

自由潛水中的表現前沿 (Performance Frontier)：探索性分析

Tzu-Ming (Harry) Hsu

獨立研究者

臺北

臺灣

stmharry@alum.mit.edu

Abstract

背景：自由潛水 (Freediving) 表現源於水下力學與閉氣生理之間的緊密耦合。然而，訓練實務與科學討論常將表現視為孤立的個人最佳 (深度、時間)，而非一個有結構的權衡空間。本研究將自由潛水表現表述為時間-深度平面 (Time-Depth Plane) 中的可達區間 (Feasible Region)，並將其邊界視為表現前沿 (Performance Frontier) 來加以研究。

方法：我們將一次下潛建模為由推進力在浮力、重量與阻力作用下產生的深度軌跡 $z(t)$ ，並同時受瞬時能力限制 (例如力量與功率上限) 以及累積式的生理預算 (氧氣，以及必要時的二氧化碳) 所約束。機械需求透過一個以預算為導向的代謝代理模型映射為資源消耗，該模型納入基礎成本、力量產生與機械功率。可行下潛是指同時滿足所有限制與預算者，而表現前沿則定義為此可行集合在參數空間中的邊界。我們透過受約束的最佳化計算前沿，並以真實自由潛水者的資料 (含作者本人的下潛紀錄) 擬合有效參數以具體化此框架。

結果：模型在總下潛時間 T 對最大深度 D 的時間-深度圖 (T-D Diagram) 中產生結構化的可達區間，並得到與觀測下潛群集性質上相符的前沿。約束切換分析顯示隨深度變化的區段轉換 (例如能力受限與預算受限的區段)，並指出沿著前沿最優側寫 (Frontier-Optimal Profile) 的特徵性配速與推進力分配模式。在此建模之下，預測的可行邊界與訓練槓桿在入門與進階潛水員之間相當一致，凸顯前沿幾何的實用性。

意涵：表現前沿提供一個量化視角以統一解釋與介入：它能從下潛資料診斷可能的限制機制，並提出可操作的訓練方向。例如，降低有效阻力、移動可用推進力上限、改善有效效率項，以及塑造配速／努力分配。更廣泛地說，該框架以可計算的可行邊界取代單點表現指標，提供一條比較潛水員、項目與訓練狀態的原則性途徑。

1 引言

自由潛水 (Freediving) 是一項極限運動，遵循一條異常簡單的規則：**吸一口氣，然後一切**——動作、決策與安全——都必須以有限的內在資源來支付。這項運動涵蓋多種項目，其表現軸向不同 (靜態閉氣 (Static Apnea) 的時間、泳池距離、以及開放水域深度)，但其支配性限制在各項目之間反覆出現：流體力學與浮力決定穿越水體的機械代價；推進受力量與功率上限限制；而生理耐受度則受氧氣可用性、二氧化碳累積，以及潛水員維持意識與協調能力所約束。

這種耦合帶來一個實務挑戰：自由潛水表現不是天然的單一純量。即使在單一項目中，潛水員的結果仍取決於配速、側寫選擇、技術，以及力學與生理之間的互動。因此，自由潛水訓練多半仍以經驗為基礎：在優秀教練手中非常有效，但當進展停滯時，很難概化、量化或診斷。本研究想問的是，能否將非正式的「極限」概念轉化為既能解釋、又可操作的量化對象。

我的動機直接來自個人的下潛紀錄。自開始自由潛水以來，我幾乎記錄了所有下潛的深度時間序列，並用簡單的摘要視覺化進展。其中兩張圖格外關鍵。第一張追蹤跨場次的最大深度，並顯示由個人最佳所點綴的階梯式進展 (圖 1)。第二張是時間-深度圖：每次下潛的總下潛時間 T 對最大深度 D (圖 2)。令人注目的不僅是點形成一個一致的區域，而是其邊界具有結構性：更深的下潛往往需要更長的總時間，但不是任意地增加；而「離群值」(例如輔助下潛) 則占據特定位置。此外，某一面向的訓練進步可能會推動其他面向的表現，暗示背後存在共享的約束幾何，而非彼此獨立的技能。

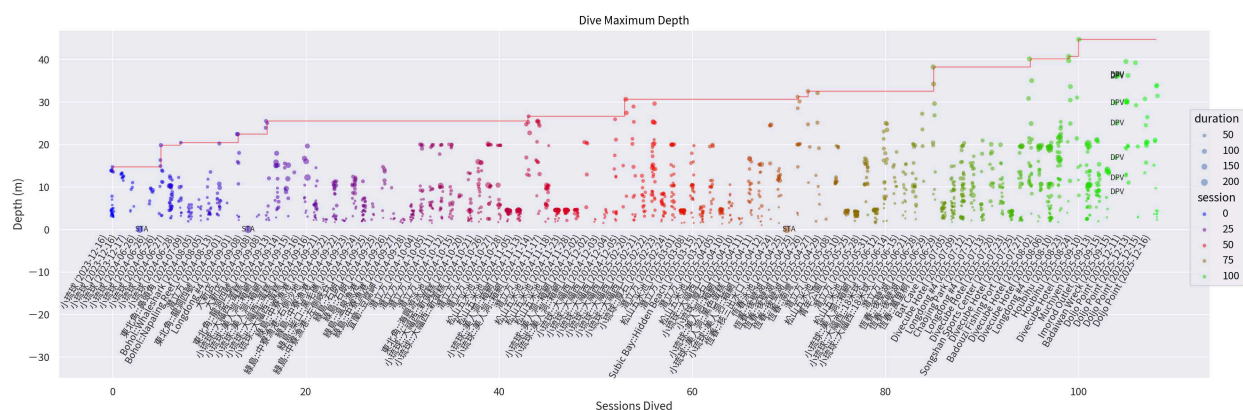


圖 1: 下潛最大深度跨場次變化。這是直接從我的 Google Colab notebook 擷取的快照，用以追蹤我個人的自由潛水進展。每個點代表一次下潛（ y 軸：以公尺計的最大深度），繪於累積場次（ x 軸）之上；點的大小隨下潛時間縮放，顏色則編碼場次進度。紅色階梯曲線追蹤連續個人最佳，凸顯最大深度隨時間穩定提升。

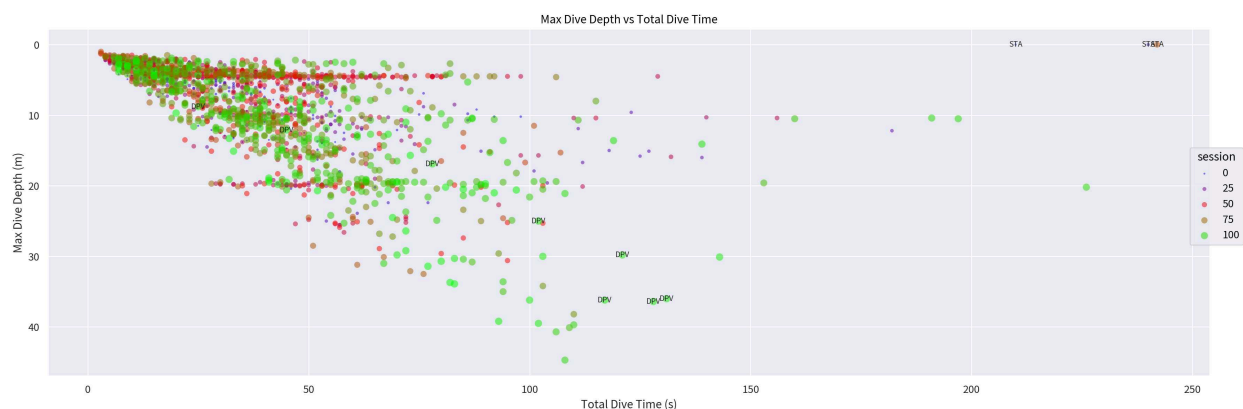


圖 2: 最大深度與總下潛時間跨場次比較。每個點是一趟下潛，最大深度（m）對總下潛時間（s）；顏色表示場次編號（較早 → 較晚）。點雲呈現預期的時間-深度權衡（Time-Depth Trade-Off）。短下潛聚集在近水面，而較長下潛可達更深的最大值，標示的 STA 點形成長時間、近水面的標記，DPV 點則標示在相近或較長時間下的輔助深潛。

我開始將這些圖視為可行性的地圖。與其問「我的最大深度是多少？」或「我的最大時間是多少？」，更具揭示性的問題是：在力學與生理耦合約束下，總時間與深度的哪些組合是可行的？若此可行集合存在，其邊界（潛水員口語所稱的「極限」）也應是可用數學定義的對象。這導向本論文的核心構件：在 (T, D) 平面上的自由潛水表現前沿（Performance Frontier）。

本論文提出一個端到端的量化框架，(i) 形式化定義時間-深度可行集合（Time-Depth Feasible Set），(ii) 由精簡但明確的水下運動與資源使用模型推導之，(iii) 透過最佳化計算前沿包絡，並 (iv) 以真實自由潛水員資料具體化此框架。從高層次而言，我們將一次下潛建模為由推進力／力量歷史在浮力、重量與阻力作用下生成的時間深度側寫。可行性由瞬時限制（例如力量與功率上限）與累積式生理預算共同決定。為了將力學連接至生理，我們建立代謝模型，將機械功率與力量產生映射為耗氧與二氧化碳累積。

在此框架下，表現前沿自然分解為兩個互補的包絡：最快表現前沿（Fast Frontier）（給定深度的最小可行時間）與最慢表現前沿（Slow Frontier）（給定深度的最大可行時間）。這些包絡不只是描述性曲線。由於它們源自受約束的最佳化，因此同時提供預測與診斷：辨識不同深度與配速區段中哪些約束會成為主導，並暗示可與觀測行為比較的結構化最優側寫。

本研究的主要貢獻可概括為四大支柱：

-
1. **前沿之計算的形式化**。據我們所知，這是首個以正式術語建立自由潛水表現前沿，並以涵蓋流體力學、力與運動約束、以及資源受限生理建模的量化工具加以推導的框架。
 2. **資料錨定的具體化**。本框架並非純理論：我們展示如何用真實自由潛水員資料校準並擬合有效模型參數，得到潛水員特定的可達區間與前沿預測。
 3. **透過約束切換的機制診斷**。前沿被用作診斷工具：自由潛水表現中的觀測現象，可透過約束切換分析與沿前沿的區段轉換來解釋。
 4. **可操作的訓練意涵**。模型不僅解釋既有行為，也提出訓練槓桿——降低有效阻力、在力量／功率上限內移動可用推進力上限、改善有效效率項，以及塑造配速／努力分配——並與論文後段討論的經驗性啟發一致。

範疇刻意聚焦。我們以適合可行性分析與訓練詮釋的層級建模力學、資源累計與側寫最佳化。我們不試圖建模耳壓平衡技巧、細緻的心理因素，或更高階的生理機制（例如脾臟收縮、精細的血液位移動態），除非其整體效果能被吸收為有效參數或視為未建模變異。目標是建立一個嚴謹的系統模型，足以解釋並提供指引，但不宣稱能模擬閉氣下潛的完整生物複雜性。

本論文後續結構如下。 [章節 2](#) 回顧閉氣生理、自由潛水訓練效果，以及其他運動中的表現前沿相關研究。 [章節 3](#) 介紹本論文使用的定義、假設與精簡的機械與代謝模型。 [章節 4](#) 形式化時間-深度可行集合並以最佳化推導最快與最慢前沿。最後， [章節 5](#) 以真實潛水員資料具體化此框架，解讀前沿與約束綁定結果，並討論對訓練與表現的實務意涵。

2 相關研究

2.1 自由潛水生理

閉氣自由潛水位於氣體交換限制、循環控制與環境壓力效應的特殊交會點。實用的總覽框架是：表現與安全共同受到 (i) 身體可用氧儲備 (Usable Oxygen Reserve) 的大小與可及性、(ii) 該儲量在移動與恢復階段的消耗速率，以及 (iii) 深度相依的風險與限制 (地面運動所無) 所塑形。廣泛的綜述統整了這些交互機制與已知失效模式 (例如低氧昏厥、肺部擠壓、氮相關效應) (Ferretti, 2001; Lindholm and Lundgren, 2009; Patrician et al., 2021)。

經濟性的核心「內建控制系統」是潛水反射：具刻板性的心搏減緩與周邊血管收縮，傾向於保留對心臟與大腦的供氧，同時降低對較不緊急組織的灌流。此反射並非單一旋鈕；其啟動與幅度取決於臉部浸水、閉氣時間、溫度與訓練狀態等因素，且其表現與運動與壓力的競合需求並存。以機制為導向的處理 (包含可實驗存取多個環節的動物生理) 強調，此反射最好被理解為維持生存的控制策略，其湧現效果常在閉氣降低有效耗氧率，特別是在休息或低動作條件中 (Michael Panneton, 2013)。

這些生理視角啟發本論文後續採用的兩項建模選擇：(i) 將耗氧視為**可用氧儲量 (Usable Oxygen Reserve) 的預算化資源**，而非直接可觀測的純量；以及 (ii) 讓「基準」消耗與有效儲量大小反映情境依賴的生理狀態，而非視為普遍常數。換言之，耗氧代理模型中的基礎項應被解讀為閉氣／浸水下的**條件化代謝率** (而非陸上靜息代謝率)，而總可用儲量也應被視為模型依賴，因為不同研究對隔室的操作性定義與估計方式不同 (Ferretti, 2001; Lindholm and Lundgren, 2009)。

2.2 自由潛水訓練效果

自由潛水訓練研究涵蓋「技能型」進步 (放鬆、配速、技術、心理耐受) 以及可能同時改變可用氧儲量與其消耗型態的生理適應。一個實務切入點是閉氣表訓練，這些方案刻意操弄 O_2 與 CO_2 壓力，以針對閉氣時間上的不同限制。例如，對新手進行 O_2 與 CO_2 表訓練的對照研究指出，基準容量指標 (例如肺容量、靜息氧合代理) 與對漸進性低氧／高碳酸的耐受能力，是可分離的閉氣表現貢獻因素，而不同訓練方案可偏向改善其中一個組成 (Declercq et al., 2024)。

超越單一方案的研究，後設分析顯示多種閉氣訓練模式能顯著提升最大靜態閉氣時間，同時也指出受試者背景、方案細節與結果量測的異質性——使得難以對所有族群宣稱單一「最佳」介入 (Massini et al., 2022)。試驗性介入研究同樣回報靜態閉氣訓練造成的心肺與表現相關變化，與「訓練可改變經濟性與耐受地景」的概念一致，即便研究規模與設計限制了強因果主張 (Bezruk et al., 2024)。

就表現前沿模型而言，重點並非某一方案最優，而是訓練可能透過**多重槓桿**影響模型組件：(i) 提升有效儲量 (隔室利用與可及性)，(ii) 在閉氣／浸水下降低基礎消耗 (透過強化潛水反射與放鬆)，以及 (iii) 降低單位距離的移動成本 (技術與流體力學)。因此，我們將擬合參數視為**運動員與狀態特定的交互適應摘要**，而非固定的生物常數。

2.3 其他運動中的表現前沿

「表現前沿 (Performance Frontier)」的概念在運動科學中已相當成熟，通常作為區分可持續與不可持續努力的邊界，或作為競爭表現目標之間的最佳權衡曲線。這些前沿具價值，是因為它們同時支持診斷 (「哪個限制因子主導？」) 與處方 (「哪些訓練最有效地移動邊界？」)。

這些前沿之所以重要，是因為它們同時支援診斷 (「哪個限制因子主導？」) 與處方 (「哪些訓練能最有效移動邊界？」)。自由潛水的物理與生理情境有所不同，但同樣能受益於相同的概念工具組。

