# فرایندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

## آزمون میان‌ترم

زمان: ۱۵۰ دقیقه ــ ۱۱۰ نمره (۱۰ نمره امتیازی) | تاریخ امتحان: ۹ام آذر ماه

### پرسش یک

درست یا نادرست بودن هر کدام از گزاره های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

- (۵ نمره) می‌توان با داشتن یک مسیر نمونه [1] از یک فرایند تصادفی SSS بودن یا نبودن آن را تشخیص داد.
- (۵ نمره) فرض کنید N(t) یک فرایند پوآسون با نرخ $\lambda$ باشد. همچنین $X_1$ زمان اولین ورود مشروط بر $N(t_0) = 1$ باشد. در این صورت $X_1$ دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[0, t_0)$ است.

### پرسش دو

(۱۰ نمره) فرض کنید یک سکه‌ی سالم [2] در اختیار داریم. آیا با این سکه می‌توانیم احتمال 0.625 را بسازیم؟ احتمال $\frac{1}{3}$ را چطور؟ (در صورت امکان چگونگی این کار را شرح دهید.)

### پرسش سه

همان‌طور که می‌دانید گربه‌ها در دانشگاه شریف جایگاه خاصی دارند :). فرض کنید که با نرخ یک گربه در هفته به جمعیت گربه‌ها اضافه می‌شود. همچنین فرض کنید که این زاد و ولد گربه‌ها از یک فرایند پوآسون پیروی می‌کند.

۱. (۵ نمره) فرض کنید که $n$امین گربه در زمان $t_0$ به دنیا آمده باشد، توزیع توأم $T_1, ..., T_{n-1}$ ( $n-1$ گربه‌ی نخست) را پیدا کنید.

۲. (۱۰ نمره) اگر هر گربه به صورت متوسط روزی ۱۰۰ گرم گوشت از دانشجویان بگیرد، امید ریاضی میزان گوشتی که دانشجویان تا زمان به دنیا آمدن ۱۰امین گربه به گربه‌ها می‌دهند چقدر است؟

۳. (۵ نمره) فرض کنید تا زمان t دقیقا n گربه به دنیا آمده باشند، در این صورت توزیع زمان تولد $k$امین گربه را پیدا کنید.

۴. (۵ نمره) با توجه به توضیحات بخش ۳ام سوال، امیدریاضی مقدار گوشتی که دانشجویان تا زمان t به گربه‌ها می‌دهند چقدر است؟

### پرسش چهار

۱. (۱۰ نمره) دو فرایند $X_1(t)$ و $X_2(t)$ فرایندهایی Mean Ergodic هستند. میانگین آن‌ها به ترتیب $\eta_1$ و $\eta_2$ است. در صورتی که تعریف کنیم:

$$X(t) = X_1(t) + cX_2(t)$$

به صورتی که c یک متغیر برنولی مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ باشد. آیا فرایند $X(t)$ یک فرایند Mean Ergodic است؟ چرا؟

---
[1] Sample Path
[2] Fair Coin

۲. (۱۰ نمره) فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = a \cdot \cos(\omega_1 t) + b \cdot \cos(\omega_2 t) + c \qquad (1)$$

که در آن a و b به صورت توام گوسی با میانگین صفر و کواریانس $\rho$ هستند. همچنین $\omega_1, \omega_2$ را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت آیا $X(t)$ یک فرایند Mean Ergodic است؟ چرا؟

۳. (۱۰ نمره) در صورتی که $A$ و $\omega$ و ثابت $\phi$ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[-\pi, \pi]$ باشد. آیا فرایند زیر Mean Ergodic است؟ چرا؟

$$X(t) = Acos(\omega t + \phi)$$

## پرسش پنج

(۱۰ نمره) $X(t)$ یک فرایند تصادفی با $\mathbb{E}[X(t)] = 5$ و

$$R_{xx}(\tau) = 25 + 4e^{-2|\tau|}$$

است. اگر $Y(t) = 2X(t) + 3\frac{d}{dt}X(t)$ باشد، مقادیر $\eta_y$ ، $R_{yy}(\tau)$ و $S_{yy}(\omega)$ را پیدا کنید.

