

# Chapitre 11-Comparaison de fonctions et développements limités

## 1 Comparaison de fonctions

### 1.1 Notion de voisinage

#### Définition 1 (Voisinage)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

- Si  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle **voisinage (fermé) de  $a$**  tout intervalle de la forme  $[a - r, a + r]$  où  $r > 0$ .
- Si  $a = +\infty$ , on appelle **voisinage (fermé) de  $a$**  tout intervalle de la forme  $[A, +\infty[$  où  $A > 0$ .
- Si  $a = -\infty$ , on appelle **voisinage (fermé) de  $a$**  tout intervalle de la forme  $] -\infty, B]$  où  $B < 0$ .

On dit qu'une propriété relative à  $f$  est vraie au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que la propriété est vraie sur  $I \cap V$ .

#### Exemple 1

1. La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 1$$

est positive au voisinage de 0 :

2. La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 1$$

est négative au voisinage de  $+\infty$  :

### 1.2 Relation de négligeabilité

#### Définition 2 (Négligeabilité)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in I \cap V, \quad f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

On notera  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ .

#### Remarque 1

1. Contrairement aux suites, on ne peut pas omettre le «  $x \rightarrow a$  » sous le petit  $o$  ! En effet la relation de négligeabilité entre deux fonctions peut radicalement changer selon le point au voisinage duquel on travaille (voir exemple ci-dessous).
2.  $\triangle$  La notation « petit  $o$  » (appelé notation de Landau) est un abus d'écriture :  $o_{x \rightarrow a}(g(x))$  ne désigne pas une fonction particulière mais toute fonction possédant la propriété d'être négligeable devant  $g$  au voisinage de

*a. Ainsi,  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  et  $h(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  n'implique pas que  $f(x) = h(x)$  (même au voisinage de  $a$ )!*

### Exemple 2

1. Montrons :  $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2)$ .

2. Montrons :  $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x)$ .

### Exemple 3

1. Montrons :  $x^2 - 1 = o_{x \rightarrow 1}(1)$ .

2. Plus généralement  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(1)$  si et seulement si

### Remarque 2

L'assertion  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  est équivalente à l'assertion  $f(x) = \ell + o_{x \rightarrow a}(1)$ .

### Test 1 (Voir la solution.)

Que signifie «  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(0)$  » ?

### Test 2 (Voir la solution.)

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. Comparer  $f$  et  $g$  au voisinage de 0.

2. Comparer  $f$  et  $g$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Proposition 1 (Caractérisation)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ). Si  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ) alors

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

#### Exemple 4

Dans chaque cas déterminons si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre.

1. Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = \frac{1}{x-2}$ .

• En 2 :

• En  $+\infty$  :

• En 1 :

2. Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = x$  en 0.

#### Test 3 (Voir la solution.)

Dans chaque cas déterminer si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre.

1. Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = x^2 + 2x - 1$  en  $-\infty$  puis en 0.

2. Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$  et  $g(x) = \ln(x)$  en  $0^+$ .

Plus généralement, les croissances comparées se traduisent en terme de négligeabilité par la proposition suivante.

#### Proposition 2 (Croissances comparées)

1. En  $+\infty$  :

(a) pour tout  $b > a > 0$  on a :

$$\begin{aligned} \bullet x^a &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^b) \\ \bullet e^{ax} &= o_{x \rightarrow +\infty}(e^{bx}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x^b} &= o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^a}\right) \\ \bullet e^{-bx} &= o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-ax}) \end{aligned}$$

(b) pour tout  $a > 0$  et tout  $b > 0$  on a :

$$\begin{aligned} \bullet \ln(x)^a &= o_{x \rightarrow +\infty}(x^b) \\ \bullet x^a &= o_{x \rightarrow +\infty}(e^{bx}). \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{1}{x^b} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\ln(x)^a}\right)$$

2. En  $0^+$  :

(a) pour tout  $b > a > 0$  on a :

$$\bullet x^b = o_{x \rightarrow 0^+}(x^a)$$

$$\bullet \frac{1}{x^a} = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^b}\right)$$

(b) pour tout  $a > 0$  et tout  $b > 0$  on a :

$$\bullet x^a = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{\ln(x)^b}\right)$$

$$\bullet \ln(x)^b = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^a}\right).$$

### Exemple 5

1. Comparer en  $+\infty$  les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 + x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + 3x^2 + 5.$$

2. Comparer en  $0^+$  les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

### Test 4 (Voir la solution.)

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{\ln x}.$$

Comparer  $f$  et  $g$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Proposition 3 (Opérations sur les $o$ )

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

1. (Transitivité) Si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  et  $g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$  alors  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$ .
2. (Combinaison linéaire) Si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$  et  $g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$  alors  $\lambda f(x) + \mu g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x))$ .
3. (Multiplication par un réel **non nul**) Si  $\lambda \neq 0$  et  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  alors  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\lambda g(x))$ .
4. (Produit) Si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$  alors  $f(x)h(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)h(x))$ .