一個經典範例是**功率-持續時間** (或**速度-持續時間**) 邊界，其中雙曲關係將可持續輸出連結到耐力耗竭時間，並引入與疲勞相關的漸近線。奠基性的研究將此關係形式化於肌肉工作，後續綜述與現代處理則將「臨界功率 (critical power)」視為耐力表現具有診斷價值的實用疲勞閾值 (Monod and Scherrer, 1965; Poole et al., 2016)。與之密切相關的是以乳酸動力學為基礎的閾值型前沿，其中最大乳酸穩態 (MLSS) 被視為準穩態生理控制與漸進性代謝不穩定之間的邊界 (Billat et al., 2003)。

在爆發性與混合型運動中，前沿以**力-速度**與**功率-速度**側寫呈現。這些框架將表現視為受神經肌肉能力與力學限制，並透過塑造運動員側寫朝向任務的「最優」配置 (如跳躍) 來達成最佳化，而非僅提升峰值力量或

峰值功率 (Samozino et al., 2012)。更廣泛地，機制化的運動分析提供一個範本，將表現拆解為可解釋的組件，並可差異化訓練 (González-Badillo and Sánchez-Medina, 2010)。

前沿思維也出現在訓練系統中的最佳化問題：如何分配訓練強度與量，以推進邊界而不超出可恢復負荷。針對強度分佈（如極化 vs. 閾值為主的方法）的量化研究，以及關於巔峰化／減量的科學理據，展示了如何將經驗實務形式化為邊界感知的訓練決策 (Padilla, 2003; Seiler and Kjerland, 2006)。最後，環境適應研究（熱與高海拔）提供外在限制如何重塑生理邊界，以及介入如何選擇性移動它們的例子 (Levine and Stray-Gundersen, 1997; Périard et al., 2015)。

這些傳統支持本論文的方法論立場：結合 (i) 物理基礎的外在需求與 (ii) 資源預算約束，建構明確的前沿模型，再將偏差與參數移動解讀為技術、生理與訓練歷史的可操作訊號。

2.4 能量學與流體力學

流體力學 (Hydrodynamics) 與移動能量學構成任何量化自由潛水模型的機械骨架：它們決定力量與功率如何隨速度、姿態與裝備縮放，並因此決定「機械努力」如何轉化為預算支出。游泳研究提供成熟的量測與建模工具，包括 (i) 阻力刻畫（拖曳試驗、速度衰減法與計算流體力學，CFD），(ii) 阻力成分與姿態效應的分解，以及 (iii) 以效率與成本為基礎的表現摘要。

被動阻力與阻力係數估計已透過解析程序與數值模擬研究，支持在相關區間將阻力建模為近似隨 v^2 增長，並將形態與姿態合併為有效係數／面積替代量 (Barbosa et al., 2018)。CFD 分析進一步顯示姿態改變可在水下滑行時產生顯著且系統性的阻力係數差異，強化「流線化」應被視為量化上有意義的狀態，而非僅是質性提示 (Cortesi and Gatta, 2015; Marinho et al., 2009)。深度亦重要：波浪阻力效應在近水面主導，隨潛入而減弱，在流線滑行條件下於中等深度後趨於飽和的深度相依阻力降低 (Novais et al., 2012)。

在能量學方面，經典與現代研究以總效率 (Gross Efficiency) 與技術相依的推進力學連結機械功、流體阻力與代謝成本 (Toussaint et al., 1990; Toussaint and Hollander, 1994; Zamparo et al., 2020)。對推進貢獻（手臂 vs 腿部）與牽引力關係的實證研究，也提供從可測力學到表現結果的橋接 (Deschodt et al., 1999; Morouço et al., 2011; 2015)。

裝備效應在自由潛水項目中特別關鍵（雙蛙鞋 vs 單蛙鞋）。對水面蛙鞋游泳的研究量化了能量成本的顯著下降與效率變化，且隨蛙鞋特性而異，支持將「推進模式」視為參數區間，而非微小擾動 (Zamparo et al., 2006)。與競技動態閉氣 (DYN) 最直接相關的近期量測報告了單位距離的能量成本，並區分有氧／無氧貢獻，凸顯節省氧氣與最小化機械成本同等重要，且蛙鞋選擇可顯著改變能量地景 (Vinetti et al., 2025)。

最後，閉氣下潛移動的理論研究強調在浮力與阻力約束下，交替主動游動與長時間滑行的能量重要性，並提供以力學為先的先例，用於在代謝預算下最佳化移動速度與滑行分配 (Trassinelli, 2016)。

3 理論前導

3.1 定義、範疇與假設

我們分析由潛水電腦記錄的閉氣下潛，並將其視為深度的時間序列。對每次下潛，令 $z(t)$ 表示深度（公尺）， $z = 0$ 在自由水面，向下為正。我們定義兩個主要觀測量：

- **下潛時間 (Dive Time)** T ：對深度項目而言， $t = 0$ 為連續下潛前在水面的最後一刻（即入水下潛的開始）， T 為上浮結束返回水面的第一刻。對靜態閉氣 (Static Apnea, STA) 而言， $t = 0$ 為水面開始閉氣的時間， T 為閉氣結束（第一口恢復呼吸）。實務上，潛水電腦的深度訊號在水面附近可能抖動，但概念性定義仍為「入水至返水」（深度）或「閉氣起至閉氣終」（STA）。
- **最大深度 (Maximum Depth)** D ： $D := \max_t z(t)$ 。對 STA 下潛， $D = 0$ 由定義給定。

示意側寫與上述定義如 圖 3 所示。

下潛範疇。 我們僅聚焦於深度場次與靜態場次的下潛：CWT/CWTB/FIM 與 STA。

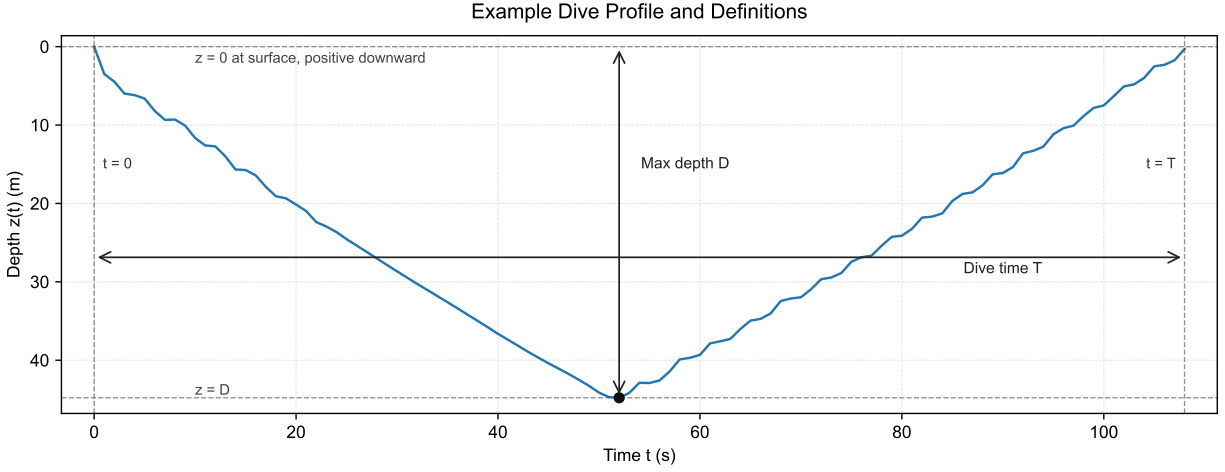


圖 3: 下潛側寫與定義示例。深度軌跡 $z(t)$ 以水面 $z = 0$ 為基準（向下為正）。下潛時間 T 跨越入水至返水，最大深度 D 為側寫最深點。

失效準則。在最大努力下潛中，嘗試在第一個限制因素被觸發時結束。我們以資源預算建模此過程，並將至少使一個預算飽和的下潛定義為表現前沿。在這個探索性分析中，我們追蹤自由潛水文獻中最可量化的兩種資源：可用氧儲量（Usable Oxygen Store）與可用二氧化碳耐受度（Usable CO₂ Tolerance）。正式的預算與努力定義將在 [章節 3.4.4](#) 提供。

噪音與未建模變異。全文中，「噪音」指所有影響觀測表現但未在方程中明確表示的變數：環境條件（浪況、海流、溫度）、裝備配置（防寒衣厚度、配重、蛙鞋選擇）、日常生理狀態、技術變異與量測誤差。我們將這些因素視為吸收於有效參數（如阻力、效率、預算）中的擾動，而非新增的模型狀態變數。換言之，模型旨在解釋時間-深度包絡的主導結構，而殘差散佈則歸因於噪音。

3.2 力、運動學與本構律

我們建模在性質均勻、靜止海水中做純垂直運動的閉氣潛水員。垂直軸向下為正。令深度為 $z(t)$ ，水面 $z = 0$ ，速度 $v(t) = \dot{z}$ （向下為正）。我們忽略水平漂移、表面波浪、海流與非定常環境流結構。海水密度 ρ_w 與重力加速度 g 視為常數，代表值為 $\rho_w \approx 1025 \text{ kg m}^{-3}$ 與 $g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。

3.2.1 運動方程

垂直運動方程（向下為正）為

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + mg - B(z) - F_{\text{drag}}(v) \quad (1)$$

其中：

- $F_{\text{mech}}(t)$ 為自我產生的推進力，可由蛙鞋（CWT/CWTB）、無蛙鞋（CNF）或拉繩（FIM）提供。當向下施力（例如下潛時踢動）為正，向上拉升（上浮）為負。
- mg 為重量（向下）。
- $B(z) = \rho_w g V_{\text{disp}}(z)$ 為浮力大小（向上）。
- $F_{\text{drag}}(v)$ 為反向運動的流體阻力。

3.2.2 浮力與排水體積

我們將排水體積分解為三部分：

$$V_{\text{disp}}(z) = V_{\text{const}} + V_{\text{suit}}(z) + V_{\text{gas}}(z) \quad (2)$$

其中 V_{const} 匯集近乎不可壓縮的身體 + 組織 + 裝備體積（在深度處，解釋為 $z \rightarrow \infty$ 時防寒衣壓縮完成且肺內氣體完全壓縮後的漸近排水體積）。可選的 $V_{\text{suit}}(z)$ 表示防寒衣／泡棉的可壓縮體積。可壓縮氣體體積 $V_{\text{gas}}(z)$ 服從波以耳定律：

$$V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{P_0}{P(z)}, \quad P(z) = P_0 + \rho_w g z \quad (3)$$

其中 $V_{\text{gas},0}$ 為水面上的總可壓縮氣體體積（肺與相通氣腔如面鏡與其他氣袋，以單一等效儲槽建模）。水面壓力為 $P_0 \approx 1013.25 \text{ hPa}$ 。定義壓力長度（Pressure Length）

$$L_p := \frac{P_0}{\rho_w g} \quad (4)$$

使得 $P(z) = \rho_w g(L_p + z)$ 且 $V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{L_p}{L_p + z}$ 。對海水而言， $L_p \approx 10.1 \text{ m}$ 。

在後續分析中，我們將防寒衣可壓縮項吸收進常數排水體積 V_{const} 。

3.2.3 阻力

我們使用標準二次阻力定律，並以數值穩定的形式書寫：

$$F_{\text{drag}}(v) = kv|v|, \quad k := \frac{1}{2}\rho_w C_d A \quad (5)$$

其中 C_d 為阻力係數， A 為有效正向截面積。代表範圍為 $C_d \approx 0.9\text{--}1.1$ 與 $A \approx 0.08\text{--}0.12 \text{ m}^2$ (Barbosa et al., 2018)。對典型的人類自由潛水員而言，這使得 k 約落在 $k \approx 30\text{--}60 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$ 。在本研究中，我們將 C_d 視為在特定配置下近似固定，而將流線化與身體姿勢的改善解讀為有效面積 A 的變化，此一參數可訓練與最佳化。

3.3 重新參數化與無因次化

本節將垂直動態以少數具物理可解釋性且易量測的參數重述。我們假設防寒衣顯式項已如前述吸收進常數排水體積，並使用 V_{const} 與波以耳氣體模型 方程 3。

3.3.1 大深度淨載重

定義漸近（大深度）淨載重

$$\Delta F_{\infty} := mg - \rho_w g V_{\text{const}} \quad (6)$$

即重量減去漸近浮力。

詮釋：

- 若 $\Delta F_{\infty} > 0$ ，潛水員在大深度略為負浮力；存在有限自由下落終端速度。
- 若 $\Delta F_{\infty} = 0$ ，潛水員在 $z \rightarrow \infty$ 時中性浮力；深處自由下落趨近零速度。
- 若 $\Delta F_{\infty} < 0$ ，潛水員在大深度為正浮力；純自由下落下潛不可行。

3.3.2 中性浮力深度 z_n

將 z_n 定義為在深度壓縮氣體模型下，重量等於浮力的深度：

$$mg = B(z_n) = \rho_w g (V_{\text{const}} + V_{\text{gas}}(z_n)) \quad (7)$$

等價地，

$$\Delta F_{\infty} = \rho_w g V_{\text{gas}}(z_n). \quad (8)$$

將 方程 3 寫為 $V_{\text{gas}}(z) = V_{\text{gas},0} \frac{L_p}{L_p + z}$ ，得到

$$1 + \frac{z_n}{L_p} = \frac{\rho_w g V_{\text{gas},0}}{\Delta F_{\infty}}, \quad \text{equivalently} \quad z_n = L_p \left(\frac{\rho_w g V_{\text{gas},0}}{\Delta F_{\infty}} - 1 \right). \quad (9)$$

此恆等式顯示中性浮力深度如何耦合水面可壓縮氣體體積 $V_{\text{gas},0}$ 與深處淨載重 ΔF_{∞} 。在固定 $V_{\text{gas},0}$ 下，加重會增加 ΔF_{∞} 並使 z_n 變淺；減重則降低 ΔF_{∞} 並使 z_n 加深。根據 AIDA 指引，自由潛水員的典型 z_n 值約為 $\approx 10\text{--}20\text{ m}$ （較淺下潛）(AIDA International, 2021)，以及深達 60 m 的案例 (AIDA International, 2020)。

3.3.3 深層終端速度

當 $\Delta F_{\infty} > 0$ 且推進力為零 ($F_{\text{mech}}(t) = 0$) 時，藉由深處淨載重與二次阻力 方程 5 平衡定義深層終端速度：

$$v_{\infty} := \sqrt{\frac{\Delta F_{\infty}}{k}} \quad (10)$$

等價地，

$$\Delta F_{\infty} = k v_{\infty}^2, \quad k = \frac{\Delta F_{\infty}}{v_{\infty}^2}. \quad (11)$$

量 v_{∞} 應解釋為在足夠深處、浮力幾乎達到深限且淨載重趨近 ΔF_{∞} 時，將接近的漸近自由下落（滑行）速度。它不是整個恆重下潛的平均下降速度，因為真實下潛包含 z_n 以上的主動下潛階段、 z_n 附近的過渡區，以及轉折與主動上浮。

文獻中常以約 1 m s^{-1} 的特徵垂直速度討論人類閉氣下潛側寫 (Bosco et al., 2007; Patrician et al., 2021)。這些數值與在配重良好的潛水員中，將 $v_{\infty} \approx 0.8\text{--}1.2\text{ m s}^{-1}$ 作為恆重式滑行的實用尺度相一致。

