TD 3-Espaces vectoriels

Exercice 1

Dans chacun des cas, dire si l'espace E (muni des lois usuelles) est un espace vectoriel ou non.

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.
2. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ et } y = t\}$.
3. $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 1\}$.
4. *L'ensemble des suites de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *convergentes.*
5. *L'ensemble des suites de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *divergentes.*

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *on considère les suites* u, v, w *et* x *définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+4)^2, \quad v_n = (n+2)^2, \quad ,w_n = (n+1)^2, \quad x_n = n - 1.$$

La suite u *est-elle combinaison linéaire des suites* v, w, x ?

Exercice 3

Dans chaque cas, montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E.

1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \lim_{n \to +\infty} u_n = 0\}$.
2. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ est continue en } 1\}$.
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $F = \{M \in E \mid {}^tM = M\}$.

Exercice 4

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E. *Montrer que* $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Exercice 5

Expliciter les sous-espaces vectoriels dans chacun des cas suivants.

1. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(X^3, X^2, X, 1)$ *de* $\mathbb{R}[X]$.
2. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(X+1, X+2, X+3)$ *de* $\mathbb{R}[X]$.
3. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}((-1, 2), (2, -4))$ *de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}((1, 0), (0, 1))$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^3$, *on définit les vecteurs* $\vec{u} = (2, 1, -3)$, $\vec{v} = (3, 2, -1)$, $\vec{s} = (1, 0, -5)$ *et* $\vec{t} = (1, 1, 2)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E *et donner une famille génératrice de* F.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\}$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a = 2c\right\}$.
3. $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{(a+c)X + (2aX + b)X^2 - cX^2,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$.

Exercice 8

Montrer que l'ensemble des solutions $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ *du système homogène*

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - t & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

est $\mathrm{Vect}(2, -1, -1, 1), (0, 1, -1, -1))$.

Exercice 9

Dans chaque cas, exprimer F *à l'aide d'équations.*

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (-1, 2, 1))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((2, 1, -3), (1, 1, -2), (1, 0, 0))$.