به نام خدا

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فرایندهای تصادفی
نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲
حمیدرضا ربیعی

امتحان میان‌ترم– ۹۰ دقیقه

---

۱ کوتاه پاسخ (۲۰)

درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. (۱۰ نمره) شرط لازم و کافی برای این که فرایند تصادفی $x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ (ω ثابت) WSS باشد این است که $\mathbb{E}[AB] = 0$.

۲. (۱۰ نمره) X و Y دو متغیر تصادفي تواماً نرمال با متوسط هاي صفر و واريانس هاي σ^2 و ضريب همبستگي r هستند. در اين صورت متغيرهاي تصادفي $U = X - Y$ و $V = X + Y$ مستقل از هم هستند.

۱.۱ پاسخ

د) غلط

$$E[X^2(0)] = E[A^2]$$

$$E[X^2(\frac{\pi}{2\omega})] = E[b^2]$$

بنابراین یک شرط لازم و کافی برای WSS بودن این است که $E[a^2] = E[b^2]$. همچنین داریم:

$$E[x(t+h)x(t)] = E[\left(a\cos(\omega(t+h)) + b\sin(\omega(t+h))\right)\left(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right)]$$
$$= E[a^2]\cos(\omega h) + E[ab]\sin\left(\omega(2t+h)\right)$$

در نتیجه باید داشته باشیم $E[ab] = 0$. واضح است که دو شرط به دست آمده کافی هستند.

صحیح

$$Cov(U,V) = E\{UV\} - E\{U\}E\{V\} = E\{(X-Y)(X+Y)\} - E\{X-Y\}E\{X+Y\}$$
$$= E\{X^2\} - E\{Y^2\} - 0\times 0 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$$

چون دو متغیر تصادفی X و Y نرمال هستند، متغیرهای تصادفی U و V نیز نرمال هستند و چون ناهمبسته‌اند در نتیجه مستقل‌اند.

۲ احتمال (۱۵)

یک فرایند تصادفی زمان گسسته $x[n]$ نسبت به فرایند $y[n]$، martingale است اگر داشته باشیم:

$$E(x(n+1)|y[1], y[2], ..., y[n]) = x(n)$$

اگر لحظات مختلف فرایند $y[n]$ متغیرهای تصادفی iid با میانگین صفر باشند و

$$x[n] = y[1] + y[2] + ... + y[n]$$

۱. (۵ نمره) نشان دهید $x[n]$ نسبت به $y[n]$، martingale است.

۲. (۱۰ نمره) نشان دهید برای هر n دلخواه داریم:

$$E(x(n)) = E(x(1))$$

۱.۲ پاسخ

$$x[n] = y[1] + y[2] + \dots + y[n] = x[n-1] + y[n]$$

۵- الف)

$$E(x[n+1] | y[1], \dots, y[n]) = E(x[n] + y[n+1] | y[1], \dots, y[n])$$

$$= \underbrace{E(x[n] | y[1], \dots, y[n])}_{\text{داشتن } y[1] \text{ تا } y[n] \text{ معادل داشتن } x[n] \text{ است}} + \underbrace{E(y[n+1] | y[1], \dots, y[n])}_{\text{مستقل هستند}} = x[n] + \overset{0}{E(y[n+1])} = x[n]$$

ب) داریم: $E(x[n+1] | y[1], \dots, y[n]) = x[n] \Leftarrow$ دو طرف تصادفی هستند لذا میانگین می‌گیریم

دو طرف امید ریاضی می‌گیریم: $E_y(E(x[n+1] | y[1], \dots, y[n])) = E(x[n]) \Rightarrow E(x[n+1]) = E(x[n])$

این رابطه برای هر n ای برقرار است لذا داریم: $E(x[n]) = E(x[1])$

۳ سامانه‌های LTI (۲۰ نمره)

$X(t)$ را یک فرایند گاوسی با میانگین صفر و $R_X(\tau) = 8sinc(4\tau)$ در نظر بگیرید. $X(t)$ را به عنوان ورودی به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ی زیر می‌دهیم:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |f| < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

اگر خروجی این سیستم $Y(t)$ باشد. $P(Y(2) < 1 | Y(1) = 1)$ را پیدا کنید.

۱.۳ پاسخ

X(t) is WSS Gaussian, Y(t) is also WSS Gaussian thus we should find $\mu_Y, \ R_Y(\tau)$

$\mu_Y = \mu_X H(0) = 0$

$$S_X(f) = F(R_X(\tau)) = \begin{cases} 2 & |f| < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} & |f| < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$R_Y(\tau) = F^{-1}(S_X(f)) = sinc(2\tau)$

$E[Y(t)^2] = R_Y(0) = 1$

we conclude $Y(t) \sim N(0,1)$
$E[Y(1)Y(2)] = R_Y(-1) = sinc(-2) = \frac{sin(-2\pi)}{-2\pi} = 0$
$E[Y(1)] = E[Y(2)] = 0$
we conclude that Y(1) and Y(2) are uncorrelated. Since Y(1) and Y(2) are jointly normal, we conclude that they are independent.so

$$P(Y(2) < 1|Y(1) - 1) = P(Y(2) < 1) = \phi(1) \approx 0.84$$

۴ فرایند پوآسون (۲۰ نمره)

فرض کنید $N = (N_t)_{t\geq 0}$ یک فرایند پوآسون همگن با پارامتر λ باشد.

