Université Aix-Marseille

Année 2018-2019

L2 MPCI

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

Arnaud Stocker

Table des matières

1 Espaces préhilbertiens

La notion d'espace euclidien apparaît avec l'étude des formes quadratiques, initiée par Fermat au dix-septième siècle. L'idée maîtresse est de rajouter une structure à un espace vectoriel, permettant de définir des notions d'angles et de longueurs. Cela permet d'étendre certains résultats de géométrie élémentaire, déjà bien connus dans le plan et l'espace.

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1 Formes hermitiennes et formes quadratiques

Définition 1.1

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}$*), on appelle* forme sesquilinéaire hermitienne *(resp.* forme bilinéaire symétrique*) toute application* $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ *telle que :*

- $\forall x \in E$, *l'application* $y \mapsto B(x,y)$ *est linéaire,*
- $\forall y \in E$, *l'application* $x \mapsto B(x,y)$ *est semi-linéaire à gauche :*

$$\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \forall x, z \in E,\ B(\lambda x + \mu z, y) = \overline{\lambda} B(x,y) + \overline{\mu} B(z,y),$$

- *l'application* B *est hermitienne :* $\forall x, y \in E$, $B(x,y) = \overline{B(y,x)}$.

Définition 1.2

On appelle forme quadratique *sur* E *toute application* $Q : E \to \mathbb{K}$ *pouvant s'écrire sous la forme :*

$$Q(x) = B(x,x),$$

où B *est une forme sesquilinéaire hermitienne (ou bilinéaire symétrique dans le cas réel). On note* Q_B *la forme quadratique associée à* B.

Remarque(s) : La dernière propriété implique qu'une forme quadratique est toujours à valeurs réelles. En effet, pour $x \in E$ on a $B(x,x) = \overline{B(x,x)}$ et par conséquent, $B(x,x) \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1

1. *Soit* $E = \mathbb{K}^n$, *pour* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *l'application*

$$B : (x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne.

2. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$. *Alors, l'application*

$$B : (f,g) \longmapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne.

3. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$. *Alors* $B : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0)$ *est une forme bilinéaire symétrique.*
4. *Soit* $E = M_n(\mathbb{R})$. *Alors* $B : (P,Q) \mapsto \mathrm{Tr}(MN)$ *est une forme bilinéaire symétrique.*

Proposition 1.1 (*Forme polaire*)

Soit B *une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. bilinéaire symétrique) sur* E. *Alors, pour* *tout $x, y \in E$ on a*

$$B(x,y) = \frac{1}{4}(Q_B(x+y) - Q_B(x-y)) + \frac{i}{4}(Q_B(x-iy) - Q_B(x+iy))$$

$$(\text{resp. } B(x,y) = \frac{1}{4}(Q_B(x+y) - Q_B(x-y))).$$

Démonstration : Calculs. ■

Corollaire 1.1

L'application $B \mapsto Q_B$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes sesquilinéaires hermitiennes (resp. bilinéaires symétriques) et l'espace vectoriel des forme quadratiques.

Démonstration : On vérifie facilement que l'application est linéaire. Elle est surjective par définition d'un forme quadratique et injective par la Proposition 1.1. ■

1.2 Produits scalaires

Définition 1.3

Soit B une forme sesquilinéaire (resp. bilinéaire symétrique) sur E. On dit que B est un produit scalaire *si pour tout x dans $E \backslash \{0\}$, $B(x,x) > 0$.*

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.4

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. On appelle norme *associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ l'application $\|\ \|$ définie par*

$$\forall x \in E,\ \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Exemple 1.2

1. *L'espace $E = \mathbb{K}^n$ muni de l'application*

$$\langle\ ,\ \rangle : (x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

   est un espace préhilbertien. Le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{K}^n$.

2. *Plus généralement, pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, l'application*

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{x}_i y_i$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$.

3. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ et soit $w \in E$ strictement positive. Alors, l'application*

$$B : (f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$$

   est un produit scalaire sur E.

4. *Soit* $E = l^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) := \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i\geq 0} |u_i|^2 < +\infty\}$. *L'application*
$$\langle\ ,\ \rangle : (u,v) \longmapsto \sum_{i\geq 0} \overline{u}_i v_i$$
est un produit scalaire sur E.
5. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$. *Alors* $B : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0)$ *est n'est pas un produit scalaire. En effet,* B *est positive non définie puisque* $B(X,X) = 0$.
6. *Soit* $E = M_n(\mathbb{R})$. *Alors* $B : (P,Q) \mapsto \mathrm{Tr}(MN)$ *n'est pas un produit scalaire. En effet,* B *n'est pas positive (ni négative).*

Proposition 1.2

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien et soient* $e_1,\dots,e_n \in E$, $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{K}$. *Alors :*
$$\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j \langle e_i, e_j \rangle,$$
et
$$\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \| e_i \|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{1\leq i<j\leq n} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Démonstration : Pour la première formule :
$$\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \langle e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{j=1}^n y_j \langle e_i, e_j \rangle.$$

Pour la seconde formule :
$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \|^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \| e_i \|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \| e_i \|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{j<i} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \| e_i \|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \bar{x}_i x_j \langle e_i, e_j \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{j<i} \overline{x_i \bar{x}_j \langle e_j, e_i \rangle} \\
&= \sum_{k=1}^n |x_l|^2 \| e_i \|^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{l>k} \bar{x}_k x_l \langle e_k, e_l \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{k<l} \overline{x_l \bar{x}_k \langle e_k, e_l \rangle} \\
&= \sum_{k=1}^n |x_l|^2 \| e_i \|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{l>k} \bar{x}_k x_l \langle e_k, e_l \rangle.
\end{aligned}$$
■

Théorème 1.1 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien. Alors, pour tout* $x, y \in E$,
$$|\langle x, y \rangle| \leq \| x \| \| y \| .$$
Il y a égalité si et seulement si x *et* y *sont liés.*

Démonstration : Si $x = 0$, l'inégalité est une égalité. On peut donc supposer que x est non nul.

