Chapitre 8 : Couples de variables aléatoires discrètes

Toutes les variables aléatoires considérées seront des variables aléatoires réelles discrètes.

1 Lois associées à un couples de variables aléatoires

1.1 Loi du couple

Définition 1 (Couple de variables aléatoires)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Le **couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y) est l'application définie par

$$\begin{aligned}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ \omega &\longmapsto (\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega))\end{aligned}$$

Définition 2 (Loi d'un couple)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On appelle **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe de** X **et** Y la donnée de

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{X}(\Omega) \text{ et } y \in \mathrm{Y}(\Omega).$$

On notera souvent $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x, \mathrm{Y}=y)$ pour désigner $\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right)$.

Exemple 1

On lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles donc

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}) = \left([\![1,6]\!]^2, \mathscr{P}\left([\![1,6]\!]^2\right), \mathrm{P}_{\text{unif.}}\right)$$

où $\mathrm{P}_{\text{unif.}}$ est la probabilité uniforme sur Ω.

1. *On note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la valeur du dé blanc. Comme X et Y sont deux variable aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :*
   (a) *On a $\mathrm{X}(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = [\![1,6]\!]$*
   (b) *Pour tout $(i,j) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega)$ on a*

   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j) = \frac{\mathrm{Card}\left([\mathrm{X}=i] \cap [\mathrm{Y}=j]\right)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

   car P est la probabilité uniforme sur Ω.

   On peut récapituler la loi sous-forme d'un tableau :

$x \in \mathrm{X}(\Omega)$ \ $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. *Maintenant , X désigne le plus petit des deux nombres obtenus et Y le plus grand. Comme X et Y sont deux variable aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :*
   (a) *On a $\mathrm{X}(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = [\![1,6]\!]$*
   (b) *Pour tout $(i,j) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega)$ on a*

   $[\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j]$ *est réalisé* $\Longleftrightarrow$ *le plus petit des 2 résultats obtenus est i et le plus grand des 2 résultats obtenus est j.*

   Donc

- *si* $i > j$, $[X = i, Y = j] = \emptyset$,
- *si* $i = j$, $[X = i, Y = j] = \{(i, i)\}$,
- *si* $i < j$, $[X = i, Y = j] = \{(i, j), (j, i)\}$,

Ainsi

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{1}{36} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{18} & \text{si } i < j \end{cases}$$

car P *est la probabilité uniforme sur* Ω.

On peut récapituler la loi sous-forme d'un tableau :

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Test 1 (*Voir solution.*)

Une urne contient 3 *boules blanches,* 4 *boules vertes et* 5 *boules bleues indiscernables au touché. On tire simultanément* 3 *boules dans l'urne au hasard.*

1. *Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
2. *Sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, *on considère les variables aléatoires* X *égale au nombre de boules blanches obtenues et* Y *égale au nombre de boules vertes obtenues. Déterminer la loi de* (X, Y).

Exemple 2

On lance en parallèle deux pièces équilibrées une infinité de fois et on s'intéresse aux résultats obtenus (on suppose tous les lancers indépendants). On note X *le rang où la première pièce tombe sur « Face » pour la première fois et* Y *le rang où la deuxième pièce tombe sur « Face » pour la première fois. Déterminons la loi du couple* (X, Y).

1. *On a* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
2. *Pour tout* $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *déterminons* $P(X = i, Y = j)$.

   Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, *notons*

   - P_i^1 *l'événement « la pièce 1 tombe sur Pile au* i*-ème lancer »*
   - F_i^1 *l'événement « la pièce 1 tombe sur Face au* i*-ème lancer »*
   - P_i^2 *et* F_i^2 *les événements analogue pour la pièce 2.*

   Alors, pour $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *on a*

$$P(X = i, Y = j) = P(P_1^1 \cap \cdots \cap P_{i-1}^1 \cap F_i^1 \cap P_1^2 \cap \cdots \cap P_{j-1}^2 \cap F_j^2) = \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^j}$$

   car tous les lancers sont indépendants.

Test 2 (*Voir solution.*)

Soit $p \in]0, 1[$. *On reprend l'énoncer de l'exemple* 2 *sauf qu'on ne suppose plus les pièces équilibrées : chacune d'elle donne « Face » avec probabilité* p *et « Pile » avec probabilité* $1 - p$. *Déterminer la loi du couple* (X, Y) *dans ce cas.*

Proposition 1

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Alors, la famille

$$\big([X=x]\cap[Y=y]\big)_{x\in X(\Omega)\ ,\ y\in Y(\Omega)}$$

est un système complet d'événement. En particulier,

$$\sum_{x\in X(\Omega)\ ,\ y\in Y(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\right)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\right)=1$$

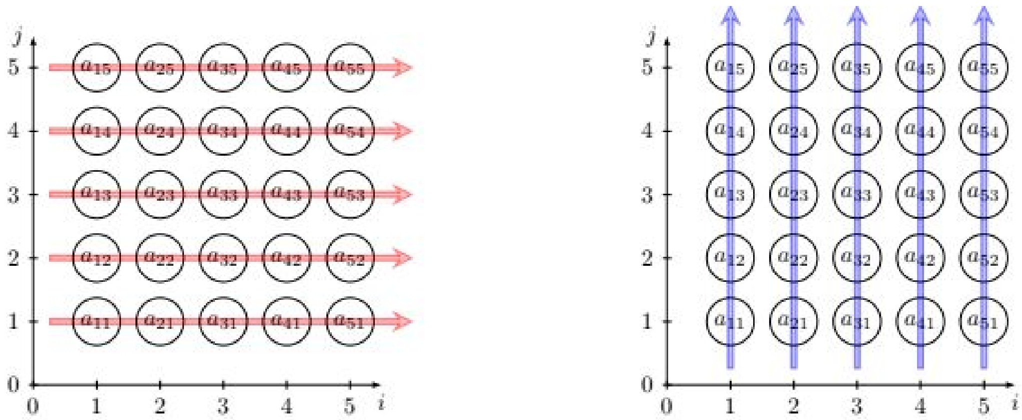
Remarque 1 (*Somme double*)

Soient I, J *deux sous ensembles de* $\mathbb{N}$ *et* $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

1. ***Cas où*** I ***et*** J ***sont finis****. On a toujours*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}a_{i,j}\right)$$

et ce nombre est noté $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{i,j}$.



$$\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}a_{ij}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}$$

2. ***Cas où*** I ***ou*** J ***est infini****. Si pour tout* $i\in I$*, la série* $\displaystyle\sum_{j\in J}a_{i,j}$ *est absolument convergente et si de plus la série*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|a_{i,j}|\right)$$

est (absolument) convergente, alors pour tout $j\in J$ *la série* $\sum_{i\in I}a_{i,j}$ *converge absolument et la série*

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}|a_{i,j}|\right)$$

aussi. Dans ce cas, on dit que la série double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{i,j}$ *est absolument convergente et on a*

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}a_{i,j}\right)$$

Ce nombre est noté $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{i,j}$ *et est appelé somme double de la série double.*

Exemple 3

1. ***Cas fini*** *: calculer* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} ij$.

$$\frac{n(n+1)}{2}\frac{p(p+1)}{2}$$

2. ***Cas infini*** *: montrer que* $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ *converge absolument et déterminer sa somme.*

$$1$$

1.2 Lois conditionnelles

Définition 3 (Lois conditionnelles)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** X **sachant (que l'événement)** $[Y = y]$ **(est réalisé)** la donnée de

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)}{P\left([Y = y]\right)} \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega).$$

- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** Y **sachant (que l'événement)** $[X = x]$ **(est réalisé)** la donnée de

$$P_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{P\left([Y = y] \cap [X = x]\right)}{P([X = x])} \quad \text{pour tout } y \in Y(\Omega).$$

Exemple 4

On reprend les deux cas de l'exemple 1.

