Exercice 1 (EML 2018, 44pts)

1. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer donne Pile » et F_i l'événement « le i-ème lancer donne Face ».

   - L'événement $[X=0]$ est égal à l'événement $P_1 \cap P_2$. Donc
   $$P([X=0]) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) = \frac{4}{9}.$$
   - L'événement $[X=1]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Donc
   $$\begin{aligned} P([X=1]) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{car } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap P_2}(P_3) + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(P_3) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$
   - L'événement $[X=2]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$. Donc
   $$\begin{aligned} P([X=2]) &= P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \text{ (événements incompatibles)} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap F_2}(P_3)P_{F_1\cap F_2 \cap P_3}(P_4) + P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap P_2}(F_3)P_{F_1\cap P_2\cap F_3}(P_4) \\ &+ P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1\cap F_2}(F_3)P_{P_1\cap F_2\cap F_3}(P_4) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

   3,5 pts : 0,5 pt pour $[X=0]$**, 1,5 pts pour les autres (pour avoir tous points chaque étape du calcul devait être justifiée)**

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X=n]$ signifie qu'il y a eu $n+2$ tirages (n Faces et 2 Piles), que le dernier tirage est une Pile et que le premier Pile a été obtenu lors d'un des $n+1$ tirages. Ainsi :
   $$[X=n] = \bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right).$$
   Comme les événements $\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ sont deux à deux incompatibles, on obtient :
   $$\begin{aligned} P([X=n]) &= P\left(\bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} \end{aligned}$$

   3pts : 1pt pour décrire l'événement $[X=n]$**, 2 pts pour le calcul avec les justifications.**

2. (a) On a $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$P(U=n) \geqslant P(X=n, U=n) = P_{[X=n]}(U=n)P(X=n) = \frac{1}{n+1}P(X=n) > 0.$$
   Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.
   1pt

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X = n]$, l'urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n indiscernables. Donc la loi de U sachant $[X = n]$ est une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2pts

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(U = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

car, d'après la question précédente, pour tout $n < k$, $P_{[X=n]}(U = k) = 0$. Compte tenu de la question 1)b), on trouve :

$$\begin{aligned} P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3^k} \end{aligned}$$

3pts : 1pt pour la formule des probabilités totales utilisée correctement, 1 pt pour la justifier que la somme comme à l'indice k, 1pt pour le calcul.

(d) U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k)$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Montrons qu'elle est convergente. On a

$$\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k) = \sum_{k\geqslant 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k\geqslant 0} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

et on reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$ (donc convergente). Par conséquent, la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k)$ converge. On peut donc conclure que U possède une espérance et :

$$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que U possède une variance, il suffit de montrer que U possède un moment d'ordre 2 c'est-à-dire que $\sum_{k\geqslant 0} k^2 P(U = k)$ converge absolument. Cette série est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 P(U = k) = k^2 \frac{2}{3^{k+1}} &= (k(k-1) + k) \frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{3^3} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2 P(U = k)$ est combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{3}$ toutes deux convergentes (car $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$). Ainsi la série converge et :

$$E(U^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) = \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1.$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens on trouve

$$\mathrm{V(U)} = \mathrm{E(U^2)} - \mathrm{E(U)}^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $\mathrm{U}+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

6pts : 1pt pour rappeler ce que signifie avoir une espérance et 1,5pt pour justifier la convergence et trouver la somme. Pour la variance : 1 pt pour la formule de Koenig-Huygens (donc dire qu'il faut un moement d'ordre 2), 2 pts pour la convergence et la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2 \mathrm{P(U} = k)$ et 0,5 pt pour le résultat final.

3. (a) On a toujours $0 \leqslant \mathrm{U} \leqslant \mathrm{X}$ donc $\mathrm{V}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{P(V} = n) \geqslant \mathrm{P(X} = 2n, \mathrm{U} = n) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=2n]}(\mathrm{U} = n)\mathrm{P(X} = 2n) > 0.$$

Donc $\mathrm{V}(\Omega) = \mathbb{N}$.

