TD2-Comparaison de suites

Exercice 1.

1. **FAUX** : voir la remarque 1 du cours. Par exemple :

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

mais pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n^2}$.

2. **FAUX** : on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1 \quad ; \quad v_n = n \quad ; \quad w_n = -n.$$

Alors, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$, on a bien :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \quad \text{et} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n).$$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n + w_n = 0$.
Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\neq} o(v_n + w_n)$.

3. **FAUX** : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{-n}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
En revanche, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{-1} \neq 1$ donc $u_{n+1} \not\sim u_n$.

Cependant, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que **sa limite** ℓ **est non nulle** alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ aussi. Donc, dans ce cas :

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

4. **VRAI** : supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} nu_n = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n(u_n + u_{n+1})}{2} = \frac{nu_n + nu_{n+1}}{2} = \frac{nu_n + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}}{2}.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(u_n + u_{n+1})}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n + \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)u_{n+1} - \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}}{2} = 1.$$

Donc : $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

5. **FAUX** : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = n + 1$ et $u_n = n$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ mais $u_n - v_n = -1$ pour tout entier naturel n.

6. **VRAI** : cela fait partie de la caractérisation de la relation d'équivalence. On peut aussi le montrer directement : supposons que $u_n = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors :

$$nu_n = 1 + n \times \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(n \times \frac{1}{n}\right) = 1 + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{o}(1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

7. **FAUX** : voir test 8.

Exercice 2.
On va utiliser la caractérisation de la relation de négligeabilité. Avant, il est utile de remarquer que :

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (c'est la caractérisation) ;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \notin \{0, \pm\infty\}$ alors aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.

1. On sait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Donc : $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.
   Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
2. Par croissance comparée, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^8}{n^7} = 0.$$
   Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
3. Comme $2 < e$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0.$$
   Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
4. Comme $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$
   Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
5. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n}.$$
   Donc aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.
6. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln n}$. Or par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(n) = 0.$$
   Donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$.
   De plus : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. On en déduit
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.$$
   Donc : $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
7. Pour tout entier $n \geq 1$, on a
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{ne^{\frac{n}{2}}}{\ln(n)e^n} = \frac{n}{\ln(n)e^{\frac{n}{2}}}.$$
   Par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{\frac{n}{2}}} = 0$.
   Donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.$$
   Ainsi $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
8. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = e^{-2} \neq 0.$$
   Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   De même,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = e^2 \neq 0.$$
   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas négligeable devant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. Pour tout entier $n \geq 1$:
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$
   Par croissance comparée, on a donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$
   Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
10. Par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$
    Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
11. Pour tout entier $n \geq 1$:
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{n^2\ln(2)}} = e^{\sqrt{n}\ln(n) - n^2\ln(2)} = e^{n^2\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} - \ln(2)\right)}.$$
    Par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = 0.$$
    Donc : $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} - \ln(2)\right) = -\infty$.
    Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$$
    et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

12. Pour tout entier $n \geq 1$

$$u_n = e^{\ln(n)\ln(n)} \quad \text{et} \quad v_n = e^{n\ln(\ln(n))}.$$

Donc

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{u_n}{v_n} = e^{\ln(n)^2 - n\ln(\ln(n))} = e^{n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right)}.$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n} = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right) = -\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$: $u_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}) = \ln(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}})$.

Or : $\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0$. Donc on reconnaît un équivalent usuel :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

On reconnaît alors un deuxième équivalent usuel car $\lim_{\to+\infty} \frac{-1}{n^2} = 0$:

$$e^{-\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

Ainsi

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

2. Le terme dominant dans le facteur $n^2 + n + 3^n$ est 3^n et le terme dominant du facteur $e^{-n} + 1$ est 1. En factorisant par les termes dominants, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 3^n\left(\frac{n^2}{3^n} + \frac{n}{3^n} + 1\right)(e^{-n} + 1).$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{3^n} + \frac{n}{3^n} + 1\right)(e^{-n} + 1) = 1.$$

Par définition, on a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$.

