Chapitre 15 : Convergence et approximation

1 Loi faible des grands nombres

1.1 Inégalité de Markov et conséquences

Théorème 1 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle **positive** et **possédant une espérance**. Alors

$$\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration : Soit X une variable aléatoire réelle positive et possédant une espérance et soit $a > 0$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie sur le même espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que X par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

- $P(Y = a) = P(X \geqslant a)$ car $[Y = a] = [X \geqslant a]$;
- $P(Y = 0) = P(X < a)$ car $[Y = 0] = [X < a]$;
- $Y \leqslant X$ car pour tout $\omega \in \Omega$
  - si $X(\omega) < a$ alors $Y(\omega) = 0$ donc $Y(\omega) \leqslant X(\omega)$ car X est positive,
  - si $X(\omega) \geqslant a$ alors $Y(\omega) = a$ donc $Y(\omega) \leqslant X(\omega)$.

De plus, Y est de support fini donc possède une espérance et

$$E(Y) = 0 \times P(Y = 0) + a \times P(Y = a) = aP(X \geqslant a).$$

Comme $Y \leqslant X$, par croissance de l'espérance, on a donc

$$aP(X \geqslant a) = E(Y) \leqslant E(X).$$

En divisant membre à membre par $a > 0$, on obtient l'inégalité de Markov. ■

Exemple 1

1. *Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Alors*
   pour tout $a > 0$
   $$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a\lambda}.$$
2. *Soit $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Alors*
   pour tout $a > 0$
   $$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{p}{a}.$$

Remarque 1

1. *Intérêt de cette inégalité : on sait déjà que $\lim_{t \to +\infty} P(X > t) = 0$ car*
   $$P(X > t) = 1 - F_X(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1.$$
   L'inégalité de Markov vient préciser la vitesse à laquelle $P(X > t)$ décroît vers 0 : si X possède une espérance cette vitesse est toujours au moins de l'ordre de $\frac{1}{t}$.
2. *L'inégalité n'a d'intérêt que si $a > E(X)$. En effet, si $a \leqslant E(X)$ on majore $P(X \geqslant a)$ par un nombre plus grand que 1 !*
3. *L'inégalité de Markov donne en général une majoration assez grossière (voir l'exemple 2).*

Exemple 2

Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Alors

$$\forall a>0,\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant a)=\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\,dt=e^{-\lambda a}.$$

L'inégalité de Markov donne $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a\lambda}$ *alors que* $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant a)=\underset{a\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{a}\right)$.

Exemple 3

Soient $r\in\mathbb{N}^*$ *et* X *est une variable aléatoire tel que* $|\mathrm{X}|^r$ *possède une espérance.*

Alors, par croissance stricte de $x\mapsto x^r$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *on a*

$$\forall a>0,\quad \mathrm{P}(|\mathrm{X}|\geqslant a)=\mathrm{P}(|\mathrm{X}|^r\geqslant a^r)$$

donc en appliquant l'inégalité de Markov à $|\mathrm{X}|^r$ *:*

$$\forall a>0,\quad \mathrm{P}(|\mathrm{X}|\geqslant a)=\mathrm{P}(|\mathrm{X}|^r\geqslant a^r)\leqslant\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{X}|^r)}{a^r}.$$

Remarque 2

1. *Ainsi, plus la variable* X *admet des moments d'ordre élevés plus la queue de distribution décroît vite vers* 0. *Cela dit, avoir un moment d'ordre* r *est de plus en plus contraignant quand* r *augmente.*
2. *De même si* X *est telle que* e^{X} *possède une espérance alors*

$$\forall a>0,\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant a)=\mathrm{P}(e^{\mathrm{X}}\geqslant e^a)\leqslant\frac{\mathrm{E}(e^{\mathrm{X}})}{e^a}$$

par croissance stricte de la fonction exponentielle. Ainsi la queue de distribution décroît à vitesse exponentielle vers 0.

Théorème 2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle **possédant un moment d'ordre 2**. Alors

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration : Soit X une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2.

