TD14-Fonctions de deux variables

Exercice 1

Vu en TD

Exercice 2

1. *La ligne de niveau* -1 *de la fonction* $(x,y) \mapsto x^2-4x+4+y^2-5$ *est l'ensemble :*
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4x+4+y^2-5=-1\}.$$
Or on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$$\begin{aligned} x^2-4x+4+y^2-5=-1 \iff x^2-4x+4+y^2=4 &\iff (x-2)^2+y^2=4 \\ &\iff d((x,y),(2,0))=2. \end{aligned}$$
Ainsi on obtient :
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-4x+4+y^2-5=-1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(2,0))=2\}.$$
La ligne de niveau -1 *de la fonction* $(x,y) \mapsto x^2-4x+4+y^2-5$ *est donc le cercle de centre* $(2,0)$ *et de rayon* 2.
2. *La ligne de niveau* 0 *de la fonction* $(x,y) \mapsto x^2y^2$ *est l'ensemble :*
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2=0\}.$$
Or on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:*
$$x^2y^2=0 \iff x^2=0 \text{ ou } y^2=0 \iff x=0 \text{ ou } y=0.$$
Ainsi on obtient :
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y^2=0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\}.$$
La ligne de niveau 0 *de la fonction* $(x,y) \mapsto x^2y^2$ *est donc la réunion des droites d'équation* $y=0$ *et* $x=0$.

Exercice 3

1. *Les fonctions* $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ *et* $(x,y) \mapsto x^2+1$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, la fonction* $(x,y) \mapsto x^2+1$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Par composition, la fonction* $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2)$ *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
Enfin, par somme, la fonction f_1 *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *La fonction* $(x,y) \mapsto xy+2x^2$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, la fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$. *Par composition, la fonction* $(x,y) \mapsto e^{xy+2x^2}$ *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x,y) \mapsto x^2+3y^2+1$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, elle ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Par quotient la fonction f_2 *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
3. *La fonction* $(x,y) \mapsto x^2-3x+3+2y^2$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Montrons qu'elle ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On va forcer l'apparition d'une identité remarquable pour exprimer* $x^2-3x+3+2y^2$ *comme une somme de carrés :*
$$\begin{aligned} x^2-3x+3+2y^2 &= x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3+2y^2 \\ &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+2y^2. \end{aligned}$$
Ainsi la fonction $(x,y) \mapsto x^2-3x+3+2y^2$ *est strictement positive sur* $\mathbb{R}^2$ *donc en particulier elle ne s'y annule pas.*
Par quotient, la fonction f_3 *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
4. *Les fonctions* $(x,y) \mapsto xy+y^3x$ *et* $(x,y) \mapsto x^2y^2-x^3y^5$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *La fonction exponentielle est continue sur* $\mathbb{R}$. *Par composition, les fonctions* $(x,y) \mapsto e^{xy+y^3x}$ *et* $(x,y) \mapsto e^{x^2y^2-x^3y^5}$ *sont donc continues sur* $\mathbb{R}^2$.
Par somme, la fonction $(x,y) \mapsto e^{xy+y^3x}+e^{x^2y^2-x^3y^5}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus*

elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composition, on en déduit que f_4 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (*et 5, 6*)

1. *La fonction g_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$\begin{aligned}
\partial_1(g_1)(x,y) &= 3x^2y^3 + 6xy - 2y^2 + 1;\\
\partial_2(g_1)(x,y) &= 3x^3y^2 + 3x^2 - 4yx;\\
\partial^2_{1,1}(g_1)(x,y) &= 6xy^3 + 6y;\\
\partial^2_{1,2}(g_1)(x,y) &= \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) = 9x^2y^2 + 6x - 4y;\\
\partial^2_{2,2}(g_1)(x,y) &= 6x^3y - 4x.
\end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a :*

$$g_1(0,0) = 1 \quad ; \quad \nabla(g_1)(0,0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(0,0) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_1(h,k) &= 1 + \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 1 + h + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,0)$. On a :*

$$g_1(1,0) = 2 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,0) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,0) = \begin{pmatrix}0 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_1(1+h,k) &= 2 + \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 2 + h + 3k + 6hk - 2k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,1)$. On a :*

$$g_1(1,1) = 4 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,1) = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,1) = \begin{pmatrix}12 & 11\\ 11 & 2\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g_1(1+h,1+k) &= 4 + \begin{pmatrix}8 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}12 & 11\\ 11 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 4 + 8h + 2k + 6h^2 + 11hk + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

