

# Chapitre 14 : Fonctions de deux variables réelles

## 1 Fonctions de deux variables

### Définition 1 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application  $f$  définie sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

### Exemple 1

1. Les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

sont appelées les **fonctions coordonnées**.

2. Les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

avec  $A \subset \mathbb{N}^2$  fini sont appelées **des fonctions polynomiales**.

3. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ .  
4. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$ .  
5. Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable :  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xe^{-x}$ .

### Exemple 2

1. La fonction  $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  est définie sur

2. La fonction  $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$  est définie sur

3. La fonction  $(x, y) \longmapsto \ln(x + y)$  est définie sur

4. En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont les fonctions qui, à deux variables réelles (la quantité de travail  $L$  et le capital investi  $K$ ), associent la production totale  $P$  définie par :  $P(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels strictement positifs.

**Définition 2** (Applications partielles)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ .

- On appelle première **application partielle** de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  l'application  $x \mapsto f(x, y_0)$  définie sur l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}\}$ . On la note  $f_{y_0}$ .
- On appelle deuxième **application partielle** de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  l'application  $y \mapsto f(x_0, y)$  définie sur l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathcal{D}\}$ . On la note  $f_{x_0}$ .

**Exemple 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 + y^2$ . Alors, pour  $(x_0, y_0) = (-1, 3)$  on a

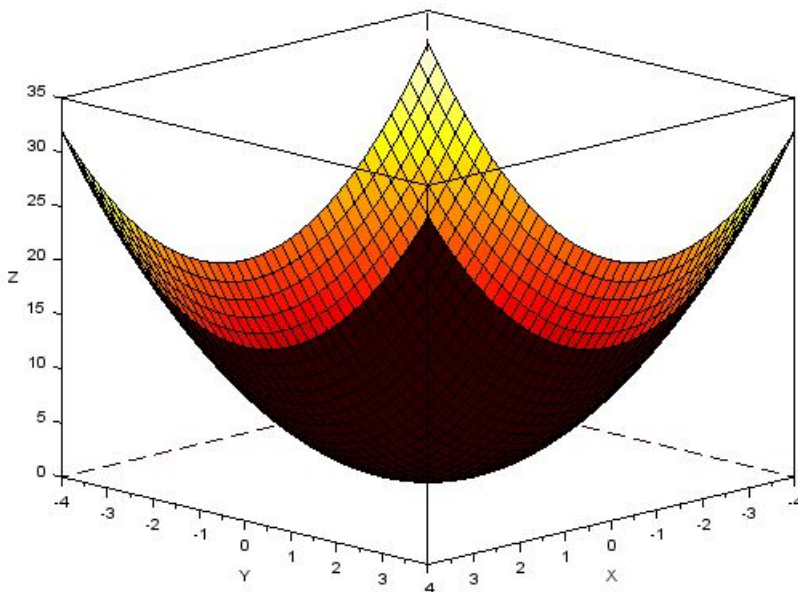
**Définition 3** (Représentation graphique)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle **graphe** de la fonction  $f$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

**Exemple 4**

On considère la fonction  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ .



```
function z=f(x,y)
    z=x^2+y^2
endfunction

x=-4:0.1:4
y=-4:0.1:4

fplot3d(x,y,f)
```

**Définition 4** (Ligne de niveau)

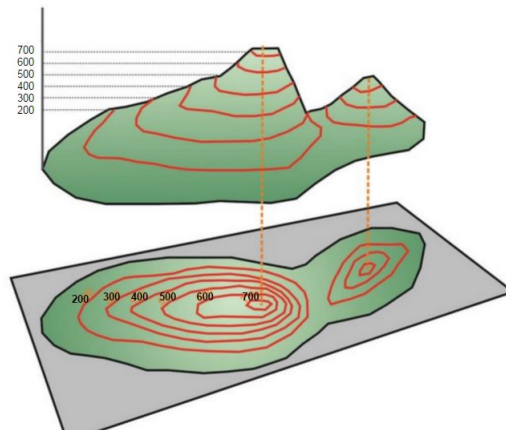
Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $c \in \mathbb{R}$ . On appelle **ligne de niveau  $c$  de  $f$**  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

### Remarque 1

Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de  $f$  avec le plan horizontal d'équation  $z = c$  et on projette sur le plan  $(Oxy)$  pour obtenir la ligne de niveau  $c$  de  $f$ .

### Exemple 5



### Exemple 6

On reprend l'exemple de la fonction  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ .

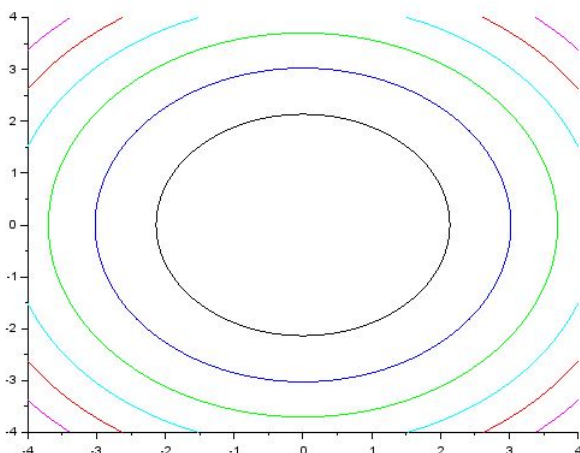
1. La ligne de niveau  $-1$  de  $f$  est

2. La ligne de niveau  $0$  de  $f$  est

3. La ligne de niveau  $1$  de  $f$  est

4. Plus généralement, la ligne de niveau  $c \in \mathbb{R}$  est

Les lignes de niveaux de la fonction de l'exemple 6 :



```
x=-4:0.1:4
```

```
y=x
```

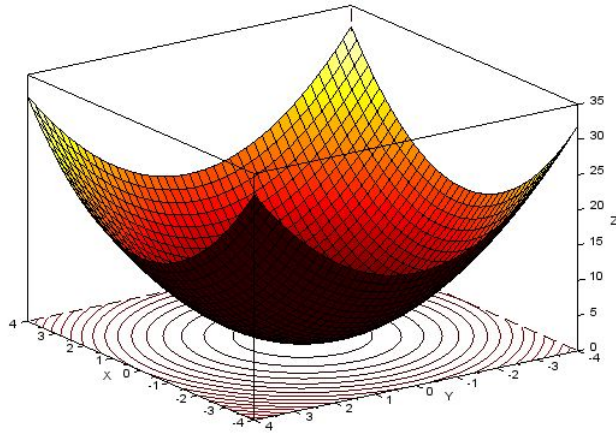
```
z=feval(x,y,f)
```

```
contour(x,y,z,6)
```

