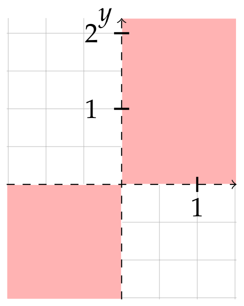
TD17-Fonctions de deux variables

Exercice 1

1. *La fonction f est définie en (x,y) si et seulement si xy est strictement positif (pour que $\ln(xy)$ existe) c'est-à-dire si et seulement si "$x > 0$ et $y > 0$" ou "$x < 0$ et $y < 0$".*



2. *La fonction g est définie en (x,y) si et seulement si $9 - x^2 - y^2$ est positif c'est-à-dire si et seulement si "$x^2 + y^2 \leq 9$". L'ensemble de défition de g est donc la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 3.*

Exercice 2

1. *La ligne de niveau -1 de la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est l'ensemble :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\}.$$

Or on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 &\iff (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ &\iff d((x,y),(2,0)) = 2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5 = -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(2,0)) = 2\}.$$

La ligne de niveau -1 de la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$ est donc le cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 2.

2. *La ligne de niveau 0 de la fonction $(x,y) \mapsto x^2y^2$ est l'ensemble :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 = 0\}.$$

Or on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2y^2 = 0 \iff x^2 = 0 \text{ ou } y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Ainsi on obtient :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$

La ligne de niveau 0 de la fonction $(x,y) \mapsto x^2y^2$ est donc la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = 0$.

Exercice 3

1. *Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 + 1$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(1 + x^2)$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.*
Enfin, par somme, la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. *La fonction $(x,y) \mapsto xy + 2x^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto e^{xy+2x^2}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.*
La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + 3y^2 + 1$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.
Par quotient la fonction f_2 est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. *La fonction $(x,y) \mapsto x^2 - 3x + 3 + 2y^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrons qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On va forcer l'apparition d'une identité remarquable pour exprimer $x^2 - 3x + 3 + 2y^2$ comme une somme*

de carrés :

$$\begin{aligned} x^2-3x+3+2y^2 &= x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+2y^2. \end{aligned}$$

Ainsi la fonction $(x,y)\mapsto x^2-3x+3+2y^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$ donc en particulier elle ne s'y annule pas.
Par quotient, la fonction f_3 est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. *Les fonctions $(x,y)\mapsto xy+y^3x$ et $(x,y)\mapsto x^2y^2-x^3y^5$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition, les fonctions $(x,y)\mapsto e^{xy+y^3x}$ et $(x,y)\mapsto e^{x^2y^2-x^3y^5}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$.*
Par somme, la fonction $(x,y)\mapsto e^{xy+y^3x}+e^{x^2y^2-x^3y^5}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, on en déduit que f_4 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (*et 5, 6*)

1. *La fonction g_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a :*

$$\begin{aligned} &\partial_1(g_1)(x,y)=3x^2y^3+6xy-2y^2+1; \\ &\partial_2(g_1)(x,y)=3x^3y^2+3x^2-4yx; \\ &\partial^2_{1,1}(g_1)(x,y)=6xy^3+6y; \\ &\partial^2_{1,2}(g_1)(x,y)=\partial^2_{2,1}(g_1)(x,y)=9x^2y^2+6x-4y; \\ &\partial^2_{2,2}(g_1)(x,y)=6x^3y-4x. \end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a :*

$$g_1(0,0)=1 \quad ; \quad \nabla(g_1)(0,0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_1(h,k) &= 1+\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h&k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 1+h+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en $(1,0)$. On a :*

$$g_1(1,0)=2 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,0)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,0)=\begin{pmatrix}0&6\\6&-4\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_1(1+h,k) &= 2+\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h&k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&6\\6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2+h+3k+6hk-2k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en $(1,1)$. On a :*

$$g_1(1,1)=4 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,1)=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,1)=\begin{pmatrix}12&11\\11&2\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_1(1+h,1+k) &= 4+\begin{pmatrix}8&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h&k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12&11\\11&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 4+8h+2k+6h^2+11hk+k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

