，而残差散布则归因于噪音。

### 3.2 力、运动学与本构律

我们建模在性质均匀、静止海水中做纯垂直运动的闭气潜水员。垂直轴向下为正。令深度为  $z(t)$ ，水面  $z = 0$ ，速度  $v(t) = \dot{z}$ （向下为正）。我们忽略水平漂移、表面波浪、海流与非定常环境流结构。海水密度  $\rho_w$  与重力加速度  $g$  视为常数，代表值为  $\rho_w \approx 1025 \text{ kg m}^{-3}$  与  $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。

#### 3.2.1 运动方程

垂直运动方程（向下为正）为

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + mg - B(z) - F_{\text{drag}}(v) \quad (1)$$

其中：

- $F_{\text{mech}}(t)$  为自我产生的推进力，可由蛙鞋（CWT/CWTB）、无蛙鞋（CNF）或拉绳（FIM）提供。当向下施力（例如下潜时踢动）为正，向上拉升（上浮）为负。
- $mg$  为重量（向下）。
- $B(z) = \rho_w g V_{\text{disp}}(z)$  为浮力大小（向上）。
- $F_{\text{drag}}(v)$  为反向运动的流体阻力。

#### 3.2.2 浮力与排水体积

我们将排水体积分解为三部分：

$$V_{\text{disp}}(z) = V_{\text{const}} + V_{\text{suit}}(z) + V_{\text{gas}}(z) \quad (2)$$

其中  $V_{\text{const}}$  汇集近乎不可压缩的身体 + 组织 + 装备体积（在深度处，解释为  $z \rightarrow \infty$  时防寒衣压缩完成且肺内气体完全压缩后的渐近排水体积）。可选的  $V_{\text{suit}}(z)$  表示防寒衣/泡棉的可压缩体积。可压缩气体体积  $V_{\text{gas}}(z)$  服从波以耳定律：

$$V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{P_0}{P(z)}, \quad P(z) = P_0 + \rho_w g z \quad (3)$$

其中  $V_{\text{gas},0}$  为水面上的总可压缩气体体积（肺与相通气腔如面镜与其他气袋，以单一等效储槽建模）。水面压力为  $P_0 \approx 1013.25 \text{ hPa}$ 。定义压力长度（Pressure Length）

$$L_p := \frac{P_0}{\rho_w g} \quad (4)$$

使得  $P(z) = \rho_w g(L_p + z)$  且  $V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{L_p}{L_p + z}$ 。对海水而言， $L_p \approx 10.1 \text{ m}$ 。

在后续分析中，我们将防寒衣可压缩项吸收进常数排水体积  $V_{\text{const}}$ 。

### 3.2.3 阻力

我们使用标准二次阻力定律，并以数值稳定的形式书写：

$$F_{\text{drag}}(v) = kv|v|, \quad k := \frac{1}{2} \rho_w C_d A \quad (5)$$

其中  $C_d$  为阻力系数， $A$  为有效正向截面积。代表范围为  $C_d \approx 0.9\text{--}1.1$  与  $A \approx 0.08\text{--}0.12 \text{ m}^2$  (Barbosa et al., 2018)。对典型的人类自由潜水员而言，这使得  $k$  约落在  $k \approx 30\text{--}60 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$ 。在本研究中，我们将  $C_d$  视为在特定配置下近似固定，而将流线化与身体姿势的改善解读为有效面积  $A$  的变化，此一参数可训练与最佳化。

## 3.3 重新参数化与无因次化

本节将垂直动态以少数具物理可解释性且易量测的参数重述。我们假设防寒衣显式项已如前述吸收进常数排水体积，并使用  $V_{\text{const}}$  与波以耳气体模型 方程 3。

### 3.3.1 大深度净载重

定义渐近（大深度）净载重

$$\Delta F_{\infty} := mg - \rho_w g V_{\text{const}} \quad (6)$$

即重量减去渐近浮力。

诠释：

- 若  $\Delta F_{\infty} > 0$ ，潜水员在大深度略为负浮力；存在有限自由下落终端速度。
- 若  $\Delta F_{\infty} = 0$ ，潜水员在  $z \rightarrow \infty$  时中性浮力；深处自由下落趋近零速度。
- 若  $\Delta F_{\infty} < 0$ ，潜水员在大深度为正浮力；纯自由下落下潜不可行。

### 3.3.2 中性浮力深度 $z_n$

将  $z_n$  定义为在深度压缩气体模型下，重量等于浮力的深度：

$$mg = B(z_n) = \rho_w g (V_{\text{const}} + V_{\text{gas}}(z_n)) \quad (7)$$

等价地，

$$\Delta F_\infty = \rho_w g V_{\text{gas}}(z_n). \quad (8)$$

将 方程 3 写为  $V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{L_p}{L_p + z}$ ，得到

$$1 + \frac{z_n}{L_p} = \frac{\rho_w g V_{\text{gas},0}}{\Delta F_\infty}, \quad \text{equivalently} \quad z_n = L_p \left( \frac{\rho_w g V_{\text{gas},0}}{\Delta F_\infty} - 1 \right). \quad (9)$$

此恒等式显示中性浮力深度如何耦合水面可压缩气体体积  $V_{\text{gas},0}$  与深处净载重  $\Delta F_\infty$ 。在固定  $V_{\text{gas},0}$  下，加重会增加  $\Delta F_\infty$  并使  $z_n$  变浅；减重则降低  $\Delta F_\infty$  并使  $z_n$  加深。根据 AIDA 指引，自由潜水员的典型  $z_n$  值约为  $\approx 10\text{--}20\text{ m}$ （较浅下潜）(AIDA International, 2021)，以及深达 60 m 的案例 (AIDA International, 2020)。

### 3.3.3 深层终端速度

当  $\Delta F_\infty > 0$  且推进力为零 ( $F_{\text{mech}}(t) = 0$ ) 时，借由深处净载重与二次阻力 方程 5 平衡定义深层终端速度：

$$v_\infty := \sqrt{\frac{\Delta F_\infty}{k}} \quad (10)$$

等价地，

$$\Delta F_\infty = k v_\infty^2, \quad k = \frac{\Delta F_\infty}{v_\infty^2}. \quad (11)$$

量  $v_\infty$  应解释为在足够深处、浮力几乎达到深限且净载重趋近  $\Delta F_\infty$  时，将接近的渐近自由下落（滑行）速度。它不是整个恒重下潜的平均下降速度，因为真实下潜包含  $z_n$  以上的主动下潜阶段、 $z_n$  附近的过渡区，以及转折与主动上浮。

文献中常以约  $1\text{ m s}^{-1}$  的特征垂直速度讨论人类闭气下潜侧写 (Bosco et al., 2007; Patrician et al., 2021)。这些数值与在配重良好的潜水员中，将  $v_\infty \approx 0.8\text{--}1.2\text{ m s}^{-1}$  作为恒重式滑行的实用尺度相一致。

### 3.3.4 重新参数化的运动方程

定义净载重（向下为正）为  $\Delta F(z) := mg - B(z)$ 。在防寒衣吸收进  $V_{\text{const}}$  且气体依波以耳压缩 方程 3 的情况下，可得简化形式

$$\Delta F(z) = \Delta F_\infty \frac{z - z_n}{L_p + z} = k v_\infty^2 \frac{z - z_n}{L_p + z}, \quad (12)$$

其中  $\Delta F_\infty := mg - \rho_w g V_{\text{const}}$ ， $z_n$  为中性浮力深度 方程 9，且由 方程 11 得  $\Delta F_\infty = k v_\infty^2$ 。

将 方程 12 与二次阻力 方程 5 代入垂直运动方程 方程 1，得到

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + k v_\infty^2 \frac{z - z_n}{L_p + z} - k v |v|. \quad (13)$$

等价地，

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + k \left[ v_\infty^2 \frac{z - z_n}{L_p + z} - v |v| \right]. \quad (14)$$

此表示式由三个具物理解释性的参数所控制：深处净载重  $\Delta F_\infty$ （等价于  $v_\infty$ ）、中性浮力深度  $z_n$  与压力长度  $L_p$ 。其余深度相依性仅透过比值  $\frac{z - z_n}{L_p + z}$  进入。

### 3.3.5 无因次化

重新参数化的运动方程 方程 14 可使用  $v_\infty$  与  $L_p$  作为特征尺度，得到自然的无因次形式。定义无因次变数



$$\tilde{z} := \frac{z}{L_p}, \quad \tilde{z}_n := \frac{z_n}{L_p}, \quad \tilde{v} := \frac{v}{v_\infty}, \quad \tilde{t} := \left( \frac{v_\infty}{L_p} \right) t. \quad (15)$$

依此定义，

$$\dot{v} = \left( \frac{v_\infty^2}{L_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}}. \quad (16)$$

将 方程 15 与 方程 16 代入 方程 14 得

$$m \left( \frac{v_\infty^2}{L_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = F_{\text{mech}}(t) + kv_\infty^2 \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} - kv_\infty^2 \tilde{v}|\tilde{v}|. \quad (17)$$

以特征力量尺度  $kv_\infty^2 = \Delta F_\infty$  除之，得到无因次方程

$$\left( \frac{m}{kL_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) + \left( 1 - \frac{1 + \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} \right) - \tilde{v}|\tilde{v}|, \quad (18)$$

其中无因次控制输入为

$$\tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) := \frac{F_{\text{mech}}(t)}{\Delta F_\infty}. \quad (19)$$

唯一剩余的无因次惯性参数为

$$\lambda := \frac{m}{kL_p}, \quad (20)$$

因此无因次形式可写为

$$\lambda \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) + \left( 1 - \frac{1 + \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} \right) - \tilde{v}|\tilde{v}|. \quad (21)$$

在准稳态极限下，加速度相较于推进力、浮力与阻力之主导平衡较小，因此动态可化简为各运动区段上的瞬时力平衡。

### 3.4 生理模型与预算

#### 3.4.1 O<sub>2</sub> 与 CO<sub>2</sub>

依据 AIDA 手册惯例 (AIDA International, 2020)，我们以一次下潜的**累积式资源累计 (Integrated Resource Bookkeeping)** 来建模自由潜水表现，如 图 4 所示。尝试在第一个限制因素触发时终止。在此探索性分析中，我们追踪两个生理资源：可用 O<sub>2</sub> 与 CO<sub>2</sub> 耐受度。

**氧气预算 (Oxygen Budget)**。令  $R_{\text{O}_2}^{\text{total}}$  表示可用氧储量，非全身总含氧量。例如，因隔室可及性限制与生理优先顺序，低氧昏厥可在全身总含氧尚未耗尽前（约 45% 的 SaO<sub>2</sub>）即发生。

概念上，可用 O<sub>2</sub> 来自肺气体、血液（血红素结合）与肌肉（肌红素），而潜水反射（心搏减缓与周边血管收缩）借由优先供氧至关键器官而有效降低耗竭速率。我们将这些机制视为透过基础消耗率与有效预算参数隐含捕捉，而非明确建模隔室运输。

自由潜水中的一个知名例外是**浅水昏厥**，其风险可能在上浮近水面时因气体分压快速变化而升高，尽管总耗氧仍在持续。本模型不表示此类深度相依的资源**状态变化**。下潜被假设因资源耗竭或耐受不足而终止，并依下列累积式记帐约束处理，分压动态则视为范畴外。

**二氧化碳耐受度 (CO<sub>2</sub> Tolerance)**。令  $R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$  表示**有效的** CO<sub>2</sub> 耐受预算，代表一个生理阈值而非字面上的储存容量。二氧化碳由代谢持续产生，并在血液与组织中被缓冲，而不适与终止主要由化学感受与酸碱平衡

