

Sujet 1

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x+2y+3z+4t=0\}$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a:

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+2z+3t=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 3t - z - t = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (z + 2t, -2z - 3t, z, t)$$

$$= z(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1)$$

Ainsi $F = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$

2) $B = (1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)$ est génératrice d'après 1.

Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une famille libre.

3) Ainsi B est une base de F . Comme $\text{Card } B = 2$,

F est de dimension finie et $\dim F = 2$.

Sujet 2

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0 \text{ et } x+3y-z+3t=0\}$

1) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a:

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+3y-z+3t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=0 \\ 4y-2z+2t=0 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z - t \\ 2y = z - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z-t}{2} - z - t = \frac{-z-3t}{2} \\ y = \frac{z-t}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(\frac{-z-3t}{2}, \frac{z-t}{2}, z, t \right)$$

$$= z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

Ainsi $F = \text{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)\right)$

La famille $B = \left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)\right)$ est donc génératrice de F .

2) B est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre.

3) Ainsi d'après 1, 2, B est une base de F . Comme $\text{Card } B = 2$, F est de dimension finie et $\dim F = 2$.