Chapitre 9 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F désigneront des espaces vectoriels et on notera $+$ et $\cdot$ les lois de composition interne et externe associées (cette notation ne fait pas la distinction entre les lois de E et les lois de F).

1 Applications linéaires

1.1 Généralités

Définition 1 (Application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application de E dans F.
On dit que f est **linéaire** si

- $\forall (u, v) \in \mathrm{E}^2,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$,
- $\forall u \in \mathrm{E},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$.

Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme** de E.

Remarque 1

Une application linéaire est donc une application qui respecte la structure d'espace vectoriel.

Notation 1

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels.*

- *On note* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F.
- *On note* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *l'ensemble des endomorphismes de* E.

Exemple 1

1. *L'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f : x \to 3x$ *est une application linéaire de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est un endomorphisme de* $\mathbb{R}$*).*
   En effet : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *, on a*
   $$f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = 3f(x) + 3f(y)$$
   et
   $$f(\lambda x) = 3\lambda x = \lambda \cdot (3x) = \lambda f(x).$$
2. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels, l'application nulle de* E *dans* F *définie par*
   $$\begin{aligned} f : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{F} \\ u &\longmapsto 0_{\mathrm{F}} \end{aligned}$$
   est linéaire.
3. *Soit* E *un espace vectoriel. L'application identité de* E*, notée* id_{E}*, définie par*
   $$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{E} \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$
   est un endomorphisme de E.

Contre-exemple 1

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f : x \mapsto 3x + 1$ *n'est pas linéaire. En effet,*

$$f(0+0) = f(0) = 1 \neq f(0) + f(0) = 2$$

Proposition 1 (Caractérisation des applications linéaires)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application de E dans F. Alors f est linéaire si et seulement si pour tout $(u, v) \in \mathrm{E}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

Méthode 1

1. *En pratique, pour montrer qu'une application est linéaire, on utilise souvent cette caractérisation car elle nécessite moins de vérifications que la définition. A cet effet, la première étape est toujours d'écrire ce que vaut $f(u + \lambda \cdot v)$.*
2. *Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, il vaut vérifier deux choses : la linéarité de f et le fait que pour tout $u \in \mathrm{E}$, $f(u) \in \mathrm{E}$.*

Exemple 2

1. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y \end{aligned}$$

est linéaire.
Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2 + y_2)) = \varphi(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) &= 2(x_1 + \lambda x_2) - 3(y_1 + \lambda y_2) \\ &= 2x_1 - 3y_1 + \lambda(2x_2 - 3y_2) \\ &= \varphi(x_1, y_1) + \lambda\varphi(x_2, y_2). \end{aligned}$$

2. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt \end{aligned}$$

est linéaire.
Soient $(f, g) \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(f + \lambda \cdot g) &= \int_0^1 (f(t) + \lambda g(t))\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt + \lambda \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= \varphi(f) + \lambda\varphi(g) \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\longmapsto \mathrm{P}' \end{aligned}$$

est linéaire.
Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}[\mathrm{X}])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P} + \lambda \cdot \mathrm{Q}) &= (\mathrm{P} + \lambda \cdot \mathrm{Q})' \\ &= \mathrm{P}' + \lambda \cdot \mathrm{Q}' \\ &= \varphi(\mathrm{P}) + \lambda\varphi(\mathrm{Q}) \end{aligned}$$

Test 1 (***Voir solution.***)

Dans chaque cas, montrer que l'application considérée est linéaire et préciser s'il s'agit ou non d'un endomorphisme.

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

2. *L'application*

$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto {}^t\mathrm{M} \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{aligned}$$

4. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. L'application*

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{AM} \end{aligned}$$

Test 2 (***Voir solution.***)

Dans $\mathbb{R}^3$*, on considère la famille* $\mathscr{B}$ *formée des vecteurs*

$$u = (1, 1, 1) \quad ; \quad v = (0, 2, -1) \quad ; \quad w = (-2, 3, 1)$$

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $(3, -5, 2)$ *dans cette base.*
3. *On considère une application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$f(u) = 2 \quad ; \quad f(v) = -1 \quad ; \quad f(w) = 0.$$

   Calculer $f((3, -5, 2))$.

Proposition 2

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une **application linéaire** de E dans F. Alors

1. $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f(u_k)$.

Démonstration :

1. Comme $0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$, par linéarité on obtient

$$f(0_{\mathrm{E}}) = f(0_{\mathrm{E}} + 0_{\mathrm{E}}) = f(0_{\mathrm{E}}) + f(0_{\mathrm{E}})$$

   donc $f(0_{\mathrm{E}}) = 0_{\mathrm{F}}$.
2. Par récurrence. ■

1.2 L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$

Proposition 3 (Structure de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Alors les ensembles $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ sont des espaces vectoriels.

En particulier, la somme de deux applications linéaires de E dans F est une application linéaire de E dans F et le produit d'une application linéaire de E dans F par un nombre réel est une application linéaire de E dans F.

Démonstration :

On va montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(E,F)$ des fonctions de E dans F.

1. On a bien $\mathscr{L}(E,F) \subset \mathscr{F}(E,F)$.
2. $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide car on a vu que l'application nulle de E dans F est linéaire.
3. Montrons que $\mathscr{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.
   Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $f+\lambda \cdot g$ est une application linéaire de E dans F. Pour cela, soient $(u,v) \in E^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et calculons $(f+\lambda \cdot g)(u+\mu \cdot v)$:

$$\begin{aligned}(f+\lambda\cdot g)(u+\mu\cdot v) &= f(u+\mu\cdot v)+\lambda\cdot g(u+\mu\cdot v) \quad \text{par définition des lois } + \text{ et } \cdot \text{ de } \mathscr{F}(E,F)\\ &= f(u)+\mu\cdot f(v)+\lambda\cdot(g(u)+\mu\cdot g(v)) \quad \text{par linéarité de } f \text{ et de } g\\ &= f(u)+\lambda\cdot g(u)+\mu\cdot(f(v)+\lambda\cdot g(v))\\ &= (f+\lambda\cdot g)(u)+\mu\cdot(f+\lambda\cdot g)(v)\end{aligned}$$

   Cela montre que $f+\lambda\cdot g$ est linéaire. Ainsi $\mathscr{L}(E,F)$ est stable par combinaison linéaire.

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\mathscr{L}(E,F)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$. En particulier, $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. ■

Exemple 3

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X]\\ P &\longmapsto P' + 2P(X+1)\end{aligned}$$

est linéaire car c'est une combinaison linéaire des applications linéaires rencontrées à l'exemple 2 et au test 1.

