

Análisis numérico de la  
distribución de temperatura en  
una batería de ion-litio 18650  
usando el método de los elementos  
finitos

Proyecto de materia

Jose Manuel Machado Loaiza  
Sebastián Tobón Echavarría

Docente  
Nicolás Guarín Zapata

Ingeniería Física  
Escuela de Ciencias  
Universidad EAFIT  
2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>3</b>
3.1	Modelo matemático . . . . .	3
3.2	Modelo termoquímico . . . . .	3
3.3	Modelo numérico . . . . .	4
3.4	Modelo computacional . . . . .	8
3.5	Verificación . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Resultados y análisis</b>	<b>10</b>
4.1	Resolución de la malla . . . . .	10
4.2	Evolución temporal y dependencia de las condiciones iniciales . .	12
4.3	Verificación . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>13</b>

## List of Figures

1	Enumeración de los nodos y estructura de la malla. . . . .	9
2	Distribución de temperatura con 78 elementos. . . . .	10
3	Distribución de temperatura con 312 elementos. . . . .	11
4	Distribución de temperatura con 1352 elementos. . . . .	11
5	Evolución temporal de la distribución de temperatura (temperatura inicial 20 °C). . . . .	12
6	Evolución temporal de la distribución de temperatura (temperatura inicial 40 °C). . . . .	12
7	Resultado de la simulación del sistema en COMSOL . . . . .	13

## List of Tables

1	Principales características de la batería ion-litio 18650 . . . . .	4
---	---	---

## 1 Resumen

El trabajo que será desarrollado en este documento corresponde al desarrollo e implementación de un modelo numérico-computacional para hallar la distribución de temperatura en una batería de ion-litio 18650. Dicho modelo está basado en el método de los elementos finitos, el cual permite hallar una solución aproximada a las ecuaciones que gobiernan el sistema físico. Una vez hallada la distribución de temperatura, se pone a prueba la influencia de ciertos parámetros del modelo sobre la solución final y se verifican los resultados obtenidos mediante un software comercial de elementos finitos (*COMSOL Multiphysics*).

## 2 Introducción

Las tecnologías para el almacenamiento de energía eléctrica son fundamentales para una amplia gama de aplicaciones, desde vehículos eléctricos e híbridos hasta aplicaciones en electrónica. Las baterías ion-litio surgen como respuesta a tales aplicaciones, gracias a las propiedades electroquímicas que las caracterizan. Tanto el peso como el costo de las baterías puede ser disminuido considerablemente mediante el desarrollo de modelos de dinámica térmica en paquetes de baterías y estimadores basados en estos modelos. La gestión térmica de la batería de iones de litio es un aspecto crucial en el sistema holístico de gestión de baterías (BMS), y la estimación en tiempo real de la distribución térmica interna en cada celda de la batería es la clave del éxito en procesos que incluyan dicho tipo de tecnologías [1].

Para modelar el comportamiento de una batería, es necesario abarcar diferentes dominios acoplados, como lo son el eléctrico, electroquímico, y el de dinámicas térmicas, cuyos modelos han sido estudiados extensivamente por numerosos investigadores a lo largo de los años. Para desarrollar un modelo térmico confiable y eficiente, se requiere tener en consideración distintos factores claves como lo son las técnicas para determinar con precisión los parámetros térmicos y las tasas de generación de calor, las ecuaciones termoeléctricas razonablemente simplificadas y la validación experimental [2].

La necesidad de tener un modelo matemático que permita predecir el estado de la batería, y de esta manera desarrollar un modelo que sea fidedigno a las especificaciones ingenieriles, hace en ese sentido necesario las herramientas computacionales y métodos numéricos como el método de los elementos finitos. Dicho método permite comprender y optimizar dispositivos de extracción de energía electroquímicos tales como baterías y dispositivos de almacenamiento de energía eléctrica. El tratamiento numérico reduce el modelo simplificado a una forma soluble mediante un número finito de operaciones numéricas. Esta solución viene caracterizada por un número finito de parámetros, llamados grados de libertad, y al proceso se le conoce como discretización. Se espera que a medida que el número de elementos aumente, la solución discretizada presente convergencia hacia la solución exacta, la cual es independiente de la selección de la discretización [3].

