# TD17-Fonctions de deux variables

**Exercice 1**

*Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions de deux variables réelles suivantes :*

1. *la fonction* $f : (x,y) \mapsto \ln(xy) + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2y + x^2$,
2. *la fonction* $g : (x,y) \mapsto \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

**Exercice 2**

*Représenter les lignes de niveau suivantes.*

1. *La ligne de niveau* $-1$ *de la fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4x + 4 + y^2 - 5$.
2. *La ligne de niveau* $0$ *de la fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2$.

**Exercice 3**

*Justifier que les fonctions suivantes, définies sur* $\mathbb{R}^2$*, sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* $f_1 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \ln(x^2+1)$.
2. *La fonction* $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{e^{xy+2x^2}}{x^2+3y^2+1}$.
3. *La fonction* $f_3 : (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2-3x+3+2y^2}$.
4. *La fonction* $f_4 : (x,y) \mapsto \sqrt{e^{xy+y^3x} + e^{x^2y^2-x^3y^5}}$.

**Exercice 4**

*Justifier que les fonctions suivantes sont de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et déterminer leurs dérivées partielles d'ordre 1.*

1. *La fonction* $g_1 : (x,y) \mapsto x^3y^3 + 3x^2y - 2y^2x + x + 1$.
2. *La fonction* $f_1$ *de l'exercice précédent.*
3. *La fonction* $g_2 : (x,y) \mapsto e^{xy}\ln(1 + x^2 + y^2)$.
4. *La fonction* $g_3 : (x,y) \mapsto (x+y)(e^x - e^y + 1)$.

**Exercice 5**

*Justifier que les fonctions de l'exercice précédent sont de classe* $C^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et déterminer leurs dérivées partielles d'ordre 2.*

**Exercice 6**

*Déterminer le gradient et la hessienne des fonctions de l'exercice précédent aux points* $(0,0)$, $(1,0)$ *et* $(1,1)$*. Écrire le DL à l'ordre* $2$ *en chacun de ces points.*

**Exercice 7**

*Dessiner les sous-ensembles de* $\mathbb{R}^2$ *suivants et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou non (sans justifier).*

1. $[0,1] \times [0,2]$ ;
2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ;
3. $]0,1[\times]0,1[$ ;
4. $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ;
5. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\right\}$ ;
6. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x + 3\right\}$.

**Exercice 8**

*Montrer que les fonctions suivantes sont de classe* $C^2$ *sur l'ouvert* $U$ *donné et calculer les dérivées partielles d'ordre* $2$.

1. *La fonction* $f$ *définie par* $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. *La fonction* $g$ *définie par* $g(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2)$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
3. *La fonction* $h$ *définie par* $h(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(y)}$ *sur* $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.

**Exercice 9**

*Soit* $f$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. *Montrer que* $f$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calculer les dérivées partielles d'ordre* $1$ *de* $f$ *et en déduire que l'ensemble des points critiques est :*

$$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

3. *Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = xe^{-x}.$$

*En déduire que les points critiques de $f$ sont des extrema globaux (on précisera lesquels sont des maxima et lesquels sont des minima).*

**Exercice 10**

*Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et préciser leur nature (extremum, point selle, autre).*

1. *La fonction $f_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3xy - y^3 - x^3$.*
2. *La fonction $f_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - xy + y^2$.*
3. *La fonction $f_3 : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto x(\ln(x)^2 + y^2)$.*

**Exercice 11**

*Soit $f$ la fonction définie pour tout couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

1. (a) *Justifier que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$.*
   (b) *En déduire que le seul point critique de $f$ est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.*
2. (a) *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$.*
   (b) *Montrer que $f$ présente un minimum local en $A$ et donner la valeur $m$ de ce minimum.*
3. (a) *Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.*
   (b) *En déduire que $m$ est le minimum global de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.*
4. *On considère la fonction $g$ définie pour tout couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ par :*

$$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

   (a) *Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) \geq -\frac{1}{6}$.*
   (b) *En déduire que $g$ possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.*

**Exercice 12**

*On considère l'ouvert $U = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :*

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{1}{x} + e^x - y^2 e^y. \end{aligned}$$

1. *Représenter graphiquement l'ensemble $U$.*
2. *Calculer, pour tout $(x,y)$ de $U$, les dérivées partielles d'ordre 1 de $g$ en $(x,y)$.*
3. (a) *Établir que l'équation $e^x = \frac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in ]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ (on pourra étudier la fonction $x \mapsto x^2e^x - 1$).*
   (b) *Montrer que $g$ admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où $\alpha$ est le réel défini ci-dessus.*
4. *Est-ce que $g$ admet un extremum local en $(\alpha, 0)$ ?*
5. *Est-ce que $g$ admet un extremum local en $(\alpha, -2)$ ?*
6. *Est-ce que $g$ admet un extremum global sur $U$ ?*

**Exercice 13 (*Droite de régression linéaire*)**

*Étant donné une série statistique double $(X,Y) = [(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)]$ avec $\sigma_X^2 \neq 0$, on a vu au chapitre 5 qu'il existe un unique couple $(a,b)$ minimisant l'erreur quadratique $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$.*

*La droite d'équation $y = ax + b$ est alors appelée* ***la droite de régression linéaire de $Y$ en $X$*** *et à pour équation réduite :*

$$y = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(x - \bar{X}) + \bar{Y}.$$

*Cette droite est appelé* ***la droite de régression linéaire de $Y$ en $X$****. Le but de l'exercice est de montrer ce résultat. On pose*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2. \end{aligned}$$

1. *Montrer que $F$ est de classe $C^2$ et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*
2. *Montrer que $\left(\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}, \overline{Y} - a\overline{X}\right)$ est l'unique point critique de $F$ et déterminer sa nature.*