3. Le terme dominant du numérateur est $\ln(n)$ et celui du dénominateur est 3^n. En factorisant par les termes dominants, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{\ln(n)}{3^n} \frac{1 + \frac{2}{\ln(n)}}{\frac{4n}{3^n} + \frac{1}{3^n} + 1}.$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln(n)} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{\ln(n)}}{\frac{4n}{3^n} + \frac{1}{3^n} + 1} = 1.$$

Par définition, on a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{3^n}$.

4. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, d'après les équivalents usuels on a :

$$e^{\frac{1}{2n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2n}} + 1 = 2$, on a :

$$e^{\frac{1}{2n}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

Par compatibilité avec le quotient, on a donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}.$$

5. Ici, le terme dominant est donné par le e^n.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \ln(n^2 + e^n) &= \ln\left(e^n\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\right) \\ &= \ln(e^n) + \ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right) \\ &= n + \ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right) \\ &= n\left(1 + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\right)\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$
Donc, par continuité du logarithme :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right) = 0$$
puis :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right) = 0.$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right) = 1.$$
Par définition : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

6. Pour tout $n \geq 2$, on a :
$$u_n = e^{n+\ln n+1}e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}} = ne^{n+1}e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}}$$
Or : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n} = 0$. Donc, par continuité de l'exponentielle :
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}} = 1.$$
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ne^{n+1}$.

7. Ici, on va multiplier par la quantité conjuguée :
$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ u_n &= \sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+n+1}\\ &= \left(\sqrt{4n^2+5n+2}-\sqrt{4n^2+n+1}\right)\times\frac{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1}}{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1}}\\ &= \frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1}}.\end{aligned}$$
Le numérateur est équivalent à $4n$ par les équivalents usuels.
Pour le dénominateur, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :
$$\begin{aligned}\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1} &= \sqrt{4n^2\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}\right)}+\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)}\\ &= 2n\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}}+2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\\ &= 2n\left(\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\right)\end{aligned}$$
Or : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} = 2$. Donc, par compatibilité avec le produit, on a :
$$\sqrt{4n^2+5n+2}+\sqrt{4n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\times 2,$$
puis, par compatibilité avec le quotient :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{2n\times 2}.$$
Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

8. Par continuité du logarithme, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} 1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
Par continuité de la fonction racine carrée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

9. Comme ci-dessus, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et on reconnaît un équivalent usuel. Ainsi
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
Un autre équivalent usuel donne alors :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Par produit :
$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$
Par transitivité, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

10. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$u_n = n^{\frac{1}{n}}-1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}-1.$$
Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Par équivalent usuel, on a donc :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

11. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\begin{aligned}u_n = \frac{e^{(n+1)\ln(n)}}{e^{n\ln(n+1)}} &= e^{n\ln(n)+\ln(n)-n\ln(n+1)}\\ &= e^{-n(\ln(n+1)-\ln(n))}e^{\ln n}\\ &= ne^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\\ &= ne^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

Or, par équivalent usuel :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, par compatibilité avec le produit :

$$-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

En d'autres termes : $e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$.

Enfin, la compatibilité avec le produit donne

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}n.$$

12. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc, par équivalent usuel : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

13. Pour tout $n \geq 1$,on a

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{(n+1)\ln(n)} - e^{n\ln(n+1)} \\
&= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln(n+1)-(n+1)\ln(n)}\right) \\
&= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln(n+1)-n\ln(n)-\ln(n)}\right) \\
&= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln(n)}\right) \\
&= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)}\right) \\
&= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}e^{-\ln(n)}\right) \\
&= n^{n+1}\left(1 - \frac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n}\right).
\end{aligned}$$

Or, par les équivalents usuels, on sait que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, par compatibilité avec le produit,

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n}\right) = 1$.

Cela montre : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{n+1}$.

14. Pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = n^2 + n - e^n + \ln n + e^n = n^2 + n + \ln n.$$

Le terme dominant est n^2, donc en factorisant on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} = 1.$$

Cela montre : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.

15. Par les équivalents usuels :

$$n^3 + 6n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad n^4 + 3n^2 - 2n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4.$$

Par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}.$$

16. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

17. On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. Par équivalent usuel : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.

18. On remarque que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$.

19. Pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} = \frac{-2}{n^2-1}.$$

Or : $n^2 - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$. Donc par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-2}{n^2}.$$

20. On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\ln(n)} = 0$. Par équivalent usuel : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\ln(n)}$.

21. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n = 2\ln(n) + \ln(2) + 1.$$

Le terme dominant est $2\ln(n)$. En factorisant on trouve :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = 2\ln(n)\left(1 + \frac{\ln(2)+1}{2\ln(n)}\right).$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\ln(2)+1}{2\ln(n)} = 1$. Cela montre : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

22. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or, par les équivalents usuels, on sait que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, par compatibilité avec le produit :

$$n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2$. Ainsi

$$1 + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2.$$

Finalement, par produit : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

23. Le terme dominant dans le premier facteur est 1 et celui du deuxième facteur est n. En factorisant, on a donc

$$\forall n \geq 1,\ u_n = n^{\frac{5}{3}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{5}{3}}$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{n} + 1\right)^{\frac{5}{3}} = 1$. Donc : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\frac{5}{3}}$.

24. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par équivalent usuel : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$.

Exercice 4.

1. (a) On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$. Alors par opération sur les limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Par conséquent : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

(b) D'après les équivalents usuels :

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln(v_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par compatibilité des équivalents avec le quotient :

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} n.$$

En particulier : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Ainsi $\ln(u_n)$ et $\ln(v_n)$ ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

(c) Pour tout entier naturel $n > 0$, on a

$$u_n^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \text{et} \quad v_n^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Or, par équivalents usuels :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n}=1 \quad \text{et} \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=0.$$

Par continuité de la fonction exponentielle on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n=e^1=e \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n^n=e^0=1.$$

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^n}{v_n^n}=e\neq 1.$$

Les suites (u_n^n) et (v_n^n) ne sont donc pas équivalentes au voisinage de $+\infty$.

2. Pour tout entier $n>0$ on a

$$\frac{v_n}{e^n}=e^{ne^{\frac{1}{n}}-n}=e^{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}.$$

Par équivalent usuel : $e^{\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc par compatibilité avec le produit :

$$n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n}=1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{e^n}=e$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{e\times e^n}$. Donc :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n+1}.$$

Exercice 5.

On sait que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donc il existe un entier naturel n_0 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 tels que

$$\forall n\geq n_0 \quad u_n=\varepsilon_n v_n.$$

1. On a donc

$$\forall n\geq n_0 \quad |u_n|=|\varepsilon_n v_n|=|\varepsilon_n||v_n|.$$

La suite $(|\varepsilon_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 par continuité de la valeur absolue en 1. Ainsi $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

2. On suppose de plus qu'il existe un entier naturel n_1 tel que

$$\forall n\geq n_1 \quad u_n\geq 0 \quad \text{et} \quad v_n\geq 0.$$

Comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, il existe un rang $n_2\in\mathbb{N}$ à partir duquel $\varepsilon_n\geq 0$. Ainsi

$$\forall n\geq \max\{n_0,n_1,n_2\} \quad \sqrt{u_n}=\sqrt{\varepsilon_n v_n}=\sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{v_n}.$$

La suite $(\sqrt{\varepsilon_n})_{n\geq n_2}$ converge vers 1 par continuité de la fonction racine carrée en 1. Ainsi $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice 6.

