Chapitre 15 : Correction des tests

1 Tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Soit X *une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que X *est à densité et déterminer une densité.*

Test 2 (***Voir solution.***)

Montrer que la fonction f suivante est une densité d'une variable aléatoire X *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Déterminer la fonction de répartition de X.

Test 3 (***Voir solution.***)

Montrer que la fonction F *suivante est la fonction de répartition d'une variable aléatoire* X *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Déterminer une densité de X.

Test 4 (***Voir solution.***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On admet que f est une densité de probabilité et on considère une variable aléatoire à densité X *de densité f. La variable aléatoire* X *possède-t-elle une espérance ? Le cas échéant, la calculer.*

Test 5 (***Voir solution.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. *La variable* $\frac{1}{1+e^{-X}}$ *possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.*

Test 6 (***Voir solution.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ *avec $a < b$ deux réels. Montrer que* X *possède une variance et que cette variance vaut* $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Démontrer la proposition.

Test 8 (***Voir solution.***)

Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. *Démontrer le cas particulier suivant :*

$$X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1) \iff \sigma X + \mu \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu, \sigma^2).$$

Test 9 (***Voir solution.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$. *Montrer que* X *possède une variance et que cette variance vaut* $\frac{1}{\lambda^2}$.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit X *une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que $3X-1$ *est une variable à densité et en déterminer une densité.*

Test 11 (***Voir solution.***)

Soit X *une variable aléatoire de loi* $\mathscr{E}(2)$. *Déterminer la loi de* $Y = e^X$.

Test 12 (***Voir solution.***)

Soit X *suivant une loi uniforme sur* $[-1,1]$. *Déterminer la loi de* X^2.

Test 13 (***Voir solution.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. *On pose* $Y = |X|$. *Montrer que* Y *est une variable à densité et déterminer une densité de* Y.

2 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Ici on sait que F_X est une fonction de répartition. Pour vérifier que c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, il s'agit de montrer que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. *Montrons que F_X est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction F_X est continue sur $[0,+\infty[$ en tant que composée de fonctions continues sur $[0,+\infty[$ et continue sur $]-\infty,0[$ car constante sur cet intervalle. Étudions la continuité en 0 :*

$$\lim_{x\to 0^+} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x\to 0^-} F_X(x).$$

   Ainsi, F_X est continue en 0.
   Finalement, F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Montrons que F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. La fonction F_X est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ en tant que composée de fonctions de classe C^1 sur ces intervalles.*
   Ainsi, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Ainsi, X est à densité. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F_X'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Donc, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de X.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Montrons que f est positive. Sur $]-\infty,-1[$ et sur $[1,+\infty[$, f est positive. De plus, pour tout $x \in [-1,0[$, $f(x) = 1+x \geqslant 0$ et pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = 1-x \geqslant 0$. Ainsi, f est positive.*
2. *Il est évident que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.*
3.
   - *Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$. Comme f est nulle sur $]-\infty,-1[$ et prolongeable par continuité en -1, on vérifie facilement que cette intégrale converge et vaut 0.*
   - *Étude de $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)dt$. Comme f est prolongeable par continuité sur $[-1,0]$ l'intégrale converge et on a :*

$$\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} (1+t)dt = \frac{1}{2}.$$

   - *Étude de $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)dt$. Comme f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ l'intégrale converge et on a :*

$$\int_{0}^{1} f(t)dt = \int_{0}^{1} (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

   - *Étude de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$. Comme f est nulle sur $[1,+\infty[$, on vérifie facilement que cette intégrale converge et vaut 0.*

   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

Ainsi, f est bien un densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire de densité f. Alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncé.***)

Ici, on ne sait pas a priori que F *est une fonction de répartition. Il s'agit donc de montrer que :*

- F *est croissante sur* $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$,
- F *est continue sur* $\mathbb{R}$,
- F *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

1. *Montrons que* F *est continue sur* $\mathbb{R}$.
La fonction F *est continue sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$ *car la fonction exponentielle est continue sur ces intervalles. De plus, on a :*
$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} = \mathrm{F}(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x).$$
Donc F *est continue en* 0. *Finalement* F *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrons que* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
   - F *est croissante sur* $]-\infty, 0[$ *car la fonction exponentielle l'est,*
   - F *est croissante sur* $[0, +\infty[$ *(en étudiant le signe de la dérivée sur* $]0, +\infty[$*),*
   - F *est continue.*

   Ainsi F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
3. *Par limites usuelles, on a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$.
4. *La fonction* F *est de classe* C^1 *sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$ *car la fonction exponentielle est de classe* C^1 *sur ces intervalles.*

Ainsi F *est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité* X. *Or*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{F}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de X.