1. *Soit* $j \in [\![1,6]\!]$ *et déterminons la loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y = j]$.

   Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$*, on a*

$$P_{[Y=j]}([X = i]) = \frac{P\left([X = i] \cap [Y = j]\right)}{P\left([Y = j]\right)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

2. *On rappelle que dans le deuxième cas, la loi de* (X, Y) *est donnée par le tableau suivant.*

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Déterminons la loi conditionnelle de X *sachant* $[Y = 3]$.

- $P([Y = 3]) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$ *d'après la formule des probabilités totales puisque la famille* $([X = i])_{i\in[\![1,6]\!]}$ *est un système complet d'événements.*
- *Donc*

$x \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P_{[Y=3]}([X = x])$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0

Méthode 1

Pour déterminer la loi conditionnelle de X *sachant* $[Y = y]$ *à partir de la loi du couple* (X, Y) *:*

1. *on commence par déterminer* $P(Y = y)$ *à l'aide de la formule des probabilités totales :*

$$P(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

2. *on calcule ensuite* $P_{[Y=y]}([X=x])$ *pour tout* $x \in X(\Omega)$.

Remarquons que, dans le cas où X *et* Y *sont finies et la loi de* (X, Y) *donnée par un tableau :*

1. $P(Y=y)$ *est la somme des probabilités de la colonne correspondant à* $[Y=y]$,
2. *la loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y=y]$ *s'obtient en renormalisant la colonne correspond à* $[Y=y]$ *par* $P(Y=y)$

(c'est le même principe pour la loi conditionnelle de Y *sachant* $[X=x]$ *mais avec les lignes).*

Exemple 5

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par* $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ *et pour tout* $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$

$$P\left(\left[X=i, Y=j\right]\right)=\frac{e^{-i}i^j}{2^i j!}.$$

Soit $i\in\mathbb{N}^*$ *et déterminons la loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X=i]$.

1. *On commence par déterminer* $P([X=i])$: *la famille* $\left(\left[Y=j\right]\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :*

$$P([X=i])=\sum_{j=0}^{+\infty}P\left([X=i]\cap\left[Y=j\right]\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-i}i^j}{2^i j!}=\frac{e^{-i}}{2^i}\times e^i=\frac{1}{2^i}$$

2. *On en déduit la loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X=i]$: *pour tout* $j\in\mathbb{N}$,

$$P_{[X=i]}\left(\left[Y=j\right]\right)=\frac{P\left(\left[X=i, Y=j\right]\right)}{P([X=i])}=\frac{e^{-i}i^j}{j!}.$$

Sachant $[X=i]$, Y *suit une loi de Poisson de paramètre* i.

Test 3 (*Voir solution.*)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la loi conditionnelle de Y *sachant* $[X=4]$.

Remarque 2

1. *Une loi conditionnelle est une loi de probabilité. En particulier, pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *tel que* $P(Y=y)\neq 0$,

$$\sum_{x\in X(\Omega)}P_{[Y=y]}([X=x])=1$$

et de même, pour tout $x\in X(\Omega)$ *tel que* $P(X=x)\neq 0$,

$$\sum_{y\in Y(\Omega)}P_{[X=x]}\left(\left[Y=y\right]\right)=1.$$

2. *La connaissance des lois conditionnelles ne permet pas de retrouver la loi du couple.*

1.3 Lois marginales

Définition 4 (Lois marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle

1. **première loi marginale** du couple (X, Y) la loi de X,
2. **deuxième loi marginale** du couple (X, Y) la loi de Y.

Pour le calcul pratique des lois marginales, on utilise la formules des probabitlités totales :

Proposition 2 (Calcul des lois marginales)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

1. On a, pour tout $x\in X(\Omega)$
$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([X=x,Y=y]\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ |\ P([Y=y])\neq 0} P_{[Y=y]}([X=x])\,P\big([Y=y]\big).$$
2. On a, pour tout $y\in Y(\Omega)$
$$P\big([Y=y]\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x,Y=y]\big) = \sum_{x\in X(\Omega)\ |\ P([X=x])\neq 0} P_{[X=x]}\big([Y=y]\big)\,P([X=x]).$$

Remarque 3

1. *Les égalités du point* 1 *résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $\big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$ *et les égalités point* 2 *résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$.
2. *La proposition ci-dessus entraîne en particulier la convergence des séries considérées.*
3. *La connaissance de la loi du couple* (X,Y) *permet de déterminer les lois de* X *et de* Y.
4. *La connaissances des lois de* X *et* Y *prises séparément n'apporte aucune information sur leur interaction et donc sur la loi du couple* (X,Y).
5. *En revanche, la connaissance de la loi de* X *et des lois conditionnelles de* Y *sachant* $[X=x]$ *pour tout* $x\in X(\Omega)$ *permet de trouver la loi du couple.*

Méthode 2

1. *Pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple, on utilise les égalités*
$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big([X=x,Y=y]\big) \quad \textit{ou} \quad P\big([Y=y]\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\big([X=x,Y=y]\big)$$
de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.
2. *Pour trouver la loi de* X *connaissant les lois conditionnelles de* X *sachant* $[Y=y]$ *pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *et la loi de* Y *on utilise l'égalité*
$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ |\ P([Y=y])\neq 0} P_{[Y=y]}([X=x])\,P\big([Y=y]\big)$$
de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.
3. *Pour trouver la loi du couple* (X,Y) *connaissant la loi de* X *et des lois conditionnelles de* Y *sachant* $[X=x]$ *pour tout* $x\in X(\Omega)$ *on utilise l'égalité :*
$$P\big([X=x,Y=y]\big) = P([X=x])\,P_{[X=x]}\big([Y=y]\big)$$
qui provient de la définition d'un probabilité conditionnelle.

Exemple 6

On reprend le cas 2 *l'exemple 1. Déterminons la loi marginale de* X.

La famille $\big([Y=j]\big)_{j\in[\![1,6]\!]}$ *forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout* $i\in[\![1,6]\!]$ *:*
$$P([X=i]) = \sum_{j=1}^{6} P\big([X=i,Y=j]\big)$$
On trouve
$$P([X=1]) = \frac{11}{36}\quad;\quad P([X=2]) = \frac{1}{4}\quad;\quad P([X=3]) = \frac{7}{36}\quad;\quad P([X=4]) = \frac{5}{36}\quad;\quad P([X=5]) = \frac{1}{12}\quad;\quad P([X=6]) = \frac{1}{36}.$$

Exemple 7

Soient X, Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose que* $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ *avec*

$\lambda > 0$ *et que pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, la loi de* Y *sachant* $[X = k]$ *est la loi* $\mathscr{B}(k, p)$ *avec* $0 < p < 1$.

