Exercice 1 (EML 2018, 44pts)

1. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer donne Pile » et F_i l'événement « le i-ème lancer donne Face ».

   - L'événement $[X = 0]$ est égal à l'événement $P_1 \cap P_2$. Donc
   $$P([X=0]) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) = \frac{4}{9}.$$
   - L'événement $[X = 1]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Donc
   $$\begin{aligned} P([X=1]) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{car } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap P_2}(P_3) + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1\cap F_2}(P_3) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$
   - L'événement $[X = 2]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$. Donc
   $$\begin{aligned} P([X=2]) &= P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \ \text{(événements incompatibles)} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap F_2}(P_3)P_{F_1\cap F_2\cap P_3}(P_4) + P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1\cap P_2}(F_3)P_{F_1\cap P_2\cap F_3}(P_4) \\ &+ P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1\cap F_2}(F_3)P_{P_1\cap F_2\cap F_3}(P_4) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

   3,5 pts : 0,5 pt pour $[X = 0]$, 1,5 pts pour les autres (pour avoir tous points chaque étape du calcul devait être justifiée).

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X = n]$ signifie qu'il y a eu $n + 2$ tirages (n Faces et 2 Piles), que le dernier tirage est une Pile et que le premier Pile a été obtenu lors d'un des $n + 1$ tirages. Ainsi :
   $$[X=n] = \bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right).$$
   Comme les événements $\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right)$ pour $i = 1, \dots, n+1$ sont deux à deux incompatibles, on obtient :
   $$\begin{aligned} P([X=n]) &= P\left(\bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

   3pts : 1pt pour décrire l'événement $[X = n]$, 2 pts pour le calcul avec les justifications.

2. (a) On a $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$P(U=n) \geqslant P(X=n, U=n) = P_{[X=n]}(U=n)P(X=n) = \frac{1}{n+1}P(X=n) > 0.$$
   Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.
   1pt.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[\mathrm{X}=n]$, l'urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n indiscernables. Donc la loi de U sachant $[\mathrm{X}=n]$ est une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{U}=k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2pts.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{U}=k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

car, d'après la question précédente, pour tout $n<k$, $\mathrm{P}_{[\mathrm{X}=n]}(\mathrm{U}=k)=0$. Compte tenu de la question 1)b), on trouve :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\frac{1}{n+1} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{3^k}.\end{aligned}$$

3pts : 1pt pour la formule des probabilités totales utilisée correctement, 1 pt pour la justification que la somme commence à l'indice k, 1pt pour le calcul.

(d) La variable aléatoire U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{U}=k)$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Montrons qu'elle est convergente. On a

$$\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) = \sum_{k\geqslant 0} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 0} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$ (donc convergente). Par conséquent, la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{U}=k)$ converge. On peut donc conclure que U possède une espérance et :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que U possède une variance, il suffit de montrer que U possède un moment d'ordre 2 c'est-à-dire que $\sum_{k\geqslant 0} k^2\mathrm{P}(\mathrm{U}=k)$ converge absolument. Cette série est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) = k^2\frac{2}{3^{k+1}} &= (k(k-1)+k)\frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{3^3}k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2}k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2\mathrm{P}(\mathrm{U}=k)$ est combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{3}$ toutes deux convergentes (car $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$). Ainsi la série converge et :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\mathrm{P}(\mathrm{U}=k) = \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 1.$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens on trouve

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $U + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

6pts : 1pt pour rappeler ce que signifie avoir une espérance et 1,5pt pour justifier la convergence et trouver la somme. Pour la variance : 1 pt pour la formule de Koenig-Huygens (donc dire qu'il faut un moment d'ordre 2), 2 pts pour la convergence et la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2 P(U = k)$ et 0,5 pt pour le résultat final.

