Chapitre 12 : Intégration : rappels et compléments

1 Rappels : intégration sur un segment

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction défine sur I par

$$x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{F}(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I.

1. Le réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
2. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ce réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. *On note souvent :*

$$[\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. *Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est muette, ainsi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

3. *On a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -(\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)) = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. *Linéarité* : on a
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. *Croissance* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$
5. *Inégalité triangulaire* :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors, f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Test 1 (***Voir solution.***)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Extension aux fonctions continues par morceaux

- Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.
- Pour une telle fonction continue par morceaux f, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$
- La proposition 2 reste vraie pour les fonctions continues par morceaux.

Remarque 4

Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est donc une fonction qui est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet tout de même des limites finies à droite et à gauche.

Exemple 1

1. *La fonction partie entière f est continue par morceaux sur $[0,2]$.*

En effet, elle est continue sur $]0,1[$ *et* $]1,2[$ *car constante sur chacun de ces intervalles. De plus,*

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x\rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-} \lfloor x\rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} \lfloor x\rfloor = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} \lfloor x\rfloor = 1 \quad ;$$

donc sa restriction à $]0,1[$ *(resp. à* $]1,2[$*) est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$ *(resp.* $[1,2]$*).*

2. *Intégrale de* f *sur* $[0,2]$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt \quad \text{par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux}\\ &= \int_0^1 0dt + \int_1^2 1dt\\ &= 1\end{aligned}$$

1.2 Techniques de calcul

► Calcul de primitives « à vue »

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a,\ a\in\mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\ a\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n,\ n\in\mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a,\ a\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u>0$ sur I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt.$

On remarque que pour tout $t \in [0,1]$ *:*

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}u'(t)u(t)^{-\frac{1}{2}}$$

où $u(t) = t^2+1$. *Donc*

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{u(t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[u(t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2ds.$

► Intégration par parties

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Exemple 3

Calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2\ln(t)dt.$

Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ *et* $v : t \mapsto \ln(t)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,3]$ *et*

$$\int_1^3 t^2\ln(t)dt = \int_1^3 u'(t)v(t)dt.$$

Par intégration par parties, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^3 t^2\ln(t)dt &= [u(t)v(t)]_1^3 - \int_1^3 u(t)v'(t)dt\\ &= \left[\frac{t^3\ln(t)}{3}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{3}dt\\ &= 3^2\ln(3) - \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3\\ &= 9\ln(3) - \frac{26}{9}\end{aligned}$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. *Calculer* $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt.$

► Changement de variables

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Exemple 4

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ *à l'aide du changement de variable* $u = e^t$.

1. *Transformer* du *avec la formule* $du = u'(t)dt$.
   Ici, $du = e^t dt$ *ou encore* $du = u dt$*, c'est-à-dire* $\frac{du}{u} = dt$.
2. *Transformer l'expression sous l'intégrale.*
$$\frac{dt}{e^t+1} = \frac{\frac{du}{u}}{u+1} = \frac{du}{u(u+1)}$$
3. *Transformer les bornes.*
   $u(1) = e$ *et* $u(2) = e^2$.
4. *Rédaction finale :*
   La fonction $u : t \mapsto e^t$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,2]$ *et* $u'(t) = e^t$ *pour tout* $t \in [1,2]$ *donc :*
$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{e^t}{e^t}dt = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{u'(t)}{u(t)}dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du$$
   car $u \mapsto \frac{1}{u(u+1)}$ *est continue sur* $[e, e^2]$.
   On remarque ensuite que pour tout $u \in [e, e^2]$,
$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$
   donc
$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du = \int_e^{e^2} \frac{1}{u}du - \int_e^{e^2} \frac{1}{u+1}du = 1 - \ln\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$$

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction impaire continue sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que pour tout* $a \geqslant 0$
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$
Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(-t)dt$

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt.$$
Montrer que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer sa dérivée.*

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm\infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $[a,+\infty[$ et on la note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

De même :

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty,b]$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $]-\infty,b]$ et on la note $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a,+\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,+\infty[$,*
2. *on introduit $x\in[a,+\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.

