

ECG2

09/01/2023 au 13/01/2023

1 Comparaison de fonctions et développements limités

Négligeabilité : définition de la relation de négligeabilité au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, caractérisation, opération avec les petits o (transitivité, combinaison linéaire, produit), croissances comparées.

Équivalence : définition de la relation d'équivalence au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, caractérisation par la limite du quotient, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$, opérations sur les équivalents (symétrie, transitivité, compatibilité avec le produit, l'inverse, les puissances et la valeur absolue), équivalents usuels, équivalents et limites.

Développements limités : définition des DL d'ordre 0, 1 et 2 au voisinage d'un point, unicité du DL s'il existe. L'existence d'un DL d'ordre 1 en x_0 est équivalent à la dérivabilité en x_0 et expression du DL d'ordre 1 dans ce cas. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2, DL usuels en 0, utilisation des règles de calcul sur les petits o pour manipuler les DL (somme de DL, produit de DL sur des exemples simples).

Applications à l'étude de fonctions : lever une indétermination pour des calculs de limites, étudier la position locale d'une courbe par rapport à une tangente, application à l'étude de séries.

2 Intégrales de fonctions positives

Intégrales de fonctions positives : convergence des intégrales de fonctions continues positives, critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, critère de négligeabilité et d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives.

3 Méthodes à maîtriser

1. Savoir montrer que deux fonctions sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre au voisinage d'un point à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
2. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.
3. Savoir déterminer un équivalent d'une fonction à l'aide des équivalents usuels et des propriétés des équivalents.
4. Connaître les DL usuels.
5. Savoir déterminer un DL à l'ordre 1 ou 2 de fonctions simples en utilisant la formule de Taylor-Young ou en manipulant les DL usuels.
6. Savoir utiliser les DL pour lever des indéterminations, étudier localement une fonction.
7. Savoir déterminer la nature d'une intégrale impropre d'une fonction continue positive en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.

4 Questions de cours

- Définitions : voisinage fermé d'un réel, de $\pm\infty$. Négligeabilité, équivalence.
- Caractérisation de la négligeabilité, de l'équivalence.
- Équivalents et DL d'ordre 2 usuels, formule de Taylor-Young.
- Critères de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives.