EXERCICE

1. (a) On va montrer que s_7 est une application linéaire et que $\mathscr{E} = \ker(s_7)$.
Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que : $s_7(A+\lambda B) = s_7(A) + \lambda s_7(B)$.
Si on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ alors $A+\lambda B = (a_{i,j}+\lambda b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ donc :

$$s_7(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{3}(a_{i,i}+\lambda b_{i,i}) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{3} b_{i,i} = s_7(A) + \lambda s_7(B).$$

Ainsi : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ s_7(A+\lambda B) = s_7(A) + \lambda s_7(B)$.
L'application s_7 est donc linéaire.
Enfin, par définition de $\mathscr{E}$ on a :

$$\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid s_7(A) = 0\} = \ker(s_7).$$

En particulier $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) D'après le théorème du rang, on a :

$$9 = \dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\ker(s_7)) + \dim(\mathrm{Im}(s_7)) = \dim(\mathscr{E}) + \dim(\mathrm{Im}(s_7)).$$

Or, $\mathrm{Im}(s_7)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ donc : $\dim(\mathrm{Im}(s_7)) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$. Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(s_7)) = 1$ ou $\dim(\mathrm{Im}(s_7)) = 0$.
Or, si $\dim(\mathrm{Im}(s_7)) = 0$ alors $\mathrm{Im}(s_7) = \{0\}$ ce qui n'est pas le cas car, par exemple, $3 = s_7(I_3) \in \mathrm{Im}(s_7)$.
Ainsi : $\dim(\mathrm{Im}(s_7)) = 1$. Finalement, on en déduit :

$$\dim(\mathscr{E}) = 9 - \dim(\mathrm{Im}(s_7)) = 8.$$

2. (a) Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$ on note $s_{k,\ell}$ l'application de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \quad s_{k,\ell}(A) = a_{k,\ell}.$$

Montrons que pour tout $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$ l'application $s_{k,\ell}$ est linéaire. Soit $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$ et soit $(A,B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si on note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ alors $A+\lambda B = (a_{i,j}+\lambda b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ donc :

$$s_{k,\ell}(A+\lambda B) = a_{k,\ell} + \lambda b_{k,\ell} = s_{k,\ell}(A) + \lambda s_{k,\ell}(B).$$

Ainsi : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ s_{k,\ell}(A+\lambda B) = s_{k,\ell}(A) + \lambda s_7(B)$.
Les applications $s_{k,\ell}$ sont donc linéaires. Comme chacune des applications s_i pour $i = 1,\dots,8$ est une combinaison linéaire des applications $s_{k,\ell}$ ($(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$) alors elles sont elles-aussi linéaires.
Montrons maintenant que f est une application linéaire : soit $(A,B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
f(A+\lambda B) &= (s_1(A+\lambda B), s_2(A+\lambda B), s_3(A+\lambda B), s_4(A+\lambda B), s_5(A+\lambda B), s_6(A+\lambda B), s_7(A+\lambda B), s_8(A+\lambda B)) \\
&= (s_1(A)+\lambda s_1(B), \dots, s_8(A)+\lambda s_8(B)) \quad \text{par linéarité des } s_i, \\
&= (s_1(A), \dots, s_8(A)) + \lambda(s_1(B), \dots, s_8(B)) \\
&= f(A) + \lambda f(B).
\end{aligned}$$

Ainsi f est linéaire.

(b) Un calcul donne :

- $f(E_{1,1}) = (1,0,0,1,0,0,1,0)$;
- $f(E_{1,2}) = (1,0,0,0,1,0,0,0)$;
- $f(E_{1,3}) = (1,0,0,0,0,1,0,1)$;
- $f(E_{2,1}) = (0,1,0,1,0,0,0,0)$;
- $f(E_{2,2}) = (0,1,0,0,1,0,1,0)$;
- $f(E_{2,3}) = (0,1,0,0,0,1,0,0)$;
- $f(E_{3,1}) = (0,0,1,1,0,0,0,1)$;
- $f(E_{3,2}) = (0,0,1,0,1,0,0,0)$;
- $f(E_{3,3}) = (0,0,1,0,0,1,1,0)$.