Exemple 5

1. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$.*

   La fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x\in[1,+\infty[$. Alors
$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^x = \ln(x)$$
   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ est donc divergente.
2. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$.*

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [2,+\infty[$. Alors

$$\int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

3. *Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.*

La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [0,+\infty[$. Alors

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = 1$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Plus généralement :

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
2. *Intégrale de Riemann en $+\infty$* : pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Démontrer les critères de convergence des exemples de référence.

2.2 Intégrales impropres sur un intervalle $]a,b]$ ou $[a,b[$

Définition 4 (Convergence d'une intégrale impropre)

Soient a,b deux réels avec $a<b$.

- Soit f une fonction continue sur $[a,b[$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $[a,b[$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.
- Soit f une fonction continue sur $]a,b]$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $]a,b]$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 2

Soit f définie sur un intervalle $[a,b[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,b[$,*
2. *on introduit $x\in[a,b[$ et on étudie si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b^-.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction f définie sur $]a,b]$.

Exemple 6

1. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}dx$.*
   La fonction $f : x\mapsto \frac{1}{x-2}$ est continue sur $[0,2[$. L'intégrale est donc impropre en 2. Soit $u\in[0,2[$. Alors
   $$\int_0^u \frac{1}{x-2}dx = [\ln|x-2|]_0^u = \ln(2-u)-\ln(2).$$
   Ainsi
   $$\lim_{u\to 2^-}\int_0^u \frac{1}{x-2}dx = -\infty.$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}dx$ est donc divergente.
2. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$.*
   La fonction $f : t\mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $]1,2]$. L'intégrale est donc impropre en 1.
   Soit $x\in]1,2]$. Alors
   $$\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = [2\sqrt{t-1}]_x^2 = 2-2\sqrt{x-1}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = 2.$$

L'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ *est donc convergente et vaut* 2.

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$, impropre en 0, converge.
2. *Intégrale de Riemann en* 0 : pour tout réel $c>0$, l'intégrale $\int_0^c \frac{1}{t^a}dt$, impropre en 0, converge si et seulement si $a<1$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann.

Exemple 7

Soit f *une fonction continue sur* $]a,b]$ *et prolongeable par continuité en* a. *Alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*

2.3 Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité

Définition 5 (Convergence d'une intégrale plusieurs fois impropre)

Soient $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$.
S'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent, on dit que l'**intégrale doublement impropre** $\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Sinon, on dira qu'elle **diverge**.

Remarque 5

En conservant les notations de la définition, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *sont des intégrales impropres respectivement en* a *et en* b *au sens des paragraphes précédents.*

Méthode 3

Soit f *définie sur un intervalle* $]a,b[$. *Étudier la nature de l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)dt$, *c'est déterminer si elle converge ou non. En pratique on prend n'importe quel* $c\in\,]a,b[$ *et on étudie la nature des intégrales* $\int_a^c f(t)dt$ *et* $\int_c^b f(t)dt$ *avec les méthodes précédentes.*

Exemple 8

1. *Étudier la nature de* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$.

   La fonction $f: t\mapsto \frac{1}{t^2}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* 0 *et en* $+\infty$. *Or, pour tout* $c>0$, *l'intégrale* $\int_0^c \frac{1}{t^2}dt$ *est divergente. Ainsi l'intégrale* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *est divergente.*

2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

Étudions la nature des intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$.

- *L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et vaut 1.*
- *L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$. Soit $x \in]-\infty, 0]$. Alors*

$$\int_x^0 f(t)\,dt = \int_x^0 e^t\,dt = \left[e^t\right]_x^0 = 1 - e^x.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)\,dt = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente et vaut 1.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt = 2.$$

Définition 6 (Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuité sur $]a, b[$: il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 \cdots < a_n = b$ de $]a, b[$ telle que f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ les intégrales doublement impropres $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ convergent, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **converge** et vaut

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale diverge.

Exemple 9

Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

1. *Déterminer les impropretés.*

   La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est impropre en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

2. *Étude de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.*

   Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $|t| = t$ et l'intégrale considérée est $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ qui est doublement impropre.

   - *Étude de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$.*

     La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a

$$\int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_1^x = -2\left(e^{-\sqrt{x}} - e^{-1}\right).$$

     Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $2e^{-1}$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$.