Proposition 4 (Composition)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E)$.

Exemple 4

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X]\\ P &\longmapsto P(X+2)\end{aligned}$$

est linéaire car $f = \Delta \circ \Delta$ où Δ est l'application linéaire du test 1.

Définition 2 (Puissance d'un endomorphisme)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On définit les puissances de f par récurrence par

$$\begin{cases} f^0 = id_E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

Exemple 5

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\longmapsto (2x, 2y)\end{aligned}$$

1. *Vérifions que f est linéaire :*

pour tout $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1)+\lambda\cdot(x_2,y_2)) &= (2(x_1+\lambda x_2), 2(y_1+\lambda y_2)) \\ &= (2x_1, 2y_1)+\lambda\cdot(2x_2,2y_2) \\ &= f((x_1,y_1))+\lambda\cdot f((x_2,y_2)) \end{aligned}$$

2. Déterminons f^2 et f^3.
   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
   $$f^2(x,y) = f(f(x,y)) = f(2x,2y) = (4x,4y)$$
   et
   $$f^3(x,y) = f\circ f^2(x,y) = f(4x,4y) = (8x,8y)$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer f^n.
   Par récurrence, on montre que
   $$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f^n(x,y) = (2^n x, 2^n y).$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Pour chaque application linéaire φ ci-dessous, déterminer φ^2 et φ^3.

1. $$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X+3)\end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned}\varphi : \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'\end{aligned}$$

Test 4 (*Voir solution.*)

Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent, ie :

$$u\circ v = v\circ u.$$

1. *Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^k\circ v = v\circ u^k$.*
2. *Montrer que pour tout entier naturel n :*
   $$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^k\circ v^{n-k}.$$

1.3 Isomorphismes, automorphismes

Rappel(s) 1

Soit f une application de E dans F

1. *On dit que f est **injective** si tout éléments de F admet au plus un antécédent par f.*
2. *On dit que f est **surjective** si tout éléments de F admet au moins un antécédent par f.*
3. *On dit que f est **inbijective** si tout éléments de F admet exactement un antécédent par f (autrement dit si f est injective et surjective).*

Si f est bijective, on note f^{-1} sa bijection réciproque. On a alors

$$f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_E.$$

Définition 3 (Isomorphisme, automorphisme)

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- On appelle **isomorphisme** de E dans F tout application linéaire bijective de E dans F. L'ensemble des isomorphismes de E dans F est noté $\mathrm{GL}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
- On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme bijectif de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

S'il existe un isomorphisme entre E et F, on dit que E et F sont **isomorphes**.

Exemple 6

Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \\ (a,b) &\longmapsto a\mathrm{X}+b\end{aligned}$$

1. *Vérifions que φ est linéaire.*
   Pour tout $(a_1,b_1)\in\mathbb{R}^2$, $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$
   $$\begin{aligned}\varphi((a_1,b_1)+\lambda(a_2,b_2)) &= (a_1+\lambda a_2)\mathrm{X}+b_1+\lambda b_2 \\ &= a_1\mathrm{X}+b_1+\lambda(a_2\mathrm{X}+b_2) \\ &= \varphi((a_1,b_1))+\lambda\varphi((a_2,b_2))\end{aligned}$$
   Ainsi φ est linéaire.
2. *Montrons que φ est un isomorphisme.*
   L'application φ est clairement surjective. De plus, pour tout $(a_1,b_1)\in\mathbb{R}^2$ et $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}^2$
   $$\varphi((a_1,b_1))=\varphi((a_2,b_2)) \Longrightarrow a_1\mathrm{X}+b_1=a_2\mathrm{X}+b_2 \Longrightarrow (a_1,b_1)=(a_2,b_2).$$
   Donc φ est injective.
   Ainsi φ est bijective. C'est donc un isomorphisme.

Proposition 5

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors f^{-1} est linéaire. En particulier, $f^{-1}\in\mathrm{GL}(\mathrm{F},\mathrm{E})$.

2 Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Noyau

Définition 4 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle **noyau** de f et on note $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f)=\left\{u\in\mathrm{E}\mid f(u)=0_\mathrm{F}\right\}$$

Remarque 2

D'après la proposition 2, on a toujours $0_\mathrm{E}\in\ker(f)$.

Proposition 6

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode 2

1. *Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, il faut résoudre l'équation $f(u) = 0_F$ qui se traduit par un système linéaire.*
2. *La proposition précédente fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un (sous)-espace vectoriel : en montrant que c'est le noyau d'une application linéaire.*

Exemple 7

On reprend les applications linéaires de l'exemple 2.

1. *Déterminons le noyau de*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y \end{aligned}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker(\varphi_1) &\iff \varphi_1((x, y)) = 0 \\ &\iff 2x - 3y = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi_1) = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{3}{2}, 1\right)\right)$

2. *Déterminons le noyau de*

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi_2) &\iff P' = 0 \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ k a_k = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi_2) = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0[X]$

Exemple 8

1. *L'ensemble* $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *car c'est le noyau de l'application linéaire* φ_1 *de l'exemple précédent.*
2. *L'ensemble* $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' = 0\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$ *car c'est le noyau de l'application linéaire* φ_2 *de l'exemple précédent.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Dans chaque cas, déterminer le noyau de l'application linéaire (base du noyau et dimension).

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

2. *L'application*

$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto {}^t M \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\begin{aligned} m_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 (Noyau et injectivité)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.

Remarque 3

*En général, pour montrer que qu'une application f de E dans F est injective, il faut vérifier que pour tout $v \in \mathrm{F}$ l'équation $f(u) = v$ possède **au plus** une solution. La proposition précédente assure que, lorsque f est **linéaire**, il suffit de le vérifier pour $v = 0_\mathrm{F}$ (on a toujours $0_\mathrm{E} \in \ker(f)$ d'après la proposition 2).*

Démonstration : Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Remarquons que d'après la proposition 2, on a toujours $0_\mathrm{E} \in \ker(f)$.

- $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors 0_F possède au plus un antécédent. Or $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$ donc 0_E est le seul antécédent de 0_F par f. Ainsi $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
- $\Leftarrow$ Supposons que $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$. Soit $(u, v) \in \mathrm{E}^2$ tels que $f(u) = f(v)$. Alors, par linéarité de f on a

$$0_\mathrm{F} = f(u) - f(v) = f(u - v)$$

donc $u - v \in \ker(f)$. Par conséquent, $u - v = 0_\mathrm{E}$ ie $u = v$. Donc f est injective. ■

Exemple 9

Parmi les applications linéaires de l'exemple 7, aucune n'est injective.