Par conséquent :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(\mathrm{E}_{1,1}), f(\mathrm{E}_{1,2}), f(\mathrm{E}_{1,3}), f(\mathrm{E}_{2,1}), f(\mathrm{E}_{2,2}), f(\mathrm{E}_{2,3}), f(\mathrm{E}_{3,1}), f(\mathrm{E}_{3,2}), f(\mathrm{E}_{3,3}))$$
$$= \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) L'ensemble $\mathscr{G}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui contient la matrice nulle donc est non vide.
Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{G} \times \mathscr{G}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B} \in \mathscr{G}$.
Comme A et B sont des éléments de $\mathscr{G}$ on sait que :

$$s_1(\mathrm{A}) = \cdots = s_8(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad s_1(\mathrm{B}) = \cdots = s_8(\mathrm{B}).$$

Par conséquent, en utilisant la linéarité de $s_1, \ldots, s_8$ on obtient pour tout $i = 1, \ldots, 8$:

$$s_1(\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}) = s_1(\mathrm{A}) + \lambda s_1(\mathrm{B}) = s_i(\mathrm{A}) + \lambda s_i(\mathrm{B}) = s_i(\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}).$$

Ainsi : $s_1(\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}) = \cdots = s_8(\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B})$ et $\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B}$ appartient donc à $\mathscr{G}$.
D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on en déduit donc que $\mathscr{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \in \ker(f) &\Longleftrightarrow (s_1(\mathrm{A}), \ldots, s_8(\mathrm{A})) = (0, \ldots, 0)\\ &\Longleftrightarrow s_1(\mathrm{A}) = \cdots = s_8(\mathrm{A}) = 0\\ &\Longleftrightarrow s_1(\mathrm{A}) = \cdots = s_8(\mathrm{A}) \quad \text{et} \quad s_7(\mathrm{A}) = 0\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{A} \in \mathscr{G} \cap \mathscr{E}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathscr{G} \cap \mathscr{E} = \ker(f)$.

(c) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{G}$ et notons $s = s_1(\mathrm{A}) = \cdots = s_8(\mathrm{A})$.

- Supposons qu'il existe $\mathrm{B} \in \ker(f)$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} + a\mathrm{J}.$$

Alors par linéarité de f on a :

$$(s, \ldots, s) = f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B}+a\mathrm{J}) = f(\mathrm{B}) + af(\mathrm{J}) = af(\mathrm{J}) = a(3, \ldots, 3).$$

Ainsi nécessairement $a = \frac{s}{3}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \frac{s}{3}\mathrm{J}$.

- Réciproquement on a bien $\mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{s}{3}\mathrm{J} + \frac{s}{3}\mathrm{J}$ et il ne reste qu'à vérifier que $\mathrm{A} - \frac{s}{3}\mathrm{J} \in \ker(f)$. Or :

$$f\left(\mathrm{A} - \frac{s}{3}\mathrm{J}\right) = f(\mathrm{A}) - \frac{s}{3}f(\mathrm{J}) = (s, \ldots, s) - \frac{s}{3}(3, \ldots, 3) = (0, \ldots, 0).$$

Ainsi toute matrice de $\mathscr{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\ker(f)$ et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(\mathrm{J})$.

(d) On sait que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{F})$ car F est une matrice représentative de f. On va déterminer le rang de F par pivot de Gauss :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}\right)
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}\right)
\qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_7 \leftarrow \mathrm{L}_7 - \mathrm{L}_1 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}\right)
\qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_5 \\ \mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_6 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}\right)
\qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_7 \leftarrow \mathrm{L}_7 + \mathrm{L}_2 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}\right)
\qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_7 \leftarrow \mathrm{L}_7 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_8 \leftarrow \mathrm{L}_8 - \mathrm{L}_3 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1
\end{pmatrix}\right)
\qquad \mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 - \mathrm{L}_4\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}\right)
\qquad \begin{matrix} \mathrm{L}_5 \leftrightarrow \mathrm{L}_7 \\ \mathrm{L}_6 \leftrightarrow \mathrm{L}_8 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\right)
\qquad \mathrm{L}_8 \leftrightarrow \mathrm{L}_8 + \mathrm{L}_7\\
&= 7.
\end{aligned}
$$

Ainsi le rang de f vaut 7.