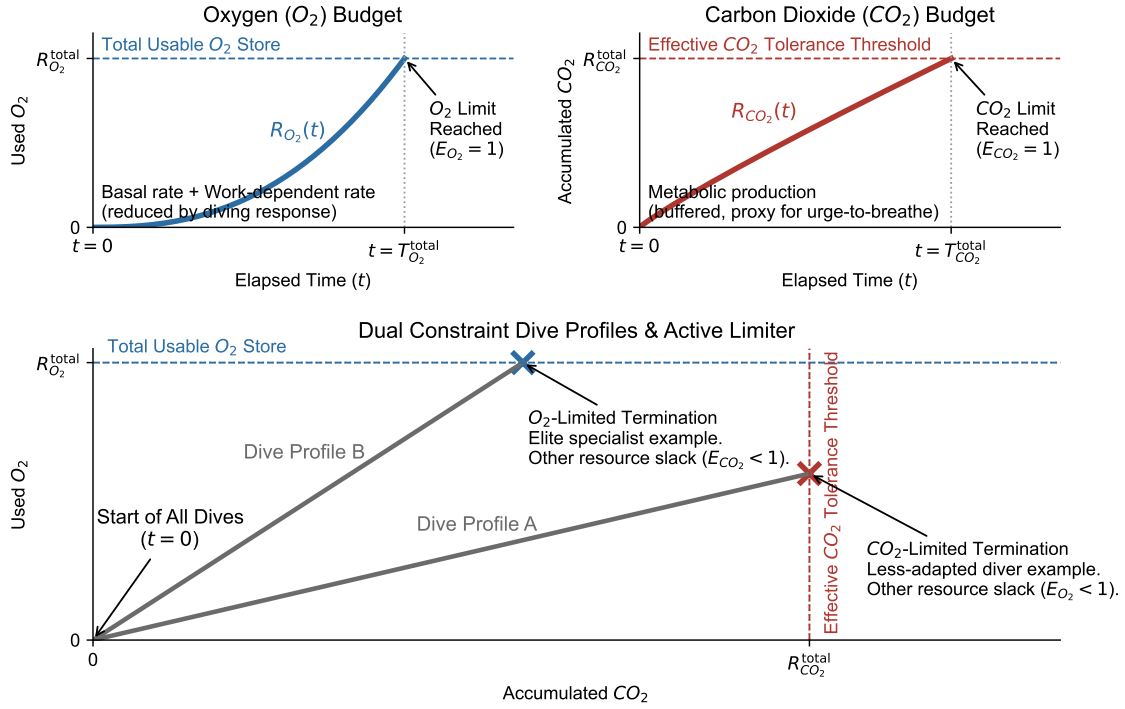


图 4: 自由潜水中累积式资源累计的概念框架。图中呈现双重约束模型，其中下潜时间 ( $T$ ) 由  $E_{O_2}$  或  $E_{CO_2}$  先达到 1 的那一个决定。左上 ( $O_2$  预算)：表示可用氧储量 ( $R_{O_2}^{\text{total}}$ ) 自零累积至总储量的使用情形，受基础代谢率与工作相依消耗影响。右上 ( $CO_2$  耐受度)：表示代谢  $CO_2$  向有效生理耐受阈值 ( $R_{CO_2}^{\text{total}}$ ) 的累积，可视为高碳酸呼吸冲动的代理。右下 ( $CO_2$  耐受度)：描述代谢  $CO_2$  累积至有效生理耐受阈值 ( $R_{CO_2}^{\text{total}}$ )，作为高碳酸呼吸冲动的代理。下方 (主动限制因子下潜侧写)：以状态空间表示不同潜水员侧写如何与这些约束互动。下潜侧写 A 代表「二氧化碳受限」(“ $CO_2$ -Limited”) 的下潜，此时  $CO_2$  耐受度先被达到而  $O_2$  仍有余裕 ( $E_{O_2} < 1$ )。下潜侧写 B 代表「氧气受限」(“ $O_2$ -Limited”) 的下潜，此时氧气预算饱和而  $CO_2$  仍有余裕 ( $E_{CO_2} < 1$ )。

(如 pH 变化) 所介导，而非仅取决于绝对  $CO_2$  量。因此， $R_{CO_2}^{\text{total}}$  应解读为受试者对高碳酸与相关呼吸冲动耐受度的紧凑代理，为建模方便折叠为整体预算。

**STA 在校准中的角色。** 静态闭气 (STA) 被纳入并非作为一个具动作建模的下潜，而是作为基础消耗区间的校准锚点。在 STA 中， $F_{\text{mech}}(t) = 0$ ，垂直运动模型不适用。相反地，STA 的观测约束基础代谢项 (并依建模选择，也可能影响有效预算)，用于深度项目。因此得到的氧气值是在所选可用氧标准化下的例示，而非绝对对储量的直接量测。

### 3.4.2 代谢率模型

本小节说明机械努力如何映射为瞬时资源使用。目标不是微观肌肉模型，而是与预算相容的代理模型，(i) 尊重符号 (无「负耗氧」)，(ii) 即使  $v \approx 0$  仍给予力量产生成本，并且 (iii) 在与游泳与闭气文献所报告的人类极限对照时，能产生合理量级。

我们将瞬时耗氧率建模为

$$\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{|F_{\text{mech}}(t)|}{F_{\text{ref}}} \right)^p + \beta P_{\text{mech}}(t), \quad (22)$$

其中

- $\dot{V}_{O_2, \text{rest}}$  为基础耗氧率，
- $\alpha(|F_{\text{mech}}(t)|/F_{\text{ref}})^p$  为力量产生的额外成本项，且
- $\beta P_{\text{mech}}(t)$  为机械功率成本项。

**基础(非移动)成本。**即使在强烈放松且潜水反射已建立的情况下，闭气仍非零成本：器官持续耗氧，姿势肌群也需做少量工作。受训潜水员在静态闭气时所测得的最低全身耗氧量约为  $0.20 \text{ L min}^{-1}$  (Fitz-Clarke, 2018)，对应每秒数  $\text{mL s}^{-1}$ 。我们以常数基础项  $\dot{V}_{O_2, \text{rest}}$  建模，对受训潜水员通常约为  $\dot{V}_{O_2, \text{rest}} \approx 2.5\text{--}4 \text{ mL s}^{-1}$ ，并可由静态闭气 (STA) 量测校准。

**力量产生额外成本。**即使外部机械功很小 (如悬停、强力支撑或低速大推进)，肌肉仍需耗能以产生力量。近年的量热证据显示代谢成本对等长扭矩呈非线性尺度，指数约为  $p \approx 1.6$  (Muralidhar et al., 2023)。我们采用此概念作为简洁的额外成本项。

参考力  $F_{\text{ref}}$  是跨潜水员与方案共享的全域正规化尺度。在 30 s 完全牵引的自由式游泳测得平均力约为  $\approx 74\text{--}99 \text{ N}$  (女性-男性) (Morouço et al., 2015)，因此

$$F_{\text{ref}} \approx 100 \text{ N} \quad (23)$$

是一个方便且可解释的选择。

系数  $\alpha$  为潜水员特定，表示在极低速度下产生约  $F_{\text{ref}}$  推进力时所增加的耗氧率。它反映技术、神经肌肉效率，以及对个别潜水员而言产力的成本。

**透过总效率的机械功率成本。**当潜水员对水体产生正机械功率时，代谢需求上升。机械功率定义为

$$P_{\text{mech}}(t) := (F_{\text{mech}}(t) \cdot v(t))_+, \quad (\cdot)_+ := \max(\cdot, 0). \quad (24)$$

为将  $P_{\text{mech}}(t)$  转为耗氧率，我们引入**有效总效率**  $\eta$ ，捕捉从代谢能量到外部机械输出的所有损失，包括肌肉效率、传动损失，以及蛙鞋-流体推进损失。自由式游泳的直接量测 (Toussaint and Hollander, 1994) 报告总效率约为  $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$ 。

其数值对速度与技术依赖显著，且蛙鞋亦可依尺寸与硬度进一步改变经济性与效率。

令  $e_{O_2}$  表示氧摄取的能量等价。运动生理中常用的单一转换值为

$$e_{O_2} \approx 20.1 \text{ J mL}^{-1}. \quad (25)$$

在此约定下，正机械功率的耗氧成本为

$$P_{\text{mech}}(t)/(\eta \cdot e_{O_2}). \quad (26)$$

将其与 方程 22 中的线性项  $\beta P_{\text{mech}}(t)$  对应，得到

$$\beta = 1/(\eta \cdot e_{O_2}). \quad (27)$$

$\beta$  的典型值约为  $\beta \approx 0.7 \text{ mL J}^{-1}$ 。

**CO<sub>2</sub> 生成。**二氧化碳生成率被建模为与耗氧率成正比：

$$\dot{V}_{CO_2} = \gamma \dot{V}_{O_2}, \quad (28)$$

其中  $\gamma$  为有效转换因子。在闭气下的混合基质使用情境中，代表范围为  $\gamma \approx 0.85\text{--}0.95$ 。

参数  $\gamma$  应被解释为整合缓冲、基质混合与化学感受器敏感度的单一有效系数。

### 3.4.3 瞬时力量与功率上限约束

上述累积预算限制整个下潜可持续的范围。然而，控制输入  $F_{\text{mech}}(t)$  亦会受到神经肌肉能力与推进力传递效率的**瞬时**限制。若没有瞬时限制，模型可能产生物理上不可能的短时间推进力尖峰。

我们施加瞬时上限：

$$|F_{\text{mech}}(t)| \leq F_{\text{mech}}^{\max}, \quad P_{\text{mech}}(t) \leq P_{\text{mech}}^{\max}. \quad (29)$$

力量上限  $F_{\text{mech}}^{\max}$  限制潜水员任一瞬间能推或拉的最大强度，而功率上限  $P_{\text{mech}}^{\max}$  则防止在高速下出现不实际的大力输出。两者共同定义在考虑累积资源预算之前的可行控制空间。

**推进力的实证尺度。** 一个有用的锚点来自完全牵引游泳，其力量可直接量测。在 30 s 最大牵引自由式测试中，回报的峰值力量约为数百牛顿（ $\approx 220\text{--}325$  N，女性-男性），平均力量约为 74–99 N (Morouço et al., 2015)。这些数值使  $F_{\text{mech}}$  落在正确的生理区间：数十牛顿对应放松巡航，数百牛顿则对应近最大努力。

在本研究中， $F_{\text{mech}}(t)$  代表单一来源推进力。它可能对应于蛙鞋推进或手臂/绳索牵引，视项目而定，但非同时混合。因此，力量上限参数会随模式与项目而异。本文其余部分除非另有说明，使用  $F_{\text{mech}}^{\max} \approx 200$  N。

**机械功率的实证尺度。** 游泳量测亦提供合理的外部机械功率范围。自由式回报值约在不同速度与泳者间落于  $\approx 26\text{--}108$  W (Toussaint et al., 1990)。另有逐步牵引游泳测试中的峰值摄氧量常见为  $\approx 2.7\text{--}3.7$  L min<sup>-1</sup> (Bonnen et al., 1980)，对应约  $\approx 1\text{--}1.3$  kW 的最大代谢功率。在总效率  $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$  下，这意味著可持续的外部机械功率约  $\approx 50\text{--}120$  W 在生理上合理，而更高值若可达成也必然短暂。本文其余部分除非另有说明，使用  $P_{\text{mech}}^{\max} \approx 200$  W。

### 3.4.4 代谢预算与努力量

代谢率模型定义每项资源的瞬时使用率。可行性借由将这些速率积分于整个下潜时间，并与潜水员在该时点可视为准常数的预算相比较来判定。

**累积使用量。** 对下潜时间为  $T$  的下潜，定义累积耗氧与  $\text{CO}_2$  生成：

$$R_{\text{O}_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{\text{O}_2} dt, \quad R_{\text{CO}_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{\text{CO}_2} dt. \quad (30)$$

若建模额外约束，将所有资源量以  $r$  索引；同样的可行性与努力定义适用。

**预算与可行性 (Feasibility)。** 令  $R_{\text{O}_2}^{\text{total}}$  表示潜水员可用氧储量，令  $R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$  表示潜水员有效的  $\text{CO}_2$  耐受预算。当所有建模约束都满足时，下潜为可行：

$$R_{\text{O}_2}(T) \leq R_{\text{O}_2}^{\text{total}} \quad \text{and} \quad R_{\text{CO}_2}(T) \leq R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}. \quad (31)$$

均匀缩放可用氧储备的总量会等比例缩放所有耗氧项，因此可行边界与表现前沿对该尺度不敏感，仅依赖相对耗氧而非绝对  $\text{O}_2$  体积。

**努力比例与主动限制因子。** 定义努力比例 (Effort Fraction) 为正规化使用量：

$$E_{\text{O}_2} := \frac{R_{\text{O}_2}(T)}{R_{\text{O}_2}^{\text{total}}}, \quad E_{\text{CO}_2} := \frac{R_{\text{CO}_2}(T)}{R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}}. \quad (32)$$

在「先失效」的解读下，下潜在第一个约束饱和时终止。因此最大努力下潜通常满足

$$\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) = 1, \quad (33)$$

而达到最大值的资源即为主动限制因子 (Active Limiter)。

**实务中的已知限制因子。** 在实务上，对特定潜水员与训练阶段，主导限制往往可预先判断。例如，顶尖深度专项潜水员通常预期主要为  $\text{O}_2$  受限，而适应较少的潜水员可能因  $\text{CO}_2$  不耐而提前终止。因此我们将其中一项资源视为预期的主动限制因子，并检查另一项保持松弛（即终止时  $E_{\text{O}_2} < 1$  或  $E_{\text{CO}_2} < 1$ ）。