### Remarque 3

1. En général, on ne garde pas les constantes multiplicatives à l'intérieur du  $o$  grâce au troisième point.

Par exemple, si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(2x)$  alors  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(\frac{1}{2}2x) = o_{x \rightarrow a}(x)$ .

De même, si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(2)$  alors  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(1)$ .

2. ⚠ Attention : d'après le point 2, on a

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x)).$$

Mais **il ne faut pas confondre** avec

$$f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x)) \quad \text{et} \quad f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \Rightarrow f(x) = o_{x \rightarrow a}(h(x) + g(x))$$

**qui est FAUX** (voir le test 5)!

3. ⚠ Attention : pour utiliser les opérations de la propriété ci-dessus, il faut manipuler des petits  $o$  au voisinage d'un même point!
4. En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.

**Démonstration :** Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ). **Pour simplifier, on suppose que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ).**

■

### Test 5 (Voir la solution.)

1. Montrer :  $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2 + 1)$  et  $x = o_{x \rightarrow +\infty}(-x^2 + 1)$ .

2. A-t-on :  $x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^2 + 1 + (-x^2 + 1))$  ?

### 1.3 Relation d'équivalence

#### Définition 3

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in V \cap I \quad f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 1.$$

On notera  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

#### Exemple 6

Tout comme «  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(0)$  », «  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$  » signifie que  $f$  est nulle au voisinage de  $a$ . **Ce sont deux notations à ne jamais écrire!**

#### Exemple 7

1. On a :  $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ .

2. En revanche,  $x^2 + 1$  n'est pas équivalent à  $x^2$  au voisinage de 0.

#### Proposition 4 (Caractérisation)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

On a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x)).$$

En pratique, si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ) alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

#### Exemple 8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

1. Montrons :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ .

2. Montrons :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ .

### Exemple 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + x^3 + 2x^2 + 1.$$

1. Montrons :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ .

2. Montrons :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2$ .

3. Montrons :  $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^3$ .

### Test 6 (Voir la solution.)

1. Montrer :  $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^5}$ .

2. Montrer :  $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ .

### Proposition 5 (Opérations sur les équivalents)

Soient  $f, g, h$  et  $e$  quatre fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

- (Symétrie) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ .
- (Transitivité) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ .
- (Produit) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et  $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} e(x)$  alors  $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)e(x)$ .
- (Inverse) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ , que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas au voisinage de  $a$  (sauf éventuellement en  $a$ ) alors  $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$ .
- (Puissance) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f(x)^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^k$ .
- (Valeur absolue) Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $|f(x)| \underset{x \rightarrow a}{\sim} |g(x)|$ .

### Remarque 4

- Un cas particulier du point 3 en prenant  $e = h$  donne :  
si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  alors  $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)h(x)$ .
- Les points 3 et 4 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.
- La relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition : on n'additionne jamais des équivalents!**
- Les points 5 et 6 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec la composition à gauche par une fonction puissance ou la fonction valeur absolue.
- La relation d'équivalence n'est pas compatible avec la composition en général : par exemple, on ne passe jamais au logarithme ou à l'exponentielle dans les équivalents!**
- En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.

**Test 7 (Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.)**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x + \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(x).$$

1. Montrer :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ .
2. A-t-on :  $f(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) - x$  ?

**Test 8 (Incompatibilité avec la composition, voir la solution.)**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. Montrer :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ .
2. A-t-on :  $e^{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{g(x)}$  ?

**Proposition 6 (Équivalents usuels)**

1. On a les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x ; \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x ; \quad (1+x)^a - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ax \quad (a \in \mathbb{R}^*).$$

2. Soient  $n > p$  et  $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$  avec  $a_n \neq 0$  et  $a_p \neq 0$ .

- En  $+\infty$  et  $-\infty$  :

$$a_p x^p + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n.$$

- En 0 :

$$a_p x^p + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p.$$

**Exemple 10**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x^3 + x^4}{x^3 + 6x^5}.$$

1. Déterminons un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Déterminons un équivalent de  $f$  en 0.



**Proposition 7** (Limite et équivalent)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . On considère  $a$  un élément de  $I$  ou une borne de  $I$  ( $a$  peut être un réel,  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

1. Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  et si  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  quand  $x$  tend vers  $a$  alors  $g$  admet pour limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$ .
2. Si  $f$  admet une limite **finie et non nulle**  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$ .

**Exemple 11**

Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

**Méthode 1**

Pour déterminer un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point  $a$ , on utilise les mêmes méthodes que pour les suites :

1. on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le terme dominant au voisinage de  $a$ , multiplication par la quantité conjuguée...);
2. on peut parfois déterminer un équivalent à l'aide d'un encadrement par deux fonctions équivalentes entre elles;
3. on peut utiliser les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents.

**Exemple 12**

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes.

1. La fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1(x) = \ln(x) + e^x$  en  $0^+$ .

2. La fonction  $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_2(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  en  $0^+$ .

3. La fonction  $f_3$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f_3(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$  en 1.

#### Test 9 (voir la solution.)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés.

1. La fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f_1(x) = \frac{2x^2+1}{1+x}$  en 0 et en  $-\infty$ .
2. La fonction  $f_2$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_2(x) = e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - 1$  en  $0^+$  et en 1.

## 2 Développements limités

### 2.1 Développement limité d'ordre 0

#### Définition 4 (Développement limité d'ordre 0)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  possède **un développement limité à l'ordre 0** en  $x_0$  s'il existe un réel  $a_0$  tel que :

$$f(x) = a_0 + o_{x \rightarrow x_0}(1).$$

#### Remarque 5

Une fonction  $f$  définie au voisinage de  $x_0$  possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de  $x_0$  si et seulement si  $f$  est continue en  $x_0$ . Dans ce cas,  $a_0 = f(x_0)$  (en particulier, le développement limité à l'ordre 0 est unique).

#### Notation 1

On écrira souvent «  $f$  admet un  $DL_0(x_0)$  » pour dire «  $f$  possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de  $x_0$  »

### 2.2 Développement limité d'ordre 1

#### Définition 5 (Développement limité d'ordre 1)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  possède **un développement limité à l'ordre 1** en  $x_0$  s'il existe deux réels  $a_0$  et  $a_1$  tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)).$$

#### Notation 2

On écrira souvent «  $f$  admet un  $DL_1(x_0)$  » pour dire «  $f$  possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $x_0$  »

### Remarque 6

Si  $f$  admet un  $DL_1(x_0)$  alors  $f$  admet un  $DL_0(x_0)$ . En effet :

### Rappel(s) 1 (Dérivabilité d'une fonction en un point)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette limite est alors notée  $f'(x_0)$  : c'est le nombre dérivée de  $f$  en  $x_0$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

► Supposons que  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

1. Déterminons un  $DL_0(x_0)$  de  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ .

2. On en déduit un  $DL_1(x_0)$  de  $f$ .

► Réciproquement, supposons que  $f$  admet un DL à l'ordre 1 en  $x_0$  : il existe  $a_0$  et  $a_1$  deux réels tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)).$$

1. Déterminons  $a_0$ .

2. Montrons que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et déterminer  $a_1$ .

On vient de montrer la proposition suivante :

**Proposition 8**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ . Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

**Remarque 7**

*On a en fait montré plus que cela : on a montré qu'en cas d'existence, le développement limité à l'ordre 1 est unique et que ses coefficients sont donnés par*

$$a_0 = f(x_0) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(x_0).$$

**Exemple 13**

1. Au voisinage de 0, on obtient par exemple :

(a)  $e^x =$

(b)  $\ln(1+x) =$

(c)  $\sqrt{1+x} =$

2. Déterminons un  $DL_1(2)$  de la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x - 1$ .

## 2.3 Développement limité d'ordre 2

### Définition 6 (Développement limité d'ordre 2)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  possède un **développement limité à l'ordre 2** en  $x_0$  s'il existe trois réels  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2).$$

### Notation 3

On écrira souvent «  $f$  admet un  $DL_2(x_0)$  » pour dire «  $f$  possède un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de  $x_0$  »

### Définition 7 (Partie régulière d'un DL)

Soit  $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  admettant le DL d'ordre  $n$  suivant au voisinage de  $x_0 \in I$  :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

Le polynôme  $\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  est appelé la **partie régulière** du DL et  $o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$  le **reste** du DL.

### Remarque 8

1. Si  $f$  admet un  $DL_2(x_0)$  alors  $f$  admet un  $DL_1(x_0)$  (donc aussi un  $DL_0(x_0)$ ). En effet :



2. En particulier, on vient de voir que  $(x - x_0)^2 = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0))$  : un DL d'ordre 2 précise le comportement de  $f$  au voisinage de  $x_0$  par rapport au DL d'ordre 1 :

- la partie régulière du DL d'ordre 1 donne une approximation affine de  $f$  au voisinage de  $x_0$  ;
- la partie régulière du DL d'ordre 2 donne une approximation quadratique de  $f$  au voisinage de  $x_0$ .

### Proposition 9

Soit  $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ . Si  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$  alors la partie régulière est unique.