2. *Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ et $(x,y)\mapsto x^2+1$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $(x,y)\mapsto x^2+1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y)\mapsto\ln(1+x^2)$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
Enfin, par somme, la fonction f_1 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (donc en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} &\partial_1(f_1)(x,y)=2x+\frac{2x}{x^2+1}; \\ &\partial_2(f_1)(x,y)=2y; \\ &\partial^2_{1,1}(f_1)(x,y)=2+\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \\ &\partial^2_{1,2}(f_1)(x,y)=\partial^2_{2,1}(g_1)(x,y)=0; \\ &\partial^2_{2,2}(f_1)(x,y)=2. \end{aligned}$$

- *DL en* $(0,0)$. *On a :*

$$f_1(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} f_1(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,0)$. *On a :*

$$f_1(1,0) = 1 + \ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} f_1(1+h,k) &= 1 + \ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 1 + \ln(2) + 3h + h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,1)$. *On a :*

$$f_1(1,1) = 2 + \ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} f_1(1+h,1+k) &= 2 + \ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2 + \ln 2 + 3h + 2k + h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

3. *Les fonctions* $(x,y) \mapsto xy$ *et* $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y) \mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Par produit, la fonction g_2 *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} \partial_1(g_2)(x,y) &= ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}; \\ \partial_2(g_2)(x,y) &= xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}; \\ \partial_{1,1}^2(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right); \\ \partial_{2,2}^2(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}^2(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2+2x^2}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \\ &= \partial_{2,1}^2(g_2)(x,y). \end{aligned}$$

- *DL en* $(0,0)$. *On a :*

$$g_2(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} g_2(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,0)$. *On a :*

$$g_2(1,0) = \ln(2)\,;\, \nabla(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \ln(2) \end{pmatrix}\,;\, \nabla^2(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} g_2(1+h,k) &= \ln(2) + \begin{pmatrix} 1 & \ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= \ln(2) + h + \ln(2)k + \frac{1+\ln(2)}{2}(2hk+k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

4. La fonction $(x,y) \mapsto (x+y)$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y) \mapsto e^x - e^y + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, g_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1(g_3)(x,y) &= e^x(1+x+y) - e^y + 1;\\
\partial_2(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+1) + e^x + 1;\\
\partial^2_{1,1}(g_3)(x,y) &= e^x(x+y+2);\\
\partial^2_{2,2}(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+2);\\
\partial^2_{1,2}(g_1)(x,y) &= \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) = e^x - e^y.
\end{aligned}$$

- DL en $(0,0)$. On a :

$$g_3(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(g_3)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_3(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= h + k + h^2 - k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- DL en $(1,0)$. On a :

$$g_3(1,0) = e \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,0) = \begin{pmatrix} 2e \\ e-1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,0) = \begin{pmatrix} 3e & e-1 \\ e-1 & -3 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_3(1+h,k) &= e + \begin{pmatrix} 2e & e-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e & e-1 \\ e-1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\\
&\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= e + 2eh + (e-1)k + \frac{1}{2}(3eh^2 + 2(e-1)hk - 3k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- DL en $(1,1)$. On a :

$$g_3(1,1) = 2 \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,1) = \begin{pmatrix} 1+2e \\ 1-2e \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,1) = \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -4e \end{pmatrix}.$$

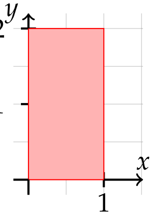
D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_3(1+h,1+k) &= 2 + \begin{pmatrix} 1+2e & 1-2e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -4e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\\
&\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 2 + (1+2e)h + (1-2e)k + 2eh^2 - 2ek^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

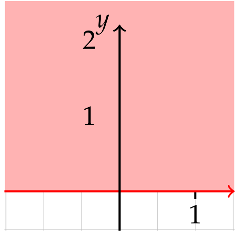
où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

Exercice 7

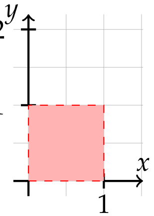
1. L'ensemble $[0,1] \times [0,2]$ est fermé et borné.



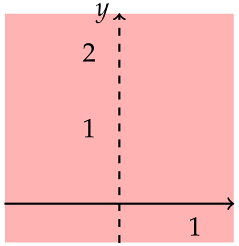
2. L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est fermé et non bornée.