3.3.4 重新參數化的運動方程

定義淨載重（向下為正）為 $\Delta F(z) := mg - B(z)$ 。在防寒衣吸收進 V_{const} 且氣體依波以耳壓縮 方程 3 的情況下，可得簡化形式

$$\Delta F(z) = \Delta F_{\infty} \frac{z - z_n}{L_p + z} = k v_{\infty}^2 \frac{z - z_n}{L_p + z}, \quad (12)$$

其中 $\Delta F_{\infty} := mg - \rho_w g V_{\text{const}}$ ， z_n 為中性浮力深度 方程 9，且由 方程 11 得 $\Delta F_{\infty} = k v_{\infty}^2$ 。

將 方程 12 與二次阻力 方程 5 代入垂直運動方程 方程 1，得到

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + k v_{\infty}^2 \frac{z - z_n}{L_p + z} - k v |v|. \quad (13)$$

等價地，

$$m\dot{v} = F_{\text{mech}}(t) + k \left[v_{\infty}^2 \frac{z - z_n}{L_p + z} - v |v| \right]. \quad (14)$$

此表示式由三個具物理解釋性的參數所控制：深處淨載重 ΔF_{∞} （等價為 v_{∞} ）、中性浮力深度 z_n 與壓力長度 L_p 。其餘深度相依性僅透過比值 $\frac{z - z_n}{L_p + z}$ 進入。

3.3.5 無因次化

重新參數化的運動方程 方程 14 可使用 v_{∞} 與 L_p 作為特徵尺度，得到自然的無因次形式。定義無因次變數

$$\tilde{z} := \frac{z}{L_p}, \quad \tilde{z}_n := \frac{z_n}{L_p}, \quad \tilde{v} := \frac{v}{v_\infty}, \quad \tilde{t} := \left(\frac{v_\infty}{L_p} \right) t. \quad (15)$$

依此定義，

$$\dot{v} = \left(\frac{v_\infty^2}{L_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}}. \quad (16)$$

將 方程 15 與 方程 16 代入 方程 14 得

$$m \left(\frac{v_\infty^2}{L_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = F_{\text{mech}}(t) + kv_\infty^2 \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} - kv_\infty^2 \tilde{v}|\tilde{v}|. \quad (17)$$

以特徵力量尺度 $kv_\infty^2 = \Delta F_\infty$ 除之，得到無因次方程

$$\left(\frac{m}{kL_p} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{1 + \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} \right) - \tilde{v}|\tilde{v}|, \quad (18)$$

其中無因次控制輸入為

$$\tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) := \frac{F_{\text{mech}}(t)}{\Delta F_\infty}. \quad (19)$$

唯一剩餘的無因次慣性參數為

$$\lambda := \frac{m}{kL_p}, \quad (20)$$

因此無因次形式可寫為

$$\lambda \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = \tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t}) + \left(1 - \frac{1 + \tilde{z}_n}{1 + \tilde{z}} \right) - \tilde{v}|\tilde{v}|. \quad (21)$$

在準穩態極限下，加速度相較於推進力、浮力與阻力之主導平衡較小，因此動態可化簡為各運動區段上的瞬時力平衡。

3.4 生理模型與預算

3.4.1 O₂ 與 CO₂

依據 AIDA 手冊慣例 (AIDA International, 2020)，我們以一次下潛的**累積式資源累計 (Integrated Resource Bookkeeping)** 來建模自由潛水表現，如 圖 4 所示。嘗試在第一個限制因素觸發時終止。在此探索性分析中，我們追蹤兩個生理資源：可用 O₂ 與 CO₂ 耐受度。

氧氣預算 (Oxygen Budget)。令 $R_{\text{O}_2}^{\text{total}}$ 表示可用氧儲量，非全身總含氧量。例如，因隔室可及性限制與生理優先順序，低氧昏厥可在全身總含氧尚未耗盡前（約 45% 的 SaO₂）即發生。

概念上，可用 O₂ 來自肺氣體、血液（血紅素結合）與肌肉（肌紅素），而潛水反射（心搏減緩與周邊血管收縮）藉由優先供氧至關鍵器官而有效降低耗竭速率。我們將這些機制視為透過基礎消耗率與有效預算參數隱含捕捉，而非明確建模隔室運輸。

自由潛水中的一個知名例外是**淺水昏厥**，其風險可能在上浮近水面時因氣體分壓快速變化而升高，儘管總耗氧仍在持續。本模型不表示此類深度相依的資源**狀態變化**。下潛被假設因資源耗竭或耐受不足而終止，並依下列累積式記帳約束處理，分壓動態則視為範疇外。

二氧化碳耐受度 (CO₂ Tolerance)。令 $R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$ 表示**有效的** CO₂ 耐受預算，代表一個生理閾值而非字面上的儲存容量。二氧化碳由代謝持續產生，並在血液與組織中被緩衝，而不適與終止主要由化學感受與酸鹼平衡

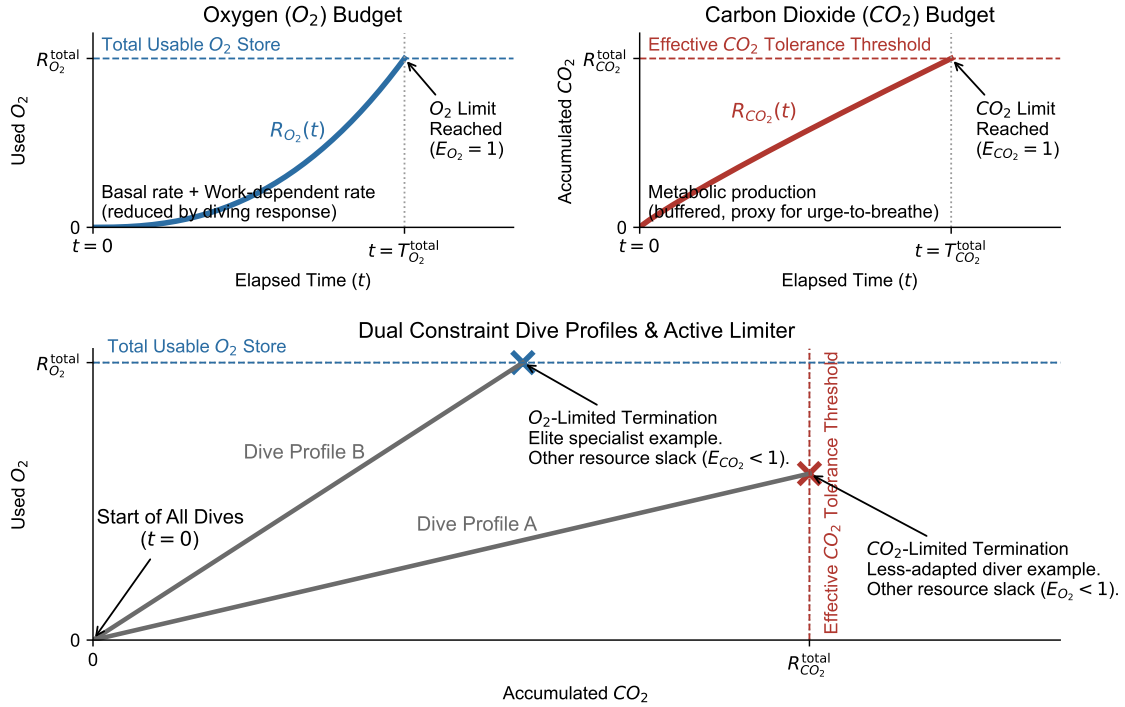


圖 4: 自由潛水中累積式資源累計的概念框架。圖中呈現雙重約束模型，其中下潛時間 (T) 由 E_{O_2} 或 E_{CO_2} 先達到 1 的那一個決定。左上 (O_2 預算)：表示可用氧儲量 ($R_{O_2}^{\text{total}}$) 自零累積至總儲量的使用情形，受基礎代謝率與工作相依消耗影響。右上 (CO_2 耐受度)：表示代謝 CO_2 向有效生理耐受閾值 ($R_{CO_2}^{\text{total}}$) 的累積，可視為高碳酸呼吸衝動的代理。右下 (CO_2 耐受度)：描述代謝 CO_2 累積至有效生理耐受閾值 ($R_{CO_2}^{\text{total}}$)，作為高碳酸呼吸衝動的代理。下方 (主動限制因子下潛側寫)：以狀態空間表示不同潛水員側寫如何與這些約束互動。下潛側寫 A 代表「二氧化碳受限」(“ CO_2 -Limited”) 的下潛，此時 CO_2 耐受度先被達到而 O_2 仍有餘裕 ($E_{O_2} < 1$)。下潛側寫 B 代表「氧氣受限」(“ O_2 -Limited”) 的下潛，此時氧氣預算飽和而 CO_2 仍有餘裕 ($E_{CO_2} < 1$)。

(如 pH 變化) 所介導，而非僅取決於絕對 CO_2 量。因此， $R_{CO_2}^{\text{total}}$ 應解讀為受試者對高碳酸與相關呼吸衝動耐受度的緊湊代理，為建模方便折疊為整體預算。

STA 在校準中的角色。 靜態閉氣 (STA) 被納入並非作為一個具動作建模的下潛，而是作為基礎消耗區間的校準錨點。在 STA 中， $F_{\text{mech}}(t) = 0$ ，垂直運動模型不適用。相反地，STA 的觀測約束基礎代謝項 (並依建模選擇，也可能影響有效預算)，用於深度項目。因此得到的氧氣值是在所選可用氧標準化下的例示，而非絕對儲量的直接量測。

3.4.2 代謝率模型

本小節說明機械努力如何映射為瞬時資源使用。目標不是微觀肌肉模型，而是與預算相容的代理模型，(i) 尊重符號 (無「負耗氧」)，(ii) 即使 $v \approx 0$ 仍給予力量產生成本，並且 (iii) 在與游泳與閉氣文獻所報告的人類極限對照時，能產生合理量級。

我們將瞬時耗氧率建模為

$$\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{|F_{\text{mech}}(t)|}{F_{\text{ref}}} \right)^p + \beta P_{\text{mech}}(t), \quad (22)$$

其中

- $\dot{V}_{O_2, \text{rest}}$ 為基礎耗氧率，
- $\alpha(|F_{\text{mech}}(t)|/F_{\text{ref}})^p$ 為力量產生的額外成本項，且
- $\beta P_{\text{mech}}(t)$ 為機械功率成本項。

基礎(非移動)成本。即使在強烈放鬆且潛水反射已建立的情況下，閉氣仍非零成本：器官持續耗氧，姿勢肌群也需做少量工作。受訓潛水員在靜態閉氣時所測得的最低全身耗氧量約為 0.20 L min^{-1} (Fitz-Clarke, 2018)，對應每秒數 mL s^{-1} 。我們以常數基礎項 $\dot{V}_{O_2, \text{rest}}$ 建模，對受訓潛水員通常約為 $\dot{V}_{O_2, \text{rest}} \approx 2.5\text{--}4 \text{ mL s}^{-1}$ ，並可由靜態閉氣 (STA) 量測校準。

力量產生額外成本。即使外部機械功很小 (如懸停、強力支撐或低速大推進)，肌肉仍需耗能以產生力量。近年的量熱證據顯示代謝成本對等長扭矩呈非線性尺度，指數約為 $p \approx 1.6$ (Muralidhar et al., 2023)。我們採用此概念作為簡潔的額外成本項。

參考力 F_{ref} 是跨潛水員與方案共享的全域正規化尺度。在 30 s 完全牽引的自由式游泳測得平均力約為 $\approx 74\text{--}99 \text{ N}$ (女性–男性) (Morouço et al., 2015)，因此

$$F_{\text{ref}} \approx 100 \text{ N} \quad (23)$$

是一個方便且可解釋的選擇。

係數 α 為潛水員特定，表示在極低速度下產生約 F_{ref} 推進力時所增加的耗氧率。它反映技術、神經肌肉效率，以及對個別潛水員而言產力的成本。

透過總效率的機械功率成本。當潛水員對水體產生正機械功率時，代謝需求上升。機械功率定義為

$$P_{\text{mech}}(t) := (F_{\text{mech}}(t) \cdot v(t))_+, \quad (\cdot)_+ := \max(\cdot, 0). \quad (24)$$

為將 $P_{\text{mech}}(t)$ 轉為耗氧率，我們引入**有效總效率** η ，捕捉從代謝能量到外部機械輸出的所有損失，包括肌肉效率、傳動損失，以及蛙鞋–流體推進損失。自由式游泳的直接量測 (Toussaint and Hollander, 1994) 報告總效率約為 $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$ 。

其數值對速度與技術依賴顯著，且蛙鞋亦可依尺寸與硬度進一步改變經濟性與效率。

令 e_{O_2} 表示氧攝取的能量等價。運動生理中常用的單一轉換值為

$$e_{O_2} \approx 20.1 \text{ J mL}^{-1}. \quad (25)$$

在此約定下，正機械功率的耗氧成本為

$$P_{\text{mech}}(t)/(\eta \cdot e_{O_2}). \quad (26)$$

將其與 方程 22 中的線性項 $\beta P_{\text{mech}}(t)$ 對應，得到

$$\beta = 1/(\eta \cdot e_{O_2}). \quad (27)$$

β 的典型值約為 $\beta \approx 0.7 \text{ mL J}^{-1}$ 。

CO₂ 生成。二氧化碳生成率被建模為與耗氧率成正比：

$$\dot{V}_{CO_2} = \gamma \dot{V}_{O_2}, \quad (28)$$

其中 γ 為有效轉換因子。在閉氣下的混合基質使用情境中，代表範圍為 $\gamma \approx 0.85\text{--}0.95$ 。

參數 γ 應被解釋為整合緩衝、基質混合與化學感受器敏感度的單一有效係數。

3.4.3 瞬時力量與功率上限約束

上述累積預算限制整個下潛可持續的範圍。然而，控制輸入 $F_{\text{mech}}(t)$ 亦會受到神經肌肉能力與推進力傳遞效率的**瞬時**限制。若沒有瞬時限制，模型可能產生物理上不可能的短時間推進力尖峰。

我們施加瞬時上限：

$$|F_{\text{mech}}(t)| \leq F_{\text{mech}}^{\max}, \quad P_{\text{mech}}(t) \leq P_{\text{mech}}^{\max}. \quad (29)$$

力量上限 F_{mech}^{\max} 限制潛水員任一瞬間能推或拉的最大強度，而功率上限 P_{mech}^{\max} 則防止在高速下出現不實際的大力輸出。兩者共同定義在考慮累積資源預算之前的可行控制空間。

推進力的實證尺度。 一個有用的錨點來自完全牽引游泳，其力量可直接量測。在 30 s 最大牽引自由式測試中，回報的峰值力量約為數百牛頓（ $\approx 220\text{--}325$ N，女性-男性），平均力量約為 74–99 N (Morouço et al., 2015)。這些數值使 F_{mech} 落在正確的生理區間：數十牛頓對應放鬆巡航，數百牛頓則對應近最大努力。

在本研究中， $F_{\text{mech}}(t)$ 代表單一來源推進力。它可能對應於蛙鞋推進或手臂／繩索牽引，視項目而定，但非同時混合。因此，力量上限參數會隨模式與項目而異。本文其餘部分除非另有說明，使用 $F_{\text{mech}}^{\max} \approx 200$ N。

