TD1-Compléments

Exercice 1 (*Suite récurrente et fonction décroissante*)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. *Étudier le sens de variation de f sur $[1,3]$ et montrer que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f.*
2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,3]$.*
3. *Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.*
   (a) *Soit g la fonction définie sur $[1,3]$ par*
   $$\forall x \in [1,3],\ g(x) = f \circ f(x).$$
   Déterminer l'expression de g et en déduire ses variations.
   (b) *Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ et en déduire ses variations.*
   (c) *De même, déterminer les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (d) *En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.*
4. *(**) En revenant à la définition de limite, montrer que (u_n) converge aussi.*

Exercice 2

Soit n un nombre entier naturel non nul. On se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) : \quad e^x = x^n.$$

On introduit la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

1. ***Étude des racines positives de** (E_1) **et** (E_2).*
   (a) *Étudier les variations de f_1 et de f_2.*
   (b) *Représenter graphiquement f_1 et f_2.*
   (c) *Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).*
2. ***Étude des racines positives de l'équation** (E_3).*
   (a) *Étudier et représenter la fonction f_3.*
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

   On donne les valeurs approchées $e^2 \approx 7.4$; $e^3 \approx 20.1$; $e^4 \approx 54.6$ et $e^5 \approx 148.4$.

   (b) *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.*
      i. *Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$, alors, pour tout entier naturel n, $u < y_n \leqslant v$.*
      ii. *Montrer que, si $v \leqslant y_0$, alors, pour tout entier naturel n, $v \leqslant y_n$.*
      iii. *Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.*
      En déduire, selon la position de y_0 par rapport à v, le sens de variation de la suite (y_n).
      iv. *Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n).*
   (c) *On choisit désormais $y_0 = 4$.*
      i. *Écrire une fonction `Scilab` qui prend en argument un entier n et calcul y_n.*
      ii. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant 0,75(v - y_n)$*
      En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v - y_n \leqslant 0,75^n$.
      iii. *Déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.*
3. ***Étude des racines positives de l'équation** (E_n) **pour** $n \geqslant 3$.*
   (a) *Étudier sur $[0;+\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.*
   (b) *Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.*
   Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n), puis prouver la convergence de celle-ci.

(c) *Montrer que* $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, *et en déduire la limite* ℓ *de la suite* (u_n), *puis un équivalent simple de* $u_n - \ell$ *quand n tend vers* $+\infty$.

(d) *Déterminer, pour* $n \geqslant 4$, *le signe de* $f_n(v_{n-1})$.
Déduire des variations de la fonction f_n *le sens de variation de la suite* (v_n), *puis étudier la limite de celle-ci.*

(e) *Pour tout réel* $x > 1$, *on pose* $g(x) = x - \ln(x)$.

   i. *Montrer que* g *réalise une bijection de* $]1; +\infty[$ *sur* $]1; +\infty[$.

   ii. *Établir que* $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$.

   iii. *Montrer à l'aide de* g^{-1} *que* $\frac{v_n}{n}$ *tend vers* $+\infty$.

   iv. *Montrer que* $\frac{v_n}{n\ln(n)}$ *tend vers* 1 *puis en déduire un équivalent de* v_n *quand* n *tend vers* $+\infty$.