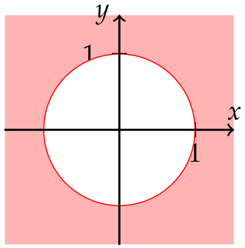
3. L'ensemble $]0,1[\times]0,1[$ est ouvert et borné.



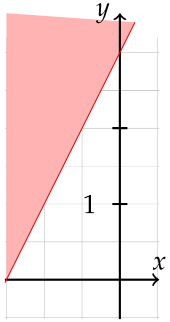
4. L'ensemble $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est ouvert et non borné.



5. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ est fermé et non borné.



6. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|y \geq 2x+3\}$ est fermé et non borné.



Exercice 8

1. Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. De plus, $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Par quotient, la fonction f est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x \times xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\partial_2 f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2y \times xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2yx^3 - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3};$$
$$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2 - (y^3-yx^2) \times 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = -\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4}{(x^2+y^2)^3};$$
$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_{2,1} f(x,y) = -\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{d'après le théorème de Schwarz;}$$
$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2xy^3 - 6yx^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

2. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Par ailleurs, la fonction $(x,y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ainsi par somme puis produit de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 g(x,y) = \ln(x) + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1;$$
$$\partial_2 g(x,y) = 2yx;$$
$$\partial^2_{1,1} g(x,y) = \frac{1}{x} + 2;$$
$$\partial^2_{2,1} g(x,y) = 2y = \partial^2_{1,2} g(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz;}$$
$$\partial^2_{2,2} g(x,y) = 2x.$$

3. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction racine carrée étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
La fonction $(x,y) \mapsto y$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et ne s'y annulant pas, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ puis par quotient que h est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(y)};$$
$$\partial_2 h(x,y) = -\frac{\sqrt{x}}{y\ln(y)^2};$$
$$\partial^2_{1,1} h(x,y) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}\ln(y)};$$
$$\partial^2_{2,1} h(x,y) = -\frac{1}{2y\sqrt{x}\ln(y)^2} = \partial^2_{1,2} h(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz;}$$
$$\partial^2_{2,2} h(x,y) = \sqrt{x}\frac{\ln(y)+2}{y^2\ln(y)^3}.$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Finalement, par produit, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 f(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2);$$
$$\partial_2 f(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &= 0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &= 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(1-x^2-y^2) &= 0 \\ y(1-x^2-y^2) &= 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y(1-x^2-y^2) &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1-x^2-y^2 &= 0 \\ y(1-x^2-y^2) &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= 0 \\ 1-x^2-y^2 &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad 1-x^2-y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\right\}.$$

Ainsi l'ensemble des points critiques est :

$$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}.$$

3. *La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a ;*

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $g(x)$	*0*	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	*0*

En particulier on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(0) = 0 \leq g(x) \leq e^{-1} = g(1).$$

Or, on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Ainsi :

- *pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \geq g(0) = f(0,0)$$

et f possède donc un minimum global en $(0,0)$;

- *soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \leq g(1) = g(x_0^2+y_0^2) = f(x_0,y_0)$$

et f possède donc un maximum global en (x_0,y_0).

Exercice 10

1. *La fonction f_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f_1(x,y) = 3y-3x^2 \quad ; \quad \partial_2 f_1(x,y) = 3x-3y^2;\\
&\partial^2_{1,1} f_1(x,y) = -6x \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f_1(x,y) = -6y;\\
&\partial^2_{2,1} f_1(x,y) = \partial^2_{1,2} f_1(x,y) = 3.
\end{aligned}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\nabla f_1(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3y-3x^2 &= 0\\ 3x-3y^2 &= 0\end{cases} &\iff \begin{cases} y &= x^2\\ x-x^4 &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y &= x^2\\ x(1-x^3) &= 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x &= 0\\ y &= 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= 1\\ y &= 1\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi f_1 possède deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.

