Nom :
Prénom :

Interro 5 le 20/10.

Exercice 1.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\right) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{matrix}\\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ &= 3.\end{aligned}$$

Exercice 2. Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{(\ln(n))^5}{n^4} = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{(\ln(n))^5}{n^4} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^5}{n^4}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc, d'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^5}{n^4}$ est convergente aussi.

Nom :
Prénom :

Interro 5 le 20/10.

Exercice 1.

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&3&4&2\\3&4&5&2\end{pmatrix}\right) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2&2&3&1\\2&3&4&2\\2&4&5&3\end{pmatrix}\right) \qquad C_1 \leftrightarrow C_3\\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2&2&3&1\\0&1&1&1\\0&2&2&2\end{pmatrix}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2&2&3&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\\ &= 2.\end{aligned}$$

Exercice 2. On voit facilement que :

$$\frac{n^5+2n-3}{n^7+\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^5}{n^7} = \frac{1}{n^2}.$$

Or, les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^5+2n-3}{n^7+\ln n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut conclure qu'elles sont de même nature. Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^5+2n-3}{n^7+\ln n}$ aussi.