Chapitre 11 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P.$$

Montrer que les vecteurs

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X - 1 \quad , \quad P_2 = (X-1)^2$$

sont des vecteurs propres de f dont on précisera les valeurs propres associées.

Test 2 (*Voir solution.*)

1. *Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*
2. *Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver le spectre de g.

Test 3 (*Voir solution.*)

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $E_6(A)$.

Test 4 (*Voir solution.*)

On considère l'endomorphisme ψ de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $E_4(\psi)$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A.*
2. *Déterminer les valeurs propres possibles de A. En déduire le spectre de A et une base de chaque espace propre.*
3. *Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul (le raisonnement est le même pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée.*
2. *En déduire qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ avec $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ tel que*

$$P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$$

soit un polynôme annulateur de A.

Test 7 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* A.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $A = PDP^{-1}$.

Test 8 (***Voir solution.***)

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* B.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice* B *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $B = PDP^{-1}$.

Il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables :

Test 9 (***Voir solution.***)

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_1[X]$ *défini par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \psi(P) = P'.$$

1. *Déterminer le spectre de* ψ.
2. *En raisonnant par l'absurde, montrer que* ψ *n'est pas diagonalisable.*

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* 0, 1 *et* 4 *sont les trois valeurs propres de* A *et déterminer les sous-espaces propres associés.*
2. *En déduire une matrice diagonale* D *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible* P *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à* 1, *telles que :* $A = PDP^{-1}$.

Test 11 (***Voir solution.***)

La matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Test 12 (***Voir solution.***)

On considère

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $T^2 - 3T$ *et en déduire un polynôme annulateur de* T.
2. *Déterminer le spectre de* T *et une base de chaque sous-espace propre.*
3. *En déduire une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $T = PDP^{-1}$.
4. *En déduire* T^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

On vérifie par le calcul que :

$$f(P_0) = P_0 \quad ; \quad f(P_1) = 2P_1 \quad ; \quad f(P_2) = 3P_2.$$

Comme P_0, P_1 *et* P_2 *sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* 1, 2 *et* 3 *respectivement.*

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. • ***Méthode 1 : par le déterminant.*** *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $A - \lambda I_2$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\det(A - \lambda I_2) = 0$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2.$$

Ainsi

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff (\lambda-2)^2 = 0 \iff \lambda = 2.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$.

• ***Méthode 2 : par le rang.*** *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $A - \lambda I_2$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) < 2$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 0 & -1-(1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) < 2 \iff -1-(1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \iff -(\lambda-2)^2 = 0 \iff \lambda = 2.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$.

2. *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* g *si et seulement si* $B - \lambda I_3$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(B - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1 \; ; \; L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2 \\ 0 & 0 & \lambda+1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda + 1 - (1-\lambda)^2 = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 0 \iff 3\lambda - \lambda^2 = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 3.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(B) = \{0, 3\}$.

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_6(A) \iff AX = 6X \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & - & z & = & 6x \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6y \\ x & - & y & + & 3z & = & 6z \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & 0 \\ & & & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi : $E_6(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Correction du test 4 (***Retour à l'énoncé.***)

D'après l'exemple 7, on sait que $E_4(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *De plus, si* $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ *alors*

$$P \in E_4(\psi) \iff \operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}(P) \in E_4(A) \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$E_4(\psi) = \left\{\lambda + \lambda X^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\left(1 + X^2\right).$$

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *On trouve* $A^2 - 4A = -4I_3$. *Ainsi,*
$$A^2 - 4A + 4I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$
Cela signifie que $X^2 - 4X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *Le spectre de* A *est inclus dans l'ensemble des racines de* $X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$. *Donc la seule valeur propre possible est* 2. *Vérifions si* 2 *est valeur propre.*