(e) D'après le théorème du rang on sait que la dimension de $\ker(f)$ vérifie :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(f) = 9 - 7 = 2.$$

Pour trouver une base de $\ker(f)$ il suffit donc de trouver deux éléments non nuls de $\ker(f)$ et non-colinéaires. On cherche donc des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque diagonale et chaque colonne vaut zéro. On va en construire une pas à pas :

i. On veut que la somme des coefficients sur la première ligne soit 0 par exemple :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

ii. Maintenant on veut que la somme des coefficients de la troisième colonne soit zéro aussi donc par exemple [1] :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ * & * & -1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

iii. Pour que la somme des coefficients diagonaux soit nulle il faut alors mettre 0 en position $(2,2)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ * & 0 & -1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

iv. Pour que la somme des coefficients de la ligne 2 soit nulle il faut alors mettre 1 en position $(2,1)$, pour que la somme des coefficients de la colonne 2 soit nulle il faut alors mettre -1 en position $(3,2)$ et pour que la somme des coefficients de la deuxième diagonale soit nulle il faut alors mettre 0 en position $(3,1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(f)$.

De la même manière la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(f)$.

Ces deux matrices ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de $\ker(f)$ de cardinal égal à $\dim(\ker(f))$. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$.

1. On peut aussi tenter de prendre $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ * & * & 1 \\ * & * & -1 \end{pmatrix}$ mais cela force à mettre un 2 en position $(2,2)$ pour que la somme des coefficients diagonaux soit nulle, puis à mettre un -3 en position $(1,2)$ pour que la somme des coefficients de la deuxième ligne soit nulle et enfin à mettre un 4 en position $(1,3)$ pour que la somme des coefficients de la première colonne soit nulle. On obtient alors $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & * & -1 \end{pmatrix}$ dont la somme des coefficients sur la deuxième diagonale n'est pas nulle !

PROBLÈME

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$\mathrm{N}(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

   (a) — La fonction $x \in [0,1[\mapsto 1-x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et à valeurs dans $]0,1]$.
   — La fonction logarithme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$.
   — Donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.
   Par produit et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ la fonction N est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

   (b) La fonction g définie sur $[0,1[$ par : $\forall x \in [0,1[,\ g(x) = \ln(1-x) + x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et :

$$\forall x \in [0,1[, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leqslant 0.$$

   Ainsi g est décroissante sur $[0,1[$. On en déduit donc :

$$\forall x \in [0,1[\quad g(x) \leqslant g(0) = 0.$$

   De manière équivalente :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ln(1-x) \leqslant -x.$$

   (c) Pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}'(x) &= 2x - 2 - 2\left(-\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x}\right)\\
&= 2x - 2 - 2(-\ln(1-x) - 1)\\
&= 2(x + \ln(1-x))\\
&\leqslant 0 \quad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

   (d) On en déduit que N est décroissante sur $[0,1[$. En particulier, N admet une limite en 1 (d'après le théorème de la limite monotone) et :

$$\forall x \in [0,1[,\ \lim_{y \to 1^-} \mathrm{N}(y) \leqslant \mathrm{N}(x) \leqslant \mathrm{N}(0) = 0.$$

   Or, par composition des limites et croissance comparée, on a

$$\lim_{y \to 1^-} (1-y)\ln(1-y) = \lim_{u \to 0^+} u\ln(u) = 0.$$

   Donc : $\lim_{y \to 1^-} \mathrm{N}(y) = -1$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1[,\ -1 \leqslant \mathrm{N}(x) \leqslant 0.$$

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

   (a) $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

   (b) Soit $x \in [0,1[$. On a :

$$x + \ln(1-x) = x - x - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2).$$

   Ainsi, par la caractérisation de la relation d'équivalence, on obtient : $x + \ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
   Par compatibilité avec le quotient, on en déduit :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1.$$

   Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

(c) La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$. Ainsi f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)x^2 - 2x(x+\ln(1-x))}{x^4}\\
&= -2\frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)x - 2(x+\ln(1-x))}{x^3}\\
&= -2\frac{-x^2-2(1-x)(x+\ln(1-x))}{(1-x)x^3}\\
&= -2\frac{-x^2-2(x+\ln(1-x)-x^2-x\ln(1-x))}{(1-x)x^3}\\
&= -2\frac{x^2-2x+-2(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^3}\\
&= -2\frac{\mathrm{N}(x)}{(1-x)x^3}.
\end{aligned}$$

(d) D'après ce qui a été fait à la question 1.b), on voit plus précisément que :

$$\forall x\in[0,1[,\ \ln(1-x)\leqslant -x \quad \text{avec égalité ssi } x=0.$$

D'où l'on déduit, par 1.c) que :

$$\forall x\in[0,1[,\ \mathrm{N}'(x)\leqslant 0 \quad \text{avec égalité ssi } x=0.$$

En particulier N est strictement décroissante sur $[0,1[$ et l'encadrement de 1.d) devient :

$$\forall x\in[0,1[,\ \mathrm{N}(x)\leqslant 0 \quad \text{avec égalité ssi } x=0.$$

Avec la question précédente, on en déduit donc que

$$\forall x\in]0,1[,\ f'(x)>0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,1[$.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0,1[$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)=[1,+\infty[$.