Test 6 (*Voir solution.*)

Parmi les applications linéaires du test 5, lesquelles sont injectives ?

2.2 Image

Définition 5 (Image d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ f(u),\ u \in \mathrm{E} \right\}$$

Proposition 8

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors, l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque 4

Une autre façon de décrire l'image de $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ v \in \mathrm{F} \mid \exists u \in \mathrm{E}\ f(u) = v \right\}$$

Exemple 10

1. *Déterminons l'image de*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathbb{R}$ *car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1\left(\left(\frac{x}{2}, 0\right)\right) = x$.*

2. *Déterminons l'image de*

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{M} - {}^t\mathrm{M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi_2) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer l'image de l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f((x,y,z)) = (x-z, x+y).$$

Proposition 9 (Image et surjectivité)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{F}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

On considère l'application $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f:(x,y)\mapsto(2x-y, 2y-3x)$.

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de f et l'image de f.*
3. *f est-elle injective ? Surjective ?*

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Rang d'une application linéaire

Définition 6 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 5

Comme $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F *et que* F *est de dimension finie,* $\mathrm{Im}(f)$ *est bien de dimension finie et* $\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim(\mathrm{F})$ *avec égalité si et seulement si f est surjective.*

Proposition 10

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On suppose que E est de dimension finie et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$$

En particulier, $\mathrm{rg}(f)\leqslant\dim(\mathrm{E})$.

Méthode 3

Ainsi pour déterminer le rang d'une application linéaire $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ il suffit de déterminer le rang de la famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ *où* $(e_1,\dots,e_n)$ *est une base de* E

Exemple 11

Soit f l'application linéaire définie par

$$f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \textit{car } \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice et libre de* $\operatorname{Im}(f)$ *donc* $\operatorname{rg}(f) = 2$.

Exemple 12

Déterminons le rang de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))) \\
&= \operatorname{Vect}((1,1), (0,1), (-1,0)) \\
&= \operatorname{Vect}((0,1), (1,0))
\end{aligned}$$

Donc l'application est de rang 2 *(elle est donc surjective).*

Test 9 (*Voir solution.*)

Soit φ l'application linéaire définie par

$$\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$
$$\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}$$

Déterminer son rang.

Théorème 1 (Théorème du rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f)$$

autrement dit

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Exemple 13

Soit φ l'application définie par

$$\varphi : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$$
$$\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}'$$

Déterminons son rang.

On a vu à l'exemple 7 que $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$*, ainsi* $\dim(\ker(\varphi)) = 1$*. D'après le théorème du rang, on a donc*

$$4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 1 + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Ainsi $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$*.*

De plus, $\mathrm{Im}(\varphi)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_2[X]$ *de dimension* $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*. Donc* $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$ *et* φ *est surjective.*

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit φ *l'application définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto (P(1), P(2)) \end{aligned}$$

1. *Montrer que* φ *est linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *et en déduire le rang de* φ*.*
3. *En déduire la dimension de* $\ker(\varphi)$*.*
4. *L'application* φ *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Conséquences 1

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si $\dim(E) < \dim(F)$ alors f n'est pas surjective.
2. Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors f n'est pas injective.

En particulier, si $\dim(E) \neq \dim(F)$, il n'existe pas d'isomorphisme entre E et F

Conséquences 2

Soient E, F deux espaces vectoriels de **même** dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Remarque 6

En particulier, si f *est un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie on a donc*

$$f \textit{ est injective} \iff f \textit{ est surjective} \iff f \textit{ est bijective}$$

Exemple 14

1. *L'application linéaire*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

   est-elle injective ?

   Non car $\dim(\mathbb{R}_n[X]) > \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$*.*

2. *L'application linéaire*

$$\begin{aligned} f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (a+b, a-b, c+d, c-d) \end{aligned}$$

   est-elle un isomorphisme ?

   Comme $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$*,* f *est un isomorphisme si et seulement si elle est injective (elle est bien linéaire d'après l'énoncer !).*

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & - & b & = & 0 \\ c & + & d & = & 0 \\ c & - & d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ 2a & & & = & 0 \\ c & + & d & = & 0 \\ 2c & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff a = 0,\ c = 0 \quad \textit{puis} \quad b = 0,\ c = 0$$

Ainsi, $\ker(f) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. *L'application f est donc injective donc bijective ; c'est un isomorphisme.*

Test 11 (*Voir solution.*)

Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y \\ z \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conséquences 3

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme de E dans F alors dim(E) = dim(F).

On s'intéresse à la réciproque : deux espaces vectoriels de même dimension finie sont-ils isomorphes ?

Proposition 11

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.
Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est entièrement déterminée par la données des vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Cela signifie que pour toute famille $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{F}^n$ il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = u_i$$

Remarque 7

En particulier, si une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et que l'on a deux applications linéaires f et g de E dans F telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$$

alors $f = g$.

Exemple 15

1. *Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que*

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \quad ; \quad f(e_2) = e_1 \quad ; \quad f(e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3$$

Déterminons l'expression de f.

(a) *Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On commence par déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3) :*
(e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

On dit qu'on a décomposé (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3).

(b) *On détermine $f((x, y, z))$ par linéarité :*

$$
\begin{aligned}
f((x,y,z)) = f(xe_1+ye_2+ze_3) &= xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) \quad \text{par linéarité de } f\\
&= x(e_1+2e_2)+ye_1+z(e_1-2e_2+e_3)\\
&= (x+y+z)e_1+(2x-2z)e_2+ze_3\\
&= (x+y+z,2x-2z,z)
\end{aligned}
$$

Ainsi, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f((x,y,z)) = (x+y+z,2x-2z,z)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

2. *Soient E et F deux espaces vectoriels de* **même** *dimension finie n. On va montrer que E et F sont isomorphes.*
   Soient $\mathscr{B}_\mathrm{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (f_1,\dots,f_n)$ une base de F. Il existe une unique application linéaire φ de E dans F telle que
   $$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \varphi(e_i) = f_i$$
   Montrons que φ est un isomorphisme.
   D'après la proposition 10, on a
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_n) = \mathrm{F}$$
   car $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (f_1,\dots,f_n)$ est une base de F donc en particulier une famille génératrice de F.
   Ainsi, φ est surjective. Comme $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$, elle est bijective. Donc φ est un isomorphisme de E dans F.

