Exercice 7

La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Ainsi $Sp(A)=\{1\}$ si $c=1$ et $Sp(A)=\{1,c\}$ si $c\neq 1$.

Si $c=1$: alors $Sp(A)=\{1\}$. Supposons A diagonalisable : alors il existe une matrice inversible P et une matrice Diagonale D telles que : $D=P^{-1}AP$

Or, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A donc $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3$.

Ainsi $I_3=P^{-1}AP$ donc $PI_3P^{-1}=PP^{-1}APP^{-1}$

donc $I_3=A=\begin{bmatrix}1&a&1\\0&1&b\\0&0&1\end{bmatrix}$

Absurde.

Ainsi si $c=1$, A n'est pas diagonalisable (quelque soient les valeurs de a et b).

Si $c\neq 1$: $Sp(A)=\{1,c\}$

Déterminons $E_1(A)$: soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in E_1(A) \iff \begin{cases}x+ay+z=x\\ y+bz=y\\ cz=z\end{cases} \iff \begin{cases}ay+z=0\\ bz=0\\ (c-1)z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}ay+z=0\\ bz=0\\ z=0\end{cases} \text{ car } c\neq 1 \iff \begin{cases}ay+z=0\\ z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}ay=0\\ z=0\end{cases}$$

Si $a\neq 0$: alors $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in E_1(A) \iff y=0=z$

donc $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

Si $a=0$: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in E_1(A) \iff z=0$

donc $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Déterminons $E_c(A)$: soit $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in E_c(A) \iff \begin{cases}x+ay+z=cx\\ y+bz=cy\\ cz=cz\end{cases} \iff \begin{cases}(1-c)x+ay+z=0\\ (1-c)y+bz=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=\dfrac{ab+c-1}{(c-1)^2}\\ y=\dfrac{b}{(c-1)}\end{cases}$$

Ainsi $E_c(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}ab+c-1\\ b(c-1)\\ (c-1)^2\end{pmatrix}\right)$

Conclusion : si $a\neq 0$, $\dim E_1(A)+\dim E_c(A)=1+1<3$
donc A n'est pas diagonalisable

si $a=0$, $\dim E_1(A)+\dim E_c(A)=2+1=3$

donc A est diagonalisable

Donc A est diagonalisable si et seulement si $a=0$ et $c\neq 1$

Exercice 8

1) Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
$\mathcal{B}=(1,X,X^2)$

$A=\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(1),\varphi(X),\varphi(X^2))$

Or $\varphi(1)=1$; $\varphi(X)=2X+1$ et $\varphi(X^2)=3X^2+2X$

donc $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$

2) On sait que $Sp(\varphi)=Sp(A)$ et comme A est triangulaire, son spectre est l'ensemble des valeurs de ses coefficients diagonaux. Donc

$Sp(\varphi)=Sp(A)=\{1,2,3\}$

$E_1(\varphi)$: soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$

$P\in E_1(\varphi)\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)\in E_1(A)\iff\begin{bmatrix}c\\b\\a\end{bmatrix}\in E_1(A)$

$\iff\begin{cases}c+b=c\\2b+2a=b\\3a=a\end{cases}\iff\begin{cases}b=0\\a=0\end{cases}\iff P=c.$

Ainsi $E_1(\varphi)=\mathbb{R}_0[X]$

$E_2(\varphi)$: soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$

$P\in E_2(\varphi)\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)\in E_2(A)\iff\begin{bmatrix}c\\b\\a\end{bmatrix}\in E_2(A)$

$\iff\begin{cases}c+b=2c\\2b+2a=2b\\3a=2a\end{cases}\iff\begin{cases}c=b\\a=0\end{cases}\iff P=b(X+1)$

Donc $E_2(\varphi)=\{b(X+1)\ ;\ b\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}(X+1)$

$E_3(\varphi)$: soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$

$P\in E_3(\varphi)\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P)\in E_3(A)\iff\begin{bmatrix}c\\b\\a\end{bmatrix}\in E_3(A)$

$\iff\begin{cases}c+b=3c\\2b+2a=3b\\3a=3a\end{cases}\iff\begin{cases}b-2c=0\\b-2a=0\end{cases}\iff\begin{cases}b=2a\\c=a\end{cases}$

Donc $E_3(\varphi)=\text{Vect}(X^2+2X+1)$

3) $\dim(\mathbb{R}_2[X])=3$ et φ possède 3 valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisables.