Alors $|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|$ possède un moment d'ordre deux. Par croissance stricte de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geqslant\varepsilon)=\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2\geqslant\varepsilon^2).$$

En appliquant l'inégalité de Markov à la variable $|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2$ on en déduit

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geqslant\varepsilon)=\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2\geqslant\varepsilon^2)\leqslant\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|^2)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}.$$

■

Remarque 3

1. *On sait que* $\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geqslant\varepsilon)=0$. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vient préciser la vitesse à laquelle* $\mathrm{P}(|\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})|\geqslant\varepsilon)$ *décroît vers* 0 *: si* X *possède une variance cette vitesse est toujours au moins de l'ordre de* $\frac{1}{\varepsilon^2}$.
2. *La variance mesure la dispersion par rapport à l'espérance. Cette inégalité donne une majoration de la probabilité de déviation d'une variable par rapport à son espérance.*
3. *Tout comme l'inégalité de Markov, elle n'a d'intérêt que pour* ε *grand et peut être très grossière (voir exemple 4).*

Exemple 4

1. *Soit* $\lambda > 0$ *et* $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne
   $$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}$$
   Cette inégalité est grossière car pour $\varepsilon \geqslant \frac{1}{\lambda}$ *on a*
   $$\begin{aligned} P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\left[X - \frac{1}{\lambda} \leqslant -\varepsilon\right] \cup \left[X - \frac{1}{\lambda} \geqslant \varepsilon\right]\right) &= P\left(\left[X - \frac{1}{\lambda} \geqslant \varepsilon\right]\right) \\ &= P\left(X \geqslant \varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= e^{-\left(\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right)}. \end{aligned}$$
2. *Si* $X \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne
   $$P(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$
3. *Si* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.
   L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev donne
   $$P\left(\left|X - np\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$$

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

1. *Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à* X.
2. *Pour* $\varepsilon > \frac{1}{2}$, *calculer* $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev est-elle précise ?*

Test 2 (*Voir solution.*)

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à une variable aléatoire X *suivant la loi normale centrée réduite, montrer que pour tout réel* x *strictement positif*

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

1.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 3 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur une même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Alors
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une même espérance m et une même variance σ^2. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant mutuellement indépendantes, la variable $\overline{X}_n$ possède une espérance et une variance données par :

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}_n) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)+\cdots+\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)}{n} = m \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X}_1)+\cdots+\mathrm{V}(\mathrm{X}_n)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

En particulier, $\overline{\mathrm{X}}_n$ possède un moment d'ordre deux. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à cette variable aléatoire, on obtient :

$$\mathrm{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème d'encadrement on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}}_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

■

Remarque 4

1. *De manière plus intuitive, la loi des grands nombres signifie que la moyenne de n variables aléatoires indépendantes de même espérance et variance « converge » vers leur espérance commune (dans un certain sens).*
2. *C'est ce résultat qui justifie les résultats empiriques observés en TP : en simulant des variables aléatoires de même loi de manière indépendante, la moyenne observée tend, dans un certain sens, vers l'espérance lorsque le nombre de simulations tend vers l'infini.*

Exemple 5

On considère un dé à 6 faces. On effectue un lancer de ce dé et on note X la variable aléatoire égale au résultat de ce lancer.
On souhaite maintenant déterminer par l'expérience, si ce dé est truqué ou non. Par exemple, on voudrait savoir si $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$ vaut bien $\frac{1}{6}$. Pour cela, le protocole expérimental classique est :

(i) on lance un grand nombre N de fois le dé ;

(ii) on compte le nombre d'apparition de la face 2 lors de ces N tirages ;

(iii) on observe la fréquence d'apparition de la face 2 :

$$\textit{fréquence observée} = \frac{\textit{nombre de 2 obtenus en N tirages}}{\mathrm{N}}.$$

Il est alors naturel de penser que cette fréquence observée est une bonne approximation de $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$.

La loi faible des grands nombres est une justification mathématiques ce procédé.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire donnant le résultat du i-ème lancer et Y_i la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathrm{Y}_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{X}_i(\omega) = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- *Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathrm{P}(\mathrm{X}_i = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$.*
- *La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une même espérance p et une même variance $p(1-p)$.*
- *D'après la loi faible des grands nombres on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\overline{\mathrm{Y}}_i - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

- *$\overline{\mathrm{Y}}_i$ n'est rien d'autre que la fréquence d'apparition de la face 2 au cours des i premiers lancers.*

La loi faible des grands nombres affirme donc que plus le nombre i de lancers est grand, plus la fréquence observée est proche de la fréquence théorique p avec une forte probabilité.

2 Convergence en loi

Dans toute cette partie, si X désigne une variable aléatoire réelle, F_X désigne sa fonction de répartition.