### Théorème 1 (Formule de Taylor-Young)

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ . Si  $f$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $x_0$  alors  $f$  admet un DL d'ordre 2 en  $x_0$  donné par :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2).$$

### Remarque 9

Attention, contrairement à ce qui se passe pour les DL d'ordre 1, posséder un DL d'ordre 2 en  $x_0$  n'implique pas d'être deux fois dérivable en  $x_0$ .

On en déduit les DL usuels suivants :

#### Proposition 10 (DL usuels en 0)

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

1.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ .
2.  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ .
3.  $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ .

### Méthode 2 (Déterminer le DL d'une fonction)

On peut procéder de différentes façons pour déterminer le DL d'une fonction  $f$  au voisinage d'un point  $x_0$  :

1. si  $f$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $x_0$ , on peut utiliser la formule de Taylor-Young;
2. si l'expression de  $f$  fait intervenir des fonctions dont on connaît le DL, on peut utiliser les règles suivantes de calcul avec les  $o$ , **valables uniquement en 0** :

- (a)  $\frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) = \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n)$  et  $\frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) - \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) = \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n)$  (cf prop 3.2);
- (b)  $x^m \times \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) = \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$  et  $\frac{o}{x \rightarrow 0}(x^m) \times \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) = \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^{n+m})$  (cf prop 3.4);
- (c) si  $m < n$  alors  $\frac{o}{x \rightarrow 0}(x^m) + \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^n) = \frac{o}{x \rightarrow 0}(x^m)$  (cf prop 2 et 3).

### Exemple 14

Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad f(x) = e^{-2x} \sqrt{1+x}.$$

### Exemple 15

1. Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad f(x) = \ln(1+x) - x.$$

2. Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+x}.$$

### Test 10 (voir la solution.)

1. Déterminer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $g$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

2. En déduire le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction  $h$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad h(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

## 3 Applications

### 3.1 Application à l'étude locale de fonction

- Lever une indétermination pour des calculs de limites.

#### Méthode 3

Lorsqu'on ne connaît pas d'équivalent ou qu'on est tenté de sommer des équivalents (**chose formellement interdite**), il est souvent judicieux d'utiliser un développement limité.

#### Exemple 16

Déterminons  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ .

**Test 11 (voir la solution.)**

On note  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et calculer  $f'(0)$ .
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f'$  est continue en 0.

► Position locale d'une courbe par rapport à une tangente.

**Théorème 2**

Soient  $I$  un intervalle et  $x_0 \in I$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et admettant le DL d'ordre 2 suivant au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^2).$$

Alors :

1.  $f$  est continue en  $x_0$  et  $a_0 = f(x_0)$ ,
2.  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $a_1 = f'(x_0)$ ,
3. l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$  est

$$y = a_0 + a_1(x - x_0),$$

4. si  $a_2 > 0$ , la courbe représentative de  $f$  est localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse  $x_0$  et si  $a_2 < 0$  la courbe représentative de  $f$  est localement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse  $x_0$ .

**Remarque 10**

Si  $a_2 = 0$ , on ne peut rien conclure sur la position relative de la courbe représentative de  $f$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse  $x_0$ .

**Remarque 11 (Cas particulier important)**

Si  $a_1 = 0$ , c'est-à-dire  $f'(x_0) = 0$ , la tangente est horizontale. Donc :



- si  $a_2 > 0$ , la courbe représentative de  $f$  est localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse  $x_0$  donc  $x_0$  est un minimum local;
- si  $a_2 < 0$ , la courbe représentative de  $f$  est localement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse  $x_0$  donc  $x_0$  est un maximum local.

### Exemple 17

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad f(x) = e^{-2x} \sqrt{1+x}.$$

Étudions la position locale de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente en 0.

### Test 12 (voir la solution.)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+x} + 1.$$

Étudier la position locale de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente en 0.

## 3.2 Application à l'étude de séries

### Méthode 4

Lorsque le terme général d'une série est trop compliqué pour en déterminer un équivalent facilement, on peut utiliser un DL en  $\frac{1}{n}$ .

### Exemple 18

Étudions la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

## 4 Objectifs

1. Connaître la définition de négligeabilité et sa caractérisation.
2. Connaître la définition d'équivalence et sa caractérisation.
3. Savoir montrer que deux fonctions sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre au voisinage d'un point à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
4. Connaître par coeur les croissances comparées en terme de petits  $o$  et les équivalents usuels.
5. Savoir manipuler les opérations avec les petits  $o$  et les équivalents pour déterminer une limite.
6. Savoir déterminer un équivalent par encadrement ou de manière directe.
7. Connaître les DL usuels.
8. Savoir déterminer un DL à l'ordre 1 ou 2 de fonctions simples en utilisant la formule de Taylor-Young ou en manipulant les DL usuels.
9. Savoir utiliser les DL pour lever des indéterminations, étudier localement une fonction.