Exercice 5

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ * est continue sur $[0,1[$.

L'intégrale est donc impropre en 1. Soit $A \in [0,1[$.

$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = 2\int_0^A \frac{1}{2\sqrt{1-t}}dt = -2\left[\sqrt{1-t}\right]_0^A$$
$$= -2\sqrt{1-A} + 2$$

Donc $\lim_{A \to 1} \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = 2$

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ converge et vaut 2.

* Il y a une erreur sur le TD.

2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $]1,2]$.

L'intégrale est donc impropre en 1. Soit $A \in]1,2]$

$$\int_A^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_A^2 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx = \left[\ln(|\ln(x)|)\right]_A^2$$
$$= \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(A))$$

Donc $\lim_{A \to 1} \int_A^1 \frac{1}{x\ln(x)}dx = +\infty$.

Ainsi l'intégrale diverge

3) La fonction $t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. L'intégrale est donc convergente.

Soit $A \in]0,1]$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe C^1 sur $(A,1]$, par intégration par parties on a :

$$\int_A^1 t\ln(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2}dt$$
$$= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \frac{1-A^2}{4}$$

donc $\lim_{A \to 0^+} \int_A^1 t\ln(t)dt = -1/4$.

Ainsi $\int_0^1 t\ln(t)dt = -1/4$.

4) La fonction $t \mapsto \frac{1}{3t+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{3},0]$

L'intégrale est donc impropre en $-1/3$.

Soit $A \in]-1/3, 0]$.

$$\int_A^0 \frac{1}{3t+1}dt = \frac{1}{3}\int_A^0 \frac{3}{3t+1}dt = \frac{1}{3}\left[\ln|3t+1|\right]_A^0$$
$$= -\frac{1}{3}\ln(|3A+1|)$$

Donc $\lim_{A \to -1/3} \int_A^0 \frac{1}{3t+1}dt = +\infty$

L'intégrale diverge donc

5) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$.

L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $A \in [2,+\infty[$

$$\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}dt = \int_2^A \frac{1/t}{\ln(t)^2}dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^A = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}$$

donc $\lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}dt = \frac{1}{\ln(2)}$

Ainsi l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 6

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2(1+|x|)^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$.

L'intégrale est donc doublement impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

* Étude de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ (impropre en $+\infty$)

soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_0^A \frac{1}{2(1+x)^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}\right]_0^A$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(A+1)}$$

Donc $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ converge et vaut $1/2$.

* Étude de $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ (impropre en $-\infty$)

soit $A \in]-\infty,0]$.

$$\int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_A^0 \frac{1}{2(1-x)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\right]_A^0$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-A}$$

Ainsi $\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$

L'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ converge donc et vaut $\frac{1}{2}$

* Conclusion : $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ convergent

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = 1$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

L'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$.

* Étude de $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ (impropre en 0)

soit $A \in]0,1]$:

$$\int_A^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = -2\int_A^1 \frac{1}{-2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}dt = -2\left[e^{-\sqrt{t}}\right]_A^1 = -2(e^{-1} - e^{-\sqrt{A}})$$

donc $\lim_{A\to 0} \int_A^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2 - 2e^{-1}$. Ainsi $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ converge et vaut $2-2e^{-1}$

* Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ (impropre en $+\infty$)

Soit $A \in [1,+\infty[$. De même que ci-dessus

$$\int_1^A \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = -2\left[e^{-\sqrt{t}}\right]_1^A = -2e^{-\sqrt{A}} + 2e^{-1}$$

Donc $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2e^{-1}$

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$ converge et vaut $2e^{-1}$

* Conclusion : $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ convergent donc

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt = 2.$$

3) La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$.

L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

* Étude de $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ (impropre en $+\infty$)

Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^A -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^A$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2}$$

Ainsi $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$

Donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

* Étude de $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ (impropre en $-\infty$).

Soit $A \in]-\infty, 0]$. De même que ci-dessus, on a :

$$\int_A^0 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_A^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-A^2}$$

donc $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ converge et vaut $-\frac{1}{2}$.

* Conclusion : $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ convergent

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0$$