Chapitre 10 : Correction des tests

Test 1 (***Voir la solution.***)

Que signifie « $f(x) = \underset{x\to a}{o}(0)$ » ?

Test 2 (***Voir la solution.***)

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *Comparer f et g au voisinage de 0.*
2. *Comparer f et g au voisinage de $+\infty$.*

Test 3 (***Voir la solution.***)

Dans chaque cas déterminer si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre.

1. *Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + 2x - 1$ en $-\infty$ puis en 0.*
2. *Les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $g(x) = \ln(x)$ en 0^+.*

Test 4 (***Voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{\ln x}.$$

Comparer f et g au voisinage de $+\infty$.

Test 5 (***Voir la solution.***)

1. *Montrer : $x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2+1)$ et $x = \underset{x\to+\infty}{o}(-x^2+1)$.*
2. *A-t-on : $x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2+1+(-x^2+1))$?*

Test 6 (***Voir la solution.***)

1. *Montrer : $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{x^5}$.*
2. *Montrer : $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$.*

Test 7 (***Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x + \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(x).$$

1. *Montrer : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.*
2. *A-t-on : $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x) - x$?*

Test 8 (***Incompatibilité avec la composition, voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. *Montrer : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.*
2. *A-t-on : $e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)}$?*

Test 9 (***voir la solution.***)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés.

1. *La fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f_1(x) = \frac{2x^2+1}{1+x}$ en 0 et en $-\infty$.*
2. *La fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1} - 1$ en 0^+ et en 1.*

Test 10 (***voir la solution.***)

1. *Déterminer le DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction* g *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

2. *En déduire le DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction* h *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad h(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

Test 11 (***voir la solution.***)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est dérivable en* 0 *et calculer* $f'(0)$.
2. *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* f' *est continue en* 0.

Test 12 (***voir la solution.***)

Soit f *la fonction définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+x}+1.$$

Étudier la position locale de la courbe de f *par rapport à sa tangente en* 0.

Approfondissement

Test 13 (***voir la solution.***)

Soit f *la fonction définie sur* $]1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}.$$

Déterminer une asymptote à la courbe représentative de f *en* $+\infty$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

D'après la définition de la relation de négligeabilité, $f(x) = \underset{x\to a}{o}(0)$ *si et seulement si il existe un voisinage* V *de* a *et une fonction* ϵ *définie sur* V *telle que*

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = \epsilon(x) \times 0$$

et $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.
Autrement dit, une fonction f *est un petit* o *de* 0 *au voisinage de* a *si et seulement si* f *est nulle au voisinage de* a.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit f *et* g *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *On a, pour tout* $x > 0$ *:*
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \sqrt{x} \times f(x).$$
Or : $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, *donc :* $g(x) = \underset{x\to 0}{o}\big(f(x)\big)$.
2. *D'autre part, pour tout* $x > 0$ *:*
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times g(x).$$
Or : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. *Donc* $f(x) = \underset{x\to +\infty}{o}\big(g(x)\big)$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. (a) *Au voisinage de* $-\infty$.
La fonction f *ne s'annule pas au voisinage de* $-\infty$ *et*
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = 0.$$
Donc $g(x) = \underset{x\to -\infty}{o}\big(f(x)\big)$.
(b) *Au voisinage de* 0.
La fonction g *ne s'annule pas au voisinage de* 0 *et*
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} = 0.$$
Donc $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\big(g(x)\big)$.
2. *En effectuant le changement de variable* $X = \frac{1}{x}$, *on trouve*
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{X\to +\infty} \frac{-\ln(X)}{e^X} = 0.$$
Ainsi $g(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(f(x))$.

Correction du test 4 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit $x > 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3^x}}{\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}\right)}{\frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1}.$$

Or, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x} = 0$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1} = 1.$$

Comme par croissance comparée, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$*, on obtient*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ainsi $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$.

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *On a*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2+1} = 0$$
donc $x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2+1)$ *et* $x = \underset{x\to+\infty}{o}(-x^2+1)$.
2. *Comme* $x^2+1+(-x^2+1) = 2$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x \neq 0$, $x \mapsto x$ *n'est pas négligeable devant* $x \mapsto x^2+1+(-x^2+1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

Correction du test 6 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Pour tout* $x > 0$*, on a*
$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = x^2+1.$$
Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = 1.$$
D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^5}$.
2. *Pour tout* $x > 0$*, on a*
$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1+\frac{1}{x^2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = 1.$$
D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$.

