TD 7-Variables aléatoires discrètes (révisions)

Exercice 1

Un lot contient 10 pièces dont 3 défectueuses. On tire simultanément et au hasard 2 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.

1. *Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.*
   (a) *Reconnaître la loi de X_1.*
   (b) *En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.*
2. *Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.*
   (a) *Déterminer la loi de X_2.*
   (b) *Calculer $E(X_2)$.*

Exercice 3

Un joueur lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Il gagne 1 euro s'il tombe sur un nombre pair et rien sinon. On note X la variable aléatoire qui compte les gains du joueur. Reconnaître la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

Soit $X \to \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. *Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k) = (1-p)^k$.*
2. *En déduire que $\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P_{[X>l]}(X > k+l) = P(X > k)$.*

Exercice 5

Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.

1. $Y = n - X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
2. $Y = 2^X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
3. $Y = \frac{1}{X+1}$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 6 (*Ecricome 2013*)

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule ***sans remise*** *dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule* ***avec remise*** *dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.*
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : ≪ noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche ≫ alors :

- *A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;*
- *l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;*
- *B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;*
- *X vaut 1 et Y vaut 4.*

1. *Dans cette question, on suppose que $b = n = 2$. On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.*
   (a) *Donner les probabilités des évènements :* $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de X.*
   (c) *Montrer que la probabilité de l'évènement $[Y = 0]$est donnée par :* $P([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$
   (d) *Pour tout entier i naturel non nul, déterminer les probabilités suivantes :*
   $$P([X = 0] \cap [Y = i]) , P([X = 1] \cap [Y = i]), P([X = 2] \cap [Y = i]).$$
   (e) *En déduire la loi de Y.*
   Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y = i])$ en fonction de i, vérifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y = i]) = 1$.
   (f) *Montrer que Y admet une espérance et la calculer.*

2. *On se place maintenant dans le cas général.*

(a) *Pour t.out $k \in \{1;\ldots;n\}$ calculer la probabilité $P([X=k])$ puis vérifier que :*
$P([X=k]) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$.

(b) *Utiliser la question qui précède pour justifier que :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.
Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :
$\boxed{(\mathcal{S}) \qquad \forall N \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}}$.

(c) *Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+1}{a+1}$ puis justifier que :*
$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+a+1}{a+1}$.

(d) *À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variab1e $n-X$ est donnée par :*

$E(n-X) = \dfrac{nb}{b+1}$. *En déduire l'espérance $E(X)$ de X.*

(e) *Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante : $P([X=k]\cap[Y=i])$.*

(f) *Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série* $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ *est convergente et déterminer sa somme.*

(g) *Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E(Y) = \dfrac{bn}{b^2-1}$.*

Exercice 7 (*EDHEC 2005*)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$

- *il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0<p<1)$*
- *il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$. On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T=1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T=4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. (a) *Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T=k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.*
(b) *Donner la loi de X_1.*
(c) *En déduire $\mathrm{P}(T=k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.*
2. (a) *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0,n]]$*
(b) *Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1-p$*
3. (a) *Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}$, $\mathrm{P}(X_{n+1}=k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k-1)$*
(b) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2\ldots, n-1\}, \mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.*
En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
(c) *Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k) = 1$.*
4. (a) *Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1}+1}{(1-p)^2}$*
(b) *En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.*
5. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = p\left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1\right)$.*
(b) *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$*
Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$
(c) *En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.*
(d) *Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$*

Exercice 8 (*EML 2009*)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0<p<1, 0<q<1$et $p+q=1$.

1. *Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.*
(a) *Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathrm{P}(T=k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.*
(b) *En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et*

$V(U)$.

2. *Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.On note*
   - X *la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*
   - Y *la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.*
   - Z *la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.*

   Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y=1)\cup(Z=1)$ *est égale à* 1. *Pour tout entier naturel non nul* i, *on note :*
   - B_i *l'événement "la* i*-ème boule tirée est blanche",*
   - N_i *l'événement "la* i*-ème boule tirée est noire".*

   (a) i. *Montrer, pour tout entier* $k\geq 2$: $\mathrm{P}(X=k)=q\,p^{k-1}+p\,q^{k-1}$.

   ii. *Vérifier :* $\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)=1$

   iii. *Montrer que la variable aléatoire* X *admet une espérance et que :* $E(X)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$.

   (b) i. *Pour tout entier* $k\geq 2$, *déterminer* $\mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1))$
   (On distinguera les cas $k=2$ et $k\geq 3$.)

   ii. *En déduire* : $\mathrm{P}(Y=1)=q\,(1+p)$.

   iii. *Déterminer la loi de la variable aléatoire* Y.

   On admet que l'espérance de Y *existe et que :* $E(Y)=\dfrac{1}{q}\left(1-p+p^2\right)$.

   (c) *Donner la loi de* Z *et son espérance.*

   (d) *Montrer que les variables aléatoires* $Y\ Z$ *et* $X-1$ *sont égales.*

   (e) *Montrer que le couple* (Y,Z) *admet une covariance et exprimer* $\mathrm{cov}\,(Y,Z)$ *à l'aide de* $E(X)$, $E(Y)$ *et* $E(Z)$.