2.1 Convergence en loi

Définition 1 (Convergence en loi)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge en loi vers** X si

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout réel x où F_X est continue.
On notera alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Remarque 5

1. ***Rappel*** *:* F_X *est continue en* $x \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $P(X = x) = 0$.
2. *En particulier, si* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *et si* $a < b$ *sont deux réels en lesquels* F_X *est continue alors*

$$\lim_{n\to+\infty} P(a < X_n \leqslant b) = P(a < X \leqslant b)$$

Méthode 1 (***Montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en loi***)

- *Si la variable aléatoire* X *est donnée, pour vérifier si une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires converge en loi vers* X *:*
  1. *on détermine les fonctions de répartition* F_{X_n} *et* F_X *;*
  2. *on fixe* x *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$ *;*
  3. *on vérifie si pour tout* x *où* F_X *est continue, la limite ci-dessus vaut* $F_X(x)$.
- *Pour vérifier si une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires converge en loi :*
  1. *on détermine les fonctions de répartition* F_{X_n} *;*
  2. *on fixe* x *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$ *;*
  3. *en notant* $F(x)$ *la limite* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$*, on cherche à vérifier si* $x \mapsto F(x)$ *coïncident avec une fonction de répartition d'une variable aléatoire* X *en les points où* F_X *est continue.*

Exemple 6 (***Suite de v.a.r à densité convergeant vers une v.a.r à densité***)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{E}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. *Montrons que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r à déterminer.*

1. *On détermine les fonctions de répartition* F_{X_n}.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(1+\frac{1}{n})x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$ *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$.
   Si $x < 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0$.
   Si $x \geqslant 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 1 - e^{-x}$.
3. *On cherche à reconnaître la loi limite.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = F_X(x)$$

où $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. *Ainsi* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *où* $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

Test 3 (***Voir solution.***)

Soit X *une variable aléatoire à densité. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $X_n = e^{\frac{1}{n}}X$. *Montrer que* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Exemple 7 (*Suite de v.a.r à densité convergeant vers une v.a.r discrète*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n)$. *Montrons que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r à déterminer.*

1. *On détermine les fonctions de répartition* F_{X_n}.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$ *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$.

   Si $x < 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0$.

   Si $x = 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0$.

   Si $x > 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 1$.

3. *On cherche à reconnaître la loi limite.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = F_X(x)$$

   où X *suit la loi certaine égale à* 0. *Ainsi* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *où* X *suit la loi certaine égale à* 0.

   Remarque : $F_X(0) = 1$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(0) \neq F_X(0)$ *mais cela n'empêche pas la convergence car* 0 *est un point de discontinuité de* F_X.

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([0, \frac{1}{n}])$. *Montrer que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r à déterminer.*

Exemple 8 (*Suite de v.a.r discrètes convergeant vers une v.a.r à densité*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!])$. *On pose* $Y_n = \frac{X_n}{n}$. *Montrons que* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r à déterminer.*

1. *On détermine les fonctions de répartition* F_{Y_n}.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) = P(X_n \leqslant nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$ *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.

   Si $x < 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 0$.

   Si $x > 1$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1$.

   Si $x \in [0, 1]$. *On a*

$$\frac{nx+1}{n+1} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} \leqslant \frac{nx+2}{n+1}$$

   donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = x$.

3. *On cherche à reconnaître la loi limite.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} = F_X(x)$$

   où $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0, 1])$. *Ainsi* $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ *où* $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0, 1])$.

Exemple 9 (*Suite de v.a.r qui ne converge pas en loi*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([n, n+1])$. *Montrons que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas en loi.*

1. *On détermine les fonctions de répartition* F_{X_n}.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \\ x - n & \text{si } x \in [n, n+1] \\ 1 & \text{si } x > n+1 \end{cases}$$

2. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$ *et on étudie* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0 à partir duquel $x < n$ pour tout $n \geqslant n_0$. Donc

$$\forall n \geqslant n_0, \quad F_{X_n}(x) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0.$$

3. *On conclut.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0.$$

Or la fonction nulle n'est pas une fonction de répartition. Donc la suite ne converge pas en loi.

Théorème 4 (Critère pour les variables discrètes)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **à valeurs dans** $\mathbb{Z}$ et X une variable aléatoire **à valeurs dans** $\mathbb{Z}$.
Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Exemple 10

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})$. Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable à déterminer.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$P(X_n = k) = \begin{cases} 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) & \text{si } k=0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2n} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Test 5 (***Voir solution.***)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(\frac{1}{n})$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de loi certaine égale à 0.