## پرسش شش

فرآیند پواسن دو بعدی مشابه حالت یک بعدی، یک فرآیند نقطه ای روی $\mathbb{R}^2$ است که برای هر ناحیه در صفحه مانند $A$ توزیع تعداد نقاط داخل این ناحیه از توزیع پواسن با پارامتر $\lambda S(A)$ پیروی می کند که $S(\cdot)$ تابع مساحت است. فرآیند نقطه ای $N$ را اینگونه تعریف می کنیم که ابتدا یک فرآیند گاوسی مانند $Z(x, y)$ با کرنل $rbf$ با پارامتر $\alpha$ و میانگین صفر تعریف می کنیم. سپس یک فرآیند پواسن دوبعدی با پارامتر $\lambda$ در نظر گرفته و به ازای هر نقطه وقوع آن مانند $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ نقطه وقوع $X$ را برای $N$ با مقدار $Z(X)$ در نظر می گیریم.

۱. (۱۰ نمره) برای یک نقطه دلخواه درفرآیند $N$ مانند $X$ نزدیک ترین نقطه رخ داده را $X_0$ بنامید. همینطور دور ترین نقطه ای که در دایره به شعاع $a$ حول $X$ رخ می دهد (به شرط وجود آن) را $X_a$ بنامید. توزیع محل $X_0$ و $X_a$ را بدست آورید.

۲. (۵ نمره)

$$Cov(N(X), N(X_0)), Cov(N(X), N(X_a))$$

را محاسبه کنید.

۳. (امتیازی)(۱۰ نمره) فرآیند نقطه ای $M$ را روی نقاط فرآیند $N$ اینگونه تعریف کنید که ابتدا برای نقطه وقوع در $N$ مانند $X \in \mathbb{R}^2$ آن نقطه به احتمال $\frac{1}{3}$ در $M$ رخ می دهد و

$$M(X) = 0$$

سپس به ازای هر نقطه وقوع در $M$ مانند $X_0$ در یک دیسک به شعاع $r$ که $r \sim Uniform(0, b)$ به مقدار $M$ در هر نقطه رخ داده داخل دیسک به مرکز $X_0$ مانند $X$ مقدار $Z_2(X)Z_2(X_0)$ اضافه می شود. که $Z_2$ یک فرآیند گاوسی دو بعدی با میانگین صفر و کرنل

$$k(X, Y) = \frac{1}{||X - Y|| + 1}$$

است. مقدار $E[M(Y)]$ را برای نقطه دلخواه رخ داده $Y$ محاسبه کنید.

# mid-stochastic-fall2022-solution

November 2022

## 1 Q1

### 1.1 1

Obviously not!

### 1.2 2

ب) درست

Suppose that for a Poisson process at rate $\lambda$, we condition on the event $\{N(t) = 1\}$, the event that exactly one arrival ocurred during $(0, t]$. We might conjecture that under such conditioning, $t_1$ should be uniformly distributed over $(0, t)$. To see that this is in fact so, choose $s \in (0, t)$. Then

$$\begin{aligned}
P(t_1 \leq s | N(t) = 1) &= \frac{P(t_1 \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{P(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{P(N(t) = 1)} \\
&= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} \\
&= \frac{s}{t}.
\end{aligned}$$

## 2 Q2

ادعا می‌کنیم برای هر $0 \le \alpha \le 1$ می‌توان این کار را انجام داد. آزمایشی را به این صورت طراحی می‌کنیم که بسط اعشاری $\alpha$ در مبنای ۲ را در نظر می‌گیریم. در هر مرحله اگر بیت $i$ام ۱ بود و سکه ۰ آمد Accept می‌کنیم. اگر بیت $i$ام ۰ بود و سکه ۱ آمد reject می‌کنیم در غیر این صورت سراغ بیت بعدی می‌رویم. ابتدا ثابت می‌کنیم جمع این احتمال‌ها ۱ است و آزمایش تمام می‌شود.

