4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. $u+3v=(1,-1,0)+3(3,-2,5)=(10,-7,15)$.
2. $u+3v=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\3&7\end{pmatrix}$.
3. $u+3v=3X^3-X+1+3(X^5-2X^3+X^2+2)=3X^5-3X^3+3X^2-X+7$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

1. (a) *On a* $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)\leqslant n$ *donc* $P+Q\in\mathbb{R}_n[X]$
   (b) *L'addition de polynômes* $+:\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to R_n[X]$ *est donc bien définie. C'est une loi de composition interne par définition.*
2. *L'addition des polynôme n'est pas une loi de composition interne sur* E *car la somme de deux polynômes de degré exactement* n *n'est pas nécessairement de degré exactement* n*. Par exemple, avec* $n=1$, $P=X$ *et* $Q=-X+1$*, on a*
$$\deg P=\deg Q=1\quad mais\quad \deg(P+Q)=0\quad car\quad P+Q=1.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a*
$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad P+0=0+P=P.$$
Par unicité, le polynôme nul est donc l'élément neutre de l'addition de $\mathbb{R}[X]$.
On a
$$P+(-P)=(-P)+P=0,$$
où $-P=-a_0-a_1X-\cdots-a_nX^n$*. Par unicité,* $-P$ *est donc le symétrique de* P.
2. *On a*
$$\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(0)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n+0)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, la suite constante égale à 0 *est donc l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On a
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}=(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc le symétrique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$u=xe_1+ye_2+ze_3.$$
Cela revient à résoudre le système
$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\x&+&2y&-&z&=&-1\\x&+&3y&+&z&=&3\end{array}\right.$$
Or
$$(S)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\&&y&-&3z&=&-4\\&&2y&-&z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\&&y&-&3z&=&-4\\&&&&5z&=&8\end{array}\right.$$
$$\iff z=\frac{8}{5}\quad y=\frac{4}{5}\quad x=-1$$
Donc
$$u=-e_1+\frac{4}{5}e_2+\frac{8}{5}e_3.$$
De même pour v*, on cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$v=xe_1+ye_2+ze_3.$$

Cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1\\ x & + & 2y & - & z & = & -2\\ x & + & 3y & + & z & = & 5\end{array}\right.$$

Or

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1\\ & & y & - & 3z & = & -3\\ & & 2y & - & z & = & 4\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1\\ & & y & - & 3z & = & -3\\ & & & & 5z & = & 10\end{array}\right.\\ &\iff z=2 \quad y=3 \quad x=-6\end{aligned}$$

Donc

$$v=-6e_1+3e_2+2e_3.$$

2. *On cherche* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\mathrm{X}^2+1=a(\mathrm{X}+1)^2+b(\mathrm{X}+1)+c=a\mathrm{X}^2+(2a+b)\mathrm{X}+a+b+c.$$

Par identification, cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & a & = & 1\\ & & 2a & + & b & = & 0\\ a & + & b & + & c & = & 1\end{array}\right.$$

On trouve que l'unique solution de (S) *est* $(1,-2,2)$ *donc*

$$\mathrm{X}^2+1=(\mathrm{X}+1)^2-2(\mathrm{X}+1)+2$$

3. *La matrice* $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ *est combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *si et seulement si il existe des réels* a *et* b *tels que*

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b\\ b & a+b\end{pmatrix}.$$

On peut identifier les coefficients des matrices de chaque membre et résoudre le système de quatre équations à deux inconnues comme précédemment. On peut aussi remarquer qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice soit combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *est que ses deux coefficients diagonaux soient égaux. Ainsi,* $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ *n'est pas combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=(a-b+4c)\mathrm{X}^2+(2a+6c)\mathrm{X}+b-c$$

donc

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=0\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 4c & = & 0\\ 2a & & & + & 6c & = & 0\\ & & b & - & c & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -3c\\ b & = & c\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-3c,c,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$

2. *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$ax+by=0\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0\\ 2a & + & 4b & = & 0\\ -a & - & 2b & = & 0\\ 4a & + & 4b & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0\\ 4a & + & 4b & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 0\\ b & = & 0\end{array}\right.$$

L'unique solution est $(0,0)$.

Correction du test 6 (***Retour à l'énoncer.***)

1. *On a* $(1,0) \in F$ *et* $(0,1) \in F$ *mais* $(1,0)+(0,1) \notin F$. *Ainsi,* F *n'est pas stable par addition et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.
2. G *est non vide car* $0 \in G$. *Soient* $(P,Q) \in G^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors par linéarité de la dérivation, on a*

$$(P+\lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0.$$

   Ainsi $P+\lambda Q \in G$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.
3. *La fonction* f *constante égale à* 1 *appartient à* H *mais* $2f \notin H$. *Ainsi,* H *n'est pas stable par multiplication par un scalaire et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncer.***)

On va montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence.