Test 12 (*Voir solution.*)

Soient (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ telle que

$$f(e_1) = 1 \quad ; \quad f(e_2) = \mathrm{X}-2 \quad ; \quad f(e_3) = \mathrm{X}^2+\mathrm{X}-1$$

1. *Déterminer l'expression de f.*
2. *Déterminer le rang de f.*
3. *Est-ce un isomorphisme ?*

3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 7 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

1. Soit $u\in\mathrm{E}$ et notons $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$. On appelle **matrice de u dans la base $\mathscr{B}$** et on note $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u)$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.
2. Soit $(u_1,\dots,u_p)\in\mathrm{E}^p$ une famille de vecteurs de E. On appelle **matrice de $(u_1,\dots,u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$** et on note $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u_1,\dots,u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est la $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u_j)$.

Remarque 8

Si E est un espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$ une base de E, on peut montrer que l'application

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\
u &\longmapsto \mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u)
\end{aligned}
$$

est un isomorphisme.

Exemple 16

Dans $\mathbb{R}^3$ soit $\mathscr{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

1. *La famille $\mathscr{B}$ est une base car*

   on voit facilement qu'elle est libre et son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$.

2. *Soient $u = (0,6,-1)$ et $v = (2,2,0)$. Déterminons $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u)$, $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(v)$ et $\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u,v)$.*

On a

$$u=-(1,1,1)+7(1,1,0)-6(1,0,0) \quad \textit{et} \quad v=2(1,1,0)$$

donc les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$ sont $(-1,7,-6)$ et les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$ sont $(0,2,0)$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}-1\\7\\-6\end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u,v)=\begin{pmatrix}-1&0\\7&2\\-6&0\end{pmatrix}$$

Exemple 17

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ on considère la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ et le polynôme $\mathrm{P}=2(\mathrm{X}-1)^2-3(\mathrm{X}-1)-4$.

1. *Trouver la matrice de P dans la base canonique.*

$$\mathrm{P}=2\mathrm{X}^2-7\mathrm{X}+1 \quad \textit{donc} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\mathrm{P})=\begin{pmatrix}1\\-7\\2\end{pmatrix}.$$

2. *On considère la famille $\mathscr{B}_1=(1,(\mathrm{X}-1),(\mathrm{X}-1)^2)$.*
   (a) *La famille $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ car*
   c'est une famille échelonnée de polynômes non nuls donc elle est libre, et son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   (b) *Déterminons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathrm{P})$.*
   Les coordonnées de P dans $\mathscr{B}_1$ sont $(-4,-3,2)$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathrm{P})=\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Test 13 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ on considère la famille $\mathscr{B}=(1,\mathrm{X}+1,\mathrm{X}^2+1)$ et les polynômes $\mathrm{P}=3\mathrm{X}^2$, $\mathrm{Q}=2+\mathrm{X}-\mathrm{X}^2$.

1. *Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.*
2. *Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{P},\mathrm{Q})$.*

Définition 8 (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On note $p\in\mathbb{N}^*$ la dimension de E et $n\in\mathbb{N}^*$ la dimension de F et on considère $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ une base de F.
Soit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle **matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$** la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)$ définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f(e_1),\dots,f(e_p)).$$

Il s'agit d'une matrice de taille $n\times p$.

Notation 2

Pour un endomorphisme $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ on notera $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)$ pour désigner $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)$.

Méthode 4

Pour déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)$ d'une application linéaire :

1. *on commence par calculer l'image par f de chaque élément de la base $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$;*
2. *on détermine les coordonnées dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ des vecteurs images déterminés à l'étape précédente ;*
3. *la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ des images par f des éléments de $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$.*

Exemple 18

On considère l'application linéaire $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f((x,y))=(2x-2y,2x+4y,-y).$$

1. *Déterminons la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ où $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.*

On a $\mathscr{B}_2 = ((1,0),(0,1))$ *et* $\mathscr{B}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. *De plus,*

$$f((1,0)) = (2,2,0) = 2(1,0,0)+2(0,1,0) \quad ; \quad f((0,1)) = (-2,4,-1) = -2(1,0,0)+4(0,1,0)-(0,0,1).$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3}((2,2,0),(-2,4,-1)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Déterminons la matrice de* f *dans les bases* $\mathscr{B} = ((1,1),(1,0))$ *et* $\mathscr{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.
   On a,

$$f((1,0)) = (2,2,0) = 2(1,1,0) \quad ; \quad f((1,1)) = (0,6,-1) = -(1,1,1)+7(1,1,0)-6(1,0,0).$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}((0,6,-1),(2,2,0)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 19

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ *définie par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = P'.$$

Déterminons la matrice de f *dans les bases* $\mathscr{B}_3$ *et* $\mathscr{B}_2$ *où* $\mathscr{B}_2$ *et* $\mathscr{B}_3$ *sont les bases canoniques de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$ *respectivement.*

On a $\mathscr{B}_3 = (1,X,X^2,X^3)$ *et* $\mathscr{B}_2 = (1,X,X^2)$. *De plus,*

$$f(1) = 0 \quad ; \quad f(X) = 1 \quad ; \quad f(X^2) = 2X \quad ; \quad f(X^3) = 3X^2.$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(0,1,2X,3X^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Test 14 (***Voir solution.***)

Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *, on considère la base canonique* $\mathscr{B}$ *et l'endomorphisme* φ *défini par*

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = {}^t M.$$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.

Proposition 12 (Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E et $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de F et on considère $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Remarque 9

En particulier, une fois les bases $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$ *fixées :*

1. *toutes application linéaire possède une unique représentation matricielle dans ces bases,*
2. *toute matrice* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est l'unique représentation matricielle dans ces bases d'une unique application* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
3. *pour tout* $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) \quad et \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f) = \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Exemple 20

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Déterminons f.*

Si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, on a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = A.$$

Cela signifie que la i-ième colonne de A *représente les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi*

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 = (2,1,3) \quad ; \quad f(e_2) = e_1 + 4e_3 = (1,0,4) \quad ; \quad f(e_3) = e_1 + e_2 - 2e_3 = (1,1,-2).$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par linéarité de f on trouve que

$$\begin{aligned} f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= (2x + y + z, x + z, 3x + 4y - 2z). \end{aligned}$$

Test 15 (***Voir solution.***)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer f.

