TD13-Variables aléatoires réelles

Exercice 1. On rappelle que la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. On note F_Y la fonction de répartition de Y et on considère $y \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X < 1], [X \geq 1])$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(\max(1,X) \leq y) &= P([\max(1,X) \leq y] \cap [X < 1]) + P([\max(1,X) \leq y] \cap [X \geq 1]) \\ &= P([1 \leq y] \cap [X < 1]) + P([X \leq y] \cap [X \geq 1]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ P(X < 1) + P(1 \leq X \leq y) & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ F_X(1) + F_X(y) - F_X(1) & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. On en déduit :

$$\lim_{y \to 1^-} F_Y(y) = 0 \neq 1 - e^{-1} = \lim_{y \to 1^+} F_Y(y).$$

Ainsi F_Y n'est pas continue en 1 donc Y n'est pas à densité.

Exercice 2. Fait en TD

Exercice 3.

1.
   - La fonction F est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ donc est de classe C^1 (et a fortiori continue) sur ces intervalles.
     Sur $[0, 1[$, la fonction $x \mapsto 1 - x$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, F est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$.
     Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
   - On vient de voir que F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
     Étude de la continuité en 0. On a :
     $$\lim_{x \to 0^-} F(x) = 0 = F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x).$$
     Ainsi F est continue en 0.
     Étude de la continuité en 1. On a :
     $$\lim_{x \to 1^-} F(x) = 1 = F(1) = \lim_{x \to 0^+} F(x).$$
     Ainsi F est continue en 1.
     Finalement F est continue sur $\mathbb{R}$.
   - On a clairement : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
   - Enfin F est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0, 1[$ on a :
     $$F'(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \geq 0.$$
     Donc F est croissante sur $[0, 1]$.
     Comme F continue, on en déduit qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

2. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de X.

3. Comme X est à densité, on sait que :

$$P(0.973 < X \leq 1.2) = \int_{0.973}^{1.2} f(t)\,dt = F(1.2) - F(0.973) = 0.027^{\frac{4}{3}} = 0.0081.$$

Exercice 4.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est positive si et seulement si c est positif.
   Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a :
     $$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x ce^{-t}\,dt = \left[-ce^{-t}\right]_0^x = c - ce^{-x}.$$
     Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = c$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente et vaut c.

- Étude de $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$. Soit $x \in]-\infty, 0]$. Alors

$$\int_x^0 f(t)dt = \int_x^0 ce^t dt = \left[ce^t\right]_x^0 = c - ce^x.$$

Ainsi $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt = c$. L'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est donc convergente et vaut c.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2c.$$

La fonction f est donc une densité de probabilité si et seulement si c est positif et $2c = 1$ donc si et seulement si $c = \frac{1}{2}$.

2. Notons F_X la fonction de répartition de X et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^t dt & \text{si} x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^t dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 5. On rappelle que la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Vu en TD.

2. Vu en TD.

3. Notons F_Y la fonction de répartition de Y et soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} P\left(\left[\frac{1}{X} \leq y\right]\right) & \text{si } y \leq 0 \\ P([Y \leq y] \cap [X \neq 0]) + P([Y \leq y] \cap [X = 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} P\left(\left[\frac{1}{y} \leq X < 0\right]\right) & \text{si } y < 0 \\ P(X \leq 0) & \text{si } x = 0 \\ P([Y \leq y] \cap [X \neq 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } P(X = 0) = 0$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P\left(\left[\frac{1}{X} \leq y\right] \cap [X \neq 0]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P\left(\left[\frac{1}{y} \leq X\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - P\left(\left[X < \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - P\left(\left[X \leq \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } X \text{ est à densité}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

La fonction F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}^*$.
Étudions la continuité en 0. Par limite usuelle, on a :

$$\lim_{y\to 0^+} F_Y(y) = 0 = F_Y(0) = \lim_{y\to 0^-} F_Y(y).$$

Ainsi F_Y est continue en 0 et finalement F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que Y est à densité. De plus, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

Exercice 6.

1. (a) C'est immédiat car la fonction partie entière est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition de la partie entière et compte tenu que k et $k-1$ sont positifs on a :

$$P(Y = k-1) = P(k-1 \leq X < k) = F_X(k) - F_X(k-1) = 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)})$$
$$= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}.$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$P(Y+1=k) = P(Y=k-1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda}).$$

Ainsi $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$.