3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0,1[$: $g_n(x)=\exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)$.

(a) On sait que $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ donc par composition des limites :

$$\lim_{x\to1} g_n(x)=0.$$

Ainsi g_n est prolongeable par continuité en 1 en posant $g_n(0)=0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$ est alors l'intégrale d'une fonction continue sur un segment donc converge bien.

(b) Soit $x\in[0,1[$. D'après 2.d, on sait que : $f(x)\geqslant 1$. Donc :

$$-\frac{nx^2}{2}f(x)\leqslant -\frac{nx^2}{2}.$$

Ainsi, par croissance de la fonction exponentielle on en déduit :

$$0\leqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)\leqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right).$$

Ainsi pour tout $x\in[0,1[$, on a : $0\leqslant g_n(x)\leqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

(c) En intégrant l'inégalité précédente sur $[0,1[$ on obtient :

$$0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)dx.$$

Or, en effectuant le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ dans l'intégrale de droite on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx &= \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\Phi(\sqrt{n}) - \Phi(0)) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right)$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme Φ est une fonction de répartition, on sait que : $\Phi(\sqrt{n}) \leqslant 1$. Ainsi, l'inégalité précédente donne :

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi\left(\sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors par croissance de la fonction logarithme on a : $\ln(n+2) \geqslant \ln(3) > 1$. Donc par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit :

$$0 < v_n < 1.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

(b) Par opération sur les limites, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. D'après la question 2.b) et par composition des limites on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $[0, v_n] \subset [0, 1]$ et que g_n est positive sur $[0, 1]$ alors :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 g_n(x) dx \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x) dx.$$

Comme f est croissance sur $[0, v_n]$ on a, pour tout $x \in [0, v_n]$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \geqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(v_n)\right) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right).$$

On en déduit donc :

$$\int_0^{v_n} g_n(x) dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx.$$

Enfin, w_n étant positif (cf 2.d)), on peut effectuer le changement de variable $y = \sqrt{nw_n}x$ dans l'intégrale de droite et on obtient :

$$\int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx = \int_0^{\sqrt{nw_n}v_n} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{nw_n}}.$$

D'où les inégalités suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que :

$$\int_0^{\sqrt{nw_n}v_n} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{nw_n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} (\Phi(\sqrt{nw_n}v_n) - \Phi(0)) = \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \left(\Phi(\sqrt{nw_n}v_n) - \frac{1}{2}\right),$$

les inégalités des questions 3.d) et 4.c donnent :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant \mathrm{I}_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant 1.$$

(e) On sait que : $\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$. Donc : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Ainsi (voir exercice 5 du TD2) :

$$v_n\sqrt{nw_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)}.$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n\sqrt{nw_n} = \lim_{n\to+\infty} = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} = +\infty$.
Comme Φ est une fonction de répartition alors : $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1$. Par composition des limites on en déduit : $\lim_{n\to+\infty}\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) = 1$.
Enfin on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Par encadrement, on obtient donc : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} = 1$ c'est-à-dire : $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{J}_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $\mathrm{J}_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

(a) Soit $x > 0$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_1(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt\\ &= [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt\\ &= -xe^{-x} + 1 - e^{-x}\\ &= 1-(x+1)e^{-x}.\end{aligned}$$

(b) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x u(t)v'(t)dt &= \frac{1}{n!}\left([u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{n!}\left([-t^ne^{-t}]_0^x - \int_0^x -nt^{n-1}e^{-t}dt\right)\\ &= -\frac{x^ne^{-x}}{n!} + \mathrm{J}_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathrm{J}_n(x) = \mathrm{J}_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^ne^{-x}$.