مرحله‌ی $i$ام را در نظر بگیرید. از آن‌جا که در مرحله‌ی $i$ام هستیم یعنی از $i-1$ مرحله گذشتیم که احتمال این امر $(\frac{1}{2})^{i-1}$ است در این مرحله با توجه به بیت $\alpha$ به احتمال $\frac{1}{2}$ Accept یا reject می‌شویم و به احتمال $(\frac{1}{2})$ به مرحله‌ی بعد می‌رویم. پس احتمال تمام شدن بازی در مرحله‌ی $i$ام $(\frac{1}{2})^i$ است.

$$P(\text{تمام شدن}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{تمام شدن در } i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

حال ثابت می‌کنیم احتمال Accept شدن در این آزمایش برابر $\alpha$ است. برای این کار کافی است نشان دهیم که هرجا در نمایش $\alpha$ عدد ۱ می‌بینیم $(\frac{1}{2})^i$ احتمال دارد بازی را ببریم. برای این کار فرض کنید رقم $i$ام $\alpha$ برابر ۱ باشد احتمال این که در این مرحله Accept شویم برابر حاصلضرب احتمال رسیدن به این مرحله که $(\frac{1}{2})^{i-1}$ است در احتمال برد در این مرحله که $(\frac{1}{2})$ است می‌باشد (از ۲ حالت ۱ و تاس ۱ و ۱ و تاس ۰ باید ۱ و تاس ۰ اتفاق بیافتد) بنابراین به ازای ۱ در نمایش اعشاری $\alpha$ یک $(\frac{1}{2})^i$ داریم. حاصل جمع این $(\frac{1}{2})^i$ها همان بسط اعشاری مبنای ۲ $\alpha$ می‌باشد بنابراین احتمال Accept، $\alpha$ است.

## 3 Q3

پرسش سوم:

n

$$P(T_1,\dots,T_{n-1}\mid T_n) = \frac{P(T_1,\dots,T_{n-1},T_n)}{P(T_n)}$$

$$P(T_1,\dots,T_n) = P(T_n\mid T_1,\dots,T_{n-1})\,P(T_1,\dots,T_{n-1})$$

$$= e^{-\lambda(T_n-T_{n-1})}\,P(T_1,\dots,T_{n-1})$$

با استقرا روی n بدست می‌آید:

$$P(T_1,\dots,T_n) = e^{-\lambda T_n}$$

$T_n$ : مجموع n متغیر نمایی مستقل $\rightarrow T_n \sim \lambda^n T_n^{n-1} e^{-\lambda T_n}$

$$\rightarrow P(T_1,\dots,T_{n-1}\mid T_n) = \frac{e^{-\lambda T_n}}{\lambda^n T_n^{n-1} e^{-\lambda T_n}} = \lambda^{-n} T_n^{-(n-1)}$$

$= ۷^n T_n^{-(n-1)}$

(۲

$$E\left[(T_n-T_{n-1})+(T_n-T_{n-2})+\dots+(T_n-T_1)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[T_n-T_i] = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda i$$

$= ۷ \times \frac{n(n-1)}{۲} = ۷ \times \frac{۱۰\times۹}{۲}$

$\rightarrow$ مقدار گوشت = ۷×۴۵×۰٫۱ کیلوگرم

۳)

$$P(T_K \leq s \mid N_t = n) = P(N_s \geq K \mid N_t = n)$$

$$= \sum_{i=K}^{n} P(N_s = i \mid N_t = n) = \sum_{i=K}^{n} \frac{P(N_s = i, N_{t-s} = n-i)}{P(N_t = n)}$$

$$= \sum_{i=K}^{n} \frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^i}{i!} \times e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{n-i}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}}$$

$$= \sum_{i=K}^{n} \frac{s^i (t-s)^{n-i}}{t^n} \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i}$$

$$\rightarrow F_{T_K}(s \mid N_t = n) = \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i}$$

۴)

$$E\left[\sum_{K=1}^{n} (t - T_K) \,\Big|\, N_t = n\right]$$

$$= \sum_{K=1}^{n} E[t - T_K \mid N_t = n] = \sum_{K=1}^{n} \int_0^T P(T_K \leq s \mid N_t = n)\, ds$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \int_0^t \sum_{i=K}^{n} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-i} \binom{n}{i}\, ds$$

$$= \int_0^t \sum_{K=1}^{n} K \left(\frac{s}{t}\right)^K \left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-K} \binom{n}{K}\, ds = t \sum_{K=1}^{n} \int_0^1 K p^K (1-p)^{n-K} \binom{n}{K}\, dp$$

$$= \sum_{K=1}^{n} t K \binom{n}{K} \left(\frac{(n+1)!}{K!(n-K)!}\right)^{-1} = \frac{t}{n+1} \sum_{K=1}^{n} K = \frac{tn}{2}$$