۱. (۵ نمره) توزیع شرطی S_1 (زمان رخداد اولین رویداد) به شرط $N_t = 1$ را پیدا کنید.

۲. (۵ نمره) توزیع شرطی توام S_1, S_2 به شرط $N_t = 2$ را پیدا کنید.

۳. (۱۰ نمره) توزیع شرطی توام $S_1, S_2, ..., S_N$ به شرط $N_t = N$ را پیدا کنید.

۱.۴ پاسخ

(b) $\mathsf{P}(S_1 \le s \mid N_t = 1)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{P}(N_s = 1 \mid N_t = 1) \\
&= \frac{\mathsf{P}(N_s = 1 \cap N_t = 1)}{\mathsf{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\mathsf{P}(N_t = 1 \mid N_s = 1)\mathsf{P}(N_s = 1)}{\mathsf{P}(N_t = 1)} \\
&= s/t \quad \text{for } s < t
\end{aligned}
$$

This is the cdf of Uniform$(0, t)$.

(c) We'll solve the general case in part (d). The argument is essentially the same.

(d) For simplicity, let $s_0 = 0$. For $0 \le s_1 \le s_2 \ldots \le s_n \le t$,
$\mathsf{P}(S_1 \le s_1, \ldots, S_n \le s_n \mid N_t = n)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathsf{P}(S_1 \le s_1, \ldots, S_n \le s_n, N_t = n)}{\mathsf{P}(N_t = n)} \\
&= \frac{\mathsf{P}(N_t - N_{s_n} = 0)\mathsf{P}(N_{s_n} - N_{s_{n-1}} = 1)\cdots\mathsf{P}(N_{s_1} - N_{s_0} = 1)}{\mathsf{P}(N_t = n)} \\
&= \frac{\exp\{-\lambda(t - s_n)\}\left(\prod_{j=1}^{n} \exp\{-\lambda(s_j - s_{j-1})\}\lambda(s_j - s_{j-1})\right)}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\
&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} \prod_{j=1}^{n}(s_j - s_{j-1})}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\
&= \frac{n!}{t^n} \prod_{j=1}^{n} (s_j - s_{j-1})
\end{aligned}
$$

Take derivative with respect to $s_1, \cdots, s_n$ to get the joint pdf.

The resulting conditional joint pdf is $\frac{n!}{t^n}$, for $t > 0$

۵ فرایند گوسی (۲۰ نمره)

فرض کنید $p(x) \sim \mathrm{Un}(0, a)$ یک توزیع یکنواخت از ۰ تا a باشد و یک تابع هسته به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$
K(x) = \begin{cases} e^{-}x & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}
$$

اگر $x_{i}{}_{i=1}^{n}$ نقطه های نمونه برداری شده از p(x) باشند، آنگاه تخمین چگالی هسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
p_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)
$$

۱. (۱۰ نمره) نشان دهید که مقدار مورد انتظار تخمین چگالی هسته به صورت زیر است:

$$\overline{p}_n(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-x/h}) & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{a}(e^{a/h} - 1)e^{-x/h} & a \geq x \end{cases}$$

که در آن

$$\overline{p}_n(x) = \mathbb{E}[p_n(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\frac{1}{h}K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right] = \int_{v=0}^{a} \frac{1}{h}K\left(\frac{x - v}{h}\right) p(v)\, dv$$

۲. (۱۰ نمره) چقدر باید مقدار h را کوچک انتخاب کرد تا برای همه‌ی $0 < x < a$ داشته باشیم $|p(x) - \overline{p}_n(x)| < 0.01$.

۱.۵ پاسخ

a) For $0 \leq x \leq a$:

$$\begin{aligned} \bar{p}_n(x) &= \int_{v=0}^{a} \frac{1}{h}K\left(\frac{x-v}{h}\right) p(v)dv = \frac{1}{ah}\int_{v=0}^{x} \exp\left(-\frac{x-v}{h}\right) dv \\ &= \frac{1}{a}\int_{y=-x/h}^{0} \exp(y)\, dy, \quad y = \frac{v-x}{h} \\ &= \frac{1}{a}\exp(y)\Big|_{y=-x/h}^{0} = \frac{1}{a}(1 - \exp(-x/h)) \end{aligned}$$