3. (a) On a toujours $0 \leqslant U \leqslant X$ donc $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$P(V = n) \geqslant P(X = 2n, U = n) = P_{[X=2n]}(U = n)P(X = 2n) > 0.$$

Donc $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

1pt : il fallait mentionner que $U \leqslant X$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} P_{[X=n]}(V = k) = P_{[X=n]}(X - U = k) = P_{[X=n]}(n - U = k) &= P_{[X=n]}(U = n - k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n - k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[X = n]$, V suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

2pts : 1pt pour le lien entre $P_{[X=n]}(V = k)$ et $P_{[X=n]}(U = n - k)$ et 1pt pour le résultat.

(c) Le même calcul qu'en 2.c) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

1pt.

4. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\begin{aligned} P(U = n, V = k) = P(U = n, X - U = k) = P(U = n, X = n + k) &= P_{[X=n+k]}(U = n)P(X = n + k) \\ &= \frac{1}{n + k + 1} \times \frac{4(n + k + 1)}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{n+k+2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 2.c et 3.c :

$$P(U = n)P(V = k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout $(n, k) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$ on a

$$P(U = n, V = k) = P(U = n)P(V = k).$$

Les variables aléatoires U et V sont donc indépendantes.

2,5pts : 1pt pour $P(U = n, V = k)$, 1pt pour $P(U = n)P(V = k)$ et 0,5 pt pour la conclusion.

5. D'après la question précédente, $\mathrm{Cov}(U, V) = 0$ car la covariance de deux variables aléatoires discrètes indépendantes est toujours nulle. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(X, U) = \mathrm{Cov}(U + V, U) = \mathrm{Cov}(U, U) + \mathrm{Cov}(V, U) = V(U) + \mathrm{Cov}(U, V) = V(U) = \frac{3}{4}.$$

2pts : 1pt pour $\mathrm{Cov}(U, V)$, 1 pour le calcul de $\mathrm{Cov}(X, U)$ avec justifications.

6. (a)

```
function x=simule_X()
        nb_pile=0
        nb_face=0
        while nb_pile<2
                if rand()<2/3
                        nb_pile=nb_pile+1
```

```
            else
                    nb_face=nb_face+1
            end
    end
    x=nb_face
    endfunction
```

4pts : 1pt pour la structure de fonction, 1 pt pour la boucle while, 1pt pour la structure conditionnelle, 1pt pour le reste (initialisation des variables etc).

(b) La fonction `mystere` renvoie la fréquence de victoire du joueur A lors de 10 000 parties.

1pt.

(c) En ordonnée, on lit la probabilité que A gagne : elle est d'environ $\frac{1}{2}$ lorsque que p vaut environ 0,8.

1pt.

7. (a) La variable aléatoire Z donne le rang du premier Pile et suit donc une loi géométrique de paramètre p. Ainsi

$$\mathrm{E(Z)} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V(Z)} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2 pts : 1pt pour la loi; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance.

(b) On a $\mathrm{Y}+1 = \mathrm{Z}$ donc Y possède une espérance et une variance :

$$\mathrm{E(Y)} = \mathrm{E(Z-1)} = \mathrm{E(Z)} - 1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V(Y)} = \mathrm{V(Z-1)} = \mathrm{V(Z)} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2 pts : 1pt pour $\mathrm{Y}+1=\mathrm{Z}$; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}-1 \geqslant n) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \geqslant n+1) &= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < n+1) \\
&= 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [\mathrm{Z} = i]\right) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Z} = i) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} \\
&= 1 - p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^n.
\end{aligned}$$

2 pts : 1pt pour se ramener à un calcul de somme et 1pt pour le résultat.

8. (a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([\mathrm{X}=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n, \mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n, n \leqslant \mathrm{Y}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{P}(n \leqslant \mathrm{Y}) \quad \text{car les joueurs sont indépendants}
\end{aligned}$$

1 pt (il fallait faire appel explicitement à la formule des probabilités totales).

(b) D'après les questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\mathrm{P}(n \leqslant \mathrm{Y}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
&= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{9}{(2+p)^2} + \frac{3}{2+p} \right) \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

2 pts.

