



## فرآیندهای تصادفی

نیم سال اول ۱۴۰۳-۰۴

مدرس: دکتر ربیعی

زمان پاسخ گویی: ۲۰ دقیقه

## Gaussian Process

کوییز سری پنجم (۱۰۰ نمره)

## سوال ۱

میدانیم Brownian motion یک فرآیند گاوسی است به طوری که در آن داریم  $cov[W_t, W_s] = \min(t, s)$  از طرفی به صورت شهودی یک بادکنک بزرگ با قطر ۱۰۰ متر را در یک استادیوم فوتبال در نظر بگیرید. بادکنک در بالای سر هواداران قرار دارد. از آنجا که آن‌ها هیجان زده هستند، در زمان‌های مختلف و با جهات مختلف، با حرکت‌های تصادفی، به بادکنک ضربه می‌زنند. در پایان، بادکنک به طور تصادفی در جهت‌های مختلف هل داده می‌شود؛ ولی امید ریاضی جابجایی آن صفر است. (در این مثال حرکت بادکنک را یک Brownian motion در نظر گرفتیم.)

الف) حال اگر  $W_t$  یک Brownian motion باشد و فرآیند جدید  $X_t$  به صورت زیر تعریف شود:

$$X_t = \xi W_t \\ \xi \sim N(1, 1)$$

و بدانیم  $W_t$  و  $\xi$  مستقل از هم هستند، آنگاه تابع کوواریانس فرآیند  $X_t$  را بدست آورید. ( $\xi^2$  مستقل از  $W_t W_s$ ) (۴۰ نمره)

ب) اگر همچنان  $W_t$  یک Brownian motion باشد و فرآیند  $Y$  به صورت زیر تعریف شود:

$$Y_t = \xi + W_t \\ \xi \sim N(1, 1)$$

و همچنان  $W_t$  و  $\xi$  مستقل از هم باشند، آنگاه  $var(Y_t + Y_s)$  را بدست آورید. (۶۰ نمره)

الف)

با توجه به مثال گفته شده میانگین Brownian motion صفر است.

$$\begin{aligned} E[W_t] &= E[W_s] = 0 \\ cov(\xi W_t, \xi W_s) &= E[\xi^2 W_t W_s] - E[\xi W_t] E[\xi W_s] \\ &= E[\xi^2] E[W_t W_s] - (E[\xi])^2 E[W_t] E[W_s] = (1 + 1^2) E[W_t W_s] - 0^2 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= 2 \min(t, s) \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} var[Y_t + Y_s] &= var[Y_t] + var[Y_s] + 2cov[Y_t, Y_s] \\ var[Y_t] &= var[\xi + W_t] = var[\xi] + var[W_t] = 1 + t \\ var[Y_s] &= var[\xi + W_s] = var[\xi] + var[W_s] = 1 + s \\ cov[Y_t, Y_s] &= E[Y_t Y_s] - E[Y_t] E[Y_s] = E[(\xi + W_t)(\xi + W_s)] - 0 \\ &= E[\xi^2] + E[\xi W_t] + E[\xi W_s] + E[W_t W_s] = 2 + 0 + 0 + \min(t, s) \\ var[Y_t + Y_s] &= 4 + t + s + \min(t, s) \end{aligned}$$