Chapitre 12 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

1. *Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}\,dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2\,ds.$

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(-t)\,dt$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}\,dt.$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Test 6 (*Voir solution.*)

Démontrer les critères de convergence des exemples de référence.

Test 7 (*Voir solution.*)

Démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann.

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt\,;$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du\,;$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ *en posant $u = \ln(t)$.*

Test 9 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\,dt\,;$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}.$

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt\,;$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|}{t^2}\,dt.$

Test 11 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt$; *2.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}\,dt$. *3.* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$, alors $1+t^2 \geqslant 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ on a*

$$0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$$

puis en multipliant membre à membre par $t^n \geqslant 0$ on obtient :

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n.$$

3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Les bornes étant dans l'ordre croissant, par croissance de l'intégrale on a :*

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4. *Par le théorème d'encadrement, $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $[e,3e]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout $x \in [e,3e]$, on a*

$$\frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}.$$

On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est la fonction logarithme. Ainsi :

$$\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)} dx = \left[\ln\left(\left|\ln(u)\right|\right)\right]_e^{3e} = \ln(1+\ln(3)).$$

2. *La fonction $t \mapsto e^{2t-1}$ est continue sur $[0,2]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, par linéarité de l'intégrale :*

$$\int_0^2 e^{2t-1} dt = \int_0^2 e^{2t}e^{-1} dt = e^{-1}\int_0^2 e^{2t} dt = e^{-1}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^2 = \frac{e^4-1}{2e}.$$

3. *La fonction $s \mapsto s(s^2+2)^2$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, pour tout $s \in [0,1]$ on a*

$$s(s^2+3)^2 = \frac{1}{2}2s(s^2+3)^2.$$

On reconnaît une expression de la forme $\frac{1}{2}u' \times u^2$ où $u : s \mapsto s^2+3$. Donc

$$\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds = \frac{1}{2}\int_0^1 2s(s^2+3)^2 ds = \frac{1}{2}\left[\frac{(s^2+3)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{37}{6}.$$

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit $x \in]1,+\infty[$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,x]$ et

$$\int_1^x \ln(t) dt = \int_1^x u'(t)v(t) dt.$$

Par intégration par parties, on trouve donc :

$$\int_1^x \ln(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt = x\ln(x) - x + 1.$$

Correction du test 4 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-a,a]$, donc l'intégrale est bien définie. De plus, par la relation de Chasles, on a

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ *on effectue le changement de variable* $s=-t$*. Dans ce cas,* $ds=-dt$ *et on obtient :*

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{a}^{0} f(-s)\times(-1)ds=-\int_{a}^{0} f(-s)ds=\int_{0}^{a} f(-s)ds.$$

Comme la variable d'intégration est une variable muette, on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt.$$

Comme f *est impaire, pour tout* $t\in[0,a]$ $f(-t)=-f(t)$*. On en conclut :*

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt=-\int_{0}^{a} f(t)dt.$$

Finalement,

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt=\int_{-a}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=-\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(t)dt=0.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

La fonction $t\mapsto\frac{\ln(1+t^2)}{e^t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc possède une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$*. Soit* $x\in\mathbb{R}_+^*$*. Alors*

$$f(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}\frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt=\mathrm{F}(x^2)-\mathrm{F}(-\sqrt{x}).$$

- *La fonction* F *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *en tant que primitive d'une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*.*
- *Comme* $x\mapsto x^2$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*, la composée* $x\mapsto\mathrm{F}(x^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
- *Comme* $x\mapsto\sqrt{x}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, la composée* $x\mapsto\mathrm{F}(-\sqrt{x})$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Finalement, f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$*. De plus, pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$ *on a*

$$f'(x)=2x\mathrm{F}'(x^2)-\frac{-1}{2\sqrt{x}}\mathrm{F}'(-\sqrt{x})=\frac{2x\ln(1+x^4)}{e^{x^2}}+\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$*. La fonction* $t\mapsto e^{-\lambda t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *donc l'intégrale* $\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est impropre en* $+\infty$*.*

   Soit $\mathrm{A}\in[0,+\infty[$ *et supposons* $\lambda\neq0$*. On a*

$$\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{\mathrm{A}}=\frac{1-e^{-\lambda\mathrm{A}}}{\lambda}.$$