(d) Puisque la variable aléatoire $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$, elle possède une espérance et une variance :

$$E(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \quad ; \quad V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

On en déduit que Y possède une espérance et une variance :

$$E(Y) = E(Y)-1 = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \quad ; \quad V(Y) = V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

2. (a) La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$ donc $Z = X - \lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$.

(b) Soit $x \in [0,1[$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(Z \le x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([Z \le x] \cap [Y=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X-k \le x] \cap [k \le X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X \le x+k] \cap [k \le X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \le X \le x+k]) \quad \text{car } x \in [0,1[\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(x+k) - F_X(k) \quad \text{car } X \text{ à densité} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}) \\
&= (1-e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} \\
&= \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

(c) En particulier, on déduit des questions précédentes que la fonction de répartition F_Z de Z est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}.$$

La fonction F_Z est de classe C^1 (a fortiori continue) sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On vérifie facilement qu'elle est continue en 0 et en 1.
Ainsi Z est bien à densité. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ on a :

$$F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

est une densité de Z.

(d) Comme X et Y possèdent une espérance alors par linéarité Z aussi et on a :

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda}-1}.$$

Exercice 7.

1. La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$ et la fonction racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable $\sqrt{X}$ possède donc une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
La fonction $x \mapsto \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $x \ge 0$ on a :

$$\frac{\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}}{e^{-\frac{\lambda}{2}x}} = \lambda\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}\lambda x}.$$

Or, par croissance comparée on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}\lambda x} = 0$. Ainsi :

$$|\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}| = \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x}\right).$$

Comme de plus les fonctions $x \mapsto |\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}|$ et $x \mapsto e^{-\frac{\lambda}{2}x}$ sont positives et que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x}dx$ converge alors par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
Ainsi, $\sqrt{X}$ possède une espérance.

2. La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$ et la fonction cube est continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable X^3 possède donc une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.

La fonction $x \mapsto \lambda x^3 e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\frac{\lambda x^3 e^{-\lambda x}}{e^{-\frac{\lambda}{2}x}} = \lambda x^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda x}.$$

Or, par croissance comparée on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda x} = 0$. Ainsi :

$$|\lambda x^3 e^{-\lambda x}| = \lambda x^3 e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x}\right).$$

Comme de plus les fonctions $x \mapsto |\lambda x^3 e^{-\lambda x}|$ et $x \mapsto e^{-\frac{\lambda}{2}x}$ sont positives et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x}dx$ converge alors par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
Ainsi, X^3 possède une espérance.

3. La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $]0,+\infty[$ et la fonction inverse est continue sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable Y possède donc une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\frac{1}{x}e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
La fonction $x \mapsto \lambda\frac{1}{x}e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
De plus, comme $\lim\limits_{x\to0^+} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda \neq 0$ on a :

$$\frac{1}{x}e^{-\lambda x} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\lambda}{x}.$$

Comme de plus les fonctions $x \mapsto |\lambda\frac{1}{x}e^{-\lambda x}|$ et $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ sont positives et que $\displaystyle\int_0^{c} \frac{\lambda}{x}dx$ diverge pour tout $c > 0$ alors par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{c} \lambda\frac{1}{x}e^{-\lambda x}dx$ diverge pour tout $c > 0$. Par conséquent l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\lambda\frac{1}{x}e^{-\lambda x}\right| dx$ diverge et Y ne possède pas d'espérance.

Exercice 8. D'après l'exercice 4, une densité de X est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1. La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
Or la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty,0]$. On a alors :

$$\int_A^0 |tf(t)|dt = -\frac{1}{2}\int_A^0 te^t dt.$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^0 |tf(t)|dt &= -\frac{1}{2}\int_A^0 te^t dt\\ &= -\frac{1}{2}\left([te^t]_A^0 - \int_A^0 e^t dt\right)\\ &= \frac{1}{2}(Ae^A + 1 - e^A).\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 |tf(t)|dt = \frac{1}{2}$.
Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 |tf(t)|dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a alors :

$$\int_0^A |tf(t)|dt = \frac{1}{2}\int_0^A te^{-t} dt.$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0,A]$ donc par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A |tf(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_0^A te^{-t} dt\\ &= \frac{1}{2}\left([-te^{-t}]_0^A - \int_0^A -e^{-t} dt\right)\\ &= \frac{1}{2}(-Ae^{-A} + 1 - e^{-A}).\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |tf(t)|dt = \frac{1}{2}$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

- Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 |tf(t)|dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$

converge. Ainsi X possède une espérance. De plus on a :

$$\begin{aligned}E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} te^{t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} te^{-t}dt\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Comme la variable aléatoire X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens elle admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument.
   Or la fonction $t \mapsto |t^2 f(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\int_{-\infty}^{0} |t^2 f(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a alors :

   $$\int_{A}^{0} |t^2 f(t)|dt = \frac{1}{2}\int_{A}^{0} t^2 e^{t}dt.$$

   Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on obtient :

   $$\begin{aligned}\int_{A}^{0} |tf(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_{A}^{0} t^2 e^{t}dt\\ &= \frac{1}{2}\left([t^2e^t]_A^0 - \int_A^0 2te^t dt\right)\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^A - \int_A^0 te^t dt\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^A + Ae^A + 1 - e^A \quad \text{d'après les calculs de 1.}\end{aligned}$$

   Par croissance comparée, on a : $\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} |t^2 f(t)|dt = 1$.
   Ainsi $\int_{-\infty}^{0} |t^2 f(t)|dt$ converge et vaut 1.
   - Étude de $\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|dt$. Soit $A \in [0, +\infty[$. On a alors :

   $$\int_{0}^{A} |t^2 f(t)|dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{A} t^2 e^{-t}dt.$$

   Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, A]$ donc par intégration par parties on obtient :

   $$\begin{aligned}\int_{0}^{A} |t^2 f(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_{0}^{A} t^2 e^{-t}dt\\ &= \frac{1}{2}\left([-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A -2te^{-t} dt\right)\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^{-A} + \int_0^A te^{-t} dt\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^{-A} - A^{-A} + 1 - e^{-A} \quad \text{d'après les calculs de 1.}\end{aligned}$$

   Par croissance comparée, on a : $\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} |t^2 f(t)|dt = 1$.
   Ainsi $\int_{0}^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ converge et vaut 1.
   - Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} |t^2 f(t)|dt$ et $\int_{0}^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ converge. Ainsi X possède un moment d'ordre deux donc une variance. De plus on a :

   $$\begin{aligned}E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)dt\\ &= 2.\end{aligned}$$

   Par la formule de Koenig-Huygens, on a donc :

   $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.$$

Exercice 9.

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}^*$. Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ impropre en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
   - Étude de $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ impropre en $-\infty$ et 0. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ alors l'intégrale converge et vaut 0.
   - Étude de $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$. Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :

   $$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{(1+x)^3}dx\\ &= 2\left[\frac{1}{-2(1+x)^2}\right]_0^A\\ &= 1 - \frac{1}{(1+A)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = 1.$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge donc et vaut 1.

- Les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et de plus :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0+1 = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable de densité f et notons F sa fonction de répartition. Alors, pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \int_0^x f(t)dt & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. La fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc d'après le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

La fonction $x\mapsto |xf(x)|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $A\in[0,+\infty[$. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \frac{-1}{(1+x)^2}$ étant de classe C^1 sur $[0,A]$ on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{2x}{(1+x)^3}dx = \left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-1}{(1+x)^2}dx \\ &= -\frac{A}{(1+A)^2} + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A \\ &= -\frac{A}{(1+A)^2} - \frac{1}{1+A} + 1. \end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A |xf(x)|dx = 1$. La variable X possède donc une espérance et :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)^3}dx = 1.$$

Comme X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument. Or :

$$|x^2 f(x)| = \frac{2x^2}{(1+x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Les fonctions $x\mapsto |x^2 f(x)|$ et $x\mapsto \frac{2}{x}$ étant continues et positives sur $[c,+\infty[$ pour tout $c>0$, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives on en déduit que pour tout $c>0$ les intégrales $\int_c^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ et $\int_c^{+\infty} \frac{2}{x}dx$ sont de même nature. Ainsi, pour tout $c>0$ $\int_c^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ diverge.

Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ diverge et X ne possède donc pas de variance.

Exercice 10.