A continuación, se presenta del desarrollo de un modelo numérico-computacional para hallar la distribución de temperatura en una batería de ion-litio 18650. Dicho modelo está basado en el método de los elementos finitos y fue implementado en el lenguaje de programación *Python*. Posteriormente, se presentan los resultados del modelo y estos son comparados con los resultados obtenidos al simular la batería en *COMSOL Multiphysics*, un software comercial de elementos finitos. Por último, se desarrolla una serie de conclusiones respecto a este trabajo y se incluye la bibliografía consultada.

### 3 Metodología

#### 3.1 Modelo matemático

El equilibrio térmico de una batería de ion-litio puede ser representado por

$$Q_p = Q_e + Q_a \quad , \quad (1)$$

donde  $Q_p$  es el calor generado,  $Q_e$  es el calor intercambiado entre la batería y los alrededores, y  $Q_a$  es el calor acumulado, el cual puede ser deducido por la variación en la temperatura.

El intercambio de calor entre la batería y los alrededores se puede dar, principalmente, por tres tipos de transferencia de calor: convección, conducción y radiación. Comparado con la conducción, el calor transferido por convección y radiación es relativamente bajo [2], por lo cual puede ser ignorado. Así, la ecuación de balance de calor puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^T (\mathbf{B} \nabla T) + q \quad , \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} ,$$

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} \end{bmatrix} .$$

El lazo izquierdo de la ecuación representa el incremento de la energía termodinámica en cada componente de la batería. El primer término del lado derecho representa el incremento de la energía por conducción, mientras que el segundo término representa la tasa de generación de calor dentro de la batería. Los términos  $\rho$ ,  $C_p$  y  $\mathbf{B}$  representan la densidad, calor específico y la matriz de conductividad térmica para cada elemento de la batería, respectivamente.

#### 3.2 Modelo termoquímico

La tasa de generación de calor dentro de las baterías requiere un modelo electroquímico detallado. Uno de los modelos mayormente utilizados dentro de la

electroquímica es el modelo de Bernardi [4], el cual propone que la tasa de generación de calor está dada por:

$$q = I \left[ (U_0 - U) - T \frac{dU_0}{dT} \right],$$

donde  $I$  es la corriente de carga/descarga,  $T$  es la temperatura,  $U_0$  es el voltaje del circuito abierto y  $U$  es el voltaje de trabajo.

La popularidad del modelo de Bernardi se debe a su simplicidad y a que toma en cuenta las dos principales causas de la generación de calor: el efecto Joule,  $I(U_0 - U)$ , y el cambio en la entropía,  $-T \frac{dU_0}{dT}$  [5]. Para simplificar el análisis se asume que no hay un cambio de entropía en el sistema, lo cual permite calcular la tasa de generación de calor mediante la siguiente expresión:

$$q = I (U_0 - U). \quad (3)$$

El término  $q$  es el mismo que aparece en la **Eq. 2**. Las características de las baterías de ion-litio 18650 relevantes al problema se muestran en la **Tabla 1** [6], [7].

Característica	Valor	Unidades
Diámetro	18.4	mm
Altura	65.2	mm
Capacidad calorífica por unidad de volumen	1.83	MJ/m <sup>3</sup> K
Conductividad térmica (dirección radial)	1.09	W/mK
Conductividad térmica (dirección axial)	3.82	W/mK
Corriente de carga/descarga	0.52	A
Voltaje de circuito abierto	3.7	V
Voltaje de trabajo	3	V

