Exercice 1 (22 pts)

Partie I

1. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul montre que :

$$PQ = QP = I_3.$$

   Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   1 pt

2. On trouve :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   2 pts

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -8 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} = aA + bB + cP \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2a+b+c & = & 6 \\ a-b+c & = & -2 \\ -2a-b-c & = & -6 \\ -3b-c & = & -8 \\ -3b & = & -9 \\ 3a+3b+c & = & 14 \\ a-b-c & = & 0 \\ -a+b & = & 1 \\ 5a+b+c & = & 12 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 3 \\ a & = & 2 \\ c & = & -1 \end{array} \right.$$

   Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -8 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} = 2A + 3B - P.$$

   Donc, cette matrice est bien combinaison linéaire de A, B et P.

   2pts

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $P^{-1}A = D_1P^{-1}$ et $P^{-1}B = D_2P^{-1}$ alors on a :

$$\begin{aligned} Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n. \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

   2pts

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \mathrm{Y}_{n+2} = \frac{1}{6}\mathrm{D}_1\mathrm{Y}_{n+1} + \frac{1}{6}\mathrm{D}_2\mathrm{Y}_n$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_{n+2} & = \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n \\ b_{n+2} & = \frac{1}{2}\ b_{n+1} \\ c_{n+2} & = \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n \end{array} \right.$$

1 pt

3. Un calcul donne :

$$\mathrm{Y}_0 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \mathrm{Y}_1 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1 pt

4. D'après les questions 2 et 3.
   - La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ et de premiers termes $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{9}{4}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Ainsi :

     $$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

     Comme $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$ alors :

     $$\left\{ \begin{array}{lll} a+b & = & 2 \\ a - \frac{b}{2} & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{lll} a & = & \frac{4}{3} \\ b & = & \frac{2}{3} \end{array} \right. .$$

     Ainsi :

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

     2 pts
   - La suite $(b_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $b_1 = 1$ donc :

     $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

     On vérifie que cette expression est aussi valable pour $n = 0$ d'où :

     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

     1 pt
   - La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ et de premiers termes $c_0 = 1$ et $c_1 = -1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{16}{9}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = 1$. Ainsi :

     $$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2\ \forall n \in \mathbb{N}\ c_n = a + b\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

     Comme $c_0 = 1$ et $c_1 = -1$ alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ a-\frac{b}{3} & = & -1 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{2} \\ b & = & \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

2 pts

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n - c_n \\ -a_n + b_n \\ -a_n + c_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{ll} \alpha_n & = \frac{11}{6} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \beta_n & = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \\ \gamma_n & = -\frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{array}\right.$$

2 pts

6. (a)

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
    B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
    for i=2:n
        Aux= 1/6*A*Xnew+1/6*B*Xold
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    end
    res=Xnew
endfunction
```

3 pts

(b) D'après la question 5, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{11}{6} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = -\frac{11}{6}.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond aux $\times$, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aux $\oplus$ et la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aux $\diamond$.

3 pts

Exercice 2 (17 pts)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La fonction f_n est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n'(x) = n + e^x > 0.$$

2 pts : 1 pt pour la dérivabilité, 1pt pour la dérivée

(b) D'après la question précédente, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc, par somme, on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} nx = +\infty \quad \text{car } n > 0.$$

D'autre part, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} nx = -\infty$ (car $n > 0$) donc par différence :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty.$$

2 pts : 1 pt pour les variations, 1pt pour les limites

(c) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante. D'après la question précédente, $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc, $0 \in f_n(\mathbb{R})$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par f_n, i.e, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution. On note u_n cette solution.

2 pts : 1 pt le théorème de la bijection réciproque ou le corrolaire du TVI parfaitement énoncé, 1pt la conclusion.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f_n(0) = -1 \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}.$$

1 pt

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par croissance stricte de f_n^{-1}, on a donc :

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

1 pt

(c) On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après la question précédente, on peut conclure par encadrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0.

1 pt

3. (a) Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 = f_n(u_n) = nu_n - e^{-u_n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$.

1 pt

(b) Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc, par composition et continuité de l'exponentielle en zéro, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 1.$$

En particulier, $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit :

$$\frac{e^{-u_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3 pts : 1 pt pour la limite, 1 pt pour l'équivalent de e^{-u_n} et un point pour l'équivalent de u_n

4. (a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = 0$.

Donc, par équivalent usuel, on a : $e^{-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$.

Par transitivité, on obtient alors : $e^{-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

Enfin, par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit :

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

3 pts

(b) D'après la caractérisation de l'équivalence et la question précédente, on a :

$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1 pt

Exercice 3 (21 pts)

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $0 \leqslant u_n < 1$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   - *Initialisation* : comme $u_0 = 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

     Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n < 1$. On a donc :

     $$0 \leqslant u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

     Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < 1.$$

   2 pts

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(1-u_n)^2}{2} \geqslant 0.$$

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   2 pts

   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.
   Comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ en est un point fixe. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\frac{x^2+1}{2} = x \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

   Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ admet comme unique point fixe 1 et par conséquent $\ell = 1$.
   3 pts

2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\
   &= \frac{1-u_n-1+u_{n+1}}{(1-u_n)(1-u_{n+1})} \\
   &= \frac{u_{n+1}-u_n}{(1-u_n)(1-\frac{u_n^2+1}{2})} \\
   &= \frac{(1-u_n)^2}{(1-u_n)(1-u_n^2)} \quad \text{(voir le calcul de la question 1.b)} \\
   &= \frac{(1-u_n)^2}{(1-u_n)^2(1+u_n)} \\
   &= \frac{1}{1+u_n}.
   \end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
   2 pts

(b) D'après la question 1.c on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Donc, par opérations sur les limites, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}.$$

1 pt

(c) En appliquant le résultat admis en début d'exercice avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}}-\frac{1}{v_j}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

1 pt

(d) Par télescopage, pour tout entier naturel n on a

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}}-\frac{1}{v_j}\right)=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_0}.$$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_0}}{n}=\dfrac{1}{2}$.

D'où, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{v_0}}{n}=0$, on tire :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{v_n}}{n}=\frac{1}{2}.$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{n}{2}}=2\times\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{v_n}}{n}=1.$$

Donc : $\dfrac{1}{v_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n}{2}$.

2pts

(e) Par la question précédente, on obtient en passant au quotient :

$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}.$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence cela donne :

$$1-u_n=v_n=\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$u_n=1-\frac{2}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2 pts

3. (a)