1pt : il fallait mentionner que $\mathrm{U} \leqslant \mathrm{X}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{V} = k) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{X} - \mathrm{U} = k) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(n - \mathrm{U} = k) &= \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{U} = n-k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n-k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[\mathrm{X} = n]$, V suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

2pts : 1pt pour le lien entre $\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{V}=k)$ et $\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{U}=n-k)$ et 1pt pour le résultat.

(c) Le même calcul qu'en 2.c) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P(V} = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

1pt

4. Soit $(n,k) \in (\mathbb{N})^2$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P(U} = n, \mathrm{V} = k) = \mathrm{P(U} = n, \mathrm{X} - \mathrm{U} = k) &= \mathrm{P(U} = n, \mathrm{X} = n+k) \\ &= \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n+k]}(\mathrm{U} = n)\mathrm{P(X} = n+k) \\ &= \frac{1}{n+k+1} \times \frac{4(n+k+1)}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{n+k+2}}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après 2.c et 3.c :

$$\mathrm{P(U} = n)\mathrm{P(V} = k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout $(n,k) \in \mathrm{U}(\Omega) \times \mathrm{V}(\Omega)$ on a

$$\mathrm{P(U} = n, \mathrm{V} = k) = \mathrm{P(U} = n)\mathrm{P(V} = k).$$

Les variables aléatoires U et V sont donc indépendantes.

2,5pts : 1pt pour $\mathrm{P(U} = n, \mathrm{V} = k)$, 1pt pour $\mathrm{P(U} = n)\mathrm{P(V} = k)$ et $0,5pt$ pour la conclusion

5. D'après la question précédente, $\mathrm{Cov(U,V)} = 0$ car la covariance de deux variables aléatoires discrètes indépendantes est toujours nulle. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov(X,U)} = \mathrm{Cov(U+V,U)} = \mathrm{Cov(U,U)} + \mathrm{Cov(V,U)} = \mathrm{V(U)} + \mathrm{Cov(U,V)} = \mathrm{V(U)} = \frac{3}{4}.$$

2pts : 1pt pour $\mathrm{Cov(U,V)}$, 1 pour le calcul de $\mathrm{Cov(X,U)}$ avec justifications.

6. (a)

```
function x=simule_X()
        nb_pile=0
        nb_face=0
        while nb_pile<2
                if rand()<2/3
                        nb_pile=nb_pile+1
```

```
            else
                    nb_face=nb_face+1
            end
    end
    x=nb_face
    endfunction
```

4pts : 1pt pour la structure de fonction, 1 pt pour la boucle while, 1pt pour la structure conditionnelle, 1p pour le reste (iniatiliastion des variables etc)

(b) La fonction `mystere` renvoie la fréquence de victoire du joueur A lors de 10 000 parties.

1pt

(c) En ordonnée, on lit la probabilité que A gagne : elle est d'environ $\frac{1}{2}$ lorsque que p vaut environ $0,8$.

1pt.

7. (a) Z est le rang du premier Pile et suit donc une loi géométrique de paramètre p. Ainsi

$$\mathrm{E(Z)} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V(Z)} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2 pts : 1pt pour la loi; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance

(b) On a $\mathrm{Y}+1=\mathrm{Z}$ donc Y possède une espérance et une variance :

$$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E(Z-1)} = \mathrm{E(Z)}-1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V(Y)} = \mathrm{V(Z-1)} = \mathrm{V(Z)} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2 pts : 1pt pour $\mathrm{Y}+1=\mathrm{Z}$; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}-1 \geqslant n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \geqslant n+1) &= 1-\mathrm{P}(\mathrm{Z} < n+1) \\
&= 1-\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [\mathrm{Z}=i]\right) \\
&= 1-\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Z}=i) \\
&= 1-\sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} \\
&= 1-p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^n
\end{aligned}$$

2 pts : 1pt pour se ramener à un calcul de somme et 1pt pour le résultat.