Conséquences 4

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F) \quad \text{et} \quad \dim(\mathscr{L}(E)) = \dim(E)^2.$$

3.3 Lien entre applications linéaires et matrices associées

Proposition 13

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $u \in E$ et $v \in F$. Alors :

$$v = f(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(u)) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u).$$

Conséquences 5 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $u \in E$.
Si les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_E$ sont $(x_1, \ldots, x_p)$ alors les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ sont données par le vecteur colonne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Conséquences 6

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $u \in E$.
Alors $u \in \ker(f)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u) = 0$.

Exemple 21

1. *Soit f l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base canonique est*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminons l'image de X^2+1 *par* f.

Les coordonnées de X^2+1 *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *sont* $(1,0,1)$ *donc les coordonnées de* $f(X^2+1)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *sont :*

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$f(X^2+1) = 2+4X.$$

2. *Soient* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et* $\mathscr{B}' = (1, X+1, X^2+X+1)$. *On considère* g *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans les bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *est* B.

Déterminons $g(X^2+1)$. *Les coordonnées de* X^2+1 *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *sont* $(1,0,1)$ *donc les coordonnées de* $g(X^2+1)$ *dans la base* $\mathscr{B}'$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *sont :*

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$g(X^2+1) = 2+4(1+X) = 6+4X.$$

Test 16 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 14 (Composition et représentation matricielle)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Conséquences 7

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On considère $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(f^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(f)\right)^k.$$

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f est inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}.$$

Exemple 22

Soit

$$h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto P'(X+1)$$

Déterminons la matrice de h dans la base canonique.

h est la composée $g\circ f$ où $f : P \mapsto P(X+1)$ et $g : P \mapsto P'$. Or

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(h) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 23

Soit

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto P(X+1)$$

Montrons que f est inversible et déterminons son inverse.

Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible car de rang 3. Par pivot de Gauss, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc f^{-1} est l'application linéaire définie par

$$f^{-1}(1) = 1 \quad ; \quad f^{-1}(X) = X-1 \quad ; \quad f^{-1}(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

Ainsi

$$f^{-1} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \mapsto P(X-1)$$

Test 17 (***Voir solution.***)

On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x-y, x+y) \qquad\qquad (x,y) \longmapsto (3x+y, 2x, 3y)$$

1. *On note A et B les matrice de f et de g dans les bases canoniques. Déterminer A et B.*
2. *Déterminer l'expression de $g\circ f$ et en déduire la matrice C de $g\circ f$ dans les bases canoniques.*
3. *Vérifier qu'on a bien $C = BA$.*

Proposition 15 (Rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On considère $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ une base de E et $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ une base de F.
On a
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_\mathrm{E},\mathscr{B}_\mathrm{F}}(f)\right).$$

3.4 Changement de base

Définition 9 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}' = (e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$** et on note $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1,\dots,e'_n)$$

Remarque 10

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et la matrice de id_E dans les base de $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$:
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})$$
(⚠Attention à l'ordre des bases!)

Exemple 24

1. *Si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = ((1,2,0),(0,1,1),(2,0,2))$ alors*
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. *Si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B}' = (1,(\mathrm{X}-1),(\mathrm{X}-1)^2,(\mathrm{X}-1)^3)$ alors*
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$:
$$\left(\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

Exemple 25

On reprend l'exemple précédent où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B}' = (1,(\mathrm{X}-1),(\mathrm{X}-1)^2,(\mathrm{X}-1)^3)$. Déterminons les coordonnées de X^3 dans la base $\mathscr{B}'$.

On trouve par le calcul que
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
La dernière colonne correspond aux coordonnées de X^3 dans la base $\mathscr{B}'$.

Proposition 17 (Formules de changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E.

1. $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$.
2. Soit $u \in \mathrm{E}$.
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u).$$
Autrement dit, la multiplication à gauche par la matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ permet de déterminer les coordonnées de u dans "l'ancienne" base $\mathscr{B}$ à partir de ses coordonnées dans la "nouvelle" base $\mathscr{B}'$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Remarque 11

En se souvenant que $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})$, la proposition ci-dessus est une conséquence des propositions 13 et 14 :

1. *la composition $(\mathrm{E},\mathscr{B}'') \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{E}} (\mathrm{E},\mathscr{B}') \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{E}} (\mathrm{E},\mathscr{B})$ donne le premier point grâce à la proposition 14 ;*
2. *le deuxième point est une conséquence directe de la proposition 13*
3. *la composition $(\mathrm{E},\mathscr{B}') \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{E}} (\mathrm{E},\mathscr{B}) \xrightarrow{f} (\mathrm{E},\mathscr{B}) \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{E}} (\mathrm{E},\mathscr{B}')$ donne le dernier point grâce à la proposition 14.*

Exemple 26

On reprend l'exemple précédent où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B}' = (1,(\mathrm{X}-1),(\mathrm{X}-1)^2,(\mathrm{X}-1)^3)$. Déterminons les coordonnées de $\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}^2 + 7\mathrm{X} - 5$ dans la base $\mathscr{B}'$.

On connaît les coordonnées dans la base canonique, ce sont $(-5,7,-3,2)$. De plus, on a calculé $\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$:

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$ sont donc

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{P} = 1 + 7(\mathrm{X}-1) + 3(\mathrm{X}-1)^2 + 2(\mathrm{X}-1)^3$.

Exemple 27

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1))$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice B de f dans la base canonique.

La matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}'$ est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dont l'inverse est $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}\mathrm{P}$ donc $\mathrm{B} = \mathrm{P}\mathrm{A}\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Test 18 (*Voir solution.*)

Soit $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (5,-2,2)$ et $v_3 = (-1,1,2)$.

1. *On note $\mathscr{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$.*
   (a) *Montrer que $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Donner la matrice de passage P de la base canonique à $\mathscr{B}_1$.*
   (c) *Donner la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base canonique.*
2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :*
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Déterminer la matrice* B *de* f *dans la base* $\mathcal{B}_1$.

(b) *Calculer* $f(v_1)$, $f(v_2)$ *et* $f(v_3)$ *et retrouver l'expression de* B.

Définition 10 (Matrices semblables)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Proposition 18

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme (dans des bases éventuellement différentes).