1. *Déterminons la loi de* Y.
   (a) *On sait que pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, pour tout* $i \in \mathbb{N}$

$$P([X=k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_{[X=k]}([Y=i]) = \begin{cases} \binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}.$$

   (b) *De plus, la famille* $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ *est un système complet d'événements donc pour tout* $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P([Y=i]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{P_{[X=k]}([Y=i])}_{=0 \text{ si } i>k} P([X=k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} P_{[X=k]}([Y=i])\, P([X=k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i p^i}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-i}(1-p)^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i p^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!} \end{aligned}$$

   en faisant le changement de variable $j = k - i$*. On reconnaît la somme d'une série exponentielle :*

$$P([Y=i]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i p^i}{i!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}$$

   (c) *Donc* Y *suit une loi* $\mathscr{P}(\lambda p)$.

2. *Déterminons la loi du couple* (X, Y)*. Pour tout* $(k, i) \in \mathbb{N}^2$ *on a*

$$P([X=k, Y=i]) = P([X=k])\, P_{[X=k]}([Y=i]) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} & \text{si } i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Test 4 (***Voir solution.***)

1. *On reprend l'exemple 4 (cas 2).*
   (a) *Avec la loi du couple* (X, Y)*, déterminer la loi de* X.
   (b) *Trouver la loi de* Y *de deux façons*
      i. *A partir de la loi de* Y *sachant* $[X = i]$ *pour tout* $i \in X(\Omega)$ *(voir exemple 4) et de la loi de* X.
      ii. *A partir de la loi de* (X, Y).
2. *(Test 4 bis) Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ *et pour tout* $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P(X=i, Y=j) = \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

   Déterminer les lois marginales.

2 Indépendance

2.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 5 (Indépendance de deux variables aléatoires discrètes)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** (pour la probabilité P) si

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega)\ \forall y \in \mathrm{Y}(\Omega)\ , \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right) = \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)$$

Remarque 4

1. *Autrement dit les variables* X *et* Y *sont indépendantes si pour tout* $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ *et tout* $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$, *les événements* $[\mathrm{X}=x]$ *et* $[\mathrm{Y}=y]$ *sont indépendants.*
2. *En cas d'indépendance de* X *et* Y, *les lois marginales permettent donc de retrouver la loi du couples.*
3. *Si* X *et* Y *sont indépendantes alors pour tout* $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$ *tel que* $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right) \neq 0$ *on a*

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \quad \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=y]}([\mathrm{X}=x]) = \frac{\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right)}{\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)} = \frac{\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)}{\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)} = \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x]\right)$$

La loi de X *sachant* $[\mathrm{Y}=y]$ *est donc la loi de* X.

Méthode 3

1. *Pour montrer que deux variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes il faut montrer que* $\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right) = \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)$ ***pour tout*** $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ ***et*** $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$.
2. *Pour montrer que deux variables aléatoires* X *et* Y *ne sont pas indépendantes il suffit de montrer que* $\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x] \cap [\mathrm{Y}=y]\right) \neq \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)$ ***pour (au moins) un*** $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ ***et un*** $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1 : on lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 *à* 6. *On a*

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P}) = \left([\![1,6]\!]^2, \mathscr{P}\left([\![1,6]\!]^2\right), \mathrm{P}_{\text{unif.}}\right)$$

où $\mathrm{P}_{\text{unif.}}$ *est la probabilité uniforme sur* Ω.

1. *On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et* Y *celle donnant la valeur du dé blanc. D'après l'exemple 1, pour tout* $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$ *on a :*

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=i]\right) = \frac{1}{6} \quad ; \quad \mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=j]\right) = \frac{1}{6} \quad ; \quad \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j]\right) = \frac{1}{36}.$$

Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,6]\!]^2$, $\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=i]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=j]\right) = \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j]\right)$. *Les variables aléatoires sont donc indépendantes.*

2. X *désigne le plus petit des deux nombres obtenus et* Y *le plus grand. On a*

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=2, \mathrm{Y}=1]\right) = 0$$

Or $\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=2]\right) \neq 0$ *et* $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=1]\right) \neq 0$ *donc*

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=2, \mathrm{Y}=1]\right) \neq \mathrm{P}\left([\mathrm{X}=2]\right)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=1]\right)$$

et les variables ne sont donc pas indépendantes.

Test 5 (***Voir solution.***)

On tire successivement deux jetons dans une urne contenant n *jetons numérotés de* 1 *à* n. *On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *au deuxième. Dans les deux cas suivants dire si les variables* X *et* Y *sont indépendantes.*

1. *Tirage avec remise.*
2. *Tirage sans remise.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Soient X *et* Y *des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$. *On suppose que pour tout* $y\in \mathrm{Y}(\Omega)$ *tel que* $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)\neq 0$ *on*

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=y]}([\mathrm{X}=x])=\mathrm{P}([\mathrm{X}=x]).$$

Montrer que X *et* Y *sont indépendantes.*

2.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Définition 6 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes)

Soient $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ $(n\geqslant 2)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$.

- On dit que $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{X}_1(\Omega)\times\cdots\times \mathrm{X}_n(\Omega),\ \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[\mathrm{X}_k=x_k]\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}([\mathrm{X}_k=x_k])$$

- Plus généralement, si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes définies $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$. On dit que les variables $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $n\geqslant 2$, $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 9

On lance deux fois successives une pièce équilibrée. On note X *(resp.* Y*) la variable aléatoire valant* 1 *si le premier lancer (resp. deuxième lancer) donne Pile et* 0 *sinon; et* Z *la variable aléatoire valant* 1 *si on a obtenu exactement* 1 *Pile et zéro sinon.*

1. *D'une part*

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}=1,\mathrm{Y}=1,\mathrm{Z}=1])=0$$

2. *D'autre part*

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}=1])\,\mathrm{P}([\mathrm{Y}=1])\,\mathrm{P}([\mathrm{Z}=1])=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

3. *Conclusion :* *X,Y,Z ne sont pas mutuellement indépendantes.*

Remarque 5

⚠ *La notion d'indépendance mutuelle est plus contraignante que l'indépendance deux à deux. Dans l'exemple précédent,* X, Y *sont indépendantes;* Y, Z *aussi et* X, Z *aussi. Mais* X X,Y,Z *ne sont pas mutuellement indépendantes!*

Proposition 3 (Lemme des coalitions)

Soient $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ $(n\geqslant 2)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$.
Si $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes alors toute variable aléatoires fonction de $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n$.

Exemple 10

Si $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_5$ *sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors* $\mathrm{X}_1+2\mathrm{X}_3^2$ *est indépendante de* $\mathrm{X}_2+e^{\mathrm{X}_4+\mathrm{X}_5}$.