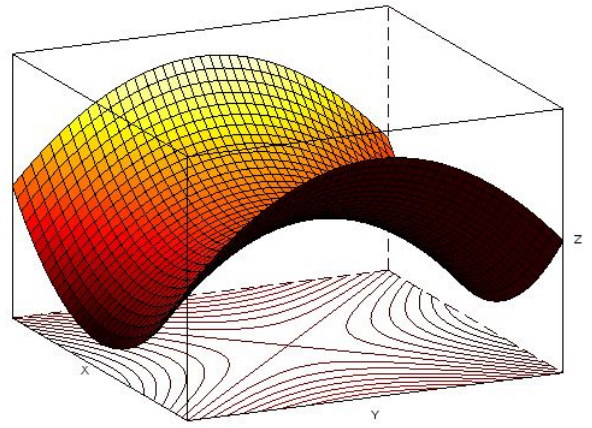
### Exemple 7

Graphe et ligne de niveau de

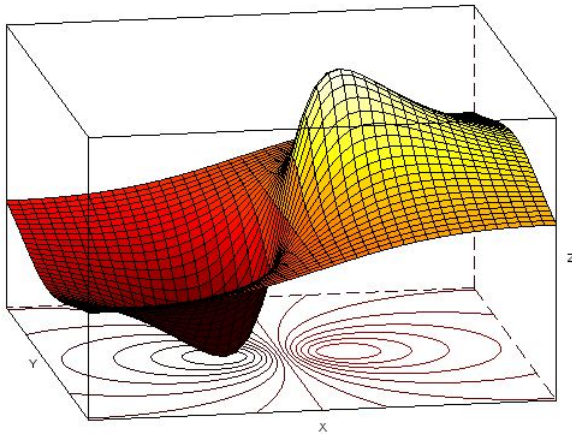
1.  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ .



2.  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$



3.  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ .



Dans les deux prochaines parties du chapitre on ne s'intéressera qu'aux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

## 2 Continuité des fonctions de deux variables

En première année, on définit la continuité des fonctions d'une variable réelle. Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si

ou encore

Autrement dit, une fonction d'une variable réelle  $f$  est continue en  $x_0$  si, pour toute précision arbitrairement petite  $\epsilon$ , toutes les valeurs  $f(x)$  de  $f$  sont à une distance maximale de  $\epsilon$  de  $f(x_0)$  pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $x_0$ .

La principale différence lorsque  $f$  est une fonction de deux variables réelles est la notion de « suffisamment proche de ».

## 2.1 Distance euclidienne

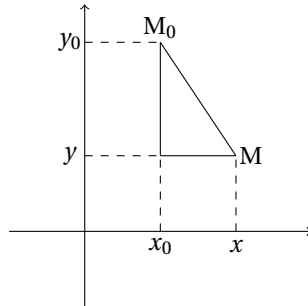
### Définition 5 (Distance euclidienne entre deux points)

Soit  $M_0 = (x_0, y_0)$  et  $M = (x, y)$  deux points de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle **distance euclidienne entre  $M_0$  et  $M$**  le réel noté  $d(M_0, M)$  défini par

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

### Remarque 2

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore :



### Exemple 8

Soient  $A = (x_A, y_A)$  un point de  $\mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ .

1. L'ensemble  $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) = r\}$

2. L'ensemble  $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$

Cet ensemble est appelé **la boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$** .

3. L'ensemble  $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}$

Cet ensemble est appelé **la boule fermée de centre  $A$  et de rayon  $r$** .

**Proposition 1** (Propriétés de la distance euclidienne)

1.  $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) \geq 0$ ;
2.  $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) = 0 \iff A = B$ ;
3.  $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) = d(B, A)$ ;
4.  $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ ;

## 2.2 Continuité

**Définition 6** (Continuité en un point)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est **continue en**  $(x_0, y_0)$  si

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit,  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$  si, pour toute précision arbitrairement petite  $\epsilon$ , toutes les valeurs  $f(x, y)$  de  $f$  sont à une distance maximale de  $\epsilon$  de  $f(x_0, y_0)$  pourvu que  $(x, y)$  soit suffisamment proche de  $(x_0, y_0)$ .

**Exemple 9**

La fonction  $f : (x, y) \mapsto x + y$  est continue en  $(0, 0)$ .

**Définition 7** (Continuité sur  $\mathbb{R}^2$ )

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables. On dit que  $f$  est **continue sur**  $\mathbb{R}^2$  si  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemples de référence**

1. Les fonctions coordonnées  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Les fonctions constantes sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 2** (Opérations sur les fonctions continues)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors

1. toute combinaison linéaire de  $f$  et de  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ ;
2. le produit  $f \times g$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ ;
3. si  $g$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

En conséquence,

**Exemples de référence**

Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemple 10

Montrons que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Test 1 (Voir solution.)

Justifier que la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

#### Proposition 3 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles continue sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $g$  une fonction continue sur  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $g \circ f$  de deux variables réelles est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemple 11

1. Montrons que  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Montrons que  $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Test 2 (Voir solution.)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

1. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$ .

2. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$ .

### Méthode 1

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est continue on utilisera souvent les propositions 2 et 3 et les exemples usuels.

### 3 Calcul différentiel

#### 3.1 Fonctions de classe $C^1$

##### Définition 8 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en  $(x_0, y_0)$**  si l'application partielle  $f_{y_0}$  est dérivable en  $x_0$ . Dans ce cas, le nombre dérivé de  $f_{y_0}$  en  $x_0$  est noté  $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ .
- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en  $(x_0, y_0)$**  si l'application partielle  $f_{x_0}$  est dérivable en  $y_0$ . Dans ce cas, le nombre dérivé de  $f_{x_0}$  en  $y_0$  est noté  $\partial_2(f)(x_0, y_0)$ .

##### Remarque 3

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

- $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en  $(x_0, y_0)$  si la limite suivante existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en  $(x_0, y_0)$  si la limite suivante existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

##### Définition 9

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables.

- Si  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note  $\partial_1(f)$  la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y) \end{aligned}$$

- Si  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note  $\partial_2(f)$  la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y) \end{aligned}$$

##### Méthode 2

Pour déterminer la dérivée partielle par rapport à une variable, on considère l'autre variable comme une constante et on utilise les formules de dérivation des fonctions d'une variable.



### Exemple 12

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

Montrons que  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point  $(x, y)$ .

1. On fixe la deuxième variable : soit  $y \in \mathbb{R}$ .

2. On dérive par rapport à la variable  $x$  ( $y$  est fixé et donc à considérer comme une constante).

3. Conclusion :

### Test 3 ([Voir solution.](#))

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction  $f$  de l'exemple ci-dessus.

### Exemple 13

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Déterminer les dérivées partielles.

1. Par rapport à la première variable.

2. Par rapport à la deuxième variable.

### Test 4 ([Voir solution.](#))

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (1 + xy)(2x - 2y + 1)$

**Définition 10** (Fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ )

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables.