Table 1: Principales características de la batería ion-litio 18650

### 3.3 Modelo numérico

Para poder implementar el método de los elementos finitos es necesario discretizar el dominio a analizar, para lo cual se implementó una malla formada por cuadriláteros de 4 nodos. El objetivo del modelo es hallar la temperatura en cada uno de los nodos que conforman los elementos de la malla. La interpolación de estos valores está dada por:

$$T = \sum_{i=0}^3 N_i(x, y) T_i \quad ,$$

en donde  $N_i$  son las funciones de forma asociadas al tipo de elemento y  $T_i$  es el valor de la función en cada uno de los nodos. En forma matricial,

$$T = \mathbf{N}(x, y)T \quad ,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(x, y) &= [N_0(x, y) \quad N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] , \\ T^T &= [T_0 \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3] . \end{aligned}$$

Sustituyendo esta aproximación en la **Eq. 2**, se tiene que

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}T = \nabla^T (\mathbf{B} \nabla \mathbf{N}) T + q \quad .$$

Multiplicando esta ecuación por las funciones de forma e integrando sobre el elemento, se obtiene que

$$\rho C_p \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{N}T dxdy = \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T \nabla^T (\mathbf{B} \nabla \mathbf{N}) T dxdy + \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T q dxdy \quad .$$

Al integrar por partes y despreciar las integrales asociadas a los bordes del dominio, resulta que

$$\rho C_p \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dxdy \frac{\partial}{\partial t} T + \iint_{\Omega_{el}} (\nabla \mathbf{N})^T (\mathbf{B} \nabla \mathbf{N}) dxdy T = \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T q dxdy \quad .$$

Esta ecuación se puede expresar como

$$\mathbf{M} \frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{K} T = \mathbf{F} \quad , \tag{4}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \rho C_p \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dxdy \quad , \\ \mathbf{K} &= \iint_{\Omega_{el}} (\nabla \mathbf{N})^T (\mathbf{B} \nabla \mathbf{N}) dxdy \quad , \\ \mathbf{F} &= \iint_{\Omega_{el}} \mathbf{N}^T q dxdy \quad . \end{aligned}$$

El siguiente paso es discretizar la derivada temporal de la **Eq. 4** usando diferencias finitas [8], de lo cual se obtiene que

$$\mathbf{M} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \mathbf{K} T^{n+1} = \mathbf{F} \quad ,$$

donde  $T^{n+1}$  es la nueva temperatura en los nodos (incógnita) y  $T^n$  es el vector de las temperaturas previas (conocido). Esta ecuación se puede reescribir como

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{K}\right) T^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} T^n + \mathbf{F} \quad ,$$

o, de forma más compacta, como

$$\mathbf{L}T^{n+1} = \mathbf{R}T^n + \mathbf{F} \quad . \quad (5)$$

### Integración por cuadratura gaussiana

Las integrales relacionadas con la **Eq. 4** se pueden resolver por el método de la cuadratura gaussiana. En el análisis numérico, una regla de cuadratura es una aproximación de la integral definida de una función, generalmente expresada como una suma ponderada de valores de función en puntos específicos dentro del dominio de integración.

Una cuadratura gaussiana es aquella que selecciona los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada, construida para dar el resultado de un polinomio de grado  $2n - 1$  o menos, elegibles para los puntos  $x_i$  y los coeficientes  $w_i$  para  $i = 1, \dots, n$  [9]. La cuadratura, en dos dimensiones, tiene un dominio de  $[-1, 1]^2$  y está dada por:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds \approx \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} g(r_i, s_j) w_i w_j \quad , \quad (6)$$

donde  $n_x$  y  $n_y$  son el número de puntos de integración en cada dirección,  $r_i$  y  $s_j$  son las coordenadas espaciales de los puntos de integración, y  $w_i$  y  $w_j$  son los pesos asociados a cada uno de los puntos. Para el problema tratado se tomaron  $2 \times 2$  puntos por elemento, de modo que  $n_x = n_y = 2$ ,  $r = \pm\sqrt{1/3}$  y  $w_i = w_j = 1$ .

