Exercice 8

1) Fait en TD

2) Fait en TD : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3) a) * Déterminons les coordonnées de $(1,2,1)$ dans la base canonique $\mathbb{R}^3$: $(1,2,1)$

* Ainsi, $\text{Mat}_{\text{Base can. } \mathbb{R}^3}((1,2,1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

* Donc :

$$\text{Mat}_{\text{Base can. } \mathbb{R}^2}(f(1,2,1)) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi les coordonnées de $f((1,2,1))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(1,2)$ donc

$$f((1,2,1)) = (1,2)$$

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons B_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in \text{Ker}(f) \iff A \times \text{Mat}_{B_3}((x,y,z)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 3x \\ y = 5x \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \{(x, 5x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}((1,5,3))$.

c) On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)))$

Or les coordonnées de $f((1,0,0))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont données par la 1e colonne de A, celles de $f((0,1,0))$ par la 2e colonne de A et celles de $f((0,0,1))$ par sa 3e colonne

donc $f((1,0,0)) = (2,3)$; $f((0,1,0)) = (-1,0)$ et $f((0,0,1)) = (1,-1)$

Ainsi $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2,3),(-1,0),(1,-1))$

$= \text{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Avant de commencer : Notons $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Le fait que $\text{Mat}_B(f) = M$ signifie que la 1e colonne de M donne les coordonnées de $f(1)$ dans B,

la 2e —— " —— " —— " —— de $f(X)$ dans B

la 3e —— " —— " —— " —— de $f(X^2)$ dans B

1) Noyau : soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff M \times \text{Mat}_B(P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Or $\text{Mat}_B(P) = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}$ donc

$$P \in \text{Ker}(f) \iff M\begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2c - a = 0 \\ b = 0 \\ -c + 2a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2c - a = 0 \\ b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Image : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ injective donc c'est un isomorphisme car $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie. Ainsi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$

2) a) Montrons que la famille (X, X^2+1, X^2-1) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$\lambda_1 X + \lambda_2(X^2+1) + \lambda_3(X^2-1) = 0 \iff \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1 X + (\lambda_2+\lambda_3)X^2 = 0$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Ainsi (X, X^2+1, X^2-1) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus, elle est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Notons $B' = (X, X^2+1, X^2-1)$

* Déterminons les coordonnées de $f(X)$ dans B' :

d'après la remarque du début, $f(X)$ a pour coordonnées $(0,1,0)$ dans la base B. Ainsi

$f(X) = X$.

Donc $f(X)$ a pour coordonnées $(1,0,0)$ dans B'

* Déterminons les coordonnées de $f(X^2+1)$ dans B'

d'après la remarque du début, $f(X^2)$ et $f(1)$ ont pour coordonnées dans B, respectivement $(-1,0,2)$ et $(2,0,-1)$

donc $f(X^2) = -1 + 2X^2$ et $f(1) = 2 - X^2$.

Par linéarité :

$$f(X^2+1) = f(X^2) + f(1) = 1 + X^2$$

Donc les coordonnées de X^2+1 dans B' sont $(0,1,0)$

* Déterminons les coordonnées de $f(X^2-1)$ dans B' :

de même $f(X^2-1) = f(X^2) - f(1) = -1 + 2X^2 - 2 + X^2$
$= -3 + 3X^2 = 3(X^2-1)$

Ainsi les coordonnées de $f(X^2-1)$ dans B' sont $(0,0,3)$

* Ainsi

$$M' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \mathrm{Mat}_{B'}(f(X), f(X^2+1), f(X^2-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) D'après la formule de changement de base

$$M' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = P^{-1}_{B,B'} \mathrm{Mat}_B(f) P_{BB'}$$

En notant $P_{B,B'}$ on a donc

$$M' = P^{-1} M P.$$

Déterminons P.

$$P = P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_B(X, X^2+1, X^2-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 11

1) On sait que $rg(\Psi) = rg(A)$ et $rg(A) = 1$ car les colonnes sont toutes égales et non nulles.

En particulier Ψ n'est pas surjective ($\dim \mathrm{Im}\,\Psi = 1$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$) donc ce n'est pas un automorphisme.

2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f((x,y,z)) = A\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x,y,z)) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{bmatrix}$$

Ainsi $f((x,y,z)) = (x+y+z,\ x+y+z,\ x+y+z)$

3) a) Montrons que (u,v,w) est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,0,0) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$$

Ainsi (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

De plus, elle est de cardinal 3, égal à $\dim(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) $\left.\begin{array}{l} \Psi(u) = (0,0,0) \\ \Psi(v) = (0,0,0) \\ \Psi(w) = (3,3,3) = 3w \end{array}\right\}$ d'après 2).

Ainsi $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(\Psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) Soit $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Alors A et D sont des matrices représentatives de Ψ dans des bases. Donc elles sont semblables. Plus précisément si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w) alors

$$D = P^{-1}AP.$$

Calculons P :

$$P = \mathrm{Mat}_{\text{Base cano.}}(u, v, w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Soit $X \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in \mathrm{Ker}(\Psi) \iff D\,\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notons (a,b,c) les coordonnées de X dans la base $(u,v,$

$$X \in \mathrm{Ker}\,\Psi \iff D\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c = 0$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\,\Psi = \{au + bv,\ a,b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(u,v)$

De même, $\mathrm{Im}\,\Psi = \mathrm{Vect}(\Psi(u), \Psi(v), \Psi(w))$

$= \mathrm{Vect}((0,0,0), (0,0,0), 3w)$

$= \mathrm{Vect}(w).$