  La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a

$$\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_x^1 = -2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{x}}\right).$$

  Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = 2 - 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut $2-2e^{-1}$.

- Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ converge et vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = 2.$$

3. Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

   Pour tout $t \in]-\infty, 0[$, $|t| = -t$ et l'intégrale considérée est $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ qui est doublement impropre.

   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$.

     La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}$ est continue sur $]-\infty,-1]$ et pour tout $x \in]-\infty,-1]$ on a

$$\int_x^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = \left[2e^{-\sqrt{-t}}\right]_x^{-1} = 2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{-x}}\right).$$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\int_x^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ converge et vaut $2e^{-1}$.

   - Étude de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$.

     La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}$ est continue sur $[-1,0[$ et pour tout $x \in [-1,0[$ on a

$$\int_{-1}^{x} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = \left[2e^{-\sqrt{-t}}\right]_{-1}^{x} = 2\left(e^{-\sqrt{-x}} - e^{-1}\right).$$

     Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{-1}^{x} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}} = 2 - 2e^{-1}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt$ converge et vaut $2-2e^{-1}$.

   - Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt + \int_{-1}^{0} \frac{e^{-\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t}}\,dt = 2.$$

4. Conclusion :

   On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt = 4.$$

Proposition 6 (Propriétés des intégrales impropres)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $]a,b[$. Soient $c \in]a,b[$ et λ un réel.

1. *Linéarité* : si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt$ converge et
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. Si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in]a,b[,\ f(t) = 0.$$

Méthode 4 (*Techniques de calcul*)

On peut utiliser les techniques de calcul comme les primitives « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties pour calculer des intégrales impropres :

1. *on se ramène à une intégrale sur un segment (par exemple, pour une fonction continue sur $[a,b[$ avec une impropreté en b, on considère $x \in [a,b[$ et on s'intéresse à l'intégrale sur le segment $[a,x]$) ;*
2. *on utilise la technique voulue (primitive « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties) dans cette intégrale sur un segment ;*
3. *on passe à la limite (dans l'exemple, quand x tend vers b^-).*

Exemple 10

1. *Étudier* $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$.

   La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{(1+e^t)^3}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a
$$\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \int_0^A e^t(1+e^t)^{-3} dt = \left[\frac{(1+e^t)^{-2}}{-2}\right]_0^A = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^A)^2}$$
   Donc,
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt = \frac{1}{8}.$$
   Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{8}$.
2. *Étudier* $\int_0^1 \ln(t) dt$.

   La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. Soit $x \in]0,1]$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,1]$, on a, par intégration par parties :
$$\int_x^1 \ln(t)dt = \int_x^1 u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_x^1 - \int_x^1 u(t)v'(t)dt$$
$$= [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 1dt = -x\ln(x) - 1 + x$$

Donc, par croissance comparée

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} -x\ln(x)-1+x = -1.$$

Ainsi $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *est convergente et vaut* -1.

3. Étudier $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ avec le changement de variable $u=\frac{1}{t}$.

La fonction $f\mapsto \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}$ *est continue sur* $]0,1]$. *Soit* $x\in]0,1]$.
La fonction $u: t\mapsto \frac{1}{t}$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[x,1]$. *De plus,* $du=-\frac{1}{t^2}dt$. *Ainsi*

$$\int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt = -\int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-u}\,du = \int_1^{\frac{1}{x}} e^{-u}\,du = e^{-1}-e^{-\frac{1}{x}}.$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+} e^{-1}-e^{-\frac{1}{x}} = e^{-1}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ *est convergente et vaut* e^{-1}.

Test 8 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ en posant $u=\ln(t)$.

3 Convergences des intégrales de fonctions positives.

Proposition 7

- Soient $a<b\leqslant+\infty$ et f une fonction continue positive sur $[a,b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est majorée sur $[a,b[$.
- Soient $-\infty\leqslant a<b$ et f une fonction continue positive sur $]a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ est majorée sur $]a,b]$.