4 Objectifs et erreurs à éviter

4.1 Objectifs

1. Savoir déterminer si une application est linéaire, est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire et en déduire si elle est injective ou surjective.
3. Savoir calculer le rang d'une application linéaire (avec la définition ou à partir d'une représentation matricielle).
4. Savoir et savoir utiliser le théorème du rang et ses conséquences.
5. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
6. Savoir, à partir de la matrice d'une application linéaire, déterminer son noyau, son image, son rang.
7. Savoir déterminer une matrice de changement de bases.
8. Savoir utiliser les formules de changement de bases.

4.2 Erreurs à éviter

1. Il ne faut pas confondre la caractérisation des sous-espaces vectoriels et la caractérisation des applications linéaires. En particulier, si φ est une application linéaire, les assertions du type « φ est non vide » ou « φ est stable par combinaison linéaire » n'ont pas de sens !
2. Si φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel, φ^n désigne une composition et non une multiplication !
3. Le noyau $\ker(f)$ d'une application linéaire est un ensemble. En particulier, écrire $\ker(f) = 0_E$ n'a pas de sens !

5 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soient* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'))\\ &= (x+\lambda x'-(z+\lambda z'), x+\lambda x'+y+\lambda y')\\ &= (x-z+\lambda(x'-z'), x+y+\lambda(x'+y'))\\ &= (x-z, x+y)+\lambda(x'-z', x'+y')\\ &= f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).\end{aligned}$$

Comme $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré que*

$$\forall((x,y,z),(x',y',z'))\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad f((x,y,z)+\lambda(x',y',z'))=f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).$$

Ainsi f *est linéaire. Ce n'est pas un endomorphisme car l'ensemble de départ et d'arrivée ne sont pas égaux.*

2. *Soient* $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} t(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) &= {}^t(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\\ &= {}^t\mathrm{M}+{}^t(\lambda\mathrm{N})\\ &= {}^t\mathrm{M}+\lambda{}^t\mathrm{N}\\ &= t(\mathrm{M})+\lambda t(\mathrm{N})\end{aligned}$$

Comme $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré que*

$$\forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad t(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})=t(\mathrm{M})+\lambda t(\mathrm{N}).$$

Ainsi t *est linéaire. C'est un endomorphisme si* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})=\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *c'est-à-dire si* $n=p$.

3. *Soient* $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in(\mathbb{R}[\mathrm{X}])^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\Delta(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})=(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1)=\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)+\lambda\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1)=\Delta(\mathrm{P})+\lambda\Delta(\mathrm{Q}).$$

Comme $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in(\mathbb{R}[\mathrm{X}])$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré que*

$$\forall(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in(\mathbb{R}[\mathrm{X}]),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \Delta(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})=\Delta(\mathrm{P})+\lambda\Delta(\mathrm{Q}).$$

Ainsi Δ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. *Soient* $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) &= \mathrm{A}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\\ &= \mathrm{AM}+\lambda\mathrm{AN}\\ &= m_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})+\lambda m_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}).\end{aligned}$$

Comme $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré que*

$$\forall(\mathrm{M},\mathrm{N})\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad m_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})=m_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})+\lambda m_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}).$$

Ainsi m_{A} *est un endomorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Montrons que c'est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_1 & & & + & 5\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \quad \mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2+2\mathrm{L}_3\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ & & & & 11\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \quad \mathrm{L}_2\to\mathrm{L}_2-3\mathrm{L}_1\\ &\iff \lambda_1=\lambda_3=\lambda_2=0.\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (u,v,w) *est libre. De plus, elle est de cardinal* $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ *: c'est donc une base de* $\mathbb{R}^3$.

2. On a
$$(3,-5,2)=\frac{13}{11}u-\frac{19}{11}v-\frac{10}{11}w$$
et les coordonnées de $(3,-5,2)$ dans la base (u,v,w) sont donc $\left(\frac{13}{11},-\frac{19}{11},-\frac{10}{11}\right)$.

3. On considère une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ telle que
$$f(u)=2 \quad ; \quad f(v)=-1 \quad ; \quad f(w)=0.$$
Par linéarité de f, on trouve :
$$f((3,-5,2))=f\left(\frac{13}{11}u-\frac{19}{11}v-\frac{10}{11}w\right)=\frac{13}{11}f(u)-\frac{19}{11}f(v)-\frac{10}{11}f(w)=\frac{45}{11}.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

Pour chaque application linéaire f ci-dessous, déterminer f^2 et f^3.

1. Soit $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a
$$f^2(\mathrm{P})=f(f(\mathrm{P}))=f(\mathrm{P}(\mathrm{X}+3))=\mathrm{P}(\mathrm{X}+3+3)=\mathrm{P}(\mathrm{X}+6)$$
et
$$f^3(\mathrm{P})=f(f^2(\mathrm{P}))=f(\mathrm{P}(\mathrm{X}+6))=\mathrm{P}(\mathrm{X}+3+6)=\mathrm{P}(\mathrm{X}+9).$$
Ainsi $f^2:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}(\mathrm{X}+6)$ et $f^3:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}(\mathrm{X}+9)$.

2. Soit $f\in\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On a
$$\varphi^2(f)=\varphi(\varphi(f))=\varphi(f')=f''$$
et
$$\varphi^3(f)=\varphi(\varphi^2(f))=\varphi(f'')=f^{(3)}.$$
Ainsi, $\varphi^2:f\mapsto f''$ et $\varphi^3:f\mapsto f^{(3)}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

1. Par récurrence :
   - Initialisation : le cas $k=0$ est évident.
   - Hérédité : supposons que $u^k\circ v=v\circ u^k$ pour un certain $k\in\mathbb{N}$ et montrons que
   $$u^{k+1}\circ v=v\circ u^{k+1}.$$
   On a
   $$\begin{aligned}u^{k+1}\circ v=u\circ u^k\circ v&=u\circ v\circ u^k &&\text{par hypothèse de récurrence}\\&=v\circ u\circ u^k &&\text{car } u \text{ et } v \text{ commutent}\\&=v\circ u^{k+1}\end{aligned}$$
   Ainsi la propriété est vraie au rang $k+1$.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, on a montrer que
   $$\forall k\in\mathbb{N},\quad u^k\circ v=v\circ u^k.$$

