DM2

Exercice 1 (11 pts)

1. (a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a+c & b & c\\ b & a+2c & b\\ c & b & a+c\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & 0 & c\\ 0 & 2c & 0\\ c & 0 & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b & 0\\ b & 0 & b\\ 0 & b & 0\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= a\cdot \mathrm{I}+b\cdot \mathrm{A}+c\cdot \mathrm{B}.\end{aligned}$$

Barème : 1pt

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{E} &= \left\{\begin{pmatrix}a+c & b & c\\ b & a+2c & b\\ c & b & a+c\end{pmatrix}\ ;\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \mathrm{E} = \left\{a\cdot \mathrm{I}+b\cdot \mathrm{A}+c\cdot \mathrm{B}\ ;\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}\\ &= \mathrm{Vect}(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{B}).\end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{B})$ est une famille génératrice de E.

Barème : 1pt

(c) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}a\cdot \mathrm{I}+b\cdot \mathrm{A}+c\cdot \mathrm{B}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix}a+c & b & c\\ b & a+2c & b\\ c & b & a+c\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\ &\iff \begin{cases}a+c=0\\ a+2c=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}\\ &\iff a=b=c=0\end{aligned}$$

La famille $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{B})$ est donc libre. Ainsi, c'est une famille libre et génératrice de E donc c'est une base de E. On en déduit que E est de dimension finie et que sa dimension est 3.

Barème : 2pts (1pt pour la liberté et 1 pt pour base et dimension)

2. On trouve : $\mathrm{A}^2=\mathrm{B}$.

Barème : 1pt

3. (a) Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{X}\in\mathrm{F}\iff \mathrm{BX}=2\mathrm{X} &\iff \begin{cases}x+z=2x\\ 2y=2y\\ x+z=2z\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-x+z=0\\ x-z=0\end{cases}\\ &\iff x-z=0\end{aligned}$$

Barème : 2pts (1pt pour mettre sous forme de système et 1pt pour la résolution)

(b) Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{X}\in\mathrm{F}\iff \mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$: la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

Barème : 1pt

(c) La famille génératrice déterminée à la question précédente est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de F et par conséquent, $\dim(F) = 2$.

Barème : 1pt

4. La première et troisième ligne de A sont égales, donc

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 2$$

car les deux lignes restantes sont non-colinéaires.
La première et troisième ligne de B sont égales, donc

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}\right) = 2$$

car les deux lignes restantes sont non-colinéaires.
Barème : 2pts (1pt par matrice)

Exercice 2 (11,5pts)

1. Sur $]-\infty, 0[$, la fonction f est polynomiale donc continue. De même, sur $]0, +\infty[$, f s'exprime comme le produit et la composée de fonctions usuelles continues sur cet intervalle. Ainsi, f est continue sur $]0, +\infty[$.
Barème : 1,5pt (1pt pour la continuité sur $]0, +\infty[$ et 0,5pt pour la continuité sur $]-\infty, 0[$)
2. On s'intéresse à la continuité de f en 0.
   (a) On dit que f est continue en 0 si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut $f(0)$.
   Barème : 0,5pt
   (b) Pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) = x$ donc
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0).$$
   Barème : 0,5pt
   (c) Effectuons le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. On a
   $$\lim_{x\to 0^+} X = +\infty$$
   donc, par composition des limites et croissance comparée, on obtient
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0.$$
   Barème : 1pt
   (d) D'après les deux questions précédentes, comme $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ on a
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$
   Ainsi f est continue en 0.
   Barème : 1pt
3. (a) Sur $]-\infty, 1[$, g est polynomiale donc continue et sur $]1, +\infty[$, g est une somme de fonctions continues donc est continue.
   Étudions la continuité en 1 : il s'agit de montrer que $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe et vaut $g(1)$. Or
   $$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$$
   et
   $$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 1$$
   par continuité de la fonction cube et de ln en 1. Ainsi,
   $$\lim_{x\to 1} g(x) = 1 = g(1).$$
   Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.
   Barème : 1,5pt (0,5pt pour la continuité sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et 1pt pour la continuité en 1)

(b) La fonction g est dérivable en 1 si $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \mapsto \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ possède une limite quand x tend vers 1.