機械功率的實證尺度。 游泳量測亦提供合理的外部機械功率範圍。自由式回報值約在不同速度與泳者間落於 $\approx 26\text{--}108$ W (Toussaint et al., 1990)。另有逐步牽引游泳測試中的峰值攝氧量常見為 $\approx 2.7\text{--}3.7$ L min⁻¹ (Bonnen et al., 1980)，對應約 $\approx 1\text{--}1.3$ kW 的最大代謝功率。在總效率 $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$ 下，這意味著可持續的外部機械功率約 $\approx 50\text{--}120$ W 在生理上合理，而更高值若可達成也必然短暫。本文其餘部分除非另有說明，使用 $P_{\text{mech}}^{\max} \approx 200$ W。

3.4.4 代謝預算與努力量

代謝率模型定義每項資源的瞬時使用率。可行性藉由將這些速率積分於整個下潛時間，並與潛水員在該時點可視為準常數的預算相比較來判定。

累積使用量。 對下潛時間為 T 的下潛，定義累積耗氧與 CO_2 生成：

$$R_{\text{O}_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{\text{O}_2} dt, \quad R_{\text{CO}_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{\text{CO}_2} dt. \quad (30)$$

若建模額外約束，將所有資源量以 r 索引；同樣的可行性與努力定義適用。

預算與可行性 (Feasibility)。 令 $R_{\text{O}_2}^{\text{total}}$ 表示潛水員可用氧儲量，令 $R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}$ 表示潛水員有效的 CO_2 耐受預算。當所有建模約束都滿足時，下潛為可行：

$$R_{\text{O}_2}(T) \leq R_{\text{O}_2}^{\text{total}} \quad \text{and} \quad R_{\text{CO}_2}(T) \leq R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}. \quad (31)$$

均勻縮放可用氧儲備的總量會等比例縮放所有耗氧項，因此可行邊界與表現前沿對該尺度不敏感，僅依賴相對耗氧而非絕對 O_2 體積。

努力比例與主動限制因子。 定義努力比例 (Effort Fraction) 為正規化使用量：

$$E_{\text{O}_2} := \frac{R_{\text{O}_2}(T)}{R_{\text{O}_2}^{\text{total}}}, \quad E_{\text{CO}_2} := \frac{R_{\text{CO}_2}(T)}{R_{\text{CO}_2}^{\text{total}}}. \quad (32)$$

在「先失效」的解讀下，下潛在第一個約束飽和時終止。因此最大努力下潛通常滿足

$$\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) = 1, \quad (33)$$

而達到最大值的資源即為主動限制因子 (Active Limiter)。

實務中的已知限制因子。 在實務上，對特定潛水員與訓練階段，主導限制往往可預先判斷。例如，頂尖深度專項潛水員通常預期主要為 O_2 受限，而適應較少的潛水員可能因 CO_2 不耐而提前終止。因此我們將其中一項資源視為預期的主動限制因子，並檢查另一項保持鬆弛（即終止時 $E_{\text{O}_2} < 1$ 或 $E_{\text{CO}_2} < 1$ ）。

4 自由潛水中的表現前沿

4.1 下潛側寫作為時間-深度圖元素

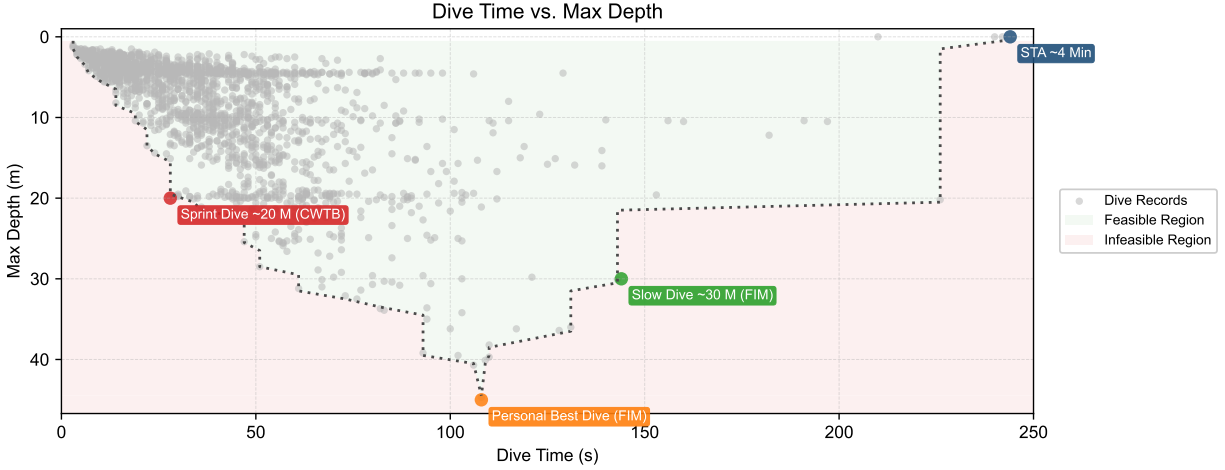


圖 5: 下潛時間-深度 (T-D) 圖與代表性下潛及可達區間。每個灰點是記錄下潛，以總時間 T (x 軸) 與最大深度 D (y 軸，反向) 摘要；資料集由我約兩年使用 Atmos 的 Mission One 潛水錶所記錄的個人下潛紀錄構成，涵蓋 110+ 場次的所有下潛，合計超過 1,800 次。較大的彩色標記代表典型訓練模式 (FIM 個人最佳下潛、FIM 慢深度訓練、CWTB 衝刺下潛，以及 $D = 0$ 的 STA)，陰影區域則在相同條件下摘要由資料推導的可達區間與不可達區間。淺綠色帶標示經驗上可行的下潛，淺紅色陰影表示在紀錄中未出現且在相同條件下視為不可行的下潛。此圖明確展示不同下潛側寫如何映射到 (T, D) 空間中的不同區域，並引出表現前沿的概念。

我們以兩個觀測量摘要每次下潛。 x 軸為總下潛時間 T 。 y 軸為最大深度 $D := \max_t z(t)$ ，如圖 5 所示。時間-深度圖 (T-D Diagram) 採用反向 y 軸： $D = 0$ 在上方，深度越大越往下。

本文中的下潛側寫 (Dive Profile) 為潛水員自我產生推進力的時間歷史，以原始機械力 $F_{\text{mech}}(t)$ 表示。結合初始條件，力量歷史 $F_{\text{mech}}(t)$ 透過動態方程 14 產生軌跡 $z(t)$ 與 $v(t) = \dot{z}$ ，並維持在瞬時能力限制方程 29 內。生理成本由代謝率模型方程 22 累積，且只有在累積預算保持在上限以下時才可行，即透過方程 32 的 $\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) \leq 1$ 。

由於 $F_{\text{mech}}(t)$ 是時間函數，即使在固定目標深度下，仍存在無限多個可行下潛側寫。每個可行側寫在下潛時間-深度 (T-D) 圖中產生唯一一點 (T, D) ，而這些點的集合構成此圖的基本「元素」。

將此抽象對映落實為具體訓練例子是有幫助的。在我的教練課程中，恆重雙蛙鞋 (CWTB) 與攀繩下潛 (FIM) 於接近個人最佳 (PB) 能力處進行，對應於該潛水員在 T-D 圖中最深可行深度附近的點。在我的訓練紀錄中，約 30 m 的指定「慢速」下潛強調深度停留時間與受控配速，於中等 D 下產生較大的 T 。靜態閉氣 (STA)，例如課程中要求的 4 min，映射到退化深度 $D = 0$ 且 T 極大，作為限制性閉氣案例時位於圖的右上方。

即使未被證照標準明確強調，許多常見訓練也填補了平面上的其他區域。例如，快速往返至約 20 m 的衝刺下潛會在較小 T 與中等 D 處形成點，且靠近可達區間的邊界。這些例子說明核心概念：訓練處方不只是「深度目標」或「時間目標」。它是一個下潛側寫的選擇，而該側寫在 T-D 圖上成為單一點。代表這些點的下潛側寫如圖 6 所示，且同樣的下潛在圖 5 中以彩色標記呈現。

4.2 可達區間與表現前沿

掃過多個可行下潛側寫後，會在下潛時間-深度 (T-D) 圖上形成散點。這些散點並非噪音。它是潛水員在固定狀態與模型參數下，於物理與生理上可實現的幾何足跡。

形式上，若存在力量歷史 $F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}$ 使其透過動態方程 14 產生軌跡 $z(t)$ ，且 \mathcal{F} 為符合瞬時能力限制方程 29 的力量歷史集合，並透過方程 32 使 $\max(E_{\text{O}_2}, E_{\text{CO}_2}) \leq 1$ 滿足代謝預算，則該下潛可行。每個可行側寫對應一點 (T, D) ，因此所有這些點形成該潛水員在 T-D 平面中的可達區間 (Feasible Region)，如圖 5 所示。

在此區間內，某些點是特別的。對固定深度 D ，某些側寫能以最短時間達成該深度並返回，而另一些側寫則在不違反可行性時將下潛時間拉到最長。這兩個極端包絡定義了我們在 T-D 圖中所稱的表現前沿。

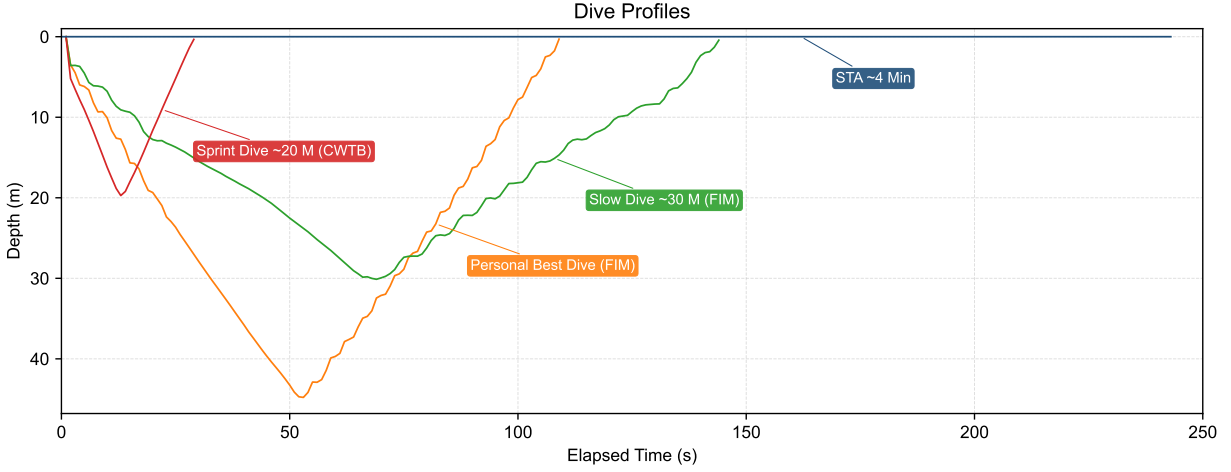


圖 6: T-D 圖中點所對應的代表性下潛側寫。每條曲線顯示單次下潛的深度與時間關係，直接取自我的個人下潛紀錄，包括個人最佳下潛 (FIM)、約 30 m 的慢深度下潛 (FIM)、約 20 m 的衝刺下潛 (CWTB)，以及 $D = 0$ 的靜態閉氣 (STA) 軌跡。儘管這些側寫可能具有相近深度，其配速與深度停留時間差異顯著，因此在時間-深度平面 (Time-Depth Plane) 中占據不同位置。這些側寫以視覺方式支撐從完整軌跡 $z(t)$ 到前沿分析所用摘要點 (T, D) 的映射。

- **最快表現前沿 (Fast Frontier)**。對每個深度 D ，定義 $T_{\text{fast}}(D) := \min_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T$ 且滿足 $\max_t z(t) = D$ ，其中 $z(t)$ 由 方程 14 的 $F_{\text{mech}}(t)$ 所產生，且 \mathcal{F} 中的瞬時力量與功率限制 方程 29 被滿足。此定義在 圖 5 中選取下包絡，對應每個深度的最快可行完成時間。
- **最慢表現前沿 (Slow Frontier)**。對每個深度 D ，定義 $T_{\text{slow}}(D) := \max_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T$ 且滿足 $\max_t z(t) = D$ ，在同樣的可行條件下。此定義在 圖 5 中選取上包絡，對應每個深度的最慢可行完成時間。

最快與最慢前沿在散點圖中是經驗對象，但同時也是理論的明確目標。若模型與係數正確，向前模擬與最佳化應能再現觀測包絡作為 $T_{\text{fast}}(D)$ 與 $T_{\text{slow}}(D)$ 的函數。反之，預測與觀測包絡的系統性偏差會指出需要改進的約束或成本項。兩條前沿的理論推導見附錄 Section B。

潛水員特定的最大深度 D_{max} 亦隱含於同一張圖中。這是指在該潛水員參數與約束下，T-D 區間內仍存在可行點的最大深度。兩條前沿定義在 $D \in [0, D_{\text{max}}]$ ，而對 $D > D_{\text{max}}$ 可達區間消失。

4.3 解析最佳化

我們已由資料定義可達區間與最快／最慢前沿，接下來以解析方式從支配方程推導這些前沿。本節陳述建模假設並概述用以取得封閉形式或半解析前沿的共通結構，完整推導則留至 Section B。本文後續使用的代理族在此引入，作為完整最佳化問題的實用解析替代。

4.3.1 建模前提

為得到可處理的前沿計算，我們採用以下前提：

準穩態垂直力學。我們使用重新參數化的運動方程 方程 14，並在阻力主導區間工作，此時 $m\dot{v}$ 相對於其他項較小，除了轉折附近。

單轉折幾何。一次下潛包含一段下降至最大深度 D ，與一段上升返回水面。每段內深度單調。

推進力對齊。潛水員產生與行進方向一致的推進力。我們以推進力大小 $f(t) := |F_{\text{mech}}(t)| \geq 0$ 表示控制，方向由運動階段（下潛 vs 上浮）處理。因此在下潛時 $F_{\text{mech}}(t) = +f(t)$ ，上浮時 $F_{\text{mech}}(t) = -f(t)$ ，符合既定符號慣例。等價地，下潛時 $F_{\text{mech}}(t) = f(t)$ ，上浮時 $F_{\text{mech}}(t) = -f(t)$ 。

瞬時硬上限。力量與功率上限透過 方程 29 逐點施加。當前沿解會超出上限時，控制量會在主動約束處飽和。

預算模型。本節的前沿計算採用氧氣限制近似 (Oxygen-Limited Approximation)，以 $E_{O_2} \leq 1$ 作為 [方程 32](#) 的主動累積約束。完整的雙預算可行條件 $\max(E_{O_2}, E_{CO_2}) \leq 1$ 仍是可行性的定義，且可在不改變力學推導的情況下加入第二個預算約束。我們假設 CO_2 約束在分析的區間中不具束縛性，與選定的下潛側寫與深度範圍一致。

4.3.2 前沿之計算作為受約束最佳化

對固定目標深度 D ，若存在推進力歷史 $F_{\text{mech}}(t)$ 能達到 $\max_t z(t) = D$ ，且同時遵守瞬時能力約束 [方程 29](#) 與代謝預算 [方程 32](#)，則該下潛側寫可行。在氧氣限制近似下，我們將預算約束寫為 $R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}$ 。

與其列舉「所有可能」的下潛側寫，我們將可行性邊界視為一個受約束最佳化問題。這在 T-D 圖中產生兩條典型包絡：**最小時間包絡**（最快前沿）與**最大時間包絡**（最慢前沿）。

最快前沿是在上述約束下的最小時間解。

$$T_{\text{fast}}(D) := \min_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T \quad \text{s.t.} \quad \max_t z(t) = D, \quad R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}. \quad (34)$$