2. Par récurrence :
   - Initialisation : le cas $n=0$ est évident.
   - Hérédité : supposons la propriété vrai pour un certain $n\in\mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a
   $$\begin{aligned}(u+v)^{n+1}&=(u+v)\circ(u+v)^n\\&=(u+v)\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k\circ v^{n-k}\right) &&\text{par hypothèse de récurrence}\\&=u\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k\circ v^{n-k}\right)+v\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k\circ v^{n-k}\right) &&\text{par définition de } u+v\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u\circ u^k\circ v^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v\circ u^k\circ v^{n-k} &&\text{par linéarité de } u \text{ et de } v\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente dans la deuxième somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k+1}\circ v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v\circ v^{n-k}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}u^{i}\circ v^{n+1-i} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n+1-k} \quad \text{en faisant le changement de variable } i=k+1\\
&= \binom{n}{n}u^{n+1}\circ v^{0} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}u^{i}\circ v^{n+1-i} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n+1-k} + \binom{n}{0}u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= u^{n+1}\circ v^{0} + \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)u^{i}\circ v^{n+1-i} + u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= u^{n+1}\circ v^{0} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}u^{i}\circ v^{n+1-i} + u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}u^{i}\circ v^{n+1-i}
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion : par le principe de récurrence, on a montrer que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n-k} = v\circ u^{k}.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors*

$$f((x,y,z))=(0,0)\iff x-z=0 \quad \text{et} \quad x+y=0 \iff x=z \quad \text{et} \quad y=-x.$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(x,-x,x),x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,-1,1)).$$

Donc une base de $\ker(f)$ *est* $(1,-1,1)$ *et sa dimension est égale à* 1.

2. *On voit facilement que* $\ker(t)=\{0\}$.

3. *Soit* $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in\ker(m_{\mathrm{A}}) \iff \mathrm{AM}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 2(x+z) & 2(y+t)\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 0\\ y & + & t & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -z\\ y & = & -t\end{array}\right.\\
&\iff \mathrm{M}=\begin{pmatrix}-z & -t\\ z & t\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\ker(m_{\mathrm{A}})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$. *Comme les matrices* $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *sont non colinéaires, la famille* $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\ker(m_{\mathrm{A}})$ *et* $\dim(\ker(m_{\mathrm{A}}))=2$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

Seule l'application t est injective.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f)=\left\{(x-z,x+y),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} &= \left\{(x,x)+(-z,0)+(0,y),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{x(1,1)+z(-1,0)+y(0,1),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&= \mathrm{Vect}((1,1),(-1,0),(0,1))=\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère l'application $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f:(x,y)\mapsto(2x-y,2y-3x)$.

1. *Soient* $((x,y),(x',y'))\in\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} f((x,y)+\lambda(x',y')) &= f((x+\lambda x',y+\lambda y')) \\ &= (2(x+\lambda x')-(y+\lambda y'),2(y+\lambda y')-3(x+\lambda x')) \\ &= (2x-y+\lambda(2x'-y'),2y-3x+\lambda(2y'-3x')) \\ &= (2x-y,2y-3x)+\lambda(2x'-y',2y'-3x') \\ &= f((x,y))+\lambda f((x',y')). \end{aligned}$$

Comme $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré que*

$$\forall((x,y),(x',y'))\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad f((x,y)+\lambda(x',y'))=f((x,y))+\lambda f((x',y')).$$

Donc f *est linéaire.*

2. *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x,y)\in\ker(f) \iff f((x,y))=0 &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 0 \\ -3x & + & 2y & =0 & \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 0 \\ & & x & =0 & \end{array}\right. \qquad L_2\to L_2+2L_1 \\ &\iff x=y=0 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f)=\{(0,0)\}$.
De plus,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f)=\left\{(2x-y,2y-3x),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} &= \left\{(2x,-3x)+(-y,2y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(2,-3)+y(-1,2),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \operatorname{Vect}((2,-3),(-1,2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,-1),(-1,2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,-1),(0,1)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0),(0,1))=\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

3. f *est surjective et injective.*

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

Comme la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *on a*

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varphi) &= \operatorname{Vect}\left(\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right),\varphi\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right),\varphi\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right),\varphi\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ *est libre, donc* $\operatorname{rg}(\varphi)=3$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soient* $(P,Q)\in(\mathbb{R}_3[X])^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\varphi(P+\lambda Q)=((P+\lambda Q)(1),(P+\lambda Q)(2))=(P(1)+\lambda Q(1),P(2)+\lambda Q(2))=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q).$$

Ainsi,

$$\forall(P,Q)\in(\mathbb{R}_3[X])^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \varphi(P+\lambda Q)=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q).$$

Donc φ *est linéaire.*

2. *Comme* $(1, X, X^2, X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$*, on a*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\varphi) &= \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))\\ &= \operatorname{Vect}((1,1),(1,2),(1,4),(1,8))\\ &= \operatorname{Vect}((1,1),(0,1))\\ &= \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

3. *D'après le théorème du rang, on a*

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\ker(\varphi)) + \operatorname{rg}(\varphi)$$

c'est-à-dire

$$4 = \dim(\ker(\varphi)) + 2.$$

Ainsi $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

4. *D'après la question précédente,* $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ *donc* φ *n'est pas injective (donc pas bijective). D'après la question* 2, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$ *donc* φ *est surjective.*

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit f *l'application définie par*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y\\ z\\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Montrer que f *est un automorphisme de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. *Montrons que* f *est une application linéaire :*

$$\forall \left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad f\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+\lambda x') + y + \lambda y'\\ z + \lambda z'\\ y + \lambda y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y\\ z\\ y\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x'+y'\\ z'\\ y'\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi f *est linéaire. C'est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. *Comme* $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ *forment une base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *on a*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

3. f *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *surjectif donc bijectif car* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *est de dimension finie. Ainsi c'est un automorphisme.*

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncer.*)

Soient (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* f *l'application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$ *telle que*

$$f(e_1) = 1 \quad ; \quad f(e_2) = X - 2 \quad ; \quad f(e_3) = X^2 + X - 1$$

1. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. On a*
$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$
donc par linéarité de f *on trouve*
$$\begin{aligned} f((x, y, z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ = x + y(X-2) + z(X^2 + X - 1) \\ = x - 2y - z + (y+z)X + zX^2 \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = x - 2y - z + (y+z)X + zX^2.$$
2. *On sait que*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X-2, X^2 + X - 1).$$
Or la famille $(1, X-2, X^2+X-1)$ *est formée de polynômes non nuls de* $\mathbb{R}_2[X]$ *de degrés distincts donc c'est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Comme elle est de cardinal* $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*, c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Ainsi,*
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X-2, X^2 + X - 1) = \mathbb{R}_2[X]$$
donc $\mathrm{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$*.*
3. *D'après la question précédente,* f *est surjective. Comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(R_2[X])$*, c'est donc un isomorphisme.*

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ *on considère la famille* $\mathscr{B} = (1, X+1, X^2+1)$ *et les polynômes* $P = 3X^2$, $Q = 2 + X - X^2$.