En posant

$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ et $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ on a $D=P^{-1}AP$

Exercice 11

1) A est symetrique donc diagonalisable

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$rg(A-\lambda I_4) = rg\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_4$$

$$= rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + \frac{\lambda}{2} L_1$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$= rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(2-\frac{\lambda^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$$

donc $rg(A-\lambda I_4) < 4 \iff 1-\lambda^2 = 0$ ou $2 - \frac{\lambda^2}{2} = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$

Comme $\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I_4$ non inversible

$\iff rg(A-\lambda I_4) < 4$

on en déduit que $Sp(A) = \{-1, -2, 1, 2\}$

Comme A possède 4 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisables et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

On remarque que :

$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $E_1(A) = Vect\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$A\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ donc $E_2(A) = Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$A\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ donc $E_{-2}(A) = Vec\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

3) En posant $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

et $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on a :

$D = P^{-1}AP$ donc $A = PDP^{-1}$

4) Soient $(M,N) \in C_A^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(M+\lambda N)A = MA + \lambda NA = AM + \lambda AN \text{ car } M, N \in C_A$$
$$= A(M+\lambda N)$$

donc $M + \lambda N \in C_A$

Ainsi C_A est stable par combinaison linéaire.

De plus, $C_A \subset M_4(\mathbb{R})$ et est non vide car $0_{M_4(\mathbb{R})} \in C_A$

Ainsi C_A est un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$.

5) Remarquons que $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$

Ainsi

$$M \in C_A \iff PNP^{-1} \in C_A \iff PNP^{-1}A = APNP^{-1}$$

$$\iff PNP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PNP^{-1}$$

(car $A = PDP^{-1}$)

$\iff PNDP^{-1} = PDNP^{-1}$ car $P^{-1}P = I_4$

$\iff NDP^{-1} = DNP^{-1}$ en multipliant membre à membre à gauche par P^{-1}

$\iff ND = DN$ en multipliant membre à membre par P à droite.

$\iff N \in C_D$.

6) $N = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2}$ appartient à C_D ssi $DN = ND$

Or

$$DN = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{41} & \cdots & & m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m_{11} & -2m_{12} & -2m_{13} & -2m_{14} \\ -m_{21} & -m_{22} & -m_{23} & -m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 2m_{41} & 2m_{42} & 2m_{43} & 2m_{44} \end{bmatrix}$$

et

$$ND = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{41} & \cdots & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m_{11} & -m_{12} & m_{13} & 2m_{14} \\ -2m_{21} & -m_{22} & m_{23} & 2m_{24} \\ -2m_{31} & -m_{32} & m_{33} & 2m_{34} \\ -2m_{41} & -m_{42} & m_{43} & 2m_{44} \end{bmatrix}$$

donc $ND = DN \iff \begin{cases} -2m_{11} = -2m_{11} \\ -2m_{12} = -m_{12} \\ -2m_{13} = m_{13} \\ -2m_{14} = 2m_{14} \end{cases}$ et $\begin{cases} -m_{21} = -2m_{21} \\ -m_{22} = -m_{22} \\ -m_{23} = m_{23} \\ -m_{24} = 2m_{24} \end{cases}$

et $\begin{cases} m_{31} = -2m_{31} \\ m_{32} = -m_{32} \\ m_{33} = m_{33} \\ m_{34} = 2m_{34} \end{cases}$ et $\begin{cases} 2m_{41} = -2m_{41} \\ 2m_{42} = -m_{42} \\ 2m_{43} = m_{43} \\ 2m_{44} = 2m_{44} \end{cases}$

$\iff m_{ij} = 0$ quand $i \neq j$.

Ainsi $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$

7) D'après 5 et 6

$$C_A = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & -b & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Or $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$C_A = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+d) & 0 & 0 & (-a+d) \\ 0 & (b+c) & (-b+c) & 0 \\ 0 & (-b+c) & (b+c) & 0 \\ (-a+d) & 0 & 0 & (a+d) \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

En posant $x = \frac{a+d}{2}$; $y = \frac{-a+d}{2}$; $z = \frac{b+c}{2}$; $w = \frac{-b+c}{2}$

on remarque que lorsque (a,d) parcourt $\mathbb{R}^2$; (x,y) parcourt $\mathbb{R}^2$ et lorsque (b,c) parcourt $\mathbb{R}^2$, (z,w) parcourt $\mathbb{R}^2$.

Donc

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & z & w & 0 \\ 0 & w & z & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} ; (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

8) Ainsi

$$C_A = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= M_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= M_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= M_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= M_4} \right)$$

La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est donc une famille génératrice de C_A et on vérifie sans mal qu'elle est libre.

Ainsi (M_1, M_2, M_3, M_4) est une base de C_A et $\dim C_A = 4$.