بسمه تعالی

کوییز مبحث نظریه تخمین

۱. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌های تصادفی iid از توزیع پواسون با پارامتر λ باشند.

الف) نشان دهید $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ یک آماره کافی و کامل است.

ب) برای متغیر λ^2 برآوردگر بی طرفانه حداقل واریانس یکنواخت (UMVUE) را بیابید.

پاسخ:

الف)

$$f(y_1 \ldots y_n \mid T = t, \lambda) = \frac{f(y_1 \ldots y_n, \lambda, T = t)}{f(t, \lambda)} = \frac{\frac{\lambda^t e^{-n\lambda}}{y_1! y_2! \ldots y_n!}}{\frac{(n\lambda)^t}{t!} e^{-n\lambda}} = \frac{t!}{n^t y_1! \ldots y_n!}$$

که مستقل از λ است. پس T آماره کافی است.

$$\forall \lambda : \quad E[g(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} g(t) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!} = e^{-n\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} g(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!} = 0$$

توجه کنید می‌توان $\sum_{t=0}^{\infty} g(t) \frac{(n\lambda)^t}{t!}$ را بسط تیلور یک تابع با متغیر λ در نظر گرفت که متحد با ۰ است.

پس $g(t)$ همواره ۰ است. پس T کامل نیز هست.

ب)

$$E[T] = E[\sum X_i] = \sum E[X_i] = n\lambda$$

$$E[T^2] = var(T) + E[T]^2 = n\lambda + (n\lambda)^2$$

$$\Rightarrow E[\frac{T^2 - T}{n^2}] = \lambda^2$$

پس UMVUE برای λ^2 برابر است با $\frac{T^2 - T}{n^2}$.

۲. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌های تصادفی iid از توزیع زیر هستند.

$f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}, \quad x > 0, \theta > 0$

الف) برآورد درست‌نمایی بیشینه (MLE) را برای θ بیابید و آن را $\hat{\theta}_n$ بنامید.

ب) مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\theta}_n]$ را بیابید.

پاسخ:

الف)

$$f(\overrightarrow{x};\theta) = \theta^n \left[\prod \left(1+x_i\right)\right]^{-(1+\theta)} \prod I_{(0,\infty)}\left(x_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad L(\theta) = \theta^n \left[\prod \left(1+x_i\right)\right]^{-(1+\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad \ell(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln\theta - (1+\theta)\sum \ln\left(1+x_i\right)$$

$$\frac{d}{d\theta}\ell(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum \ln\left(1+x_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_n = \frac{n}{\sum \ln\left(1+X_i\right)}$$

ب)

دقت کنید MLE در بینهایت بی‌طرفانه (unbiased) است. پس: $\lim\limits_{n\to\infty} E[\hat{\theta}_n] = \theta$