2. *Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 + 1$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $(x,y) \mapsto x^2+1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2)$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
Enfin, par somme, la fonction f_1 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (donc en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).
De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1(f_1)(x,y) &= 2x + \frac{2x}{x^2+1};\\
\partial_2(f_1)(x,y) &= 2y;\\
\partial^2_{1,1}(f_1)(x,y) &= 2 + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2};\\
\partial^2_{1,2}(f_1)(x,y) &= \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) = 0;\\
\partial^2_{2,2}(f_1)(x,y) &= 2.
\end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a :*

$$f_1(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned}
f_1(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 2h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,0)$. On a :*

$$f_1(1,0) = 1 + \ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} f_1(1+h,k) &= 1+\ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 1+\ln(2)+3h+h^2+k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en $(1,1)$. On a :*

$$f_1(1,1) = 2+\ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} f_1(1+h,1+k) &= 2+\ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2+\ln 2+3h+2k+h^2+k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

3. *Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
   - *La fonction exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $(x,y) \mapsto e^{xy}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
   - *La fonction $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

   Par produit, la fonction g_2 est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on trouve :

$$\partial_1(g_2)(x,y) = ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2};$$

$$\partial_2(g_2)(x,y) = xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2};$$

$$\partial^2_{1,1}(g_2)(x,y) = e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right);$$

$$\partial^2_{2,2}(g_2)(x,y) = e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,2}(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2+2x^2}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \\ &= \partial^2_{2,1}(g_2)(x,y). \end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a :*

$$g_2(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_2(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= h^2+k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en $(1,0)$. On a :*

$$g_2(1,0) = \ln(2)\,; \; \nabla(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \ln(2) \end{pmatrix} \,; \; \nabla^2(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_2(1+h,k) &= \ln(2) + \begin{pmatrix} 1 & \ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= \ln(2)+h+\ln(2)k + \frac{1+\ln(2)}{2}(2hk+k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.

4. *La fonction $(x,y) \mapsto (x+y)$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y) \mapsto e^x - e^y + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, g_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.*
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} \partial_1(g_3)(x,y) &= e^x(1+x+y) - e^y + 1; \\ \partial_2(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+1) + e^x + 1; \\ \partial^2_{1,1}(g_3)(x,y) &= e^x(x+y+2); \\ \partial^2_{2,2}(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+2); \\ \partial^2_{1,2}(g_1)(x,y) &= \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) = e^x - e^y. \end{aligned}$$

- *DL en* $(0,0)$. *On a :*

$$g_3(0,0)=0 \quad ; \quad \nabla(g_3)(0,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}g_3(h,k)&=0+\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\&=h+k+h^2-k^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\end{aligned}$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en* $(1,0)$. *On a :*

$$g_3(1,0)=e \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,0)=\begin{pmatrix}2e\\e-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,0)=\begin{pmatrix}3e & e-1\\e-1 & -3\end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}g_3(1+h,k)&=e+\begin{pmatrix}2e & e-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3e & e-1\\e-1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\&\quad+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\&=e+2eh+(e-1)k+\frac{1}{2}(3eh^2+2(e-1)hk-3k^2)+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\end{aligned}$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0)=0$.

- *DL en* $(1,1)$. *On a :*

$$g_3(1,1)=2 \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,1)=\begin{pmatrix}1+2e\\1-2e\end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,1)=\begin{pmatrix}4e & 0\\0 & -4e\end{pmatrix}.$$

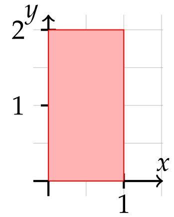
D'où, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}g_3(1+h,1+k)&=2+\begin{pmatrix}1+2e & 1-2e\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4e & 0\\0 & -4e\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\&\quad+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\&=2+(1+2e)h+(1-2e)k+2eh^2-2ek^2+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)\end{aligned}$$

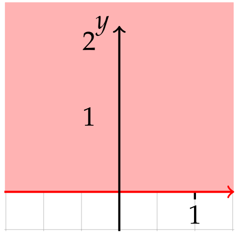
où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0)=0$.