Compléments sur l'indépendance

Soient $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ $(n\geqslant 2)$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ et **mutuellement indépendantes**. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ soit $\mathrm{A}_i\subset \mathrm{X}_i(\Omega)$. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\in \mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{X}_n\in \mathrm{A}_n)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\in \mathrm{A}_1)\times\cdots\times \mathrm{P}(\mathrm{X}_n\in \mathrm{A}_n).$$

Exemple 11

Si X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes alors pour tout* $x \in X(\Omega)$ *et pour tout* $y \in Y(\Omega)$ *on a :*

- $P([X \geqslant x] \cap [Y \geqslant y]) = P([X \geqslant x])\,P([Y \geqslant y])$,
- $P([X < x] \cap [Y \geqslant y]) = P([X < x])\,P([Y \geqslant y])$,
- …

3 Variables aléatoire fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes : $Z = g(X, Y)$

3.1 Cas général

Définition 7 (Loi de $g(X, Y)$)

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $Z = g(X, Y)$ l'application

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto g(X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Alors

1. Z est une variable aléatoire discrète.
2. L'ensemble des valeurs prises par Z est donné par

$$Z(\Omega) = \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \subset \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\}.$$

3. La loi de Z est donnée par

$$\forall z \in Z(\Omega),\ P([Z = z]) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid z = g(x,y)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

Théorème 1 (Théorème de transfert)

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $Z = g(X, Y)$.
Si la somme double $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)\ ,\ y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente alors Z possède une espérance. Dans ce cas,

$$E(Z) = \sum_{x \in X(\Omega)\ ,\ y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Remarque 6

1. *Dans le cas où* X *et* Y *sont* ***finies****, la somme double est finie donc converge absolument ; dans ce cas* Z *admet toujours une espérance.*
2. *Dans le cas où* X *ou* Y *est infinie, voir la remarque 1 concernant la convergence absolue des sommes doubles.*

Exemple 12

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les trois faces sont numérotées de 1 *à* 3 *; il gagne* 2 *fois la valeur du premier dé et perd* 2 *fois la valeur du second dé. On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,* Y *celle donnant la valeur du second dé et* Z *celle donnant les gains (algébriques) du joueur.*

1. *La variable aléatoire* Z *est fonction de* X *et* Y : $Z = 2X - 2Y$.
2. *Les valeurs prises par* Z *sont* $-4, -2, 0, 2, 4$
3. *La loi de* Z *est donnée par :*

$$P([Z = 0]) = P([X = 1, Y = 1]) + P([X = 2, Y = 2]) + P([X = 3, Y = 3]) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}([Z=2]) = \mathrm{P}([X=2, Y=1]) + \mathrm{P}([X=3, Y=2]) = \frac{2}{9}$$

et de même

$$\mathrm{P}([Z=4]) = \mathrm{P}([Z=-4]) = \frac{1}{9} \quad ; \quad \mathrm{P}([Z=-2]) = \frac{2}{9}.$$

4. *Comme les variables* X *et* Y *sont finies,* Z *possède une espérance et*

$$\begin{aligned} E(Z) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(2i-2j)\,\mathrm{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \frac{2}{9}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i-j) \\ &= \frac{2}{9}\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} j\right) \\ &= \frac{2}{9}\left(3\sum_{i=1}^{3} i - 3\sum_{j=1}^{3} j\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 13

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi conjointe est définie par*

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big) = \frac{i+j}{e2^{i+j}\, i!\, j!}.$$

Montrons que $Z = 2^{X+Y}$ *possède une espérance et calculons la.*

1. *Montrons que pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *la série* $\sum_{j\geqslant 0} 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big)$ *est absolument convergente.*

   Soit $i \in \mathbb{N}$. *La série* $\sum_{j\geqslant 0} 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big)$ *est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente.*

   $$\forall j \in \mathbb{N}\ 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big) = \frac{i+j}{e\, i!\, j!}$$

   Soit $N \in \mathbb{N}$, *on a alors*

   $$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big) = \sum_{j=0}^{N}\frac{i+j}{e\, i!\, j!} &= \frac{e^{-1}}{i!}\left(i\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{N}\frac{j}{j!}\right) \\ &= \frac{e^{-1}}{i!}\left(i\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!} + \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{j!}\right) \end{aligned}$$

   donc la série converge (absoluement) et

   $$\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big) = \frac{i+1}{i!}$$

2. *Montrons que la série* $\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}\mathrm{P}\big([X=i, Y=j]\big)\right)$ *est absolument convergente.*

   La série $\sum_{i\geqslant 0}\frac{i+1}{i!}$ *est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Soit* $N \in \mathbb{N}$

   $$\sum_{i=0}^{N}\frac{i+1}{i!} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}.$$

   Donc la série converge et sa somme vaut $2e$.

3. *Conclusion : Ainsi* 2^{X+Y} *possède une espérance et* $E(2^{X+Y}) = 2e$.

3.2 Loi de la somme

Loi de la somme de variables aléatoires discrètes

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
La variable aléatoire $X+Y$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega),\ P([X+Y=z]) = \sum_{x\in X(\Omega)\ \mid\ z-x\in Y(\Omega)} P([X=x, Y=z-x])$$

Démonstration : A savoir refaire sur dans les exercices !

La famille $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements donc, par la formule des probabilités totales, pour tout $z\in(X+Y)(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} P([X+Y=z]) &= \sum_{x\in X(\Omega)} P([X=x, X+Y=z]) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} P([X=x, Y=z-x]) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)\ \mid\ z-x\in Y(\Omega)} P([X=x, Y=z-x]) \end{aligned}$$

car si $z-x\notin Y(\Omega)$, $P([X=x, Y=z-x])=0$. ■

Méthode 4

On retiendra que pour déterminer la loi de la somme à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complets d'événements $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$. Il est important de remarquer que

$$[X=x, X+Y=z] = [X=x, x+Y=z] = [X=x, Y=z-x].$$

Remarque 7

On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complets d'événements $\left([Y=y]\right)_{y\in Y(\Omega)}$. On obtient alors

$$P([X+Y=z]) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ \mid\ z-y\in X(\Omega)} P\left([X=z-y, Y=y]\right)$$

Exemple 14

Soient $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 1,6\rrbracket)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 1,4\rrbracket)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. $(X+Y)(\Omega)=\llbracket 2,10\rrbracket$.
2. *Soit $k\in(X+Y)(\Omega)$.*

   Comme $\left([Y=j]\right)_{j=1,\dots,4}$ est un système complet d'événements on, par la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P([X+Y=k]) &= \sum_{j=1}^{4} P\left([X+Y=k, Y=j]\right) \\ &= \sum_{j=1}^{4} P\left([X=k-j, Y=j]\right) \end{aligned}$$

   On en déduit :

$k\in(X+Y)(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P([X+Y=k])$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Test 7 (*Voir solution.*)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé suivant une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Montrer que pour tout $n\geqslant 2$,

$$P([X+Y=n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

Proposition 4 (Stabilité des lois binomiales)

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p).$$

Démonstration : Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. On a $(X+Y)(\Omega) \subset [\![0,m+n]\!]$.
La famille $([X=i])_{i\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc, par la formule des probabilités totales, pour tout $z \in [\![0,m+n]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
P([X+Y=z]) &= \sum_{i=0}^{n} P([X=i, X+Y=z])\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i, Y=z-i])\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i])\,P([Y=z-i]) \quad \text{(indépendance)}\\
&= \sum_{\substack{i=0\\ z-i\in[\![0,m]\!]}}^{n} P([X=i])\,P([Y=z-i])\\
&= \sum_{\substack{i=0\\ i\in[\![z-m,z]\!]}}^{n} P([X=i])\,P([Y=z-i])
\end{aligned}$$