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n > \lambda$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Démonstration : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n > \lambda$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

— Si $k < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

— Si $k \geqslant 0$ alors

$$\forall n > \lambda, \quad P(X_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier,

$$\forall n \geqslant k, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Or

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

et

$$(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(n-k)\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\lambda$$

donc $\lim_{n\to+\infty}(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) = -\lambda$ puis $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$. Finalement

$$\forall n \geqslant k, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

où $X \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda)$. ■

2.2 Théorème central limite

Théorème 5 (Théorème Central Limite (TCL))

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi admettant une variance σ^2 non nulle et une espérance m.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$. Alors $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Remarque 6

1. *La variable $\overline{X}_n^*$ est la variable centrée réduite associée à la variable $\overline{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.*
2. *Intuitivement, le TCL signifie que pour n suffisamment grand $\overline{X}_n^*$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$.*
3. *En notant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ on a $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$ et*

$$S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \overline{X}_n^*$$

donc $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
4. *Intuitivement, le TCL signifie que pour n suffisamment grand S_n suit approximativement une loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$:*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) = P(S_n \leqslant x) &= P(S_n - nm \leqslant x - nm) \\ &= P\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(S_n^* \leqslant \frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= F_{S_n^*}\left(\frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &\simeq F_Z\left(\frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$F_{S_n}(x) \simeq F_Z\left(\frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = P\left(\sigma\sqrt{n}Z + nm \leqslant x\right) = F_{\sigma\sqrt{n}Z+nm}(x)$$

avec $\sigma\sqrt{n}Z + nm \hookrightarrow \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.
5. *Moralement, le TCL peut être vue comme une précision de la loi des grands nombres : celle-ci affirme que $\overline{X}_n$ converge vers l'espérance et le TCL précise que la convergence se fait à la vitesse de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Exemple 11

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{U}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = 0$ et $\mathrm{V}(\mathrm{U}_n) = \frac{1}{12} \neq 0$. D'après le TCL on a donc

$$\sqrt{12n} \times \overline{\mathrm{U}}_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{X}$$

où X suit la loi normale centrée réduite. Cela se réécrit :

$$\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{U}_k \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{X}$$

En prenant $n = 12$, on obtient un résultat connu : la somme de 12 variables suivant une la même loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ suit approximativement la loi normale centrée réduite.

Test 6 (*Voir solution.*)

Pour tout entier naturel n, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$.
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant np)$.

Corollaire 1

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi admettant une variance σ^2 non nulle et une espérance m.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\mathrm{X}}_n^* = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{\mathrm{X}}_n - m}{\sigma}\right)$. Alors, pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(a \leqslant \overline{\mathrm{X}}_n^* \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Exemple 12

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi admettant une variance σ^2 non nulle et une espérance m et soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. on a

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X}| \leqslant 1{,}96) \geqslant 0{,}95.$$

Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|\overline{\mathrm{X}}_n^*| \leqslant 1{,}96) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(-1{,}96 \leqslant \overline{\mathrm{X}}_n^* \leqslant 1{,}96) \geqslant 0{,}95$$

Or,

$$\mathrm{P}(-1{,}96 \leqslant \overline{\mathrm{X}}_n^* \leqslant 1{,}96) = \mathrm{P}\left(m - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{\mathrm{X}}_n \leqslant m + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(m - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{\mathrm{X}}_n \leqslant m + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0{,}95$$

2.3 Exemples d'approximation

Proposition 2 (Approximation des lois de Poisson)

Soit $(\mathrm{S}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tel que $\mathrm{S}_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n\alpha)$ avec $\alpha > 0$. Alors la suite

$$\left(\frac{\mathrm{S}_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
On approximera donc la loi $\mathscr{P}(n\alpha)$ par la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$ dès que n est suffisamment grand.
Plus généralement, approximera donc la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ dès que λ est suffisamment grand.