```
function u=suite(n)
    u = 0
    if n>0
        for k = 1:n
            u = (u^2+1)/2
        end
    end
endfunction
```

3 pts

(b)

```
n = 0
while 1-suite(n)>=10^(-3)
    n = n+1
end
disp(n)
```

3 pts

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si l'urne i contient toujours n boules au bout des n épreuves, si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'urne i n'est pas choisie à la $k^{\text{ième}}$ épreuve. Ainsi

1. (a) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si l'urne i contient toujours n boules au bout des n épreuves, si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'urne i n'est pas choisie à la $k^{\text{ième}}$ épreuve. Ainsi

$$(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k}.$$

Les choix des urnes étant indépendants, les événements $\left(\overline{U}_{i,k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. Donc :

$$P(X_i = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U}_{i,k}\right)$$

Or, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P\left(\overline{U}_{i,k}\right) = 1 - P\left(U_{i,k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

car les urnes sont équiprobables. Par conséquent :

$$P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

4 pts : 2 pt pour l'expression avec les $U_{i,k}$ (avec justification), 1 pt pour l'utilisation de l'indépendance, 1pt pour le calcul de $P(U_{i,k})$ et le résultat final

(b) Soient i et j deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$,. L'événement $[X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right]$ est réalisé si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ les urnes i et j ne sont pas choisies à l'étape k. Ainsi,

$$[X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}.$$

Les choix des urnes étant indépendants, les événements $\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. Donc :

$$P([X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right]) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right).$$

Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, les urnes étant équiprobables et les événements $U_{i,k}$ et $U_{j,k}$ étant disjoints on a :

$$P\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U_{j,k}}\right) = 1 - P\left(U_{i,k} \cup U_{j,k}\right) = 1 - P\left(U_{i,k}\right) - P\left(U_{j,k}\right) = 1 - \frac{2}{n}.$$

Par conséquent,

$$P\left([X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

3 pts : 1 pt pour l'utilisation de l'indépendance, 2pt pour le calcul et le résultat final

(c) On a

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 - \frac{2}{n} \geqslant 0 \quad \text{car} \quad n \geqslant 2.$$

Par croissance stricte de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

Soient i et j deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$. Alors

$$P([X_i = 1])P(\left[X_j = 1\right]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = P([X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right]).$$

En particulier, $P([X_i = 1])P(\left[X_j = 1\right]) \neq P([X_i = 1] \cap \left[X_j = 1\right])$ ce qui signifie que les événements $[X_i = 1]$ et $\left[X_j = 1\right]$ ne sont pas indépendants.

2pts : 1pt pour la comparaison, 1 pt pour en déduire la non indépendance

2. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable X_i est une variable de Bernoulli donc possède une espérance et

$$E(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

D'après le résultat rappelé au début de l'exercice, Y_n possède donc une espérance et

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

3pts : 1pt l'espérance des X_i, 1 pt pour utiliser le résultat rappeler au début de l'exercice, 1 pt pour le calcul correct

(b) Par conséquent, pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Or, d'après les équivalents usuels, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit, on obtient

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -1$ puis, par continuité de l'exponentielle en -1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n} = e^{-1}.$$

Comme $e^{-1} \neq 0$, cela signifie que $\frac{E(Y_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$. Par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit que

$$E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{-1}.$$

2pts pour la limite

1pt pour l'équivalent

3. (a) La variable aléatoire N_i compte le nombre de succès d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{n}$. Donc $N_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{n})$. Ainsi

$$E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1.$$

2 pts : 1pt pour reconnaître une loi binomiale (avec les bons paramètres et justification), 1 pt pour l'espérance.

(b) Si $N_i \neq 0$ alors c'est que l'urne i a été choisie au moins une fois.
Dans ce cas $X_i = 0$ et par conséquent $N_iX_i = 0$.
Si $N_i = 0$ alors $N_iX_i = 0$.
Par conséquent, $N_iX_i = 0$.
2 pts : 1 pt pour le premier cas de la disjonction, 1 pt pour le second.