## 4 自由潜水中的表现前沿

### 4.1 下潜侧写作为时间-深度图元素

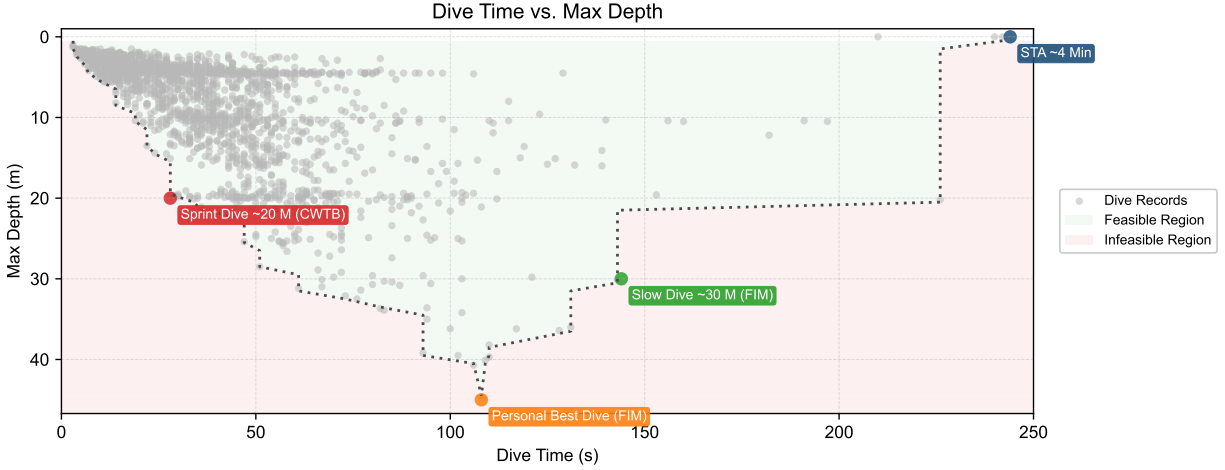


图 5: 下潜时间-深度 (T-D) 图与代表性下潜及可达区间。每个灰点是记录下潜，以总时间  $T$  (x 轴) 与最大深度  $D$  (y 轴，反向) 摘要；资料集由我约两年使用 Atmos 的 Mission One 潜水表所记录的个人下潜纪录构成，涵盖 110+ 场次的所有下潜，合计超过 1,800 次。较大的彩色标记代表典型训练模式 (FIM 个人最佳下潜、FIM 慢深度训练、CWTB 冲刺下潜，以及  $D = 0$  的 STA)，阴影区域则在相同条件下摘要由资料推导的可达区间与不可达区间。浅绿色带标示经验上可行的下潜，浅红色阴影表示在纪录中未出现且在相同条件下视为不可行的下潜。此图明确展示不同下潜侧写如何映射到  $(T, D)$  空间中的不同区域，并引出表现前沿的概念。

我们以两个观测量摘要每次下潜。 $x$  轴为总下潜时间  $T$ 。 $y$  轴为最大深度  $D := \max_t z(t)$ ，如图 5 所示。时间-深度图 (T-D Diagram) 采用反向  $y$  轴： $D = 0$  在上方，深度越大越往下。

本文中的下潜侧写 (Dive Profile) 为潜水员自我产生推进力的时间历史，以原始机械力  $F_{\text{mech}}(t)$  表示。结合初始条件，力量历史  $F_{\text{mech}}(t)$  透过动态方程 14 产生轨迹  $z(t)$  与  $v(t) = \dot{z}$ ，并维持在瞬时能力限制方程 29 内。生理成本由代谢率模型方程 22 累积，且只有在累积预算保持在上限以下时才可行，即透过方程 32 的  $\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) \leq 1$ 。

由于  $F_{\text{mech}}(t)$  是时间函数，即使在固定目标深度下，仍存在无限多个可行下潜侧写。每个可行侧写在下潜时间-深度 (T-D) 图中产生唯一一点  $(T, D)$ ，而这些点的集合构成此图的基本「元素」。

将此抽象对映落实为具体训练例子是有帮助的。在我的教练课程中，恒重双蛙鞋 (CWTB) 与攀绳下潜 (FIM) 于接近个人最佳 (PB) 能力处进行，对应于该潜水员在 T-D 图中最深可行深度附近的点。在我的训练纪录中，约 30 m 的指定「慢速」下潜强调深度停留时间与受控配速，于中等  $D$  下产生较大的  $T$ 。静态闭气 (STA)，例如课程中要求的 4 min，映射到退化深度  $D = 0$  且  $T$  极大，作为限制性闭气案例时位于图的右上方。

即使未被证照标准明确强调，许多常见训练也填补了平面上的其他区域。例如，快速往返至约 20 m 的冲刺下潜会在较小  $T$  与中等  $D$  处形成点，且靠近可达区间的边界。这些例子说明核心概念：训练处方不只是「深度目标」或「时间目标」。它是一个下潜侧写的选择，而该侧写在 T-D 图上成为单一点。代表这些点的下潜侧写如图 6 所示，且同样的下潜在图 5 中以彩色标记呈现。

## 4.2 可达区间与表现前沿

扫过多个可行下潜侧写后，会在下潜时间-深度 (T-D) 图上形成散点。这些散点并非噪音。它是潜水员在固定状态与模型参数下，于物理与生理上可实现的几何足迹。

形式上，若存在力量历史  $F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}$  使其透过动态方程 14 产生轨迹  $z(t)$ ，且  $\mathcal{F}$  为符合瞬时能力限制方程 29 的力量历史集合，并透过方程 32 使  $\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) \leq 1$  满足代谢预算，则该下潜可行。每个可行侧写对应一点  $(T, D)$ ，因此所有这些点形成该潜水员在 T-D 平面中的可达区间 (Feasible Region)，如图 5 所示。

在此区间内，某些点是特别的。对固定深度  $D$ ，某些侧写能以最短时间达成该深度并返回，而另一些侧写则在不违反可行性时将下潜时间拉到最长。这两个极端包络定义了我们在 T-D 图中所称的表现前沿。



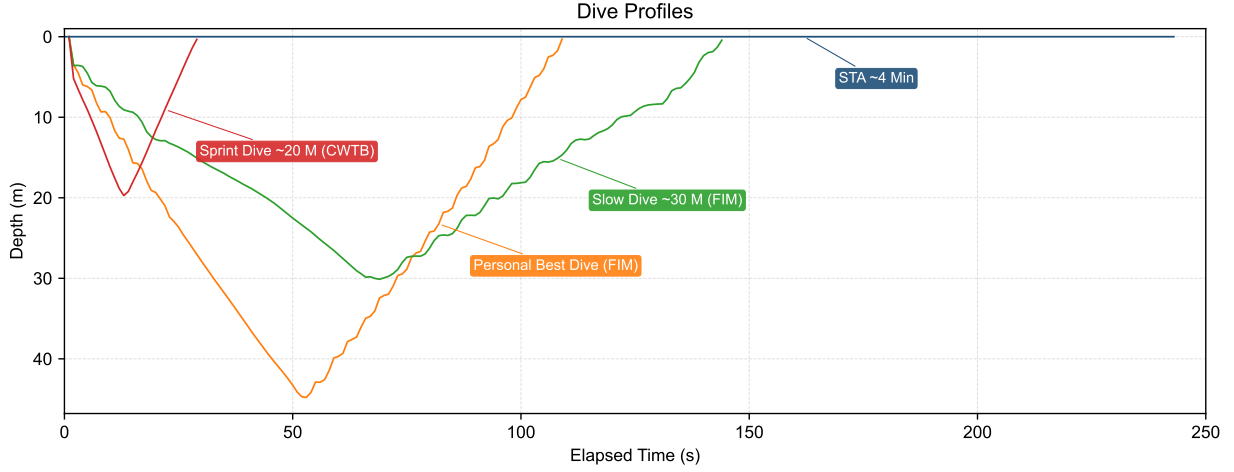


图 6: T-D 图中点所对应的代表性下潜侧写。每条曲线显示单次下潜的深度与时间关系，直接取自我的个人下潜纪录，包括个人最佳下潜 (FIM)、约 30 m 的慢深度下潜 (FIM)、约 20 m 的冲刺下潜 (CWTB)，以及  $D = 0$  的静态闭气 (STA) 轨迹。尽管这些侧写可能具有相近深度，其配速与深度停留时间差异显著，因此在时间-深度平面 (Time-Depth Plane) 中占据不同位置。这些侧写以视觉方式支撑从完整轨迹  $z(t)$  到前沿分析所用摘要点  $(T, D)$  的映射。

- **最快表现前沿 (Fast Frontier)**。对每个深度  $D$ ，定义  $T_{\text{fast}}(D) := \min_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T$  且满足  $\max_t z(t) = D$ ，其中  $z(t)$  由 方程 14 的  $F_{\text{mech}}(t)$  所产生，且  $\mathcal{F}$  中的瞬时力量与功率限制 方程 29 被满足。此定义在 图 5 中选取下包络，对应每个深度的最快可行完成时间。
- **最慢表现前沿 (Slow Frontier)**。对每个深度  $D$ ，定义  $T_{\text{slow}}(D) := \max_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T$  且满足  $\max_t z(t) = D$ ，在同样的可行条件下。此定义在 图 5 中选取上包络，对应每个深度的最慢可行完成时间。

最快与最慢前沿在散点图中是经验对象，但同时也是理论的明确目标。若模型与系数正确，向前模拟与最佳化应能再现观测包络作为  $T_{\text{fast}}(D)$  与  $T_{\text{slow}}(D)$  的函数。反之，预测与观测包络的系统性偏差会指出需要改进的约束或成本项。两条前沿的理论推导见附录 Section B。

潜水员特定的最大深度  $D_{\text{max}}$  亦隐含于同一张图中。这是指在该潜水员参数与约束下，T-D 区间内仍存在可行点的最大深度。两条前沿定义在  $D \in [0, D_{\text{max}}]$ ，而对  $D > D_{\text{max}}$  可达区间消失。

### 4.3 解析最佳化

我们已由资料定义可达区间与最快/最慢前沿，接下来以解析方式从支配方程推导这些前沿。本节陈述建模假设并概述用以取得封闭形式或半解析前沿的共通结构，完整推导则留至 Section B。本文后续使用的代理族在此引入，作为完整最佳化问题的实用解析替代。

#### 4.3.1 建模前提

为得到可处理的前沿计算，我们采用以下前提：

**准稳态垂直力学**。我们使用重新参数化的运动方程 方程 14，并在阻力主导区间工作，此时  $m\dot{v}$  相对于其他项较小，除了转折附近。

**单转折几何**。一次下潜包含一段下降至最大深度  $D$ ，与一段上升返回水面。每段内深度单调。

**推进力对齐**。潜水员产生与行进方向一致的推进力。我们以推进力大小  $f(t) := |F_{\text{mech}}(t)| \geq 0$  表示控制，方向由运动阶段（下潜 vs 上浮）处理。因此在下潜时  $F_{\text{mech}}(t) = +f(t)$ ，上浮时  $F_{\text{mech}}(t) = -f(t)$ ，符合既定符号惯例。等价地，下潜时  $F_{\text{mech}}(t) = f(t)$ ，上浮时  $F_{\text{mech}}(t) = -f(t)$ 。

**瞬时硬上限**。力量与功率上限透过 方程 29 逐点施加。当前沿解会超出上限时，控制量会在主动约束处饱和。

**预算模型。**本节的前沿计算采用氧气限制近似 (Oxygen-Limited Approximation)，以  $E_{O_2} \leq 1$  作为 [方程 32](#) 的主动累积约束。完整的双预算可行条件  $\max(E_{O_2}, E_{CO_2}) \leq 1$  仍是可行性的定义，且可在不改变力学推导的情况下加入第二个预算约束。我们假设  $CO_2$  约束在分析的区间中不具束缚性，与选定的下潜侧写与深度范围一致。

#### 4.3.2 前沿之计算作为受约束最佳化

对固定目标深度  $D$ ，若存在推进力历史  $F_{\text{mech}}(t)$  能达到  $\max_t z(t) = D$ ，且同时遵守瞬时能力约束 [方程 29](#) 与代谢预算 [方程 32](#)，则该下潜侧写可行。在氧气限制近似下，我们将预算约束写为  $R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}$ 。