- Supposons x de norme 1. On a, en développant,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| y - \langle x,y\rangle x \|^2 \\ &\leq \| y \|^2 - |\langle x,y\rangle|^2. \end{aligned}$$

  Donc,

$$|\langle x,y\rangle| \leq \| y \| .$$

- Si $x \neq 0$, alors $z = \frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc par ce qui précède on a :

$$|\langle z,y\rangle| \leq \| y \|,$$

  et en multipliant de part et d'autre par $\| x \|$ on obtient l'inégalité.
- Pour le cas d'égalité. Il est évident que si x et y sont liés alors il y a égalité. Réciproquement, s'il y a égalité soit $x = 0$ auquel cas x et y sont évidemment liés, soit $x \neq 0$ et alors

$$0 = \| y - \langle z,y\rangle z \|^2,$$

  où $z = \frac{x}{\|x\|}$. Par définition d'un produit scalaire, cela implique que

$$y = \langle z,y\rangle z = \langle z,y\rangle \frac{1}{\| x \|} x.$$

  Ainsi, x et y sont liés. ■

Si E est un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que la quantité $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$ est comprise entre -1 et 1. En particulier, il existe un unique $\theta(x,y) \in [0,\pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\| x \| \| y \|}.$$

Définition 1.5

Le réel $\theta(x,y)$ définit ci-dessus est appelé l'angle (non-orienté) entre les vecteurs x et y.

Corollaire 1.2 (*Inégalité triangulaire, Inégalité de Minkowski*)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, pour tout $x, y \in E$,

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Démonstration : On a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \| x \|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| . \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2. \end{aligned}$$

■

On va maintenant définir une notion générale permettant de donner une longueur aux vecteurs.

Définition 1.6

Une norme *sur un espace vectoriel est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. *$N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,*

2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Remarque(s) : 1. D'après ce qui précède, la norme $\| \,.\, \|$ associée à un produit scalaire est une norme au sens de la définition éféf.

2. Le troisième point de la définition éféf signifie que la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est plus grande que la longueur du troisième côté.

Proposition 1.3 (*Identité du parallélogramme*)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, pour tout $x, y \in E$, on a

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

La preuve de cette identité est immédiate, il suffit de développer le membre de gauche.

Remarque(s) : 1. Cette égalité signifie que la somme des carrés des côtés du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

2. Il existe des normes qui ne sont pas associées à des produits scalaires.

Exemple 1.3

Considérons $\mathbb{R}^n$ muni de la norme (le vérifier) : $\| (x_1, \ldots, x_n) \|_\infty := \max |x_i|$.
Alors, pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, \ldots, 0, 1)$, on a

$$\| x+y \|_\infty^2 + \| x-y \|_\infty^2 = 2 \neq 2(\| x \|_\infty^2 + \| y \|_\infty^2) = 4.$$

Lorsque E est de dimension finie, on peut exprimer un produit scalaire sous forme matricielle.

Définition 1.7

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E et soit $e = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E. On appelle matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans ma base e la matrice M donnée par

$$M_{i,j} = \langle\, e_i, e_j \,\rangle.$$

Proposition 1.4

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie. Soit M la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans une base e. On a :

- *si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base e, alors $\langle X, Y \rangle = {}^t\bar{X} M Y$.*
- ${}^t\bar{M} = M$.

Démonstration :

- Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. D'après une proposition précédente,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j \langle e_i, e_j \rangle,$$

et un calcul montre que le terme de droite vaut bien ${}^t\bar{X} M Y$.

- Comme, $M_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$ et que le produit scalaire est hermitien, on a :

$$\overline{M}_{j,i} = \overline{\langle e_j, e_i \rangle} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

■

1.3 Orthogonalité

Dans toute la suite, on considère un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Définition 1.8

1. *Deux vecteurs x et y de E sont* orthogonaux *si $\langle x, y\rangle = 0$. On note $x \perp y$.*
2. *Deux parties A et B de E sont* orthogonales *si*
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \langle a, b\rangle = 0.$$
On note $A \perp B$.
3. *L'*orthogonal *d'une partie A de E est le sous-espace vectoriel $A^\perp$ défini par*
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A\ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.5

Soient A et B deux parties de E. Alors

1. $A \cap A^\perp = \{0\}$. *En particulier,* $E^\perp = \{0\}$.
2. $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
4. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Démonstration : 1. Soit $a \in A \cap A^\perp$. Par définition de $A^\perp$, on a $\langle a, a\rangle = 0$. Ainsi $a = 0$.

2. Soient $a \in A$ et $x \in A^\perp$. Alors, par définition, $\langle a, x\rangle = 0$. Ceci étant vrai quelque soit $x \in A^\perp$, on en conclut que $a \in (A^\perp)^\perp$.
3. Soit $x \in B^\perp$. Pour tout $b \in B$, on a $\langle x, b\rangle = 0$. En particulier, comme $A \subset B$, pour tout $a \in A$ on a $\langle x, a\rangle = 0$. Donc $x \in A^\perp$.
4. D'après le point précédent, on a $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. Soit maintenant $x \in A^\perp$ et soit $u \in \mathrm{Vect}(A)$. Alors, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Alors,
$$\langle x, u\rangle = \lambda_1\langle x, a_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle x, a_n\rangle = 0,$$
d'où l'autre inclusion. ■

Remarque(s) : 1. Le premier point de la proposition précédent montre que si F est un sous espace vectoriel, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.

