Chapitre 16 : Correction des tests

1 Tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit* $Z = \max(X, Y)$.
Exprimer la fonction de répartition F_Z *de* Z *en fonction des fonctions de répartition* F_X *de* X *et* F_Y *de* Y.

Test 2 (*Voir solution.*)

Soient a *et* b *deux réels strictement positifs et* $X \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(b)$ *deux variables aléatoires indépendantes.*

1. *On pose* $U = \max(X, Y)$. *Déterminer la fonction de répartition de* U.
2. *On pose* $V = \min(X, Y)$.
   (a) *Déterminer la fonction de répartition de* V.
   (b) *Reconnaître la loi de* V.

2 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit* $\mathrm{Z} = \max(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
On note $\mathrm{F_Z}$ *la fonction de répartition de* Z *et* $\mathrm{F_X}$, $\mathrm{F_Y}$ *celles de* X *et de* Y.

- *Soit* $t \in \mathbb{R}$ *et montrons que* $[\mathrm{Z} \leqslant t] = [\mathrm{X} \leqslant t] \cap [\mathrm{Y} \leqslant t]$. *Soit* $\omega \in \Omega$ *; on a :*

$$\omega \in [\mathrm{Z} \leqslant t] \Longleftrightarrow \mathrm{Z}(\omega) \leqslant t \Longleftrightarrow \max(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)) \leqslant t \Longleftrightarrow \mathrm{X}(\omega) \leqslant t \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}(\omega) \leqslant t \Longleftrightarrow \omega \in [\mathrm{X} \leqslant t] \cap [\mathrm{Y} \leqslant t].$$

  Ainsi $[\mathrm{Z} \leqslant t] = [\mathrm{X} \leqslant t] \cap [\mathrm{Y} \leqslant t]$.
- *On en déduit, par indépendance, que pour tout réel* t, $\mathrm{P}([\mathrm{Z} \leqslant t]) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant t])\mathrm{P}([\mathrm{Y} \leqslant t])$.
- *En d'autres termes,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_Z}(t) = \mathrm{F_X}(t)\mathrm{F_Y}(t).$$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *D'après le test 1, comme* X *et* Y *sont indépendantes, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_U}(t) = \mathrm{F_X}(t)\mathrm{F_Y}(t).$$

   Comme $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$ *et* $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(b)$, *on obtient finalement*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_U}(t) = \mathrm{F_X}(t)\mathrm{F_Y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-at})(1 - e^{-bt}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. (a) *D'après l'exemple 13, comme* X *et* Y *sont indépendantes, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_V}(t) = 1 - (1 - \mathrm{F_X}(t))(1 - \mathrm{F_Y}(t)).$$

   Comme $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$ *et* $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(b)$, *on obtient finalement*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_V}(t) = 1 - (1 - \mathrm{F_X}(t))(1 - \mathrm{F_Y}(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

   (b) *La fonction* $\mathrm{F_V}$ *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{E}(a+b)$. *Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que* $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathscr{E}(a+b)$.