(c) En itérant le résultat de la question précédente, on déduit que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{J}_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. D'après la question précédente on sait que :

$$\int_0^x t^ne^{-t}dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right).$$

Par croissance comparée, on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^k = 0.$$

Donc par somme, on déduit :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^ne^{-t}dt = n!.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^ne^{-t}dt$ est convergente et vaut $n!$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de I_n et de f on a :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{\frac{-nx^2}{2} f(x)} dx = \int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))} dx.$$

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \int_n^0 e^{n-t+n\ln\left(\frac{t}{n}\right)} \frac{dt}{-n} \\ &= \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n e^{-t} t^n dt \\ &= \frac{e^n n!}{n^{n+1}} \mathrm{J}_n(n).\end{aligned}$$

6. (a) Par stabilité par somme de lois de Poisson indépendantes, la variable aléatoire S_n suit la loi de Poisson de paramètre n.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \\ &= 1 - \mathrm{J}_n(n) \quad \text{d'après 5.c).}\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \geqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = k) &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \\ &= \mathrm{J}_{n-1}(n) \quad \text{d'après 5.c).}\end{aligned}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = e^{-x}x^{n-1}(n-x).$$

Ainsi :

x	0		n		$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h_n		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 6.b) on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([\mathrm{S}_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]) &= 1 - \mathrm{J}_{n+1}(n+1) - (1 - \mathrm{J}_n(n)) \\ &= \mathrm{J}_n(n) - \mathrm{J}_{n+1}(n+1).\end{aligned}$$

Or d'après 5.b), on sait que $\mathrm{J}_{n+1}(n) = \mathrm{J}_n(n) - \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([\mathrm{S}_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]) &= \mathrm{J}_n(n) - \mathrm{J}_{n+1}(n+1) \\ &= \mathrm{J}_{n+1}(n) + \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n} - \mathrm{J}_{n+1}(n+1) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n h_{n+1}(t) dt + \frac{h_{n+1}(n)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{n+1} h_{n+1}(t) dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt + \frac{h_{n+1}(n)}{(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt - h_{n+1}(n) \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(n) dt \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt.\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que h_{n+1} est croissante sur $[n, n+1]$ donc :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale et la question précédente, on en déduit :

$$\mathrm{P}([\mathrm{S}_{n+1} \leqslant n+1]) - \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]) \leqslant 0.$$

Ainsi la suite $(\mathrm{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De même qu'en 7.b) on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\mathrm{S}_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \geqslant n]) &= \mathrm{J}_n(n+1) - \mathrm{J}_{n-1}(n) \\
&= \mathrm{J}_n(n+1) - \frac{n^n}{n!}e^{-n} - \mathrm{J}_n(n) \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{n+1} h_n(t)dt - \frac{h_n(n)}{n!} - \frac{1}{n!}\int_0^n h_n(t)dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} h_n(t)dt - \frac{h_n(n)}{n!} \\
&= \frac{1}{n!}\int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n))dt.
\end{aligned}$$

On sait que h_n est décroissante sur $[n, n+1]$ donc :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad h_n(t) - h_n(n) \leqslant 0.$$

Par positivité de l'intégrale et la question précédente, on en déduit :

$$\mathrm{P}([\mathrm{S}_{n+1} \geqslant n+1]) - \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \geqslant n]) \leqslant 0.$$

Ainsi la suite $(\mathrm{P}([\mathrm{S}_n \geqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(e) Les deux suites $(\mathrm{P}([\mathrm{S}_n \leqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{P}([\mathrm{S}_n \geqslant n]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et minorées par 0 donc elles convergent d'après le théorème de la limite monotone.

8. (a) Les variables X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont indépendantes de même loi et possèdent une espérance et une variance non nulle. D'après le théorème central limite on sait donc que la suite $\left(\frac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.
En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n)$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) = \frac{1}{2}.$$

(b) D'après la question 4.e) on a : $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
D'après la question 5.e) on a : $\mathrm{I}_n = \frac{e^n n!}{n^{n+1}}\mathrm{J}_n(n)$.
D'après la question 6.b) on a : $\mathrm{J}_n(n) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n)$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n(n) = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$\mathrm{J}_n(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Par compatibilité avec le quotient et le produit on obtient :

$$n! = \frac{\mathrm{I}_n n^{n+1}}{e^n \mathrm{J}_n(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, n^{n+1}}{\frac{1}{2}e^n} = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Cet équivalent est appelé *formule de Stirling*.

