Chapitre 12 : Intégration : rappels et compléments

1 Rappels : intégration sur un segment

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction définie sur I par

$$x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{F}(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I.

1. Le réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
2. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)\,dt$ ce réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. *On note souvent :*
$$[\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$
2. *Dans la notation $\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est muette, ainsi*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$
3. *On a*
$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -(\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)) = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. *Linéarité* : on a
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. *Croissance* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$
5. *Inégalité triangulaire* :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors, f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Extension aux fonctions continues par morceaux

- Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.
- Pour une telle fonction continue par morceaux f, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$
- La proposition 2 reste vraie pour les fonctions continues par morceaux.

Remarque 4

Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est donc une fonction qui est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet tout de même des limites finies à droite et à gauche.

Exemple 1

1. *La fonction partie entière f est continue par morceaux sur $[0,2]$.*

En effet, elle est continue sur $]0,1[$ *et* $]1,2[$ *car constante sur chacun de ces intervalles. De plus,*

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \quad ;$$

donc sa restriction à $]0,1[$ *(resp. à* $]1,2[$*) est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$ *(resp.* $[1,2]$*).*

2. *Intégrale de* f *sur* $[0,2]$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt \quad \text{par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux} \\ &= \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2 Techniques de calcul

► Calcul de primitives « à vue »

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x) \rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt.$

On remarque que pour tout $t\in[0,1]$ *:*

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}u'(t)u(t)^{-\frac{1}{2}}$$

où $u(t)=t^2+1$*. Donc*

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{u(t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[u(t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e}\frac{1}{x\ln(x)}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds.$

► Intégration par parties

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Exemple 3

Calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2\ln(t)dt.$

Les fonctions $u : t\mapsto \dfrac{t^3}{3}$ *et* $v : t\mapsto \ln(t)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,3]$ *et*

$$\int_1^3 t^2\ln(t)dt = \int_1^3 u'(t)v(t)dt.$$

Par intégration par parties, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^3 t^2\ln(t)dt &= \left[u(t)v(t)\right]_1^3 - \int_1^3 u(t)v'(t)dt\\ &= \left[\frac{t^3\ln(t)}{3}\right]_1^3 - \int_1^3\frac{t^2}{3}dt\\ &= 3^2\ln(3) - \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3\\ &= 9\ln(3) - \frac{26}{9}\end{aligned}$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x\in]1,+\infty[$*. Calculer* $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt.$

► Changement de variables

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Exemple 4

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ à l'aide du changement de variable $u = e^t$.

1. Transformer du avec la formule $du = u'(t)dt$.
   Ici, $du = e^t dt$ ou encore $du = u dt$, c'est-à-dire $\frac{du}{u} = dt$.
2. Transformer l'expression sous l'intégrale.
$$\frac{dt}{e^t+1} = \frac{\frac{du}{u}}{u+1} = \frac{du}{u(u+1)}$$
3. Transformer les bornes.
   $u(1) = e$ et $u(2) = e^2$.
4. Rédaction finale :
   La fonction $u : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$ et $u'(t) = e^t$ pour tout $t \in [1,2]$ donc :
$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{e^t}{e^t}dt = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{u'(t)}{u(t)}dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du$$
   car $u \mapsto \frac{1}{u(u+1)}$ est continue sur $[e, e^2]$.
   On remarque ensuite que pour tout $u \in [e, e^2]$,
$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$
   donc
$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du = \int_e^{e^2} \frac{1}{u}du - \int_e^{e^2} \frac{1}{u+1}du = 1 - \ln\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$$

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$
Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(-t)dt$

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt.$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm\infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $[a,+\infty[$ et on la note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

De même :

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty,b]$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $]-\infty,b]$ et on la note $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a,+\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,+\infty[$,*
2. *on introduit $x\in[a,+\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.

Exemple 5

1. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$.*

   La fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x\in[1,+\infty[$. Alors
$$\int_1^x\frac{1}{t}dt=\Big[\ln(t)\Big]_1^x=\ln(x)$$
   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ est donc divergente.
2. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$.*

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [2,+\infty[$. Alors

$$\int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

3. *Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.*

   La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [0,+\infty[$. Alors

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x}+1.$$

   Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = 1$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Plus généralement :

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
2. *Intégrale de Riemann en $+\infty$* : pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Test 6 (***Voir solution.***)

Démontrer les critères de convergence des exemples de référence.

2.2 Intégrales impropres sur un intervalle $]a,b]$ ou $[a,b[$

Définition 4 (Convergence d'une intégrale impropre)

Soient a, b deux réels avec $a < b$.

- Soit f une fonction continue sur $[a,b[$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $[a,b[$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.
- Soit f une fonction continue sur $]a,b]$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $]a,b]$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 2

Soit f définie sur un intervalle $[a,b[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,b[$,*
2. *on introduit $x \in [a,b[$ et on étudie si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b^-.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction f définie sur $]a,b]$.

Exemple 6

1. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}dx$.*
   La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ est continue sur $[0,2[$. L'intégrale est donc impropre en 2. Soit $u \in [0,2[$. Alors
   $$\int_0^u \frac{1}{x-2}dx = [\ln|x-2|]_0^u = \ln(2-u) - \ln(2).$$
   Ainsi
   $$\lim_{u\to 2^-}\int_0^u \frac{1}{x-2}dx = -\infty.$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}dx$ est donc divergente.
2. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$.*
   La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $]1,2]$. L'intégrale est donc impropre en 1.
   Soit $x \in]1,2]$. Alors
   $$\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = [2\sqrt{t-1}]_x^2 = 2 - 2\sqrt{x-1}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = 2.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ *est donc convergente et vaut* 2.

Exemples de référence

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$, impropre en 0, converge.
2. *Intégrale de Riemann en* 0 : pour tout réel $c>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a}dt$, impropre en 0, converge si et seulement si $a<1$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann.

Exemple 7

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ et prolongeable par continuité en a. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

2.3 Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité

Définition 5 (Convergence d'une intégrale plusieurs fois impropre)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$.
S'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent, on dit que l'**intégrale doublement impropre** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Sinon, on dira qu'elle **diverge**.

Remarque 5

En conservant les notations de la définition, les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont des intégrales impropres respectivement en a et en b au sens des paragraphes précédents.

Méthode 3

Soit f définie sur un intervalle $]a,b[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non. En pratique on prend n'importe quel $c\in\,]a,b[$ et on étudie la nature des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ avec les méthodes précédentes.

Exemple 8

1. *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$.

   La fonction $f: t\mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$. Or, pour tout $c>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^2}dt$ est divergente. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est divergente.

2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

Étudions la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$.

- *L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et vaut 1.*
- *L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$. Soit $x \in]-\infty, 0]$. Alors*

$$\int_x^0 f(t)\,dt = \int_x^0 e^t\,dt = \left[e^t\right]_x^0 = 1 - e^x.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,dt = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente et vaut 1.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = 2.$$

Définition 6 (Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuité sur $]a, b[$: il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 \cdots < a_n = b$ de $]a, b[$ telle que f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ les intégrales doublement impropres $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ convergent, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **converge** et vaut

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale diverge.

Exemple 9

Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

1. *Déterminer les impropretés.*

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est impropre en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

2. *Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.*

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|t| = t$ et l'intégrale considérée est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ qui est doublement impropre.

- *Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$.*

  La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a

$$\int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = [-2e^{-\sqrt{t}}]_1^x = -2\left(e^{-\sqrt{x}} - e^{-1}\right).$$

  Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $2e^{-1}$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$.

  La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a

$$\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_x^1 = -2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{x}}\right).$$

  Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = 2-2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $2-2e^{-1}$.

- Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ converge et vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = 2.$$

3. Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

   Pour tout $t \in]-\infty, 0[$, $|t| = -t$ et l'intégrale considérée est $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ qui est doublement impropre.

   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$.

     La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}$ est continue sur $]-\infty,-1]$ et pour tout $x \in]-\infty,-1]$ on a

$$\int_x^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = \left[2e^{-\sqrt{-t}}\right]_x^{-1} = 2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{-x}}\right).$$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\int_x^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ converge et vaut $2e^{-1}$.

   - Étude de $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$.

     La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}$ est continue sur $[-1,0[$ et pour tout $x \in [-1,0[$ on a

$$\int_{-1}^x \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = \left[2e^{-\sqrt{-t}}\right]_{-1}^x = 2\left(e^{-\sqrt{-x}} - e^{-1}\right).$$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{-1}^x \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = 2-2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ converge et vaut $2-2e^{-1}$.

   - Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt + \int_{-1}^0 \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt = 2.$$

4. Conclusion :

   On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = 4.$$

Proposition 6 (Propriétés des intégrales impropres)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $]a,b[$. Soient $c \in]a,b[$ et λ un réel.

1. *Linéarité* : si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt$ converge et
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. Si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in]a,b[,\ f(t) = 0.$$

Méthode 4 (*Techniques de calcul*)

On peut utiliser les techniques de calcul comme les primitives « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties pour calculer des intégrales impropres :

1. *on se ramène à une intégrale sur un segment (par exemple, pour une fonction continue sur $[a,b[$ avec une impropreté en b, on considère $x \in [a,b[$ et on s'intéresse à l'intégrale sur le segment $[a,x]$) ;*
2. *on utilise la technique voulue (primitive « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties) dans cette intégrale sur un segment ;*
3. *on passe à la limite (dans l'exemple, quand x tend vers b^-).*

Exemple 10

1. *Étudier* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt.$

   La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{(1+e^t)^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a
$$\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \int_0^A e^t(1+e^t)^{-3} dt = \left[\frac{(1+e^t)^{-2}}{-2}\right]_0^A = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^A)^2}$$
   Donc,
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \frac{1}{8}.$$
   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{8}$.

2. *Étudier* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt.$

   La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $x \in]0,1]$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,1]$, on a, par intégration par parties :
$$\int_x^1 \ln(t) dt = \int_x^1 u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_x^1 - \int_x^1 u(t)v'(t) dt$$
$$= [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 1 dt = -x\ln(x) - 1 + x$$

Donc, par croissance comparée

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \ln(t)\,dt = \lim_{x \to 0^+} -x\ln(x) - 1 + x = -1.$$

Ainsi $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *est convergente et vaut* -1.

3. Étudier $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ avec le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

   La fonction $f \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}$ *est continue sur* $]0,1]$. *Soit* $x \in]0,1]$.
   La fonction $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[x,1]$. *De plus,* $du = -\frac{1}{t^2}dt$. *Ainsi*

$$\int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt = -\int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-u}\,du = \int_1^{\frac{1}{x}} e^{-u}\,du = e^{-1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

   Donc,

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x \to 0^+} e^{-1} - e^{-\frac{1}{x}} = e^{-1}.$$

   Ainsi $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ *est convergente et vaut* e^{-1}.

Test 8 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u e^{-u}\,du$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ en posant $u = \ln(t)$.