TD6-Intégration

Exercice 1. Toutes les fonctions considérées sont continues sur le segment d'intégration donc les intégrales sont bien définies (il n'y a pas d'impropreté).

1. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,2]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 te^{2t}dt = \int_0^2 u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t)dt \\ &= \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2t}}{2}dt \\ &= e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3e^4+1}{4}.\end{aligned}$$

2. Voir le test 3 et sa correction.

3. Pour tout $x \in [2,4]$, on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{1-x}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(|1+x|)\right]_2^4 + \frac{1}{2}\left[-\ln(|1-x|)\right]_2^4 \\ &= \frac{\ln(5) - 2\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

4. Les fonctions $u : y \mapsto \ln(y)$ et $v : y \mapsto \frac{y^{3/2}}{3/2}$ sont de classe C^1 sur $[1,5]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy = \int_1^5 u(y)v'(y)dy &= [u(y)v(y)]_1^5 - \int_1^5 u'(y)v(y)dy \\ &= \left[\frac{y^{3/2}\ln(y)}{3/2}\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{y^{3/2}}{3/2} \times \frac{1}{y}dy \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\int_1^5 \sqrt{y}dy \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{20\sqrt{5}}{9} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

5. Les fonctions $u : r \mapsto r$ et $v : r \mapsto \sqrt{2r+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr = \int_0^1 u(r)v'(r)dr &= [u(r)v(r)]_0^1 - \int_0^1 u'(r)v(r)dr \\ &= \left[r\sqrt{2r+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2r+1}dr \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{(2r+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ sont de classe C^1 sur $[0,2]$. Par

intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{3x+1}dx = \int_0^2 u(x)v'(x)dx &= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^x u'(x)v(x)dx \\ &= \left[\frac{2}{9}x(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\ &= \frac{28\sqrt{7}}{9} - \frac{2}{27}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{224\sqrt{7}+4}{135}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie. De plus, si on note $u : x \mapsto x^2+1$, on a :
$$\begin{aligned}I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx &= \frac{1}{2}\left[\ln(|u(x)|)\right]_0^1 \\ &= \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$
2. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
D'autre part, par positivité de l'intégrale, I_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc possède une primitive F sur cet intervalle. En particulier, f est bien définie et :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$
En tant que primitive d'une fonction continue, F est dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction inverse est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi par composition, $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis par somme f l'est. De plus :
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$
2. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée nulle. Donc f est constante sur $]0,+\infty[$. En particulier :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = f(1) = 0.$$
3. Soit $x \in]0,+\infty[$. On effectue le changement de variables $y = \frac{1}{t}$: soit $y : t \mapsto \frac{1}{t}$ de classe C^1 sur $[x, \frac{1}{x}]$. Alors
$$\begin{aligned}f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{x}}^x -\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)}dt &= \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(y(t))}{1+y(t)^2}y'(t)dt \\ &= \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(y)}{1+y^2}dy \\ &= -\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(y)}{1+y^2}dy \\ &= -f(x).\end{aligned}$$
Donc, $f(x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$.
Ainsi : $\forall x > 0, f(x) = 0$.

Exercice 4.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est définie et continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [2,+\infty[$. On a :
$$\int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = \left[2\sqrt{t-1}\right]_2^A = 2\sqrt{A-1} - 2.$$
Donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = +\infty$.
Ainsi l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ est divergente.
2. La fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0,+\infty[$. Alors on a :
$$\int_0^A xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(1-e^{-A^2}).$$

Donc : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $]-\infty,0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$.
Soit $A \in]-\infty,0]$. Alors on a :
$$\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_A^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+A^2}-1\right).$$
Donc : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}$.
Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ est convergente et vaut $-\frac{1}{2}$.

4. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0,+\infty[$.
   - **Méthode 1 :** la fonction $u : t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0,A]$, en effectuant le changement de variable $u = e^t$ on obtient :
$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{1}{e^t(1+e^t)}e^t dt = \int_0^A \frac{1}{u(t)(1+u(t))}u'(t)dt = \int_1^{e^A}\frac{1}{u(1+u)}du.$$
Or, pour tout $u \geq 1$: $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$. Donc :
$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt &= \int_1^{e^A}\frac{1}{u(1+u)}du\\ &= \int_1^{e^A}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= [\ln(u)-\ln(u+1)]_1^{e^A}\\ &= A-\ln(1+e^A)+\ln(2)\\ &= \ln(2)-\ln(1+e^{-A}).\end{aligned}$$
   - **Méthode 2 :** on a : $\forall t \geq 0$, $\frac{1}{1+e^t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$. Donc :
$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^A = \ln(2)-\ln(1+e^{-A}).$$
   - **Conclusion :** $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \ln(2)$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}dt$ est convergente et vaut $\ln(2)$.

Exercice 5.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2(1+|x|)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ impropre en $-\infty$.
Soit $A \in]-\infty,0]$. On a :
$$\int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_A^0 \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\right]_A^0 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(1-A)}.$$
Ainsi : $\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$.
L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0,+\infty[$. On a :
$$\int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_0^A \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+A)}.$$
Ainsi : $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$.
L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Conclusion : comme les intégrales $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ convergent alors $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ converge et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_{-\infty}^0\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = 1.$$

2. La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ impropre en $-\infty$.
Soit $A \in]-\infty,0]$. On a :
$$\int_A^0 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_A^0 = -\frac{1}{2}(1-e^{-A^2}).$$
Ainsi : $\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}$.
L'intégrale converge donc et vaut $-\frac{1}{2}$.

- Étude de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :

$$\int_0^A xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = -\frac{1}{2}(e^{-A^2} - 1).$$

Ainsi : $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.
L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.

- Conclusion : comme les intégrales $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ convergent alors $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$$

Exercice 6.

1. La fonction h est le quotient de deux fonctions dont le dénominateur est strictement positif. Ainsi $h(x)$ est du signe de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $h(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [1, +\infty[$.
Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x} \times \frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{-1}{A} + 1.\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx = 1$.
Donc l'intégrale converge et vaut 1.

3. (a) Soient A et B deux éléments de $[1, +\infty[$ tels que $A \leq B$. D'après la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale, on a :

$$H(B) - H(A) = \int_1^B h(x)dx - \int_1^A h(x)dx = \int_A^B h(x)dx \geq 0.$$

Ainsi : $\forall (A, B) \in [1, +\infty[^2$, $A \leq B \Rightarrow H(A) \leq H(B)$. La fonction H est donc croissante sur $[1, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a :

$$h(x) \leq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Soit $A \geq 1$. En intégrant l'inégalité précédente entre 1 et A, on obtient par croissance de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant) :

$$H(A) \leq \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx \leq 1 \quad \text{(d'après la question précédente).}$$

(c) La fonction H est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$. Donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$. Par définition, cela signifie que $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge.

Exercice 7.

1. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient par parité :

$$\int_A^0 f(x)dx = \int_{-A}^0 -f(-y)dy = \int_0^{-A} f(y)dy.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(y)dy.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et est égale à $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et est égale à $2\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

2. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient par imparité :

$$\int_A^0 f(x)dx = \int_{-A}^0 -f(-y)(-1)dy = -\int_0^{-A} f(y)dy.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 f(x)dx = -\int_0^{+\infty} f(y)dy.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et est égale à $-\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et est égale à 0.