与其列举「所有可能」的下潜侧写，我们将可行性边界视为一个受约束最佳化问题。这在 T-D 图中产生两条典型包络：**最小时间包络**（最快前沿）与**最大时间包络**（最慢前沿）。

最快前沿是在上述约束下的最小时间解。

$$T_{\text{fast}}(D) := \min_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T \quad \text{s.t.} \quad \max_t z(t) = D, \quad R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}. \quad (34)$$

此处  $\mathcal{F}$  表示满足 [方程 29](#) 与力学 [方程 14](#) 的力量历史集合。关键设计选择之一是避免将此视为完整的时间最适控制问题。在准稳态与单调下潜/上浮前提下，目标与预算可改写为深度座标，且此受约束问题可透过单一拉格朗日乘子得到解析刻画。实务上，这将「最佳化时间函数」转为一维乘子搜寻（预算收紧），外层包裹多个一维推进力最小化，如 [Section B.2](#) 所摘要。

另一个设计选择是**分阶段参数推论**。我们不一次将所有系数视为自由参数，而是先以量测值（如  $z_n$ 、 $v_\infty$  与能力代理）作为锚点，再以纪录下潜与少量参考表现校准剩余的生理与能力参数。一旦  $\theta$  固定，前沿计算成为前向映射  $\theta \rightarrow (T_{\text{fast}}(D), T_{\text{slow}}(D))$ ，这对后续拟合与规划至关重要。

最慢前沿是在相同约束下的最大时间解。

$$T_{\text{slow}}(D) := \max_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T \quad \text{s.t.} \quad \max_t z(t) = D, \quad R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}. \quad (35)$$

在计算上，最慢前沿重用与最快前沿相同的机制。在预算限制下最大化  $T$  等价于在同一预算下最小化  $(-T)$ ，这对应于拉格朗日式中的时间项变号，而约束结构不变。此「同一求解器、变号对称」使得可从相同的简化模型一致地计算两条包络，如 [Section B.3](#) 所述。

## 5 应用与讨论

### 5.1 表现前沿示例

本小节以实用物件的角度呈现 T-D 图：将潜水员的纪录下潜（作者个人训练纪录）叠加在由单一校准参数集计算出的理论包络曲线上。每个下潜侧写映射为一个点  $(T, D)$ ，而这些点的集合形成经验可行云。在固定模型与参数下，相同约束导致**预测可行带**，其左、右边界即为最快与最慢前沿。

我们以先前小节描述的前沿求解器，固定潜水员（作者）的状态与系数，计算 [图 7](#) 中的两条包络曲线。为透明起见，示例使用以下对使用者友善的参数值：这些参数为有效校准量，而非生理原始量的直接量测。

- 中性浮力深度： $z_n = 12 \text{ m}$ ，
- 失效深度： $z_{\text{failure}} = 30 \text{ m}$ ，其中  $z_{\text{failure}}$  表示水面完全吸气的肺被压缩至残气量的深度，
- 终端速度尺度： $v_\infty = 0.80 \text{ m s}^{-1}$ ，
- 静态参考时间： $T_{\text{STA}} = 240 \text{ s}$ ，其中  $T_{\text{STA}}$  为用作经验校准参考的静态闭气时长，
- 肺活量： $V_{\text{VC}} = 5.0 \text{ L}$ 。

这些输入暗示简化力学与氧气预算内部使用的若干导出量：

- 水面总气体体积（使用肺总量，即 VC + 残气量）： $V_{\text{gas},0} = 6.7 \text{ L}$ ，

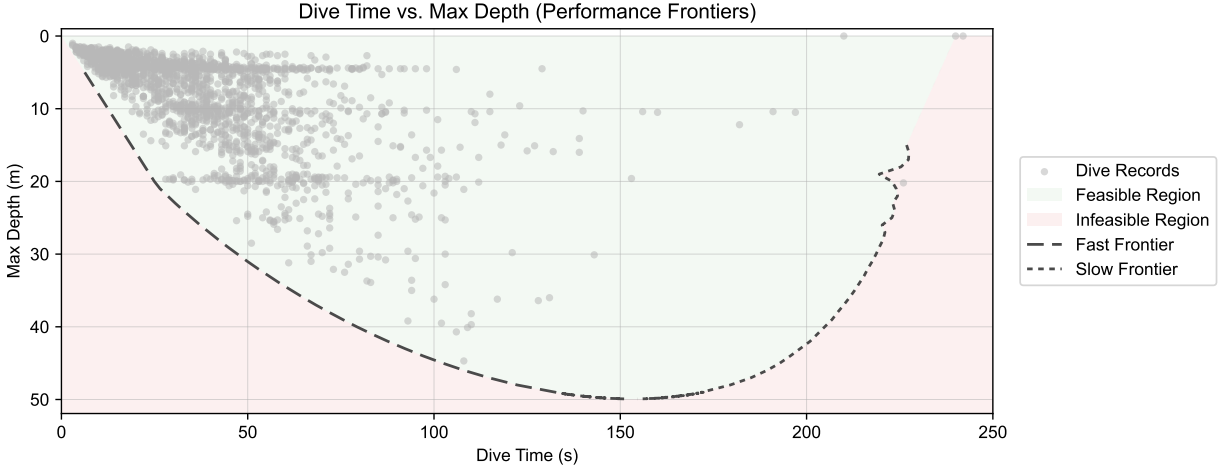


图 7: 示例最快与最慢表现前沿。灰点为作者的纪录下潜, 以总下潜时间  $T$  (x 轴) 与最大深度  $D$  (y 轴, 反向使更深下潜更低) 绘制。绿色阴影带表示模型预测的可达区间, 介于理论最快前沿 (虚线) 与最慢前沿 (点线) 之间, 而红色阴影表示在同一参数集与假设下不可行的  $(T, D)$  配对。两条包络在模型的最大深度处相遇, 超过此深度在指定预算与瞬时限制下不存在可行的往返。

- 基础耗氧率:  $\dot{V}_{O_2, \text{rest}} = 7.0 \text{ mL s}^{-1}$ ,
- 阻力常数:  $k = 48 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$ 。

此  $k$  是有效的汇总阻力常数, 可能超过仅由静态  $C_d$  与  $A$  估计的值, 因为它吸收了蛙鞋、姿势、振荡运动、装备与项目特定技术等因素。

这些氧气数值是在所选可用氧标准化下表示; 对总可用氧的替代假设会重尺度化绝对值, 而不影响相对消耗、可行性或结论。静态闭气提供整合式校准锚点, 而动态下潜成本则在同一标准化氧气预算下外推, 差异被吸收进有效的基础、 $\alpha$  与  $\beta$  项。

调整参数, 使得纪录下潜点在模型下被预测为可行, 即点云 (在噪音与未建模变异内) 落在由两条理论前沿所界定的可行带内。这是理论前沿作为诊断工具前的基本一致性要求。前沿代表的是模型假设下的可行性, 而非可达表现的保证; 偏差可能来自技术、心理因素或未建模生理。与纪录下潜的比较旨在作为质性的合理性检验, 而非精确验证, 因为实际表现受模型之外的因素影响。

两条包络的**形状**具有资讯。在此例中, 最快前沿在浅至中等深度 (约 20 m 以下) 近似线性, 并在更深处随著上浮代价增大且氧气预算开始更紧密地束缚而转为次线性。最慢前沿在极浅深度接近 STA 极限, 在约 30 m 前维持近似线性, 随深度增加则转为次线性并内折, 反映接近模型深度上限时时间上的可行窗口缩小。在此校准例中, 两条前沿在  $D \approx 50 \text{ m}$  附近、约  $T \approx 150 \text{ s}$  相交, 标示在相同条件与约束下可达的预测最大深度。

### 5.1.1 沿前沿的资源使用

除了 图 7 的几何之外, 理论前沿也揭示不同深度下**哪些约束实际上在束缚**。图 8 以图示总结此点, 绘制 (i) 峰值力量/功率使用率, 以及 (ii) 氧气预算分解, 作为最大深度的函数, 沿最快与最慢前沿评估。这使前沿曲线从「只是包络」转为可解释的限制因子帐本。

可观察到若干实务模式。首先, **最快前沿**呈现深度相依的「主动限制因子」。在浅水深度 (此例约 20 m 以下), 最快前沿主要受力量/功率限制: 最优策略是尽量逼近瞬时能力上限以最小化时间。在此区间, 即便深度不算极端, 总耗氧也接近全预算, 符合全力冲刺下潜的主观感受: 限制不是「能否待更久」, 而是「能否在不爆掉的情况下推得更硬」。约 20 m 以上, 最快前沿在各深度上转为氧气受限: 求解器必须调整推进力侧写, 使累积耗氧维持在  $R_{O_2}^{\text{total}}$  内, 峰值力量/功率使用率亦相应下降。操作上, 这是「冲刺心态」不再可行、计算最优解转向受控配速的位置。

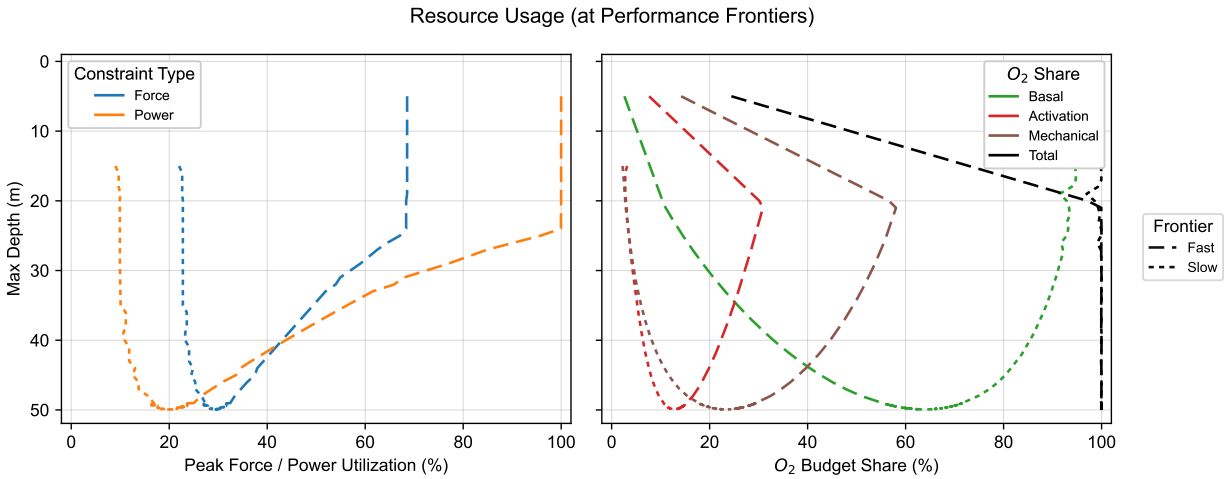


图 8: 沿最快与最慢前沿的资源使用。y 轴为最大深度  $D$  (反向使更深下潜更低)。左: 最优侧写上的峰值机械力量与峰值机械功率, 以相对于各自约束上限的百分比表示。右: 氧气预算分摊 (基础、启动与机械), 以加总至总预算的百分比呈现。虚线曲线对应最快前沿 (最小时间包络), 点线曲线对应最慢前沿 (最大时间包络)。

其次, **最慢前沿**在所示深度范围内始终为氧气受限。这与最慢包络在氧气限制预算下最大化时间的定义一致: 时间本身透过基础项成为昂贵资源。有趣的是, 此例中最慢前沿上的峰值力量与功率使用率相对较低, 且随深度变化不大, 与停留式下潜/慢速下潜的常见实务一致: 目标不是产生大峰值, 而是以温和方式到达目标深度, 并以冷静与效率管理剩余预算。

### 5.1.2 前沿最优下潜侧写

图 7 中的前沿曲线摘要了 T-D 平面上的可行性, 但求解器也会为每个目标深度产生**对应的最优下潜侧写**。图 9 与图 10 将这些侧写视觉化为深度、速度与推进力的时间序列, 代表一组典型深度目标。在两图中, 每个面板对应固定目标深度  $D$ , x 轴为经过的下潜时间, 左 y 轴为深度 (反向), 右 y 轴则为垂直速度与推进力。所有面板使用对齐的时间轴范围, 以便跨深度目标直接比较持续时间尺度。