- *Étude en $(0,0)$. On a :*

$$\nabla^2 f_1(0,0) = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Déterminons le spectre de $\nabla^2 f_1(0,0)$: soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(\nabla^2 f_1(0,0)) \iff \det(\nabla^2 f_1(0,0) - \lambda I_2) = 0 &\iff \det\left(\begin{pmatrix}-\lambda & 3\\ 3 & -\lambda\end{pmatrix}\right) = 0\\
&\iff \lambda^2 - 9 = 0\\
&\iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f_1(0,0)) = \{-3,3\}$. On en déduit que $(0,0)$ est un point selle de f_1.

- *Étude en $(1,1)$. On a :*

$$\nabla^2 f_1(1,1) = \begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}.$$

Déterminons le spectre de $\nabla^2 f_1(1,1)$: soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(\nabla^2 f_1(1,1)) &\iff \det(\nabla^2 f_1(1,1) - \lambda I_2) = 0\\
&\iff \det\left(\begin{pmatrix}-6-\lambda & 3\\ 3 & -6-\lambda\end{pmatrix}\right) = 0\\
&\iff (6+\lambda)^2 - 9 = 0\\
&\iff (6+\lambda-3)(6+\lambda+3) = 0\\
&\iff \lambda = -3 \text{ ou } \lambda = -9.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f_1(1,1)) = \{-3,-9\}$. On en déduit que f_1 admet un maximum local $(1,1)$.

2. *La fonction f_2 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\begin{aligned}
&\partial_1 f_2(x,y) = 2x-y \quad ; \quad \partial_2 f_2(x,y) = 2y-x;\\
&\partial^2_{1,1} f_2(x,y) = 2 \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f_2(x,y) = 2;\\
&\partial^2_{2,1} f_2(x,y) = \partial^2_{1,2} f_2(x,y) = -1.
\end{aligned}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc :

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x-y &= 0 \\ 2y-x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 2x \\ 4x-x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}.$$

Ainsi f_1 possède un unique point critique : $(0,0)$.
Étude en $(0,0)$. On a :

$$\nabla^2 f_2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminons le spectre de $\nabla^2 f_2(0,0)$: soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(\nabla^2 f_2(0,0)) \iff \det(\nabla^2 f_2(0,0) - \lambda I_2) = 0 &\iff \det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\iff (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f_2(0,0)) = \{1,3\}$. On en déduit que f_2 admet un minimum local en $(0,0)$.

3. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Finalement, par somme puis produit, la fonction f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\partial_1 f_3(x,y) = \ln(x)^2 + 2\ln(x) + y^2 \quad ; \quad \partial_2 f_3(x,y) = 2yx;$$
$$\partial^2_{1,1} f_3(x,y) = \frac{2\ln(x)+2}{x} \quad ; \quad \partial^2_{2,2} f_3(x,y) = 2x;$$
$$\partial^2_{2,1} f_3(x,y) = \partial^2_{1,2} f_3(x,y) = 2y.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\nabla f_3(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \ln(x)^2 + 2\ln(x) + y^2 &= 0 \\ 2yx &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(x)^2 + 2\ln(x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{car } x \neq 0, \\ &\iff \begin{cases} \ln(x)(\ln(x)+2) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln(x) &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(x)+2 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= e^{-2} \\ y &= 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi f_3 possède deux points critiques : $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$.

- Étude en $(1,0)$. On a :

$$\nabla^2 f_3(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc le spectre de $\nabla^2 f_3(1,0)$ est $\{2\}$. On en déduit que f_3 admet un minimum local en $(1,0)$.

- Étude en $(e^{-2},0)$. On a :

$$\nabla^2 f_3(e^{-2},0) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi le spectre de $\nabla^2 f_3(1,e^{-2})$ est $\{-2e^2, 2e^{-2}\}$. On en déduit que $(e^{-2},0)$ est un point selle de f_3.

Exercice 11

1. (a) La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial_1 f(x,y) = 4x + 2y - 1 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 4y + 2x - 1.$$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x+2y-1 &= 0 \\ 4y+2x-1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x-1 &= 0 \\ 4y+2x-1 &= 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow 2L$$
$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{6} \\ y &= \frac{1}{6} \end{cases}.$$

Ainsi le seul point critique de f est A.