Remarque 6

Il s'agit d'une conséquence du théorème de la limite monotone : la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *(resp.* $x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$*) est croissante sur* $[a,b[$ *(resp. décroissante sur* $]a,b]$*).*

Proposition 8 (Comparaison par inégalité)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que, au voisinage de $b : 0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que, au voisinage de $a : 0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Remarque 7

Dire qu'au voisinage de b on a $0 \leqslant f \leqslant g$ *signifie :*

$$\exists c \in [a, b[\ \forall t \in [c, b[, \ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t).$$

Exemple 11

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$. *L'intégrale possède donc une impropreté en* $+\infty$. *De plus,*

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *est une intégrale de Riemann convergente (car* $2 > 1$*). Comme les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *et* $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^2}$ *sont continues et positives sur* $[1, +\infty[$*, d'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ *converge aussi.*

Test 9 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t + \sqrt{t}} dt$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$.

Proposition 9 (Comparaison par négligeabilité)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{=} o(g(t))$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que $f(t) \underset{t \to a^+}{=} o(g(t))$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Méthode 5 (*Comparaison avec les exemples de référence*)

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à la comparer avec l'un des exemples de référence. Par exemple, si f continue sur $[c,+\infty[$ $(c>0)$ et positive au voisinage de $+\infty$ (raisonnement à refaire à chaque fois qu'on l'utilise) :

1. *si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a f(t) = 0$ alors $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge si $a>1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann;*
2. *si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a f(t) = +\infty$ alors $\frac{1}{t^a} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(f(t)\right)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ diverge si $a\leqslant 1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.*

On peut raisonner de manière analogue pour une impropreté en 0.

Exemple 12

1. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.*

   Comme pour les séries, la présence de l'exponentielle doit faire penser à un critère de négligeabilité en comparant avec une intégrale de Riemann.

   - *La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.*
   - *De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$ donc $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$*
   - *Les fonctions $t\mapsto e^{-t^2}$ et $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et positives au voisinage de $+\infty$. Attention cependant : on ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est divergente (à cause de son impropreté en 0). En revanche, d'après le critère de convergence des intégrales de Riemann en $+\infty$, on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge. Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.*
   - *De plus $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}dt$ est bien définie car $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,1]$. Donc par la relation de Chasles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.*

2. *Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^2dt$.*

   La présence du logarithme doit faire penser à un critère de négligeabilité en comparant avec une intégrale de Riemann.

   - *La fonction $t\mapsto(\ln(t))^2$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale est donc impropre en 0.*
   - *De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{t}(\ln(t))^2 = 0$ donc $(\ln(t))^2 \underset{t\to0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$*
   - *Les fonctions $t\mapsto(\ln(t))^2$ et $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues et positives au voisinage de 0^+. D'après le critère de convergence des intégrales de Riemann en 0, on sait que $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge. Par le criètre de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1(\ln(t))^2dt$ converge.*

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln(t)}dt$;
2. $\displaystyle\int_0^1\frac{|\ln(t)|}{t^2}dt$.

Proposition 10 (Comparaison par équivalence)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que $f(t) \underset{t \to a^+}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.

Méthode 6

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à en déterminer un équivalent simple.

Exemple 13

1. *Déterminer la nature de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$.
   - *La fonction* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ *est continue sur* $]0, 1]$. *L'intégrale est donc impropre en* 0.
   - *Par équivalent usuel et compatibilité avec le quotient, on a*
   $$\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
   - *Les fonctions* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ *sont continues et positives au voisinage de* 0^+. *D'après le critère de comparaison par équivalent pour les intégrales de fonctions positives, les intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *sont de même nature.*
   - *Comme* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *est une intégrale de Riemann convergente,* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$ *converge aussi.*
2. *Déterminer la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})\,dt$.
   - *La fonction* $t \mapsto \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   - *Or*
   $$\sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
   - *Les fonctions* $t \mapsto \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ *sont continues et positives au voisinage de* $+\infty$. *D'après le critère de comparaison par équivalent pour les intégrales de fonctions positives, les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})\,dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ *sont de même nature.*
   - *Comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *est une intégrale de Riemann divergente,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})\,dt$ *diverge aussi.*

Test 11 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + t}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t}\,dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1}\,dt$.