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$$AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & z & = & 2x \\ 2x & & & + & 2z & = & 2y \\ x & - & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff x - y + z = 0.$$
   L'ensemble des solutions de ce système est
$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x - y + z = 0\right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
   Comme le système possède des solutions non nulles, 2 *est bien valeur propre. Donc* $\operatorname{Sp}(A) = \{2\}$ *et*
$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
3. *Comme* 0 *n'est pas valeur propre de* A, A *est inversible. De plus :*
$$A^2 - 4A = -4I_3 \quad \textit{donc} \quad \left(-\frac{1}{4}(A - 4I_3)\right)A = I_3.$$
   Donc $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 4I_3)$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On sait que :* $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.
   La famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \dots, \mathrm{A}^{n^2})$ *est une famille de* n^2+1 *vecteurs d'un espace vectoriel de dimension* n^2*. Elle est donc liée.*
2. *Par définition d'une famille liée, il existe* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*

$$\lambda_0 \mathrm{I}_n + \lambda_1 \mathrm{A} + \dots + \lambda_{n^2} \mathrm{A}^{n^2} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.$$

   Cela signifie, en posant $\mathrm{P} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{X} + \dots + \lambda_{n^2}\mathrm{X}^{n^2}$*, que*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.$$

   Ainsi P *un polynôme annulateur de* A*. De plus,* P *est non nul car* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *donc au moins l'un de ses coefficients est non nul.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*. On sait que*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3 \quad \textit{n'est pas inversible} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) < 3.$$

   Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_2 \longleftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \textit{ et } \mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 + \lambda \mathrm{L}_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -2+3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2.
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_3) < 3 \Longleftrightarrow 1-\lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad -2+3\lambda+\lambda^2 = 0 &\Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 2.
\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{1, 2\}$.

2. • $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ *: soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{X} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & x \\ -x & + & 2y & - & z & = & y \\ x & - & y & + & 2z & = & z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow x - y + z = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = y - z.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$*. La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$.

- $E_2(A)$: *soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X\in E_2(A)\iff AX=2X\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 2x\\ -x & + & 2y & - & z & = & 2y\\ x & - & y & + & 2z & = & 2z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & z & = & 0\\ -x & & & - & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & z & = & 0\\ & - & y & - & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right. \quad L_1\longleftrightarrow L_1+2L_3 \;\; et \;\; L_2\longleftrightarrow L_2+L_3$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} z & = & -y\\ x & = & y\end{array}\right. .$$

Ainsi, $E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_2(A)$.

3. *Comme* $\dim(E_1(A))+\dim(E_2(A))=1+2=3$, A *est diagonalisable. Posons :*

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad et\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$D=P^{-1}AP\quad c\text{'}est\text{-}à\text{-}dire\quad A=PDP^{-1}.$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda\in \mathrm{Sp}(B)\iff B-\lambda I_3\quad n\text{'}est\ pas\ inversible\iff \mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3.$$

Or

$$\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}3-\lambda&0&8\\3&-1-\lambda&6\\-2&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}3&-1-\lambda&6\\3-\lambda&0&8\\-2&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)\quad L_1\longleftrightarrow L_2$$
$$=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&3-\lambda&8\\0&-2&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)\quad C_1\longleftrightarrow C_2$$
$$=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&-2&-5-\lambda\\0&3-\lambda&8\end{pmatrix}\right)\quad L_2\longleftrightarrow L_3$$
$$=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&-2&-5-\lambda\\0&0&8+\frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2}\end{pmatrix}\right)\quad L_3\longleftarrow L_3+\frac{3-\lambda}{2}L_2.$$

Donc

$$\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3\iff -1-\lambda=0\quad ou\quad 8+\frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2}=0\iff\lambda=-1\quad ou\quad 1+2\lambda+\lambda^2=0\iff\lambda=-1.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(B)=\{-1\}$.

2. $E_{-1}(B)$: *soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_{-1}(B) \iff BX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & + & 8z & = & -x \\ 3x & - & y & + & 6z & = & -y \\ -2x & & & - & 5z & = & -z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & + & 8z & = & 0 \\ 3x & + & 6z & = & 0 \\ -2x & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff 4x + 8z = 0$$
$$\iff x = -2z.$$

Ainsi, $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_{-1}(B)$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $E_{-1}(B)$.

