TD 5-Dimension

Exercice 1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant).

1. *Soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$. La famille (u,v,w) est libre si et seulement si les familles (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres.*
2. *Soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$. Si $w \in \mathrm{Vect}(u,v)$ alors (u,v,w) est liée.*
3. *La dimension de $\mathbb{R}_5[X]$ est 5.*
4. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.*
5. *La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.*

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. *Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.*
2. *Trouver une base de F et en déduire sa dimension.*
3. (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.*
   (b) *Déterminer les coordonnées de A^n dans la base trouvée précédemment.*

Exercice 3 (*Ecricome 2008*)

A tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$$

1. *Montrer que E est un espace vectoriel. Donner une base de E ainsi que sa dimension.*
2. *On pose $J = M(1,1,1) - I_3$ où la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
   (a) *Calculer les matrices J^2, J^3.. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geq 3$.*
   (b) *Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$:*
   $$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$
   L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?
   (c) *En déduire l'écriture matricielle de $[M(1,1,1)]^n$.*

Exercice 4

1. *Montrer que la famille formée des vecteurs $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,0)$, $w = (1,0,-1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Montrer que la famille $(X^2 + X + 1, X - 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*
3. *Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ dans cette base.*

Exercice 5

Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. *Montrer que H est un sous-espace vectoriel de R^n.*
2. *On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $\dim H = n - 1$. Montrer que*
   $$(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$$
   est une base de H.

Exercice 6

Soient $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $F = E$.

Exercice 7

Sans calcul, *donner le rang des matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ou non.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\right)$.
2. $(2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2)$.

Exercice 9

On considère $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le rang de* C.
2. *Soit* E *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les lignes de* C. *Déterminer la dimension de* E *et trouver une base de* E.
3. *Compléter cette base en une base de* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$, *on donne*

$$u_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad ; \quad u_3 = (3, -4, -3).$$

1. *Déterminer le rang de la famille* (u_1, u_2, u_3).
2. *Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel* F *engendré par* (u_1, u_2, u_3) *et donner en une base.*

Exercice 11

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$