# 4 Q4

## 4.1 1

(آ) برای فرایند داده شده داریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[cX_2\left(t\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[X_1\left(t\right)\right] + \mathbb{E}\left[c\right]\mathbb{E}\left[X_2\left(t\right)\right]\\ &= \eta_1 + 0.5\eta_2\end{aligned}$$

این در حالی است که برای sample path ای که c=0 می‌باشد $X\left(t\right) = X_1\left(t\right)$ می‌باشد که در نتیجه وقتی $T \to \infty$ میانگین بدست آمده برابر $\eta_T \to \eta_1$ خواهد بود. بنابراین فرایند داده شده Mean Ergodic نمی‌باشد.

## 4.2 2

$$\eta_t = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(a\cos(\omega_1 t) + b\cos(\omega_2 t) + c\right)dt =$$

$$\frac{a}{2T\omega_1}\sin(\omega_1 t)\Big|_{t=-T}^{T} + \frac{b}{2T\omega_2}\sin(\omega_2 t)\Big|_{t=-T}^{T} + \frac{c}{2T}\,t\Big|_{t=-T}^{T}$$

$$= \frac{a}{\omega_1 T}\sin(\omega_1 T) + \frac{b}{\omega_2 T}\sin(\omega_2 T) + C$$

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{Var}(\eta_t)} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\frac{a}{\omega_1 T}\sin(\omega_1 T) + \frac{b}{\omega_2 T}\sin(\omega_2 T) + C - \overset{\eta}{C}\right)^2\right]$$

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{a^2}{\omega_1^2 T^2}\sin^2(\omega_1 T) + \frac{b^2}{\omega_2^2 T^2}\sin^2(\omega_2 T) + \frac{2ab}{\omega_1\omega_2 T^2}\sin(\omega_1 T)\sin(\omega_2 T)\right] = 0$$

پس Mean Ergodic

## 4.3 3

(ج) مشابه بخش قبل ابتدا WSS بودن یا نبودن فرایند را بررسی می‌کنیم:

$$\mathbb{E}\left[X\left(t\right)\right] = A\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t+\phi\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\omega t+\theta\right)d\theta = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right] &= A^2\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_2+\phi\right)\right]\\ &= \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)+\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\\ &= \frac{A^2}{2}\left[\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2\phi\right)\right]\right]\\ &= \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\left(t_1-t_2\right)\right)\end{aligned}$$

بنابراین فرایند WSS می‌باشد. حال طبق قضیه Slutsky داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C\left(\tau\right)d\tau &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{A^2}{2}\cos\left(\omega\tau\right)d\tau\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2\omega\tau}\sin\left(\omega\tau\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

بنابراین فرایند Mean Ergodic می‌باشد.

## 5 Q5

$$\underset{\sim}{y}(t) = 2\underset{\sim}{x}(t) + 3\underset{\sim}{x}'(t) \qquad \eta_x = 5 \qquad C_{xx}(\tau) = 4e^{-2|\sigma|}$$

The process $\underset{\sim}{y}(t)$ is the output of the system $H(s) = 2+3s$ with input $\underset{\sim}{x}(t)$. Hence, $\eta_y=5H(0)=10$

$$S_{yy}{}^c(\omega) = S_{xx}{}^c(\omega)|2+3j\omega|^2 = \frac{16}{4+\omega^2}(4+9\omega^2) = 144 - \frac{512}{4+\omega^2} = S_{yy}(\omega) - 2\pi\eta_y{}^2\delta(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = 144 - \frac{512}{4+\omega^2} + 2\pi(10)^2\delta(\omega)$$

$$\cancel{R_{yy}(\tau) = 144\delta(\tau) - 128\frac{2(2)}{2^2+\omega^2}}$$

$$S_{yy}(\omega) = 144 - 128\frac{2(2)}{2^2+\omega^2} + 2\pi(100)\delta(\omega)$$

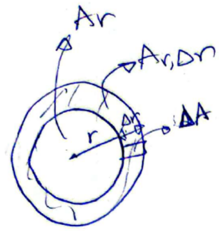
$$= 144\delta(\tau)\cancel{(2\pi)} - 128e^{-a|\tau|} + 100$$

$$= 288\pi\delta(\tau) - 128e^{-a|\tau|} + 100$$

## 6 Q6

پرسش ششم :

