TD10-Comparaison de fonctions et DL

Exercice 1.

1. Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

   Ainsi : $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.

2. Soit $x > 0$. Alors :

$$\frac{\ln(x+x^2)}{x} = \frac{2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

   Or, par croissance comparée et opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

   Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

   Ainsi : $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x))$.

3. Par croissance comparée (voir proposition 2) : $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o(g(x))$.

4. Par croissance comparée (voir proposition 2) : $f(x) \underset{x\to0^+}{=} o(g(x))$.

Exercice 2.

1. Par équivalent usuel en $+\infty$ et en 0, on sait que :

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} 3 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3.$$

   Ainsi :

$$\lim_{x\to0} f(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

2. - En 0 : par équivalent usuel on a :

$$x^3 + x - 1 \underset{x\to0}{\sim} -1 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x\to0}{\sim} 2x^2.$$

     Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{-1}{2x^2}.$$

     Ainsi : $\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{-1}{2x^2} = -\infty$.

   - En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x^3 + x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \quad \text{et} \quad 5x^4 + 2x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} 5x^4.$$

     Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5x}.$$

     Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{5x} = 0$.

3. En posant $X = x^2$, on a : $\lim_{x\to0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$h(x) = e^X - 1 \underset{x\to0}{\sim} X.$$

   Ainsi :

$$h(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2.$$

   Ainsi : $\lim_{x\to0} h(x) = \lim_{x\to0} x^2 = 0$.

4. En posant $X = \frac{1}{x^3}$ alors $\lim_{x\to+\infty} X = 0$. Ainsi par équivalent usuel :

$$i(x) = \sqrt{1+X} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}X = \frac{1}{2x^3}.$$

   Ainsi : $\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$.

5. En posant $X = -x^2$, on a : $\lim_{x\to 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$e^{-x^2} = e^X - 1 \underset{x\to 0}{\sim} X = -x^2.$$

De plus, par équivalent usuel : $x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient, on obtient :

$$j(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} j(x) = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.

6. Par opération sur les limites :

$$\lim_{x\to 1} k(x) = 2.$$

Ainsi : $k(x) \underset{x\to 1}{\sim} 2$.

7. Soit $x > 0$. En factorisant par le terme dominant au voisinage de $+\infty$ dans le logarithme on obtient :

$$l(x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Maintenant, on factorise par le terme dominant au voisinage de $+\infty$:

$$l(x) = \ln(x)\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Ainsi : $l(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} l(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

8. Soit $x > 0$. On a :

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Par équivalent usuel en $+\infty$ on a : $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc par passage à l'inverse :

$$m(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

9.
- En 0^+ : par équivalent usuel on a :

$$x+1 \underset{x\to 0^+}{\sim} 1.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en 0^+ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = -\ln(x)\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right).$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x}{\ln(x)} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$.

- En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en $+\infty$ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} n(x) = 1$.

Exercice 3.

- On va montrer :

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x+2}\ln(x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

D'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1$$

donc : $\sqrt{x}+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$. Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(x).$$

D'autre part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} = 1.$$

Donc : $\sqrt{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ et $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. Par produit :

$$\sqrt{x+2}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

- En divisant membre à membre l'inégalité de l'énoncé par $\sqrt{x}\ln(x)$ on obtient, pour tout $x \geq 4$:

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{\sqrt{x}\ln(x)}.$$

Or, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1.$$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1.$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

Exercice 4.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 donc, d'après la formule de Taylor-Young, f possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

Pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Ainsi :

$$f(0) = \ln(2) \quad ; \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Finalement :

$$f(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 2 donc, d'après la formule de Taylor-Young, g possède un DL d'ordre 2 en 2 donné par :

$$g(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \underset{x\to2}{o}((x-2)^2).$$

Pour tout x au voisinage de 2 on a :

$$g'(x) = 2xe^{x^2-1} \quad \text{et} \quad g''(x) = (2+4x^2)e^{x^2-1}.$$

Ainsi :

$$g(2) = e^3 \quad ; \quad g'(2) = 4e^3 \quad ; \quad g''(2) = 18e^3.$$

Finalement :

$$g(x) = e^3 + 4e^3(x-2) + 9e^3(x-2)^2 + \underset{x\to2}{o}((x-2)^2).$$