8. (a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n, \mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n, n \leqslant \mathrm{Y}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{P}(n \leqslant \mathrm{Y}) \quad \text{car les joueurs sont indépendants}
\end{aligned}$$

1 pt (il fallait faire appel explicitement à la formule des probabilités totales)

(b) D'après les questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{P}(n \leqslant \mathrm{Y}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{9}{(2+p)^2} + \frac{3}{2+p} \right) \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}
\end{aligned}$$

2 pts

(c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2}$. Or, la probabilité que A gagne est $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y})$. Ainsi, le jeu est équilibré si et seulement si $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or,

$$\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 8 = (2+p)^2 \Longleftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \Longleftrightarrow p = -2 + 2\sqrt{2} \text{ ou } p = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Comme $p > 0$, le jeu est équilibré si et seulement si $p = -2 + 2\sqrt{2}$ (on remarque que $-2 + 2\sqrt{2}$ vaut environ $0,8$ donc cohérent avec la question précédente).

2 pts : 1pt pour la mise en équation et 1pt pour la résolution

Exercice 2 (d'après ecricome 2019, 32pts+2pts bonus)

Partie A

1. (a) Soient $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \\
&= \left(\frac{-(x+\lambda x') + 2(y+\lambda y') + z + \lambda z'}{3}, \frac{-(x+\lambda x') - (y+\lambda y') - 2(z+\lambda z')}{3}, \frac{x+\lambda x' + y + \lambda y' + 2(z+\lambda z')}{3} \right) \\
&= \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right) + \lambda \left(\frac{-x'+2y'+z'}{3}, \frac{-x'-y'-2z'}{3}, \frac{x'+y'+2z'}{3} \right) \\
&= f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z'))
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')).$$

Ainsi f est linéaire.

3pts : 1pt pour la caractérisation de la linéarité, 2 pts pour le caclul

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(f) &\Longleftrightarrow f((x,y,z))=(0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\\ x &+& y &+& 2z &=& 0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\end{array}\right. \qquad \text{car } \mathrm{L}_3=-\mathrm{L}_2\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ &-& 3y &-& 3z &=& 0\end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z\\ y &=& -z\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(-z,-z,z),z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((-1,-1,1)).$$

Le vecteur $(-1,-1,1)$ est un vecteur générateur de $\ker(f)$ non nul donc c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f))=1$ et f n'est pas injective.

4pts : 1pt pour la première équivalence, 1 pt pour la résolution du système, 1 pt pour la base et la dim, 1 pt l'injectivité.

(c) D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{E})=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f), \quad ie \quad 3=1+\mathrm{rg}(f).$$

Ainsi f est de rang 2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, on a donc $(\mathrm{I}m)(f)\neq\mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

2 pts : 1 pt pour le théorème du rang, 1 pt pour le rang et la non surjectivité

(d) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
&f^2((x,y,z))=\frac{1}{3}f((-x+2y+z,-x-y-2z,x+y+2z))\\
&=\frac{1}{3}((-x+y+z)f((1,0,0))+(-x-y-2z)f((0,1,0))+(x+y+2z)f((0,0,1))) \quad \text{par linéarité}\\
&=\frac{1}{3}((-x+y+z)(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(-x-y-2z)(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(x+y+2z)(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}))\\
&=\frac{1}{9}((-x+y+z)(-1,-1,1)+(-x-y-2z)(2,-1,1)+(x+y+2z)(1,-2,2))\\
&=\frac{1}{9}((x-y-z,x-y-z,-x+y+z)+(-2x-2y-5z,x+y+2z,-x-y-2z)\\
&+(x+y+2z,-2x-2y-4z,2x+2y+4z))\\
&=\frac{1}{9}(-3y-3z,-3y-3z,3y+3z)\\
&=\frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z)
\end{aligned}
$$

et, en remarquant que $\frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z)=\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\in\ker(f)$, on trouve

$$f^3((x,y,z))=f(f^2((x,y,z)))=f\left(\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\right)=\frac{x+y}{3}f((-1,-1,1))=(0,0,0).$$

Ainsi

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f^2((x,y,z))=\left(\frac{-y-z}{3},\frac{-y-z}{3},\frac{y+z}{3}\right) \quad \text{et} \quad f^3((x,y,z))=(0,0,0).$$

4pts : 2pts pour le calcul de f^2 et 2pts pour le calcul de f^3

2. Soit g un tel endomorphisme de E. On remarque que

$$g(e_1)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=f(e_1)\ ;\ g(e_2)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=f(e_2)\ ;\ g(e_3)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=f(e_3).$$

Ainsi, f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui coïncident sur la base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. Donc $f=g$.
2pts

3. (a) Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 3\lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \to L_1 + L_3 \text{ et } L_2 \to L_2 + L_3$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3pts : 2pts pour le système et 1pt pour l'argument de cardinal.

(b) On trouve :

$$f(e'_1) = (0,0,0) \quad ; \quad f(e'_2) = e'_1 \quad ; \quad f(e'_3) = e'_2.$$

1 pt

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}((0,0,0), e'_1, e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 pts

Partie B

1. Comme par hypothèse $g \circ g = f$ alors

$$g \circ f = g \circ g \circ g = f \circ g^2 = f \circ g.$$

1pt

2. (a) Calculons $f(g(e'_1))$:

$$f(g(e'_1)) = (f \circ g)(e'_1) = (g \circ f)(e'_1) = g(f(e'_1)) = g((0,0,0)) = (0,0,0).$$

Donc $g(e'_1)$ appartient au noyau de f. Or, d'après la question 1.a de la partie A, on sait que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e'_1)$. Ainsi, $g(e'_1)$ appartient $\mathrm{Vect}(e'_1)$: il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

2pts : 1pt pour le calcul et 1pt pour l'existence du a

(b) Calculons $f(g(e'_2) - ae'_2)$:

$$\begin{aligned} f(g(e'_2) - ae'_2) &= f(g(e'_2)) - af(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e'_2)) - ae'_1 \quad \text{car } f \circ g = g \circ f \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= g(e'_1) - ae'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } g(e'_1) = ae'_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $g(e'_2) - ae'_2$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e'_1)$. Donc, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$, c'est-à-dire

$$g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

3pts : 2pt pour le calcul (avec justification) et 1pt pour l'existence du b

(c) Comme $f \circ g = g \circ f$, on a

$$f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

Calculons $f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2)$:

$$\begin{aligned} f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) &= f(g(e'_3)) - af(e'_3) - bf(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e'_3)) - ae'_2 - be'_1 \quad \text{car } f \circ g = g \circ f, \quad f(e'_3) = e'_2 \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= g(e'_2) - ae'_2 - be'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } g(e'_2) = ae'_2 + be'_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e'_1)$.

1pt

(d) Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$, c'est-à-dire

$$g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.$$

1pt

3. Par linéarité de g, on trouve

$$g^2(e'_1) = g(g(e'_1)) = g(ae'_1) = ag(e'_1) = a^2 e'_1 \quad ; \quad g^2(e'_2) = g(be'_1 + ae'_2) = bg(e'_1) + ag(e'_2) = 2abe'_1 + a^2 be'_2$$

et

$$g^2(e'_3) = g(ae'_3 + be'_2 + ce'_1) = ag(e'_3) + bg(e'_2) + cg(e'_1) = (b^2 + 2ac)e'_1 + 2abe'_2 + a^2 e'_3.$$

Comme on a supposé que $g \circ g = f$ (c'est-à-dire $g^2 = f$), on a donc

$$a^2 e'_1 = g^2(e'_1) = f(e'_1) = (0,0,0) \quad ; \quad 2abe'_1 + a^2 be'_2 = g^2(e'_2) = f(e'_2) = e'_1$$

donc, puisque (e'_1, e'_2, e'_3) est libre, on en déduit que

$$a = 0 \quad \text{puis} \quad e'_1 = 2abe'_1 + a^2 be'_2 = (0,0,0).$$

Ceci est une contradiction. Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
5pts : 3pts pour les images par g^2, 2pts pour la conclusion

Exercice 3 (ecricome 2015, 47pts)

I - Une loi exponentielle et une suite (26,5pts)

1. (a) Voir cours de première année.
2pts : 1pt pour la densité et 1pt pour espérance et variance

(b) Soit f la densité définie à la question précédente. Alors, pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x e^{-t}dt & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad \text{car } \forall t < 0,\ f(t) = 0 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2,5 pts : 1pt pour faire apparaître la définition de F**, 0.5pt pour** $\mathrm{F}(x)$**,** $x < 0$ **et 1pt pour** $\mathrm{F}(x)$ **avec** $x \geqslant 0$

2. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^x - x - 1.$$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x - 1.$$

- Pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $\varphi' \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\varphi' \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. De manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \geqslant x + 1$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.
4pts : 1pt pour penser à étudier la fonction, 1 pt pour la dérivabilité et le calcul de ϕ', 1 pt pour les variations, 1pt pour la conclusion (le cas d'égalité devait être rédigé soigneusement)

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n > 0$.