Remarque 8

Tous les résultats énoncés pour les fonctions f continues positives se transposent pour les fonctions continues négatives en considérant $-f$ (l'important est que la fonction soit de signe constant).

4 Convergence absolue

Définition 7 (Convergence absolue)

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$, resp. $]a,b[$).
On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Proposition 11

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$). Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente. Dans ce cas :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Remarque 9

La réciproque est fausse : il existe des intégrales qui ne sont pas absolument convergentes mais qui sont convergentes.

5 Objectifs

1. Connaître les primitives de références
2. Connaître la nature des intégrales impropres de référence.
3. Connaître par coeur les critères de convergence des intégrales impropres de fonctions positives (comparaison, négligeabilité, équivalence).
4. Savoir déterminer la nature d'une intégrale impropre d'une fonction positive en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.
5. Savoir montrer qu'une intégrale d'une fonction de signe quelconque est convergente en utilisant la convergence absolue.
6. Savoir étudier une intégrale plusieurs fois impropre.
7. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable. Appliquer ces techniques à l'étude d'intégrales impropres.

6 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction* $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc l'intégrale* I_n *est bien définie.*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Soit* $t \in [0,1]$*, alors* $1+t^2 \geqslant 1$ *donc par décroissance de la fonction inverse sur* $]0,+\infty[$ *on a*

$$0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$$

puis en multipliant membre à membre par $t^n \geqslant 0$ *on obtient :*

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n.$$

3. *Par croissance de l'intégrale pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

4. *Par le théorème d'encadrement,* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ *est continue sur* $[e,3e]$ *donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout* $x \in [e,3e]$*, on a*

$$\frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

et on reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{u}$ *où* u *est la fonction logarithme. Ainsi*

$$\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)} dx = \left[\ln\left(\left|\ln(u)\right|\right)\right]_e^{3e} = \ln(1+\ln(3)).$$

2. *La fonction* $t \mapsto e^{2t-1}$ *est continue sur* $[0,2]$ *donc l'intégrale est bien définie. De plus, par linéarité de l'intégrale :*

$$\int_0^2 e^{2t-1} dt = \int_0^2 e^{2t} e^{-1} dt = e^{-1}\int_0^2 e^{2t} dt = e^{-1}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^2 = \frac{e^4-1}{2e}.$$

3. *La fonction* $s \mapsto s(s^2+2)^2$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout* $s \in [0,1]$ *on a*

$$s(s^2+3)^2 = \frac{1}{2} 2s(s^2+3)^2$$

et on reconnaît une expression de la forme $\frac{1}{2}u' \times u^2$ *où* $u : s \mapsto s^2+3$*. Donc*

$$\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^1 2s(s^2+3)^2 ds = \frac{1}{2}\left[\frac{(s^2+3)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{37}{6}$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$*. Les fonctions* $u : t \mapsto t$ *et* $v : t \mapsto \ln(t)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,x]$ *et*

$$\int_1^x \ln(t) dt = \int_1^x u'(t)v(t) dt.$$

Par intégration par parties, on trouve donc

$$\int_1^x \ln(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt = x\ln(x) - x + 1.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $a \in \mathbb{R}$*, la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc sur* $[-a,a]$ *donc l'intégrale est bien définie. De plus, par la relation de Chasles, on a*

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ *on effectue le changement de variable* $s=-t$. *Dans ce cas,* $ds=-dt$ *et on obtient*

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-s)\times(-1)ds = -\int_{a}^{0} f(-s)ds = \int_{0}^{a} f(-s)ds.$$

Comme la variable d'intégration est une variable muette, on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$

et comme f *est impaire, pour tout* $t\in[0,a]$ $f(-t)=-f(t)$ *donc*

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Finalement,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}\frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt.$$

Montrer que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer sa dérivée.*
La fonction $t\mapsto\frac{\ln(1+t^2)}{e^t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc possède une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x\in\mathbb{R}_+^*$. *Alors*

$$f(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}\frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt=\mathrm{F}(x^2)-\mathrm{F}(-\sqrt{x}).$$

- *La fonction* F *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *en tant que primitive d'une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.
- *Comme* $x\mapsto x^2$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *la composée* $x\mapsto\mathrm{F}(x^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Comme* $x\mapsto\sqrt{x}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *la composée* $x\mapsto\mathrm{F}(-\sqrt{x})$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en tant que combinaison linéaire de fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus, pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$ *on a*

$$f'(x)=2x\mathrm{F}'(x^2)-\frac{-1}{2\sqrt{x}}\mathrm{F}'(-\sqrt{x})=\frac{2x\ln(1+x^4)}{e^{x^2}}+\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *La fonction* $t\mapsto e^{-\lambda t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est impropre en* $+\infty$.