(c) Comme S_n suit la loi de Poisson de paramètre n et d'après la question précédente, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n \geqslant n) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n-1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) + \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = n).$$

Par somme on trouve donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}([\mathrm{S}_n \geqslant n]) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n \leqslant n) + \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{S}_n = n) = 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

9.

```
s=0
m=0
while s<1/2
    m=m+1
    s=s+loi(m)
end
disp(m)
```

10. (a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $|\mathrm{X}-r|$ possède une espérance ssi la série $\sum_{k\geqslant 0} |k-r|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge absolument. Comme elle est à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle converge.
Or,

$$\forall k \geqslant 0, \quad 0 \leqslant |k-r|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \leqslant |k|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + r\mathrm{P}(\mathrm{X}=k).$$

Comme les séries $\sum_{k\geqslant 0} |k|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ et $\sum_{k\geqslant 0} r\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ convergent (la première parce que X possède une espérance) alors leur somme converge et par comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum_{k\geqslant 0} |k-r|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge.
Ainsi , $|\mathrm{X}-r|$ possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|) = \sum_{k=0}^{+\infty} |k-r|\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) &= \sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + \sum_{k=r}^{+\infty} (k-r)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + \sum_{k=r}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) - r\sum_{k=r}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - \sum_{k=0}^{r-1} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) - r + r\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= 2\sum_{k=0}^{r-1} (r-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - r.
\end{aligned}$$

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{F}(k) = \sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k) = \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k} \mathrm{P}(\mathrm{X}=i) = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=i}^{r-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}=i) = \sum_{i=0}^{r-1} (r-i)\mathrm{P}(\mathrm{X}=i).$$

D'après la question précédente on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|) = 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - r = 2\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{F}(k) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - r \qquad &= 2\sum_{k=0}^{r-1} \mathrm{F}(k) + \mathrm{E}(\mathrm{X}) - \sum_{k=0}^{r-1} 1 \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{X}) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(\mathrm{F}(k) - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

(c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On a, d'après la question précédente :

$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|) - \mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|) = 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(\mathrm{F}(k) - \frac{1}{2}\right) - 2\sum_{k=0}^{m-1}\left(\mathrm{F}(k) - \frac{1}{2}\right).$$

- Si $r > m$ alors par croissance de F on a :

$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|) - \mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|) = 2\sum_{k=m}^{r-1}\left(\mathrm{F}(k) - \frac{1}{2}\right) \geqslant 2\sum_{k=m}^{r-1}\left(\mathrm{F}(m) - \frac{1}{2}\right) \geqslant 0.$$

- Si $r = m$ alors $\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|)-\mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|)=0$.
- Si $r < m$ alors :
$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|)-\mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|)=-2\sum_{k=r}^{m-1}\left(\mathrm{F}(k)-\frac{1}{2}\right).$$
Or, pour tout $k\in[\![0,m-1]\!]$ on a :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant k)\leqslant \mathrm{P}(\mathrm{X}<m)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant m)\leqslant\frac{1}{2}.$$
Donc :
$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|)-\mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|)=-2\sum_{k=r}^{m-1}\left(\mathrm{F}(k)-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0.$$

Dans tous les cas $\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|)-\mathrm{E}(|\mathrm{X}-m|)$ est positif.
Dans ce une médiane est donc un entier rendant minimal les valeurs de la suite $(\mathrm{E}(|\mathrm{X}-r|)_{r\in\mathbb{N}^*}$.

(d) D'après la question 6.a) on sait que S_n et X ont même loi. Or d'après les questions 7 et 8, on sait que les suites $(\mathrm{P}(\mathrm{S}_k\geqslant k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{P}(\mathrm{S}_k\leqslant k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et convergent vers $\frac{1}{2}$. En particulier :
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(\mathrm{S}_k\leqslant k)\geqslant\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{P}(\mathrm{S}_k\geqslant k)\geqslant\frac{1}{2}.$$
En particulier :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant n)=\mathrm{P}(\mathrm{S}_n\leqslant n)\geqslant\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant n)=\mathrm{P}(\mathrm{S}_n\geqslant n)\geqslant\frac{1}{2}.$$
Ainsi n est une médiane de X.
D'après 10.a) on a :
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|\mathrm{X}-n|)=\mathrm{E}(\mathrm{X})-n+2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)&=2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{-n}\frac{n^k}{k!}\\&=2e^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n^{k+1}}{k!}-\frac{n^k}{(k-1)!}\right)+n\right)\\&=2e^{-n}\frac{n^{n+1}}{n!}\quad\text{par télescopage}\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\quad\text{avec 8.b.}\end{aligned}$$

11. (a) Soit $x\geqslant 0$. On sait que F est croissante et admet 1 comme limite en $+\infty$ donc : $\mathrm{F}(x)\leqslant 1$. Ainsi :
$$x(1-\mathrm{F}(x))\geqslant 0.$$
D'autre part :
$$x(1-\mathrm{F}(x))=x\mathrm{P}(\mathrm{X}>x)=\int_x^{+\infty}xf(t)dt\leqslant\int_x^{+\infty}tf(t)dt.$$
Ainsi :
$$0\leqslant x(1-\mathrm{F}(x))\leqslant\int_x^{+\infty}tf(t)\,dt.$$
On sait que X possède une espérance donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt$ converge et vaut E(X). En particulier, par la relation de Chasles on a :
$$\int_x^{+\infty}tf(t)\,dt=\mathrm{E}(\mathrm{X})-\int_{-\infty}^{x}tf(t)dt.$$
Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}tf(t)\,dt=\mathrm{E}(\mathrm{X})-\mathrm{E}(\mathrm{X})=0.$
Avec l'inégalité précédente, on en déduit par encadrement que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x(1-\mathrm{F}(x))=0$.
Comme X possède une espérance, $-\mathrm{X}$ aussi. Le raisonnement ci-dessus appliqué à $-\mathrm{X}$ donne alors : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x(1-\mathrm{F}_{-\mathrm{X}}(x))=0$. Or, comme X est à densité :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F}_{-\mathrm{X}}(x)=\mathrm{P}(-\mathrm{X}\leqslant x)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant -x)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}<-x)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant -x)=1-\mathrm{F}(-x).$$
Ainsi on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\mathrm{F}(-x)=0$ ou encore $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}-x\mathrm{F}(x)=0$.
Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{F}(x)=0$.

(b) Soit x un réel et soient $A > 0$ et $B < 0$ avec $B < x < A$. Comme f est continue, F est de classe C^1. Par intégration par parties on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_B^A |t-x| f(t)\,dt &= \int_B^x (x-t) f(t)\,dt + \int_x^A (t-x) f(t)\,dt \\
&= [(x-t)F(t)]_B^x + \int_B^x F(t)\,dt + [(t-x)F(t)]_x^A - \int_x^A F(t)\,dt \\
&= (B-x)F(B) + (A-x)F(A) + \int_B^x F(t)\,dt - \int_x^A F(t)\,dt \\
&= (B-x)F(B) + \int_B^x F(t)\,dt + A(F(A)-1) + A - x - \int_x^A F(t)\,dt \\
&= (B-x)F(B) + \int_B^x F(t)\,dt + A(F(A)-1) - \int_x^A (F(t)-1)\,dt \\
&= (B-x)F(B) + \int_B^x F(t)\,dt + A(F(A)-1) + \int_x^A (1-F(t))\,dt.
\end{aligned}$$

Or $\lim_{B\to-\infty} F(B) = \lim_{B\to-\infty} BF(B) = 0$ d'après la question précédente et de même $\lim_{A\to+\infty} A(F(A)-1) = 0$. Ainsi, en faisant tendre A vers $+\infty$ et B vers $-\infty$ on obtient :

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t)\,dt + \int_x^{+\infty} (1-F(t))\,dt.$$

(c) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
M(b) - M(a) &= \int_{-\infty}^b F(t)\,dt + \int_b^{+\infty} (1-F(t))\,dt - \int_{-\infty}^a F(t)\,dt - \int_a^{+\infty} (1-F(t))\,dt \\
&= \int_a^b F(t)\,dt - \int_a^b (1-F(t))\,dt \\
&= \int_a^b (2F(t)-1)\,dt.
\end{aligned}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$ alors :

$$M(x) - M(m) = \int_m^x (2F(t)-1)\,dt.$$

Or, par croissance de F et définition d'une médiane :

$$\forall t \geqslant m, \quad F(t) \geqslant F(m) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$M(x) - M(m) = \int_m^x (2F(t)-1)\,dt \geqslant 0.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) \geqslant M(m)$. Donc m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.

• FIN •