On dit que  $f$  est de **classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$**  si elle admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  et que les dérivées partielles sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 14**

On reprend la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de l'exemple précédent :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu que  $g$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemples de référence**

1. Les fonctions coordonnées  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Les fonctions constantes sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 4** (Opérations sur les fonctions de classe  $C^1$ )

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors

1. toute combinaison linéaire de  $f$  et de  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ;
2. le produit  $f \times g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ;
3. si  $g$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

En conséquence,

**Exemples de référence**

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 15**

Montrons que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Test 5 (Voir solution.)**

Justifier que la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 5** (Composition par une fonction d'une variable)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $g$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $g \circ f$  de deux variables réelles est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 16**

1. Montrons que  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Montrons que  $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Méthode 3**

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe  $C^1$  on utilisera souvent les propositions 4 et 5 et les exemples usuels.

**Test 6 (Voir solution.)**

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer les dérivées partielles.

1. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$ .
2. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$ .

**Proposition 6**

Toute fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque 4**

Attention, contrairement à ce qu'il se passe pour les fonctions d'une variable, l'existence des dérivées partielles d'une fonction  $f$  en un point  $(x_0, y_0)$  n'assure pas que  $f$  est continue en  $(x_0, y_0)$  : l'existence des dérivées partielles en  $(x_0, y_0)$  assure que  $f$  « paraît continue » en  $(x_0, y_0)$  tant qu'on approche  $(x_0, y_0)$  selon une direction verticale ou horizontale mais ne donne aucune information sur ce qu'il se passe lorsqu'on approche ce point par une autre direction !

L'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues permet d'assurer la continuité de  $f$ .

**Définition 11** (Gradient)

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . On appelle **gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$**  le vecteur de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , noté  $\nabla(f)(x_0, y_0)$  (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0, y_0) \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

**Proposition 7** (Développement limité d'ordre 1)

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(h, k)$$

où  $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue en  $(0, 0)$  telle que  $\epsilon(0, 0) = 0$ .

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de  $f$  en  $(x_0, y_0)$**  et est unique.

**Remarque 5**

1. De manière équivalente, le développement limité en  $(x_0, y_0)$  s'écrit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \epsilon(x, y)$$

où  $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue en  $(x_0, y_0)$  telle que  $\epsilon(x_0, y_0) = 0$ .

2. Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variables du développement limité d'ordre 1 pour les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon(h)$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .

3. Graphiquement, l'équation  $z = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$  est l'équation du plan tangent au graphe de  $f$  aux points de coordonnées  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

**Exemple 17**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Justifions que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Déterminons le gradient de  $f$  en  $(0, 1)$ .

3. Déterminons le développement limité de  $f$  en  $(0,1)$

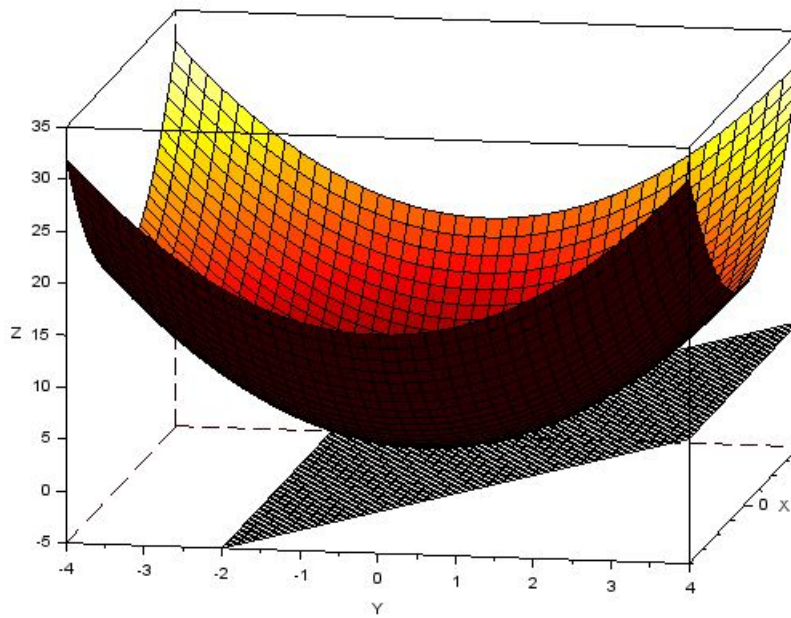


FIGURE 1 – Graphe de la fonction de l'exemple 17 avec le plan tangent en  $(0,1)$

### 3.2 Fonctions de classe $C^2$

#### Définition 12 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur  $\mathbb{R}^2$**  si  $\partial_1(f)$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$\partial_{1,1}^2(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable sur  $\mathbb{R}^2$**  si  $\partial_1(f)$  admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$\partial_{2,1}^2(f) = \partial_2(\partial_1(f)).$$

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable sur  $\mathbb{R}^2$**  si  $\partial_2(f)$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$\partial_{1,2}^2(f) = \partial_1(\partial_2(f)).$$

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable sur  $\mathbb{R}^2$**  si  $\partial_2(f)$  admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur  $\mathbb{R}^2$ . On note

$$\partial_{2,2}^2(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

#### Exemple 18

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

On a vu à l'exemple 12 que  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = -2y^2 + 6y^2x.$$

Montrons que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivantes :  $\partial_{2,1}^2(f)$  et  $\partial_{1,1}^2(f)$ .

- Justifions l'existence de  $\partial_{2,1}^2(f)$  et  $\partial_{1,1}^2(f)$ .

- Calculons  $\partial_{1,1}^2(f)$ .

- Calculons  $\partial_{2,1}^2(f)$ .

#### Test 7 (Voir solution.)

Déterminer les dérivées partielles  $\partial_{1,2}^2(f)$  et  $\partial_{2,2}^2(f)$  de la fonction  $f$  de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le test 3.

**Définition 13** (Fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ )

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables.

On dit que  $f$  est de **classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$**  si

- elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^2$  ;
- ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 19**

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu à l'exemple 14 que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 8**

Toute fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemples de référence**

1. Les fonctions coordonnées  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Les fonctions constantes sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 9** (Opérations sur les fonctions de classe  $C^2$ )

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors

1. toute combinaison linéaire de  $f$  et de  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ;
2. le produit  $f \times g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ;
3. si  $g$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

En conséquence,

**Exemples de référence**

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 20**

Montrons que la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 10** (Composition par une fonction d'une variable)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables réelles de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $g$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $g \circ f$  de deux variables réelles est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 21**

1. Montrons que  $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Montrons que  $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Méthode 4**

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe  $C^2$  on utilisera souvent les propositions 9 et 10 et les exemples usuels.



**Test 8 (Voir solution.)**

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer les dérivées partielles secondes.

