Lycée Jean-Jacques Rousseau- Sarcelles 2021-2022

ECE2 – Mathématiques

DM2

- **A rendre le jeudi 14 octobre au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

Exercice 1

Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

On note E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{E}=\left\{\begin{pmatrix}b&a&b\\a&b&b\\b&b&a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de E.
   (b) Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.
   (c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix}b&a&b\\a&b&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ dans la base trouvée à la question précédente.
2. (a) Calculer A^2.
   (b) En déduire que A est une matrice inversible et donner A^{-1} en fonction de A.
3. On considère le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{F}=\left\{\mathrm{X}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid \mathrm{BX}=2\mathrm{X}\right\}.$$

   (a) Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{X}\in\mathrm{F}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&-&2z&=&0\\x&&&-&z&=&0\\&-&y&+&z&=&0\end{array}\right..$$

   (b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de F.
   (c) Trouver une base de F et sa dimension.

Exercice 2

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$u_0=0 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0\leqslant u_n\leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=1-u_n$.
   (a) Pour tout entier naturel k , exprimer v_k-v_{k+1} en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k-v_{k+1})$.
   (c) Donner la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que sa somme (si elle converge).

Exercice 3

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$

- il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$
- il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $\mathrm{X}_0 = 0$.
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $\mathrm{T} = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $\mathrm{T} = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(\mathrm{T} = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   (b) Donner la loi de X_1.

   (c) En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{T} = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $\left((\mathrm{X}_{n-1} = k)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 0) = 1 - p$.

3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1)$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k\left(1-p\right)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = 1$.