   Soit $\mathrm{A}\in[0,+\infty[$ *et supposons* $\lambda\neq 0$. *On a*

   $$\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{\mathrm{A}}=\frac{1-e^{-\lambda\mathrm{A}}}{\lambda}.$$

   - *si* $\lambda>0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est convergente.*
   - *si* $\lambda<0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=+\infty$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est divergente.*
   - *si* $\lambda=0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\mathrm{A}=+\infty$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est divergente.*

   Finalement, l'intégrale donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est convergente si et seulement si* $\lambda>0$.

2. *Soient* $c>0$ *et* $a\in\mathbb{R}$. *La fonction* $t\mapsto\frac{1}{t^a}$ *est continue sur* $[c,+\infty[$ *donc l'intégrale* $\int_c^{+\infty}\frac{1}{t^a}dt$ *est impropre en*

$+\infty$. Soit $A \in [c, +\infty[$; alors

$$\int_c^A \frac{1}{t^a} dt = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-a}}{1-a}\right]_c^A & \text{si } a \neq 1 \\ [\ln(t)]_c^A & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A^{1-a} - c^{1-a}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ \ln(A) - \ln(c) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Par conséquent,

- si $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{A^{1-a} - c^{1-a}}{1-a} = -\dfrac{c^{1-a}}{1-a}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ est convergente ;
- si $a < 1$ alors $1 - a > 0$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{A^{1-a} - c^{1-a}}{1-a} = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ est divergente ;
- si $a = 1$, $\lim\limits_{A \to +\infty} \ln(A) - \ln(c) = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ est divergente.

Ainsi, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ est impropre en 0.

   Soit $A \in]0, 1]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_A^1 \ln(t) dt = [u(t)v(t)]_A^1 - \int_A^1 u(t)v'(t) dt$$

   où $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, 1]$. Donc

$$\int_A^1 \ln(t) dt = [u(t)v(t)]_A^1 - \int_A^1 u(t)v'(t) dt = -A\ln(A) - 1 + A.$$

   Par croissance comparée, on trouve

$$\lim_{A \to 0} \int_A^1 \ln(t) dt = \lim_{A \to 0} -A\ln(A) - 1 + A = -1.$$

   En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

2. Soient $c > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ est continue sur $]0, c]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ est impropre en 0.

   Soit $A \in]0, c]$; alors

$$\int_A^c \frac{1}{t^a} dt = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-a}}{1-a}\right]_A^c & \text{si } a \neq 1 \\ [\ln(t)]_A^c & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ \ln(c) - \ln(A) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

   Par conséquent,

   - si $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et $\lim\limits_{A \to 0^+} \dfrac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ est divergente ;
   - si $a < 1$ alors $1 - a > 0$ et $\lim\limits_{A \to 0^+} \dfrac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} = \dfrac{c^{1-a}}{1-a}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ est convergente ;
   - si $a = 1$, $\lim\limits_{A \to 0^+} \ln(c) - \ln(A) = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ est divergente.

   Ainsi, $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a < 1$.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $[0, \sqrt{2}[$ donc la l'intégrale est impropre en $\sqrt{2}$. Soit $A \in [0, \sqrt{2}[$.

   Pour tout $t \in [0, \sqrt{2}[$, on a

$$\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{1}{2} \frac{-2t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

où $u : t \mapsto 2-t^2$ est continue et positive sur $[0, \mathrm{A}]$. Ainsi,

$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt = -[\sqrt{2-t^2}]_0^{\mathrm{A}} = -\sqrt{2-\mathrm{A}^2} + \sqrt{2}.$$

Donc

$$\lim_{\mathrm{A}\to\sqrt{2}^-} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt = \lim_{\mathrm{A}\to\sqrt{2}^-} -\sqrt{2-\mathrm{A}^2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt$ converge et vaut $\sqrt{2}$.