此處 \mathcal{F} 表示滿足 [方程 29](#) 與力學 [方程 14](#) 的力量歷史集合。關鍵設計選擇之一是避免將此視為完整的時間最適控制問題。在準穩態與單調下潛／上浮前提下，目標與預算可改寫為深度座標，且此受約束問題可透過單一拉格朗日乘子得到解析刻畫。實務上，這將「最佳化時間函數」轉為一維乘子搜尋（預算收緊），外層包裹多個一維推進力最小化，如 [Section B.2](#) 所摘要。

另一個設計選擇是**分階段參數推論**。我們不一次將所有係數視為自由參數，而是先以量測值（如 z_n 、 v_∞ 與能力代理）作為錨點，再以紀錄下潛與少量參考表現校準剩餘的生理與能力參數。一旦 θ 固定，前沿計算成為前向映射 $\theta \rightarrow (T_{\text{fast}}(D), T_{\text{slow}}(D))$ ，這對後續擬合與規劃至關重要。

最慢前沿是在相同約束下的最大時間解。

$$T_{\text{slow}}(D) := \max_{F_{\text{mech}}(t) \in \mathcal{F}} T \quad \text{s.t.} \quad \max_t z(t) = D, \quad R_{O_2}(T) \leq R_{O_2}^{\text{total}}. \quad (35)$$

在計算上，最慢前沿重用與最快前沿相同的機制。在預算限制下最大化 T 等價於在同一預算下最小化 $(-T)$ ，這對應於拉格朗日式中的時間項變號，而約束結構不變。此「同一求解器、變號對稱」使得可從相同的簡化模型一致地計算兩條包絡，如 [Section B.3](#) 所詳述。

5 應用與討論

5.1 表現前沿示例

本小節以實用物件的角度呈現 T-D 圖：將潛水員的紀錄下潛（作者個人訓練紀錄）疊加在由單一校準參數集計算出的理論包絡曲線上。每個下潛側寫映射為一個點 (T, D) ，而這些點的集合形成經驗可行雲。在固定模型與參數下，相同約束導致**預測**可行帶，其左、右邊界即為最快與最慢前沿。

我們以先前小節描述的前沿求解器，固定潛水員（作者）的狀態與係數，計算 [圖 7](#) 中的兩條包絡曲線。為透明起見，示例使用以下對使用者友善的參數值：這些參數為有效校準量，而非生理原始量的直接量測。

- 中性浮力深度： $z_n = 12 \text{ m}$ ，
- 失效深度： $z_{\text{failure}} = 30 \text{ m}$ ，其中 z_{failure} 表示水面完全吸氣的肺被壓縮至殘氣量的深度，
- 終端速度尺度： $v_\infty = 0.80 \text{ m s}^{-1}$ ，
- 靜態參考時間： $T_{\text{STA}} = 240 \text{ s}$ ，其中 T_{STA} 為用作經驗校準參考的靜態閉氣時長，
- 肺活量： $V_{\text{VC}} = 5.0 \text{ L}$ 。

這些輸入暗示簡化力學與氧氣預算內部使用的若干導出量：

- 水面總氣體體積（使用肺總量，即 VC + 殘氣量）： $V_{\text{gas},0} = 6.7 \text{ L}$ ，

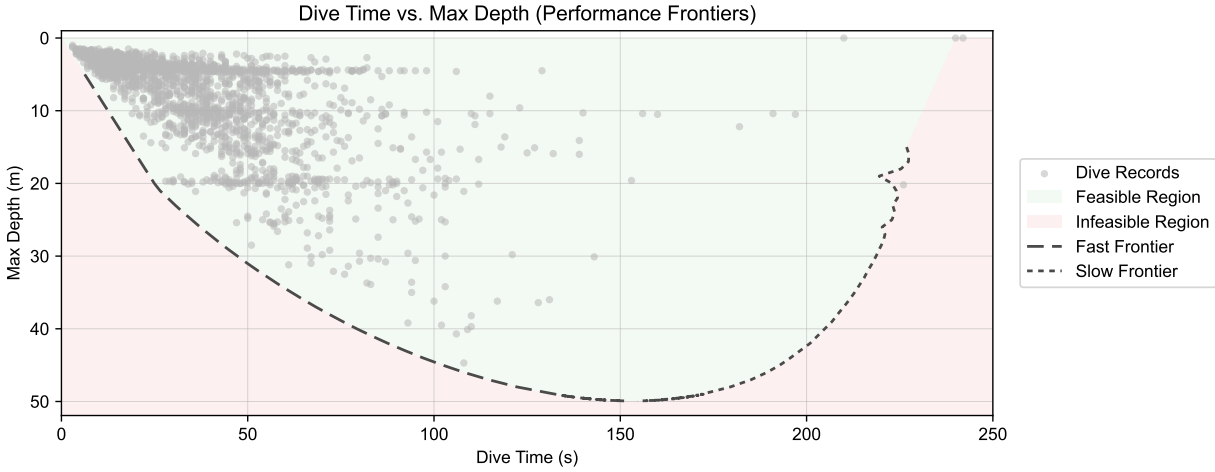


圖 7: 示例最快與最慢表現前沿。灰點為作者的紀錄下潛，以總下潛時間 T (x 軸) 與最大深度 D (y 軸，反向使更深下潛更低) 繪製。綠色陰影帶表示模型預測的可達區間，介於理論最快前沿 (虛線) 與最慢前沿 (點線) 之間，而紅色陰影表示在同一參數集與假設下不可行的 (T, D) 配對。兩條包絡在模型的最大深度處相遇，超過此深度在指定預算與瞬時限制下不存在可行的往返。

- 基礎耗氧率： $\dot{V}_{O_2, \text{rest}} = 7.0 \text{ mL s}^{-1}$ ，
- 阻力常數： $k = 48 \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$ 。

此 k 是有效的匯總阻力常數，可能超過僅由靜態 C_d 與 A 估計的值，因為它吸收了蛙鞋、姿勢、振盪運動、裝備與項目特定技術等因素。

這些氧氣數值是在所選可用氧標準化下表示；對總可用氧的替代假設會重尺度化絕對值，而不影響相對消耗、可行性或結論。靜態閉氣提供整合式校準錨點，而動態下潛成本則在同一標準化氧氣預算下外推，差異被吸收進有效的基礎、 α 與 β 項。

調整參數，使得紀錄下潛點在模型下被預測為可行，即點雲（在噪音與未建模變異內）落在由兩條理論前沿所界定的可行帶內。這是理論前沿作為診斷工具前的基本一致性要求。前沿代表的是模型假設下的可行性，而非可達表現的保證；偏差可能來自技術、心理因素或未建模生理。與紀錄下潛的比較旨在作為質性的合理性檢驗，而非精確驗證，因為實際表現受模型之外的因素影響。

兩條包絡的形狀具有資訊。在此例中，最快前沿在淺至中等深度（約 20 m 以下）近似線性，並在更深處隨著上浮代價增大且氧氣預算開始更緊密地束縛而轉為次線性。最慢前沿在極淺深度接近 STA 極限，在約 30 m 前維持近似線性，隨深度增加則轉為次線性並內折，反映接近模型深度上限時時間上的可行窗口縮小。在此校準例中，兩條前沿在 $D \approx 50 \text{ m}$ 附近、約 $T \approx 150 \text{ s}$ 相交，標示在相同條件與約束下可達的預測最大深度。

5.1.1 沿前沿的資源使用

除了圖 7 的幾何之外，理論前沿也揭示不同深度下哪些約束實際上在束縛。圖 8 以圖示總結此點，繪製 (i) 峰值力量／功率使用率，以及 (ii) 氧氣預算分解，作為最大深度的函數，沿最快與最慢前沿評估。這使前沿曲線從「只是包絡」轉為可解釋的限制因子帳本。

可觀察到若干實務模式。首先，**最快前沿**呈現深度相依的「主動限制因子」。在淺水深度（此例約 20 m 以下），最快前沿主要受力量／功率限制：最優策略是盡量逼近瞬時能力上限以最小化時間。在此區間，即便深度不算極端，總耗氧也接近全預算，符合全力衝刺下潛的主觀感受：限制不是「能否待更久」，而是「能否在不爆掉的情況下推得更硬」。約 20 m 以上，最快前沿在各深度上轉為氧氣受限：求解器必須調整推進力側寫，使累積耗氧維持在 $R_{O_2}^{\text{total}}$ 內，峰值力量／功率使用率亦相應下降。操作上，這是「衝刺心態」不再可行、計算最優解轉向受控配速的位置。

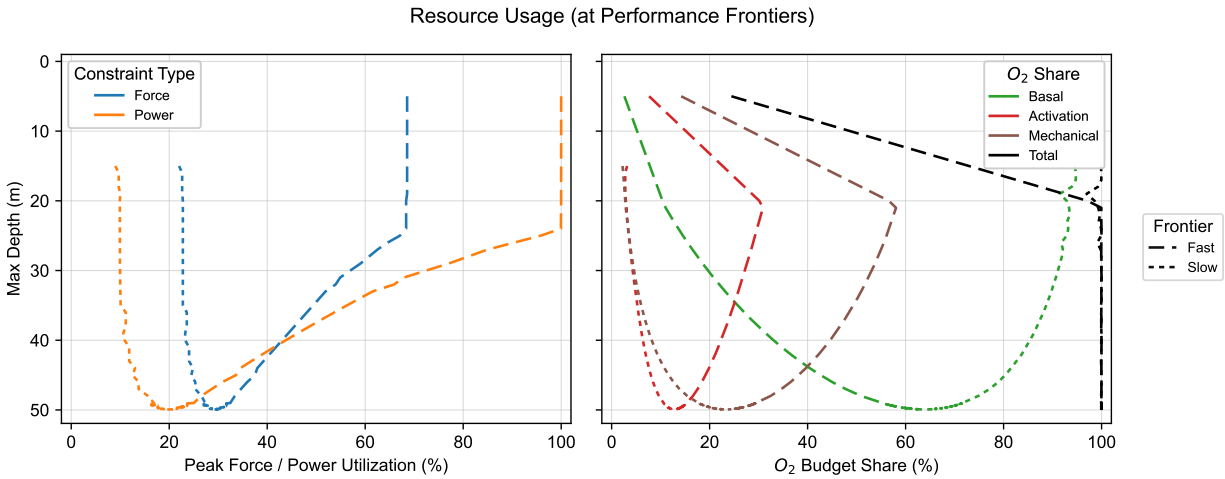


圖 8: 沿最快與最慢前沿的資源使用。y 軸為最大深度 D (反向使更深下潛更低)。左：最優側寫上的峰值機械力量與峰值機械功率，以相對於各自約束上限的百分比表示。右：氧氣預算分攤（基礎、啟動與機械），以加總至總預算的百分比呈現。虛線曲線對應最快前沿（最小時間包絡），點線曲線對應最慢前沿（最大時間包絡）。

其次，**最慢前沿**在所示深度範圍內始終為氧氣受限。這與最慢包絡在氧氣限制預算下最大化時間的定義一致：時間本身透過基礎項成為昂貴資源。有趣的是，此例中最慢前沿上的峰值力量與功率使用率相對較低，且隨深度變化不大，與停留式下潛／慢速下潛的常見實務一致：目標不是產生大峰值，而是以溫和方式到達目標深度，並以冷靜與效率管理剩餘預算。

5.1.2 前沿最優下潛側寫

圖 7 中的前沿曲線摘要了 T-D 平面上的可行性，但求解器也會為每個目標深度產生對應的最優下潛側寫。圖 9 與圖 10 將這些側寫視覺化為深度、速度與推進力的時間序列，代表一組典型深度目標。在兩圖中，每個面板對應固定目標深度 D ，x 軸為經過的下潛時間，左 y 軸為深度（反向），右 y 軸則為垂直速度與推進力。所有面板使用對齊的時間軸範圍，以便跨深度目標直接比較持續時間尺度。

兩條前沿共享若干質性特徵。在所有深度與兩個包絡上，深度軌跡近似 V 形，速度在轉折點由正轉負，推進力持續調制並在下潛轉為上浮時出現尖銳的符號轉換。

圖 9 中的最快前沿側寫凸顯最佳化器如何在約束下使用推進力以最小化往返時間。一個顯著模式是：在較大深度處，下潛速度接近深度受限的終端尺度（此例約 0.8 m s^{-1} ），而在淺水處則逐漸變慢，因為浮力更為正向，潛水員必須為向下進展「付費」。此外，推進力通常不會在深段降為零，除非在最深一次嘗試中，推進力在約 20 m 後放鬆，這與實務上「自由下落」的直覺一致，儘管模型是以連續受約束最優形式求解。

圖 10 中的最慢前沿側寫在速度上呈現明顯的「鯊魚鰭」結構。在接近與高於中性浮力深度時，潛水員先減速，接著進入低推進力區間，使下潛逐漸獲得更多浮力輔助，速度一路回升至轉折點。轉折後，潛水員在浮力懲罰最大的早期上浮施加強上推力，隨著接近淺水、浮力對返回貢獻增加而逐步放鬆推進力。此模式特別有趣，因其在質性上與主流下潛規劃經驗一致，卻仍源自計算理論前沿的同一受約束最佳化框架。

比較兩組前沿可知，當目標深度為最大可行深度 D_{\max} 時兩者相同，兩條包絡收斂於同一點。從訓練角度看，前沿最優側寫也暗示**配速塑形**的重要性至少不亞於「純粹努力」。特別是，最慢前沿側寫傾向避免在中性浮力深度以上（或附近）的早期加速中「浪費」努力，而改以調制推進力，使速度在長區段內更接近常數，並將較高輸出保留給模型預測具有最大邊際效益的區段（例如浮力懲罰最強的早期上浮）。這一細節反駁了「越快越好地通過上層」的簡化啟發，因為在水面附近不必要的衝刺會消耗額外啟動／機械成本，卻無法實質改善目標深度的可行性。實務上，這鼓勵針對**受控、深度相依的配速**（特別在中性深度轉折附近）的訓練，而非僅以峰值速度或峰值推進力為唯一目標。

Optimal Dive Profiles at Performance Frontiers (Fast)