两条前沿共享若干质性特征。在所有深度与两个包络上, 深度轨迹近似 V 形, 速度在转折点由正转负, 推进力持续调制并在下潜转为上浮时出现尖锐的符号转换。

图 9 中的最快前沿侧写凸显最佳化器如何在约束下使用推进力以最小化往返时间。一个显著模式是: 在较大深度处, 下潜速度接近深度受限的终端尺度 (此例约  $0.8 \text{ m s}^{-1}$ ), 而在浅水处则逐渐变慢, 因为浮力更为正向, 潜水员必须为向下进展「付费」。此外, 推进力通常不会在深段降为零, 除非在最深一次尝试中, 推进力在约 20 m 后放松, 这与实务上「自由下落」的直觉一致, 尽管模型是以连续受约束最优形式求解。

图 10 中的最慢前沿侧写在速度上呈现明显的「鲨鱼鳍」结构。在接近与高于中性浮力深度时, 潜水员先减速, 接著进入低推进力区间, 使下潜逐渐获得更多浮力辅助, 速度一路回升至转折点。转折后, 潜水员在浮力惩罚最大的早期上浮施加强上推力, 随著接近浅水、浮力对返回贡献增加而逐步放松推进力。此模式特别有趣, 因其在质性上与主流下潜规划经验一致, 却仍源自计算理论前沿的同一受约束最佳化框架。

比较两组前沿可知, 当目标深度为最大可行深度  $D_{\max}$  时两者相同, 两条包络收敛于同一点。从训练角度看, 前沿最优侧写也暗示**配速塑形**的重要性至少不亚于「纯粹努力」。特别是, 最慢前沿侧写倾向避免在中性浮力深度以上 (或附近) 的早期加速中「浪费」努力, 而改以调制推进力, 使速度在长区段内更接近常数, 并将较高输出保留给模型预测具有最大边际效益的区段 (例如浮力惩罚最强的早期上浮)。这一细节反驳了「越快越好地通过上层」的简化启发, 因为在水面附近不必要的冲刺会消耗额外启动/机械成本, 却无法实质改善目标深度的可行性。实务上, 这鼓励针对**受控、深度相依的配速** (特别在中性深度转折附近) 的训练, 而非仅以峰值速度或峰值推进力为唯一目标。

### Optimal Dive Profiles at Performance Frontiers (Fast)

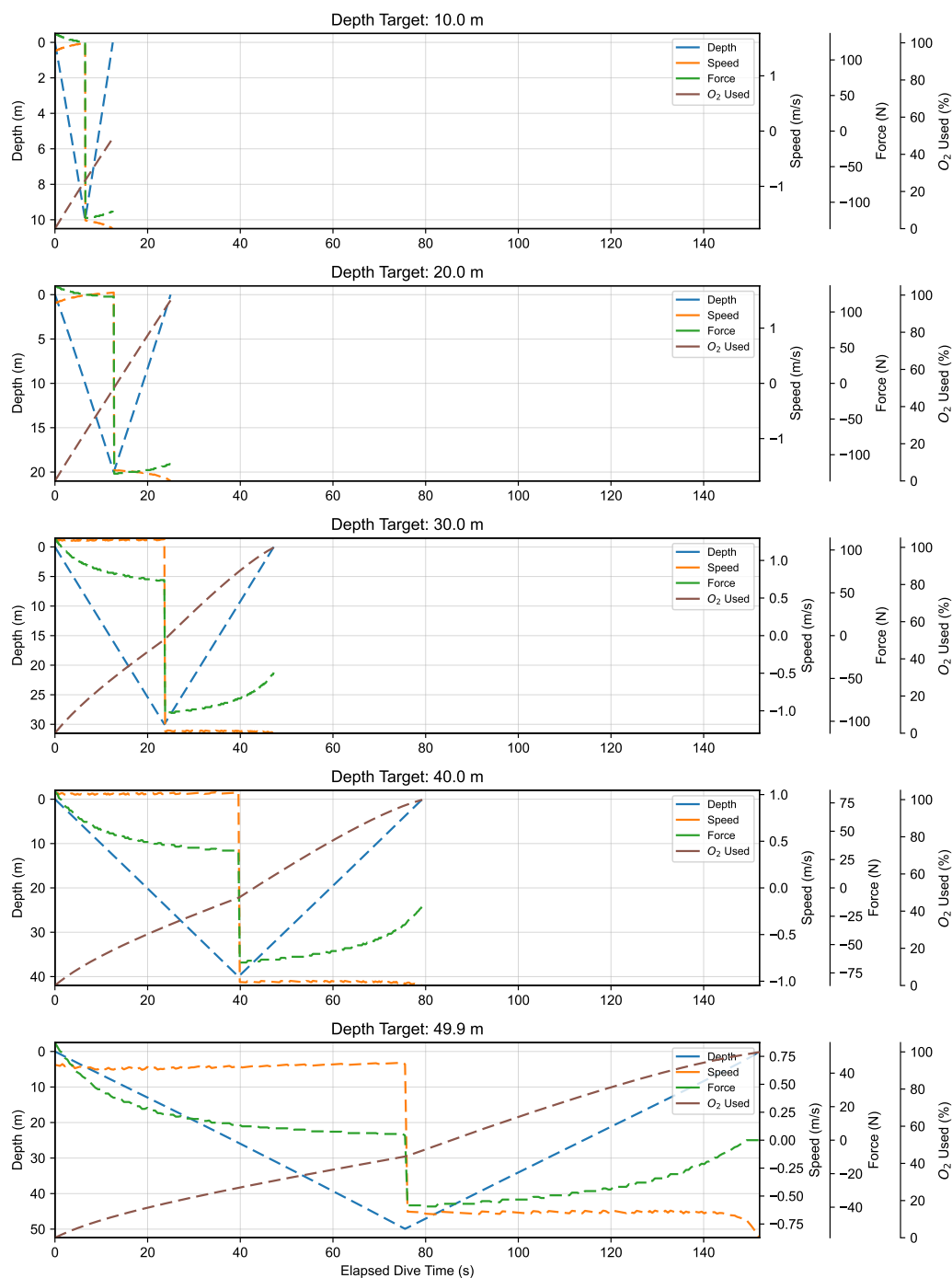


图 9: 最快前沿最优下潜侧写 (深度、速度、推进力与氧气使用)。每个面板显示在相同的瞬时力量/功率上限与氧气预算约束下, 到目标深度  $D$  的最小时间往返。深度呈现典型 V 形, 速度在转折处变号, 推进力在下潜与上浮之间持续调制并出现明显的符号翻转; 第四轴报告累积氧气使用的预算百分比。经过时间轴在各面板间对齐, 使不同深度的持续时间比较更具意义。

### 5.1.3 依努力程度的表现区带



# Optimal Dive Profiles at Performance Frontiers (Slow)

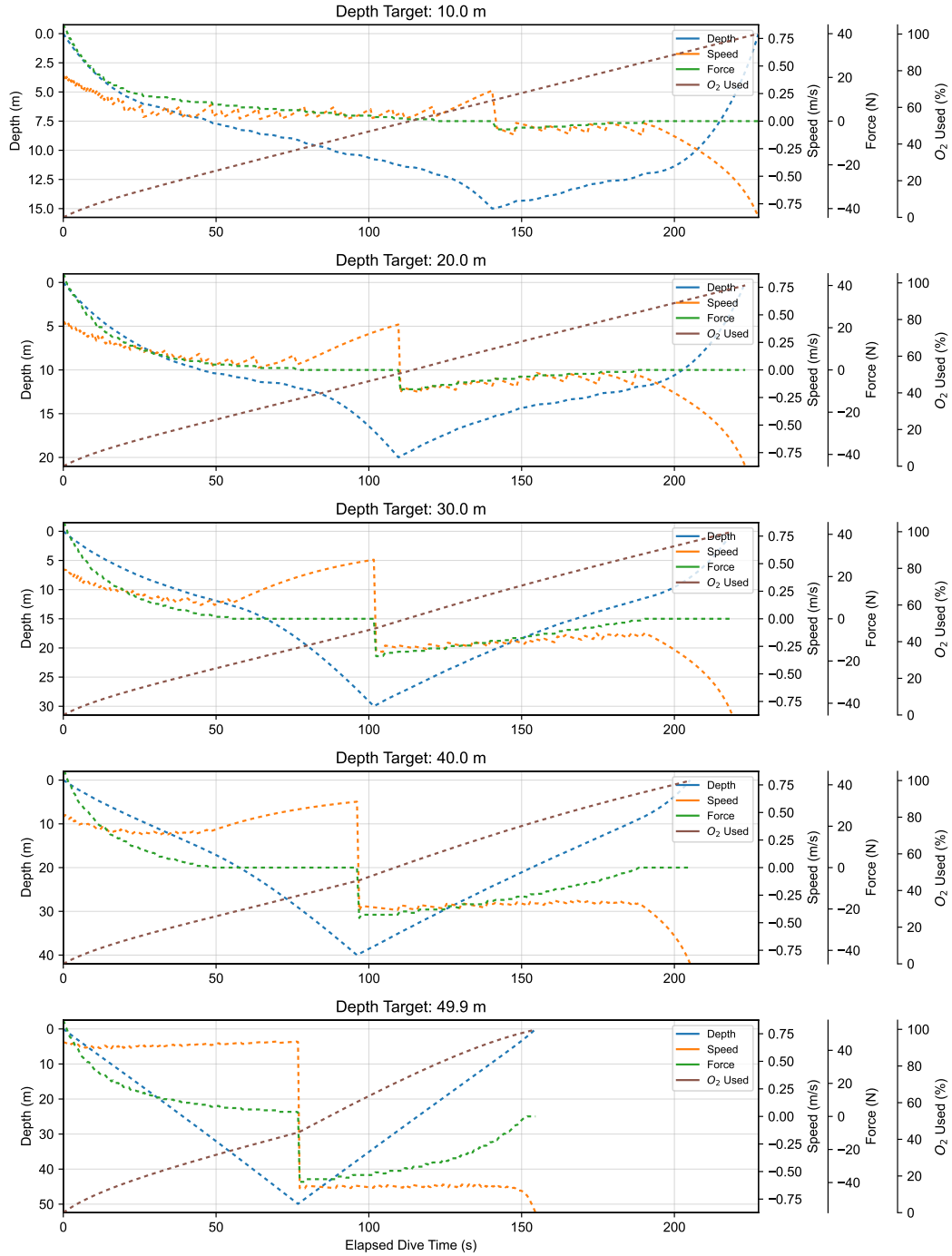


图 10: 最慢前沿最优下潜侧写 (深度、速度、推进力与氧气使用)。每个面板显示在氧气预算约束与相同瞬时上限下,到相同目标深度  $D$  的最大时间配速策略。与最快情况相同,深度呈 V 形且速度与推进力在转折处变号,但配速在推进力于深度与时间上的分配上有明显差异;第四轴报告累积氧气使用的预算百分比。经过时间轴在各面板间对齐,使不同深度的持续时间比较更具意义。

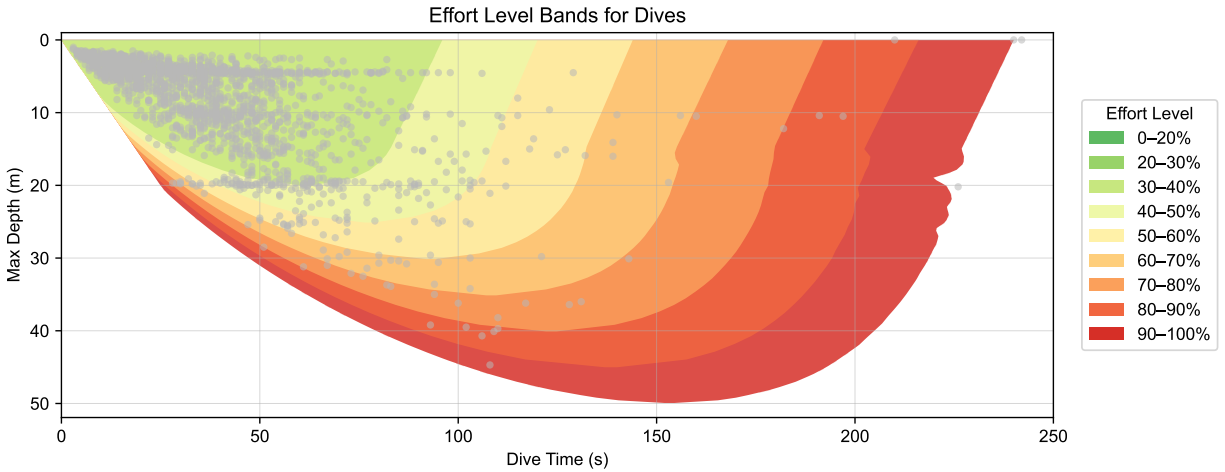


图 11: 按努力程度分层的前沿。与图 7 相同的 T-D 图，但依努力比例分层。每个彩色区带对应模型总努力  $E$  落在潜水员完整预算固定百分比范围内的下潜（例如 0–20%、20–30%、…、90–100%）。较低努力的可行集合内嵌于较高努力集合，而最外层边界（90–100%）逼近完整理论表现前沿。灰点为纪录下潜。