2. Cependant, cette somme n'est pas nécessairement égale à E et, de même, F et $F^{\perp\perp}$ ne sont pas nécessairement égaux comme le montre l'exemple suivant (nous verrons toutefois qu'en dimension finie, il y a égalité dans les deux cas).

Exemple 1.4

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$
On considère le sous-espace vectoriel propre H constitué des éléments de E s'annulant en zéro. Montrons que $H^\perp = \{0\}$. En particulier, on aura $H^{\perp\perp} = E \neq H$ et $H \oplus H^\perp \neq E$.

Soit $g \in H^{\perp}$ et considérons $h : t \mapsto tg(t)$. Alors h appartient à H et par conséquent

$$0 = \langle g, h \rangle = \int_0^1 tg(t)^2 dt.$$

Puisque $t \mapsto tg(t)^2$ est positive d'intégrale nulle, on en déduit que $tg(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier, si $t > 0$ alors $g(t) = 0$ puis par continuité, g est identiquement nulle.

Définition 1.9

Une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite

- orthogonale *si pour $i \neq j$ on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$,*
- normée *si pour tout $i \in I$, on a $\| v_i \| = 1$.*

Une famille orthogonale et normée est dite orthonormée. *Dans le cas où c'est aussi une base, on parle de base orthonormée, souvent abrégé par BON.*

Proposition 1.6 (*Théorème de Pythagore*)

Soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale dans un espace préhilbertien. Alors,

$$\| \sum_{i \in I} v_i \|^2 = \sum_{i \in I} \| v_i \|^2 .$$

Démonstration : Cela découle de la Proposition 1.2. ■

Remarque(s) : Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dispose de la réciproque du théorème de Pythagore : si $\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + \| w \|^2$ alors v et w sont orthogonaux. En effet,

$$\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + 2\langle v, w \rangle + \| w \|^2 .$$

Cependant, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce n'est plus vraie puisque

$$\| v + w \|^2 = \| v \|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w \rangle + \| w \|^2 .$$

Exemple 1.5

Dans $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique, considérons $x = (1, 1-i)$ et $y = (i, 1+i)$. Alors,

$$\| x \|^2 + \| y \|^2 = 6 = \| x + y \|^2$$

alors que

$$\langle x, y \rangle = 3i.$$

Proposition 1.7

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale d'un espace préhilbertien E formée de vecteurs non nuls, alors elle est libre.

Démonstration : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $i_1, \ldots, i_n \in I$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = 0.$$

Alors, pour tout $p = 1, \ldots, n$, on a

$$\lambda_{i_p} \| e_{i_p} \|^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}, e_{i_p} \rangle = 0,$$

donc $\lambda_{i_p} = 0$. ∎

1.4 Sous-espaces de dimension finie

Définition 1.10

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un espace euclidien*.*
Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est appelé un espace hermitien*.*

Théorème 1.2 (*Orthonormalisation de Gram-Schmidt*)

Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ un famille libre de E. Il existe une unique famille orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ telle que pour tout $p \leq n$,

(i) $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$,

(ii) $\langle e_p, f_p \rangle > 0$.

Démonstration : On construit $f_1, \dots, f_n$ par récurrence.

- le vecteur f_1 doit être unitaire, colinéaire à e_1 et vérifier $\langle e_1, f_1 \rangle > 0$, par conséquent on a nécessairement $f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$.
- Soit $p < n$ et supposons $f_1, \dots, f_p$ construits. Comme f_{p+1} doit satisfaire la première condition, on le cherche dans l'espace vectoriel
$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \oplus \text{Vect}(e_{p+1}).$$
En particulier, on cherche f_{p+1} sous la forme
$$f_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \mu e_{p+1}.$$
Remarquons que $\mu \neq 0$ (car sinon $(f_1, \dots, f_{p+1})$ n'est pas libre donc pas orthogonale). La condition f_{p+1} orthogonal à f_i pour $i \leq p$ impose que
$$\lambda_i = -\mu \langle f_i, e_{p+1} \rangle,$$
d'où l'on tire :
$$f_{p+1} = \mu \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_{p+1} \rangle f_i \right).$$
Enfin, les conditions $\| f_{p+1} \| = 1$ et $\langle e_{p+1}, f_{p+1} \rangle > 0$ imposent la valeur de μ :
$$\mu = \frac{1}{\| e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_{p+1} \rangle f_i \|}.$$
Réciproquement, on vérifie qu'ainsi défini, f_{p+1} satisfait bien les conditions requises. ∎

En conséquence,

Corollaire 1.3

Dans un espace euclidien (resp. hermitien), toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée. En particulier, tout espace euclidien (resp. hermitien) possède une base orthonormée.

Remarque(s) : Il est important de savoir refaire l'algorithme de Gram-Schmidt : en pratique pour déterminer une BON d'un espace euclidien (ou d'un sous-espace de dimension fini d'un espace préhilbertien), on part d'une base et on utilise ce procédé d'orthonormalisation.

Exemple 1.6

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soient $e_1 = (3,4,0)$, $e_2 = (5,0,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ et déterminons la base orthonormée associée.

On commence par normaliser e_1 pour obtenir $f_1 = \frac{1}{\|e_1\|}e_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. Ensuite on cherche f_2 sous la forme $f_2 = \mu(e_2 - \lambda f_1)$ avec $\mu \neq 0$. Comme f_1 et f_2 doivent être orthogonaux, on a

$$0 = \langle f_1, f_2 \rangle = \mu(\langle f_1, e_2 \rangle - \lambda),$$

donc $\lambda = \langle f_1, e_2 \rangle$. Puis, pour normaliser f_2 on prend $\mu = \frac{1}{\|e_2 - 3f_1\|} = \frac{1}{4}$. On obtient $f_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$.

