La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(A^2 - 4I_4)(A^2 - I_4)$. La matrice A est-elle inversible? Si oui, déterminer son inverse.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$
   (a) Montrer que $E_{-2}(A)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
   (b) De même, déterminer une base de $E_{-1}(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.
3. La famille constituée des vecteurs des quatre bases déterminées à la question 2 est-elle une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$?
4. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) On note $D = P^{-1}AP$. Calculer D.

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$AM = MA.$$
On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$DN = ND.$$

5. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
6. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
$$M \in C_A \iff N \in C_D.$$
7. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.
8. En déduire :
$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$
9. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_{\mathrm{N}} \geqslant \mathrm{A}$.
9. (a) Démontrer : $\quad \forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.
   (b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. (a) Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^1 f(x)dx$.
    (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f(x)dx$?
11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + (-1)^n n^2 e^{-3n}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)}$.

Exercice 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[[2;n+1]]$. Par exemple, si $n=5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5=4$.

Pour tout k de $[[1;n+1]]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n=3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n=3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'évènement $[X_3=4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3.
   En déduire $P(X_3=4)$.

   (b) Montrer que $P(X_3=2)=\dfrac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3=3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1;n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n=n+1)$.
5. Montrer, pour tout i de $[\![1;n]\!]$: $P_{(N_1=i)}(X_n=2)=\dfrac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $P(X_n=2)$.
7. Soit $k\in[\![2;n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n>k)=(N_1>N_2>\ldots>N_k)$.
   En déduire : $P(X_n>k)=\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.
8. Exprimer, pour tout $k\in[\![2;n+1]\!]$, $P(X_n=k)$ à l'aide de $P(X_n>k-1)$ et de $P(X_n>k)$.
9. En déduire : $E(X_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n>k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k\in[\![2;n+1]\!], P(X_n=k)=\dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=k)=\dfrac{k-1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
    On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2;+\infty]\!]$ telle que :
    $$\forall k\in[\![2;+\infty]\!], P(Z=k)=\frac{k-1}{k!}.$$
13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(X_n)$.