1.  $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$

3.  $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 + xy)(2x - 2y + 1)$

2.  $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$ .

4.  $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$ .

**Exemple 22**

1. On considère la fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

Déterminer  $\partial_{1,2}^2(f)$  et  $\partial_{2,1}^2(f)$ .

2. On considère la fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Déterminer  $\partial_{1,2}^2(f)$  et  $\partial_{2,1}^2(f)$ .

3. Que remarque-t-on?

**Théorème 1 (de Schwarz)**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = \partial_{1,2}^2(f)(x, y).$$

**Définition 14** (Matrice hessienne)

Soient  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On appelle matrice hessienne de  $f$  en  $(x, y)$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ , notée  $\nabla^2(f)(x, y)$  et définie par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix}.$$

**Remarque 6**

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , la matrice hessienne de  $f$  en tout point est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

**Exemple 23**

Déterminons la matrice hessienne en  $(1, 2)$  de la fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

**Proposition 11** (Développement limité d'ordre 2)

Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Alors

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

où  $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue en  $(0, 0)$  telle que  $\epsilon(0, 0) = 0$ .

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 2 de  $f$  en  $(x_0, y_0)$**  et est unique.

**Remarque 7**

1. De manière équivalente, le développement limité en  $(x_0, y_0)$  s'écrit, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\epsilon(x, y)$$

où  $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue en  $(x_0, y_0)$  telle que  $\epsilon(x_0, y_0) = 0$ .

2. Il s'agit de l'analogie pour les fonctions de deux variables de la formule de Taylor à d'ordre 2 vue au chapitre 10.

**Exemple 24**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Justifions que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. On a vu à l'exemple 17 que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\partial_1(f)(x, y) = 2x$  et  $\partial_2(f)(x, y) = 2y$ .

Déterminons la hessienne de  $f$  en  $(0, 1)$ .

3. Déterminons le développement limité de  $f$  en  $(0, 1)$  à l'ordre 2

## 4 Extension aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Pour le moment, nous n'avons étudié que des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier. Cependant, il est fréquent de rencontrer des fonctions qui ne sont définies que sur une partie de  $\mathbb{R}^2$  (comme dans l'exemple 2).

Le but de cette partie est d'étendre les notions rencontrées dans les parties 2 et 3 aux fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

#### Définition 15 (Boules ouvertes, boules fermées)

Soient  $A \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ .

- On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon r** et on note  $B(A, r)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée de centre A et de rayon r** et on note  $B_f(A, r)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par :

$$B_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}.$$

**Définition 16** (Ouverts, fermés)

- On dit qu'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est un **ouvert** si  $D = \emptyset$  ou si pour tout point  $M \in D$  il existe  $r > 0$  tel que  $B(M, r) \subset D$ .
- On dit qu'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

**Exemple 25**

1. Les boules ouvertes sont des ouverts. Il est conseillé de faire un dessin!



2. Les boules fermées sont des fermés. Il est conseillé de faire un dessin!



3.  $\mathbb{R}^2$  est ouvert, son complémentaire  $\emptyset$  est donc fermé.  
 $\emptyset$  est ouvert, son complémentaire  $\mathbb{R}^2$  est donc fermé.  
Ainsi  $\mathbb{R}^2$  et  $\emptyset$  sont à la fois ouverts et fermés.
4. Les ensembles de la forme  $]a, b[ \times ]c, d[$  sont ouverts.
5. Les ensembles de la forme  $[a, b] \times [c, d]$  sont fermés.
6. L'ensemble  $[0, 1[ \times ]0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé.
7. Les ensembles  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$  sont des ouverts (voir exemple 2).

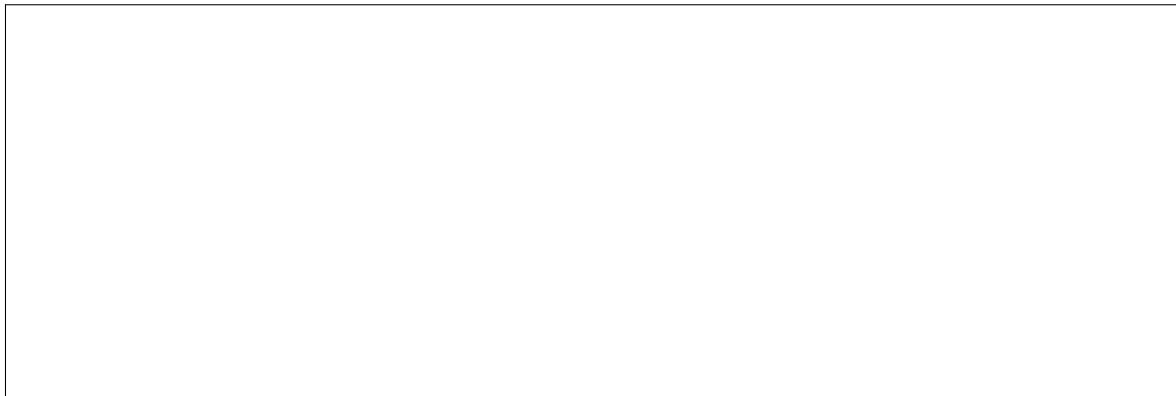
**Définition 17** (Ensemble borné)

On dit qu'une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est **bornée** si elle est incluse dans une boule centrée en  $(0,0)$  :

$$\exists r > 0 \quad D \subset B((0,0), r) \quad \text{ou encore} \quad \exists r > 0 \quad \forall M \in D \quad d((0,0), M) < r.$$

**Exemple 26**

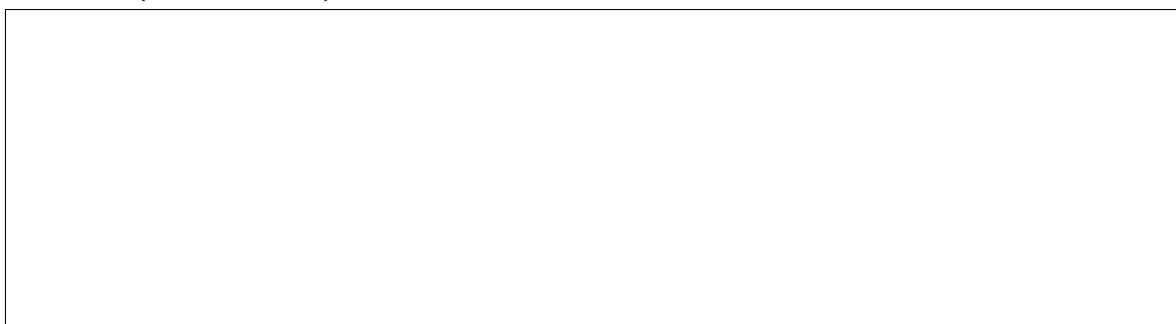
1. Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée. Il est conseillé de faire un dessin!