De la **Eq. 6** se observa que para poder aproximar las integrales relacionadas con la **Eq. 4** es necesario realizar un cambio de coordenadas en el sistema. La conversión se da por la regla de la cadena, expresada en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} ,$$

donde  $\mathbf{J}$  es el jacobiano de la transformación. Este puede ser calculado diferenciando las coordenadas globales respecto a las coordenadas locales, es decir

$$\mathbf{J} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial r} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \\ \frac{\partial N_0}{\partial s} & \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{pmatrix}}_{\nabla \mathbf{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}}_X.$$

Las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas globales se pueden hallar mediante la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} \right\}.$$

La transformación de la integración desde el dominio global al dominio elemental está definida por el determinante del jacobiano, de la siguiente forma:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) \det|\mathbf{J}| dr ds \quad .$$

Combinando este resultado con la **Eq. 6**, tenemos que

$$I \approx \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} f(r_i, s_j) \det|\mathbf{J}| w_i w_j, \quad . \quad (7)$$

Por último, los interpoladores para un elemento canónico definido en  $[-1, 1]^2$  están dados por [10]:

$$\begin{aligned} N_0(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad , \\ N_1(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad , \\ N_2(r, s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad , \\ N_3(r, s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad . \end{aligned}$$

### Ensamble de las matrices globales

Gracias a la **Eq. 7** es posible calcular las integrales asociadas con la **Eq. 4**. Estas representan las matrices elementales del sistema, las cuales al ser sumadas elemento a elemento forman las matrices globales del sistema. La ecuación resultante al sumar las contribuciones de cada matriz elemental es de la forma

$$\mathbf{L}_G \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{R}_G \mathbf{T}^n + \mathbf{F}_G \quad .$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\mathbf{L}_G \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{b} \quad , \quad (8)$$



donde  $\mathbf{L}_G$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{b}$  es el vector de cargas.

### 3.4 Modelo computacional

Para implementar el modelo numérico anteriormente descrito, se creó un código en *Python* que recibe los parámetros de la batería y con base en ello calcula el valor de la temperatura en un intervalo de tiempo específico. Para llevar a cabo este objetivo, el código sigue los siguientes pasos:

1. Se definen todos los parámetros físicos (densidad, conductividad, capacidad térmica, término fuente, dimensiones espaciales) y numéricos (número de nodos y elementos).
2. Se definen las coordenadas espaciales de los nodos y se especifica el intervalo de tiempo en el cual se desea obtener la solución.
3. Se definen las conectividades de los nodos para formar los elementos.
4. Se definen las condiciones iniciales y de frontera.
5. Se crean las funciones para calcular las matrices elementales.
6. Se hace un recorrido por cada elemento para calcular sus matrices elementales y ensamblar las matrices globales.
7. Se calcula el vector de cargas con base en las condiciones iniciales.
8. Se aplican las condiciones de frontera.
9. Se resuelve el sistema de la **Eq. 8** para la nueva temperatura, para luego proceder con el siguiente paso temporal.
10. Se exporta la malla y los datos finales de temperatura a formato *.vtk* para su visualización en *ParaView*, gracias a la librería *meshio* [11].

Las condiciones de frontera implementadas en el código son de tipo Dirichlet, fijando valores de temperatura específicos en los extremos del dominio.

Por otra parte, la temperatura inicial es uniforme sobre toda la batería, exceptuando claramente los bordes donde actúan las condiciones de frontera.

En la **Figura 1** se ilustra la estructura de la malla y la enumeración de los nodos correspondientes.

La malla de la **Figura 1** está formada por 78 elementos de 3 mm×5 mm, con un total de 98 nodos. Para refinar la malla, basta con cambiar el tamaño de los elementos dentro del código. Para analizar la influencia de la resolución de la malla en los resultados, se hicieron varias pruebas sobre el sistema bajo las mismas condiciones iniciales y de frontera. En cada prueba se cambió el número de elementos de la malla para finalmente comparar el resultado final de la distribución de temperatura.