   - *si* $\lambda>0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est convergente.*
   - *si* $\lambda<0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=+\infty$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est divergente.*
   - *si* $\lambda=0$ *alors* $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} e^{-\lambda t}dt=\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty}\mathrm{A}=+\infty$ *donc l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est divergente.*

   Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ *est convergente si et seulement si* $\lambda>0$*.*

2. *Soient* $c>0$ *et* $a\in\mathbb{R}$*. La fonction* $t\mapsto\frac{1}{t^a}$ *est continue sur* $[c,+\infty[$ *donc l'intégrale* $\int_c^{+\infty}\frac{1}{t^a}dt$ *est impropre en* $+\infty$*. Soit* $\mathrm{A}\in[c,+\infty[$*; alors on a :*

$$\int_c^{\mathrm{A}}\frac{1}{t^a}dt=\begin{cases}\left[\frac{t^{1-a}}{1-a}\right]_c^{\mathrm{A}} & \text{si } a\neq1\\ [\ln(t)]_c^{\mathrm{A}} & \text{si } a=1\end{cases}=\begin{cases}\frac{\mathrm{A}^{1-a}-c^{1-a}}{1-a} & \text{si } a\neq1\\ \ln(\mathrm{A})-\ln(c) & \text{si } a=1.\end{cases}$$

   Par conséquent,

- *si* $a > 1$ *alors* $1 - a < 0$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^{1-a} - c^{1-a}}{1-a} = -\frac{c^{1-a}}{1-a}$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ *est convergente ;*
- *si* $a < 1$ *alors* $1 - a > 0$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A^{1-a} - c^{1-a}}{1-a} = +\infty$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ *est divergente ;*
- *si* $a = 1$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln(A) - \ln(c) = +\infty$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ *est divergente.*

Ainsi, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $t \mapsto \ln(t)$ *est continue sur* $]0,1]$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ *est impropre en* 0.

   Soit $A \in]0,1]$. *Par intégration par parties, on a*

   $$\int_A^1 \ln(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_A^1 - \int_A^1 u(t)v'(t) dt$$

   où $u : t \mapsto t$ *et* $v : t \mapsto \ln(t)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[A,1]$. *Donc*

   $$\int_A^1 \ln(t) dt = \left[u(t)v(t)\right]_A^1 - \int_A^1 u(t)v'(t) dt = -A\ln(A) - 1 + A.$$

   Par croissance comparée, on trouve

   $$\lim_{A\to 0} \int_A^1 \ln(t) dt = \lim_{A\to 0} -A\ln(A) - 1 + A = -1.$$

   En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ *est convergente.*

2. *Soient* $c > 0$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ *est continue sur* $]0,c]$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ *est impropre en* 0.

   Soit $A \in]0,c]$ *; alors on a :*

   $$\int_A^c \frac{1}{t^a} dt = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-a}}{1-a}\right]_A^c & \text{si } a \neq 1 \\ \left[\ln(t)\right]_A^c & \text{si } a = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ \ln(c) - \ln(A) & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

   Par conséquent,

   - *si* $a > 1$ *alors* $1 - a < 0$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \frac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} = +\infty$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ *est divergente ;*
   - *si* $a < 1$ *alors* $1 - a > 0$ *et* $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \frac{c^{1-a} - A^{1-a}}{1-a} = \frac{c^{1-a}}{1-a}$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ *est convergente ;*
   - *si* $a = 1$, $\displaystyle\lim_{A\to 0^+} \ln(c) - \ln(A) = +\infty$ *donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ *est divergente.*

   Ainsi, $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a} dt$ *converge si et seulement si* $a < 1$.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ *est continue sur* $[0, \sqrt{2}[$ *donc la l'intégrale est impropre en* $\sqrt{2}$. *Soit* $\mathrm{A} \in [0, \sqrt{2}[$. *Pour tout* $t \in [0, \sqrt{2}[$, *on a*
$$\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
où $u : t \mapsto 2 - t^2$ *est continue et positive sur* $[0, \mathrm{A}]$. *Ainsi,*
$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt = -[\sqrt{2-t^2}]_0^{\mathrm{A}} = -\sqrt{2-\mathrm{A}^2} + \sqrt{2}.$$
Donc
$$\lim_{\mathrm{A}\to\sqrt{2}^-} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt = \lim_{\mathrm{A}\to\sqrt{2}^-} -\sqrt{2-\mathrm{A}^2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}} dt$ *converge et vaut* $\sqrt{2}$.