Or, pour tout $z \in [\![0,m+n]\!]$, on a

$$[\![0,n]\!] \cap [\![z-m,z]\!] = [\![\max(0,z-m),\min(n,z)]\!].$$

On note $a = \max(0,z-m)$ et $b = \min(n,z)$. Alors,

$$\begin{aligned}
P([X+Y=z]) &= \sum_{i=a}^{b} P([X=i])\,P([Y=z-i])\\
&= \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{z-i} p^{z-i}(1-p)^{m-z+i}\\
&= p^z (1-p)^{n+m-z} \sum_{i=a}^{b} \binom{n}{i}\binom{m}{z-i}
\end{aligned}$$

On admet la formule de Vandermonde :

$$\sum_{i=\max(0,z-m)}^{\min(n,z)} \binom{n}{i}\binom{m}{z-i} = \binom{m+n}{z}.$$

Alors

$$P([X+Y=z]) = p^z(1-p)^{n+m-z}\sum_{i=a}^{b}\binom{n}{i}\binom{m}{z-i} = \binom{m+n}{z} p^z (1-p)^{n+m-z}.$$

Donc $X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$. ∎

Proposition 5 (Stabilité des lois de Poisson)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

Test 8 (***Voir solution.***)

Prouver la proposition. 5

Remarque 8

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_r$ *sont* ***mutuellement indépendantes*** *alors*

1. *si* $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p), \ldots, X_r \hookrightarrow \mathscr{B}(n_r, p)$ *alors* $X_1 + \cdots + X_r \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + \cdots + n_r, p)$;
2. *si* $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1), \ldots, X_r \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_r)$ *alors* $X_1 + \cdots + X_r \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$.

(voir TD)

Proposition 6 (Linéarité de l'espérance)

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors

1. $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ possède une espérance
2. $E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \cdots + \lambda_n E(X_n)$.

Exemple 15

Soient $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre* p.

- *D'après la remarque 8,* $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
- *D'après la proposition ci-dessus*

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np.$$

On retrouve la formule de l'espérance d'une loi binomiale.

Méthode 5

Sous réserve d'existence*, il y a trois façons de calculer* $E(X + Y)$.

1. *Si on connaît la loi de* X *et de* Y*, on utilise la linéarité :* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. *Si on connaît la loi de* $X + Y$*, on utilise la définition de l'espérance.*
3. *Si on connaît la loi du couple* (X, Y) *on utilise le théorème de transfert :* $E(X+Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} (x+y) P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$.

3.3 Loi du produit

Loi du produit de variables aléatoires discrètes

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
La variable aléatoire XY est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (XY)(\Omega),\ P([XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, xY = z])$$

Démonstration : A savoir refaire sur dans les exercices !

La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements donc, par la formule des probabilités totales, pour tout $z \in (XY)(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} P([XY = z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, XY = z]) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, xY = z]). \end{aligned}$$

■

Méthode 6

On retiendra que pour déterminer la loi du produit à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complets d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. *Il est important de remarquer que*

$$[X = x, XY = z] = [X = x, xY = z].$$

Remarque 9

On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complets d'événements $\left([Y = y]\right)_{y \in Y(\Omega)}$.

On obtient alors

$$P([XY = z]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([yX = z, Y = y])$$

Exemple 16

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les trois faces sont numérotées de 1 *à* 3 *; il gagne alors un montant égale au produit des deux nombres obtenus. On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,* Y *celle donnant la valeur du second dé et* Z *celle donnant les gains du joueur.*

1. *La variable aléatoire* Z *est fonction de* X *et* Y *:* $Z = XY$.
2. *Calculons* $P([Z = 6])$.
   La famille $([X = i])_{i=1,2,3}$ *est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales on a donc :*

$$\begin{aligned} P([XY = 6]) &= P([XY = 6, X = 1]) + P([XY = 6, X = 2]) + P([XY = 6, X = 3]) \\ &= P([Y = 6, X = 1]) + P([2Y = 6, X = 2]) + P([3Y = 6, X = 3]) \\ &= 0 + P([Y = 3, X = 2]) + P([Y = 2, X = 3]) \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Proposition 7

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors XY a une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Méthode 7

Sous réserve d'existence*, il y a trois façons de calculer* $E(XY)$.

1. *Si on connaît la loi de* X *et de* Y *et que* X *et* Y *sont* ***indépendantes****, on utilise* $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. *Si on connaît la loi de* XY*, on utilise la définition de l'espérance.*
3. *Si on connaît la loi du couple* (X, Y) *on utilise le théorème de transfert :* $E(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xyP([X = x] \cap [Y = y])$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Soit $p \in]0, 1[$. *On considère* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$ *deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de* XY *et son espérance.*

3.4 Loi du min, max

Méthode 8

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à* ***valeurs entières*** *définies sur un même espace probabilisé et* ***indépendantes*** *et soit* $U = \max(X, Y)$.
Pour déterminer la loi de U *:*

1. *on justifie que pour tout* $k \in U(\Omega)$ *on a* $[U \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$ *;*
2. *par indépendance, on en déduit la fonction de répartition* F_U *de* U *;*
3. *on utilise* $P([U = k]) = F_U(k) - F_U(k-1)$.

Exemple 17

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant n *boules numérotées de* 1 *à* n. *On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *celle égale au deuxième numéro tiré.*

On note $U = \max(X, Y)$. *On a* $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

1. *Justifions que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $[U \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$*, on a*

$$\mathrm{U}(\omega) \leqslant k \Longleftrightarrow \max(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)) \leqslant k \Longleftrightarrow \mathrm{X}(\omega) \leqslant k \text{ et } \mathrm{Y}(\omega) \leqslant k.$$

Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[\mathrm{U} \leqslant k] = [\mathrm{X} \leqslant k] \cap [\mathrm{Y} \leqslant k]$.

2. *Déterminons* $\mathrm{F_U}$.
   Les variables X *et* Y *suivent une loi uniforme sur* $\in [\![1, n]\!]$. *De plus, les tirages étant avec remise,* X *et* Y *sont indépendantes. Donc, pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$*, on a*

$$\mathrm{F_U}(k) = \mathrm{P}([\mathrm{U} \leqslant k]) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant k] \cap [\mathrm{Y} \leqslant k]) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant k])\,\mathrm{P}([\mathrm{Y} \leqslant k]) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}$$

3. *Déterminons la loi de* U.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ *on a*

$$\mathrm{P}([\mathrm{U} = k]) = \mathrm{F_U}(k) - \mathrm{F_U}(k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Méthode 9

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à* ***valeurs entières*** *définies sur un même espace probabilisé et* ***indépendantes*** *et soit* $\mathrm{V} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
Pour déterminer la loi de V *:*

1. *on justifie que pour tout* $k \in \mathrm{V}(\Omega)$ *on a* $[\mathrm{V} > k] = [\mathrm{X} > k] \cap [\mathrm{Y} > k]$ *;*
2. *par indépendance, on en déduit* $1 - \mathrm{F_V}$ *;*
3. *on utilise* $\mathrm{P}([\mathrm{V} = k]) = \mathrm{F_V}(k) - \mathrm{F_V}(k-1)$.