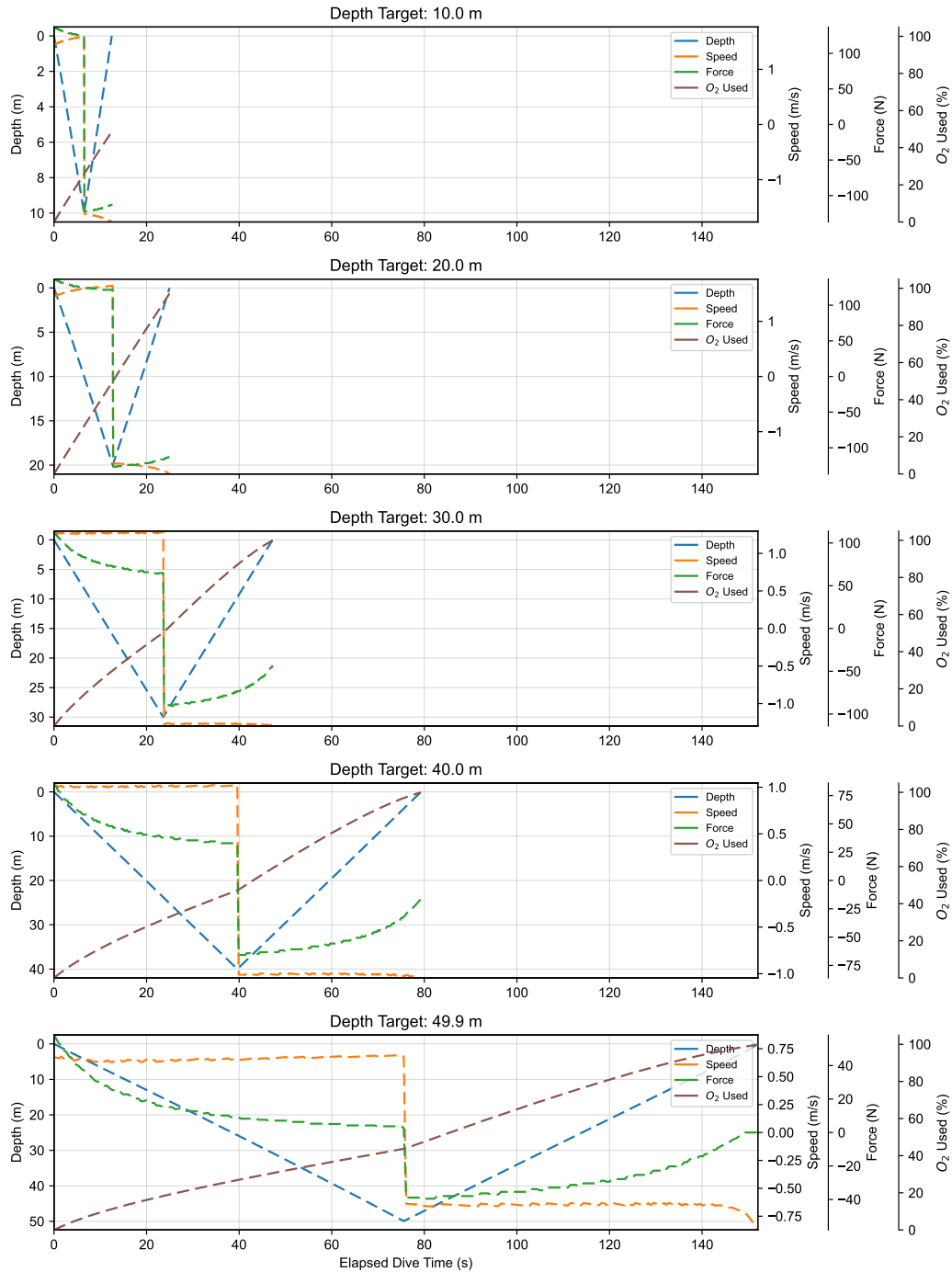


圖 9: 最快前沿最優下潛側寫（深度、速度、推進力與氧氣使用）。每個面板顯示在相同的瞬時力量／功率上限與氧氣預算約束下，到目標深度 D 的最小時間往返。深度呈現典型 V 形，速度在轉折處變號，推進力在下潛與上浮之間持續調制並出現明顯的符號翻轉；第四軸報告累積氧氣使用的預算百分比。經過時間軸在各面板間對齊，使不同深度的持續時間比較更具意義。

5.1.3 依努力程度的表現區帶

Optimal Dive Profiles at Performance Frontiers (Slow)

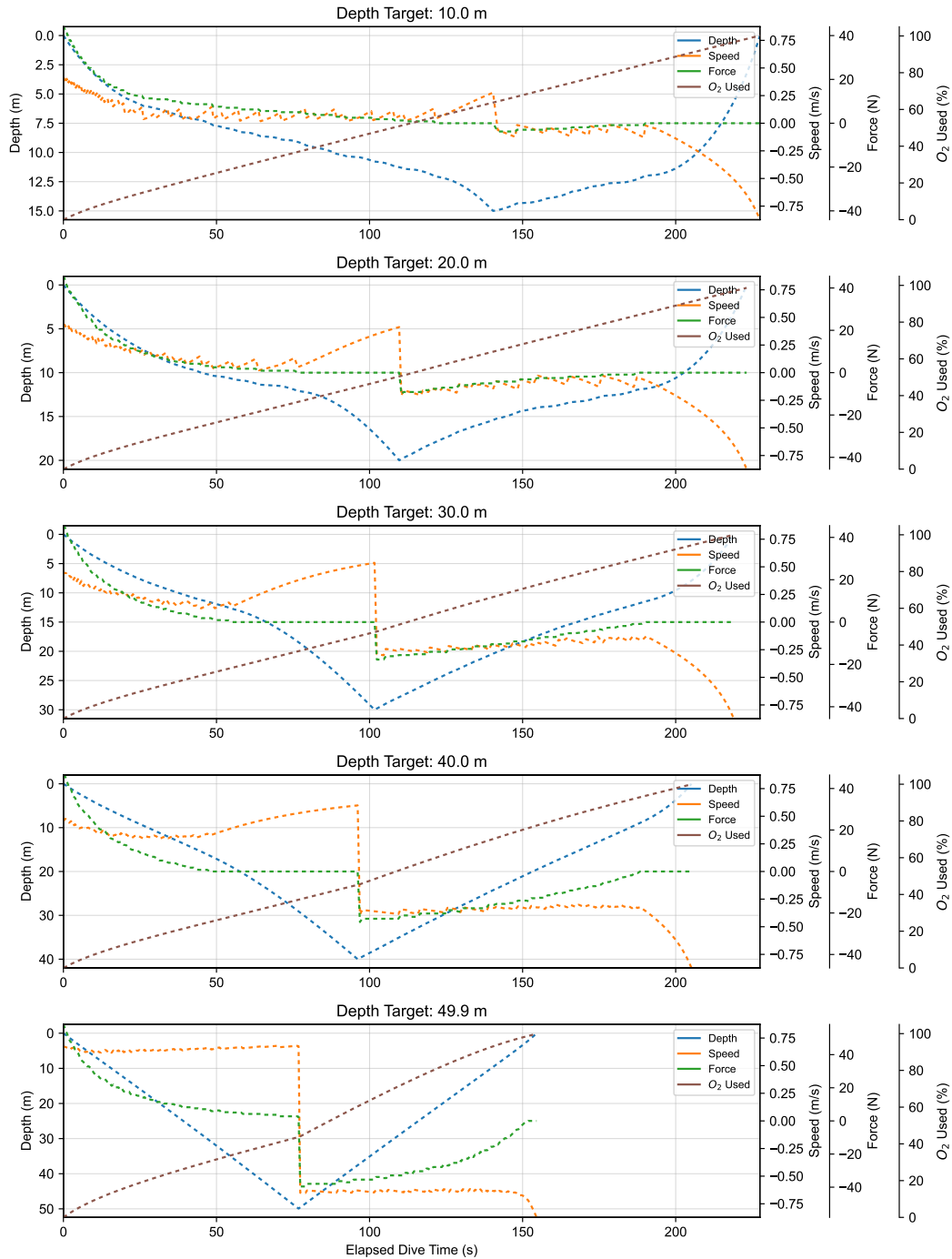


圖 10: 最慢前沿最優下潛側寫 (深度、速度、推進力與氧氣使用)。每個面板顯示在氧氣預算約束與相同瞬時上限下,到相同目標深度 D 的最大時間配速策略。與最快情況相同,深度呈 V 形且速度與推進力在轉折處變號,但配速在推進力於深度與時間上的分配上有明顯差異;第四軸報告累積氧氣使用的預算百分比。經過時間軸在各面板間對齊,使不同深度的持續時間比較更具意義。

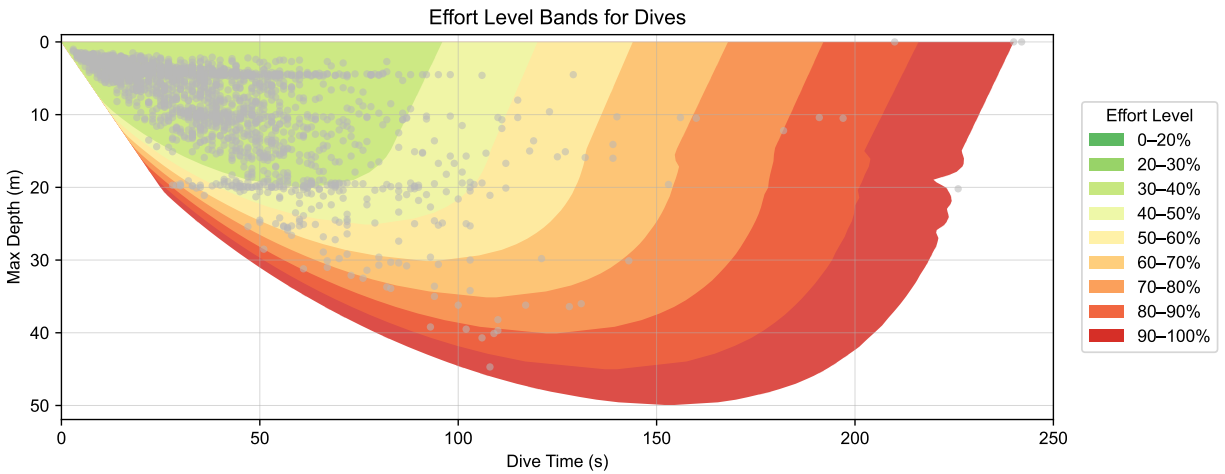


圖 11: 按努力程度分層的前沿。與 圖 7 相同的 T-D 圖，但依努力比例分層。每個彩色區帶對應模型總努力 E 落在潛水員完整預算固定百分比範圍內的下潛（例如 0–20%、20–30%、…、90–100%）。較低努力的可行集合內嵌於較高努力集合，而最外層邊界（90–100%）逼近完整理論表現前沿。灰點為紀錄下潛。

圖 11 清楚指出可達區間不是二元的「可能 vs 不可能」集合，而是一族以單次下潛願意付出的總預算比例為索引的巢狀區域。操作上，這透過縮放總儲量預算並重新求解相同的受約束前沿問題來計算，產生在特定努力程度下「多深／多久」的分層地圖。

此視覺化也釐清真實訓練下潛相對於模型的分佈。多數紀錄下潛聚集在低至中等努力區帶，顯示一般場次仍有相當餘裕，也解釋為何許多下潛雖跨多種深度與時間範圍，卻仍感覺例行。相較之下，接近 90–100% 的最外層區帶代表模型預測邊際可行的區間，條件或配速的小變化即可使計畫跨越邊界。

最後，努力區帶有助於區分「最大可能」與「謹慎可行」。外包絡最深或最長的點或許可達，但它們落在容錯極小且隱含風險較高的狹窄區域。相對地，內部區帶形成更廣、更穩定的區域，其時間預測更可控、可行性分類也較不敏感，通常更適合安全規劃與可重複訓練。

5.2 推廣性

相同的前沿構造可對多位潛水員重複使用，僅需 (i) 其紀錄下潛與 (ii) 潛水員特定的參數集。本節旨在說明框架具有推廣性：一旦參數調整，**相同**求解器即可產生與經驗下潛點雲一致的可行帶，其對應的資源使用圖也說明了不同深度下哪些約束在主導。

5.2.1 區域級冠軍潛水員

第二位受試者（除我之外）是我 AIDA 2 與 AIDA 3 課程的教練。他以使用塑膠雙蛙鞋在區域賽中下潛至當時接近個人最佳的 58 m、且仍對鏡頭「表演」——真正跳舞——而聞名。他的個人最佳紀錄為 CWTB 69 m 與 STA 245 s，這些為官方／紀錄 PB，而訓練或項目特定最大值可能不同。

相較於我的側寫，他的校準參數在幾個顯著面向上不同。他的終端速度尺度較高（約 0.85 m s^{-1} ）。他的靜態閉氣參考時間為 245 s。他的肺活量與我相近。

在 圖 13 中，經驗下潛填滿了廣泛的內部區域，而最深點則逼近模型深度上限附近的下包絡。整體圖像與單一潛水員例子相呼應：可行集合形成一個隨深度變化的時間帶，左側由最快包絡界定，右側由最慢包絡界定。在典型訓練紀錄中，「右牆」（最慢前沿）的採樣密度低得多，這符合實務：潛水員通常在舒適區內訓練，僅偶爾探測近極限的時間-深度計畫，特別在較深目標時。在他的 PB 下潛中，他自述感覺「慢」，分析結果與此一致：他在該深度上比計算的最優（最短時間）側寫慢約 20 s。

圖 14 的資源使用分解提供包絡形狀的直觀解釋。隨深度增加，最快前沿由主要受瞬時輸出（力量／功率上限）限制轉向主要受累積氧氣預算限制，反映從「可衝刺」的淺水下潛轉為需配速的深水下潛。他的腿部驅



圖 12: 區域級冠軍潛水員。左：山中健行的日常照，取自他的社群媒體。(Instagram :@jje2fu02) 右：水下攝影顯示他在塑膠雙蛙鞋下潛時的「舞蹈」，取自比賽主辦方社群媒體。(Instagram :@cat_.fish_ocean)

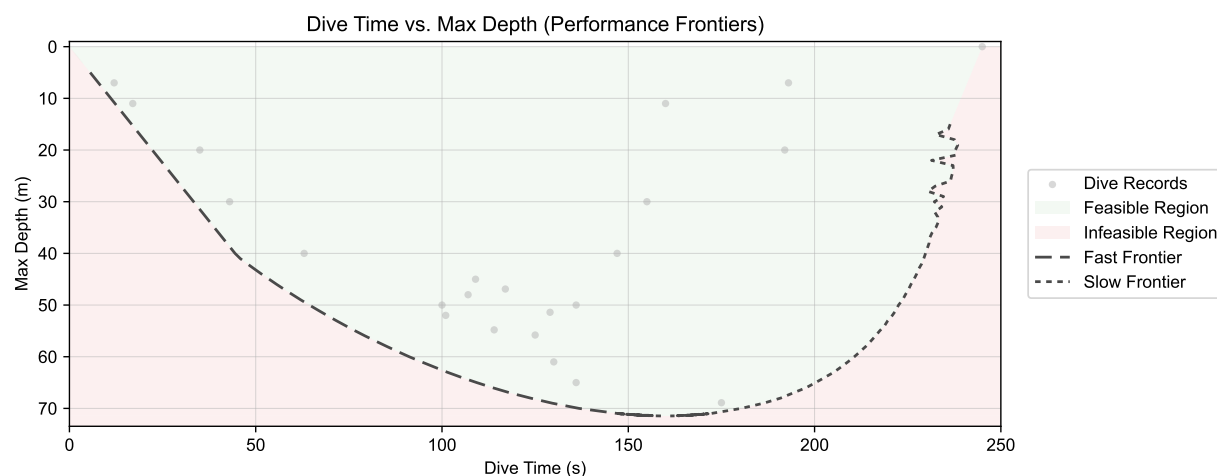


圖 13: 區域級冠軍潛水員的表現前沿。灰點為該潛水員的紀錄下潛映射至 T-D 圖。陰影背景表示在潛水員特定擬合參數集下的模型可達區間，虛線標示最快前沿（各深度最短時間），點線標示最慢前沿（各深度最長時間）。此圖作為包含檢查：理論可行帶應在預期噪音、狀況變化與紀錄變異內包覆經驗點雲。

動力明顯強於我，且功率上限較高（250 W 相較於我的 200 W），這使他能更大深度維持衝刺式下潛。他回報可衝刺至約 40 m 但無法完成真正的 45 m 衝刺下潛，與圖 14 所暗示的模型轉換高度一致。另一方面，最慢前沿在整個深度範圍內仍以氧氣為主導，符合其作為最大時間解的定義：延長 T 會直接增加基礎成本，因此最佳化器重新分配推進力，以最小化不必要的啟動與機械消耗，同時仍達到目標深度。