(c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2}$. Or, la probabilité que A gagne est $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y})$. Ainsi, le jeu est équilibré si et seulement si $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or,

$$\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 8 = (2+p)^2 \Longleftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \Longleftrightarrow p = -2 + 2\sqrt{2} \text{ ou } p = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Comme $p > 0$, le jeu est équilibré si et seulement si $p = -2 + 2\sqrt{2}$ (on remarque que $-2 + 2\sqrt{2}$ vaut environ $0,8$ donc cohérent avec la question précédente).
2 pts : 1pt pour la mise en équation et 1pt pour la résolution.

Exercice 2 (d'après ecricome 2019, 35pts)

Partie A

1. (a) Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \\
&= \left(\frac{-(x+\lambda x') + 2(y+\lambda y') + z + \lambda z'}{3}, \frac{-(x+\lambda x') - (y+\lambda y') - 2(z+\lambda z')}{3}, \frac{x+\lambda x' + y + \lambda y' + 2(z+\lambda z')}{3} \right) \\
&= \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right) + \lambda \left(\frac{-x'+2y'+z'}{3}, \frac{-x'-y'-2z'}{3}, \frac{x'+y'+2z'}{3} \right) \\
&= f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')).$$

Ainsi f est linéaire. Il est alors clair que c'est une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3pts.

(b) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(f) &\iff f((x,y,z))=(0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\\ x &+& y &+& 2z &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\end{array}\right. \qquad \text{car } L_3=-L_2\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ &-& 3y &-& 3z &=& 0\end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_2-L_1\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z\\ y &=& -z\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(-z,-z,z),z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((-1,-1,1)).$$

Le vecteur $(-1,-1,1)$ est un vecteur générateur de $\ker(f)$ non nul donc c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f))=1$ et f n'est pas injective.

4pts : 1pt pour la première équivalence, 1 pt pour la résolution du système, 1 pt pour la base et la dim, 1 pt l'injectivité.

(c) D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E)=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f),\quad ie\quad 3=1+\mathrm{rg}(f).$$

Ainsi f est de rang 2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, on a donc $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

2 pts : 1 pt pour le théorème du rang, 1 pt pour le rang et la non surjectivité.

(d) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
&f^2((x,y,z))=\frac{1}{3}f((-x+2y+z,-x-y-2z,x+y+2z))\\
&=\frac{1}{3}((-x+y+z)f((1,0,0))+(-x-y-2z)f((0,1,0))+(x+y+2z)f((0,0,1)))\quad \text{par linéarité}\\
&=\frac{1}{3}((-x+y+z)(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(-x-y-2z)(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(x+y+2z)(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}))\\
&=\frac{1}{9}((-x+y+z)(-1,-1,1)+(-x-y-2z)(2,-1,1)+(x+y+2z)(1,-2,2))\\
&=\frac{1}{9}((x-y-z,x-y-z,-x+y+z)+(-2x-2y-5z,x+y+2z,-x-y-2z)\\
&+(x+y+2z,-2x-2y-4z,2x+2y+4z))\\
&=\frac{1}{9}(-3y-3z,-3y-3z,3y+3z)\\
&=\frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z).
\end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z)=\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\in\ker(f)$, on trouve donc :

$$f^3((x,y,z))=f(f^2((x,y,z)))=f\left(\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\right)=\frac{x+y}{3}f((-1,-1,1))=(0,0,0).$$

Ainsi

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f^2((x,y,z))=\left(\frac{-y-z}{3},\frac{-y-z}{3},\frac{y+z}{3}\right)\quad\text{et}\quad f^3((x,y,z))=(0,0,0).$$

4pts : 2pts pour le calcul de f^2 et 2pts pour le calcul de f^3.

2. Soit g un tel endomorphisme de E. On remarque que

$$g(e_1)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=f(e_1)\;;\;g(e_2)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=f(e_2)\;;\;g(e_3)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=f(e_3).$$

Ainsi, f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui coïncident sur la base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. Donc $f=g$.
2pts.