2. (a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 4 \quad ; \quad \partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 4.$$

(b) On en déduit : $\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) \iff \det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda I_2\right) = 0 &\iff (4-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 6.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(A)) = \{2,6\}$. On en déduit donc que f possède un minimum local m en A qui vaut :

$$m = f(A) = -\frac{1}{6}.$$

3. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{36}\right)$$
$$= 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}.$$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente on a :

$$0 \leq 2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = f(x,y)+\frac{1}{6}.$$

On en déduit donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq -\frac{1}{6} = m.$$

Ainsi m est le minimum global de f.

4. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après 3.b :

$$g(x,y) = f(e^x,e^y) \geq -\frac{1}{6}.$$

(b) En particulier :

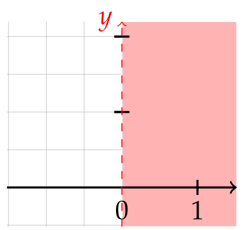
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) \geq -\frac{1}{6} = f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = g(-\ln(6),-\ln(6)).$$

Ainsi g possède un minimum global en $(-\ln(6),-\ln(6))$ qui vaut $-\frac{1}{6}$.

Exercice 12

$U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :$g(x,y) \longmapsto \frac{1}{x}+e^x-y^2e^y$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble U :



2. Pour tout (x,y) de U, on a

$$\partial_1(g)(x,y) = \frac{-1}{x^2}+e^x \quad ; \quad \partial_1(g)(x,y) = -2ye^y - y^2e^y.$$

les dérivées partielles d'ordre 1 de g en (x,y).

3. (a) Soit $x \in]0;+\infty[$. On a :

$$e^x = \frac{1}{x^2} \iff x^2e^x = 1 \iff x^2e^x - 1 = 0.$$

Notons h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h(x) = x^2e^x - 1.$$

La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a :

$$h'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x > 0.$$

Ainsi h est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Comme de plus $0 \in h(]0,+\infty[) =]-1,+\infty[$ alors d'après le corollaire du TVI, on sait que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$ que l'on notera α. D'après ce qui précède, α est donc l'unique solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$.
Par ailleurs :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4} - 1 < 0 = f(\alpha) < h(1) = e-1.$$

Par croissance stricte de h on en déduit donc que $\alpha \in \left]\frac{1}{2},1\right[$.

(b) Soit $(x,y) \in U$. On a :

$$\nabla(g)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \partial_1(g)(x,y) &= 0 \\ \partial_1(g)(x,y) &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{-1}{x^2}+e^x &= 0 \\ -(2y+y^2)e^y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} e^x &= \frac{1}{x^2} \\ -y(2+y)e^y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= -2 \end{cases}.$$

Ainsi g admet deux points critiques et deux seulement qui sont $(\alpha,0)$ et $(\alpha,-2)$, où α est le réel défini ci-dessus.

4. Déterminons les dérivées partielles d'ordre 2 de g. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\partial^2_{1,1}(g)(x,y) = \frac{2}{x^3}+e^x \,;\, \partial^2_{1,2}(g)(x,y) = \partial^2_{2,2}(g)(x,y) = 0 \,;\, \partial^2_{2,2}(g)(x,y) = -e^y(2+4y+y^2).$$

La hessienne de g en $(\alpha,0)$ est donc :

$$\nabla^2(g)(\alpha,0) = \begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(g)(\alpha,0) & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\nabla^2(g)(\alpha,0)$ *sont donc* -2 *(qui est strictement négative) et* $\partial^2_{1,1}(g)(\alpha,0)$ *(qui est strictement positive). Ainsi* g *admet un point selle en* $(\alpha,0)$ *et n'admet donc pas d'extremum local en* $(\alpha,0)$*.*

5. *De même, la hessienne de* g *en* $(\alpha,-2)$ *est donc :*

$$\nabla^2(g)(\alpha,-2) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(g)(\alpha,-2) & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\nabla^2(g)(\alpha,0)$ *sont donc* $2e^{-2}$ *(qui est strictement positive) et* $\partial^2_{1,1}(g)(\alpha,-2)$ *(qui est strictement positive). Ainsi* g *admet un minimum local en* $(\alpha,-2)$*.*

6. *On a :*

$$\lim_{y\to+\infty} g(1,y) = -\infty.$$

Donc le minimum n'est pas global.