El código también permite visualizar la evolución temporal del sistema mediante una gráfica dinámica, ilustrando cómo es la distribución de temperatura dentro de la batería en función del tiempo.

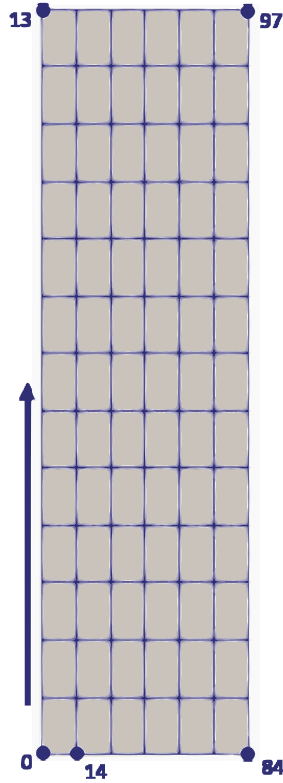


Figure 1: Enumeración de los nodos y estructura de la malla.

### 3.5 Verificación

Para el proceso de verificación de los resultados se utilizó el software multifísico COMSOL. Dicho proceso incluye el modelado térmico de una batería de ion-litio en 2D. Para ello, se utiliza un modelo bidimensional de eje simétrico que permite modelar la temperatura de la batería tras un ciclo de carga-descarga. La interfaz "Lumped Battery" es de especial importancia en este caso, pues permite definir un modelo de batería basado en un pequeño conjunto de parámetros agrupados, que no requieren conocimiento de la estructura interna o el diseño de los electrodos de la batería, o la elección de materiales. La interfaz requiere entradas tales como la capacidad térmica de la batería y el estado de carga inicial, y consta de parámetros agrupados que representan las contribuciones sobrepotenciales óhmicas, de activación y de concentración. Dichos parámetros son consultados en la bibliografía.

Posteriormente, se realiza un estudio temporal adjunto al software, el cual analiza y calcula la transferencia de calor para determinar los cambios de temperatura a lo largo del tiempo. El modelo térmico es en 2D con simetría axial, utilizando la interfaz de transferencia de calor en sólidos.

Luego, se define la geometría de la batería correspondiente y se introduce una entrada de señal cuadrada para aplicar el ciclo carga-descarga. Después, se realiza el enmallado correspondiente a la geometría y se lleva a cabo el estudio correspondiente señalado con anticipación para el análisis de resultados.

Dados los parámetros iniciales del problema y teniendo en cuenta los modelos anteriormente propuestos, se implementan las condiciones de frontera respecto al problema en cuestión teniendo en cuenta la geometría del sistema. Finalmente, el software entrega el resultado junto con las gráficas correspondientes

## 4 Resultados y análisis

Todos los resultados expuestos a continuación fueron obtenidos con las siguientes condiciones de frontera:

- Bordes laterales a 25 °C.
- Borde superior e inferior a 35°C.

Las visualizaciones corresponden a las obtenidas en el software *ParaView*.

### 4.1 Resolución de la malla

A continuación, se muestran los resultados de tres pruebas sobre el sistema con diferente número de elementos: 78 (**Figura 2**), 312 (**Figura 3**) y 1352 (**Figura 4**). Todos fueron obtenidos bajo una condición de temperatura inicial igual a 20 °C.

