Exercice 1 :

1) et 2) : vue en TD

3) Soit $M=(M_{i,j})_{i,j\in[\![1,4]\!]}$ une matrice de $M_4(\mathbb{R})$, $N=(N_{i,j})_{i,j\in[\![1,4]\!]}$ une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

Calculons $g(M+\lambda N)$. On a

$$g(M+\lambda N)=g\left(\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44}\end{pmatrix}\right)$$

$$=g\left(\begin{pmatrix} M_{11}+\lambda N_{11} & M_{12}+\lambda N_{12} & M_{13}+\lambda N_{13} & M_{14}+\lambda N_{14} \\ M_{21}+\lambda N_{21} & M_{22}+\lambda N_{22} & M_{23}+\lambda N_{23} & M_{24}+\lambda N_{24} \\ M_{31}+\lambda N_{31} & M_{32}+\lambda N_{32} & M_{33}+\lambda N_{33} & M_{34}+\lambda N_{34} \\ M_{41}+\lambda N_{41} & M_{42}+\lambda N_{32} & M_{43}+\lambda N_{43} & M_{44}+\lambda N_{44}\end{pmatrix}\right)$$

$$=M_{11}+\lambda N_{11}+M_{22}+\lambda N_{22}+M_{33}+\lambda N_{33}+M_{44}+\lambda N_{44}$$
$$=M_{11}+M_{22}+M_{33}+M_{44}+\lambda(N_{11}+N_{22}+N_{33}+N_{44})$$
$$=g(M)+\lambda g(N)$$

Ainsi pour tout $(M,N)\in(M_4(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$g(M+\lambda N)=g(M)+\lambda g(N)$$

Donc g est linéaire.

Exercice 2

1) Montrons que f est linéaire : soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ et montrons que $f(P+\lambda Q)=f(P)+\lambda f(Q)$.

On a :

$$f(P+\lambda Q)=X^2(P+\lambda Q)'(X)-2X(P+\lambda Q)(X)$$
$$=X^2(P'(X)+\lambda Q'(X))-2X(P(X)+\lambda Q(X))$$
$$=X^2P'(X)-2XP(X)+\lambda X^2Q'(X)-2X\lambda Q(X)$$
$$=f(P)+\lambda(X^2Q'(X)-2XQ(X))=f(P)+\lambda f(Q)$$

Ainsi pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}_2[X])^2$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(P+\lambda Q)=f(P)+\lambda f(Q)$$

Donc f est linéaire

Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$: il faut montrer que f est à valeur dans $\mathbb{R}_2[X]$ c'est-à-dire que pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $f(P)\in\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P=a_0+a_1X+a_2X^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$f(P)=X^2(a_1+2a_2X)-2X(a_0+a_1X+a_2X^2)$$
$$=(2a_2-2a_2)X^3+(a_1-2a_1)X^2-2a_0X$$
$$=-a_1X^2-2a_0X\in\mathbb{R}_2[X]$$

Ainsi, pour tout $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $f(P)\in\mathbb{R}_2[X]$.

Donc $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

2) Montrons que Ψ (se lit "psi") est linéaire

soit $(X,Y)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ et montrons que $\Psi(X+\lambda Y)=\Psi(X)+\lambda\Psi(Y)$.

On a

$$\Psi(X+\lambda Y)=A(X+\lambda Y)-(X+\lambda Y)B$$
$$=AX+\lambda AY-XB-\lambda YB$$
$$=AX-XB+\lambda(AY-YB)=\Psi(X)+\lambda\Psi(Y)$$

Ainsi, pour tout $(X,Y)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Psi(X+\lambda Y)=\Psi(X)+\lambda\Psi(Y).$$

Donc Ψ est linéaire

Montrons que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

Il s'agit de montrer que pour tout $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Psi(X)$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Or, comme A et B sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $AX\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $XB\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\Psi(X)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi $\Psi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice 3

1) Montrons que F est le noyau de l'application linéaire

$$f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$(x,y,z)\mapsto 3x-2y+4z.$$

ⓐ Mq f est linéaire : soit $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

On a $f((x,y,z)+\lambda(x',y',z'))=f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'))$

$$=3(x+\lambda x')-2(y+\lambda y')+4(z+\lambda z')$$
$$=3x-2y+4z+\lambda(3x'-2y'+4z')$$
$$=f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z'))$$

Ainsi, pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z'))=f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z'))$$

Donc f est linéaire.

ⓑ Mq $F=\operatorname{Ker}f$: soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z)\in\operatorname{Ker}(f)\iff f((x,y,z))=0\iff 3x-2y+4z=0$$
$$\iff (x,y,z)\in F$$

Donc $F=\operatorname{Ker}(f)$

2) Montrons que G est le noyau de l'application linéaire

$$g: \mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,t)\longmapsto(x-y,\ 2x+z-t)$$

ⓐ Mq g est linéaire : soit (x,y,z,t) et (x',y',z',t') deux éléments de $\mathbb{R}^4$ et λ un réel.