۱) نزدیک‌ترین نقطه




n(A): تعداد نقاط داخل A

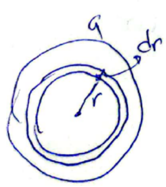
$$P(X_0 \in A_{r,\Delta r}) = P(n(A_r)=0, n(A_{r,\Delta r}) \geq 1)$$
$$= e^{-\lambda S(A_r)}\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,\Delta r})}\right)$$

$$\rightarrow P(X_0 \in \Delta A) = \frac{\Delta A}{S(A_{r,\Delta r})} e^{-\lambda S(A_r)}\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,\Delta r})}\right)$$

$$\rightarrow \lim_{dA \to 0} \frac{P(X_0 \in dA)}{dA} = \lim_{dA \to 0} e^{-\lambda \pi r^2}\left(\frac{1-e^{-\lambda S(A_{r,dr})}}{S(A_{r,dr})}\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda \pi r^2} \rightarrow f(X_0) = e^{-\lambda \pi r(x_0)^2}$$

دورترین نقطه (به شرط وجود در دیسک به شعاع a):




$$P(X_a \in A_{r,dr} \mid n(A_a) \geq 1)$$
$$= \frac{P(X_a \in A_{r,dr}, n(A_a) \geq 1)}{P(n(A_a) \geq 1)}$$
$$= \frac{\left(1-e^{-\lambda S(A_{r,dr})}\right) \cdot e^{-\lambda S(A_{r+dr,a})}}{1-e^{-\lambda S(A_a)}}$$



$$\rightarrow f(X_a \mid n(A_a) \geq 1) = \frac{\lambda e^{-\lambda \pi (a^2-r^2)}}{1-e^{-\lambda \pi a^2}}$$



۲)

$$\cancel{Cov(X, X_0) = E[XX_0] - E[X]E[X_0]}$$

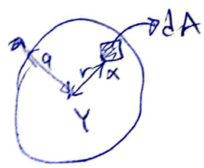
$$Cov(N(X), N(X_0)) = E[N(X)N(X_0)]$$
$$- E[N(X)]E[N(X_0)]$$

$$= \frac{2\pi\lambda e^{-\lambda\pi a^2}}{1-e^{-\lambda\pi a^2}} \int_0^a e^{-\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\lambda\pi\right)r^2}\, r\,dr$$

$$= \frac{2\pi\lambda e^{-\lambda\pi a^2}}{1-e^{-\lambda\pi a^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha^2}-2\pi\lambda}\left(1-e^{-\left(\frac{1}{2\alpha^2}-\lambda\pi\right)a^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi\lambda}{\left(\frac{1}{\alpha^2}-2\lambda\pi\right)\left(1-e^{-\lambda\pi a^2}\right)}\left(e^{-\lambda\pi a^2}-e^{-\frac{a^2}{2\alpha^2}}\right)$$

۱۳) ابتدا دقت کنید که نقاط M از توزیع پواسن با پارامتر $\frac{\lambda}{3}$ می آیند.




$$E[M(Y)]$$

$$= \lim_{dA\to 0} \sum_{dA} P(Y \in B_x(r(x)))\, n(dA) \times E[N(Y)N(x)]$$

$$= \lim_{dA\to 0} \sum_{dA} \left(1-\frac{r}{a}\right) \frac{\lambda}{3}\, dA \times \frac{1}{1+r}$$

$$= \int_{B_a(Y)} \left(1-\frac{r}{a}\right) \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{1}{1+r}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(1-\frac{r}{a}\right) \frac{\lambda}{3} \frac{1}{1+r}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳a} \int_{۱}^{a+۱} -\frac{a+۱}{r} - r + (a+۲)\, dr$$

$$a^{۲} + ۲a$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳a} \left( -(a+۱)\ln(a+۱) - \frac{((a+۱)^{۲} - ۱)}{۲} + (a+۲)a \right)$$

$$= \frac{۲\pi\lambda}{۳} \left( -\left(۱ + \frac{۱}{a}\right)\ln(a+۱) - \frac{(a+۲)}{۲} \right)$$