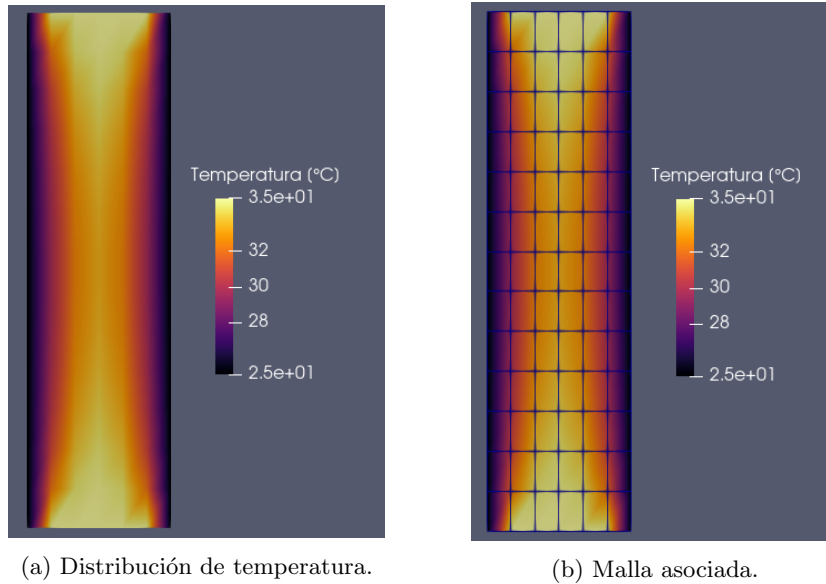
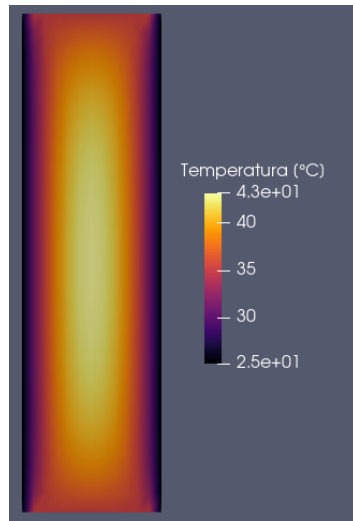
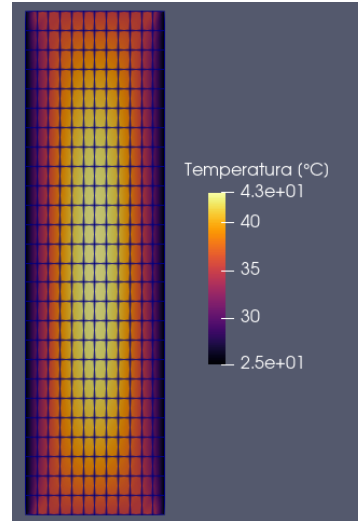


Figure 2: Distribución de temperatura con 78 elementos.

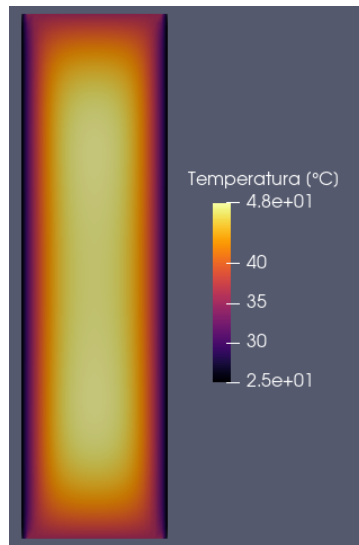


(a) Distribución de temperatura.

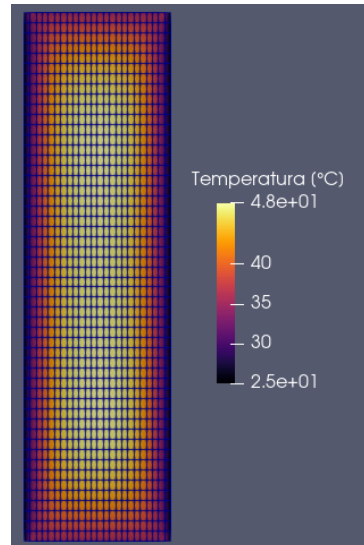


(b) Malla asociada.

Figure 3: Distribución de temperatura con 312 elementos.



(a) Distribución de temperatura.



(b) Malla asociada.

Figure 4: Distribución de temperatura con 1352 elementos.