Exercice 7

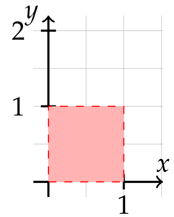
1. *L'ensemble* $[0,1]\times[0,2]$ *est fermé et borné.*



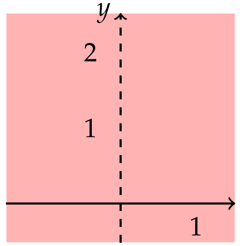
2. *L'ensemble* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ *est fermé et non bornée.*



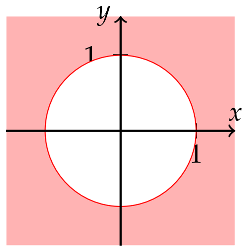
3. *L'ensemble* $]0,1[\times]0,1[$ *est ouvert et borné.*



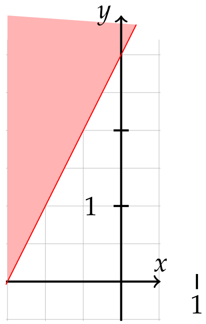
4. *L'ensemble* $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ *est ouvert et non borné.*



5. *L'ensemble* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 1\}$ *est fermé et non borné.*



6. *L'ensemble* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 2x+3\}$ *est fermé et non borné.*



Exercice 8

1. *Les fonctions* $(x,y)\mapsto xy$ *et* $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. *De plus,* $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. *Par quotient, la fonction* f *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - 2x \times xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2};\\
\partial_2 f(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - 2y \times xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2};\\
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2yx^3 - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3};\\
\partial^2_{2,1} f(x,y) &= \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2 - (y^3-yx^2) \times 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = -\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4}{(x^2+y^2)^3};\\
\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial_{2,1} f(x,y) = -\frac{y^4 - 6x^2y^2 + x^4}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{d'après le théorème de Schwarz};\\
\partial^2_{2,2} f(x,y) &= \frac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2xy^3 - 6yx^3}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

2. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction $(x,y) \mapsto x + y^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Ainsi par somme puis produit de fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
   De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(x,y) &= \ln(x) + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln(x) + 2x + y^2 + 1;\\
\partial_2 g(x,y) &= 2yx;\\
\partial^2_{1,1} g(x,y) &= \frac{1}{x} + 2;\\
\partial^2_{2,1} g(x,y) &= 2y = \partial^2_{1,2} g(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz};\\
\partial^2_{2,2} g(x,y) &= 2x.
\end{aligned}$$

3. La fonction $(x,y) \mapsto x$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction racine carrée étant de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
   La fonction $(x,y) \mapsto y$ est une fonction coordonnée donc est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$. La fonction logarithme étant de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et ne s'y annulant pas, on en déduit par composition que $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$ puis par quotient que h est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]1,+\infty[$.
   De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 h(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(y)};\\
\partial_2 h(x,y) &= -\frac{\sqrt{x}}{y\ln(y)^2};\\
\partial^2_{1,1} h(x,y) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}\ln(y)};\\
\partial^2_{2,1} h(x,y) &= -\frac{1}{2y\sqrt{x}\ln(y)^2} = \partial^2_{1,2} h(x,y) \quad \text{d'après le théorème de Schwarz};\\
\partial^2_{2,2} h(x,y) &= \sqrt{x}\frac{\ln(y)+2}{y^2\ln(y)^3}.
\end{aligned}$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
   Finalement, par produit, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2);\\
\partial_2 f(x,y) &= 2ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1 - x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2xe^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array} \right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1-x^2-y^2 &=& 0 \\ y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array} \right.\\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x &=& 0 \\ 1-x^2-y^2 &=& 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad 1-x^2-y^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0)\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des points critiques est :

$$\{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}.$$

3. *La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a ;*

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x};$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $g(x)$	*0*	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	*0*

En particulier on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(0) = 0 \leq g(x) \leq e^{-1} = g(1).$$

Or, on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x^2+y^2)$. Ainsi :

- *pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \geq g(0) = f(0,0)$$

  et f possède donc un minimum global en $(0,0)$;

- *soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=1$ alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :*

$$f(x,y) = g(x^2+y^2) \leq g(1) = g(x_0^2+y_0^2) = f(x_0,y_0)$$

  et f possède donc un maximum global en (x_0,y_0).