2. L'ensemble  $[0, 1] \times [0, 1]$  est bornée



3. L'ensemble  $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$  est non borné.

**Test 9** ([Voir solution.](#))

Représenter chaque sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).

- |  |   |
|--|---|
| 1. $U_1 = [0, 1] \times \mathbb{R}$                                | 3. $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$                             |
| 2. $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . | 4. $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } 0 \leq x \leq 2\}$ |

**4.2 Fonctions définies sur une partie de  $\mathbb{R}^2$** **Définition 18** (Continuité)

Soit  $f$  une fonction numérique de deux variables définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in D$ .

- On dit que  $f$  est **continue en**  $(x_0, y_0)$  si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (x, y) \in D, \quad d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

- On dit que  $f$  est **continue sur**  $D$  si  $f$  est continue en tout point de  $D$ .

Tous les résultats vus dans la partie 2 s'étendent aux fonctions continues sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables définie sur un **ouvert**  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in D$ . Comme  $D$  est un ouvert

- l'application partielle  $f_{y_0}$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ ,
- l'application partielle  $f_{x_0}$  est définie sur un intervalle ouvert contenant  $y_0$ .

**Définition 19** (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables définie sur un **ouvert**  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** en  $(x_0, y_0) \in D$  si l'application partielle  $f_{y_0}$  est dérivable en  $x_0$ . Dans ce cas, le nombre dérivé de  $f_{y_0}$  en  $x_0$  est noté  $\partial_1(f)(x_0, y_0)$ .
- Si  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point de  $D$ , on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note  $\partial_1(f)$  la fonction :

$$\begin{aligned}\partial_1(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y)\end{aligned}$$

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** en  $(x_0, y_0) \in D$  si l'application partielle  $f_{x_0}$  est dérivable en  $y_0$ . Dans ce cas, le nombre dérivé de  $f_{x_0}$  en  $y_0$  est noté  $\partial_2(f)(x_0, y_0)$ .
- Si  $f$  admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point de  $D$ , on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note  $\partial_2(f)$  la fonction :

$$\begin{aligned}\partial_2(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y)\end{aligned}$$

**Définition 20** (Fonctions de classe  $C^1$  sur un ouvert)

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables définie sur un **ouvert**  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $f$  est de **classe  $C^1$  sur  $D$**  si elle admet des dérivées partielles sur  $D$  et que les dérivées partielles sont continues sur  $D$ .

**Définition 21** (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables définie sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur  $D$ .

- On dit que  $f$  admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable** sur  $D$  si  $\partial_1(f)$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur  $D$ . On note

$$\partial_{1,1}^2(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On définit de même, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2  $\partial_{2,1}^2(f)$ ,  $\partial_{1,2}^2(f)$ ,  $\partial_{2,2}^2(f)$  sur  $D$ .

**Définition 22** (Fonctions de classe  $C^2$  sur un ouvert)

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables définie sur un **ouvert**  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $f$  est de **classe  $C^2$  sur  $D$**  si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $D$  et que les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur  $D$ .

**Tous les résultats vus dans la partie 3 s'étendent aux fonctions continues sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .**

### Exemple 27

On considère la fonction La fonction  $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y)$  définie sur l'ouvert  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$ .

1. Montrons que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $D$ .

2. Déterminons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

3. Déterminons le développement limité de  $g$  au voisinage de  $(1, 0)$ .

### Exemple 28

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrons que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2. Est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

3. Montrons que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 en  $(0, 0)$ .

### Remarque 8

Cela montre que l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité ! Il faut l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues (voir la remarque 4).

## 5 Extrema des fonctions de deux variables

### Définition 23 (Maximum, minimum)

Soit  $f$  une fonction de deux variables définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

- On dit que  $f$  admet un **minimum local en**  $(x_0, y_0) \in D$  s'il existe  $r > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \cap D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout  $(x, y) \in D$ .

- On dit que  $f$  admet un **maximum local en**  $(x_0, y_0) \in D$  s'il existe  $r > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \cap D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout  $(x, y) \in D$ .

### Remarque 9

- Un minimum/maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.
- Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).
- Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement unique.



### Exemple 29

Soit  $f$  la fonction définie sur  $U$  par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

où  $U$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$

1. On prend  $U = \mathbb{R}^2$ .

2. On prend  $U = B_f((0, 0), 1)$ .

#### Proposition 12

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$  est bornée et atteint ses bornes sur cette partie (elle possède un maximum et un minimum sur cette partie).

#### Proposition 13 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur un **ouvert**  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0)$  alors  $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### Remarque 10

Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy.$$

**Définition 24** (Point critique)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

On dit que  $(x_0, y_0)$  est un **point critique** de  $f$  si  $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 11**

Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

**Méthode 5** (*Déterminer les points critiques*)

Étant donnée une fonction  $f$  définie sur un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , pour déterminer ses points critiques

1. on s'assure que  $U$  est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  ;
2. on résout le système de deux inconnues à deux équations  $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ .

Attention, ce système n'est en général pas linéaire! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum!

**Exemple 30**

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Cherchons les extrema de  $f$ .

1. Recherche des points critiques.



2. Étude des points critiques.

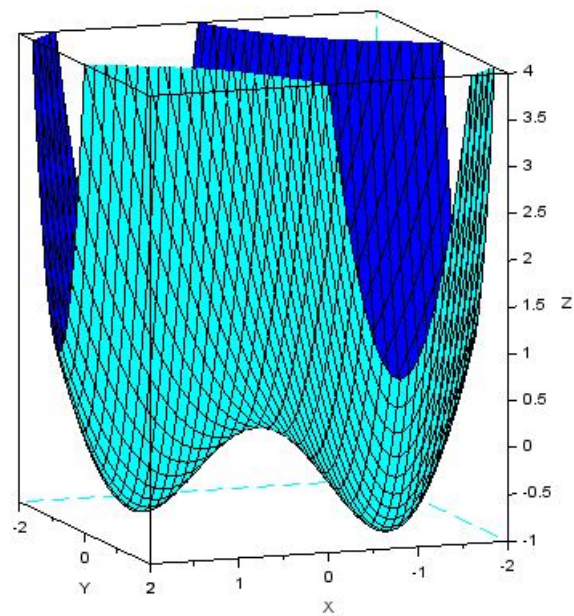


FIGURE 2 – Graphe de la fonction de l'exemple 30

**Proposition 14** (Condition suffisante d'existence d'un extremum)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $(x_0, y_0) \in U$  un point critique de  $f$ .

- Si les valeurs propres de  $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$  sont strictement négatives alors  $(x_0, y_0)$  est un maximum local de  $f$ .
- Si les valeurs propres de  $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$  sont strictement positives alors  $(x_0, y_0)$  est un minimum local de  $f$ .
- Si les valeurs propres de  $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$  sont non nulles et de signes opposés alors  $(x_0, y_0)$  n'est pas un extremum de  $f$ . On dit que  $(x_0, y_0)$  est un **point selle** ou **point col** de  $f$ .
- Si l'une des valeurs propres de  $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$  est nulle, on ne peut rien conclure.