- Initialisation : $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 1.

- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc, par croissance de la fonction exponentielle, on a $e^{-u_n} < 1$ puis $1 - e^{u_n} > 0$. Ainsi
$$u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n) = 1 - e^{-u_n} > 0.$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n > 0$.
2pts

(c) D'après la définition de la suite :

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
        U(n+1) = 1-exp(-U(n))
end
plot(U,"+")
```

1 pt

(d) On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.
1pt

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{F}(u_n) - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n < 0$$
d'après l'inégalité de la question 2)a) appliquée avec $x = -u_n$. Cela montre que la suite est décroissante.
1pt

(f) D'après les questions 2)b) et 2)e), la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, on peut conclure que cette suite converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de F. Remarquons que pour tout $x < 0$, $\mathrm{F}(x) = 0$ donc x n'est pas un point fixe de F. De plus, pour tout $x \geqslant 0$,
$$\mathrm{F}(x) = x \Longleftrightarrow 1 - e^{-x} = x \Longleftrightarrow 1 - x = e^{-x} \Longleftrightarrow -x = 0$$
d'après la question 2)a). Ainsi, l'unique point fixe de F est 0 et par conséquent $\ell = 0$.
2pts : 1pt pour le théorème de convergence monotone, 1pt pour trouver la limite (il fallait faire appel à la continuité de F **où de** exp)

(g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de la question 2(a) appliquée avec $x = u_n$, on a
$$e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$$
puis en passant à l'inverse
$$e^{-u_n} \leqslant \frac{1}{1+u_n}.$$
Ainsi
$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{1+u_n} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$
En passant à l'inverse dans cette inégalité on trouve
$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} = \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$
Remarquons que tous les passages à l'inverse sont licites car les quantités manipulées sont strictement positives d'après la question 2)b).
3pts : 2pts pour la première inégalité, 1pt pour la deuxième

(h)
- Initialisation : $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur R_+^*, on a $\frac{1}{u_n} \leqslant n$. D'après la question précédente, on a donc
$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + n$$
puis en repassant à l'inverse
$$u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}.$$
Ici encore tous les passages à l'inverse sont rendus licites par la question 2)b). La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

3pts.

(i) Le vecteur-ligne S contient les 100 premiers termes de la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n. La courbe en trait plein est la courbe représentative de la fonction logarithme, on peut donc conjecturer que la série de terme général u_n diverge.

2pts

(j) Les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. D'après la question 2)h) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge aussi.

3pts : 1pt pour dire que les séries sont à termes positifs, 1pt pour la divergence de la série de Riemann, 1pt pour conclure par comparaison.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité (20,5pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. **Étude de la fonction g.**

(a) La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (fonction constante) et sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$). On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Ainsi g est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

2,5pts : 0,5pt pour la dérivabilité sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, 1pt pour la continuité en 0, 1 pt pour le reste

(b) Cependant, g est dérivable sur $[0, +\infty[$ (elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 d'après les questions précédentes) et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$g'(x) = e^{-x}(1-x).$$

Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour la limite en 0, il s'agit d'une croissance comparée.

3pts : 2pts pour l'étude de fonction, 1pt pour la limite

(c) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$g''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Par conséquent,

$$g''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 2.$$