图 11 清楚指出可达区间不是二元的「可能 vs 不可能」集合，而是一族以单次下潜愿意付出的总预算比例为索引的巢状区域。操作上，这透过缩放总储量预算并重新求解相同的受约束前沿问题来计算，产生在特定努力程度下「多深／多久」的分层地图。

此视觉化也厘清真实训练下潜相对于模型的分布。多数纪录下潜聚集在低至中等努力区带，显示一般场次仍有相当余裕，也解释为何许多下潜虽跨多种深度与时间范围，却仍感觉例行。相较之下，接近 90–100% 的最外层区带代表模型预测边际可行的区间，条件或配速的小变化即可使计划跨越边界。

最后，努力区带有助于区分「最大可能」与「谨慎可行」。外包络最深或最长的点或许可达，但它们落在容错极小且隐含风险较高的狭窄区域。相对地，内部区带形成更广、更稳定的区域，其时间预测更可控、可行性分类也较不敏感，通常更适合安全规划与可重复训练。

## 5.2 推广性

相同的前沿构造可对多位潜水员重复使用，仅需 (i) 其纪录下潜与 (ii) 潜水员特定的参数集。本节旨在说明框架具有推广性：一旦参数调整，**相同**求解器即可产生与经验下潜点云一致的可行带，其对应的资源使用图也说明了不同深度下哪些约束在主导。

### 5.2.1 区域级冠军潜水员

第二位受试者（除我之外）是我 AIDA 2 与 AIDA 3 课程的教练。他以使用塑胶双蛙鞋在区域赛中下潜至当时接近个人最佳的 58 m、且仍对镜头「表演」——真正跳舞——而闻名。他的个人最佳纪录为 CWTB 69 m 与 STA 245 s，这些为官方／纪录 PB，而训练或项目特定最大值可能不同。

相较于我的侧写，他的校准参数在几个显著面向上不同。他的终端速度尺度较高（约  $0.85 \text{ m s}^{-1}$ ）。他的静态闭气参考时间为 245 s。他的肺活量与我相近。

在图 13 中，经验下潜填满了广泛的内部区域，而最深点则逼近模型深度上限附近的下包络。整体图像与单一潜水员例子相呼应：可行集合形成一个随深度变化的时间带，左侧由最快包络界定，右侧由最慢包络界定。在典型训练纪录中，「右墙」（最慢前沿）的采样密度低得多，这符合实务：潜水员通常在舒适区内训练，仅偶尔探测近极限的时间-深度计划，特别在较深目标时。在他的 PB 下潜中，他自述感觉「慢」，分析结果与此一致：他在该深度上比计算的最优（最短时间）侧写慢约 20 s。

图 14 的资源使用分解提供包络形状的直观解释。随深度增加，最快前沿由主要受瞬时输出（力量／功率上限）限制转向主要受累积氧气预算限制，反映从「可冲刺」的浅水下潜转为需配速的深水下潜。他的腿部驱



图 12: 区域级冠军潜水员。左：山中健行的日常照，取自他的社群媒体。(Instagram :@jje2fu02) 右：水下摄影显示他在塑胶双蛙鞋下潜时的「舞蹈」，取自比赛主办方社群媒体。(Instagram :@cat\_.fish\_ocean)

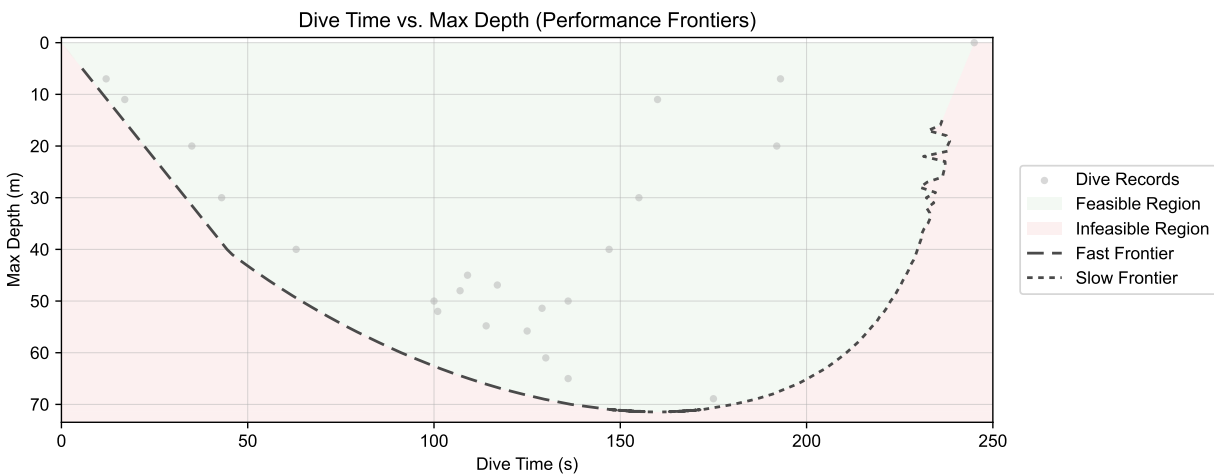


图 13: 区域级冠军潜水员的表现前沿。灰点为该潜水员的纪录下潜映射至 T-D 图。阴影背景表示在潜水员特定拟合参数集下的模型可达区间，虚线标示最快前沿（各深度最短时间），点线标示最慢前沿（各深度最长时间）。此图作为包含检查：理论可行带应在预期噪音、状况变化与纪录变异内包覆经验点云。

动力明显强于我，且功率上限较高（250 W 相较于我的 200 W），这使他能更大深度维持冲刺式下潜。他回报可冲刺至约 40 m 但无法完成真正的 45 m 冲刺下潜，与图 14 所暗示的模型转换高度一致。另一方面，最慢前沿在整个深度范围内仍以氧气为主导，符合其作为最大时间解的定义：延长  $T$  会直接增加基础成本，因此最佳化器重新分配推进力，以最小化不必要的启动与机械消耗，同时仍达到目标深度。

在我的例子与他的例子中，我们观察到一个有趣现象：我们的 STA 时间相近，且模型下最大深度的下潜时间也非常接近（约 150 s）。这暗示一个工作假说：在氧气受限规划下，「深度最大下潜时间」可能在多种能力层级间落于 STA 时间的约 65%。这进一步引出更大胆的假说：若依 AIDA 教练要求需能达成约 4 分钟静态闭气，那么在此模型假设与研究条件下，教练的能力可能已足以应付至少 50 m 至 60 m。这些观察需以更多潜水员更仔细检验，并理想上以依理论设计的训练介入进行测试，透过拟合前沿的前后变化加以评估。

### 5.2.2 世界级视角

于志瀛 (Zhiying Yu) 是来自中国的世界级自由潜水员，跨多项目保持多项纪录，包括（撰写时）CWTB (88 m) 与 FIM (112 m)。他是此主题的启发之一。在他关于「动态时间」的长篇反思影片 (Yu, 2025) 中，他反复

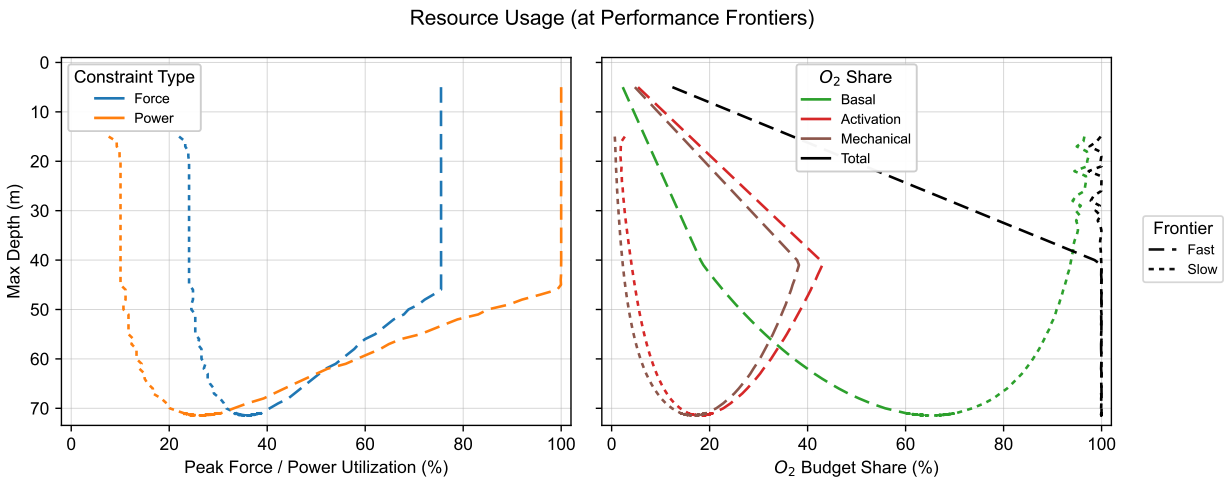


图 14: 区域级冠军潜水员前沿上的资源使用。左：沿前沿最优侧写评估的峰值力量与峰值功率使用率，相对于对应能力上限的百分比。右：沿同一侧写评估的氧气预算分摊（基础、启动与机械），分别呈现最快与最慢包络。这些面板透过指示不同深度下哪些约束绑定，以及包络如何接近深度上限时变形，来诠释 图 13。



图 15: 于志瀛 (Zhiying Yu) 在训练反思影片中讨论「动态时间」、上浮瓶颈与深度与泳池动态之间的有限转移。在本小节中，他的质性观察被用作可行性、约束切换与前沿代理训练的外部对照。

回到一个与本框架高度契合的主题：原始下潜时间  $T$  是一个重要可观测量，但它不是可单独最佳化的对象。他以直白的声明开场：「Dive Time 可能是一个伪命题」（「下潜时间可能是个伪命题」），并强调「最终以个人感受为主」（「最终以个人感受为主」）。

此观点与我们理论中 T-D 图的角色直接对齐。该图使用  $T$  作为坐标轴，因其可量测且具操作性，但可行性由累积预算与约束支配，而非仅由时间决定。这也解释了为何我们后续解读前沿时，不仅看其在 T-D 平面上的几何包络，也看对应的约束使用（力量、功率）与氧气预算分解。

**约束切换与上浮瓶颈。**于的反思核心线索是他的限制因子在上浮：「最大的问题跟短板是回程的速度慢」（「我最大的问题与短板是回程速度慢」），他描述上浮速度约  $0.6-0.7 \text{ m s}^{-1}$ ，而菁英男性潜水员常在  $0.9-1.0 \text{ m s}^{-1}$ 。以前沿语言而言，这是约束切换的典型例子。在浅水深度，潜水员可能主要受瞬时能力（力量／功率）限制，但随深度增加，上浮成为需要持续支付阻力与浮力的区段，解也对上浮侧能力与耗氧变得更敏感。模型因此精确预测其体感经验：下潜仍可舒适，但上浮成为绑定约束，将最快前沿向右推移（相同  $D$  下更大的  $T$ ）。如图 10 最后一面板所示，在最大表现下潜中，下潜仅耗用约 40% 的预算，与他的感受相符。

**为何下潜时间看似「项目不变」。**于回报一个有趣的规律：「我的 dive time 不受项目所影响」（「我的下潜时间不受项目影响」），描述在接近 PB 等级的下潜时间时，不同项目会收敛到相似的末期感受。以下是他在训练中自述的下潜资料供参考：

- 
- CNF：76 m，250 s，
  - FIM：106 m，263 s，以及
  - CWTB：96 m，249 s。

在本框架下，若单一全局限制因子在不同项目间主导，就可能出现此现象。这些资料点与他在 STA 的个人最佳 402 s 相比，落在 60–65% 范围内，与本研究的假说一致。

若决定性瓶颈是「上浮变得昂贵时剩余多少可用氧气预算」，则不同推进风格仍可收敛到相近的总时间，即便局部力学与主观感受在下潜过程中不同。这为潜水员在不同项目间出现时间不变的经验提供了原则性解释，同时仍保留项目特定的技术弱点。