Pour f_3, on peut procéder de même en cherchant f_3 sous la forme $\mu(e_3 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2)$. On peut aussi remarquer que e_3 est normé et orthogonal à f_1 et f_2. Par unicité on a donc $f_3 = e_3$.

Proposition 1.8

Soit E un espace préhilbertien de dimension finie et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x, y \in E$ se décomposant en

$$x = \sum_{i)1}^{n} x_i e_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

On a alors

(i) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$,

(ii) $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$,

(iii) $x_i = \langle e_i, x \rangle$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

En particulier, la matrice du produit scalaire dans cette base est l'identité.

On va maintenant voir qu'en dimension finie, on peut préciser la Proposition 1.5 (voir Remarque 1.3).

Proposition 1.9

Soit E un espace préhilbertien (pas nécessairement de dimension finie) et soir $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors,

1. $E = F \oplus F^\perp$,
2. $F = F^{\perp\perp}$.

Démonstration : Comme F est de dimension finie, on peut considérer une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de F.

1. D'après la Proposition 1.5, on sait déjà que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Soit $v \in E$ et posons $v_F = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, v \rangle e_i \in F$ et $v_\perp = v - v_F$. Alors,
$$v = v_F + v_\perp$$
et pour tout i on a
$$\langle e_i, v_\perp \rangle = \langle e_i, v \rangle - \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, v \rangle \langle e_i, e_k \rangle = 0.$$
Ainsi $v_\perp \in F^\perp$.
2. D'après la Proposition 1.5, il suffit de montrer que $F^{\perp\perp}$ est inclus dans F. Soit $v \in F^{\perp\perp}$. D'après le point précédent, $v = v_\perp + v_F$ avec $v_\perp \in F^\perp$ et $v_F \in F$. Or
$$0 = \langle v, v_\perp \rangle = \| v_\perp \|^2 + \langle v_F, v_\perp \rangle = \| v_\perp \|^2 .$$

Ainsi, $v_\perp = 0$ et $v = v_F \in F$. ∎

2 Dual

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $a \in E$ on définit

$$\begin{aligned} \phi_a : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle. \end{aligned}$$

Comme un produit scalaire est linéaire à droite, ϕ_a est une forme linéaire pour tout $a \in E$.

Proposition 2.1

L'application Φ de E dans son dual E^* qui a a associe ϕ_a est semi-linéaire et injective.

Démonstration : Soient a et b deux vecteurs de E et λ, μ deux scalaires. Alors, par semi-linéarité à gauche du produit scalaire, on a pour tout $x \in E$

$$\phi_{\lambda a + \mu b}(x) = \langle \lambda a + \mu b, x \rangle = \overline{\lambda}\phi_a(x) + \overline{\mu}\phi_b(x).$$

Ainsi $\Phi(\lambda a + \mu b) = \overline{\lambda}\Phi(a) + \overline{\mu}\Phi(b)$.

De plus, si $a \in \ker \Phi$, alors ϕ_a est nulle. En particulier, $\phi_a(a) = 0 = \| a \|^2$. D'où l'injectivité. ■

Proposition 2.2

Si E est de dimension finie, alors Φ est surjective.

Démonstration : Soit $\phi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Si ϕ est nulle, il n'y a rien à faire. Sinon, $H = \ker \phi$ est un hyperplan. Puisque E est de dimension finie, on a $E = H \oplus H^\perp$. En particulier, $H^\perp$ est de dimension 1. Soit $b \in H^\perp$ un vecteur unitaire et posons $a = \overline{\phi(b)}b$. Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda a + h$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi

$$\phi(x) = \lambda\phi(a) + \phi(h) = \lambda\phi(a) = \lambda|\phi(b)|^2,$$

et

$$\langle a, x \rangle = \lambda \langle a, a \rangle = \lambda |\phi(b)|^2.$$

Donc $\phi = \Phi(b)$. ■

La surjectivité n'est pas vraie en dimension infinie.

Exemple 2.1

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Considérons la forme linéaire $\phi : f \in E \mapsto f(0)$. Supposons qu'il existe $g \in E$ telle que $\phi(f) = \langle g, f \rangle$ pour tout f. En particulier, pour $f : t \mapsto tg(t)$, on a

$$0 = \phi(f) = \langle g, f \rangle = \int_0^1 tg(t)^2 dt.$$

Par continuité de g, cela entraîne que g est nulle. Mais alors, ϕ est nulle, ce qui est absurde. Donc ϕ n'est pas dans l'image de Φ.

3 Endomorphismes des espaces préhilbertiens et euclidiens

3.1 Adjoints d'un endomorphisme

Définition 3.1

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien. Deux endomorphismes f et g sont dits adjoint *si pour tout x, y dans E on a*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

Remarque(s) :

1. Si on fixe un endomorphisme f, il existe au plus un endomorphisme g tel que f et g soient adjoints. En effet, s'il en existe deux g_1 et g_2, alors pour tout x, y on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g_1(y)\rangle = \langle x, g_2(y)\rangle,$$

donc $g_1(y) - g_2(y)$ appartient à $E^{\perp} = \{0\}$ pour tout y. Lorsqu'il existe, on l'appelle l'adjoint de f et on le note f^*.

2. Dans un espace préhilbertien, un endomorphisme ne possède pas toujours d'adjoint.

Exemple 3.1

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

L'endomorphisme

$$\begin{aligned} \phi : &E \longrightarrow E \\ &f \longmapsto f - f(0) \end{aligned}$$

ne possède pas d'adjoint.

Cependant, en dimension finie, il n'y a pas de cas pathologique.

Théorème 3.1

Soit E un espace euclidien (ou hermitien). Alors tout endomorphisme de E possède un adjoint.