在我的例子與他的例子中，我們觀察到一個有趣現象：我們的 STA 時間相近，且模型下最大深度的下潛時間也非常接近（約 150 s）。這暗示一個工作假說：在氧氣受限規劃下，「深度最大下潛時間」可能在多種能力層級間落於 STA 時間的約 65%。這進一步引出更大膽的假說：若依 AIDA 教練要求需能達成約 4 分鐘靜態閉氣，那麼在此模型假設與研究條件下，教練的能力可能已足以應付至少 50 m 至 60 m。這些觀察需以更多潛水員更仔細檢驗，並理想上以依理論設計的訓練介入進行測試，透過擬合前沿的前後變化加以評估。

5.2.2 世界級視角

于志瀛 (Zhiying Yu) 是來自中國的世界級自由潛水員，跨多項目保持多項紀錄，包括（撰寫時）CWTB (88 m) 與 FIM (112 m)。他是此主題的啟發之一。在他關於「動態時間」的長篇反思影片 (Yu, 2025) 中，他反覆

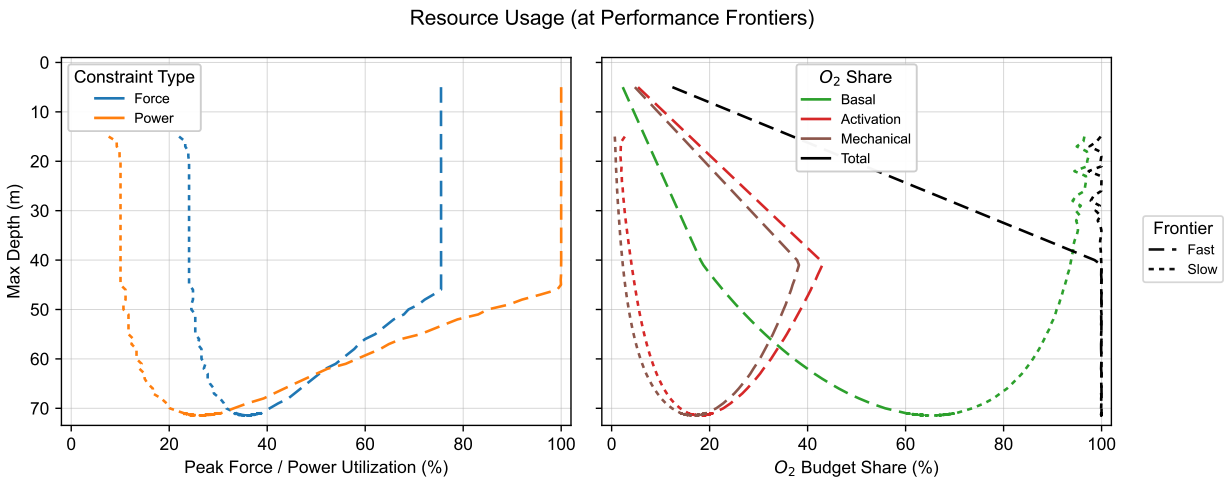


圖 14: 區域級冠軍潛水員前沿上的資源使用。左：沿前沿最優側寫評估的峰值力量與峰值功率使用率，相對於對應能力上限的百分比。右：沿同一側寫評估的氧氣預算分攤（基礎、啟動與機械），分別呈現最快與最慢包絡。這些面板透過指示不同深度下哪些約束綁定，以及包絡如何接近深度上限時變形，來詮釋圖 13。



圖 15: 于志瀛 (Zhiying Yu) 在訓練反思影片中討論「動態時間」、上浮瓶頸與深度與泳池動態之間的有限轉移。在本小節中，他的質性觀察被用作可行性、約束切換與前沿代理訓練的外部對照。

回到一個與本框架高度契合的主題：原始下潛時間 T 是一個重要可觀測量，但它不是可單獨最佳化的對象。他以直白的聲明開場：「Dive Time 可能是一个伪命题」（「下潛時間可能是個偽命題」），並強調「最終以個人感受為主」（「最終以個人感受為主」）。

此觀點與我們理論中 T-D 圖的角色直接對齊。該圖使用 T 作為座標軸，因其可量測且具操作性，但可行性由累積預算與約束支配，而非僅由時間決定。這也解釋了為何我們後續解讀前沿時，不僅看其在 T-D 平面上的幾何包絡，也看對應的約束使用（力量、功率）與氧氣預算分解。

約束切換與上浮瓶頸。于的反思核心線索是他的限制因子在上浮：「最大的问题跟短板是回程的速度慢」（「我最大的問題與短板是回程速度慢」），他描述上浮速度約 $0.6-0.7 \text{ m s}^{-1}$ ，而菁英男性潛水員常在 $0.9-1.0 \text{ m s}^{-1}$ 。以前沿語言而言，這是約束切換的典型例子。在淺水深度，潛水員可能主要受瞬時能力（力量／功率）限制，但隨深度增加，上浮成為需要持續支付阻力與浮力的區段，解也對上浮側能力與耗氧變得更敏感。模型因此精確預測其體感經驗：下潛仍可舒適，但上浮成為綁定約束，將最快前沿向右推移（相同 D 下更大的 T ）。如圖 10 最後一面板所示，在最大表現下潛中，下潛僅耗用約 40% 的預算，與他的感受相符。

為何下潛時間看似「項目不變」。于回報一個有趣的規律：「我的 dive time 不受项目所影响」（「我的下潛時間不受項目影響」），描述在接近 PB 等級的下潛時間時，不同項目會收斂到相似的末期感受。以下是他在訓練中自述的下潛資料供參考：

-
- CNF：76 m，250 s，
 - FIM：106 m，263 s，以及
 - CWTB：96 m，249 s。

在本框架下，若單一全局限制因子在不同項目間主導，就可能出現此現象。這些資料點與他在 STA 的個人最佳 402 s 相比，落在 60–65% 範圍內，與本研究的假說一致。

若決定性瓶頸是「上浮變得昂貴時剩餘多少可用氧氣預算」，則不同推進風格仍可收斂到相近的總時間，即便局部力學與主觀感受在下潛過程中不同。這為潛水員在不同項目間出現時間不變的體驗提供了原則性解釋，同時仍保留項目特定的技術弱點。

訓練意涵與代理前沿的吸引力。最後，于將自身發展描述為部分偶然：他提到使用一種笨拙的方法，即反覆推 PB 下潛而被迫適應，並提出是否存在更安全的方式：將部分深度強迫低氧暴露轉為更安全、更可控的淺深度停留訓練。這個問題正是本文提出代理表現前沿（Proxy Frontier）的實務動機。停留式下潛的最慢前沿代理集中氧氣預算壓力，同時降低機械風險與後勤變異，且更易參數化與重複，對訓練設計與從紀錄擬合潛水員特定係數都很重要。

綜合而言，于的敘事為理論提供了外部質性檢驗。他獨立強調 (i) 將下潛時間作為唯一目標的侷限，(ii) 性能綁定因子隨深度變化（常在上浮側），以及 (iii) 用更安全的代理方案針對相關預算的價值，這些皆為本文可行性與前沿視角的結構特徵。

6 結論

本研究提出一個從物理到生理的正式框架，以**表現前沿**的視角理解自由潛水表現。我們不將「最佳表現」視為單一純量指標，而是將表現定義為 (T, D) 平面中的可達區間——總下潛時間 T 對最大深度 D ——並以最快與最慢前沿包絡來刻畫其邊界。透過結合流體力學、身體力量、運動約束，以及資源受限的生理成本建模，前沿成為一個良定的可計算對象：它可由明確假設推導、以量化工具求解，並在機制上加以詮釋。

此框架的一個關鍵貢獻在於其並非純理論。我們展示如何以真實自由潛水員資料具體化並校準模型，產生潛水員特定的可達區間與前沿預測。模型參數——例如有效阻力、力量與功率上限，以及有效代謝成本項——成為量化受限的代理，將理論錨定於觀測表現，使得不同潛水員、項目與訓練狀態之間可進行有意義的比較。

超越預測，前沿也扮演診斷工具。許多常被報導的自由潛水現象自然表現為跨深度與配速區段的**約束切換**：前沿的不同區段由不同的力學與生理預算組合所限制。此視角將「什麼限制下潛」從質性直覺轉為結構化問題：哪些約束綁定、在何處、以及強度為何？重要的是，雖然絕對氧氣儲量與消耗率難以高精度直接量測——尤其在閉氣條件下——本框架仍可透過相對、預算標準化的耗氧處理保持可操作性。在此標準化下，即使絕對隔室可及性不確定，對可行性、區段轉換與訓練槓桿的結論仍具可解釋性。

最後，此框架提供與專家經驗式啟發一致且可檢驗的訓練指引。模型辨識出擴張可行表現的具體槓桿——降低有效阻力、在力量／功率上限內提升可用推進力上限、改善懲罰機械功的效率項，以及在下潛與上浮間塑造配速／努力分配。透過此方式，表現前沿統一了說明與介入：它提供從觀測下潛行為到限制機制與訓練方向的量化地圖，使自由潛水表現的提升更具系統性與個別化。

References

- AIDA International. AIDA 4 Freediver Manual (v1.03 ed.), 2020.
- AIDA International. AIDA 3 Freediver Manual (v1.06 ed.), 2021.
- Barbosa, T. M., Ramos, R., Silva, A. J., and Marinho, D. A. Assessment of passive drag in swimming by numerical simulation and analytical procedure. *Journal of Sports Sciences*, 36(5), 492–498, 2018.
- Bezruk, D., Bahenský, P., Marko, D., Krajcigr, M., Bahenský Jr, P., Novák-Nowická, E., and Mrkvička, T. The Effect of Static Apnea Diving Training on the Physiological Parameters of People with a Sports Orientation and Sedentary Participants: A Pilot Study. *Sports*, 12(6), 140, 2024.
- Billat, V. L., Sirvent, P., Py, G., Koralsztein, J.-P., and Mercier, J. The concept of maximal lactate steady state: a bridge between biochemistry, physiology and sport science. *Sports Medicine*, 33(6), 407–426, 2003.
- Bonen, A., Wilson, B., Yarkony, M., and Belcastro, A. Maximal oxygen uptake during free, tethered, and flume swimming. *Journal of Applied Physiology*, 48(2), 232–235, 1980.
- Bosco, G., Di Tano, G., Zanon, V., and Fanò, G. Breath-hold diving: a point of view. *Sport Sciences for Health*, 2(2), 47–54, 2007.
- Cortesi, M., and Gatta, G. Effect of The Swimmer's Head Position on Passive Drag. *Journal of Human Kinetics*, 49, 37–45, 2015. <https://doi.org/10.1515/hukin-2015-0106>
- Declercq, L., Bouten, J., Van Dyck, M., Boone, J., Derave, W., Heyse, B., and Bourgois, J. G. A dive into the physiological responses to maximal apneas, O₂ and CO₂ tables in apnea novices. *European Journal of Applied Physiology*, 124(12), 3593–3606, 2024.
- Deschodt, V., Arsac, L., and Rouard, A. Relative contribution of arms and legs in humans to propulsion in 25-m sprint front-crawl swimming. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*, 80(3), 192–199, 1999.
- Ferretti, G. Extreme human breath-hold diving. *European Journal of Applied Physiology*, 84(4), 254–271, 2001.

-
- Fitz-Clarke, J. R. Breath-hold diving. *Comprehensive Physiology*, 8(2), 585–630, 2018.
- González-Badillo, J. J., and Sánchez-Medina, L. Movement velocity as a measure of loading intensity in resistance training. *International Journal of Sports Medicine*, 31(5), 347–352, 2010.
- Levine, B. D., and Stray-Gundersen, J. ``Living high-training low': effect of moderate-altitude acclimatization with low-altitude training on performance. *Journal of Applied Physiology*, 83(1), 102–112, 1997.
- Lindholm, P., and Lundgren, C. E. The physiology and pathophysiology of human breath-hold diving. *Journal of Applied Physiology*, 106(1), 284–292, 2009.
- Marinho, D. A., Reis, V. M., Alves, F. B., Vilas-Boas, J. P., Machado, L., Silva, A. J., and Rouboa, A. I. Hydrodynamic drag during gliding in swimming. *Journal of Applied Biomechanics*, 25(3), 253–257, 2009. <https://doi.org/10.1123/jab.25.3.253>
- Massini, D. A., Scaggion, D., Oliveira, T. P. de, Macedo, A. G., Almeida, T. F., and Pessôa Filho, D. M. Training methods for maximal static apnea performance: a systematic review and meta-analysis. *The Journal of Sports Medicine and Physical Fitness*, 63(1), 77–85, 2022.
- Michael Panneton, W. The mammalian diving response: an enigmatic reflex to preserve life?. *Physiology*, 28(5), 284–297, 2013.
- Monod, H., and Scherrer, J. The work capacity of a synergic muscular group. *Ergonomics*, 8(3), 329–338, 1965.
- Morouço, P. G., Marinho, D. A., Izquierdo, M., Neiva, H., and Marques, M. C. Relative contribution of arms and legs in 30 s fully tethered front crawl swimming. *Biomed Research International*, 2015(1), 563206, 2015.
- Morouço, P., Keskinen, K. L., Vilas-Boas, J. P., and Fernandes, R. J. Relationship between tethered forces and the four swimming techniques performance. *Journal of Applied Biomechanics*, 27(2), 161–169, 2011.
- Muralidhar, S. S., Marin, N., Melick, C., Alwan, A., Wang, Z., Baldwin, R., Walcott, S., and Srinivasan, M. Metabolic cost for isometric force scales nonlinearly and predicts how humans distribute forces across limbs. *Biorxiv*, 2023.
- Novais, M. L., Silva, A. J., Mantha, V. R., Ramos, R. J., Rouboa, A. I., Vilas-Boas, J. P., Luís, S. R., and Marinho, D. A. The Effect of Depth on Drag During the Streamlined Glide: A Three-Dimensional CFD Analysis. *Journal of Human Kinetics*, 33, 55–62, 2012. <https://doi.org/10.2478/v10078-012-0044-2>
- Padilla, S. Scientific bases for precompetition tapering strategies. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 2003.
- Patrician, A., Dujčić, Ž., Spajić, B., Drviš, I., and Ainslie, P. N. Breath-hold diving—the physiology of diving deep and returning. *Frontiers in Physiology*, 12, 639377, 2021.
- Poole, D. C., Burnley, M., Vanhatalo, A., Rossiter, H. B., and Jones, A. M. Critical power: an important fatigue threshold in exercise physiology. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 48(11), 2320, 2016.
- Périard, J. D., Racinais, S., and Sawka, M. N. Adaptations and mechanisms of human heat acclimation: applications for competitive athletes and sports. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 25, 20–38, 2015.
- Samozino, P., Rejc, E., Di Prampero, P. E., Belli, A., and Morin, J.-B. Optimal force–velocity profile in ballistic. *Med Sci Sports Exerc*, 44, 313–322, 2012.

-
- Seiler, K. S., and Kjerland, G. Ø. Quantifying training intensity distribution in elite endurance athletes: is there evidence for an ``optimal'' distribution?. *Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports*, 16(1), 49–56, 2006.
- Toussaint, H. M., and Hollander, A. P. Energetics of competitive swimming: implications for training programmes. *Sports Medicine*, 18(6), 384–405, 1994.
- Toussaint, H. M., Knops, W., De Groot, G., and Hollander, A. P. The mechanical efficiency of front crawl swimming. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 22(3), 402–408, 1990.
- Trassinelli, M. Energy cost and optimisation in breath-hold diving. *Journal of Theoretical Biology*, 396, 42–52, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.02.009>
- Vinetti, G., Taboni, A., Fagoni, N., Tam, E., Lundby, C., and Ferretti, G. Energetics of Underwater Swimming in Apnea. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 57(9), 2053–2061, 2025. <https://doi.org/10.1249/MSS.0000000000003731>
- Yu, Z. Divetime 的全面质变. RedNote, 2025, August 1. <http://xhslink.com/o/5L5ntMLBFnk>
- Zamparo, P., Cortesi, M., and Gatta, G. The energy cost of swimming and its determinants. *European Journal of Applied Physiology*, 120(1), 41–66, 2020.
- Zamparo, P., Pendergast, D. R., Termin, A., and Minetti, A. E. Economy and efficiency of swimming at the surface with fins of different size and stiffness. *European Journal of Applied Physiology*, 96(4), 459–470, 2006.