Alors :

$g((x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t')) = (x+\lambda x'-(y+\lambda y'), 2(x+\lambda x')+(z+\lambda z')-(t+\lambda t'))$

$= (x-y, 2x+z-t)+(\lambda x'-\lambda y', 2\lambda x'+\lambda z'-\lambda t')$

$= g((x,y,z,t)) + \lambda g((x',y',z',t'))$

Ainsi pour tout (x,y,z,t) et (x',y',z',t') dans $\mathbb{R}^4$ et tout réel λ

$g((x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t')) = g((x,y,z,t)) + \lambda g((x',y',z',t'))$.

Donc g est linéaire.

ⓑ Mq $G = \mathrm{Ker}(g)$: soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$

$(x,y,z,t)\in \mathrm{Ker}(g) \iff g((x,y,z,t)) = (0,0)$

$\iff (x-y, 2x+z-t) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x-y = 0 \\ 2x+z-t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=t \end{cases} \iff (x,y,z,t)\in G$

Ainsi $G = \mathrm{Ker}(g)$

3) Montrons que H est le noyau de l'application linéaire

$h : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$P \longmapsto P(1) - P'(1)$

ⓐ Montrons que h est linéaire : soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$h(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(1) + (P+\lambda Q)'(1)$

$= P(1) + \lambda Q(1) + P'(1) + \lambda Q'(1)$

d'où $h(P+\lambda Q) = P(1)+P'(1) + \lambda(Q(1)+Q'(1))$

$= h(P) + \lambda h(Q)$

Ainsi pour tout $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$

$h(P+\lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q)$

Donc h est linéaire.

ⓑ Montrons que $H = \mathrm{Ker}(h)$: soit $P\in\mathbb{R}[X]$

$P\in\mathrm{Ker}\,h \iff h(P) = 0 \iff P(1) - P'(1) = 0$

$\iff P(1) = P'(1)$

$\iff P\in H$

Ainsi $H = \mathrm{ker}(h)$.

Exercice 4

1) L'application f de l'exo 1 : vu en TD

L'application h de l'exo 1 : en TD on a vu que (X) est une base de $\mathrm{Ker}\,h$.

Déterminons $\mathrm{Im}(h)$: d'après le cours, comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(h(1), h(X), h(X^2))$

Or $h(1) = X-(X+1) = -1$

$h(X) = 0$ car $X\in\mathrm{Ker}\,h$

$h(X^2) = X(X+1)^2 - (X+1)X^2 = (X+1)X(X+1-X) = X(X+$

donc $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X(X+1)) = \mathrm{Vect}(1, X(X+1))$

Ainsi $(1, X(X+1))$ est une famille génératrice de $Im(h)$

Comme elle est formée de polynômes non nuls de degrés distincts, elle est libre. Ainsi $(1, X(X+1))$ est une base de $Im(h)$

2) $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \mapsto X^2 P'(X) - 2XP(X)$

Noyau : soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in Ker(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow X^2(a_1 + 2a_2 X) - 2X(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = 0$

$\Leftrightarrow -a_1 X^2 - 2a_0 X = 0$

(voir exo 2 pour le détail du calcul)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 = 0 \\ -2a_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

Ainsi $Ker(f) = \{ a_2 X^2 , a_2 \in \mathbb{R} \}$

$= Vect(X^2)$

Comme X^2 est non nul, c'est une base de $Ker(f)$.

Im(f) : comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$,

$Im(f) = Vect(f(1), f(X), f(X^2))$

Or $f(X^2) = 0$ car $X^2 \in Ker(f)$

$f(X) = X^2 - 2X^2 = -X^2$ et $f(1) = -2X$

donc $Im(f) = Vect(-2X, 0, -X^2) = Vect(X, X^2)$

(X, X^2) est une famille génératrice de $Im(f)$ formée de polynômes non nuls de degrés distincts, elle est donc libre.

Ainsi (X, X^2) est une base de $Im(f)$.

3) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$P \mapsto (P(0), P(1), P(2))$

Noyau : soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P \in Ker(f) \Leftrightarrow (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow$ 0, 1 et 2 sont racines de P

$\Leftrightarrow P = 0$ (car un polynôme de degré ≤ 2 avec 3 racines distinctes est le polynôme nul)

Ainsi $Ker(f) = \{0\}$

Im(f) : méthode 1 (sans thm du rang)

~~[illegible]~~

$Im(f) = \{ (P(0), P(1), P(2)) , P \in \mathbb{R}_2[X] \}$

$= \{ (a_0, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1 + 4a_2) ; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3 \}$

en écrivant $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.