A partir de estos resultados, es posible concluir que la resolución de la malla tiene una gran influencia sobre los resultados de la distribución de temperatura dentro de la batería.

## 4.2 Evolución temporal y dependencia de las condiciones iniciales

Los resultados que se muestran a continuación fueron obtenidos con la malla de 1352 elementos.

En la **Figura 5** se ilustra la evolución temporal del sistema con condición de temperatura inicial igual a 20 °C, mientras que en la **Figura 6** se ilustra la evolución con temperatura inicial igual a 40 °C.

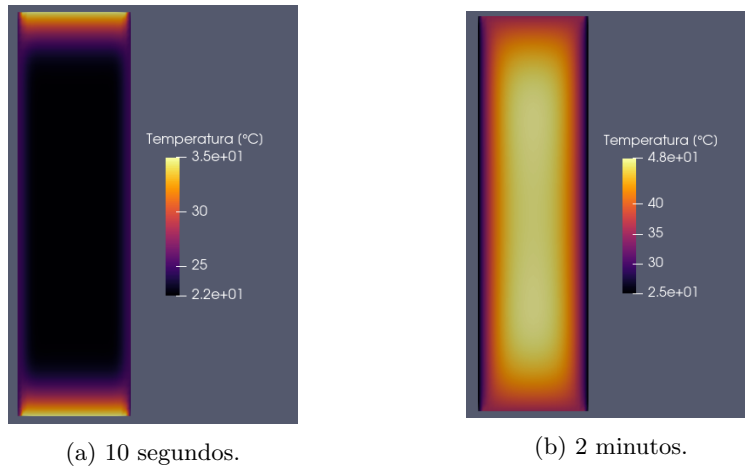


Figure 5: Evolución temporal de la distribución de temperatura (temperatura inicial 20 °C).

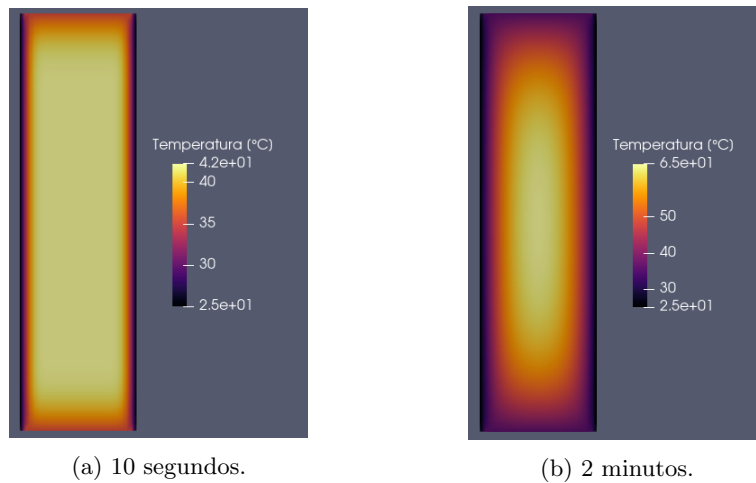


Figure 6: Evolución temporal de la distribución de temperatura (temperatura inicial 40 °C).

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que el estado final de la distribución de temperatura depende de las condiciones iniciales. Esto era de esperarse, pues el calor generado por la batería (término fuente) magnifica el efecto de la temperatura inicial. Sin embargo, la distribución de temperatura conserva la misma forma, lo cual también se esperaba pues la solución a la ecuación de calor (**Eq. 2**) tiende a suavizarse a medida que avanza el tiempo [12].

### 4.3 Verificación

El resultado obtenido al simular el sistema en el software comercial *COMSOL Multiphysics* se muestra en la **Figura 7**.