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Soit* $x > 0$.
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+\sqrt{x}}{x+\ln(x)} = \frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\ln(x)}{x}}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ *alors*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\ln(x)}{x}} = 1.$$

Ainsi : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.

2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - x = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) - x = \ln(x).$$
Par croissance comparée, on a donc
$$g(x) - x \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x) - x).$$
En particulier, $f(x) - x$ *n'est pas équivalent à* $g(x) - x$ *au voisinage de* $+\infty$.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

On considère les fonctions f *et* g *définies sur* $]0,+\infty[$ *par*
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x+1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. *On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ *donc* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e$. *En particulier :*
$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e.$$
Ainsi $e^{f(x)}$ *et* $e^{g(x)}$ *ne sont pas équivalents au voisinage de* $+\infty$.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés

1. • *Au voisinage de* 0 *: par équivalents usuels*
$$2x^2 + 1 \underset{x\to0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to0}{\sim} 1.$$
Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc
$$f_1(x) \underset{x\to0}{\sim} 1.$$
   • *Au voisinage de* $-\infty$ *: par équivalents usuels*
$$2x^2 + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x^2 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to-\infty}{\sim} x.$$
Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc
$$f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x} = 2x.$$

2. • *Au voisinage de* 0^+. *Commençons par étudier la limite en* 0^+ *de* $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$. *Par continuité de la racine carrée, on a*
$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = 0.$$
Or, par équivalent usuel, on sait que $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. *Donc, en effectuant le changement de variable* $u = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$, *on trouve par composition des limites :*
$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{u\to0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$
Ainsi $f_2(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$.
Cherchons maintenant un équivalent simple de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$ *au voisinage de* 0. *Pour tout* $x \geqslant 0$ *on a, en multipliant par la quantité conjuguée :*
$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1} - (\sqrt{x} + 1) &= \frac{x + 1 - (\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1}.\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1 = 2$ *donc* $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1 \underset{x\to0^+}{\sim} 2$ *et par compatibilité avec le quotient on obtient :*
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{-2\sqrt{x}}{2} = -\sqrt{x}.$$

Finalement, par transitivité de la relation d'équivalence :

$$f_2(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\sqrt{x}.$$

- *Au voisinage de* 1*. Commençons par étudier la limite en* 1 *de* $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1$*. Par continuité de la racine carrée, on a*

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1 = \sqrt{2}-2.$$

Donc par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$\lim_{x\to 1} f_2(x) = e^{\sqrt{2}-2}-1.$$

Comme $e^{\sqrt{2}-2}-1 \neq 0$, $f_2(x) \underset{x\to 1}{\sim} e^{\sqrt{2}-2}-1$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Il s'agit du DL usuel de* $(1+x)^{-1}$*. Ainsi :*

$$g(x) = 1-x+\frac{-1(-1-1)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On peut aussi retrouver le résultat avec la formule de Taylor-Young. La fonction g *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *au voisinage de* 0*. D'après la formule de Taylor-Young,* g *possède donc un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *et plus précisément :*

$$g(x) = g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On a

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \textit{et} \quad g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

En particulier : $g'(0) = -1$ *et* $g''(0) = 2$*. Finalement*

$$g(x) = 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. - ***Méthode 1 : avec Taylor-Young.*** *La fonction* h *est le quotient de deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^2$ *au voisinage de* 0 *dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc* h *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *au voisinage de* 0*. D'après la formule de Taylor-Young,* h *possède donc un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *et plus précisément :*

$$h(x) = h(0)+h'(0)x+\frac{h''(0)}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ *on a :*

$$h'(x) = \frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

et

$$h''(x) = \frac{e^x(x+1)(1+x)^2-2(1+x)xe^x}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x^2)}{(1+x)^3}.$$

D'où : $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$ *et* $h''(0) = 1$*. On obtient alors le DL suivant :*

$$h(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

- ***Méthode 2 : pour les plus aventureux.*** *Remarquons que* $h(x) = e^x \times g(x)$*. On sait que*

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc avec la question précédente on obtient :

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\times(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)). \end{aligned}$$