For $x \geq a$:

$$\begin{aligned} \bar{p}_n(x) &= \frac{1}{ah}\int_{v=0}^{a} \exp\left(-\frac{x-v}{h}\right) dv \\ &= a^{-1}\int_{y=-x/h}^{(a-x)/h} e^y dy, \quad y = \frac{v-x}{h} \\ &= a^{-1}e^y\Big|_{y=-x/h}^{(a-x)/h} = a^{-1}(e^{a/h} - 1)e^{-x/h} \end{aligned}$$

b)

$$|p(x) - \bar{p}_n(x)| = |a^{-1} - a^{-1}(1 - \exp(-x/h))| = a^{-1}|\exp(-x/h))| < .01$$

Then

$$-x/h < \log(.01a) \implies x > -h\log(.01a)$$

۶ پوآسون دو بعدی (۳۰ نمره)

فرایند تصادفی پوآسون دو بعدی یک فرایند نقطه‌ای در فضای $\mathbb{R}^2$ است که ویژگی‌هایی شبیه به فرایند پوآسون در فضای $\mathbb{R}$ دارد. برای هر ناحیه‌ی s در فضا تعداد نقاط داخل ناحیه‌ی s از توزیع پوآسون با پارامتر λ پیروی می‌کند. فرض کنید مساحت را با $|.|$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید که برای دو ناحیه‌ی مجزا رخدادن نقاط داخل آن‌ها مستقل در نظر گرفته شود.

$x(z)$ را یک فرایند پوآسون نقطه‌ای در نظر بگیرید. فرایند $y(z)$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که بازای هر نقطه از $x(z)$ مانند u، دیسکی به شعاع $r \sim Uniform(a,b)$ به مرکز u را در نظر بگیرید. حال $y(u)$ را برای نقطه‌ی u برابر با تعداد دیسک‌های شامل u در نظر بگیرید.
بر این اساس به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱. (۱۰ نمره) مقدار $\mathbb{E}[y(z)]$ را حساب کنید.

۲. (۱۰ نمره) مقدار $P(y(z) > 1)$ را حساب کنید.

۳. (۱۰ نمره) اگر برای نقطه‌ی دلخواه u نزدیک‌ترین نقطه از $x(z)$ به u را N_u بنامیم. احتمال این که دیسک حول N_u شامل u شود را حساب کنید.

۱.۶ پاسخ

سؤال ۶.

۱.

$$E[y(z)] = \acute{E}[T_i(z)] = \sum E[T_i(z)]$$

T_i = تأثیر نقطه‌ی i روی z

$$T_i(z) = \begin{cases} 1 & r_i < a \\ \begin{cases} 0 & w.p.\ 1 - \frac{b - r_i}{b-a} \\ 1 & w.p.\ \frac{b-r_i}{b-a} \end{cases} \end{cases}$$

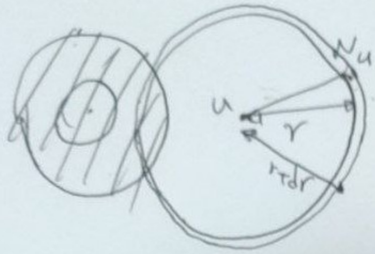
$$\rightarrow E[T_i(z)] = \begin{cases} 1 & r_i < a \\ \frac{b - r_i}{b-a} & r_i \geqslant a \end{cases}$$

$$\rightarrow E[y(z)] = \int \frac{b-r}{b-a} dN = \int \frac{b-r}{b-a} \lambda dS$$

$$= \iint \frac{b-r}{b-a} \lambda r dr d\theta = \frac{2\pi\lambda}{b-a} \int_a^b br - r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi\lambda}{b-a} \left(\frac{b(b^2-a^2)}{2} - \frac{b^3-a^3}{3} \right).$$

۱۳



$$P(N_u \in S_{r+dr} - S_r) = P(N_{S_r}=0, N_{S_{dr}} \geq 1)$$

$$= e^{-\lambda|S_r|} \times (1-e^{-\lambda|S_{dr}|})$$

$P($دیگر ش حل نقطه باشد$) = \int_{r<a} P(N_u \in S_{dr})$

$$+ \int_{b \geq r \geq a}^{b} P(N_u \in dS_{dr}) \times \left(\frac{b-r}{b-a}\right)$$

$$= \int_{r<a} e^{-\lambda|S_r|} \times \frac{1-e^{-\lambda dS_{dr}}}{dS_{dr}}\, dS_{dr}$$

$$+ \int_{a \leq r \leq b} \frac{b-r}{b-a}\, e^{-\lambda|S_r|} \times \frac{1-e^{-\lambda dS_{dr}}}{dS_{dr}}\, dS_{dr}$$

$b-a+r$

$$= \int_0^a e^{-\lambda\pi r^2} \times \lambda\, r\,dr\,d\theta$$

$$+ \int_a^b \lambda \frac{b-r}{b-a} e^{-\lambda\pi r^2} r\,dr\,d\theta =$$ برحسب نرمال استاندارد حساب می‌شود