Exercice 2

1) $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $v_n = o(1)$. Ainsi $v_n = o(u_n)$

2) Par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^8}{n^7} = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

3) Comme $\frac{2}{e} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

4) Comme $\frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $u_n = o(v_n)$

5) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$

Ainsi aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.

6) $\forall n \geq 1$, $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{n^n} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}}$. Or par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}} = 1$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \times 1 = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

7) $\forall n \geq 1$, on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n e^{n/2}}{\ln(n) e^n} = \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{n}{e^{n/2}}$$

Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \times 0 = 0$ donc $v_n = o(u_n)$.

8) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = e^{-2} \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = e^2 \neq 0$ donc aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.

9) $\forall n \geq 1$, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n} \times \ln n}{n} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Donc par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Ainsi $u_n = o(v_n)$.

10) Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ donc $u_n = o(v_n)$

11) $\forall n \geq 0$ on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{n^2 \ln 2}} = e^{\sqrt{n}\ln(n) - n^2\ln 2} = e^{n^2\left(\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2} - \ln 2\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2} = 0$ donc

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2} - \ln 2\right) = -\ln 2 < 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2} - \ln 2\right) = -\infty$ puis, par composition des limites :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Donc $v_n = o(u_n)$

12) $\forall n \geq 1$, on a $u_n = e^{\ln(n) \times \ln(n)}$ et $v_n = e^{n\ln(\ln(n))}$

donc $\frac{u_n}{v_n} = e^{-n\ln(\ln(n)) + \ln(n)^2} = e^{n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right)}$

Par croissance comparée et composition des limites on a :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right) = -\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Ainsi $u_n = o(v_n)$.