Remarque 10

Parfois on peut déterminer la loi du minimum et du maximum directement comme on l'a fait dans le cas 2 de l'exemple 1.

Exemple 18

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant n *boules numérotées de* 1 *à* n*. On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *celle égale au deuxième numéro tiré.*

On note $\mathrm{V} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*. On a* $\mathrm{V}(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

1. *Justifions que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $[\mathrm{V} > k] = [\mathrm{X} > k] \cap [\mathrm{Y} > k]$.
   Pour tout $\omega \in \Omega$*, on a*

$$\mathrm{V}(\omega) > k \Longleftrightarrow \min(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)) > k \Longleftrightarrow \mathrm{X}(\omega) > k \text{ et } \mathrm{Y}(\omega) > k.$$

   Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[\mathrm{V} > k] = [\mathrm{X} > k] \cap [\mathrm{Y} > k]$.

2. *Déterminons* $1 - \mathrm{F_V}$.
   Les variables X *et* Y *suivent une loi uniforme sur* $\in [\![1, n]\!]$. *De plus, les tirages étant avec remise,* X *et* Y *sont indépendantes. Donc, pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$*, on a*

$$1 - \mathrm{F_V}(k) = 1 - \mathrm{P}([\mathrm{V} \leqslant k]) = \mathrm{P}([\mathrm{V} > k]) = \mathrm{P}([\mathrm{X} > k] \cap [\mathrm{Y} > k]) = \mathrm{P}([\mathrm{X} > k])\,\mathrm{P}([\mathrm{Y} > k]) = \frac{n-k}{n} \times \frac{n-k}{n} = \frac{(n-k)^2}{n^2}$$

3. *Déterminons la loi de* V.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ *on a*

$$\mathrm{P}([\mathrm{V} = k]) = \mathrm{F_V}(k) - \mathrm{F_V}(k-1) = 1 - \frac{(n-k)^2}{n^2} - 1 + \frac{(n-k+1)^2}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}.$$

Test 10 (*Voir solution.*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre* $p \in]0, 1[$.

1. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, calculer* $\mathrm{P}([\min(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) > k])$.
2. *En déduire la loi de* $\min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

3. *Expliquer ce résultat à l'aide d'une expérience.*

4 Variance et covariance

4.1 Covariance

Définition 8 (Covariance)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possède un moment d'ordre 2. Alors l'espérance suivante existe :

$$E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right).$$

On l'appelle la **covariance de** X **et** Y et on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Remarque 11

En particulier, si X *a un moment d'ordre deux,* $\mathrm{Cov}(X,X)=V(X)$.

Proposition 8 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possède un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

En particulier, **si** X **et** Y **sont indépendantes** alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

Remarque 12

⚠ *Le fait que* $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ ***n'implique pas*** *que* X *et* Y *sont indépendantes (voir exemple ci-dessous).*

Exemple 19

Soit $X\hookrightarrow\mathscr{U}([\![-1,1]\!])$ *et* $Y=X^2$.

- *Les variables* X *et* Y *ne sont pas indépendantes :*

$$P(X=0,Y=1)=0\neq P(X=0)\,P(Y=1)$$

- *La covariance de* X *et* Y *existe car ce sont des variables finies.*
  D'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=E(XY)-\underbrace{E(X)}_{=0}E(Y)\\&=\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=0}^{1}ij\,P\left(X=i,Y=j\right)\\&=-P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=1)\\&=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\&=0\end{aligned}$$

Test 11 (***Voir solution.***)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la covariance de X *et* Y.

Proposition 9

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre deux. Alors

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$ (symétrie);
2. $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Cov}(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2, Y) = \lambda_1\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\lambda_2\mathrm{Cov}(X_2,Y)$ (linéarité à gauche);
3. $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Cov}(X,\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2) = \lambda_1\mathrm{Cov}(X,Y_1)+\lambda_2\mathrm{Cov}(X,Y_2)$ (linéarité à droite);
4. $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(X,a) = \mathrm{Cov}(a,X) = 0$.

Méthode 10

En pratique, pour déterminer la covariance de deux variables aléatoires, on a deux méthodes :

1. *utiliser la formule de Koenig-Huygens;*
2. *utiliser les propriétés de linéarité de la covariance.*

Exemple 20

Soit X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre deux. On note* $U = X-Y$ *et* $V = X+Y$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{Cov}(X-Y, X+Y)\\
&= \mathrm{Cov}(X,X+Y)-\mathrm{Cov}(Y,X+Y) \quad \text{(\textit{par linéarité à gauche})}\\
&= \mathrm{Cov}(X,X)+\underbrace{\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,X)}_{=0 \text{ \textit{par symétrie}}}-\mathrm{Cov}(Y,Y) \quad \text{(\textit{par linéarité à droite})}\\
&= V(X)-V(Y).
\end{aligned}$$

Proposition 10 (Lien avec la variance)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y on un moment d'ordre deux. Alors

1. $X+Y$ possède une variance et
$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y);$$
2. si de plus X et Y sont **indépendantes** alors
$$V(X+Y) = V(X)+V(Y).$$

Plus généralement, si $X_1,\ldots,X_n$ sont des variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre 2 (donc une variance) et **mutuellement indépendantes** alors $X_1+\cdots+X_n$ possède une variance donnée par

$$V(X_1+\cdots+X_n) = V(X_1)+\cdots+V(X_n).$$

Méthode 11

1. *Pour calculer la variance d'une somme on peut :*
   (a) *utiliser la formule de Koenig-Huygens (voir chapitre précédent) si l'on connaît la loi de la somme;*
   (b) *utiliser la formule* $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. *Parfois, on peut être amené à utiliser la formule* $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$ *pour déterminer la covariance.*

4.2 Corrélation linéaire

Définition 9 (Coefficient de corrélation linéaire)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et de Y le réel noté $\rho(X, Y)$ et défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition 11

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**. Alors

$$\left|\rho(X, Y)\right| \leqslant 1.$$

De plus,

- $\rho(X, Y) = 1$ si et seulement si il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $P([Y = aX + b]) = 1$
- $\rho(X, Y) = -1$ si et seulement si il existe $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $P([Y = aX + b]) = 1$

Méthode 12

On peut calculer le coefficient de corrélation linéaire de X *et* Y *de plusieurs façons selon le contexte :*

1. *à l'aide de la définition si l'on connaît la covariance et les variances ;*
2. *si les variables aléatoires sont indépendantes alors* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ *donc* $\rho(X, Y) = 0$ *;*
3. *si* $Y = aX + b$ *avec* $a \neq 0$*, alors le coefficient de corrélation linéaire vaut* ± 1.

Exemple 21

On lance n *fois* ($n \geqslant 2$) *une pièce qui donne Pile avec probabilité* $p \in]0, 1[$ *et Face avec probabilité* $1 - p$*. On note* X *la variable comptant le nombre de Piles et* Y *celle comptant le nombre de Faces. Déterminons* $\rho(X, Y)$.
On a $X + Y = n$ *donc* $Y = -X + n$*. Par conséquent,* $\rho(X, Y) = -1$.