Démonstration : Soit f un endomorphisme de E et soit $a \in E$. L'application $\psi_a : x \mapsto \langle a, f(x)\rangle$ est une forme linéaire donc d'après la Proposition 2.2, il existe un unique vecteur, noté $f^*(a)$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\langle a, f(x)\rangle = \langle f^*(a), x\rangle,$$

ou encore

$$\langle f(x), a\rangle = \langle x, f^*(a)\rangle.$$

On définit donc une application de E dans E par $a \mapsto f^*(a)$. Montrons que cette application est linéaire : soient $a, b \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Pour tout $z \in E$ on a

$$\begin{aligned} \langle f(x), \lambda a + \mu b\rangle &= \lambda\langle f(x), a\rangle + \mu\langle f(x), b\rangle \\ &= \lambda\langle x, f^*(a)\rangle + \mu\langle x, f^*(b)\rangle \\ &= \langle x, \lambda f^*(a) + \mu f^*(b)\rangle. \end{aligned}$$

Par unicité, on en déduit donc que $f^*(\lambda a + \mu b) = \lambda f^*(a) + \mu f^*(b)$. ■

Proposition 3.1

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien (resp hermitien). Si M désigne la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ alors la matrice de f^* dans cette base est ${}^tM$ (resp ${}^t\overline{M}$).

Démonstration : 1. Méthode 1 : soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON et soit $M = (m_{ij})$ la matrice de f dans cette base et N celle de f^*. On a, par définition,

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj}e_k \text{ et } f^*(e_i) = \sum_{k=1}^{n} n_{ki}e_k$$

donc puisque la base est orthonormée,

$$\overline{m}_{ij} = \langle f(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, f^*(e_i)\rangle = n_{ji}.$$

2. Méthode 2 : la matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$ est l'identité. Si X et Y désigne les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$ alors, d'après la Proposition 1.4, on a

$$\langle f(x), y\rangle =^t (\overline{MX})Y =^t \overline{X}({}^t\overline{M}Y) = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

■

Remarque(s) : Attention, si la base $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormale, la matrice de l'adjoint n'est en général pas l'adjoint de la matrice.

Exemple 3.2

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique et on considère l'application $f : (x, y) \mapsto (x, x + y)$. Son adjoint est l'application $f^* : (u, v) \mapsto (u + v, v)$. En effet,

$$\langle f(x, y), (u, v)\rangle = xu + (x + y)v = x(u + v) + yv = \langle (x, y), (u + v, v)\rangle.$$

Or, il est facile de voir que la matrice de f et f^* dans la base $(e_1, e_1 + e_2)$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1

Pour tout endomorphisme f d'un espace euclidien (resp hermitien) la trace et le déterminant de f^* sont égaux à ceux de f.

En utilisant la forme matricielle, il est facile de voir que :

Proposition 3.2

Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et soient f, g des endomorphismes. $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

1. $(\lambda f + \mu g)^* = \overline{\lambda} f^* + \overline{\mu} g^*$.
2. $(f^*)^* = f$.
3. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
4. *si f est un automorphisme, alors* $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Proposition 3.3

Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et f un endomorphisme de E. Alors,

$$\ker f^* = (\mathrm{Im} f)^{\perp} \text{ et } \mathrm{Im}(f^*) = (\ker f)^{\perp}.$$

Démonstration : Soit $x \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} x \in \ker f^* \iff f^*(x) = 0 &\iff \forall y \in E \langle y, f^*(x) \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in E \langle f(y), x \rangle = 0 \\ &\iff x \in (\mathrm{Im}(f))^\perp, \end{aligned}$$

cela donne la première égalité. En remplaçant f par f^* dans cette égalit", on trouve

$$\ker f = (\mathrm{Im} f^*)^\perp,$$

ce qui fournit la seconde égalité en passant à l'orthogonal (car E est de dimension finie). ■

Corollaire 3.2

Si E est euclidien (ou hermitien), le rang de f et de f^* sont égaux.

Proposition 3.4

Soit E un espace euclidien (ou hermitien) et f un endomorphisme. Alors un sous-espace F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Démonstration : On suppose F stable par f. Soit $x \in F^\perp$; pour tout $y \in F$, on a

$$\langle y, f^*(x) \rangle = \langle f(y), x \rangle = 0,$$

puisuqe $f(y) \in F$. Donc $f^*(x)$ appartient à $F^\perp$.

Réciproquement, si f^* stabilise $F^\perp$ alors par ce qui précède $f = (f^*)^*$ stabilise $(F^\perp)^\perp = F$. ■

Remarque(s) : En particulier, les hyperplans stable par f sont les orthogonaux des droites stables par f^* ; cela permet de déterminer simplement les hyperplans stables.

Exemple 3.3

Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.2 Projection

Définition 3.2

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie. On a vu que F et $F^\perp$ sont supplémentaires. On appelle projection orthogonale sur F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 3.5

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de F alors la projection orthogonale sur F d'un vecteur x s'écrit :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x_i \rangle e_i.$$

Démonstration : Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + y,$$

avec $y \in F^\perp$. On vérifie facilement que $\langle e_i, x\rangle = x_i$ puis :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x_i\rangle p_F(e_i) + p_F(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x_i\rangle e_i.$$

■

Définition 3.3

Soit $x \in E$ et A une partie de E. On appelle distance de x à A le nombre réel :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \| x - y \| .$$

Proposition 3.6

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie. La projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x est l'unique vecteur de F réalisant la distance de x à F. C'est-à-dire :

$$y = p_F(x) \iff y \in F \text{ et } d(x, F) = \| x - y \| .$$

De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de F, alors :

$$d(x, F) = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2}.$$

Démonstration : Soit $y \in F$, alors

$$x - y = x - p_F(x) + p_F(x) - y$$

et $x - p_F(x) \in F^\perp$, $p_F(x) - y \in F$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\| x - y \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - y \|^2 \geq \| x - p_F(x) \|^2,$$

avec égalité si et seulement si $\| p_F(x) - y \|^2 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $y = p_F(x)$.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x_i\rangle e_i$ et par le théorème de Pythagore on a $\| x \|^2 = \| x - p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) \|^2$. Donc :

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \| = \sqrt{\| x \|^2 - \| p_F(x) \|^2} = \sqrt{\| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2}.$$

■

Remarque(s) : Dans le procédé de Gram-Schmidt, si $F_n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors, $f_{n+1} = \frac{e_{n+1} - p_{F_n}(e_{n+1})}{\|e_{n+1} - p_{F_n}(e_{n+1})\|}$.

