TD4-Familles de vecteurs

1 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant).

1. *Soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$. La famille (u,v,w) est libre si et seulement si les familles (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres.*
2. *Soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$. Si $w \in \text{Vect}(u,v)$ alors (u,v,w) est liée.*
3. *La dimension de $\mathbb{R}_5[x]$ est 5.*
4. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.*
5. *La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.*

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La famille (A,B,C) est-elle libre ?

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou liée et génératrice ou non.

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1,-1,2),(2,1,-1),(-1,-5,8))$.*
2. *Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{F} = (x^2+2x, x^2+x+1, x+2)$.*
3. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.*

Exercice 4 (*EML 2006*)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que $AM = MD$.

1. *Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. Montrer que M appartient à E si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.*
3. *Montrer que la famille (U,A) est une base de E.*
4. *Calculer UA. Est-ce un élément de E ?*

Exercice 5 (*Ecricome 2002*)

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a,b)$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}.$$

1. *On note $A = M(1,0)$.*
   (a) *Calculer A^2.*
   (b) *En déduire que A est une matrice inversible et donner A^{-1} en fonction de A.*
2. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
3. *Donner une base de E.*

Exercice 6

Dans chaque cas, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et donner les coordonnées de u dans cette base.

1. *$E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((3,1,3),(2,2,1),(4,3,2))$ et $u = (3,2,1)$.*
2. *$E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ et $u = (3,2,1)$.*
3. *$E = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2)$ et $u = x^2+x+1$.*
4. *$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $u = I_2$.*

Exercice 7

Déterminer une base des espaces suivants :

1. $\{(x+y, y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$,
2. $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\right\}$,
3. $\{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P'(1)\}$,
4. $\left\{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$,
5. $\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$,
6. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d\right\}$.

Exercice 8

1. *Montrer que la famille formée des vecteurs* $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,0)$, $w = (1,0,-1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Montrer que la famille* $(x^2+x+1, x-1, x+1)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[x]$.
3. *Montrer que la famille* $(1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[x]$. *Déterminer les coordonnées d'un polynôme* $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *dans cette base.*

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. *Montrer que* F *est un espace vectoriel de dimension finie.*
2. *Trouver une base de* F *et en déduire sa dimension.*
3. (a) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
   (b) *Déterminer les coordonnées de* A^n *dans la base trouvée précédemment.*

Exercice 10 (*Ecricome 2008*)

A tout triplet (a,b,c) *de réels, on associe la matrice* $M(a,b,c)$ *définie par :*

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

On désigne par E *l'ensemble des matrices* $M(a,b,c)$ *où* a, b, c *sont des réels. Ainsi :*

$$E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$$

1. *Montrer que* E *est un espace vectoriel. Donner une base de* E *ainsi que sa dimension.*
2. *On pose* $J = M(1,1,1) - I_3$ *où la matrice* I_3 *est la matrice identité de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) *Calculer les matrices* J^2, J^3. *En déduire, sans démonstration, l'expression de* J^n, *pour tout entier naturel* $n \geq 3$.
   (b) *Montrer que pour tout entier naturel* $n \geq 2$:
   $$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$
   L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ *et* $n = 1$?
   (c) *En déduire l'écriture matricielle de* $[M(1,1,1)]^n$.

Exercice 11

Soit $n \geq 2$ *et* $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. *Montrer que* H *est un sous-espace vectoriel de* R^n.
2. *On note* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *et on suppose que* $\dim H = n-1$. *Montrer que*
   $$(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$$
   est une base de H.

2 Rang

Exercice 12

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)$.
2. $(2, 3+x, 7-6x^2, 2x+x^2)$.

Exercice 13

Dans $\mathbb{R}^3$, *on donne*

$$u_1 = (1,0,-1) \quad ; \quad u_2 = (-1,2,1) \quad ; \quad u_3 = (3,-4,-3).$$

1. *Déterminer le rang de la famille* (u_1, u_2, u_3).
2. *Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel* F *engendré par* (u_1, u_2, u_3) *et donner en une base.*

Exercice 14

***Sans calcul**, donner le rang des matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ou non.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$