1. Pour tout entier $n\geq 2$,

$$u_n=\frac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}}=\frac{n}{n^{3/2}}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}=1$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

2. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, en factorisant par b^n au numérateur et au dénominateur on obtient :

$$u_n=\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}.$$

Or : $0<\frac{a}{b}<1$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=-1.$$

3. Pour tout entier $n\geq 1$,

$$u_n=\frac{n^2(\ln(n+1)-\ln n)}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Or

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit on obtient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n}=1.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1.$$

4. Par équivalent usuel : $3n^3+5n^2+2n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^3$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$e^n+2n+2^n\ln n = e^n\left(1+\frac{2n}{e^n}+\frac{\ln(n)}{\left(\frac{e}{2}\right)^n}\right).$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2n}{e^n}+\frac{\ln(n)}{\left(\frac{e}{2}\right)^n}=1$.

Ainsi : : $e^n+2n+2^n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$. Par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3n^3}{e^n}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3}{e^n}=0.$$

5. Par équivalent usuel :

$$e^{\frac{1}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par compatibilité avec le produit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{1}{n^2}=1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

6. Pour tout entier $n\geq 1$,

$$u_n=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Par équivalents usuels :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par compatibilité avec le quotient :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}.$$

7. Pour tout entier $n\geq 1$,

$$u_n=\left(n^2+e^n\right)\left(\frac{1}{n^2}+e^{-n}\right)=\frac{e^n}{n^2}\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)^2.$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^n}=0.$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)^2=1$.

Ainsi :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n^2}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^2}=+\infty.$$

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

Par équivalent usuel,

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}.$$

Par compatibilité des équivalents avec le produit, on obtient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}\times\frac{1}{3n}=\frac{1}{3n^{2/3}}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n^{2/3}}=0.$$

9. Pour tout $n\geq 1$,

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Par équivalent usuel,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc par compatibilité avec le produit :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n}=1.$$

Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$
Enfin par continuité de la fonction exponentielle en 1
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=e.$$

10. Pour tout $n\geq 1$,
$$u_n=\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}.$$
Par équivalent usuel,
$$\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n^2}.$$
Donc par compatibilité avec le produit :
$$n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{2}{n^2}=\frac{2}{n}.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=0.$$
Enfin par continuité de la fonction exponentielle en 0
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1.$$

11. Pour tout $n\geq 1$,
$$u_n=\left(1+e^{-n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(1+e^{-n}\right)}.$$
Par équivalent usuel,
$$\ln\left(1+e^{-n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}.$$
Donc par compatibilité avec le produit :
$$n^2\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim} n^2e^{-n}.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1+e^{-n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^2e^{-n}=0.$$
Par continuité de la fonction exponentielle en 0 on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1.$$

12. Pour tout $n\geq 2$,
$$\begin{aligned}u_n=(\ln n+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}}=e^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\ln(\ln n+1)}&=e^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\ln\left(\ln(n)\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)}\\&=e^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\left(\ln(\ln(n))+\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)}\\&=e^{\sqrt{\ln\ln n}}e^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)}.\end{aligned}$$
Or,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)=0$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)}=1.$$
Ainsi : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{\ln\ln n}}$. Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{\ln\ln n}}=+\infty.$$

13. Par équivalent usuel
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$
Donc
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n}.$$
Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0.$$

Exercice 7.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e, comme $e\neq 0$, alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim} e$.
2. On suppose que pour tout entier $n\geq 1$
$$2\leq\frac{u_n}{n+2}\leq 2+\frac{1}{n}.$$
Alors, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n+2}=2$.
Ainsi : $\frac{u_n}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
Par compatibilité avec le produit on obtient :
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim} 2(n+2)\underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.$$

3. Si la suite $((n-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 alors

$$(n-1)u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

Par compatibilité avec le quotient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