2. La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $\mathrm{A} \in [0, +\infty[$. Alors, comme les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe C^1 sur $[0, \mathrm{A}]$, par intégration par parties on trouve :

$$\int_0^{\mathrm{A}} ue^{-u} du = [-ue^{-u}]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -e^{-u} du = -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} ue^{-u} du = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1 = 1$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u} du$ converge et sa valeur est 1.

3. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $\mathrm{A} \in [1, +\infty[$. La fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $[1, \mathrm{A}]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, on obtient $du = \frac{1}{t} dt$ donc

$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \int_1^{\mathrm{A}} \frac{u(t)}{e^{u(t)}} u'(t) dt = \int_0^{\ln \mathrm{A}} \frac{u}{e^u} du = \int_0^{\ln \mathrm{A}} ue^{-u} du = -\frac{\ln \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{A}} + 1$$

en réutilisant la question précédente. Ainsi,

$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_1^{\mathrm{A}} \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} -\frac{\ln \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{A}} + 1 = 1.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge et vaut 1.

Correction du test 9 (***Retour à l'énoncé.***)

1. La fonction $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $t \geqslant 1$. Alors $\sqrt{t} \leqslant t$ donc

$$t + \sqrt{t} \leqslant 2t$$

et par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ on en déduit :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{t}{t+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} dt$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}} dt$ diverge aussi.

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t+e^{-t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Or,

$$\forall t \geqslant 1, \quad \frac{1}{e^t + e^{-t}} \leqslant \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{e^t+e^{-t}}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (exemple de référence), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$ converge aussi.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ *est continue sur* $[2,+\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *De plus,*
   - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ *donc* $\displaystyle\frac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$;
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sont continues et positives sur* $[2,+\infty[$;
   - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ *diverge.*

   Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$ *est divergente.*
2. *La fonction* $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{t^2}$ *est continue sur* $]0,1]$ *donc l'intégrale est impropre en* 0. *De plus,*
   - $\displaystyle\lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{|\ln(t)|}{t^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{|\ln(t)|} = 0$ *donc* $\displaystyle\frac{1}{t^2} = \underset{t\to0^+}{o}\left(\frac{|\ln(t)|}{t^2}\right)$;
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{t^2}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues et positives sur* $]0,1]$;
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt$ *diverge.*

   Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|}{t^2}\,dt$ *diverge aussi.*

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ *est continue sur* $]0,1]$. *L'intégrale est impropre en* 0.
   - $\sqrt{t^2+t} \underset{t\to0^+}{\sim} \sqrt{t}$ *donc* $\frac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$;
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ *sont continues et positives sur* $]0,1]$

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *sont de même nature. Comme* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge (intégrale de Riemann convergente en* 0^+*), l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt$ *converge aussi.*
2. *La fonction* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ *est continue sur* $]0,1]$. *L'intégrale est impropre en* 0.
   - *par DL usuels, on sait que*
   $$e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{o}(t^2).$$
   En particulier, $e^t - 1 - t \underset{t\to0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ *et par compatibilité de la relation d'équivalence avec le passage au quotient, on déduit l'équivalent suivant*
   $$\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ *et* $t \mapsto \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$ *sont continues et positives sur* $]0,1]$.

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}\,dt$ *sont de même nature. Comme* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ *diverge (intégrale de Riemann divergente en* 0^+*), l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}\,dt$ *diverge aussi.*
3. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   - $t^2+1 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$ *donc* $\frac{1}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$;
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *sont de même nature. Comme* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *converge (intégrale de Riemann convergente en* $+\infty$*), l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *converge aussi.*

Enfin, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,1]$*, l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *est bien définie et par la relation de Chasles on déduit que* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *converge.*

⚠*Comme dans l'exemple 12, on ne peut pas appliquer directement le critère sur* $[0,+\infty[$ *car l'intégrale la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *n'est pas continue sur* $[0,+\infty[$ *(elle n'est pas définie en* 0 *!) .*