**训练意涵与代理前沿的吸引力。**最后，于将自身发展描述为部分偶然：他提到使用一种笨拙的方法，即反复推 PB 下潜而被迫适应，并提出是否存在更安全的方式：将部分深度强迫低氧暴露转为更安全、更可控的浅深度停留训练。这个问题正是本文提出代理表现前沿（Proxy Frontier）的实务动机。停留式下潜的最慢前沿代理集中氧气预算压力，同时降低机械风险与后勤变异，且更易参数化与重复，对训练设计与从纪录拟合潜水员特定系数都很重要。

综合而言，于的叙事为理论提供了外部质性检验。他独立强调 (i) 将下潜时间作为唯一目标的局限，(ii) 性能绑定因子随深度变化（常在上浮侧），以及 (iii) 用更安全的代理方案针对相关预算的价值，这些皆为本文可行性与前沿视角的结构特征。



---

## 6 结论

本研究提出一个从物理到生理的正式框架，以**表现前沿**的视角理解自由潜水表现。我们不将「最佳表现」视为单一纯量指标，而是将表现定义为  $(T, D)$  平面中的可达区间——总下潜时间  $T$  对最大深度  $D$ ——并以最快与最慢前沿包络来刻画其边界。透过结合流体力学、身体力量、运动约束，以及资源受限的生理成本建模，前沿成为一个良定的可计算对象：它可由明确假设推导、以量化工具求解，并在机制上加以诠释。

此框架的一个关键贡献在于其并非纯理论。我们展示如何以真实自由潜水员资料具体化并校准模型，产生潜水员特定的可达区间与前沿预测。模型参数——例如有效阻力、力量与功率上限，以及有效代谢成本项——成为量化受限的代理，将理论锚定于观测表现，使得不同潜水员、项目与训练状态之间可进行有意义的比较。

超越预测，前沿也扮演诊断工具。许多常被报导的自由潜水现象自然表现为跨深度与配速区段的**约束切换**：前沿的不同区段由不同的力学与生理预算组合所限制。此视角将「什么限制下潜」从质性直觉转为结构化问题：哪些约束绑定、在何处、以及强度为何？重要的是，虽然绝对氧气储量与消耗率难以高精度直接量测——尤其在闭气条件下——本框架仍可透过相对、预算标准化的耗氧处理保持可操作性。在此标准化下，即使绝对隔室可及性不确定，对可行性、区段转换与训练杠杆的结论仍具可解释性。

最后，此框架提供与专家经验式启发一致且可检验的训练指引。模型辨识出扩张可行表现的具体杠杆——降低有效阻力、在力量／功率上限内提升可用推进力上限、改善惩罚机械功的效率项，以及在下潜与上浮间塑造配速／努力分配。透过此方式，表现前沿统一了说明与介入：它提供从观测下潜行为到限制机制与训练方向的量化地图，使自由潜水表现的提升更具系统性与个别化。

## References

- AIDA International. AIDA 4 Freediver Manual (v1.03 ed.), 2020.
- AIDA International. AIDA 3 Freediver Manual (v1.06 ed.), 2021.
- Barbosa, T. M., Ramos, R., Silva, A. J., and Marinho, D. A. Assessment of passive drag in swimming by numerical simulation and analytical procedure. *Journal of Sports Sciences*, 36(5), 492–498, 2018.
- Bezruk, D., Bahenský, P., Marko, D., Krajcigr, M., Bahenský Jr, P., Novák-Nowická, E., and Mrkvička, T. The Effect of Static Apnea Diving Training on the Physiological Parameters of People with a Sports Orientation and Sedentary Participants: A Pilot Study. *Sports*, 12(6), 140, 2024.
- Billat, V. L., Sirvent, P., Py, G., Koralsztein, J.-P., and Mercier, J. The concept of maximal lactate steady state: a bridge between biochemistry, physiology and sport science. *Sports Medicine*, 33(6), 407–426, 2003.
- Bonen, A., Wilson, B., Yarkony, M., and Belcastro, A. Maximal oxygen uptake during free, tethered, and flume swimming. *Journal of Applied Physiology*, 48(2), 232–235, 1980.
- Bosco, G., Di Tano, G., Zanon, V., and Fanò, G. Breath-hold diving: a point of view. *Sport Sciences for Health*, 2(2), 47–54, 2007.
- Cortesi, M., and Gatta, G. Effect of The Swimmer's Head Position on Passive Drag. *Journal of Human Kinetics*, 49, 37–45, 2015. <https://doi.org/10.1515/hukin-2015-0106>
- Declercq, L., Bouten, J., Van Dyck, M., Boone, J., Derave, W., Heyse, B., and Bourgois, J. G. A dive into the physiological responses to maximal apneas, O<sub>2</sub> and CO<sub>2</sub> tables in apnea novices. *European Journal of Applied Physiology*, 124(12), 3593–3606, 2024.
- Deschodt, V., Arsac, L., and Rouard, A. Relative contribution of arms and legs in humans to propulsion in 25-m sprint front-crawl swimming. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*, 80(3), 192–199, 1999.
- Ferretti, G. Extreme human breath-hold diving. *European Journal of Applied Physiology*, 84(4), 254–271, 2001.

- 
- Fitz-Clarke, J. R. Breath-hold diving. *Comprehensive Physiology*, 8(2), 585–630, 2018.
- González-Badillo, J. J., and Sánchez-Medina, L. Movement velocity as a measure of loading intensity in resistance training. *International Journal of Sports Medicine*, 31(5), 347–352, 2010.
- Levine, B. D., and Stray-Gundersen, J. ``Living high-training low'': effect of moderate-altitude acclimatization with low-altitude training on performance. *Journal of Applied Physiology*, 83(1), 102–112, 1997.
- Lindholm, P., and Lundgren, C. E. The physiology and pathophysiology of human breath-hold diving. *Journal of Applied Physiology*, 106(1), 284–292, 2009.
- Marinho, D. A., Reis, V. M., Alves, F. B., Vilas-Boas, J. P., Machado, L., Silva, A. J., and Rouboa, A. I. Hydrodynamic drag during gliding in swimming. *Journal of Applied Biomechanics*, 25(3), 253–257, 2009. <https://doi.org/10.1123/jab.25.3.253>
- Massini, D. A., Scaggion, D., Oliveira, T. P. de, Macedo, A. G., Almeida, T. F., and Pessôa Filho, D. M. Training methods for maximal static apnea performance: a systematic review and meta-analysis. *The Journal of Sports Medicine and Physical Fitness*, 63(1), 77–85, 2022.
- Michael Panneton, W. The mammalian diving response: an enigmatic reflex to preserve life?. *Physiology*, 28(5), 284–297, 2013.
- Monod, H., and Scherrer, J. The work capacity of a synergic muscular group. *Ergonomics*, 8(3), 329–338, 1965.
- Morouço, P. G., Marinho, D. A., Izquierdo, M., Neiva, H., and Marques, M. C. Relative contribution of arms and legs in 30 s fully tethered front crawl swimming. *Biomed Research International*, 2015(1), 563206, 2015.
- Morouço, P., Keskinen, K. L., Vilas-Boas, J. P., and Fernandes, R. J. Relationship between tethered forces and the four swimming techniques performance. *Journal of Applied Biomechanics*, 27(2), 161–169, 2011.
- Muralidhar, S. S., Marin, N., Melick, C., Alwan, A., Wang, Z., Baldwin, R., Walcott, S., and Srinivasan, M. Metabolic cost for isometric force scales nonlinearly and predicts how humans distribute forces across limbs. *Biorxiv*, 2023.
- Novais, M. L., Silva, A. J., Mantha, V. R., Ramos, R. J., Rouboa, A. I., Vilas-Boas, J. P., Luís, S. R., and Marinho, D. A. The Effect of Depth on Drag During the Streamlined Glide: A Three-Dimensional CFD Analysis. *Journal of Human Kinetics*, 33, 55–62, 2012. <https://doi.org/10.2478/v10078-012-0044-2>
- Padilla, S. Scientific bases for precompetition tapering strategies. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 2003.
- Patrician, A., Dujčić, Ž., Spajić, B., Drviš, I., and Ainslie, P. N. Breath-hold diving—the physiology of diving deep and returning. *Frontiers in Physiology*, 12, 639377, 2021.
- Poole, D. C., Burnley, M., Vanhatalo, A., Rossiter, H. B., and Jones, A. M. Critical power: an important fatigue threshold in exercise physiology. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 48(11), 2320, 2016.
- Périard, J. D., Racinais, S., and Sawka, M. N. Adaptations and mechanisms of human heat acclimation: applications for competitive athletes and sports. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 25, 20–38, 2015.
- Samozino, P., Rejc, E., Di Prampero, P. E., Belli, A., and Morin, J.-B. Optimal force–velocity profile in ballistic. *Med Sci Sports Exerc*, 44, 313–322, 2012.

- 
- Seiler, K. S., and Kjerland, G. Ø. Quantifying training intensity distribution in elite endurance athletes: is there evidence for an ``optimal'' distribution?. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 16(1), 49–56, 2006.
- Toussaint, H. M., and Hollander, A. P. Energetics of competitive swimming: implications for training programmes. *Sports Medicine*, 18(6), 384–405, 1994.
- Toussaint, H. M., Knops, W., De Groot, G., and Hollander, A. P. The mechanical efficiency of front crawl swimming. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 22(3), 402–408, 1990.
- Trassinelli, M. Energy cost and optimisation in breath-hold diving. *Journal of Theoretical Biology*, 396, 42–52, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.02.009>
- Vinetti, G., Taboni, A., Fagoni, N., Tam, E., Lundby, C., and Ferretti, G. Energetics of Underwater Swimming in Apnea. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 57(9), 2053–2061, 2025. <https://doi.org/10.1249/MSS.0000000000003731>
- Yu, Z. Divetime 的全面质变. RedNote, 2025, August 1. <http://xhslink.com/o/5L5ntMLBFnk>
- Zamparo, P., Cortesi, M., and Gatta, G. The energy cost of swimming and its determinants. *European Journal of Applied Physiology*, 120(1), 41–66, 2020.
- Zamparo, P., Pendergast, D. R., Termin, A., and Minetti, A. E. Economy and efficiency of swimming at the surface with fins of different size and stiffness. *European Journal of Applied Physiology*, 96(4), 459–470, 2006.

## A 符号表

符号	意义／典型值
$z$	深度（向下为正）。
$v$	垂直速度， $v = \dot{z}$ 。
$\dot{v}$	垂直加速度。
$t$	时间。
$m$	潜水员 + 装备质量。
$g$	重力加速度。
$F_{\text{mech}}(t)$	自我产生的推进力（向下为正）。
$F_{\text{mech}}^{\text{max}}$	最大瞬时推进力上限， $F_{\text{mech}}^{\text{max}} \approx 200 \text{ N}$ 。
$B(z)$	浮力， $B(z) = \rho_w g V_{\text{disp}}(z)$ 。
$V_{\text{disp}}(z)$	总排水体积。
$V_{\text{const}}$	深度处近乎不可压缩的排水体积（使用防寒衣深度上限时吸收其效应）。
$V_{\text{suit}}(z)$	防寒衣可压缩体积（可选）。
$V_{\text{gas}}(z)$	深度处可压缩气体体积（波以耳压缩）。
$V_{\text{gas},0}$	水面气体体积（肺 + 相通气腔）。
$P(z)$	静水压， $P(z) = P_0 + \rho_w g z$ 。
$P_0$	水面压力。
$L_p$	压力长度， $L_p := P_0 / (\rho_w g)$ 。
$\rho_w$	海水密度。
$F_{\text{drag}}(v)$	流体阻力（与运动方向相反）。
$k$	阻力常数， $k := (1/2)\rho_w C_{\downarrow} A$ 。
$C_{\downarrow}$	阻力系数， $C_{\downarrow} \approx 0.6\text{--}0.8$ 。
$A$	有效正向截面积， $A \approx 0.05\text{--}0.07 \text{ m}^2$ 。
$\Delta F_{\infty}$	深处净载重， $\Delta F_{\infty} := mg - \rho_w g V_{\text{const}}$ 。
$z_n$	中性浮力深度， $mg = B(z_n)$ 。
$z_{\text{failure}}$	失效深度：肺压缩迫使完全吐气的深度（用于由 $V_{\text{VC}}$ 估计 $V_{\text{TLC}}$ ）。
$v_{\infty}$	深处终端速度（若 $\Delta F_{\infty} > 0$ ）， $v_{\infty} := \sqrt{\Delta F_{\infty} / k}$ 。
$\Delta F(z)$	随深度变化的净载重， $\Delta F(z) := mg - B(z)$ 。
$\tilde{z}$	无因次深度， $\tilde{z} := z / L_p$ 。
$\tilde{z}_n$	无因次中性深度， $\tilde{z}_n := z_n / L_p$ 。
$\tilde{v}$	无因次速度， $\tilde{v} := v / v_{\infty}$ 。
$\tilde{t}$	无因次时间， $\tilde{t} := v_{\infty} / L_p t$ 。
$\tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t})$	无因次推进力， $\tilde{F}_{\text{mech}} := F_{\text{mech}}(t) / \Delta F_{\infty}$ 。
$\lambda$	无因次惯性参数， $\lambda := m / (k L_p)$ 。
$\dot{V}_{\text{O}_2}$	可用氧储量的耗竭速率。
$\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}}$	闭气时可用氧储量的基础耗竭速率， $\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} \approx 2.5\text{--}4 \text{ mL s}^{-1}$ 。
$\alpha$	启动／等长额外成本系数。
$F_{\text{ref}}$	启动项的参考力。
$T_{\text{STA}}$	用于锚定基础耗氧的静态闭气参考时间。
$V_{\text{VC}}$	用于氧气预算校准的肺活量。