2. *La fonction* $u \mapsto ue^{-u}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *Soit* $\mathrm{A} \in [0, +\infty[$. *Alors, comme les fonctions* $u \mapsto u$ *et* $u \mapsto -e^{-u}$ *sont de classe* C^1 *sur* $[0, \mathrm{A}]$, *par intégration par parties on trouve :*
$$\int_0^{\mathrm{A}} ue^{-u} du = [-ue^{-u}]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -e^{-u} du = -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1.$$
Ainsi,
$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} ue^{-u} du = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1 = 1.$$
Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u} du$ *converge et sa valeur est* 1.

3. *La fonction* $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *Soit* $\mathrm{A} \in [1, +\infty[$. *La fonction* $u : t \mapsto \ln(t)$ *est continue sur* $[1, \mathrm{A}]$ *donc, en effectuant le changement de variable* $u = \ln(t)$ *et en utilisant la question précédente, on obtient :*
$$\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \int_1^{\mathrm{A}} \frac{u(t)}{e^{u(t)}} u'(t) dt = \int_0^{\ln \mathrm{A}} \frac{u}{e^u} du = \int_0^{\ln \mathrm{A}} ue^{-u} du = -\frac{\ln \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{A}} + 1$$
en réutilisant la question précédente. Ainsi,
$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_1^{\mathrm{A}} \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} -\frac{\ln \mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{\mathrm{A}} + 1 = 1.$$
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ *converge et vaut* 1.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$.
Soit $t \geqslant 1$. *Alors* $\sqrt{t} \leqslant t$ *donc*
$$t + \sqrt{t} \leqslant 2t$$
et par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ *on en déduit :*
$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \frac{t}{t+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{2}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{2}$ *sont continues et positives sur* $[1, +\infty[$ *donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} dt$ *diverge, l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}} dt$ *diverge aussi.*

2. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{e^t + e^{-t}}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *Or,*
$$\forall t \geqslant 1, \quad \frac{1}{e^t + e^{-t}} \leqslant \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{e^t + e^{-t}}$ *et* $t \mapsto e^{-t}$ *sont continues et positives sur* $[1, +\infty[$ *donc, d'après le théorème de*

comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (exemple de référence), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ converge aussi.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. De plus,
   - $\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ donc $\frac{1}{t} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$;
   - les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues et positives sur $[2,+\infty[$;
   - $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge.

   Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt$ est divergente.
2. La fonction $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0. De plus,
   - $\lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{|\ln(t)|}{t^2}} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{|\ln(t)|} = 0$ donc $\frac{1}{t^2} = \underset{x\to0^+}{o}\left(\frac{|\ln(t)|}{t^2}\right)$;
   - les fonctions $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $]0,1]$;
   - $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ diverge.

   Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|}{t^2}dt$ diverge aussi.

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale est impropre en 0.
   - $\sqrt{t^2+t} \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{t}$ donc $\frac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$;
   - les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues et positives sur $]0,1]$

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ sont de même nature. Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge (intégrale de Riemann convergente en 0^+), l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}dt$ converge aussi.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale est impropre en 0.
   - par DL usuels, on sait que
   $$e^t-1-t = \frac{t^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(t^2).$$
   En particulier, $e^t-1-t \underset{x\to0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et par compatibilité de la relation d'équivalence avec le passage au quotient, on déduit l'équivalent suivant
   $$\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$
   - les fonctions $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ et $t \mapsto \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$ sont continues et positives sur $]0,1]$.

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ et $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt$ sont de même nature. Comme $\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ diverge (intégrale de Riemann divergente en 0^+), l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt$ diverge aussi.

3. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.

- $t^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} t^2$ *donc* $\frac{1}{t^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ *;*
- *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *sont de même nature. Comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *converge (intégrale de Riemann convergente en* $+\infty$*), l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *converge aussi.*

Enfin, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,1]$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *est bien définie et par la relation de Chasles on déduit que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ *converge.*

⚠*On ne peut pas appliquer directement le critère sur* $[0,+\infty[$ *car la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *n'est pas continue sur* $[0,+\infty[$ *(elle n'est pas définie en* 0 *!) et l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *diverge.*