Exemple 3.4

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, soir F le sous-espace vectoriel défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Calculer la distance de $a = (1, 1, 1, 3)$ à F.

Remarquons que $(x,y,z,t) \in F \iff x+z=0$ et $y+t=0$. Les vecteurs $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$ forment donc une BON de F. Du coup,

$$p_F(a) = \langle e_1, a\rangle e_1 + \langle e_2, a\rangle e_2 = (0,-1,0,1),$$

et $d(a,F) = \sqrt{10}$.

Corollaire 3.3

Soient E un espace préhilbertien de dimension finie, $x \in E$ et H un hyperplan de E. Alors $H^\perp$ est une droite et pour tout $n \neq 0$ dans $H^\perp$, on a :

$$d(x,H) = \frac{|\langle n, x\rangle|}{\| n \|}.$$

Corollaire 3.4 (*Inégalité de Bessel*)

Soit E un espace préhilbertien et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée. Alors

$$\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leq \| x \|^2 .$$

Démonstration : Soit F l'espace vectoriel engendré par $e = (e_1, \dots, e_p)$; c'est un sous-espace de dimension finie dont e est une BON. Pour $x \in E$, on a donc :

$$\| p_F(x) \|^2 \leq \| p_F(x) \|^2 + \| x - p_F(x) \|^2 = \| x \|^2 .$$

Or,

$$\| p_F(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{p} |\langle e_i, x\rangle|^2.$$

■

3.3 Endomorphismes symétriques

Définition 3.4

Un endomorphisme f d'un espace préhilbertien E est dit autoadjoint ou symétrique s'il vérifie $f = f^*$.

L'identité et les homothéties sont autoadjoints. De plus, il est facile de voir que si f^* existe, alors $f^* \circ f$ est autoadjoint.

Proposition 3.7

Un endomorphisme d'un espace euclidien (ou hermitien) est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique (hermitienne).

Démonstration : En effet, si on note A la matrice de f dans une base orthonormée alors la matrice de f^* est ${}^t\overline{A}$. ■

Proposition 3.8

Dans un espace préhilbertien de dimension finie, un projecteur est autoadjoint si et seulement s'il est orthogonal.

Démonstration : Soit p un projecteur. Remarquons que p^* est aussi un projecteur. En effet,

$$p^* \circ p^* = (p \circ p)^* = p^*.$$

Par suite, $p = p^*$ si et seulement si p et p^* ont même noyau et même image. Or, $\mathrm{Im}(p^*) = (\ker p)^\perp$ et $\ker p^* = \mathrm{Im}(p)^\perp$. Donc, $p = p^*$ si et seulement si $\mathrm{Im} p = (\ker p)^\perp$ si et seulement si p est orthogonal. ■

Exemple 3.5

Soit s une symétrie par rapport à un sous-espace F de direction G. Montrer que s^* est une symétrie. A quelle condition s est-elle autoadjointe ?

A partir de maintenant, on considère E un espace euclidien, c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Lemme 3.1

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

Démonstration : Soit A une matrice symétrique réelle de $M_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.

On considère sur $\mathbb{C}^n$ le produit scalaire canonique et on note

$$a = \langle X, AX \rangle =^t \overline{X} AX.$$

Puisque a est une matrice à un coefficient, elle est égale à sa transposé donc

$$a =^t X^t A \overline{X} =^t XA\overline{X}.$$

D'autre part,

$$\overline{a} =^t XA\overline{X}.$$

Ainsi, $a = \overline{a}$ donc a est réel. Enfin, puisque X est un vecteur propre pour λ, on a :

$$a = \langle X, AX \rangle = \lambda \langle X, X \rangle = \lambda \parallel X \parallel^2 .$$

Donc λ est réel. ■

Théorème 3.2 (*Théorème spectral*)

Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Alors il existe un base orthonormée de E constituée de vecteurs propres pour f. En particulier, f est diagonalisable et les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : On prouve l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres par récurrence sur la dimension de E. Si E est de dimension 1, le résultat est trivial car tout vecteur unitaire convient.

On suppose le résultat établi dans tout espace de dimension inférieure ou égale à $n-1$ où $n \geq 2$. Soit E un espace euclidien de dimension n. On considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et on note A la matrice de f dans cette base. La matrice A est donc symétrique réelle (puisque f est autoadjoint) et ses valeurs propres sont réelles ; ce sont donc des valeurs propres de f.

Soit λ une valeur propre de f et E_λ le sous-espace propre associé. Si $E = E_\lambda$ alors $f = \lambda id_E$ et le résultat est trivial. Sinon, on considère $E_\lambda^\perp$. D'après la proposition 1.9, $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$ et d'après la proposition 3.4, $E_\lambda^\perp$ est stable par $f = f^*$.

