

# TP 5-Découverte des chaînes de Markov

Durée : 3h

## 1 Chaîne de Markov

### 1.1 Notion de chaîne de Markov

#### Définition 1 (Chaîne de Markov)

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans un ensemble  $E$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **chaîne de Markov** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(x_0, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+2}$  tels que  $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$  on a

$$P_{[X_0=x_0] \cap \dots \cap [X_n=x_n]}([X_{n+1} = x_{n+1}]) = P_{[X_n=x_n]}([X_{n+1} = x_{n+1}]).$$

Dans ce cas, on dit que

- $E$  est l'**espace d'états** de la chaîne de Markov;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(x, y) \in E^2$  la probabilité  $P_{[X_n=x]}([X_{n+1} = y])$ , notée  $p_{x,y}(n)$  est appelée la **probabilité de transition** pour aller de l'état  $x$  à l'état  $y$  à l'instant  $n$ .

#### Remarque 1

Intuitivement, la variable  $n$  représente le temps et la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  représente l'évolution d'une grandeur aléatoire au cours du temps. La relation

$$P_{[X_0=x_0] \cap \dots \cap [X_n=x_n]}([X_{n+1} = x_{n+1}]) = P_{[X_n=x_n]}([X_{n+1} = x_{n+1}])$$

signifie que le futur (l'état  $X_{n+1}$  à l'instant  $n+1$ ) ne dépend du passé (les états  $X_0, \dots, X_n$ ) que par le présent (l'état  $X_n$  à l'instant  $n$ ).

#### Définition 2 (Chaîne de Markov homogène)

Une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans un ensemble  $E$  est dite **homogène** si pour tout  $(x, y) \in E^2$  les probabilités de transition pour aller de l'état  $x$  à l'état  $y$  ne dépendent pas du temps :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{x,y}(n) = p_{x,y}(0)$$

autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{[X_n=x]}([X_{n+1} = y]) = P_{[X_0=x]}([X_1 = y])$$

On note alors simplement  $p_{x,y}$  les probabilités de transition.

Aramis le chat répartit son temps entre ses trois occupations préférées : dormir, manger et faire sa toilette. Au début de la journée, il dort puis il change d'activité toutes les heures de la façon suivante :

- Si, à l'heure  $n$ , il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité 0.3 et faire sa toilette avec probabilité 0.7.
- Si, à l'heure  $n$ , il est en train de dormir, alors à l'heure  $n+1$  il continue de dormir avec probabilité 0.4, il va manger avec probabilité 0.3 et il va faire sa toilette avec probabilité 0.3.
- Si, à l'heure  $n$ , il est en train de faire sa toilette, il va manger l'heure suivante avec probabilité 0.4 et il va dormir avec probabilité 0.6.

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement d'Aramis. On numérote les activités de 1 à 3 (1 : « Dormir », 2 : « Manger », 3 : « Faire sa toilette ») et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $X_n$  la variable aléatoire égale à l'état du chat à l'instant  $n$ .

- Justifier que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov

- Déterminer les probabilités de transition de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Que peut-on en déduire sur la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

### Diagramme de transition

Une chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec un nombre fini d'états peut être représentée par un graphe orienté pondéré :

- les sommets correspondent aux états ;
- une flèche relie le sommet  $x$  aux sommets  $y$  si  $p_{x,y} > 0$  ; cette flèche est pondérée par  $p_{x,y}$ .

Ce graphe s'appelle le **diagramme de transition** de la chaîne de Markov.

La chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décrivant le comportement d'Aramis le chat a trois états (1, 2 et 3). Son diagramme de transition va donc comporter 3 sommets. Lorsqu'Aramis est dans l'état 1 (« Dormir ») l'instant suivant

- il reste dans l'état 1 avec probabilité 0.4 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 1 pondérée par 0.4 ;
- il va dans l'état 2 (« Manger ») avec probabilité 0.3 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 2 pondérée par 0.3 ;
- il va dans l'état 3 (« Faire sa toilette ») avec probabilité 0.3 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 3 pondérée par 0.3.

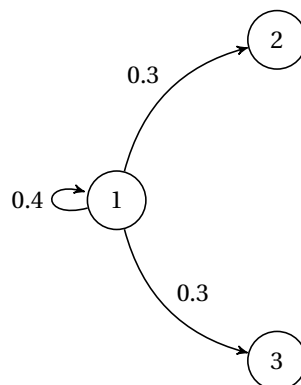


FIGURE 1 – Diagramme de transition (incomplet)

- Compléter le diagramme de transition de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décrivant le comportement d'Aramis.

## 1.2 Matrice de transition

### Définition 3 (Matrice de transition)

On considère une chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec un nombre fini  $m$  d'états numérotés de 1 à  $m$ . La **matrice de transition** de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la matrice  $A = (p_{i,j})$  où  $p_{i,j}$  est la probabilité de transition pour passer de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Autrement dit,  $A = (p_{i,j})$  est la matrice de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad p_{i,j} = P_{[X_0=i]}(X_1 = j).$$

- Déterminer la matrice de transition  $A$  de la chaîne de Markov de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décrivant le comportement d'Aramis.