3. *Comme* $\dim(E_{-1}(B)) = 2 \neq 3$, B *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La matrice de* ψ *dans la base canonique est*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
car $\psi(1) = 0$ *et* $\psi(X) = 1$. *De plus, on sait que* $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}(A)$. *Comme* A *est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi :*
$$\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.$$

2. *Supposons par l'absurde que* ψ *est diagonalisable. Alors, il existe une base* (P_1, P_2) *de* $\mathbb{R}_1[X]$ *formée de vecteurs propres de* ψ. *Comme* 0 *est la seule valeur propre de* ψ, *on aurait donc :*
$$\psi(P_1) = 0 \quad \textit{et} \quad \psi(P_2) = 0.$$
L'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_1[X]$ *et* ψ *coïncident donc sur la base* (P_1, P_2) *de* $\mathbb{R}_1[X]$. *Par conséquent* ψ *est l'endomorphisme nul.*
Or, $\psi(X) = 1 \neq 0$ *: ceci est une contradiction ! Ainsi,* ψ *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On sait que*
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_3 \quad \textit{n'est pas inversible} \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3.$$
Or
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$
Donc
$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 4.$$
Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 4\}$.

- $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$: *soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathrm{E}_0(\mathrm{A})$.

- $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$: *soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{X} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & x \\ x & + & y & + & z & = & y \\ x & + & y & + & 3z & = & z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 0 \\ & & x & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & -z \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$.

- $\mathrm{E}_4(\mathrm{A})$: *soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_4(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = 4\mathrm{X} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4x \\ x & + & y & + & z & = & 4y \\ x & + & y & + & 3z & = & 4z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & + & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & 2y \end{array} \right. .$$

Ainsi, $\mathrm{E}_4(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathrm{E}_4(\mathrm{A})$.

2. *Comme* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *possèdent trois valeurs propres distinctes, alors* A *est diagonalisable. En posant*

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

on a alors $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ *donc en multipliant à droite par* P^{-1} *et à gauche par* P *membre à membre on obtient*

$$\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{A}.$$

Correction du test 11 (***Retour à l'énoncé.***)

La matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, B *possède une unique valeur propre :* -2*. Supposons par l'absurde que* B *est diagonalisable : il existe donc* P *une matrice inversible et* D *une matrice diagonale telles que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{D}$*. Comme les coefficients diagonaux de* D *sont les valeurs propres de* B*, on a forcément* $\mathrm{D} = -2\mathrm{I}_3$*.*
Or, en multipliant à droite par P^{-1} *et à gauche par* P *membre à membre dans* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{D}$*, on obtient*

$$\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{P}(-2\mathrm{I}_3)\mathrm{P}^{-1} = -2\mathrm{I}_3.$$

Ceci est absurde ! Ainsi, B *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 12 (***Retour à l'énoncé.***)

=

1. *On a :* $\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T} = -2\mathrm{I}_3$ *donc* $\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T} + 2\mathrm{I}_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$*. Ainsi* $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$ *est un polynôme annulateur de* T*.*
2. *La matrice* T *est triangulaire donc son spectre est constitué de ses coefficients diagonaux :* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{1, 2\}$*.*
3. *Déterminons les sous-espaces propres : soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*.*

   - *On a :*

   $$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{T}) \iff \mathrm{TX} = \mathrm{X} \iff \begin{cases} x & & + & 2z & = & x \\ & y & + & z & = & y \\ & & & 2z & = & z \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} 2z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$
   $$\iff z = 0.$$

   Ainsi,

   $$\mathrm{E}_1(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$ *formée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une base de* $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$*.*

   - *On a :*

   $$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_2(\mathrm{T}) \iff \mathrm{TX} = \mathrm{X} \iff \begin{cases} x & & + & 2z & = & 2x \\ & y & + & z & = & 2y \\ & & & 2z & = & 2z \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x & = & 2z \\ y & = & z \end{cases}.$$

   Ainsi,

   $$\mathrm{E}_2(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{E}_2(\mathrm{T})$ *formée d'un vecteur non nul, c'est donc une base de* $\mathrm{E}_2(\mathrm{T})$*.*

   - *En posant* $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a*

   $$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP} \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \mathrm{T} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

4. *Par récurrence, montrons que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$*.*

- *Initialisation : c'est la question précédente.*
- *Hérédité : supposons qu'il existe un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ *et montrons que* $\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$.
  On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T}\times\mathrm{T}^n &= \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence}\\ &= \mathrm{PDD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{car} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_3 \quad \textit{et} \quad \mathrm{DI}_3 = \mathrm{I}_3\\ &= \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}.\end{aligned}$$

- *Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

On a aussi $\mathrm{T}^0 = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

On trouve facilement que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ *et comme* $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$ *on obtient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2(2^n-1)\\ 0 & 1 & 2^n-1\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$