DM 2 : Correction

Exercice 1 (12pts)

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} = \{\mathrm{M}(a,b),\quad a,b\in\mathbb{R}\} &= \left\{\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} 0 & a & 0\\ a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 & b\\ 0 & b & b\\ b & b & 0\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

1 pt

Donc : $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A},\mathrm{B})$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille (A,B) est une famille génératrice de E.

1 pt

(b) La famille (A,B) est formée de deux matrices non colinéaires donc elle est libre.
Ainsi (A,B) est une famille libre et génératrice de E donc c'est une base de E.

1 pt

Comme $\mathrm{Card}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 2$, E est de dimension finie et $\dim(\mathrm{E}) = 2$.

0.5 pt

(c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. D'après la question 1.(a), on a :

$$\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix} = a\mathrm{A}+b\mathrm{B}.$$

Les coordonnées de $\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ dans la base (A,B) sont donc (a,b).

1 pt

2. (a) Un simple calcul donne : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2 = \mathrm{I}_3$.

1 pt

(b) Comme $\mathrm{A}^2 = \mathrm{AA} = \mathrm{I}_3$, A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$.

1 pt

3. (a) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}\in\mathrm{F}\iff \mathrm{BX} = 2\mathrm{X} &\iff \begin{cases} x+z = 2x\\ y+z = 2y\\ x+y = 2z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -x+z = 0\\ -y+z = 0\\ x+y-2z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y-2z = 0\\ x-z = 0\\ -y+z = 0\end{cases}.
\end{aligned}$$

2 pts pour une rédaction parfaite

(b) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on a :

$$X \in F \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (L-3 \longleftarrow L_3 + L_1)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & z \end{array}\right. .$$

1 pt

Ainsi :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Par conséquent, F est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 pt

(c) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est formée d'un unique vecteur non nul donc est libre. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre et génératrice de F donc c'est une base de F. En particulier, F est de dimension finie et sa dimension est égale à 1.
1,5 pt

Exercice 2 (12 pts)

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On a donc :
     $$0 \leqslant u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2} \leqslant \frac{1+1}{2} = 1.$$
     Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

   2 pts

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(1-u_n)^2}{2} \geqslant 0.$$
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
   La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.
   2 pts

   (c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.
   Comme la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ en est un point fixe. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\frac{x^2+1}{2} = x \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$
   Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ admet comme unique point fixe 1 et par conséquent $\ell = 1$.
   3 pts

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a :
   $$v_k - v_{k+1} = u_{k+1} - u_k = \frac{u_k^2+1}{2} - u_k = \frac{u_k^2 - 2u_k + 1}{2} = \frac{(1-u_k)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}.$$
   Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}$.
   1 pt

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{i=1}^{n} v_i \quad \text{en posant } i = k+1 \\ &= v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \sum_{i=1}^{n-1} v_i - v_n \\ &= v_0 - v_n.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n.$$

2 pts

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = 2\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = 2(v_0 - v_{n+1}).$$

Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 d'après 1.(c) donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Par suite, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n^2$ converge et sa somme vaut $2v_0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2 = 2v_0 = 2.$$

2 pts

Exercice 3 (16 pts)

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(\mathrm{T} = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ le mobile a avancé à l'instant i puis est retourné en 0 à l'instant k. Ainsi $(\mathrm{T} = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $(\mathrm{X}_i = i)$ et $(\mathrm{X}_k = 0)$ sont réalisés. Donc

$$(\mathrm{T} = k) = (\mathrm{X}_k = 0) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1}(\mathrm{X}_i = i).$$

1 pt si les explications sont présentes.

(b) La variable aléatoire X_1 prend la valeur 0 avec probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec probabilité p. Ainsi, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

1 pt

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées (les événements par lesquels on conditionne étant bien de probabilités non nulles), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{T} = k) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1) \times \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_1=1)}(\mathrm{X}_2 = 2) \times \cdots \times \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_1=1)\cap\cdots\cap(\mathrm{X}_{k-2}=k-2)}(\mathrm{X}_{k-1} = k-1)\mathrm{P}_{(\mathrm{X}_1=1)\cap\cdots\cap(\mathrm{X}_{k-1}=k-1)}(\mathrm{X}_k = 0) \\ &= p \times p \times \cdots \times p \times (1-p) \\ &= p^{k-1}(1-p).\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{T} = k) = p^{k-1}(1-p)$.

2 pts

On reconnaît que T suit la loi géométrique de paramètre $(1-p)$.

0.5 pt

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

   - *Initialisation* : d'après l'énoncé, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, il est évident que $\mathrm{X}_{n+1}(\Omega) \subset [\![0, n+1]\!]$ car le mobile ne peut pas avancer de plus de $n+1$ en $n+1$ instants.
     Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$ et montrons que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) > 0$.

- Si $k = 0$ alors on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 0) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 0, \mathrm{X}_n = 0) = \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n=0)}(\mathrm{X}_{n+1} = 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) = (1-p)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) > 0$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

- Si $k \geqslant 1$ alors on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k, \mathrm{X}_n = k-1) = \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n=k-1)}(\mathrm{X}_{n+1} = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1) = p\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) > 0$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi : $\forall k \in [\![0, n+1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) > 0$.
Par conséquent, $\mathrm{X}_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!].$$

3 pts

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, la famille $\big((\mathrm{X}_{n-1} = k)\big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_{n-1}=k)}(\mathrm{X}_n = 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k) \\
&= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k) \\
&= 1-p.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) = 1-p$.
2 pts

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. Toujours d'après la formule des probabilités totales on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n=i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i).$$

Or, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n=i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \begin{cases} p & \text{si } i = k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n=i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i) \\
&= p\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1).$$

2.5 pts

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k(1-p)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après la question 1.(b), $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait :

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = \ell) = p^\ell(1-p).$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si $k \geqslant 1$ alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence avec $\ell = k-1 \in [\![0, n-1]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1) = p \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p).$$

- Si $k=0$, on a déjà vu en 2.(b) que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=0)=1-p=p^0(1-p).$$

Ainsi, on a montré :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1}=k)=p^k(1-p).$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n=k)=p^k(1-p).$$

2.5 pts

Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel non nul n on a $\mathrm{X}_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$ alors, on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_n=n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=k)=1-\sum_{k=0}^{n-1}p^k(1-p)=1-(1-p)\frac{1-p^n}{1-p}=p^n.$$

1 pt

(c) Découle de la question précédente.

0.5 pt