3. (a) Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' + \lambda_3 e_3' = (0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & 3\lambda_2 & = & 0 \\ & & & & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \text{ et } \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

3pts : 2pts pour le système et 1pt pour l'argument de cardinal.

(b) On trouve :

$$f(e_1') = (0,0,0) \quad ; \quad f(e_2') = e_1' \quad ; \quad f(e_3') = e_2'.$$

1 pt.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1'), f(e_2'), f(e_3')) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}((0,0,0), e_1', e_2') \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2 pts.

Partie B

1. Comme par hypothèse $g \circ g = f$ alors

$$g \circ f = g \circ g \circ g = f \circ g^2 = f \circ g.$$

1pt.

2. (a) Calculons $f(g(e_1'))$:

$$f(g(e_1')) = (f \circ g)(e_1') = (g \circ f)(e_1') = g(f(e_1')) = g((0,0,0)) = (0,0,0).$$

Donc $g(e_1')$ appartient au noyau de f. Or, d'après la question 1.a de la partie A, on sait que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$. Ainsi, $g(e_1')$ appartient $\mathrm{Vect}(e_1')$: il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_1') = ae_1'$.

2pts : 1pt pour le calcul et 1pt pour l'existence du a.

(b) Calculons $f(g(e_2') - ae_2')$:

$$\begin{aligned}
f(g(e_2') - ae_2') &= f(g(e_2')) - af(e_2') \quad \text{par linéarité de } f \\
&= g(f(e_2')) - ae_1' \quad \text{car } f \circ g = g \circ f \quad \text{et } f(e_2') = e_1' \\
&= g(e_1') - ae_1' \\
&= 0 \quad \text{car } g(e_1') = ae_1'.
\end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_2') - ae_2'$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$. Donc, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$, c'est-à-dire

$$g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$

3pts : 2pt pour le calcul (avec justification) et 1pt pour l'existence du b.

(c) Comme $f \circ g = g \circ f$, on a

$$f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$

Calculons $f(g(e_3') - ae_3' - be_2')$:

$$\begin{aligned}
f(g(e_3') - ae_3' - be_2') &= f(g(e_3')) - af(e_3') - bf(e_2') \quad \text{par linéarité de } f \\
&= g(f(e_3')) - ae_2' - be_1' \quad \text{car } f \circ g = g \circ f, \quad f(e_3') = e_2' \quad \text{et } f(e_2') = e_1' \\
&= g(e_2') - ae_2' - be_1' \\
&= 0 \quad \text{car } g(e_2') = ae_2' + be_1'.
\end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$.

1pt.

(d) Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1'$, c'est-à-dire

$$g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'.$$

1pt.

(e) On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g(e_1'), g(e_2'), g(e_3')) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

De plus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

2pts.

(f) On a supposé que $g^2 = g \circ g = f$ donc on doit avoir :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier : $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ c'est-à-dire $a = 0$ et $0 = 1$. Absurde.
Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.
1pt.

3. (a) Par linéarité de g, on trouve

$$g^2(e_1') = g(g(e_1')) = g(ae_1') = ag(e_1') = a^2 e_1' \quad ; \quad g^2(e_2') = g(be_1' + ae_2') = bg(e_1') + ag(e_2') = 2abe_1' + a^2 be_2'$$

et

$$g^2(e_3') = g(ae_3' + be_2' + ce_1') = ag(e_3') + bg(e_2') + cg(e_1') = (b^2 + 2ac)e_1' + 2abe_2' + a^2 e_3'.$$

3 pts.

(b) On retrouve bien la même matrice qu'en 2.e.
1pt.

Exercice 3 (Ecricome 2015, 36 pts)

I - Une loi exponentielle et une suite (26,5pts)

1. (a) Voir cours de première année.
2pts : 1pt pour la densité et 1pt pour l'espérance.

(b) Soit f la densité définie à la question précédente. Alors, pour tout réel x on a :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt & \text{si } x < 0, \\ \displaystyle\int_{0}^{x} e^{-t}dt & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{car } \forall t < 0,\ f(t) = 0$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2,5 pts.

2. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^x - x - 1.$$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x - 1.$$

- Pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $\varphi' \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ donc φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

- Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\varphi' \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ donc φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$$
avec égalité si et seulement si $x = 0$. De manière équivalente, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$e^x \geqslant x+1$$
avec égalité si et seulement si $x = 0$.
4pts : 3 pts pour l'étude de fonction, 1pt pour la conclusion (le cas d'égalité devait être rédigé soigneusement).

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n > 0$.
- Initialisation : $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc, par croissance stricte de la fonction exponentielle, on a $e^{-u_n} < 1$ puis $1 - e^{u_n} > 0$. Ainsi
$$u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n) = 1 - e^{-u_n} > 0.$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n > 0$.
2pts.

(c) D'après la définition de la suite :

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
        U(n+1) = 1-exp(-U(n))
end
plot(U,"+")
```

1 pt.

(d) On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.
1pt.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors d'après l'inégalité de la question 2)a) appliquée avec $x = -u_n$ on a :
$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{F}(u_n) - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n < 0.$$
Cela montre que la suite est décroissante.
1pt.

(f) D'après les questions 2)b) et 2)e), la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, on peut conclure que cette suite converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de F. Remarquons que pour tout $x < 0$, $\mathrm{F}(x) = 0$ donc x n'est pas un point fixe de F. De plus, pour tout $x \geqslant 0$, d'après la question 2)a) on a :
$$\mathrm{F}(x) = x \Longleftrightarrow 1 - e^{-x} = x \Longleftrightarrow 1 - x = e^{-x} \Longleftrightarrow -x = 0.$$
Ainsi, l'unique point fixe de F est 0 et par conséquent $\ell = 0$.
2pts : 1pt pour le théorème de convergence monotone, 1pt pour trouver la limite (il fallait faire appel à la continuité de F ou de exp).

(g) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de la question 2(a) appliquée avec $x = u_n$, on a
$$e^{u_n} \geqslant 1 + u_n$$
puis en passant à l'inverse
$$e^{-u_n} \leqslant \frac{1}{1+u_n}.$$
Ainsi
$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{1+u_n} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$
En passant à l'inverse dans cette inégalité on trouve
$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} = \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$
Remarquons que tous les passages à l'inverse sont licites car les quantités manipulées sont strictement positives d'après la question 2)b).
3pts : 2pts pour la première inégalité, 1pt pour la deuxième.

(h)
- Initialisation : $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.
- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{u_n} \leqslant n$. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + n$$

puis en repassant à l'inverse

$$u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ici encore tous les passages à l'inverse sont rendus licites par la question 2)b). La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

3pts.

(i) Le vecteur-ligne S contient les 100 premiers termes de la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n. La courbe en trait plein est la courbe représentative de la fonction logarithme, on peut donc conjecturer que la série de terme général u_n diverge.

2pts.

(j) Les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. D'après la question 2)h) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge aussi.

3pts : 1pt pour dire que les séries sont à termes positifs, 1pt pour la divergence de la série de Riemann, 1pt pour conclure par comparaison.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité (9,5pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. **Étude de la fonction g.**

(a) La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (fonction constante) et sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$). On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Ainsi g est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

2,5pts : 0,5pt pour la dérivabilité sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, 1pt pour la continuité en 0, 1 pt pour le reste.

(b) Cependant, g est dérivable sur $[0, +\infty[$ (elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0 d'après les questions précédentes) et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$g'(x) = e^{-x}(1-x).$$

Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour la limite en 0, il s'agit d'une croissance comparée.

3pts : 2pts pour l'étude de fonction, 1pt pour la limite.

(c) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$g''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Par conséquent,

$$g''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 2.$$

La fonction g est donc convexe sur $[2,+\infty[$ et concave sur $]0,2]$.

2pts : 1pt pour la caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathscr{C}^2$, 1pt pour l'étude du signe de g'' et la conclusion.

(d) **2pts pour le graphique.**