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (la continuité en 0 se vérifie facilement). De plus, comme f est nulle en dehors de $[0,1]$ et continue sur $[0,1]$ alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = [t^2]_0^1 = 1.$$
Ainsi f est bien une densité de probabilité.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La variable X admet un moment d'ordre n si et seulement si X^n possède une espérance. Or la fonction f est nulle en dehors de $[0,1]$ et $x\mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de transfert, X^n admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 x^n\times 2xdx$ converge absolument.
Or il s'agit d'une intégrale de fonction continue positive sur un segment donc elle converge (il n'y a pas d'impropreté). Ainsi X possède un moment d'ordre n et on a :
$$E(X^n) = \int_0^1 x^n\times 2xdx = \left[\frac{2x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{2}{n+2}.$$
(b) Par conséquent on a :
$$E(X) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad E(X^2) = \frac{1}{2}.$$
D'après la formule de Koenig-Huygens, X possède donc une variance et elle est donnée par :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

3. Notons F_X la fonction de répartition de X et soit $x\in\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ \int_0^x 2tdt & \text{si } x\in]0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 & \text{si } x\in]0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}. \end{aligned}$$

4. (a) Notons F_Y la fonction de répartition de Y et soit $y\in\mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ on a :
$$F_Y(y) = P(\ln(X)\leq y) = P(X\leq e^y) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^y\leq 0 \\ e^{2y} & \text{si } e^y\in]0,1] \\ 1 & \text{si } e^y>1 \end{cases} = \begin{cases} e^{2y} & \text{si } y\leq 0 \\ 1 & \text{si } y>0 \end{cases}.$$

On remarque que F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$ (seule la continuité en 0 est non triviale et on procède comme d'habitude).
Donc Y est à densité. De plus pour tout y non nul on a :

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 2e^{2y} & \text{si } y < 0 \\ 0 & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(y) = \begin{cases} 2e^{2y} & \text{si } y \leq 0 \\ 0 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

(b) Comme Y a pour densité g et que g est nulle en dehors de $]-\infty, 0]$ alors Y possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^0 yg(y)dy$ converge absolument.
La fonction $y \mapsto |yg(y)|$ est continue sur $]-\infty, 0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a :

$$\int_A^0 |yg(y)|dy = -\int_A^0 yg(y)dy = -\int_A^0 2ye^{2y}dy.$$

Les fonctions $y \mapsto y$ et $y \mapsto e^{2y}$ sont de classe C^1 sur $[A, 0]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_A^0 |yg(y)|dy = -\int_A^0 2ye^{2y}dy &= -\left[ye^{2y}\right]_A^0 + \int_A^0 e^{2y}dy \\ &= Ae^{2A} + \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_A^0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(2A+1)e^{2A}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to-\infty} \int_0^A |yg(y)|dy = \frac{1}{2}$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 yg(y)dy$ converge absolument et Y possède donc une espérance. De plus, comme $\mapsto yg(y)$ est négative sur $]-\infty, 0]$ on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^0 yg(y)dy = -\int_{-\infty}^0 |yg(y)|dy = -\frac{1}{2}.$$

De même, Y possède une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^0 y^2g(y)dy$ converge absolument. La fonction $y \mapsto y^2g(y)$ étant positive, il suffit de montrer la convergence. Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors :

$$\int_A^0 y^2g(y)dy = \int_A^0 2y^2e^{2y}dy.$$

Les fonctions $y \mapsto y^2$ et $y \mapsto e^{2y}$ sont de classe C^1 sur $[A, 0]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_A^0 y^2g(y)dy &= \left[y^2e^{2y}\right]_A^0 - \int_A^0 2ye^{2y}dy \\ &= -A^2e^{2A} + \left(\frac{1}{2} + \frac{(2A+1)e^{2A}}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to-\infty} \int_0^A y^2g(y)dy = \frac{1}{2}$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 y^2g(y)dy$ converge absolument et Y possède donc un moment d'ordre 2 donc une variance. De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens on a :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(c) La fonction f est nulle en dehors de $]0, 1]$ et la fonction logarithme est continue sur $]0, 1]$ d'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si $\int_0^1 \ln(x)f(x)dx$ impropre en 0 converge absolument.
Soit $A \in]0, 1]$. On a :