A 符號表

符號	意義／典型值
z	深度（向下為正）。
v	垂直速度， $v = \dot{z}$ 。
\dot{v}	垂直加速度。
t	時間。
m	潛水員 + 裝備質量。
g	重力加速度。
$F_{\text{mech}}(t)$	自我產生的推進力（向下為正）。
$F_{\text{mech}}^{\text{max}}$	最大瞬時推進力上限， $F_{\text{mech}}^{\text{max}} \approx 200 \text{ N}$ 。
$B(z)$	浮力， $B(z) = \rho_w g V_{\text{disp}}(z)$ 。
$V_{\text{disp}}(z)$	總排水體積。
V_{const}	深度處近乎不可壓縮的排水體積（使用防寒衣深度上限時吸收其效應）。
$V_{\text{suit}}(z)$	防寒衣可壓縮體積（可選）。
$V_{\text{gas}}(z)$	深度處可壓縮氣體體積（波以耳壓縮）。
$V_{\text{gas},0}$	水面氣體體積（肺 + 相通氣腔）。
$P(z)$	靜水壓， $P(z) = P_0 + \rho_w g z$ 。
P_0	水面壓力。
L_p	壓力長度， $L_p := P_0 / (\rho_w g)$ 。
ρ_w	海水密度。
$F_{\text{drag}}(v)$	流體阻力（與運動方向相反）。
k	阻力常數， $k := (1/2)\rho_w C_{\downarrow} A$ 。
C_{\downarrow}	阻力係數， $C_{\downarrow} \approx 0.6\text{--}0.8$ 。
A	有效正向截面積， $A \approx 0.05\text{--}0.07 \text{ m}^2$ 。
ΔF_{∞}	深處淨載重， $\Delta F_{\infty} := mg - \rho_w g V_{\text{const}}$ 。
z_n	中性浮力深度， $mg = B(z_n)$ 。
z_{failure}	失效深度：肺壓縮迫使完全吐氣的深度（用於由 V_{VC} 估計 V_{TLC} ）。
v_{∞}	深處終端速度（若 $\Delta F_{\infty} > 0$ ）， $v_{\infty} := \sqrt{\Delta F_{\infty} / k}$ 。
$\Delta F(z)$	隨深度變化的淨載重， $\Delta F(z) := mg - B(z)$ 。
\tilde{z}	無因次深度， $\tilde{z} := z / L_p$ 。
\tilde{z}_n	無因次中性深度， $\tilde{z}_n := z_n / L_p$ 。
\tilde{v}	無因次速度， $\tilde{v} := v / v_{\infty}$ 。
\tilde{t}	無因次時間， $\tilde{t} := v_{\infty} / L_p t$ 。
$\tilde{F}_{\text{mech}}(\tilde{t})$	無因次推進力， $\tilde{F}_{\text{mech}} := F_{\text{mech}}(t) / \Delta F_{\infty}$ 。
λ	無因次慣性參數， $\lambda := m / (k L_p)$ 。
\dot{V}_{O_2}	可用氧儲量的耗竭速率。
$\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}}$	閉氣時可用氧儲量的基礎耗竭速率， $\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} \approx 2.5\text{--}4 \text{ mL s}^{-1}$ 。
α	啟動／等長額外成本係數。
F_{ref}	啟動項的參考力。
T_{STA}	用於錨定基礎耗氧的靜態閉氣參考時間。
V_{VC}	用於氧氣預算校準的肺活量。

p	啟動指數。
β	功率轉換為 O_2 的係數， $\beta := 1/(\eta e_{O_2})$ 。
η	總效率， $\eta \approx 0.05\text{--}0.095$ 。
e_{O_2}	每 mL O_2 的能量， $e_{O_2} \approx 20.1 \text{ J mL}^{-1}$ 。
$P_{\text{mech}}(t)$	正機械功率， $P_{\text{mech}}(t) := (F_{\text{mech}}(t) \cdot v(t))_+$ 。
P_{mech}^{\max}	最大瞬時機械功率上限， $P_{\text{mech}}^{\max} \approx 120 \text{ W}$ 。
\dot{V}_{CO_2}	瞬時 CO_2 生成率。
γ	CO_2 與 O_2 的轉換因子， $\gamma \approx 0.85\text{--}0.95$ 。
$R_{O_2}(T)$	累積耗氧， $R_{O_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{O_2} dt$ 。
$R_{CO_2}(T)$	累積 CO_2 生成， $R_{CO_2}(T) := \int_0^T \dot{V}_{CO_2} dt$ 。
$R_{O_2}^{\text{total}}$	可用氧儲量（預算）。
$R_{CO_2}^{\text{total}}$	有效 CO_2 耐受預算。
E_{O_2}	以 O_2 為基礎的努力程度， $E_{O_2} := R_{O_2}(T)/R_{O_2}^{\text{total}}$ 。
E_{CO_2}	以 CO_2 為基礎的努力程度， $E_{CO_2} := R_{CO_2}(T)/R_{CO_2}^{\text{total}}$ 。

B 理論前沿

本附錄推導在瞬時能力限制與氧氣預算下的模型預測最快與最慢前沿 $T_{\text{fast}}(D)$ 與 $T_{\text{slow}}(D)$ 。我們在氧氣限制近似下進行（暫不考慮 CO_2 ），並使用本文已介紹的準穩態、重新參數化力學。

B.1 共通假設與記號

深度與階段。 深度 $z \geq 0$ 向下為正，水面 $z = 0$ 。一次下潛在最大深度 D 有單一轉折點，先單調下潛再單調上浮。

控制。 令推進力大小 $f(t) := |F_{\text{mech}}(t)| \geq 0$ 。推進力方向與運動一致：下潛用 $F_{\text{mech}}(t) = +f$ ，上浮用 $F_{\text{mech}}(t) = -f$ 。

準穩態力學（阻力主導）。 定義被動漂移項

$$s(z) := v_{\infty}^2 \frac{z - z_n}{L_p + z}, \quad (36)$$

其中 v_{∞} 為深處終端速度尺度， z_n 為中性浮力深度， L_p 為壓力長度。在 k 常數（推進力對阻力係數）下，準穩態平衡為

$$v|v| = s(z) + \frac{F_{\text{mech}}}{k}. \quad (37)$$

因此速度大小為

$$v_{\downarrow}(z; f) = \sqrt{\frac{f}{k} + s(z)}, \quad v_{\uparrow}(z; f) = \sqrt{\frac{f}{k} - s(z)}. \quad (38)$$

可行性要求平方根內在相關深度範圍非負。

瞬時限制（硬上限）。

$$0 \leq f \leq F_{\text{mech}}^{\max}, \quad f v_{\downarrow}(z; f) \leq P_{\text{mech}}^{\max}(\text{descent}), \quad f v_{\uparrow}(z; f) \leq P_{\text{mech}}^{\max}(\text{ascent}). \quad (39)$$

這些定義各深度上的可行集合 $\mathcal{F}_{\downarrow}(z)$ 與 $\mathcal{F}_{\uparrow}(z)$ 。

耗氧模型（氧氣限制）。

$$\dot{V}_{O_2} = \dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p + \beta P_{\text{mech}}, \quad P_{\text{mech}} = F_{\text{mech}} \cdot v. \quad (40)$$

定義有效氧氣預算為 R^{total} 。

B.1.1 時間的深度域表述

以深度參數化每個單調段。因為 $dt = \frac{dz}{v}$ ，到達深度 D 的下潛總時間為

$$T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] = \int_0^D \frac{dz}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}(z))} + \int_0^D \frac{dz}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}(z))}. \quad (41)$$

B.1.2 耗氧的深度域表述

將氧氣分為時間積分的基礎／力量項，與時間積分的功率項。

基礎 + 力量項。

在每一段，

$$\int \left(\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right) dt = \int \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v(z; f(z))} dz. \quad (42)$$

功率項恆等式。

在推進力對齊且單調運動時， $P_{\text{mech}} = f|v|$ 且 $dz = |v| dt$ ，因此

$$\int \beta P_{\text{mech}} dt = \beta \int f dz. \quad (43)$$

完整耗氧泛函。

因此總耗氧為

$$\begin{aligned} R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] &= \int_0^D \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f_{\downarrow}(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}(z))} dz + \beta \int_0^D f_{\downarrow}(z) dz \\ &\quad + \int_0^D \frac{\dot{V}_{O_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f_{\uparrow}(z)}{F_{\text{ref}}} \right)^p}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}(z))} dz + \beta \int_0^D f_{\uparrow}(z) dz. \end{aligned} \quad (44)$$

可行性要求

$$R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z) \quad \text{for } z \in [0, D]. \quad (45)$$

B.2 最快前沿推導

B.2.1 以受約束最小時間問題定義最快前沿

對每個深度 D ，理論最快前沿為

$$T_{\text{fast}}(D) := \min_{f_{\downarrow}(\cdot), f_{\uparrow}(\cdot)} T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \quad \text{s.t.} \quad R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (46)$$

B.2.2 拉格朗日放鬆與 KKT 條件

引入 $\lambda \geq 0$ 並定義

$$\mathcal{J}_{\text{fast}}[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}; \lambda] := T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] + \lambda(R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] - R^{\text{total}}). \quad (47)$$

在最優 $(f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*, \lambda^*)$ 下的 KKT 條件：

$$\lambda^* \geq 0, \quad R[f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*] \leq R^{\text{total}}, \quad \lambda^*(R[f_{\downarrow}^*, f_{\uparrow}^*] - R^{\text{total}}) = 0. \quad (48)$$

因此，

- 預算不活躍： $R < R^{\text{total}} \rightarrow \lambda^* = 0$ ，
- 預算活躍： $R = R^{\text{total}} \rightarrow \lambda^* > 0$ 。

B.2.3 深度逐點最優性（關鍵簡化）

由於 $\mathcal{J}_{\text{fast}}$ 不包含導數 $f'(z)$ ，固定 λ 下的最小化可在 z 上逐點分離。定義每個深度的被積函數：
下潛。

$$\varphi_{\downarrow}(z, f; \lambda) = \frac{1 + \lambda \left(\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right)}{v_{\downarrow}(z; f)} + \lambda \beta f, \quad f \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z). \quad (49)$$

上浮。

$$\varphi_{\uparrow}(z, f; \lambda) = \frac{1 + \lambda \left(\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right)}{v_{\uparrow}(z; f)} + \lambda \beta f, \quad f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (50)$$

則對每個深度 z ，

$$f_{\downarrow}^{\lambda}(z) \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z)} \varphi_{\downarrow}(z, f; \lambda), \quad f_{\uparrow}^{\lambda}(z) \in \arg \min_{f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z)} \varphi_{\uparrow}(z, f; \lambda). \quad (51)$$

這提供對最優控制的解析刻畫：每個深度上一維函數的最小化，必要時在可行邊界飽和。

B.2.4 內部駐點條件

當最小值落在內部（無主動飽和）時，滿足 $\partial_f \varphi = 0$ 。令

$$g(f; \lambda) = 1 + \lambda \left(\dot{V}_{\text{O}_2, \text{rest}} + \alpha \left(\frac{f}{F_{\text{ref}}} \right)^p \right), \quad g'(f; \lambda) = \lambda \alpha p \frac{f^{p-1}}{F_{\text{ref}}^p}. \quad (52)$$

且

$$\frac{dv_{\downarrow}(z; f)}{df} = \frac{1}{2kv_{\downarrow}}, \quad \frac{dv_{\uparrow}(z; f)}{df} = \frac{1}{2kv_{\uparrow}}. \quad (53)$$

則駐點方程具有統一形式（下潛取 $v = v_{\downarrow}$ ，上浮取 $v = v_{\uparrow}$ ）：

$$\lambda \beta + \frac{g'(f; \lambda)}{v(z; f)} - \frac{g(f; \lambda)}{2kv(z; f)^3} = 0. \quad (54)$$

一般而言，這是 f 的隱式方程（解析駐點條件），實際解為分段式：

- 若在 $\mathcal{F}(z)$ 內的內部解由駐點方程給出，
- 否則夾制於主動邊界（ $f = F_{\text{mech}}^{\text{max}}$ ）或 $fv = P_{\text{mech}}^{\text{max}}$ （以及／或平方根可行性邊界）。

B.2.5 確定 $\lambda^*(D)$

定義由 λ 所誘發的耗氧：

$$R(\lambda; D) := R[f_{\downarrow}^{\lambda}, f_{\uparrow}^{\lambda}]. \quad (55)$$

則

$$\lambda^*(D) = \begin{cases} 0 & \text{if } R(0; D) \leq R^{\text{total}} \\ \text{solve } R(\lambda; D) = R^{\text{total}} & \text{for } \lambda > 0 \text{ if } R(0; D) > R^{\text{total}} \end{cases} \quad (56)$$

在此表述下，增加 λ 會使耗氧成本加重，通常增加時間並降低耗氧，因此 $R(\lambda; D)$ 在實務上具有足夠的單調性，允許穩健的根搜尋（例如二分法）。

B.2.6 最快前沿曲線的最終評估

一旦 $\lambda^*(D)$ 確定，

$$T_{\text{fast}}(D) = \int_0^D \frac{dz}{v_{\downarrow}(z; f_{\downarrow}^{\lambda^*}(z))} + \int_0^D \frac{dz}{v_{\uparrow}(z; f_{\uparrow}^{\lambda^*}(z))}. \quad (57)$$

掃描 D 即可得到模型預測的最快前沿 $T_{\text{fast}}(D)$ 。不存在可行上浮解的深度即為預測深度上限。

B.3 最慢前沿推導

對每個深度 D ，理論最慢前沿定義為在相同力學、上限與氧氣預算下的最大時間問題：

$$T_{\text{slow}}(D) := \max_{f_{\downarrow}(\cdot), f_{\uparrow}(\cdot)} T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \quad \text{s.t.} \quad R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] \leq R^{\text{total}}, \quad f_{\downarrow}(z) \in \mathcal{F}_{\downarrow}(z), \quad f_{\uparrow}(z) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(z). \quad (58)$$

如同最快前沿推導，我們在深度域中工作，並以可行集合 $\mathcal{F}_{\downarrow}(z)$ 與 $\mathcal{F}_{\uparrow}(z)$ 逐點施加可行性。

引入氧氣約束的乘子 $\lambda \geq 0$ ，並考慮等價的最小化問題

$$\max T \quad \text{subject to} \quad R \leq R^{\text{total}} \iff \min(-T) \quad \text{subject to} \quad R \leq R^{\text{total}}. \quad (59)$$

定義最慢前沿的拉格朗日式

$$\mathcal{J}_{\text{slow}}[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}; \lambda] := (-T[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}]) + \lambda(R[f_{\downarrow}, f_{\uparrow}] - R^{\text{total}}). \quad (60)$$

在深度表述中，相對於最快前沿唯一改變的是時間泛函前的符號。因此，最快前沿推導中所有導致深度局部最優性的步驟都可直接套用，僅需替換

$$(+1) \text{ in the time integrand} \rightarrow (-1). \quad (61)$$