Chapitre 16- Compléments sur les variables aléatoires réelles

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Les variables aléatoires considérées seront définies sur cet espace probabilisé.

Les variables considérées sont quelconques. En particulier, les résultats qui y sont présentés s'appliquent aussi bien aux variables aléatoires discrètes qu'aux variables aléatoires à densité.

1 Compléments sur l'indépendance

Définition 1 (Indépendance de deux variables aléatoires réelles)

Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** (pour la probabilité P) si pour tous intervalles réels I et J on a :

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])\, P([Y \in J]).$$

Méthode 1

1. *Pour montrer que deux variables aléatoires réelles* X *et* Y *sont indépendantes il faut montrer que :*

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])\, P([Y \in J]) \ \textbf{\textit{pour tous les intervalles réels}}\ I \ \textbf{\textit{et}}\ J.$$

2. *Pour montrer que deux variables aléatoires réelles* X *et* Y *ne sont pas indépendantes il suffit de montrer que :*

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) \neq P([X \in I])\, P([Y \in J]) \ \textbf{\textit{pour (au moins) un intervalle}}\ I \ \textbf{\textit{et un intervalle}}\ J.$$

Exemple 1

Soit X *une variable aléatoire à densité dont une densité* f *est donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Soit ε *une loi discrète suivant une loi uniforme sur* $\{-1, 1\}$ *et indépendante de* X*. On note* $Y = \varepsilon X$*.*

1. *Reconnaître la loi de* X*.*

2. *À l'aide de la formule des probabilités totales montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $P(X \leqslant t) = P(Y \leqslant t)$*.*

3. *En déduire la loi de* Y*.*

4. *Montrer que* ε *et* Y *sont indépendantes.*

Exemple 2 (*Loi du minimum de deux variables aléatoires réelles indépendantes*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit* $Z = \min(X, Y)$.
Exprimer la fonction de répartition F_Z *de* Z *en fonction des fonctions de répartition* F_X *de* X *et* F_Y *de* Y.

1. *Montrons que :* $\forall t \in \mathbb{R}$, $[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$.

2. *En déduire :* $\forall t \in \mathbb{R}$, $P([Z > t]) = P([X > t])P([Y > t])$.

3. *Conclure.*

Test 1 (*Voir solution.*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit* $Z = \max(X, Y)$.
Exprimer la fonction de répartition F_Z *de* Z *en fonction des fonctions de répartition* F_X *de* X *et* F_Y *de* Y.

Test 2 (*Voir solution.*)

Soient a *et* b *deux réels strictement positifs et* $X \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(b)$ *deux variables aléatoires indépendantes.*

1. *On pose* $U = \max(X, Y)$. *Déterminer la fonction de répartition de* U.
2. *On pose* $V = \min(X, Y)$.
   (a) *Déterminer la fonction de répartition de* V.
   (b) *Reconnaître la loi de* V.

Définition 2 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires réelles)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$ on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P([X_k \in I_k]).$$

- Plus généralement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $n \geqslant 2$, $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition 1

1. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ deux variables aléatoires **indépendantes** alors $X_1 + X_2$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$ avec $n \geqslant 2$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** telles que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2).$$

   Alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.

Proposition 2 (Lemme des coalitions)

Soient $X_1, \dots, X_n$ ($n \geqslant 2$) des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, \dots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{k+1}, \dots, X_n$.

Exemple 3

Si $X_1, \dots, X_5$ *sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes alors*

2 Compléments sur l'espérance, la variance

En première année, vous avez rencontré la notion d'espérance pour les variables aléatoires réelles discrètes et cette année pour les variables aléatoires réelles à densité. Même si la définition de la notion d'espérance/variance pour une variable aléatoire quelconque est largement hors-programme, les propriétés suivantes sont à retenir.

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Si X et Y admettent une espérance alors $X + Y$ admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Plus généralement, soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ possédant une espérance. Alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et $E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$.

Proposition 4 (Espérance du produit de variables indépendantes)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Si X et Y admettent une espérance alors XY admet une espérance et $\mathrm{E(XY)} = \mathrm{E(X)E(Y)}$.
2. Plus généralement, soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ possédant une espérance.
Alors $\mathrm{X}_1 \times \cdots \times \mathrm{X}_n$ admet une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 \times \cdots \times \mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \times \cdots \times \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$.

Remarque 1

Ces résultats sont valables pour des variables aléatoires quelconques. Par exemple, si X *est discrète et* Y *est à densité, les variables* $\mathrm{X+Y}$ *ou* XY *peuvent n'être ni discrètes ni à densité et les résultats ci-dessus permettent alors, dans certains cas, de calculer leur espérance (sous réserve d'existence).*

Exemple 4

On reprend les variables aléatoires de l'exemple 1 : ε *suit une loi uniforme sur* $\{-1, 1\}$, X *une loi normale centrée réduite et* X *et* ε *sont indépendantes. On note* $\mathrm{Y} = \varepsilon \mathrm{X}$. *Calculer* $\mathrm{E(XY)}$.

Proposition 5 (Variance de la somme de variables indépendantes)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Si X et Y admettent une variance alors $\mathrm{X+Y}$ admet une variance et $\mathrm{V(X+Y)} = \mathrm{V(X)} + \mathrm{V(Y)}$.
2. Plus généralement, soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles **mutuellement indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ possédant une variance.
Alors $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ admet une variance et $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{V}(\mathrm{X}_n)$.

Proposition 6 (Croissance de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et possédant une espérance.
Si $\mathrm{P(X \leqslant Y)} = 1$ (on dit que X prend des valeurs inférieures à celles de Y presque sûrement) alors :

$$\mathrm{E(X)} \leqslant \mathrm{E(Y)}.$$

3 Objectifs

1. Savoir montrer que deux variables aléatoires quelconques sont/ne sont pas indépendantes. Savoir montrer que des variables aléatoires quelconques sont/ne sont pas mutuellement indépendantes.
2. Savoir étudier le min et max de deux variables aléatoires quelconques, de deux variables aléatoires à densité.