Barème : 0,5pt

(c) Pour tout $x < 1$ on a

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{x^3-1}{x-1}.$$

La fonction cube est dérivable en 1 et son nombre dérivée en 1 est 3 donc

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3.$$

Pour tout $x > 1$ on a

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{3\ln(x)+1-1}{x-1}.$$

Or la fonction $x \mapsto 3\ln(x)+1$ est dérivable en 1 et son nombre dérivée en 1 est 3 donc

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3.$$

Barème : 2pts (1pt par limite)

(d) Comme $\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3$, on en déduit que

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 3.$$

Ainsi g est dérivable en 1 et $g'(1) = 3$.

Barème : 1pt

(e) Sur $]-\infty, 1[$, g est polynomiale donc dérivable :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad g'(x) = 3x^2.$$

Sur $]1, +\infty[$, g est une somme de fonctions dérivables donc est dérivable :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{3}{x}.$$

On voit donc que

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = g'(1) = \lim_{x\to 1^-} g'(x).$$

Donc

$$\lim_{x\to 1} g'(x) = g'(1)$$

et g' est donc continue en 1.

Barème : 2pts (1 pt pour la dérivabilité et le calcul de la dérivée, 1 pt pour la continuité en 1 de g')

Exercice 3 (12pts)

1. (a) $X(\Omega) = \{1, 2\}$ et

$$P(X=1) = \frac{n}{n+b} \quad \text{et} \quad P(X=2) = \frac{b}{n+b}.$$

Barème : 1pt

(b) $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. Alors :

- $P(X=1, Y=1) = P_{[X=1]}(Y=1)P(X=1) = \frac{n+c}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b}$ car si $[X=1]$ est réalisé il y a $n+c$ boules noires et b blanches dans l'urne au moment du deuxième tirage;
- $P(X=1, Y=2) = P_{[X=1]}(Y=2)P(X=1) = \frac{b}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b}$ car si $[X=1]$ est réalisé il y a $n+c$ boules noires et b blanches dans l'urne au moment du deuxième tirage;
- $P(X=2, Y=1) = P_{[X=2]}(Y=1)P(X=2) = \frac{n}{n+b+c} \times \frac{b}{n+b}$ car si $[X=2]$ est réalisé il y a n boules noires et $b+c$ blanches dans l'urne au moment du deuxième tirage;
- $P(X=2, Y=2) = P_{[X=2]}(Y=2)P(X=2) = \frac{b+c}{n+b+c} \times \frac{b}{n+b}$ car si $[X=2]$ est réalisé il y a n boules noires et $b+c$ blanches dans l'urne au moment du deuxième tirage.

Barème : 2pts (0,5 par calcul justifié)

(c) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([X=1], [X=2])$, on trouve

$$P(Y=1) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) = \frac{n+c}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b} + \frac{n}{n+b+c} \times \frac{b}{n+b} = \frac{n}{n+b}$$

et

$$P(Y=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) = \frac{b}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b} + \frac{b}{n+b+c} \times \frac{b+c}{n+b} = \frac{b}{n+b}$$

Barème : 1,5pt (0,5 pour faire appel à la formule des probabilités totales, 1pt pour les calculs)

2. (a)
   - Si i ou j n'est pas dans $\{1,2\}$ alors
   $$P([X=i] \cap [Y=j]) = 0 = P([X=j] \cap [Y=i]).$$
   - Pour $i = j$, c'est évident.
   - Enfin, d'après les questions précédentes
   $$P(X=1, Y=2) = \frac{b}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b} = P(X=2, Y=1).$$

   Ainsi, les variables sont échangeables.
   On a
   $$P(X=1, Y=1) = \frac{n+c}{n+b+c} \times \frac{n}{n+b} \neq \frac{n}{n+b} \times \frac{n}{n+b} = P(X=1)P(Y=1).$$
   Ainsi, les variables ne sont pas indépendantes.
   Barème : 2,5pts (0,5 pt pour traiter les deux premiers cas et 1 pt pour le reste de l'échangeabilité, 1pt pour la non indépendance)

   (b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et de même loi et soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Alors

   $$\begin{aligned} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) &= P([X_1 = i]P([X_2 = j]) \quad \text{par indépendance} \\ &= P([X_2 = i])P([X_2 = j]) \quad \text{car } X_1 \text{ a la même loi que } X_2 \\ &= P([X_2 = i])P([X_1 = j]) \quad \text{car } X_2 \text{ a la même loi que } X_1 \\ &= P([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \quad \text{par indépendance.} \end{aligned}$$

   Ainsi, X_1 et X_2 sont échangeables.
   Barème : 2pts

   (c) On suppose que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires échangeables. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left([X_2 = j]\right)_{j\in\mathbb{N}}$ on trouve :

   $$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X_1 = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X_1 = j, X_2 = i) \quad \text{car les variables sont échangeables} \\ &= P(X_2 = i) \end{aligned}$$

   d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left([X_1 = j]\right)_{j\in\mathbb{N}}$.
   Barème : 3pts (1pt par étape justifiée)

Exercice 4 (10 pts)

1. (a) Par récurrence, montrons que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   - Initialisation : comme $u_0 = 0$ la propriété est vraie au rang 0.
   - Hérédité : supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour un certain entier naturel n et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Par hypothèse de récurrence :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
   donc, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a
   $$0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$$

puis

$$1 \leqslant u_n^2 + 1 \leqslant 2.$$

En divisant membre à membre par 2 et comte tenu que $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$, on trouve

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Barème : 1,5pt dont 1 pt pour l'hérédité

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suit est donc croissante.

Barème : 1pt

(c) D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc. Notons ℓ sa limite. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de f. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \Longleftrightarrow x = \frac{x^2+1}{2} \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

Ainsi 1 est l'unique point fixe de f et par conséquent $\ell = 1$.

Barème : 2,5pts (1pt pour la convergence, 1,5 pt pour déterminer la limite avec toutes les justifications)

2.

```
function u=exo4(n)
    u=0
    for i=1:n
        u=(u^2+1)/2
    end
endfunction
```

Barème : 2pts (1 pts pour définir une fonction, 1pt pour la boucle)

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Le calcul effectué à la question 1.b donne

$$v_k - v_{k+1} = (1-u_k) - (1-u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k = \frac{(u_k-1)^2}{2} = \frac{v_k^2}{2}.$$

Barème : 1pt

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n = u_n.$$

Barème : 1pt

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = 2\sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k+1}) = 2u_{n+1}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n^2$ converge et sa somme vaut 2.

Barème : 1pt

Exercice 5 (6pts)

La série est à termes quelconques. On va étudier l'absolue convergence.

- Par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n e^{-n} = 0.$$

Barème : 1pt Les équivalents usuels donnent alors :

$$\ln\left(1 + (-1)^n n e^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n e^{-n}.$$

Barème : 1pt

La compatibilité des équivalents avec la valeur absolue permet alors de trouver l'équivalent suivant

$$\left|\ln\left(1+(-1)^n n e^{-n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} n e^{-n}.$$

Barème : 1pt

- Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left|\ln\left(1+(-1)^n n e^{-n}\right)\right|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n}$ sont à termes positifs. D'après le point précédent et le théorème de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature.
  Barème : 1pt
- Étudions la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n}$.
  - Méthode 1. Par croissance comparée, on a

    $$\lim_{n\to+\infty} n^2 \times n e^{-n} = 0$$

    donc $n e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n}$ converge.
  - Méthode 2. On remarque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n e^{-n} = e^{-1} \sum_{n\geqslant 0} n e^{-(n-1)}$ et on reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison e^{-1}. Comme $|e^{-1}| < 1$, la série converge.

  Barème : 1pt
- Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left|\ln\left(1+(-1)^n n e^{-n}\right)\right|$ converge aussi.
- Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+(-1)^n n e^{-n}\right)$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.
  Barème : 1pt