Démonstration : Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre α. Alors $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ et S_n ont la même loi donc la même fonction de répartition. D'après le TCL, la suite

$$\left(\frac{\mathrm{Y}_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

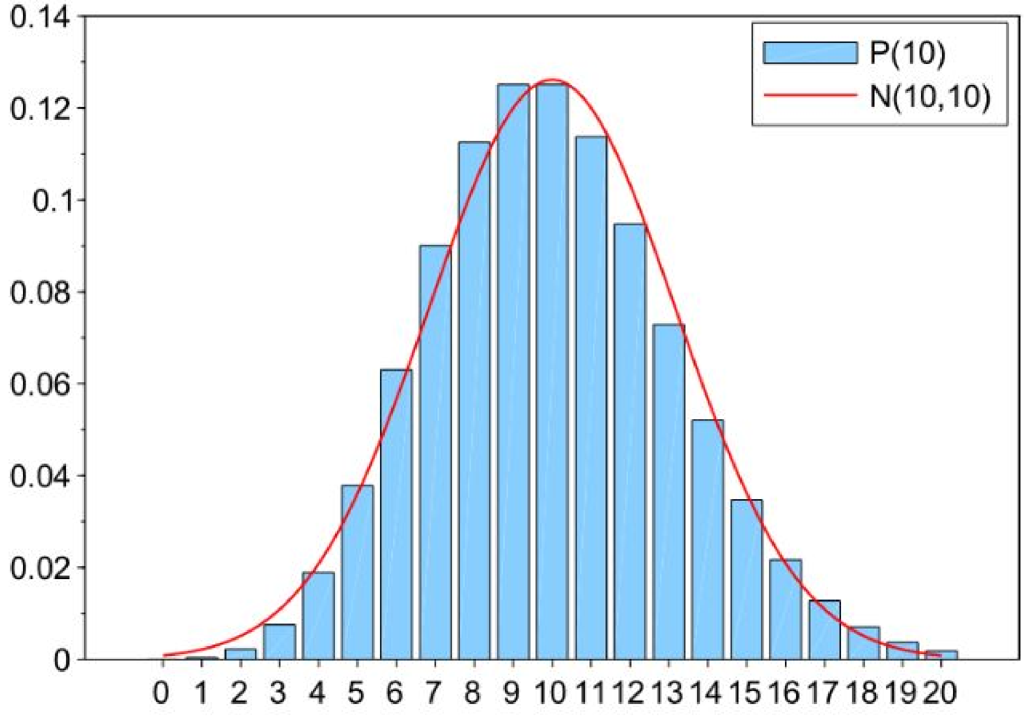


FIGURE 1 – Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Il en est donc de même de la suite

$$\left(\frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

L'approximation est un cas particulier de la remarque 6.4 ■

Remarque 7

1. *L'approximation la loi* $\mathscr{P}(\lambda)$ *par la loi* $\mathscr{N}(\lambda,\lambda)$ *est raisonnable dès que* $\lambda \geqslant 10$ *mais cela peut varier d'un auteur à l'autre. Cependant, d'après le programme :*
   « Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations »
2. *On approxime donc une loi discrète par une loi continue. En pratique, on approxime* $P(S_n = k)$ *par*

$$P(k-0,5 \leqslant Z_n \leqslant k+0,5) \quad \text{où} \quad Z_n \hookrightarrow \mathscr{N}(n\alpha, n\alpha).$$

Proposition 3 (Approximation des lois binomiales)

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires tel que $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$. Alors la suite

$$\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
On approximera donc la loi $\mathscr{B}(n,p)$ par la loi $\mathscr{N}(np, np(1-p))$ dès que n est suffisamment grand.

Démonstration : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ et S_n ont la même loi donc la même fonction de répartition. D'après le TCL, la suite

$$\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Il en est donc de même de la suite

$$\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

L'approximation est un cas particulier de la remarque 6.4 ■

Remarque 8

1. *L'approximation la loi* $\mathscr{B}(n,p)$ *par la loi* $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ *est raisonnable dès que* $n \geqslant 20$ *et* p *proche de* $\frac{1}{2}$ *mais cela peut varier d'un auteur à l'autre. Cependant, d'après le programme :*

   « Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations »

2. *On approxime donc une loi discrète par une loi continue. En pratique, on approxime* $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k)$ *par*

$$\mathrm{P}(k - 0,5 \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant k + 0,5) \quad \text{où} \quad \mathrm{Z}_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p)).$$