5 Objectifs et erreurs à éviter

5.1 Objectifs

1. Savoir déterminer la loi d'un couple.
2. Savoir trouver les lois conditionnelles.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver les lois marginales grâce aux lois conditionnelles.
5. Connaître la définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle.
6. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de XY, $X + Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$.
8. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X, Y)$.
9. Connaître les résultats de stabilité par sommes des variables indépendantes Binomiales et de Poisson.
10. Savoir justifier l'existence et déterminer $\operatorname{Cov}(X, Y)$, $V(X + Y)$, $\rho(X, Y)$.

5.2 Erreurs à éviter

1. Il ne faut jamais écrire $P\left([X = x, Y = y]\right) = P\left([X = x]\right) P\left([Y = y]\right)$ si les variables X et Y ne sont pas indépendantes ou si vous n'avez pas justifié qu'elles le sont !
2. Il ne faut pas confondre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux (voir remarque 5).
3. Ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance dans la stabilité par somme des lois binomiales et de Poisson.
4. Ne pas oublier que le paramètre p doit être le même pour les deux variables aléatoires dans la stabilité par somme des lois binomiales.
5. Si X et Y sont indépendantes alors $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ mais **la réciproque est fausse** !
6. Ne pas croire que même loi signifie égale !

Exemple 22

Si on lance une pièce équilibrée et qu'on note X *la variable valant* 1 *si on fait Pile et* 0 *sinon et* Y *la variable valant* 1 *si on fait Face et* 0 *sinon. Alors* X *et* Y *suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$ *mais elles ne sont pas égales :quand l'une vaut* 1 *l'autre vaut* 0 *!*

7. N'oubliez pas la formule des probabilités totales!

6 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Ω est l'ensemble des parties de 3 boules parmi les 12 boules (donc Ω contient $\binom{12}{3}$ éléments), $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme sur Ω.*
2. *On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ car on ne tire que trois boules. Soit $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.*
   (a) *Si $i + j > 3$ alors $P(X = i, Y = j) = 0$ car on ne tire que trois boules.*
   (b) *Si $i + j \leqslant 3$, un tirage qui réalise l'événement $[X = i, Y = j]$ est entièrement déterminé par*
   - *le choix des i boules blanches : il y a $\binom{3}{i}$ choix possibles ;*
   - *le choix des j boules vertes : il y a $\binom{4}{j}$ choix possibles ;*
   - *le choix des $3 - i - j$ boules restantes qui sont forcément bleues : il y a $\binom{5}{3-i-j}$ choix possibles.*

   Ainsi $P(X = i, Y = j) = \dfrac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$.

   Au final :

$j \in Y(\Omega)$ / $i \in X(\Omega)$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{55}$
1	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{9}{110}$	0
2	$\frac{3}{44}$	$\frac{3}{55}$	0	0
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.*
2. *Pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ déterminons $P(X = i, Y = j)$.*
   Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons
   - *P_i^1 l'événement « la pièce 1 tombe sur Pile au i-ème lancer »*
   - *F_i^1 l'événement « la pièce 1 tombe sur Face au i-ème lancer »*
   - *P_i^2 et F_i^2 les événements analogue pour la pièce 2.*

   Alors, pour $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a

   $$P(X = i, Y = j) = P(P_1^1 \cap \cdots \cap P_{i-1}^1 \cap F_i^1 \cap P_1^2 \cap \cdots \cap P_{j-1}^2 \cap F_j^2) = (1-p)^{i-1} \times p \times (1-p)^{j-1} \times p = p^2 \times (1-p)^{i+j-2}.$$

   car tous les lancers sont indépendants.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

On rappelle la loi de (X,Y) *:*

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

- $P(X=4) = \sum_{k=1}^{6} P(X=4, Y=k) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$.
- *Donc,*

$y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P_{[X=4]}(Y=y)$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

(a) *C'est l'exemple 6.*

(b) *Trouver la loi de* Y *de deux façons*

i. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in[\![1,6]\!]}$, *on a*

$$\forall j \in [\![1,6]\!], \quad P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P_{[X=i]}(Y=j)P(X=i)$$

Or, on a

$j \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P_{[X=1]}(Y=j)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
$P_{[X=2]}(Y=j)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
$P_{[X=3]}(Y=j)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
$P_{[X=4]}(Y=j)$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P_{[X=5]}(Y=j)$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P_{[X=6]}(Y=j)$	0	0	0	0	0	1
$P(Y=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

ii. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in[\![1,6]\!]}$, *on a*

$$\forall j \in [\![1,6]\!], \quad P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i, Y=j)$$

Or, on a

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
$P(Y=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

1. *(Test 4 bis) Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ *et pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P(X=i, Y=j) = \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

- *Loi de* Y. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, *on a*

$$\begin{aligned}\forall j\in\mathbb{N},\quad P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=j)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}\\ &= \frac{e^{-2}2^j}{j!}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{e^{-2}2^j}{j!}\end{aligned}$$

  Ainsi Y *suit une loi de Poisson de paramètre* 2.

- *Loi de* X. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $\left([Y=j]\right)_{j\in\mathbb{N}}$, *on a*

$$\begin{aligned}\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}\\ &= \frac{e^{-2}}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!} = \frac{1}{2^i}\end{aligned}$$

  Ainsi X *suit une loi de géométrique de paramètre* $\frac{1}{2}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On tire avec remise un jeton dans une urne contenant* n *jetons numérotés de* 1 *à* n. *On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *au deuxième.*
   (a) *On a* $(\Omega, \mathscr{A}, P) = \left(\llbracket 1, n\rrbracket^2, \mathscr{P}\left(\llbracket 1, n\rrbracket^2\right), P_{\text{unif.}}\right)$ *où* $P_{\text{unif.}}$ *est la probabilité uniforme sur* Ω.
   (b) *On a* $X(\Omega) = \llbracket 1, n\rrbracket = Y(\Omega)$ *et pour tout* $(i,j)\in\llbracket 1, n\rrbracket^2$

$$P([X=i]) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\quad ;\quad P\left([Y=j]\right) = \frac{1}{n}\quad ;\quad P\left([X=i, Y=j]\right) = \frac{1}{n^2}.$$

   (c) *Donc pour tout* $(i,j)\in\llbracket 1, n\rrbracket^2$, $P([X=i])\,P\left([Y=j]\right) = P\left([X=i, Y=j]\right)$. *Les variables aléatoires sont donc indépendantes.*
2. *On a* $P(X=1, Y=1) = 0$ *car le tirage est sans remise.*
   Par ailleurs, $P(X=1) = \frac{1}{n}$ *et, par la formule des probabilités totales,*

$$P(Y=1) = P_{[X=1]}(Y=1)P(X=1) + P_{[X\neq 1]}(Y=1)P(X\neq 1) = 0 + \frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

   Donc,

$$P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)\times P(Y=1)$$

   et les variables ne sont donc pas indépendantes.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

Soient X *et* Y *des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. *On suppose que pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *tel que* $P\left([Y=y]\right)\neq 0$ *on*

$$P_{[Y=y]}([X=x]) = P([X=x]).$$

Montrons que X *et* Y *sont indépendantes c'est-à-dire que pour tout* $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, *on a*

$$P([X=x, Y=y]) = P(X=x)P(Y=y).$$

1. *Soit* y *tel que* $P(Y=y)\neq 0$, *alors*

$$P([X=x]) = P_{[Y=y]}([X=x]) = \frac{P([X=x, Y=y])}{P([X=x])}\quad \text{donc } P([X=x, Y=y]) = P(X=x)P(Y=y).$$