La fonction g est donc convexe sur $[2, +\infty[$ et concave sur $]0, 2]$.

2pts : 1pt pour la caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^2$, 1pt pour l'étude du signe de g'' et la conclusion

(d) **2pts pour le graphique**

2. (a) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1$. Donc g est une densité de probabilité.

1 pt

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:
$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = 0$$
car $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
- Si $x \geqslant 0$:
$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt.$$
En faisant une intégration par partie, on trouve
$$\mathrm{G}(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1+x).$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2,5pts : 1pt pour écrire $\mathrm{G}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$**, 0.5pt pour le calcul pour** $x < 0$**, 1pt pour l'IPP**

(c) G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{G}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de G en 0. Comme $\mathrm{G}(0) = 0$ on a
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0,$$
et
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{-x}(1+x)}{x} = 0$$
car $x \mapsto 1 - e^{-x}(1+x)$ est dérivable en 0 et sa dérivée en zéro vaut 0. Ainsi,
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(0)}{x} = 0$$
donc G est dérivable en 0 et $\mathrm{G}'(0) = 0$. Enfin,
$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{G}'(x) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{G}'(x) = 0 = \mathrm{G}'(0)$$
donc G' est continue en 0. Finalement, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3,5pts : 0,5pt pour l'étude sur $\mathbb{R}^*$**, 2pts pour la dérivabilité en** 0**, 1 pt pour la continuité en** 0 **de** G'

(d) Soit $\mathrm{A} > 0$. Par intégration par partie, on a
$$\int_0^{\mathrm{A}} tg(t)dt = \int_0^{\mathrm{A}} t^2 e^{-t}dt = \left[-t^2e^{-t}\right]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} 2t \times (-e^{-t})dt = -\mathrm{A}^2e^{-\mathrm{A}} + 2\int_0^{\mathrm{A}} g(t)dt.$$

1pt

(e) La variable aléatoire Y admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ convergence absolument. Comme $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$, Y possède une espérance si $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ convergence absolument. Or, pour tout $t \geqslant 0$, $tg(t) \geqslant 0$ donc il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ converge. Par croissance comparée et d'après la question 2)a)
$$\lim_{\mathrm{A} \to +\infty} -\mathrm{A}^2e^{-\mathrm{A}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \int_0^{\mathrm{A}} g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$$

Donc, d'après la question précédente
$$\lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \int_0^{\mathrm{A}} tg(t)dt = 2.$$

Ainsi, Y possède une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 2$.

3pts : 1pt pour mentionner l'absolue convergence, 1pt pour étudier l'absolue convergence, 1pt pour le calcul d'espérance.

Problème (40pts)

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont continues sur $[0,1]$ donc les intégrales I_n et J_n existent.

   1pt

2. $$\mathrm{I}_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

   et

   $$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \mathrm{I}_0 \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 - \frac{1}{2} \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   3pts : 1pt pour I_0 et 2pts pour I_1

3. (a) Soit n de $\mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a

   $$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2} + 2\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n \cdot \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \quad \text{car } x^2+2x+1 = (x+1)^2 \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

   2pts

   (b) La relation précédente avec $n = 0$ donne

   $$\mathrm{I}_2 + 2\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_0 = \frac{1}{1+0} = 1$$

   donc

   $$\mathrm{I}_2 = 1 - 2\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_0 = 1 - \frac{1}{2} - 2\ln(2) = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

   1pt

   (c) Compte tenu de la relation de récurrence obtenue en 3)a) :

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
a=1/2
b= log(2) - 1/2
for k=2: n
    aux = a
    a=b
    b=1/(k-1)-2*a-aux
end
disp (b)
```