1. *La famille* $\mathscr{B}$ *est formée de polynômes non nuls de* $\mathbb{R}_2[X]$ *de degrés distincts donc c'est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Comme elle est de cardinal* $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*, c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*
2. *Déterminons les coordonnées de* P *et de* Q *dans cette base :*
$$P = 3(X^2+1) - 3 \quad \textit{et} \quad Q = -(X^2+1) + (X+1) + 2$$
donc les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ *de* P *sont* $(-3, 0, 3)$ *et celles de* Q *sont* $(2, 1, -1)$*. Ainsi*
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P, Q) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction du test 14 (*Retour à l'énoncer.*)

La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *est la famille* (E_1, E_2, E_3, E_4) *où*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\varphi(E_1) = E_1 \; ; \; \varphi(E_2) = E_3 \; ; \; \varphi(E_3) = E_2 \; ; \; \varphi(E_4) = E_4.$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction du test 15 (*Retour à l'énoncer.*)

Comme A *est la matrice de* f *dans la base canonique* $(1, X, X^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$*, cela signifie que la première colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(1)$ *dans la base canonique, la deuxième colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(X)$ *dans la base canonique, la dernière colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(X^2)$

dans la base canonique. Ainsi

$$f(1) = 1+2X+3X^2\ ;\ f(X) = 2+X+2X^2\ ;\ f(X^2) = 1+2X+3X^2.$$

Puis par linéarité, l'image d'un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} f(P) = af(X^2)+bf(X)+cf(1) &= a(1+2X+3X^2)+b(2+X+2X^2)+c(1+2X+3X^2) \\ &= (3a+2b+3c)X^2+(2a+b+2c)X+a+2b+c. \end{aligned}$$

Correction du test 16 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *sa matrice représentative dans la base canonique. Alors, puisque* A *est la matrice représentative de* f *dans la base canonique, on a*

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) \iff AX = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -3z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc le noyau de f *est l'ensemble des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *dont les coordonnées dans la base canonique sont de la forme* $(-3z, z, z)$ *avec* $z \in \mathbb{R}$*. Ainsi*

$$\ker(f) = \{(-3z, z, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-3, 1, 1)).$$

De même, comme A *est la matrice de* f *dans la base canonique, les colonnes de* A *correspondent aux coordonnées des images de la base canonique dans la base canonique :*

$$f((1,0,0)) = (1,1,0)\ ;\ f((0,1,0)) = (1,0,-1)\ ;\ f((0,0,1)) = (2,3,1).$$

Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,-1),(2,3,1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,-1))$$

car $(2,3,1) = 3(1,1,0) - (1,0,-1)$.

Correction du test 17 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère les applications f *et* g *suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x-y, x+y) \qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \longmapsto (3x+y, 2x, 3y)$$

1. $f((1,0)) = (1,1)$ *donc les coordonnées de* $f((1,0))$ *dans la base canonique sont* $(1,1)$ *et la première colonne de* A *est* $\begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}$*. De même,* $f((0,1)) = (-1,1)$ *donc la deuxième colonne de* A *est* $\begin{pmatrix} -1\\1 \end{pmatrix}$*. Ainsi*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$g((1,0)) = (3,2,0)$ *donc donc les coordonnées de* $g((1,0))$ *dans la base canonique sont* $(3,2,0)$ *et la première colonne de* B *est* $\begin{pmatrix} 3\\2\\0 \end{pmatrix}$*. De même,* $g((0,1)) = (1,0,3)$ *donc la deuxième colonne de* B *est* $\begin{pmatrix} 1\\0\\3 \end{pmatrix}$*. Ainsi*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g \circ f((x,y)) &= g((x-y, x+y)) = (3(x-y)+x+y, 2(x-y), 3(x+y)) \\ &= (4x-2y, 2x-2y, 3x+3y) \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f((1,0)) = (4,2,3)$ *donc les coordonnées de* $g \circ f((1,0))$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *sont* $(4,2,3)$ *et la première colonne de* C *est* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *De même,* $g \circ f((0,1)) = (-2,-2,3)$ *donc la deuxième colonne de* C *est* $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *D'où*

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. *On a bien* $\mathrm{C} = \mathrm{BA}$.

Correction du test 18 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (5,-2,2)$ *et* $v_3 = (-1,1,2)$.

1. (a) *Montrons que* $\mathscr{B}_1$ *est une famille libre : soit* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. *Alors*

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0) &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \quad - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \quad 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \quad - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \quad + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{B}_1$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *de cardinal* $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. *C'est donc une base de* $\mathbb{R}^3$.

(b) *La matrice de passage* P *de la base canonique à* $\mathscr{B}_1$ *est la matrice de la famille* $\mathscr{B}_1$ *dans la base canonique. Ainsi*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) *La matrice de passage de la base* $\mathscr{B}_1$ *à la base canonique est l'inverse la matrice* P. *On trouve*

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *D'après la formule de changement de bases, on a*

$$\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) • *Les coordonnées de* v_1 *dans la base canonique sont* $(1,0,0)$. *Donc*

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_1) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_1)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_1)$ *dans la base canonique sont donc* $(1,0,0)$. *D'où :*

$$f(v_1) = (1,0,0) = v_1.$$

- *Les coordonnées de* v_2 *dans la base canonique sont* $(5,-2,2)$. *Donc*

$$A\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_1 = 2) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_2)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix}-5\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_2)$ *dans la base canonique sont donc* $(-5,2,-2)$. *D'où :*

$$f(v_2) = (-5,2,-2) = -v_2.$$

- *Les coordonnées de* v_3 *dans la base canonique sont* $(-1,1,2)$. *Donc*

$$A\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_3) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_3)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_3)$ *dans la base canonique sont donc* $(-2,2,4)$. *D'où :*

$$f(v_3) = (-2,2,4) = 2v_3.$$

D'après ce qui précède, dans la base $\mathscr{B}_\infty$ *les coordonnées de* v_1 *sont* $(1,0,0)$, *celles de* v_2 *sont* $(0,-1,0)$ *et celles de* v_3 *sont* $(0,0,2)$. *Ainsi, on retrouve bien :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} = B.$$