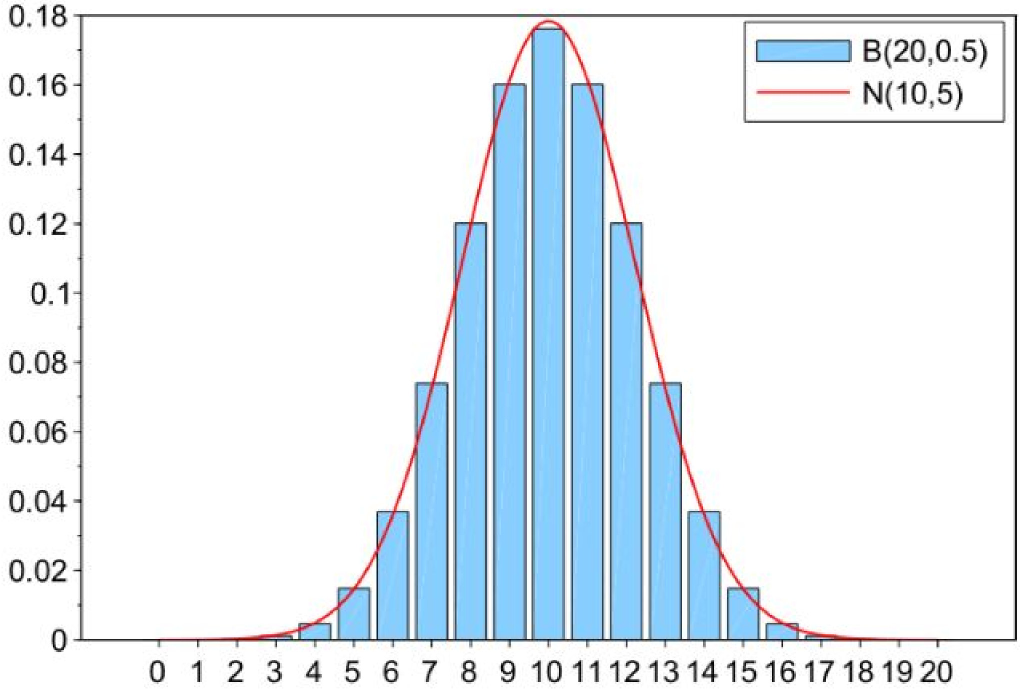


FIGURE 2 – Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Test 7 (*Voir solution.*)

On considère un dé équilibré. L'expérience consiste à effectuer une succession de $n = 3600$ *lancers. Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$, *on note* X_i *la variable aléatoire réelle égale à* 1 *si on obtient 1 lors du* i*-ième lancer et égale à* 0 *sinon.*

On note enfin $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *qui compte le nombre de* 1 *obtenus au cours de l'expérience.*

1. (a) *Soit* $i \in [\![1,n]\!]$. *Déterminer la loi de* X_i.

   (b) *Déterminer la loi de* S_n. *Rappeler les valeurs de* $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)$ *et* $\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)$.

2. *Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*

   (a) *Démontrer que pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*

$$\mathrm{P}(|\mathrm{S}_n - 600| > \varepsilon) \leqslant \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

   (b) *En déduire que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*

$$\mathrm{P}(600 - \varepsilon \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 600 + \varepsilon \geqslant 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

   (c) *Démontrer :* $\mathrm{P}(540 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 660) \geqslant \frac{31}{36}$.

3. *Avec le TCL.*

   (a) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$. *Expliquer pourquoi on à l'approximation suivante*

$$\mathrm{P}(nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant nm + b\sqrt{n} \simeq \Phi(a) - \Phi(b)$$

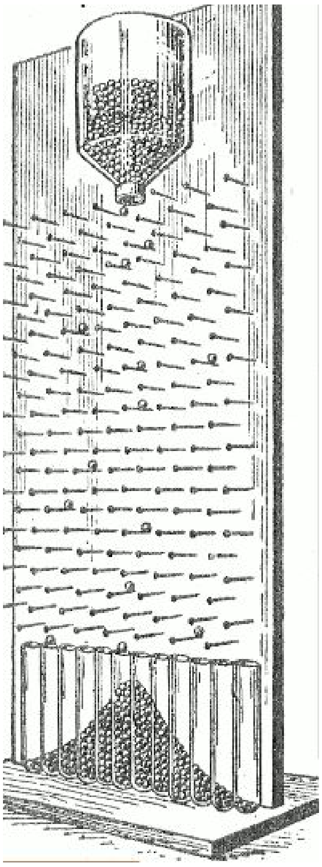
   où σ *et* m *sont des réels à déterminer et* Φ *est la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.*

   (b) *En déduire une approximation de* $\mathrm{P}(540 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 660)$. *On pourra utiliser* $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2,68$.