Correction du test 4 (***Retour à l'énoncé.***)

La variable aléatoire X *admet une espérance si et seulement si l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ *converge absolument.*

Comme $t \mapsto |t f(t)|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ *est impropre en* $-\infty$ *et* $+\infty$.

Or :

- $|t f(t)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}$,
- $t \mapsto |t f(t)|$ *et* $t \mapsto \frac{1}{\pi t}$ *sont positives au voisinage de* $+\infty$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t} dt$ *est divergente d'après le critère de convergence des intégrales de Riemann en* $+\infty$.

Donc d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |t f(t)| dt$ *diverge.*

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ *diverge et* X *ne possède donc pas d'espérance.*

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncé.***)

Une densité de X *est donnée par la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ *étant nulle en dehors de* $[0, +\infty[$, *d'après le théorème de transfert, la variable* $\frac{1}{1+e^{-\mathrm{X}}}$ *possède une espérance si et seulement si* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ *converge absolument. La fonction* $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ *étant positive et continue sur* $[0, +\infty[$, *il suffit d'étudier la convergence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$, *impropre en* $+\infty$.

Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\left[\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^A = \ln(2) - \ln(1+e^{-A}).$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \ln(2)$.
Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$ *converge absolument donc* $\frac{1}{1+e^{-X}}$ *possède une espérance et on a :*

$$E\left(\frac{1}{1+e^{-X}}\right) = \ln(2).$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

Une densité de X *est donnée par la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On sait que X *possède une espérance donc par la formule de Koenig-Huygens,* X *possède une variance si et seulement si* $\int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,dt$ *converge absolument. Or, la fonction* $t \mapsto \left|\frac{t^2}{b-a}\right|$ *est continue sur* $[a,b]$ *donc l'intégrale ne possède pas d'impropreté ! Ainsi* X *possède un moment d'ordre 2 donc une variance. La formule de Koenig-Huygens donne alors :*

$$\begin{aligned} V(X) = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,dt - E(X)^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} &= \frac{4(b^3-a^3) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)} \\ &= \frac{4(b-a)(a^2+ab+b^2) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)} \\ &= \frac{4(a^2+ab+b^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ *Supposons que* $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ *et notons* $Y = a + (b-a)X$. *Rappelons que la fonction de répartition de* X *est la fonction* F_X *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On va déterminer la fonction de répartition de Y. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$[Y \leqslant t] = [a + (b-a)X \leqslant t] = \left[X \leqslant \frac{t-a}{b-a}\right] \quad \text{car} \quad b-a > 0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P\left(\left[X \leqslant \frac{t-a}{b-a}\right]\right) = F_X\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t-a}{b-a} < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } \frac{t-a}{b-a} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } \frac{t-a}{b-a} > 1 \end{cases}.$$

Or :

- $\frac{t-a}{b-a} \in [0,1]$ *si et seulement si* $t \in [a,b]$,
- $\frac{t-a}{b-a} < 0$ *si et seulement si* $t < a$
- $\frac{t-a}{b-a} > 1$ *si et seulement si* $t > b$.

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a,b]$. *Comme la fonction de répartition caractérise la loi,* Y *suit une loi uniforme sur* $[a,b]$.

$\Leftarrow$ *On suppose que* $Y = a + (b-a)X$ *suit la loi uniforme sur* $[a,b]$. *Sa fonction de répartition est donc :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. *Alors on a :*

$$[X \leqslant t] = [a + (b-a)X \leqslant (b-a)t + a] = [Y \leqslant (b-a)t + a] \quad \text{car} \quad b - a > 0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P([X \leqslant t]) = F_Y((b-a)t + a) = \begin{cases} 0 & \text{si } (b-a)t + a < a \\ \frac{(b-a)t+a-a}{b-a} & \text{si } (b-a)t + a \in [a,b] \\ 1 & \text{si} (b-a)t + a > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$. *Comme la fonction de répartition caractérise la loi,* X *suit une loi uniforme sur* $[0,1]$.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ *Supposons que* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *et notons* $Y = \sigma X + \mu$. *Rappelons que la fonction de répartition de* X *est la fonction* F_X *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

On va déterminer la fonction de répartition de Y. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $\sigma > 0$ *alors :*

$$[Y \leqslant x] = [\sigma X + \mu \leqslant x] = \left[X \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right].$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = P\left(\left[X \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right]\right) = F_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{s-\mu}{\sigma}$ *dans cette intégrale on trouve :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, ds.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. *Comme la fonction de répartition caractérise la loi,* Y *suit la loi* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