Il est clair que f in duit un endomorphisme autoadjoint de $E_\lambda^\perp$. Comme E_λ est de dimension au moins 1, $E_\lambda^\perp$ est de dimension au plus $n-1$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de f à $E_\lambda^\perp$: il existe une base orthonormée de $E_\lambda^\perp$ formée de vecteurs propres pour

f. En complétant cette base par une base orthonormée de E_λ on obtient une base de E avec la propriété souhaitée.

Enfin, soient λ et μ deux valeurs propres distinctes et soit $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$. Alors

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Cela implique que $\langle x, y\rangle = 0$. Donc E_λ et E_μ sont orthogonaux. ■

3.4 Isométries

Définition 3.5

Soit E un espace préhilbertien. On appelle endormorphisme orthogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou isométrie) et endomorphisme unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ tout endomorphisme f de E qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

En fait, il suffit qu'un endomorphisme préserve la norme pour être orthogonal. Cela découle de l'expression polaire d'un produit scalaire (voir proposition 1.1).

Proposition 3.9

Un endomorphisme de E est orthogonal ou unitiaire si et seulement s'il préserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E,\ \| f(u) \| = \| u \| .$$

Remarque(s) : En fait, il n'est même pas nécessaire de supposer que f est linéaire. En effet, un application f de E dans E est nécessairement linéaire.

Démonstration : Soit H l'espace vectoriel engendré par $\mathrm{Im}(f)$. Soient $x, y \in E$. On a pour tout z :

$$\langle f(x+y) - f(x) - f(y), f(z)\rangle = 0,$$

donc $f(x+y) - f(x) - f(y) \in H \cap H^\perp$ ce qui montre que f est additive. L'homogénéité se démontre de la même façon. ■

Exemple 3.6

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Soit p_F la projection orthogonale sur F et $s_F = 2p_F - id$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors s_F est une isométrie. En effet, comme $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ sont orthogonaux pour tout x, on a :

$$\| s_F(x) \|^2 = \| p_F(x) \|^2 + \| p_F(x) - x \|^2 = \| x \|^2 .$$

Exemple 3.7

Si F est un hyperplan et u un vecteur directeur de $F^\perp$ alors

$$s_F(x) = x - 2\langle u, x\rangle u.$$

Proposition 3.10

Dans un espace préhilbertien, tout endomorphisme orthogonal est injectif. En particulier, *en dimension finie, les endormorphismes orthogonaux sont des automorphismes.*

Démonstration : Puisque $\| f(x) \| = \| x \|$, f est injective. ■

Théorème 3.3

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Alors f est orthogonale si et seulement si l'image par f d'une (ou de toute) base orthonormée est une base orthonormée.

Démonstration : Supposons f orthonormée et soit $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Donc la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est orthonormée. D'après la proposition 3.10, c'est aussi une base.

Supposons que f transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en une base orthonormée. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in E$. Alors, par Pythagore

$$\| f(u) \|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} u_i f(e_i) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 = \| u \|^2 .$$

Donc f est orthogonale. ■

Théorème 3.4

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée d'un espace euclidien ou préhilbertien de dimension n et soit A la matrice d'un endomorphisme f dans cette base. Alors f est orthogonal si et seulement si ${}^t\overline{A}A = I_n$.

Démonstration : Posons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A ; C_i est donc la colonne des coordonnées de $f(e_i)$ dans $\mathcal{B}$. Ainsi, le produit scalaire $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle$ est égale au produit ${}^t\overline{C}_i C_j$ qui n'est autre que le coefficient d'indice i, j de la matrice ${}^t\overline{A}A$. Par conséquent, f est orthogonal si et seulement si ${}^t\overline{A}A = I_n$. ■

Définition 3.6

Une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle vérifie ${}^tAA = I_n$.

Une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si elle vérifie ${}^t\overline{A}A = I_n$.

Corollaire 3.5

Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1. Le déterminant d'un endomorphisme orthognale d'un espace euclidien vaut 1 ou -1.

Remarque(s) : Attention, la réciproque est fausse : la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a déterminant égale à 1 mais n'est pas orthogonale.

Corollaire 3.6

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que

$$A = {}^t PDP.$$

4 Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Dans toute la suite E est un espace préhilbertien de dimension finie.

4.1 Groupe orthogonal

Théorème 4.1

La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal. L'inverse d'un automorphisme orthogonal est aussi un automorphisme orthogonal.

Démonstration : Si f et g sont orthogonaux alors, pour tout $u \in E$, on a

$$\| f \circ g(u) \| = \| g(u) \| = \| u \| .$$

Par conséquent, $f \circ g$ est orthogonal.

De même, soit $v \in E$ tel que $f(v) = u$, alors

$$\| f^{-1}(u) \| = \| v \| = \| u \|,$$

donc f^{-1} est orthogonal. ∎

Corollaire 4.1

L'ensemble $O(E)$ des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition.

Définition 4.1

Un automorphisme orthogonal de déterminant 1 est appelé une rotation. L'ensemble des rotations de E forme un sous-groupe de $O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal et noté $SO(E)$.

Via la représentation matricielle en base orthonormée, on a

Définition 4.2

- *L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour le produit matricielle appelé le groupe orthogonal d'ordre n. On le note $O_n(\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 est un sous-groupe appelé le groupe spécial orthogonal d'ordre n. On le note $SO_n(\mathbb{R})$.*

4.2 Groupe orthogonal en dimension 2 et 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Alors, puisque ${}^tAA = I_2$, ses coefficients vérifient les équations :

$$\begin{cases} ac + bd = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, il existe $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\theta'$ et $d = \sin\theta'$.
De plus, la première équation donne $\cos(\theta - \theta') = 0$, donc $\theta' = \theta \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. Si $\det A = 1$, alors $ad - cb = 1$ ie $\sin(\theta' - \theta) = 1$. Dans ce cas $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

.

2. Si $\det A = -1$ alors $ad - cb = -1$ ie $\sin(\theta' - \theta) = -1$. Dans ce cas $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

.