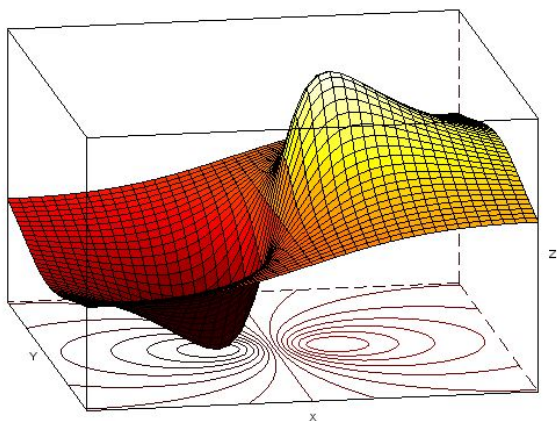


FIGURE 3 – Un minimum (à gauche) et un maximum (à droite)

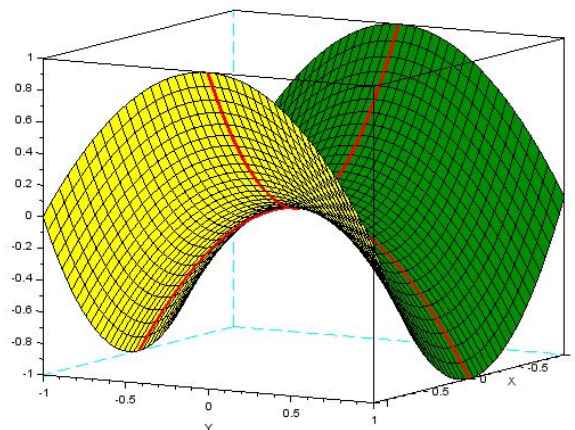


FIGURE 4 – Un point selle

**Méthode 6 (Étudier les extrema)**

Étant donnée une fonction  $f$  définie sur un sous-ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , pour déterminer ses extrema locaux

1. on s'assure que  $U$  est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ ;
2. on détermine les points critiques de  $f$  sur  $U$ ;
3. on calcule la hessienne de  $f$  en chaque point critique et on détermine ses valeurs propres;
4. on utilise la proposition 14.

**Exemple 31**

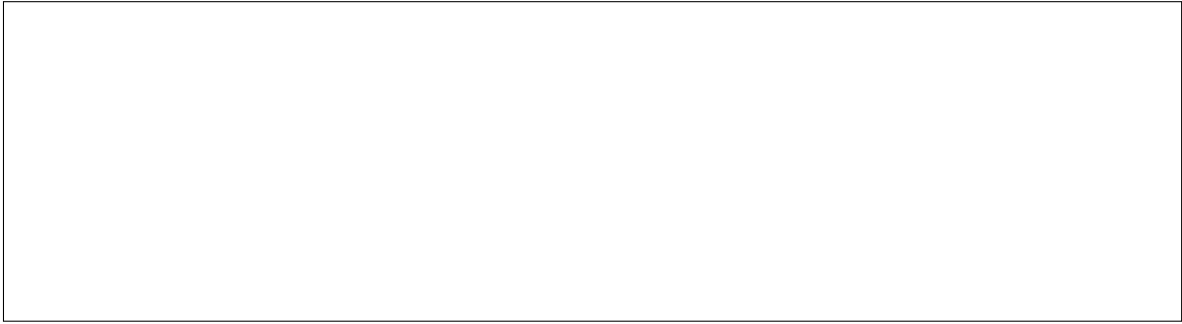
On reprend la fonction de l'exemple précédent. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Les points critiques sont  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  et  $(-1, 1)$ . Déterminons les extrema de  $f$ .

1. Calcul de la hessienne.

2. Étude en  $(0, 0)$ .



3. Étude en  $(1, -1)$ .



4. Étude en  $(-1, 1)$ .

