Chapitre 6 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}dx$.
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}dt$.
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds$.

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(-t)dt$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Test 6 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ en posant $u = \ln(t)$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$, alors $1+t^2 \geqslant 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ on a :*
$$0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1.$$
En multipliant membre à membre par $t^n \geqslant 0$ on obtient :
$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n.$$
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les bornes étant dans l'ordre croissant, par croissance de l'intégrale on trouve :*
$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$
4. *Par le théorème d'encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $[e,3e]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout $x \in [e,3e]$, on a :*
$$\frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}.$$
On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction logarithme. Ainsi :
$$\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}dx = \left[\ln\left(\left|\ln(u)\right|\right)\right]_e^{3e} = \ln(1+\ln(3)).$$
2. *La fonction $t \mapsto e^{2t-1}$ est continue sur $[0,2]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, par linéarité de l'intégrale :*
$$\int_0^2 e^{2t-1}dt = \int_0^2 e^{2t}e^{-1}dt = e^{-1}\int_0^2 e^{2t}dt = e^{-1}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^2 = \frac{e^4-1}{2e}.$$
3. *La fonction $s \mapsto s(s^2+2)^2$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout $s \in [0,1]$ on a :*
$$s(s^2+3)^2 = \frac{1}{2}2s(s^2+3)^2.$$
On reconnaît une expression de la forme $\frac{1}{2}u' \times u^2$ où $u : s \mapsto s^2+3$. Donc
$$\int_0^1 s(s^2+3)^2ds = \frac{1}{2}\int_0^1 2s(s^2+3)^2ds = \frac{1}{2}\left[\frac{(s^2+3)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{37}{6}.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,x]$ et
$$\int_1^x \ln(t)dt = \int_1^x u'(t)v(t)dt.$$
Par intégration par parties, on trouve donc :
$$\int_1^x \ln(t)dt = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)dt = x\ln(x) - x + 1.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-a,a]$, donc l'intégrale est bien définie. De plus, par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)dt$ on effectue le changement de variable $s = -t$. Dans ce cas, $ds = -dt$ et on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-s) \times (-1)ds = -\int_{a}^{0} f(-s)ds = \int_{0}^{a} f(-s)ds.$$

Comme la variable d'intégration est une variable muette, on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt.$$

Comme f est impaire, pour tout $t \in [0, a]$ $f(-t) = -f(t)$. On en conclut :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Finalement,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une primitive F sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt = F(x^2) - F(-\sqrt{x}).$$

- La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme $x \mapsto x^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la composée $x \mapsto F(x^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la composée $x \mapsto F(-\sqrt{x})$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - \frac{-1}{2\sqrt{x}} F'(-\sqrt{x}) = \frac{2x\ln(1+x^4)}{e^{x^2}} + \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [0, +\infty[$. Les fonctions fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ donc par intégration par parties on obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^A ue^{-u}du &= [-ue^{-u}]_0^A - \int_0^A -e^{-u}du \\ &= -Ae^{-A} + [-e^{-u}]_0^A \\ &= -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A ue^{-u}du = \lim_{A\to+\infty} -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 = 1.$$
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$ converge et vaut 1.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [1, +\infty[$. La fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $[1, A]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$ et en utilisant la question précédente, on obtient :
$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \int_1^A \frac{u(t)}{e^{u(t)}}u'(t)dt = \int_0^{\ln A} \frac{u}{e^u}du = \int_0^{\ln A} ue^{-u}du = -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \lim_{A\to+\infty} -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ *converge et vaut* 1.