4. *Comparer les résultats des deux méthodes.*

Exemple 13 (*La planche de Galton*)

*La planche de Galton (*Sir Francis Galton (1822-1911) : scientifique, notamment statisticien, britannique*) est un dispositif permettant de visualiser le TCL.*



Une planche inclinée est plantée de n rangées de clous disposés en quinconce.
Des billes sont lâchées du sommet de la planche. A chaque clou, elles ont une chance sur deux de passer à gauche ou à droite de ce clou.
A l'arrivée, on répartit les billes en fonction de leur position à la sortie de la planche et on observe la quantité de billes dans chaque position. Cette position résulte de l'addition de toutes les déviations qu'elles ont subies en tombant sur ces clous : chacune de ces déviations est une expérience aléatoire indépendantes des autres.

- ***Visualisation du théorème central limite.***

  On considère une bille lâchée du sommet de la planche qui, à chaque rangée de clous, est déviée soit à gauche soit à droite du clou.

  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note X_k la variable aléatoire valant -1 si la bille passe à gauche du clou de la k-ième rangée et 1 si la bille passe à droite du clou de la k-ième rangée.

  $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad X_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 1\})$$

  La position de la bille à l'arrivée est alors

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

  D'après le TCL, quand le nombre de rangées n est grand S_n peut être approximée par une loi $\mathcal{N}(0, n\sigma^2)$. Voir la figure 3

- ***Visualisation de la loi des grands nombres****.*

  Si on lâche une très grand nombre de billes, chaque bille étant indépendante des autres, la proportion de bille dans chaque colonne tend à s'approcher de la distribution théorique représentée à la figure 3 : c'est la loi des grands nombres !

Voir aussi : `http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Galton/galton_plus.html`

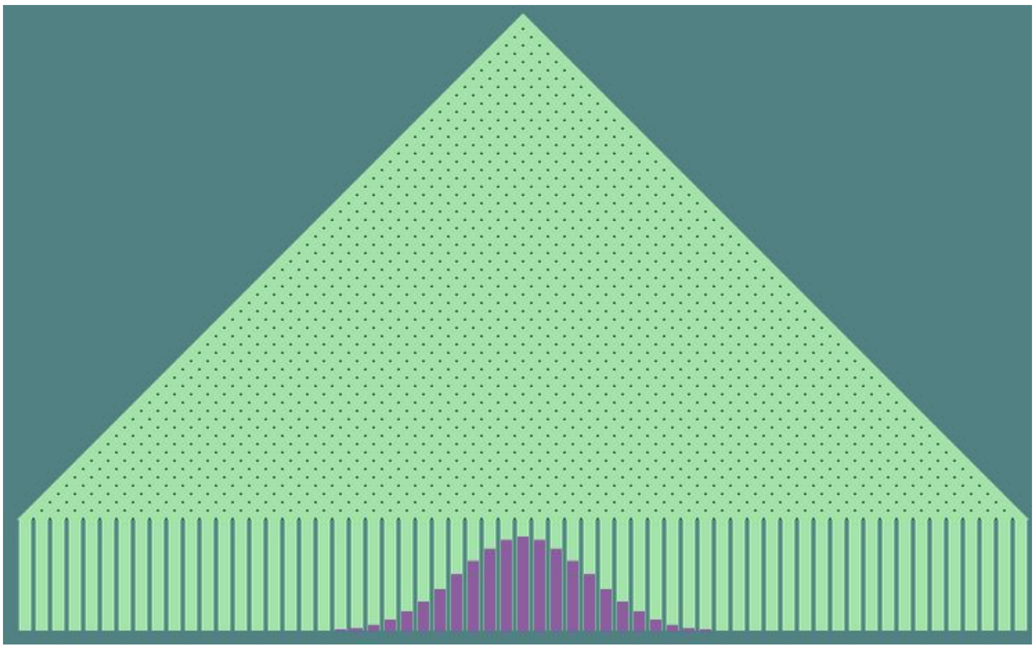


FIGURE 3 – Une planche de Galton avec 60 rangées. Dans chaque colonne, la probabilité qu'une bille arrive dans cette colonne est représentée. La distribution dessine une courbe de Gauss.

3 Objectifs

1. Savoir utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
2. Savoir montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en loi.
3. Savoir montrer qu'une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
4. Savoir montrer une convergence en loi avec le TCL.
5. Savoir utiliser le TCL pour faire des approximations.