Donc $Im(f) = \{ a_0(1,1,1) + a_1(0,1,2) + a_2(0,1,4) ; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$= Vect((1,1,1), (0,1,2), (0,1,4))$

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\quad\quad C_1 \quad\quad\quad C_2 \quad\quad\quad C_3 \\ Im(f) = Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4)) \end{array}$$

$$= Vect((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)) \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$$

$$= Vect((1,1,1),(0,1,0),(0,0,2)) \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$= Vect((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1))$$

$$= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$$

$$= \mathbb{R}^3$$

Méthode 2 (avec thm du rang)

D'après le théorème du rang on a

$$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim(Ker(f)) + \dim(Im f)$$

càd

$$3 = 0 + \dim(Im(f))$$

Donc $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on a donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 5

1) Soient $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= 3(x+\lambda x') - (y+\lambda y') + z + \lambda z' \\ &= 3x - y + z + \lambda(3x' - y' + z') \\ &= f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z'))$$

Ainsi f est linéaire

2) $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ car $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est linéaire.

Donc $\dim(Im f) \leq \dim \mathbb{R} = 1$. Donc $\dim(Im f)$ est soit égale à 0 soit égale à 1 et alors $Im f = \mathbb{R}$.

Si $\dim(Im f) = 0$ alors $Im f = \{0\}$ c'est-à-dire que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = 0$. Ceci n'est pas le cas : $f((1,0,0)) = 3$ par exemple !

Donc nécessairement $\dim(Im f) = 1$. Ainsi $Im f = \mathbb{R}$.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} 3 = \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) \\ &= \dim(Ker(f)) + 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(Ker(f)) = 2$.

3) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f) &\iff f((x,y,z)) = 0 \\ &\iff 3x - y + z = 0 \\ &\iff y = 3x + z. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, 3x+z, z) \ ; \ x, z \in \mathbb{R}\}$

$$= \{x(1,3,0) + z(0,1,1) \ ; \ x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathrm{Vect}((1,3,0),(0,1,1))$$

Ainsi $((1,3,0),(0,1,1))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ de cardinal $2 = \dim(\mathrm{Ker} f)$ donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$

<u>Exercice 6</u>

1) Soient $\left(\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}\right) = (a+\lambda a' + e + \lambda e' + i + \lambda i', c + \lambda c' + e + \lambda e' + g + \lambda g', a + \lambda a' + c + \lambda c' + g + \lambda g' + i + \lambda i')$$

$$= (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i) + \lambda(a'+e'+i', c'+e'+g', a'+c'+g'+i')$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi pour tout $(A, A') \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(A + \lambda A') = f(A) + \lambda f(A')$$

Donc f est linéaire

2) $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9 > \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

donc f ne peut pas être injective.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(A) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ a+c+g+i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ c-e+g = 0 \end{cases} \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ -2e = 0 \end{cases} \ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} a+i = 0 \\ c+g = 0 \\ e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -i \\ c = -g \\ e = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} -i & b & -g \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \ ; \ b, d, f, g, h, i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{ i\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ b, d, f, g, h, i \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_6}\Bigg)$$

On va montrer que $(A_1, \dots, A_6)$ est libre :

soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ tq $\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_6 A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_6 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = 0$

Ainsi $(A_1, \dots, A_6)$ est une famille libre et génératrice de Ker f. Donc c'est une base de Ker(f).

Ainsi $\dim(\text{Ker} f) = 6$

4) D'après le théorème du rang :

$$9 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)$$
$$= 6 + \dim(\text{Im} f)$$

donc $\dim(\text{Im} f) = 3$.

Ainsi Im f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$.

En particulier f est surjective.

Exercice 7

1) Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que

$f(x) = y$ par définition de Im(f).

Montrons que $y \in \text{Ker}(f)$ càd que $f(y) = 0_E$:

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E \quad \text{car } f^2 = 0.$$

Ainsi $y \in \text{Ker}(f)$.

Donc $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

2) Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker} f$ alors

$$\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)) \qquad (*)$$

De plus, d'après le théorème du rang on a :

$$3 = \dim E = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$
$$\leqslant \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) \text{ par } (*)$$

Donc $3 \leqslant 2\dim(\text{Ker}(f))$

Ainsi $\frac{3}{2} \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$ et comme $\dim(\text{Ker}(f))$ est un entier on a $\dim(\text{Ker}(f)) \geqslant 2$.

De plus, Ker f est une sous-espace vectoriel de E. Donc $\dim(\text{Ker}(f)) \leqslant 3$ avec égalité ssi $E = \text{Ker} f$.

Finalement, il n'y a que deux possibilités :

- soit $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$
- soit $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ et dans ce cas $\text{Ker}(f) = E$

Dans le dernier cas on aurait $E = \text{Ker}(f)$ donc

$f(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$. Ceci n'est pas possible puisque l'énoncé nous dit que f n'est pas l'application nulle.

Nécessairement, $\dim(\text{Ker} f) = 2$ puis le théorème du rang donne $\text{rg}(f) = 1$