ECE2-Semaine 3

07/10/20

1 Cours

1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Dimension : définition : espaces vectoriels de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel, dimension de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$. Dans un espace vectoriel de dimension finie n, le cardinal d'une famille libre est $\leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille est une base ; le cardinal d'une famille génératrice est $\geqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille est une base. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité.

Rang : rang d'une famille de vecteurs ; opérations préservant le rang. Rang d'une matrice ; pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(A) \leqslant n$ et $\text{rg}(A) \leqslant p$; le rang d'une matrice et de sa transposée sont égaux ; opérations sur les lignes et les colonnes qui préservent le rang. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le rang.

1.2 Séries

Rappels de première année : série numérique, notation $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$, série convergente/divergente, somme d'une série convergente, télescopage. Si une série converge alors son terme général tend vers 0. Critère de convergence des séries géométriques (dérivées première et seconde) et expression de la somme le cas échéant, convergence des séries exponentielles et expression de la somme.

Séries de Riemann : critère de convergence des séries de Riemann.

Séries à termes positifs : critère de comparaison des séries à termes positifs (majoration par le terme général d'une série convergente / minoration par le terme général d'une série divergente).

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel en déterminant une base.
2. Montrer qu'une famille est une base en montrant
   - qu'elle est libre et que son cardinal est la dimension de l'espace ;
   - ou qu'elle est génératrice et que son cardinal est la dimension de l'espace.
3. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteur, d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss ou de manière astucieuse.
4. Savoir caractériser l'inversibilité d'une matrice en terme de rang.
5. Savoir étudier la nature d'une série en utilisant les outils connus sur les suites (suite des sommes partielles croissante majorée etc…), connaître les propriétés des opérations sur les séries (une somme de séries convergentes est convergente, …), savoir reconnaître un télescopage, reconnaître les séries usuelles (programme d'ECE1).
6. Savoir calculer la somme d'une série en reconnaissant des séries usuelles.
7. Savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs en utilisant le critère de comparaison.

3 Questions de cours

- Définitions : espace vectoriel de dimension finie, rang d'une famille de vecteurs, rang d'une matrice.
- Définition/Théorème : dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Propositions : dimension des espaces vectoriels de référence. Dans un espace vectoriel de dimension finie, lien entre cardinal d'une famille libre et la dimension de l'espace (avec cas d'égalité) ; lien entre cardinal d'une famille génératrice et la dimension de l'espace (avec cas d'égalité). Critère de convergence et somme des séries géométriques/ exponentielle. Critère de convergence des séries de Riemann.