ECE2 – Concours blanc 1

MATHÉMATIQUES 2-TYPE EDHEC

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.
2. On appelle *spectre de* A et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   (a) Pour tout λ réel, calculer le déterminant de $A - \lambda I_2$.
   (b) En déduire que le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A est $\{0, 7\}$.
   (c) Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ déterminer une base de l'espace vectoriel $E_\lambda(A)$ défini par :
$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}.$$

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, associe :
$$f(M) = AM.$$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) On considère $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire $f(E_{1,1})$, $f(E_{1,2})$, $f(E_{2,1})$ et $f(E_{2,2})$ sous forme de combinaisons linéaires de $E_{1,1}$,$E_{1,2}$,$E_{2,1}$ et $E_{2,2}$, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. (a) Soient (e_1, e_2) la base de $\mathrm{Ker}(f)$ déterminée à la question 4.(a) et (e_3, e_4) la base de $\mathrm{Im}(f)$ déterminée à la question 4.(c). Montrer que la famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire l'ensemble des réels λ pour lesquels $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas inversible. Cet ensemble est appelé le *spectre de* f et noté $\mathrm{Sp}(f)$.
   (d) Comparer le spectre de f et le spectre de A.
6. Généralisation : f est est toujours l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent un spectre non vide et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.
   (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
      i. Justifier qu'il existe un vecteur **non nul** $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.
      ii. Soit alors $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul tel que : $AX = \lambda X$. Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, puis montrer que : $f(X\,{}^tX) = \lambda X\,{}^tX$.
      iii. En déduire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
      i. Justifier qu'il existe une matrice **non nulle** $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $f(M) = \lambda M$.
      ii. Soit alors $M \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que : $f(M) = \lambda M$. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer qu'il existe un vecteur **non nul** $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = \lambda X$.
      iii. En déduire que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
   (c) Conclure.

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1]\cap[Y=j]) = P([Y=j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i]\cap[Y=1]) = P([X=i])$.
6. Le but de cette question est de déterminer la loi de $X+Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$[X+Y=n] = ([X=1]\cap[Y=n-1]) \cup ([Y=1]\cap[X=n-1]).$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
7. On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .
   (a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice. [1]

```
1   piece = grand(1,1,"uin",- - -,- - -)
2   x = 1
3   if piece == 0 then
4       lancer = grand(1,1,"uin",- - -,- - -)
5       while lancer == 0
6           lancer = - - -
7           x = - - -
8       end
9   else
10      if piece == 2 then
11          x = - - -
12      end
13  end
14  disp(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

1. Il y avait une erreur à la ligne 10 du script.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, e^2\right]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.
   (d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (e) Justifier que, pour tout réel x, on a : $1 - e^{-x} \leqslant x$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right)dt$.
On rappelle les inégalités suivantes :

$$0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,7.$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. (a) Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) i. Montrer que pour tout réel t strictement positif on a : $\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.
   ii. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt.$$

iii. En déduire : $\forall x \geqslant 0, \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 2$.

iv. Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est une intégrale convergente.

(b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

(c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

(d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

(a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

(b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

(c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. On vérifiera qu'on trouve : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

6. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

(b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

7. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

8. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n.$$

(b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

9. (a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt.$$

(d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\,dt.$$

• FIN •