Or, $\underset{x\to 0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *(si vous n'êtes pas convaincu, montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2). Ainsi*

$$\begin{aligned}
h(x) &= 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\
&= 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x-x^2+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas convaincu que $\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$, *montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2 !*

Par unicité des coefficients du DL d'ordre 2, on en conclut que le DL d'ordre 2 de h au voisinage de 0 est

$$h(x)=1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Il s'agit de montrer que* $\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}$ *possède une limite finie quand x tend vers 0. Pour cela, on va en chercher un équivalent. Soit $x\neq 0$. On a :*

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}=\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}.$$

- *Déterminons un équivalent du numérateur. D'après les DL usuels, on sait que :*

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}
x-e^x+1 = x-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+1 &= -\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{d'après la caractérisation de la relation d'équivalence.}
\end{aligned}$$

- *Déterminons un équivalent du dénominateur. D'après les équivalents usuels, on sait que :*

$$e^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Par produit, on a donc :

$$x(e^x-1)\underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Finalement, par quotient, on obtient :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x})\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

2. *Par opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc avec, la question précédente, on conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} & \text{si } x\neq 0\\ -\frac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}.$$

Pour montrer que f' est continue en 0, il s'agit de montrer que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Pour cela, on va chercher un équivalent en 0 de $\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$.

- *Déterminons un équivalent du numérateur. D'après les DL usuels, on sait que :*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$e^x - 1 - xe^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right).$$

Or

$$x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc, on obtient :

$$e^x - 1 - xe^x = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$$

d'après la caractérisation de la relation d'équivalence.

- *Déterminons un équivalent du dénominateur. D'après les équivalents usuels, on sait que :*

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Donc, par compatibilité avec les puissances :

$$(e^x - 1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Par quotient, on obtient finalement :

$$\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, f' est continue en 0.

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncé.*)

On va utiliser le théorème 2. Pour cela, commençons par déterminer un DL à l'ordre 2 de f au voisinage de 0. Il y a deux façons de faire : soit en utilisant la formule de Taylor-Young, soit en utilisant les DL usuels et les opérations sur les petits o.

- ***Méthode 1 : avec la formule de Taylor-Young.*** *Par opération sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0. D'après la formule de Taylor-Young, f possède donc un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 et plus précisément :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

De plus, pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \sqrt{1+x} + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

et

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{2(1+x)}.$$

D'où : $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 1$. On obtient alors le DL suivant :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

- ***Méthode 2 : pour les plus aventureux.*** *Par les DL usuels, on sait que*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+1 \\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\underbrace{x\left(-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}+1 \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

Si vous n'êtes pas convaincu que $x\left(-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$*, montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2.*

La fonction f *possède donc le DL à l'ordre* 2 *suivant en* 0 *:*

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après le théorème 2, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ *représentative de* f *au point d'abscisse* 0 *a pour équation*

$$y=1+x.$$

Comme le coefficient devant x^2 *dans le DL à l'ordre* 2 *en* 0 *de* f *est* $\frac{1}{2}>0$*, au voisinage de* 0*, la courbe* $\mathscr{C}$ *est située au dessus de la droite d'équation* $y=x+1$*.*

Approfondissement

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncé.*)

On va chercher à écrire f *sous la forme*

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$*. Dans l'expression de* f*, en factorisant par les termes prépondérants en* $+\infty$*, on a pour* $x>1$ *:*

$$\begin{aligned} f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}} \quad \text{car } \sqrt{x^2}=x \text{ puisque } x>0 \\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$ *et que* $\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\underset{u\to 0}{o}(u^2)$*, alors*

- *en faisant le changement de variable* $u=\frac{2}{x^2}$ *on obtient :*

$$\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}=1+\frac{1}{2}\frac{2}{x^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{2}{x^2}\right)^2+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{2}{x^2}\right)^2\right)=1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

- *en faisant le changement de variable* $u=\frac{-1}{x}$ *on a*

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{2}\frac{-1}{x}-\frac{1}{8}\left(\frac{-1}{x}\right)^2+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{-1}{x}\right)^2\right)=1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \\ &= x\left(1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)+1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= 2x-\frac{1}{2}+\frac{7}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{7}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{7}{8x}\right)$$

donc d'après la caractérisation de la relation d'équivalence,

$$f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{8x}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{8x} = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *en* $+\infty$.