   2pts

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, $(1+x)^2 \geqslant 1$ donc

   $$0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2pts

(b) On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par encadrement, on déduit de la question précédente que la suite (I_n) converge vers 0.

1pt

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx &= \left[x^n \frac{-1}{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1}\frac{-1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} + n\mathrm{J}_{n-1}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

1pt

6. (a) On a

$$\mathrm{J}_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n \cdot \frac{1+x}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

2pts

(b) En utilisant la relation ci-dessus pour $n = 0$, on trouve :

$$\mathrm{J}_0 + \mathrm{J}_1 = 1 \quad \text{donc} \quad \mathrm{J}_1 = 1 - \ln(2).$$

1pt

7. En utilisant les questions 5) et 6), on trouve

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
J=log (2)
for k=1: n-1
    J=1/k-J
end
I=n*J-1/2
disp(I)
```

2pts

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \mathrm{J}_n$.

- Initialisation : $v_1 = (-1)^1 \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1}\right) = 1 - \ln(2) = \mathrm{J}_1$ et la propriété est donc vraie au rang 1.

- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} + v_n &= (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\
&= (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \\
&= (-1)^n \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

  Donc, d'après la question 6)a), on a

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} = \mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+1}$$

  et comme par hypothèse de récurrence $u_n = \mathrm{J}_n$, on en déduit que $\mathrm{J}_{n+1} = u_{n+1}$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{J}_n = v_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

3pts : 1pt pour les étapes de la récurrence, 2pts pour le calcul dans l'hérédité

9. (a) D'après la question 5), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{J}_n = \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{I}_{n+1} + \frac{1}{2}\right).$$

D'après la question 4), $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$ donc on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0.$$

1pt

(b) Par continuité de la valeur absolue en 0 et la question précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0.$$

Cela montre que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

1pt

(c) D'après la question 5), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{J}_n = \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{I}_{n+1} + \frac{1}{2}\right).$$

Soit $\alpha > 0$. Alors J_n est équivalent à $\dfrac{1}{\alpha n}$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha n \mathrm{J}_n = 1.$$

Or

$$\alpha n \mathrm{J}_n = \frac{\alpha n}{n+1}\left(\mathrm{I}_{n+1} + \frac{1}{2}\right)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \alpha n \mathrm{J}_n = \dfrac{\alpha}{2}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \alpha n \mathrm{J}_n = 1$ si et seulement si $\alpha = 2$. Donc J_n est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$ en $+\infty$.

2pts

10. (a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \mathrm{J}_n$ donc par compatibilité des équivalents par produit, on trouve

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

1pt

(b) On a $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n}=-\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ donc est convergente d'après la question 9)b). est convergente.

Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{2n}$ ne sont pas à termes positifs (ni de signe constant), on ne peut rien conclure sur la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}u_n$.

2pts

11. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
(k+1)u_{k+1}-ku_k+(-1)^k &= (k+1)\left(\ln 2-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)-k\left(\ln 2-\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)+(-1)^k\\
&=\ln(2)+k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}+(-1)^k\\
&=\ln(2)-k\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}+(-1)^k\\
&=\ln(2)-k\frac{(-1)^k}{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}-\frac{(-1)^k}{k+1}+(-1)^k\\
&=u_k-k\frac{(-1)^k}{k+1}-\frac{(-1)^k}{k+1}+(-1)^k\\
&=u_k
\end{aligned}$$

2pts

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}u_k &= \sum_{k=1}^{n}((k+1)u_{k+1}-ku_k+(-1)^k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}((k+1)u_{k+1}-ku_k)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\\
&=(n+1)u_{n+1}-u_1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \quad \text{par télescopage}\\
&=(n+1)u_{n+1}-u_1+(-1)\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\\
&=(n+1)u_{n+1}-u_1-\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{S}_n=(n+1)u_{n+1}-u_1-\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)$$

2pts

(c) De la question précédente, on déduit que

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{S}_{2n}=(2n+1)u_{2n+1}-u_1-\frac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n}\right)=(2n+1)u_{2n+1}-u_1.$$

Or d'après la question 10)a), on a

$$u_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)}=-\frac{1}{2(2n+1)}$$

donc par compatibilité des équivalents avec le produit

$$(2n+1)u_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2}.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n+1}=-\frac{1}{2}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_{2n}=-\frac{1}{2}-u_1=\frac{1}{2}-\ln(2).$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n+1}\right) = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - 1.$$

Or d'après la question 10)a), on a

$$u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)} = \frac{1}{2(2n+2)}$$

donc par compatibilité des équivalents avec le produit

$$(2n+2)u_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+2)u_{2n+2} = \frac{1}{2}$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - u_1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

D'après le résultat admis dans l'énoncer, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

5pts : 2 pts pour la limite de (S_{2n}), 2pts pour la limité de (S_{2n+1}) et 1pt pour la conclusion

12. On a montré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln 2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Or, en 9)a) on a montré que

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln 2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Au final, on a prouvé

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

3pts