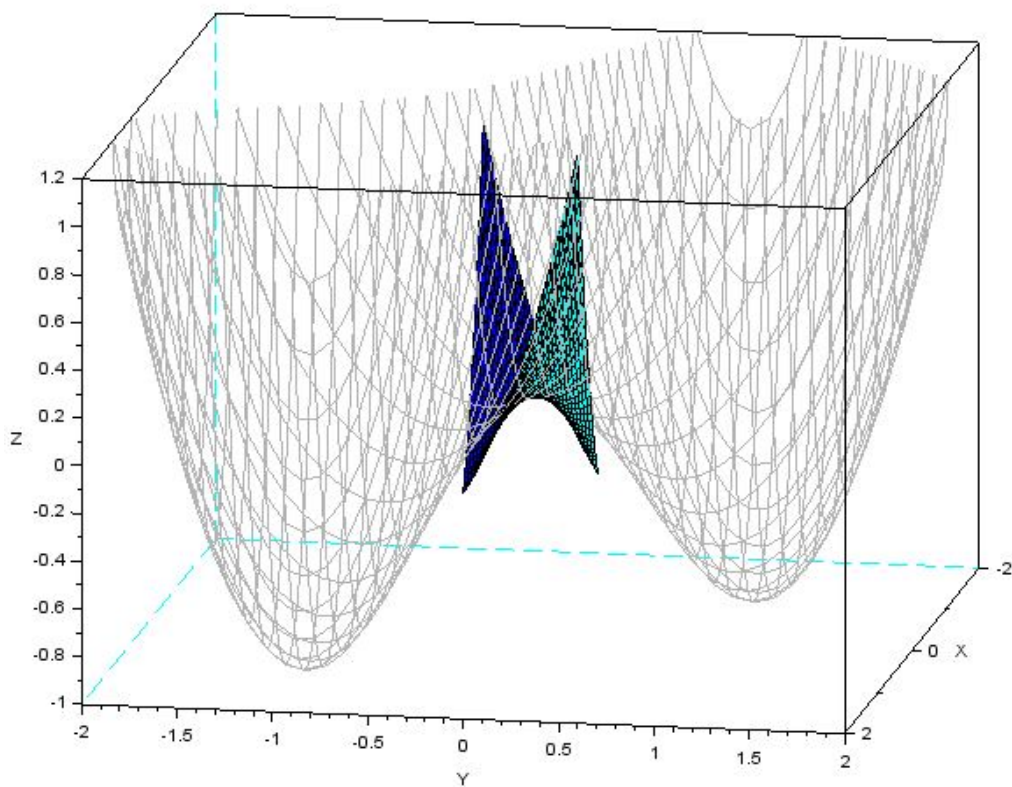


FIGURE 5 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de  $(0, 0)$

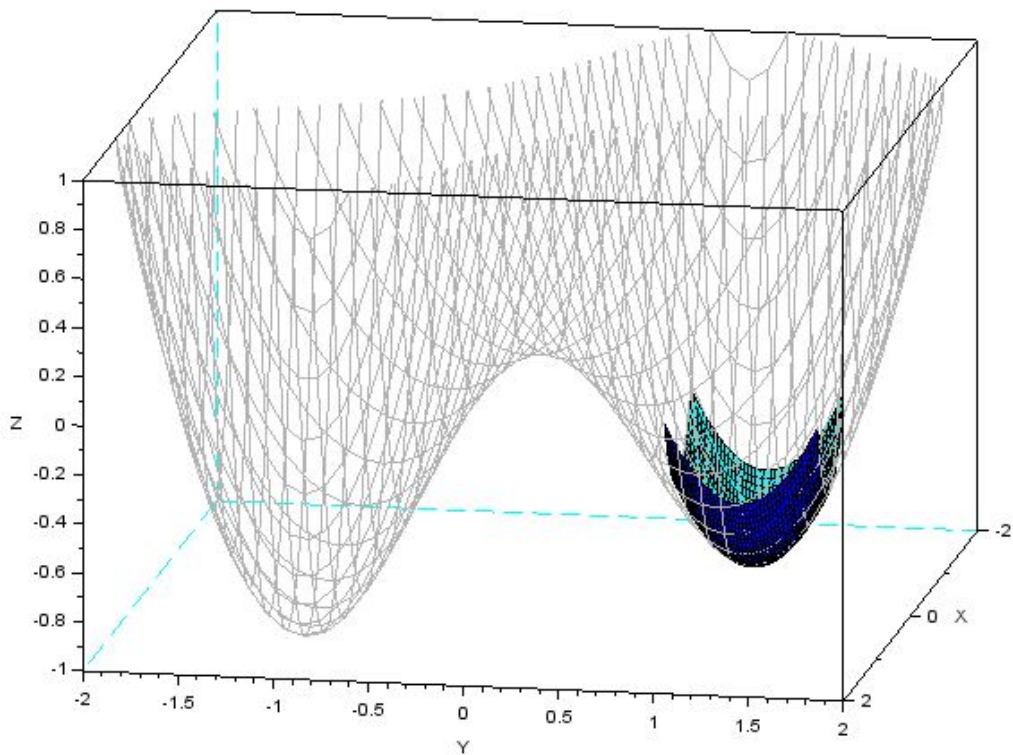


FIGURE 6 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de  $(-1, 1)$

#### Méthode 7 (Déterminer si un extremum est global)

On considère une fonction  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$

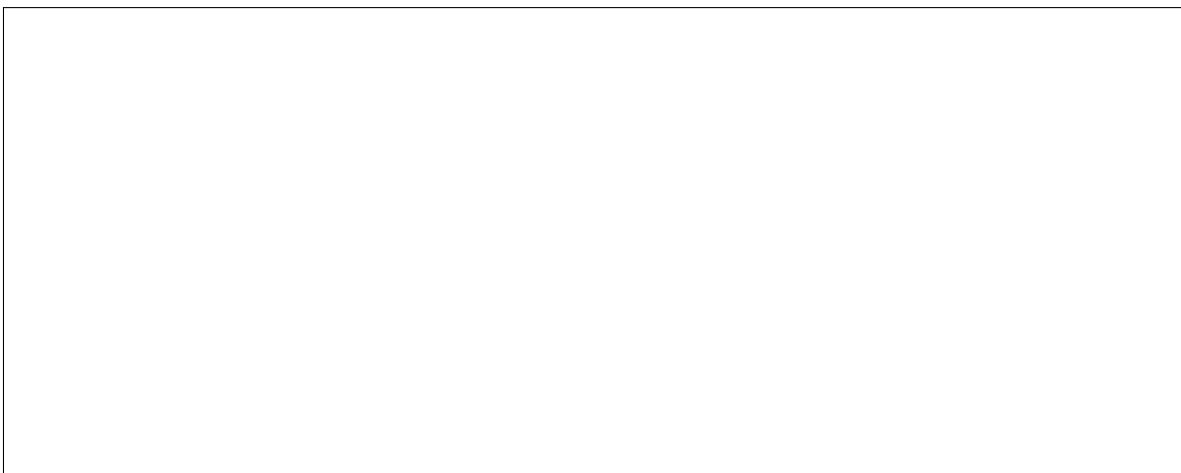
- Pour montrer que  $f$  possède un maximum global (resp. minimum global) en  $(x_0, y_0) \in U$ , il faut montrer que  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  (resp.  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ) pour tout  $(x, y) \in U$  (voir l'exemple 30).
- Pour montrer que  $f$  n'a pas d'extremum global, l'énoncé suggère parfois de considérer deux fonctions  $g$  et  $h$  d'une variable telles que  $t \mapsto f(g(t), h(t))$  possède une limite infinie ( $-\infty$  pour contredire un minimum et  $+\infty$  pour contredire un maximum).

#### Exemple 32

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$ .

Montrons que  $f$  ne possède pas d'extremum global en considérant  $y \mapsto f(1, y)$ .

1. Supposons par l'absurde que  $f$  possède un maximum global en un point  $(x_0, y_0)$ .



2. Supposons par l'absurde que  $f$  possède un minimum global en un point  $(x_0, y_0)$ .

**Test 10** ([Voir solution.](#))

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Déterminer les points critiques de  $f$ .
3. Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.
4. Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux?

## 6 Objectifs

1. Savoir justifier la continuité, le caractère  $C^1$  ou  $C^2$  d'une fonction de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Savoir calculer les dérivées partielles, le gradient d'une fonction de deux variables.
3. Savoir calculer les dérivées partielles seconde, la Hessienne.
4. Savoir déterminer un DL d'ordre 1 ou 2 d'une fonction de deux variables.
5. Savoir déterminer les points critiques.
6. Savoir déterminer la nature des points critiques.

## 7 Correction des tests

### Correction du test 1 ([Retour à l'énoncé.](#))

Les fonctions  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  et  $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$  sont polynomiales donc continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

De plus, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 > 0$  donc la fonction  $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi, la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que quotient de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Correction du test 2 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  est polynomiale donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \mapsto e^y$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  par composition. Donc, par somme,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + e^y$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeur dans  $[1, +\infty[$ . La fonction logarithme est continue sur  $[1, +\infty[$ . Par composition, la fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Les fonctions  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  sont polynomiales donc continues sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$  donc, par quotient,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Enfin,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1 + x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que somme de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Correction du test 3 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f_x : y \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$  est polynomiale donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\partial_2(f)(x, y)$  existe et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y.$$

### Correction du test 4 ([Retour à l'énoncé.](#))

Pour montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 existent, on va utiliser les résultats d'opération sur les fonctions de classe  $C^1$  (c'est ainsi que l'on procédera toujours désormais).

