Exercice 1

$P(\text{pile}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{face}) = \frac{1}{3}$

Partie A

1) a) $[X=0]$ équivaut à dire qu'on obtient 0 face car on a eu une succession d'affilée de deux piles lors des 2 premiers lancers $P[X=0] = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{9}}$

$[X=1]$ équivaut à dire qu'on a obtenu 1 face parmi les 3 premiers lancers $P[X=1] = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{27}}$

$[X=2]$ équivaut à dire qu'on a obtenu 2 faces parmi le 4 premiers lancers $P[X=2] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{81}}$

b) Soit P_n " $P([X=n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$ "

$P([X=0]) = \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}$, P_n vraie au rang $n=0$

Hérédité :

Supposons P_n vraie pour un certain rang n, montrons P_n vraie au rang $n+1$:

$$P([X=n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

$$P([X=n+1]) = n+2 \frac{4}{3^{n+2}} + \frac{2}{3}$$

$$= n+2 \frac{4}{3^{n+3}}$$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, P([X=n]) = n+1 \frac{4}{3^{n+2}}$

~~c) X suit une loi uniforme, donc elle admet une espérance et une variance~~ $\cancel{E(X) = \frac{n+2}{2}}$ $\cancel{V(X) = \frac{(n+1)^2-1}{12}}$

Partie B

2) a) $\Omega(\cancel{U}) = [0;n]$

b) $P_{[X=n]}[U=n] = \dfrac{P[U=n] \cap P(X=n)}{P(X=n]}$

Sachant qu'on a obtenu n faces, il y aura donc n+1 boules dans l'urne

$$\frac{\frac{1}{n+1} \times (n+1)\,\frac{4}{3^{n+2}}}{n+1\,\frac{4}{3^{n+2}}} = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

c) $p([U=k]) = P_{[X=n]}(U=k] \times P(X=n]$

$= \sum_{n \geq k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n)$

$= \sum_{n \geq k}^{+\infty} 1 \times \frac{4}{3^{n+2}} = \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$

d) U suit une loi uniforme, donc elle admet une esperance et une variance

$E(U) = \dfrac{n+2}{2}$

$V(U) = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12}$

3) a) L'ensemble des valeurs prises par V sont n valeurs car elle dépend de variable prenant n valeurs

b) $P_{[X=n)}(V=v) = \dfrac{P(V=v)\ \ P(X=n)}{P(X=n)} = \dfrac{P(X=n) - P(U=k)\ P(X=n)}{P(X=n)}$

$$= \frac{n+1\,\frac{4}{3^{n+2}} - \frac{2}{3^{k+1}} \times (n+1)\,\frac{4}{3^{n+2}}}{(n+1)\,\frac{4}{3^{n+2}}}$$

$= \left(-\frac{2}{3^{k+1}} + 1\right)$

c) $P(V=v) = P_{[X=n]}(V=v) \times P(X=n)$

$= -\frac{2}{3^{k+1}} + 1 \times (n+1)\,\frac{4}{3^{n+2}}$

Partie C

6) b) La fonction ~~x~~ r calcule la somme de chaque rang pour lesquels la condition est vérifiées entre 1 et N+1

c) Avec le graphique on voit que si $p=0,6$ alors on peut dire que le jeu serait équilibré car la probabilité de gagner des deux joueurs est équivalente

7) Z suit une loi binomiale, de paramètre n et p

$E(Z) = np$
$V(Z) = np(1-p)$

Exercice 2

Partie A

1) a) Soient (x,y,z) et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f(x,y,z) + \lambda \cdot f(x',y',z')$

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} + \lambda\left(\frac{-x'+2y'+z'}{3}, \frac{-x'-y'-2z'}{3}, \frac{x'+y'+2z'}{3}\right)$$

$$= \frac{-x+2y+z}{3} + \frac{(-\lambda x' + \lambda 2y' + \lambda z')}{3}, \frac{-x-y-2z}{3} + \frac{(-\lambda x' - \lambda y' - \cancel{2} 2z')}{3}, \frac{x+y+2z}{3} + \frac{(\lambda x' + \lambda y' + \lambda 2z')}{3}$$

$$= \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} + \left(\frac{-\lambda x' + 2\lambda y' + \lambda z'}{3}, \frac{-\lambda x' - \lambda y' - \lambda 2z'}{3}, \frac{\lambda x' + \lambda y' + \lambda 2z'}{3}\right)$$

$$= f((x,y,z)) + \lambda \times f((x',y',z'))$$

$\Rightarrow$ L'application f de E dans E est bien linéaire.

De plus comme $E = \mathbb{R}^3$, $\forall_{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3$ donc $\in E$, f est un endomorphisme de E.

b) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base de f

$$B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$$

$$f = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Le noyau de f notée $\mathrm{Ker}(f) = x,y,z \mid f(x,y,z) = 0_E$

alors $\begin{cases} -x+2y+z = 0 \\ -x-y-2z = 0 \\ x+y+2z = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -x+2y+z = 0 \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases}$ $L_3 + L_2$

$\begin{cases} -x+2y+z = 0 \\ -3y-3z = 0 & L_2+L_1 \\ 3y+3z = 0 & L_3+L_1 \end{cases}$

$x = -z$
$y = -z$
$z = z$

$(-1,-1,1)$.

Le noyau est donc de dim $= 3$.

L'application f est injective car en prenant $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$

$-x + 2y + z = 0$ donc $\ker(f) = 0_E$.

c) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1) + f(e_2) + f(e_3))$

$= \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$= \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$

$= 2$

3) a) les vecteurs e_1', e_2' et e_3' sont tous des réels et E est défini dans $\mathbb{R}$ donc $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E

b) $f(e_1') = \left(\frac{1 + 2(-1) + 1}{3}, \frac{1 + 1 - 2}{3}, \frac{-1 - 1 + 2}{3}\right)$

$= (0, 0, 0)$

$f(e_2') = \left(\frac{-2 - 2 + 1}{3}, \frac{-2 + 1 - 2}{3}, \frac{2 + 1 + 2}{3}\right)$

$= (-1, -1; 1)$

$f(e_3') = \left(\frac{1 + 4 + 1}{3}, \frac{1 - 2 - 2}{3}, \frac{-1 + 2 + 2}{3}\right)$

$= (2; -1, 1)$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$