Dans la suite, on note  $U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$  le vecteur définissant la loi de  $X_n$ .

- A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer  $P(X_{n+1} = 1)$  en fonction de  $P(X_n = 1)$ ,  $P(X_n = 2)$ ,  $P(X_n = 3)$  et des coefficients de la matrice de transition  $A$ .

- Exprimer de même  $P(X_{n+1} = 2)$  et  $P(X_{n+1} = 3)$ . En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = U_n A$ .

- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $A$  et de  $U_0$ . Que signifie le choix  $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ ? Comment obtient-on  $U_n$  dans ce cas?

- Avec Scilab, calculer  $A^5$ ,  $A^{10}$ ,  $A^{20}$ ,  $A^{100}$ . Que remarque-t-on?

- Avec Scilab déterminer le spectre de  $A$ . En déduire que  $A$  est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2 Simulation avec Scilab

### 2.1 Simulation des trajectoires

#### Définition 4 (Trajectoire d'une chaîne de Markov)

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , on appelle **trajectoire de taille  $n$**  la suite finie  $(X_0(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

#### Méthode 1 (Simulation de trajectoire avec Scilab)

Si la matrice de transition  $A$  est déjà définie dans Scilab, la commande

$$\text{grand}(n, 'markov', A, x0)$$

permet de simuler une trajectoire de taille  $n$  dont l'état initial est  $x0$  où  $A$  est la matrice de transition de la chaîne de Markov :

- la trajectoire obtenue démarre à l'instant 1 ;
- les états sont nommées  $1, \dots, m$  où  $m$  est la taille de  $A$ .

- Simuler une trajectoire de la vie d'Aramis sur 100 heures. Combien d'heure passe-t-il à dormir? Manger?

### 2.2 Comportement asymptotique

On souhaite déterminer le comportement du chat après  $n$  heures lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour cela, on compare

- la loi théorique de  $X_n$  donnée par le vecteur  $U_n$ ,
  - une valeur approchée de  $U_n$  obtenue en déterminant l'effectif de chaque état pour un nombre  $N$  de simulations de trajectoires de taille  $n$ .
- Partant de l'état initial  $x0$  quelles commandes faut-il utiliser pour obtenir  $U_n$ ?

On considère le programme incomplet suivant :

```
//Valeur des parametres
N=-----
n=-----
x0 = -----

//Distribution theorique
A=[0.4,0.3,0.3;0.3,0,0.7;0.6,0.4,0]
B=A^n
P=-----

//Valeurs observees
Obs = zeros(1,N)
for i=1:N
    trajectoire = -----
    Obs(i) = -----
end

//Calcul des effectifs observees
v=tabul(Obs)

clf()
//Diagramme des frequences observees
bar(v(:, 1) + 0.5,-----,width=0.4,'red')
//Diagramme de la distribution theorique
bar(1:3,P,width=0.4)
```

- Compléter le programme ci-dessus qui
  - demande à l'utilisateur un entier  $N$ , un entier  $n$  et un état initial  $x_0$ ,
  - stocke dans la variable  $P$  la loi théorique de  $X_n$  donnée par le vecteur  $U_n$ ,
  - simule  $N$  trajectoires et stocke dans  $Obs$  les réalisations de  $X_n$ ,
  - affiche le diagramme en barre des fréquences observées et de la distribution théorique.
- Exécuter le programme pour  $N=1000$ ,  $n=50$ ,  $x_0=1$ .
- Observer le diagramme obtenu et comparer le avec les diagrammes obtenues pour les mêmes valeurs de  $N$  et de  $n$  mais en prenant comme état initial 2 puis 3. Que remarque-t-on?

- Que cela signifie-t-il sur le comportement à terme d'Aramis?

- En admettant que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (c'est-à-dire que les trois suites  $(P(X_n = 1))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(P(X_n = 2))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(P(X_n = 3))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent) qu'elle relation peut-on en déduire entre sa limite  $U_\infty$  et  $A$ ?

**Définition 5** (Distribution stationnaire)

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une chaîne de Markov définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
 Un vecteur ligne  $\pi$  dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients vaut 1 est appelé **distribution stationnaire** ou **loi stationnaire** si

$$\pi A = \pi$$

où  $A$  est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

**Remarque 2**

1. Si  $\pi$  est une distribution stationnaire alors  ${}^t\pi$  est un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre 1.
2. On peut montrer qu'une chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini possède toujours une distribution invariante.
3. Avec une hypothèse supplémentaire (appelée irréductibilité) on peut montrer que chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini possède une unique distribution invariante.

- Que représente le vecteur  $U_\infty$  pour la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

- A l'aide du calcul de  $A^n$  réalisé précédemment, déterminer une loi stationnaire de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .