Chapitre 2 : Correction des tests

Test 1 (*Voir la solution.*)

Que signifie « $u_n = o(0)$ » ?

Test 2 (*Voir la solution.*)

Montrer que $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Test 3 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. $u_n = 5^n$ *et* $v_n = n^3$.
2. $u_n = \ln(n)^7$ *et* $v_n = n$.
3. $u_n = n^a$ *et* $v_n = n^b$ avec $0 < a < b$.

Test 4 (*Voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 2}$ *définies par*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{e^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\ln n}.$$

Montrer que $u_n = o(v_n)$.

Test 5 (*Voir la solution.*)

En revenant à la définition de la relation de négligeabilité, démontrer les points 3 *et* 4 *de la proposition 3.*

Test 6 (*Voir la solution.*)

On considère la suite définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = e^n + n^2 + n^3$.

1. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.
2. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$.
3. *A-t-on* $u_n - e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ *?*

Test 7 (*Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par :*

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = n + \sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = n + \ln(n).$$

1. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. *A-t-on* $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n - n$ *?*

Test 8 (*Incompatibilité avec la composition, voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n+1 \quad \text{et} \quad v_n = n.$$

1. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. *A-t-on* $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ *?*

Test 9 (*Voir la solution.*)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}.$$

Test 10 (*Voir la solution.*)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

Test 11 (***Voir la solution.***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n + \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + 2\sqrt{n}.$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

D'après la définition de « o », $u_n = o(0)$ si et seulement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \epsilon_n \times 0$. Autrement dit, une suite est un petit o de 0 si et seulement si u_n est nul à partir d'un certain rang.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc : $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Toutes les suites sont non nulles à partir d'un certain rang, on peut donc utiliser la caractérisation.

1. *Par croissance comparée,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. *Donc* $v_n = o(u_n)$.
2. *Par croissance comparée,* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. *Donc* $u_n = o(v_n)$.
3. *On a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{b-a}} = 0$ *car* $b-a>0$. *Donc* $u_n = o(v_n)$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Les termes de $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont non nuls et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\ln n}} &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln n}} \times \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1}\\ &= \frac{\ln n}{n} \times \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1}.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc, par somme, quotient et produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1} = 1 \quad \textit{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Ainsi, $u_n = o(v_n)$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et λ un réel non nul. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Par conséquent, comme λ est non nul on obtient :

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \left(\frac{1}{\lambda}\epsilon_n\right)(\lambda v_n).$$

   Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\epsilon_n = \frac{1}{\lambda}\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.
   Donc $u_n = o(\lambda v_n)$.
4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Donc,

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n w_n = \epsilon_n v_n w_n.$$

Ainsi, $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n w_n)$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes non nuls. De plus, par croissance comparée :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n^2}{e^n} + \frac{n^3}{e^n}\right) = 1.$$

D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n.$$

2. *De même, la suite $(e^n + n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes non nuls et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{n^3}{e^n+n^2}\right) = 1.$$

D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2.$$

3. *En revanche, pour tout $n \geqslant 1$:*

$$\frac{u_n - e^n}{n^2} = \frac{n^2+n^3}{n^2}.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - e^n}{n^2} = +\infty$.

*Par conséquent, u_n n'est pas équivalent à $e^n - n^2$. **En particulier, on ne peut pas soustraire ou additionner membre à membre des équivalents!***

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont non nuls et pour tout $n \geqslant 1$ on a :*

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+\sqrt{n}}{n+\ln n} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{\ln n}{n}}.$$

D'après les croissances comparées et les opérations sur les limites, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

2. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$\frac{u_n - n}{v_n - n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{v_n - n} = +\infty.$$

*Ainsi, $u_n - n$ n'est pas équivalent à $v_n - n$. **On voit encore qu'on ne peut pas soustraire ou additionner membre à membre des équivalents!***

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On voit facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*

2. *En revanche :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = e.$$

Le quotient ne converge donc pas vers 1. Par conséquent, e^{u_n} et e^{v_n} ne sont pas équivalents.

Correction du test 9 (***Retour à l'énoncé.***)

Ici, le terme prépondérant est $\sqrt{n^2+1}$ *qui est de l'ordre de* n *car* $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, *on a alors :*

$$u_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1.$

Par définition de la relation d'équivalence on en déduit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Correction du test 10 (***Retour à l'énoncé.***)

Pour tout $n \geqslant 2$ *:*

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n+1}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = 1.$

Par définition de la relation d'équivalence on en déduit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

Correction du test 11 (***Retour à l'énoncé.***)

En divisant membre à membre par n *on obtient :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = 1.$$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$