$$\int_A^1 |\ln(x)f(x)|dx = -\int_A^1 \ln(x)f(x)dx = -\int_A^1 2x\ln(x)dx.$$

Or les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe C^1 sur $[A, 1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_A^1 |\ln(x)f(x)|dx = -\int_A^1 2x\ln(x)dx &= -\left[x^2\ln(x)\right]_A^1 + \int_A^1 x^2 \times \frac{1}{x}dx \\ &= A^2\ln(A) + \left[\frac{x}{2}\right]_A^1 \\ &= A^2\ln(A) + \frac{1}{2} - \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{A\to0^+} \int_A^1 |\ln(x)f(x)|dx = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\int_0^1 \ln(x)f(x)dx$ converge absolument et Y possède donc une espérance donnée par :

$$E(Y) = \int_0^1 \ln(x)f(x)dx = -\int_0^1 |\ln(x)f(x)|dx = -\frac{1}{2}.$$

De même Y possède un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_0^1 (\ln(x))^2f(x)dx$ impropre en 0 converge absolument.
Soit $A \in]0, 1]$. On a :

$$\int_A^1 |(\ln(x))^2f(x)|dx = \int_A^1 (\ln(x))^2f(x)dx = \int_A^1 2x(\ln(x))^2dx.$$

Or les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (\ln(x))^2$ sont de classe C^1 sur $[A,1]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_A^1 (\ln(x))^2 f(x)dx = \int_A^1 2x(\ln(x))^2 dx &= \left[x^2(\ln(x))^2\right]_A^1 - \int_A^1 x^2 \times \frac{2\ln(x)}{x}dx \\ &= -A^2(\ln(A))^2 - \int_A^1 2x\ln(x)dx \\ &= -A^2(\ln(A))^2 + A^2\ln(A) + \frac{1}{2} - \frac{A}{2}.\end{aligned}$$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{A\to 0^+} \int_A^1 |(\ln(x))^2 f(x)|dx = \frac{1}{2}$.

Ainsi $\int_0^1 (\ln(x))^2 f(x)dx$ converge absolument et Y possède donc un moment d'ordre 2 donné par :

$$E(Y^2) = \int_0^1 (\ln(x))^2 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens Y possède une variance et on a :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 11.

1. (a) La fonction g est dérivable sur $]-\infty,0[$ (fonction constante) et sur $]0,+\infty[$ (produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$). On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Ainsi g est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

(b) Cependant, g est dérivable sur $[0,+\infty[$ (elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et dérivable à droite en 0 d'après les questions précédentes) et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$g'(x) = e^{-x}(1-x).$$

Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour la limite en 0, il s'agit d'une croissance comparée.

(c) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Par conséquent,

$$g''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 2.$$

La fonction g est donc convexe sur $[2,+\infty[$ et concave sur $]0,2]$.

2. (a) La fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, si X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(1)$, on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = E(X) = 1.$$

Donc g est une densité de probabilité.

(b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:

$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = 0$$

car $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

- Si $x \geq 0$:

$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt.$$

En faisant une intégration par parties, on trouve :

$$G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1+x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(d) La fonction g étant nulle en dehors de $[0,+\infty[$ la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ convergence absolument. Soit $A>0$. Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^A |tg(t)|dt = \int_0^A t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A 2t\times(-e^{-t})dt = -A^2e^{-A} + 2\int_0^A g(t)dt.$$

Or on sait que :

$$\lim_{A\to+\infty} -A^2e^{-A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty}\int_0^A g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$$

Donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |tg(t)|dt = 2.$$

Ainsi, Y possède une espérance et comme $t\mapsto tg(t)$ est positive on a :

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} |tg(t)|dt = 2.$$

3. (a) Soit $t\in\mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$[Z\leq t] = [e^Y\leq t] = \begin{cases} [Y\leq \ln(t)] & \text{si } t>0 \\ \emptyset & \text{si } t\leq 0 \end{cases}.$$

On obtient alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad H(t) = \begin{cases} G(\ln(t)) & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ 1-\frac{1}{t}(1+\ln(t)) & \text{si } t\geq 1 \end{cases}.$$

(b) La fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Étudions la continuité en 1. Par opérations sur les limites on a :

$$\lim_{t\to1^+} H(t) = 0 = H(1) = \lim_{t\to1^-} H(t).$$

Ainsi H est continue en 1 et finalement sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Z est à densité. De plus, pour tout $t\neq 1$ on a :

$$H'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t\leq 1 \end{cases}.$$

Au final, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t\leq 1 \end{cases}$$

est une densité de Z.