4. Si la suite $((n-1)u_n + e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 alors

$$(n-1)u_n + e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a donc

$$(n-1)u_n + e^n = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(2) = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n-1}\left(-e^n + 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\ &= \frac{-e^n}{n-1}\left(1 - \frac{2}{e^n} + \underset{n\to+\infty}{o}(e^{-n})\right). \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{e^n} + \underset{n\to+\infty}{o}(e^{-n}) = 1$. Donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-e^n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-e^n}{n}.$$

5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et

$$1 - \frac{u_n^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$$

alors

$$u_n^2 = 2 - 2\frac{n-1}{n} + 2 \times \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{n}\right).$$

Comme la suite est à termes positifs alors on obtient :

$$u_n = \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{1 + \frac{n}{2} \times \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}.$$

Or : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} = 1$ donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

6. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$3n^2 - n\ln n \leq u_n \leq 3n^2 + n\sqrt{n} + 1.$$

On remarque que

$$3n^2 - n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2 + n\sqrt{n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2.$$

En divisant membre à membre par $3n^2$, on obtient l'encadrement suivant pour tout $n \geq 2$:

$$1 - \frac{n\ln(n)}{3n^2} \leq \frac{u_n}{3n^2} \leq 1 + \frac{n\sqrt{n}+1}{3n^2}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{n\ln(n)}{3n^2} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{n\sqrt{n}+1}{3n^2} = 1.$$

Donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{3n^2} = 1.$$

Ainsi

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2.$$

Exercice 8.

1. On sait que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ donc il existe un entier naturel n_0 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe un entier naturel n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad |\varepsilon_n| \leq 1.$$

On a donc

$$\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}, \quad |u_n| = |\varepsilon_n v_n| = |\varepsilon_n||v_n| \leq |v_n|.$$

2. Montrons que : $\ln(n+4)^6 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^2+4n-1)$. Le résultat suivra alors de la question 1.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n+4)^6}{n^2+4n-1} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{4}{n}\right)\right)^6}{n^2+4n-1} = \frac{\ln(n)^6\left(1+\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)\right)^6}{n^2+4n-1}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)\right)^6\right) = 1$ et $n^2+4n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. On a donc :

$$\frac{\ln(n+4)^6}{n^2+4n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^6}{n^2}.$$

Par croissance comparée, on obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+4)^6}{n^2+4n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^6}{n^2} = 0.$$

D'après la caractérisation de la relation de négligeabilité,

$$\ln(n+4)^6 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2+4n-1).$$

D'après la question 1, il existe alors un entier naturel N tel que

$$\forall n \geq N, \quad \left|\ln(n+4)^6\right| \leq \left|n^2+4n-1\right|.$$

Or, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+4)^6$ et n^2+4n-1 sont positifs donc

$$\forall n \geq \max\{N,1\}, \quad \ln(n+4)^6 \leq n^2+4n-1.$$

3.

```
N=0
while N^2+4*N-1 < (log(N+4))^6
    N = N+1
end
disp(N)
```

Exercice 9.

1. $X_n(\Omega) = \{0,\dots,n\}$ et pour tout $k \in X_n(\Omega)$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \times n(n-1)\dots(n-k+1) &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\\ &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1} n\left(1-\frac{i}{n}\right)\\ &= \frac{n^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) = \prod\limits_{i=0}^{k-1} 1 = 1$. Ainsi :

$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :

$$P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

De plus, pour tout entier $n > 0$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k} = \frac{e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}$$

et :

- d'une part,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1,$$

- d'autre part,

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{-1}{n} = -1$$

  d'où

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = e^{-1}.$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Exercice 10.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $1 \leq u_n \leq 2$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $1 \leq u_n \leq 2$.
     — Si $n = 0$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie car $u_1 = 2$.
     — Si $n \geq 1$ alors $n+1 \geq 2$ donc

$$0 \leq \frac{u_n}{n+1} \leq \frac{u_n}{2} \leq 1$$

     et ainsi

$$1 \leq u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \leq 1 + \frac{u_n}{2} \leq 2.$$

Dans tous les cas, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors d'après la question précédente :

$$1 \leq u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.
Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$. Donc par encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. Or, par la question précédente, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n-1} = 1.$$

Donc : $u_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$. Ainsi, par produit :

$$u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, cela signifie :

$$u_n - 1 = \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou encore

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 11.