Réciproquement, on vérifie que les matrices ci-dessus sont bien orthogonales. Ainsi :

Théorème 4.2

— *Le groupe orthogonal d'ordre* 2 *est constitué des matrices* $A_2^+(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *et* $A_2^-(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ *où* $\theta \in [0, 2\pi[$.

— *Le groupe spécial orthogonal d'ordre* 2 *est constitué des matrices* $A_2^+(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

Corollaire 4.2

Les matrices spéciales orthogonales en dimension 2 sont les matrices de rotation. Les matrices orthogonales indirectes sont les symétries orthogonales par rapport à des droites.

Démonstration : La première partie est évidente. Pour la seconde partie, on remarque que le polynôme caractéristique de $A_2^-(\theta)$ est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Donc $A_2^-(\theta)$ est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}. Comme $A_2^-(\theta)$ est orthogonale c'est une symétrie orthogonale. Inversement toute symétrie orthogonale par rapport à une droite est de cette forme. ■

Remarque(s) :

$$^tA_2^+(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_2^+(\theta) = A_2^-(-2\theta).$$

Proposition 4.1

Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, *on a* $A_2^+(\theta + \theta') = A_2^+(\theta)A_2^+(\theta')$. *En particulier, on a un isomorphisme de groupes*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow SO_2(\mathbb{R}) \\ e^{i\theta} &\longmapsto A_2^+(\theta) \end{aligned}$$

Traitons maintenant le cas de la dimension 3.

Théorème 4.3

— *Les isométries directes de l'espace sont les rotations d'angle* θ *autour d'un axe. Il existe une base orthonormée dans laquelle leur matrice est de la forme*

$$A_3^+(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le premier vecteur de la base dirige l'axe de la rotation. Lorsque $\theta = \pi$, *on parle de retournement : c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

— *Pour les isométries indirectes de l'espace, il existe une une base orthonormée dans laquelle leur matrice est de la forme*

$$A_3^-(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\theta = 0$, on parle de reflexion : c'est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Lemme 4.1

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démonstration : Soit $v \in F^\perp$. On cherche à montrer que $f(v) \in F^\perp$. Puisque f stabilise F, $f_{|F}$ est un automorphisme de F. Ainsi pour $x \in F$, il existe $y \in F$ tel que $f(y) = x$. Par conséquent,

$$\langle f(v), x\rangle = \langle f(v), f(y)\rangle = \langle v, y\rangle = 0.$$

Donc $f(v) \in F^\perp$. ∎

Démonstration du théorème : Soit f un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$. Son polynôme caractéristique est de degré 3 donc possède une racine réelle par le théorème des valeurs intermédiaires. Par conséquent, f possède une valeur propre réelle λ. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ un vecteur propre, alors

$$\lambda^2\langle x, x\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle.$$

Ainsi, $\lambda^2 = 1$. Soit e_1 un vecteur propre normé. Comme f stabilise $F = \text{Vect}(e_1)$, d'après le lemme f stabilise aussi $F^\perp$. Donc, $f_{|F^\perp}$ est un automorphisme orthogonal de $F^\perp$ qui est un espace vectoriel de dimension 2. D'après l'étude faite en dimension 2, la matrice de $f_{|F^\perp}$ dans une base orthonormée de $F^\perp$ est de la forme $A_2^\pm(\theta)$ pour un certain θ.

- Si $\lambda = 1$.
  - Si elle est de la forme $A_2^+(\theta)$, alors dans la base (e_1, e_2, e_3) où (e_2, e_3) est une BON de $F^\perp$, la matrice de f est $A_3^+(\theta)$.
  - Si elle est de la forme $A_2^-(\theta)$, alors d'après le corollaire, il existe une base $(e_2, e3)$ de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $f_{|F^\perp}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la matrice de f dans la base (e_3, e_2, e_1) est $A_3^-(0)$.
- Si $\lambda = -1$.
  - Si elle est de la forme $A_2^+(\theta)$, alors dans la base (e_1, e_2, e_3) où (e_2, e_3) est une BON de $F^\perp$, la matrice de f est $A_3^-(\theta)$.
  - Si elle est de la forme $A_2^-(\theta)$, alors d'après le corollaire, il existe une base $(e_2, e3)$ de $F^\perp$ dans laquelle la matrice de $f_{|F^\perp}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la matrice de f dans la base (e_2, e_3, e_1) est $A_3^+(\pi)$. ∎

Méthode pour déterminer les éléments caractéristiques d'une matrice orthogonale en dimension 3. Étant donné une matrice orthogonale M. On commence par calculer son déterminant.

- Si le déterminant vaut 1, M est une rotation autour d'un axe.
  1. On cherche l'axe de la rotation en résolvant $MX = X$. On trouve une droite vectorielle dirigée par un vecteur u.
  2. On détermine l'angle (modulo 2π) au signe près grâce à la formule $Tr(M) = 1 + 2\cos\theta$.
  3. Pour déterminer le signe de θ, on choisit un vecteur v orthogonal à u et on calcul le déterminant de (u, v, Av). Si le déterminant est positif, alors on peut prendre $\theta \in [0, \pi]$, sinon on prend $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

— Si le déterminant vaut -1.

1. On cherche un vecteur propre u pour la valeur propre -1 en résolvant $MX = -X$.
2. On détermine l'angle (modulo 2π) au signe près grâce à la formule $Tr(M) = 2\cos\theta - 1$.
3. Pour déterminer le signe de θ, on choisit un vecteur v orthogonal à u et on calcul le déterminant de (u, v, Av). Si le déterminant est négatif, alors on peut prendre $\theta \in [0, \pi]$, sinon on prend $\theta \in [\pi, 2\pi]$.