1. Les fonctions  $(x, y) \mapsto xy$  et  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  sont polynomiales donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- La fonction exponentielle est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc par composition,  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La fonction  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction logarithme est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc par composition,  $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Par produit, la fonction  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de  $\mathbb{R}^2$ . De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = ye^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = xe^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

2. La fonction  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de  $\mathbb{R}^2$ . De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = y(2x - 2y + 1) + 2(1 + xy)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = x(2x - 2y + 1) - 2(1 + xy).$$



**Correction du test 5 ([Retour à l'énoncé.](#))**

Les fonctions  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$  et  $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$  sont polynomiales donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 De plus, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 > 0$  donc la fonction  $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 Ainsi, la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que quotient de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Correction du test 6 ([Retour à l'énoncé.](#))**

1. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \mapsto e^y$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  par composition. Donc, par somme,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + e^y$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeur dans  $[1, +\infty[$ . La fonction logarithme est de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ . Par composition, la fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + e^y}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{e^y}{1 + x^2 + e^y}$$

2. Les fonctions  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  sont polynomiales donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$  donc, par quotient,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 Enfin,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1 + x^2}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que somme de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = 1 + 2y - \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = 2x.$$

**Correction du test 7 ([Retour à l'énoncé.](#))**

D'après le test 3,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y.$$

La fonction  $\partial_2(f)$  est polynomiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En particulier, les dérivées partielles d'ordre 2  $\partial_{1,2}^2(f)$  et  $\partial_{2,2}^2(f)$  sont définies sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_1(\partial_2(f))(x, y) = -4y + 12xy$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = \partial_2(\partial_2(f))(x, y) = 6y - 4x + 6x^2.$$

**Correction du test 8 ([Retour à l'énoncé.](#))**

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer les dérivées partielles secondes.

1. Les fonctions  $(x, y) \mapsto xy$  et  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  sont polynomiales donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La fonction exponentielle est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  donc par composition,  $(x, y) \mapsto e^{xy}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - La fonction  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction logarithme est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc par composition,  $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Par produit, la fonction  $f_1$  est donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, d'après le test 4 on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f_1)(x, y) = ye^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy} \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f_1)(x, y) = xe^{xy} \ln(1+x^2+y^2) + e^{xy} \frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,2}^2(f_1)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f_1)(x, y) = e^{xy} \left( (1+xy) \ln(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2} + \frac{2x^2}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,1}^2(f_1)(x, y) = e^{xy} \left( y^2 \ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{2,2}^2(f_1)(x, y) = e^{xy} \left( x^2 \ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right).$$

2. La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$  est polynomiale donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \mapsto e^y$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  par composition. Donc, par somme,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2+e^y$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeur dans  $[1, +\infty[$ . La fonction logarithme est de classe  $C^2$  sur  $[1, +\infty[$ . Par composition, la fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$  est donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, d'après le test 6, on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f_2)(x, y) = \frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f_2)(x, y) = \frac{e^y}{1+x^2+e^y}.$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{2,1}^2(f_2)(x, y) = \partial_{1,2}^2(f_2)(x, y) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2+e^y)^2}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{2,2}^2(f_2)(x, y) = \frac{e^y(1+x^2+e^y) - e^{2y}}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{e^y(1+x^2)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,1}^2(f_2)(x, y) = \frac{2(1+x^2+e^y) - 4x^2}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{2(1-x^2+e^y)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

3. La fonction  $f_3$  est polynomiale donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, d'après le test 4 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f_3)(x, y) = y(2x-2y+1) + 2(1+xy)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f_3)(x, y) = x(2x-2y+1) - 2(1+xy).$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{2,1}^2(f_3)(x, y) = \partial_{1,2}^2(f_3)(x, y) = 4x - 4y + 1$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,1}^2(f_3)(x, y) = 4y \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2(f_3)(x, y) = -4x$$

4. Les fonctions  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$  sont polynomiales donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$  donc, par quotient,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Enfin,  $f_4$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que somme de fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus, d'après le test 6 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f_4)(x, y) = 1 + 2y - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f_4)(x, y) = 2x.$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,2}^2(f_4)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f_4)(x, y) = 2$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,1}^2(f_4)(x, y) = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}^2(f_4)(x, y) = 0.$$

### Correction du test 9 ([Retour à l'énoncé.](#))

### Correction du test 10 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

1. La fonction  $f$  est polynomiale donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Pour déterminer les points critiques, il faut calculer le gradient. Or pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\partial_1(f)(x, y) = 2xy + y^2 - y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 2xy + x^2 - x.$$

On en déduit donc le gradient de  $f$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - y \\ 2xy + x^2 - x \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ 2xy + x^2 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 - y^2 - x + y = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &\iff \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3y^2 - y = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2(1 - y)y + y^2 - y = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y(3y - 1) = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y(1 - y) = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (1/3, 1/3) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (1, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (0, 1). \end{aligned}$$

Les points critiques de  $f$  sont donc  $(0, 0)$ ,  $(1/3, 1/3)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .

3. On va étudier la hessienne en chaque point critique. Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2. On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\partial_{1,1}^2(f) = 2y \quad ; \quad \partial_{2,2}^2(f)(x, y) = 2x \quad ; \quad \partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) = 2x + 2y - 1.$$

(a) Étude en  $(0, 0)$ . On a

$$\nabla^2(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2$ , le polynôme  $X^2 - 1$  est annulateur de  $\nabla^2(f)(0, 0)$ . Ainsi les valeurs propres possibles de  $\nabla^2(f)(0, 0)$  sont  $-1$  et  $1$ . On vérifie ensuite que  $1$  et  $-1$  sont effectivement des valeurs propres. Ainsi,  $(0, 0)$  est un point selle.

(b) Étude en  $(1, 0)$ . On a

$$\nabla^2(f)(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de  $\nabla^2(f)(1, 0)$  sont  $1 + \sqrt{2} > 0$  et  $1 - \sqrt{2} < 0$ .

Ainsi,  $(1, 0)$  est une point selle.

(c) Étude en  $(0, 1)$ . On a

$$\nabla^2(f)(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de  $\nabla^2(f)(0, 1)$  sont  $1 + \sqrt{2} > 0$  et  $1 - \sqrt{2} < 0$ .

Ainsi,  $(0, 1)$  est une point selle.

(d) Étude en  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . On a

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de  $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  sont  $1$  et  $\frac{1}{3}$ .

Ainsi  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  est un minimum local.

4. Le seul extremum local est  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  qui est un minimum. Or  $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}$  on a

$$f(y, y) = y^2(2y - 1).$$

Ainsi,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y, y) = -\infty$  et donc le minimum n'est pas global.