1. Par équivalent usuel on sait que : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc par produit on obtient :

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle en 1

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{(n+1) \times (n+1)^n}{(n+1) \times n!} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} \\ &= \frac{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n!} \\ &= u_n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

(b) On a supposé que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc

$$1 = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \times e.$$

Ceci est une contradiction. Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 1. Autrement dit, n^n et $n!$ ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12.

1. La fonction f est somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + e^{-x} > 0.$$

D'où

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	$\nearrow$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.

Comme $n \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, n possède un unique antécédent par f, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(\ln(n)) = n - \frac{1}{n} < n = f(u_n).$$

Supposons $u_n \leq \ln(n)$. Alors, par croissance de f, $f(u_n) \leq f(\ln(n))$. Contradiction
Par conséquent : $u_n > \ln(n)$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > \ln(n)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, par comparaison

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n

$$f(u_n) = e^{u_n} - e^{-u_n} = n.$$

En factorisant par e^{u_n} on obtient

$$e^{u_n}(1 - e^{-2u_n}) = n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{u_n}(1 - e^{-2u_n}) = n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\ln(n) = \ln(e^{u_n}(1 - e^{-2u_n})) &= u_n + \ln(1 - e^{-2u_n}) \\ &= u_n\left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2u_n})}{u_n}\right)\end{aligned}$$

car $u_n > 0$ par 3.
Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) = u_n\left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2u_n})}{u_n}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2u_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2u_n})}{u_n}\right) = 1.$$

Ainsi

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

5. (a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-2u_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1 - e^{-2u_n}\right) = 1.$$

Ainsi, l'égalité 4.(a) permet de conclure que

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Attention : il est faux de « passer à l'exponentielle » dans l'équivalence $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu en 4.(b) que

$$\ln(n) = u_n + \ln(1 - e^{-2u_n})$$

donc

$$u_n - \ln(n) + \ln(1 - e^{-2u_n}) = 0.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \ln(n) + \ln(1 - e^{-2u_n}) = 0.$$

(c) D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - \ln(n) = -\ln(1 - e^{-2u_n}).$$

Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2u_n} = 0$, par équivalent usuel on obtient

$$u_n - \ln(n) = -\ln(1 - e^{-2u_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2u_n}.$$

Par ailleurs, $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc par compatibilité avec le quotient et les puissances

$$e^{-2u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par transitivité

$$u_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par unicité de la solution de $f(x) = n$, il suffit[1] de montrer que $f\left(\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)\right) = n$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)\right) &= e^{\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)} \\ &= \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} - \frac{1}{\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}} \\ &= \frac{(n+\sqrt{n^2+4})^2 - 4}{2(n+\sqrt{n^2+4})} \\ &= \frac{2n^2 + 2n\sqrt{n^2+4}}{2(n+\sqrt{n^2+4})} \\ &= n. \end{aligned}$$

Ainsi, u_n et $\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$ sont solutions de l'équation $f(x) = n$.

1. On peut aussi remarquer que e^{u_n} est la solution positive de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$.

Par unicité,

$$u_n = \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right).$$

(b) En factorisant par le terme dominant dans le logarithme on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(n\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}\right)\right)\\
&= \ln(n) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}\right)\\
&= \ln n \underbrace{\left(1+\frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}\right)}{\ln(n)}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) D'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
u_n - \ln(n) &= \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{4}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

En effet, par équivalent usuel et caractérisation de l'équivalence

$$\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} = 1+\frac{4}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
u_n - \ln(n) &= \ln\left(1+\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) && \text{par équivalent usuel}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} && \text{par caractérisation de l'équivalent.}
\end{aligned}$$