2. *Soit y tel que* $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y)=0$. *Comme* $[\mathrm{X}=x,\mathrm{Y}=y]\subset[\mathrm{Y}=y]$, *on a aussi*

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x,\mathrm{Y}=y]\right)=0$$

et par conséquent,

$$0=\mathrm{P}\left([\mathrm{X}=x,\mathrm{Y}=y]\right)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)\times 0=0.$$

Dans tous les cas, on a bien $\mathrm{P}([\mathrm{X}=x,\mathrm{Y}=y])=\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y)$ *donc les variables sont indépendantes.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n\geqslant 2$. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([\mathrm{X}=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])=\sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])&=\sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{car } [\mathrm{X}=i,\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]=[\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{car } \mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i])=0 \textit{ si } n-i\leqslant 0\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i])\,\mathrm{P}[[\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{par indépendance de } \mathrm{X} \textit{ et } \mathrm{Y}\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-i-1} \quad \textit{car } \mathrm{X} \textit{ et } \mathrm{Y} \textit{ suivent une loi } \mathscr{G}(p)\\
&=p^2\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1+n-i-1}\\
&=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

Soient $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ *et* $\mu\in\mathbb{R}_+^*$. *Soient* $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ *et* $\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathscr{P}(\mu)$ *deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé.*

1. *Comme* $\mathrm{X}(\Omega)=\mathrm{Y}(\Omega)=\mathbb{N}$, *on a* $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})(\Omega)=\mathbb{N}$.
2. *De plus, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([\mathrm{X}=i])_{i\in\mathbb{N}}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])&=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{car } [\mathrm{X}=i,\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n]=[\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{car } \mathrm{P}([\mathrm{X}=i,\mathrm{Y}=n-i])=0 \textit{ si } n-i<0\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}([\mathrm{X}=i])\,\mathrm{P}[[\mathrm{Y}=n-i]) \quad \textit{par indépendance de } \mathrm{X} \textit{ et } \mathrm{Y}\\
&=\sum_{i=0}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \quad \textit{car } \mathrm{X} \textit{ et } \mathrm{Y} \textit{ suivent des lois de Poisson}\\
&=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{X}+\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

- *Déterminons* $P([XY=0])$ *:*

$$\begin{aligned} P([XY=0]) &= P([XY=0, X=0]) + P([XY=0, X=1]) \\ &= P([X=0]) + P([XY=0, X=1]) \quad \textit{car } [XY=0, X=0] = [X=0] \\ &= P([X=0]) + P([Y=0, X=1]) \quad \textit{car } [XY=0, X=1] = [Y=0, X=1] \\ &= 1-p+P([Y=0])\,P([X=1]) \quad \textit{car les variables sont indépendantes} \\ &= 1-p+p^2 \end{aligned}$$

- *Déterminons* $P([XY=1])$ *:*

$$\begin{aligned} P([XY=1]) &= P([XY=1, X=0]) + P([XY=1, X=1]) \\ &= 0 + P([XY=1, X=1]) \quad \textit{car } [XY=1, X=0] = \varnothing \\ &= P([Y=, X=1]) \quad \textit{car } [XY=1, X=1] = [Y=1, X=1] \\ &= P([Y=1])\,P([X=1]) \quad \textit{car les variables sont indépendantes} \\ &= (1-p)p \end{aligned}$$

Ainsi $XY \to \mathscr{B}(p(1-p))$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

Posons $V = \min(X, Y)$.

1. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $\omega \in \Omega$*, on a*
   $$V(\omega) > k \Longleftrightarrow \min(X(\omega), Y(\omega)) > k \Longleftrightarrow X(\omega) > k \text{ et } Y(\omega) > k.$$
   Donc $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$. *Ainsi,*
   $$\begin{aligned} P([\min(X,Y) > k]) &= P([X>k] \cap [Y>k]) \\ &= P([X>k])\,P([Y>k]) \quad \textit{car } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes} \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\right)\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}\right) \\ &= p^2 \left(\sum_{\ell=k}^{+\infty} (1-p)^{\ell}\right)^2 \\ &= (1-p)^{2k} \end{aligned}$$
2. *On a :*
   - $P([\min(X,Y)=1]) = 1 - P([\min(X,Y)>1]) = 1-(1-p)^2$.
   - *Pour tout* $k \geqslant 2$*, on*
     $P([\min(X,Y)=k]) = P([\min(X,Y)>k-1]) - P([\min(X,Y)>k]) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2)$.

   Ainsi, $\min(X,Y)$ *suit une loi géométrique de paramètre* $1-(1-p)^2$.
3. *On considère deux pièces numérotées* 1 *et* 2 *qui ont une probabilité* p *de donner Face. On lance les deux pièces de manière indépendante une infinité de fois. On note*
   - X *la variable aléatoire donnant le rang du premier Face de la pièce numéro* 1 *;*
   - Y *la variable aléatoire donnant le rang du premier Face de la pièce numéro* 2.

   Alors X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes (lancers indépendants) de même loi géométrique de paramètre* p.
   On considère maintenant la variable Z *donnant le rang du premier tirage où une des deux pièces vaut Face. Alors*
   (a) *d'une part* $Z = \min(X, Y)$,
   (b) *d'autre part* Z *est le rang du premier succès d'une épreuve de Bernoulli répétée une infinité de fois de manière indépendantes dont la probabilité de succés est :*
   $$\begin{aligned} P([\textit{Pièce } 1 = \textit{Face}] \cup [\textit{Pièce } 2 = \textit{Face}]) &= P([\textit{Pièce } 1 = \textit{Face}]) + P([\textit{Pièce } 2 = \textit{Face}]) - P([\textit{Pièce } 1 = \textit{Face}] \cap [\textit{Pièce } 2 = \textit{Face}]) \\ &= 2p - p^2 \\ &= 1-(1-p)^2 \end{aligned}$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

On rappelle la loi du couple (X,Y) *:*

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

ainsi que les lois marginales déterminées à l'exemple 6 et au test 4 :

$j \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P([Y=j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

$i \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P([X=i])$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

Les variables X *et* Y *sont finies donc possède un moment d'ordre deux. D'après la formule de Koenig-Huygens, le couple* (X,Y) *possède une covariance et elle est donnée par la formule :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. $E(X) = 1 \times \frac{11}{36} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{5}{36} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{91}{36}$.
2. $E(Y) = 6 \times \frac{11}{36} + 5 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 2 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{36} = \frac{161}{36}$.
3. *Par la formule de transfert :*

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} ijP([X=i, Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{6} i \left(\sum_{j=1}^{6} jP([X=i,Y=j]) \right) \\
&= 1 \times \frac{41}{36} + 2 \times \frac{38}{36} + 3 \times \frac{33}{36} + 4 \times \frac{26}{36} + 5 \times \frac{17}{36} + 6 \times \frac{6}{36} \\
&= \frac{441}{36}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{441}{36} - \frac{91}{36} \times \frac{161}{36} = \frac{1225}{36^2}.$$