$p$	启动指数。
$\beta$	功率转换为 $O_2$ 的系数， $\beta := 1/(\eta e_{O_2})$ 。
$\eta$	总效率， $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$ 。
$e_{O_2}$	每 mL $O_2$ 的能量， $e_{O_2} \approx 20.1 \text{ J mL}^{-1}$ 。
$P_{\text{mech}}(t)$	正机械功率， $P_{\text{mech}}(t) := (F_{\text{mech}}(t) \cdot v(t))_+$ 。
$P_{\text{mech}}^{\max}$	最大瞬时机械功率上限， $P_{\text{mech}}^{\max} \approx 120 \text{ W}$ 。
$\dot{V}_{\text{CO}_2}$	瞬时 $\text{CO}_2$ 生成率。
$\gamma$	$\text{CO}_2$ 与 $O_2$ 的转换因子， $\gamma \approx 0.85\text{--}0.95$ 。
$R_{O_2}(T)$	累积耗氧， $R_{O_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{O_2} dt$ 。
$R_{\text{CO}_2}(T)$	累积 $\text{CO}_2$ 生成， $R_{\text{CO}_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{\text{CO}_2} dt$ 。
$R_{O_2}^{\text{total}}$	可用氧储量（预算）。
$R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$	有效 $\text{CO}_2$ 耐受预算。
$E_{O_2}$	以 $O_2$ 为基础的努力程度， $E_{O_2} := R_{O_2}(T)/R_{O_2}^{\text{total}}$ 。
$E_{\text{CO}_2}$	以 $\text{CO}_2$ 为基础的努力程度， $E_{\text{CO}_2} := R_{\text{CO}_2}(T)/R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$ 。

## B 理论前沿

本附录推导在瞬时能力限制与氧气预算下的模型预测最快与最慢前沿  $T_{\text{fast}}(D)$  与  $T_{\text{slow}}(D)$ 。我们在氧气限制近似下进行（暂不考虑  $\text{CO}_2$ ），并使用本文已介绍的准稳态、重新参数化力学。

### B.1 共通假设与记号

**深度与阶段。** 深度  $z \geq 0$  向下为正，水面  $z = 0$ 。一次下潜在最大深度  $D$  有单一转折点，先单调下潜再单调上浮。

**控制。** 令推进力大小  $f(t) := |F_{\text{mech}}(t)| \geq 0$ 。推进力方向与运动一致：下潜用  $F_{\text{mech}}(t) = +f$ ，上浮用  $F_{\text{mech}}(t) = -f$ 。

**准稳态力学（阻力主导）。** 定义被动漂移项

$$s(z) := v_{\infty}^2 \frac{z - z_n}{L_p + z}, \quad (36)$$

其中  $v_{\infty}$  为深处终端速度尺度， $z_n$  为中性浮力深度， $L_p$  为压力长度。在  $k$  常数（推进力对阻力系数）下，准稳态平衡为

$$v|v| = s(z) + \frac{F_{\text{mech}}}{k}. \quad (37)$$

因此速度大小为

$$v_{\downarrow}(z; f) = \sqrt{\frac{f}{k} + s(z)}, \quad v_{\uparrow}(z; f) = \sqrt{\frac{f}{k} - s(z)}. \quad (38)$$

可行性要求平方根内在相关深度范围非负。

**瞬时限制（硬上限）。**

$$0 \leq f \leq F_{\text{mech}}^{\max}, \quad f v_{\downarrow}(z; f) \leq P_{\text{mech}}^{\max}(\text{descent}), \quad f v_{\uparrow}(z; f) \leq P_{\text{mech}}^{\max}(\text{ascent}). \quad (39)$$

这些定义各深度上的可行集合  $\mathcal{F}_{\downarrow}(z)$  与  $\mathcal{F}_{\uparrow}(z)$ 。

**耗氧模型（氧气限制）。**



$$\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p + \beta P_{\text{mech}}, \quad P_{\text{mech}} = F_{\text{mech}} \cdot v. \quad (40)$$

定义有效氧气预算为  $R^{\text{total}}$ 。

### B.1.1 时间的深度域表述

以深度参数化每个单调段。因为  $dt = \frac{dz}{v}$ ，到达深度  $D$  的下潜总时间为

$$T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] = \int_0^D \frac{dz}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}(z))} + \int_0^D \frac{dz}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}(z))}. \quad (41)$$

### B.1.2 耗氧的深度域表述

将氧气分为时间积分的基础/力量项，与时间积分的功率项。

**基础 + 力量项。**

在每一段，

$$\int \left( \dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right) dt = \int \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v(z; f(z))} dz. \quad (42)$$

**功率项恒等式。**

在推进力对齐且单调运动时， $P_{\text{mech}} = f|v|$  且  $dz = |v| dt$ ，因此

$$\int \beta P_{\text{mech}} dt = \beta \int f dz. \quad (43)$$

**完整耗氧泛函。**

因此总耗氧为

$$\begin{aligned} R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] &= \int_0^D \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f_{\downarrow}(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}(z))} dz + \beta \int_0^D f_{\downarrow}(z) dz \\ &\quad + \int_0^D \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f_{\uparrow}(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}(z))} dz + \beta \int_0^D f_{\uparrow}(z) dz. \end{aligned} \quad (44)$$

可行性要求

$$R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z) \quad \text{for } z \in [0, D]. \quad (45)$$

## B.2 最快前沿推导

### B.2.1 以受约束最小时间问题定义最快前沿

对每个深度  $D$ ，理论最快前沿为

$$T_{\text{fast}}(D) := \min_{f_{\downarrow}(\cdot), f_{\uparrow}(\cdot)} T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \quad \text{s.t.} \quad R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (46)$$

### B.2.2 拉格朗日放松与 KKT 条件

引入  $\lambda \geq 0$  并定义

$$\mathcal{J}_{\text{fast}}[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}; \lambda] := T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] + \lambda(R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] - R^{\text{total}}). \quad (47)$$

在最优  $(f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*, \lambda^*)$  下的 KKT 条件：

$$\lambda^* \geq 0, \quad R[f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*] \leq R^{\text{total}}, \quad \lambda^*(R[f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*] - R^{\text{total}}) = 0. \quad (48)$$

因此，

- 预算不活跃：  $R < R^{\text{total}} \rightarrow \lambda^* = 0$ ，
- 预算活跃：  $R = R^{\text{total}} \rightarrow \lambda^* > 0$ 。

### B.2.3 深度逐点最优性（关键简化）

由于  $\mathcal{J}_{\text{fast}}$  不包含导数  $f'(z)$ ，固定  $\lambda$  下的最小化可在  $z$  上逐点分离。定义每个深度的被积函数：  
下潜。

$$\varphi_{\downarrow}(z, f; \lambda) = \frac{1 + \lambda \left( \dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right)}{v_{\downarrow}(z; f)} + \lambda \beta f, \quad f \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z). \quad (49)$$

上浮。

$$\varphi_{\uparrow}(z, f; \lambda) = \frac{1 + \lambda \left( \dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right)}{v_{\uparrow}(z; f)} + \lambda \beta f, \quad f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (50)$$

则对每个深度  $z$ ，

$$f_{\downarrow}^{\lambda}(z) \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z)} \varphi_{\downarrow}(z, f; \lambda), \quad f_{\uparrow}^{\lambda}(z) \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z)} \varphi_{\uparrow}(z, f; \lambda). \quad (51)$$

这提供对最优控制的解析刻画：每个深度上一维函数的最小化，必要时在可行边界饱和。

### B.2.4 内部驻点条件

当最小值落在内部（无主动饱和）时，满足  $\partial_f \varphi = 0$ 。令

$$g(f; \lambda) = 1 + \lambda \left( \dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left( \frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right), \quad g'(f; \lambda) = \lambda \alpha p \frac{f^{p-1}}{F_{\text{ref}}^p}. \quad (52)$$

且

$$\frac{dv_{\downarrow}(z; f)}{df} = \frac{1}{2kv_{\downarrow}}, \quad \frac{dv_{\uparrow}(z; f)}{df} = \frac{1}{2kv_{\uparrow}}. \quad (53)$$

则驻点方程具有统一形式（下潜取  $v = v_{\downarrow}$ ，上浮取  $v = v_{\uparrow}$ ）：

$$\lambda \beta + \frac{g'(f; \lambda)}{v(z; f)} - \frac{g(f; \lambda)}{2kv(z; f)^3} = 0. \quad (54)$$

一般而言，这是  $f$  的隐式方程（解析驻点条件），实际解为分段式：

- 若在  $\mathcal{F}(z)$  内的内部解由驻点方程给出，
- 否则夹制于主动边界（ $f = F_{\text{mech}}^{\text{max}}$ ）或  $fv = P_{\text{mech}}^{\text{max}}$ （以及/或平方根可行性边界）。

### B.2.5 确定 $\lambda^*(D)$

定义由  $\lambda$  所诱发的耗氧：

$$R(\lambda; D) := R[f_{\downarrow}^{\lambda}, f_{\uparrow}^{\lambda}]. \quad (55)$$

则

$$\lambda^*(D) = \begin{cases} 0 & \text{if } R(0; D) \leq R^{\text{total}} \\ \text{solve } R(\lambda; D) = R^{\text{total}} & \text{for } \lambda > 0 \text{ if } R(0; D) > R^{\text{total}} \end{cases} \quad (56)$$

在此表述下，增加  $\lambda$  会使耗氧成本加重，通常增加时间并降低耗氧，因此  $R(\lambda; D)$  在实务上具有足够的单调性，允许稳健的根搜寻（例如二分法）。

### B.2.6 最快前沿曲线的最终评估

一旦  $\lambda^*(D)$  确定，

$$T_{\text{fast}}(D) = \int_0^D \frac{dz}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}^{\lambda^*}(z))} + \int_0^D \frac{dz}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}^{\lambda^*}(z))}. \quad (57)$$

扫描  $D$  即可得到模型预测的最快前沿  $T_{\text{fast}}(D)$ 。不存在可行上浮解的深度即为预测深度上限。

### B.3 最慢前沿推导

对每个深度  $D$ ，理论最慢前沿定义为在相同力学、上限与氧气预算下的最大时间问题：

$$T_{\text{slow}}(D) := \max_{f_{\downarrow}(\cdot), f_{\uparrow}(\cdot)} T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \quad \text{s.t.} \quad R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (58)$$

如同最快前沿推导，我们在深度域中工作，并以可行集合  $\mathcal{F}_{\downarrow}(z)$  与  $\mathcal{F}_{\uparrow}(z)$  逐点施加可行性。

引入氧气约束的乘子  $\lambda \geq 0$ ，并考虑等价的最小化问题

$$\max T \quad \text{subject to} \quad R \leq R^{\text{total}} \iff \min(-T) \quad \text{subject to} \quad R \leq R^{\text{total}}. \quad (59)$$

定义最慢前沿的拉格朗日式

$$\mathcal{J}_{\text{slow}}[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}; \lambda] := (-T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}]) + \lambda(R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] - R^{\text{total}}). \quad (60)$$

在深度表述中，相对于最快前沿唯一改变的是时间泛函前的符号。因此，最快前沿推导中所有导致深度局部最优性的步骤都可直接套用，仅需替换

$$(+1) \text{ in the time integrand} \rightarrow (-1). \quad (61)$$