TD10-Indications

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Montrer que $\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x)$ *et que* $\sqrt{x+2}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x)$. *En déduire que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x)$.

Exercice 4

Exercice 5

1. *Utiliser le DL de* $\ln(1+x)$ *en* 0 *à l'ordre 2.*
2. *Utiliser le DL de* e^x *en* 0 *à l'ordre 2 et justifier que* $\frac{\underset{x\to0}{o}(x^2)}{x} = \underset{x\to0}{o}(x)$.
3. *Utiliser le DL de* e^x *et de* $\sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre 2.*
4. - *Méthode 1 (DL usuel et manipulation sur les petits* o*) : utiliser le DL de* $\sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre 2. Développer puis justifier que*

$$-\frac{1}{8}x^3 + x \times \underset{x\to0}{o}(x^2) = \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

   - *Méthode 2 (DL usuel) : remarquer que* $(1+x)\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 6

1. *Utiliser le DL de* e^x *et de* $\ln(1+x)$ *en* 0 *à l'ordre 2 pour montrer que*

$$e^x - 1 - \ln(1+x) = x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$

   (on peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir ce DL)
   En déduire un équivalent de $e^x - 1 - \ln(1+x)$ *puis de* f *au voisinage de* 0.
2. *Pas besoin de DL !*

Exercice 7

1. *Montrer que* f *est continue en* 1 *: la limite* $\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1}$ *est une limite usuelle ! C'est la limite d'un taux d'accroissement.*
2. *Il s'agit de montrer que*

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

   Dans l'expression de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$*, effectuer le changement de variable* $u = x-1$ *pour montrer que*

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{u\to0} \frac{(u+3)u - 3(u+1)\ln(u+1)}{u(u+1)\ln(u+1)}.$$

   On note g *la fonction définie au voisinage de* 0 *par*

$$g(u) = (u+3)u - 3(u+1)\ln(u+1).$$

   En utilisant la formule de Taylor-Young ou le fait que $\ln(u+1) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(u^2)$*, montrer que* $g(u) = -\frac{1}{2}u + \underset{u\to0}{o}(u)$ *et en déduire un équivalent en* 0 *de*

$$\frac{(u+3)u - 3(u+1)\ln(u+1)}{u(u+1)\ln(u+1)}$$

Exercice 8

Soit g *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{x}.$$

En utilisant le DL d'ordre 2 en 0 *de* $\sqrt{1+u}$ *déterminer un DL d'ordre 2 en* 0 *de* $\sqrt{1+2x}$ *et de* $\sqrt{1-4x}$*. En déduire un DL d'ordre 1 de* g *en* 0*. Cela permet*

1. *de montrer que* g *possède une limite finie en* 0
2. *que la fonction* g *prolongée en* 0 *est dérivable en* 0 *(car elle possède un DL d'ordre*

1 en 0*).*

Exercice 9

Utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer un DL d'ordre 2 *de* f *au voisinage de* 0*.*