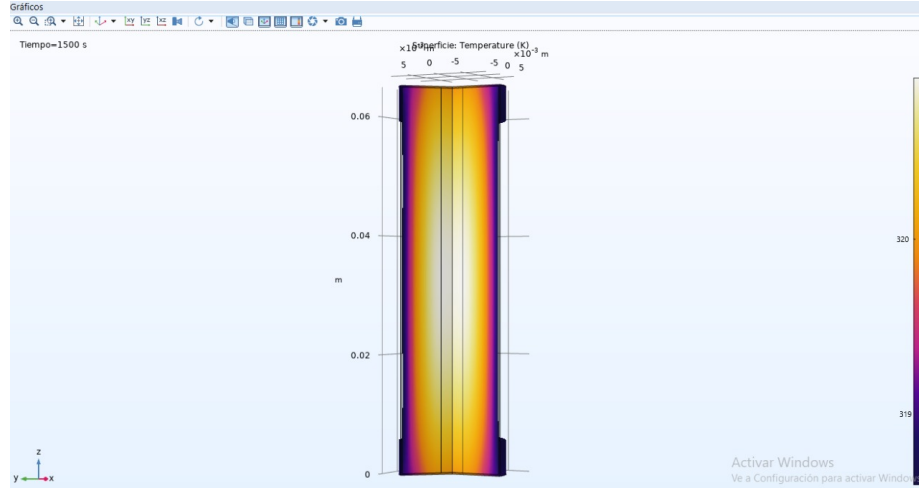


Figure 7: Resultado de la simulación del sistema en COMSOL

Cabe destacar que esta simulación se realizó bajo una condición de temperatura inicial igual a 20 °C. Por lo tanto, los resultados pueden ser comparados con los ilustrados en la **Figura 4a**, siendo evidente que los valores de temperatura coinciden en ambos casos.

## 5 Conclusiones

- Se logró desarrollar un modelo numérico para aproximar la solución a la ecuación de calor en régimen dinámico.
- Se consiguió implementar un código de elementos finitos en *Python* para analizar la distribución de temperatura en una batería ion-litio 18650.
- Se logró observar la forma en que la variación de parámetros como la resolución de la malla o el valor de las condiciones iniciales afectan la

solución de la distribución de temperatura.

- Se consiguió verificar los resultados arrojados por el código mediante la simulación del sistema en un software comercial de elementos finitos (*COMSOL Multiphysics*).

## References

- [1] W. B. Gu and C. Y. Wang, “Thermal-electrochemical modeling of battery systems,,” *J. Electrochemical Society*, pp. vol. 147, no. 8, pp. 2910–2922, 2000.
- [2] Z. Wang, J. Ma, and L. Zhang, “Finite element thermal model and simulation for a cylindrical li-ion battery,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 15372–15379, 2017.
- [3] L. A. Carvajal, “Aplicación del análisis de elementos finitos a la predicción,” *Repositorio Institucional, Universidad EAFIT*, 2005.
- [4] D. Bernardi, “A general energy balance for battery systems,” *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 132, no. 1, p. 5, 1985.
- [5] S. Barcellona and L. Piegari, “Lithium ion battery models and parameter identification techniques,” *Energies*, vol. 10, p. 2007, 12 2017.
- [6] J. Xu, L. Binghe, X. Wang, and H. Dayong, “Computational model of 18650 lithium-ion battery with coupled strain rate and soc dependencies,” *Applied Energy*, vol. 172, pp. 180–189, 06 2016.
- [7] Y. Inui, Y. Kobayashi, Y. Watanabe, Y. Watase, and Y. Kitamura, “Simulation of temperature distribution in cylindrical and prismatic lithium ion secondary batteries,” *Energy Conversion and Management*, vol. 48, p. 2103–2109, 02 2007.
- [8] S. M. Schmalholz and B. J. P. Kaus, “Introduction to finite element modelling in geosciences,” 2008.
- [9] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 1998.
- [10] Nicolás Guarín-Zapata, “Interpolación a tramos en varias dimensiones.” Julio, 2019.
- [11] N. Schlömer, “meshio,” 2019. Available at <https://github.com/nschloe/meshio>.
- [12] P. Dawkins, “Solving the heat equation,” 2019.