$\Leftarrow$ *On suppose que* $Y = \sigma X + \mu$ *suit la loi* $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. *Sa fonction de répartition est donc :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, ds$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Alors comme* $\sigma > 0$ *:*

$$[X \leqslant x] = [\sigma X + \mu \leqslant \sigma x + \mu] = [Y \leqslant \sigma x + \mu].$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F_Y(\sigma X + \mu) = \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, ds.$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{s-\mu}{\sigma}$ *dans cette intégrale on trouve :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. *Comme la fonction de répartition caractérise la loi,* X *suit la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

Une densité de X *est donnée par la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On sait que X *possède une espérance donc par la formule de Koenig-Huygens,* X *possède une variance si et seulement si* $\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ *converge absolument. Or, la fonction* $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\lambda t}$ *est positive donc il suffit d'étudier si* $\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ *converge. La seule impropreté de cette intégrale est en* $+\infty$*. Soit* $A \geqslant 0$*. En intégrant par parties deux fois de suite on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^A + \int_0^A 2te^{-\lambda t} dt \\ &= -A^2 e^{-\lambda A} + 2\left(\left[-t\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^A + \int_0^A \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt\right) \\ &= -A^2 e^{-\lambda A} - 2\frac{Ae^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cela montre que X *possède un moment d'ordre* 2 *et que* $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$*. La formule de Koenig-Huygens donne alors*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

On sait que la fonction de répartition de X *est la fonction* F_X *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

On note $Y = 3X - 1$.

- *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y*. Soit* $t \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$[Y \leqslant t] = [3X - 1 \leqslant t] = \left[X \leqslant \frac{t+1}{3}\right].$$

  Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P\left(\left[X \leqslant \frac{t+1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{t+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ 1 - \frac{9}{(t+1)^2} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}.$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité. La fonction* F_Y *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(le vérifier !) et de classe* C^1 *sauf éventuellement en* 2*. Ainsi,* Y *est à densité.*
- *Déterminons une densité de* Y*. On a, pour tout* $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ *:*

$$F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t > 2 \end{cases}.$$

  Au final, la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

  est une densité de Y.

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y*. Soit* $t \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$[Y \leqslant t] = [e^X \leqslant t] = \begin{cases} [X \leqslant \ln(t)] & \text{si } t > 0 \\ \varnothing & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} P([X \leqslant \ln(t)]) & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X(\ln(t)) & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t \leqslant 0 \end{cases}.$$

Or, comme X *suit la loi exponentielle de paramètre* 2*, on a :*

$$F_X(\ln(t)) = \begin{cases} 1 - e^{-2\ln(t)} & si\ \ln(t) \geqslant 0 \\ 0 & si\ \ln(t) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & si\ t \geqslant 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}.$$

Donc finalement on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & si\ t \geqslant 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}.$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité.*
  La fonction F_Y *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(le vérifier!) et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$*. Ainsi,* Y *est à densité.*
- *Déterminons une densité de* Y*. On a, pour tout* $t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ *:*

$$F_Y'(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & si\ t > 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}.$$

Au final, la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & si\ t \geqslant 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}$$

est une densité de Y*.*

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y*. Soit* $t \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$[Y \leqslant t] = [X^2 \leqslant t] = \begin{cases} \varnothing & si\ t < 0 \\ [-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}] & si\ t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ P\left([-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}]\right) & si\ t \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ F_X\left(\sqrt{t}\right) - F_X\left(-\sqrt{t}\right) & si\ t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Or comme X *suit la loi uniforme sur* $[-1, 1]$ *donc :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & si\ x \in [-1, 1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{\sqrt{t}+1}{2} - \frac{-\sqrt{t}+1}{2} & si\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \sqrt{t} & si\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & si\ t > 1 \end{cases}.$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité. La fonction* F_Y *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(le vérifier!) et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* 0 *et* 1*. Ainsi,* Y *est à densité.*
- *Déterminons une densité de* Y*. On a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\} \quad F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & si\ 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & si\ t > 1 \end{cases}.$$

Au final, la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & si\ 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & si\ t \in \mathbb{R}\backslash]0, 1] \end{cases}$$

est une densité de Y*.*

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$[Y \leqslant t] = [|X| \leqslant t] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } t < 0 \\ [-t \leqslant X \leqslant t] & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

  Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P([-t \leqslant X \leqslant t]) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X(t) - F_X(-t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité. Comme* X *suit une loi normale, elle possède une densité continue sur* $\mathbb{R}$ *donc sa fonction* F_X *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$. *On en déduit que* F_Y *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *puis on vérifie que* F_Y *est continue sur* $\mathbb{R}$. *Par conséquent,* Y *est une variable aléatoire à densité.*
- *Déterminons une densité de* Y. *On a, pour tout* $t \in \mathbb{R}^*$ *:*

$$F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X'(t) + F_X'(-t) & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

  Comme X *suit la loi normale centrée réduite, la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

  est une densité de Y.