1. *L'ensemble* E *est non vide car contient la matrice nulle. Soient* $(M,N) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Par linéarité de la transposition on a*

$${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda\, {}^tN = 2M + \lambda 2N = 2(M+\lambda N).$$

   Ainsi $M+\lambda N \in E$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. *En particulier,* E *est un espace vectoriel.*
2. *L'ensemble* F *est non vide car contient la suite nulle. Soient* $(u,v) \in F^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et posons* $w = u + \lambda v$. *On a*

$$\begin{aligned} w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n + \lambda(v_{n+1} + 2v_n) \\ &= u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + 2(u_n + \lambda v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n \end{aligned}$$

   Ainsi $w \in F$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *En particulier,* F *est un espace vectoriel.*

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncer.***)

Donner une expression la plus simple possible des sous-espaces vectoriels suivants.

1. $F = \mathrm{Vect}((1,2),(2,4)) = \mathrm{Vect}((1,2))$ *car* $(2,4)$ *est combinaison linéaire de* $(1,2)$.
2.

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}(1+X\,,\, X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1+X\,,\, {\color{red}-}X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1+X{\color{red}-X}\,,\, -X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, X-X^2{\color{red}-X}\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2) \end{aligned}$$

   car $1+2X+X^2$ *est combinaison linéaire de* 1, $-X$ *et* $-X^2$. *Finalement,*

$$F = \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2) = \mathrm{Vect}(1\,,\, X\,,\, X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

Correction du test 9 (***Retour à l'énoncer.***)

1.

$$\begin{aligned} F = \left\{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} &= \left\{(2a,a,0) + (0,3b,2b) + (c,0,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a(2,1,0) + b(0,3,2) + c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,3,2),(1,0,1)) \end{aligned}$$

   En particulier, F *est un espace vectoriel.*

2.

$$F = \left\{(c-a)X^3 + aX^2 + (2a-b)X + c \in \mathbb{R}[X] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{-aX^3 + aX^2 + 2aX - bX + cX^3 + c \in \mathbb{R}[X] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$
$$= \left\{a(-X^3+X^2+2X) - bX + c(X^3+1)) \in \mathbb{R}[X] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$
$$= \mathrm{Vect}(-X^3+X^2+2X, -X, X^3+1)$$

En particulier, F *est un espace vectoriel.*

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$(x,y,z) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+z \\ y & = & -3z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4z \\ y & = & -3z \end{array}\right.$$

Donc

$$F = \left\{(4z, -3z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(4,-3,1)).$$

2.

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 2z\right\}$$
$$= \left\{(y-2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$= \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$$

3. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$(x,y,z) \in H \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & y \\ y & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 3z \\ y & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{2}z \\ y & = & 3z \end{array}\right.$$

Donc

$$H = \left\{\left(\frac{3}{2}z, 3z, z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{3}{2}, 3, 1\right)\right)$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\right\}$

1. *Les suites de* E *sont les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est* $X^2 - X - 6$. *Son discriminant est* 25 *et ses racines sont donc* 3 *et* -2. *Ainsi,*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\cdot(-2)^n + b\cdot 3^n.$$

2. *Si on note* $u = ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *la question précédente montre qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* E *si et seulement si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est combinaison linéaire de* u *et de* v. *Donc*

$$E = \mathrm{Vect}(u,v).$$

En particulier, c'est un espace vectoriel.

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncer.*)

Décrire les espaces vectoriels suivants à l'aide d'équations.

1. *Soit* $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. *Alors*

$$(x,y,z,t) \in F_1 \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y,z,t) = \lambda(1,2,-1,2) + \mu(1,1,1,1) \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (S)\left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & = & y \\ -\lambda & + & \mu & = & z \\ 2\lambda & + & \mu & = & t \end{array}\right.$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y-x \\ -2\lambda = z-x \\ \lambda = t-x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y-x \\ -2(y-x) = z-x \\ y-x = t-x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu = x \\ \lambda = y-x \\ 3x-2y-z = 0 \\ y-t = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $y-t=0$ *et* $3x-2y-z=0$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y-t=0 \quad \textit{et} \quad 3x-2y-z=0\right\}.$$

2. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*. Alors*

$$(x,y,z)\in\mathrm{F}_2 \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad (x,y,z)=\lambda(1,1,1)+\mu(1,2,3)+\gamma(1,4,9) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad (\mathrm{S})\begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \lambda + 2\mu + 4\gamma = y \\ \lambda + 3\mu + 9\gamma = z \end{cases}$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \mu + 3\gamma = y-x \\ 2\mu + 8\gamma = z-x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \mu + 3\gamma = y-x \\ 2\gamma = x+z-2y \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions pour tout* $(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_2 = \mathbb{R}^3.$$

3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*. Alors*

$$(x,y,z)\in\mathrm{F}_3 \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (x,y,z)=\lambda(2,1,-3)+\mu(1,1,-2) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{S})\begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \\ -3\lambda - 2\mu = z \end{cases}$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ -\lambda = y-x \\ \lambda = z+2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda = x-y \\ x-y = z+2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda = x-y \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $x+y+z=0$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_3 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}.$$