TD1-Études de suites

1 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1

1. *Commencer par étudier les variations de f sur $[0,1]$ et en déduire que*

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[\qquad (*)$$

puis faire une récurrence.

2.
3. *Pour déterminer la limite étudier les points fixes de f.*

Exercice 2

2. *Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Utiliser le signe de g ou procéder par récurrence.*
4. *Quelles sont les limites finies possibles ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle réellement converger vers l'une d'elle ?*

Exercice 4 (*Ecricome 2013*)

2. *Utiliser le théorème de la bijection.*
   Regarder le signe de $\varphi(1)$ et $\varphi(e)$.
3. *Par récurrence, en utilisant la croissance de φ.*
4. *Étudier les points fixes de $x \mapsto \varphi(x) + x$ sur $]0, +\infty[$.*
5.
6. *Comme pour l'exercice 2.*

Exercice 5 (*EML 2018*)

3. *Calculer $f(2)$ et $f(4)$ et comparer avec 2.*
4. *Pour l'hérédité, utiliser la croissance de $\ln$ après avoir remarqué que $b - \ln(b) = 2$.*
5. *Idem que dans l'exercice 1.*
6. (a) *Inégalité des accroissements finis.*

Exercice 7

2. *Utiliser le théorème de la bijection ou le corollaire du TVI.*
3.
4.
5. *Idem que dans l'exercice précédent.*

Exercice 8 (*EML 2014*)

5. *Méthode 1 : intégrer l'inégalité précédente.*
   Méthode 2 : étudier la fonction $x \mapsto \varphi(x) - ex$.
6. *Récurrence.*
9. *Utiliser la question 6 pour montrer que la suite des sommes partielles est croissante et majorée.*

2 Suites définies implicitement

Exercice 9

1. *et 2. Utiliser le théorème de la bijection.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Que valent $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$? En utilisant la croissance de f et en raisonnant par l'absurde ou en utilisant la croissance de f^{-1}, en déduire que $x_n < x_{n+1}$.*
4. *Utiliser le théorème de la limite monotone. En utilisant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) = n$ montrer que la suite ne converge pas et conclure.*

Exercice 10

2. *Utiliser le corollaire du TVI ou le théorème de la bijection sur* $[0,1]$ *et* $[1,+\infty[$.
4. *Sur chacun des intervalles* $[0,1]$ *et* $[1,+\infty[$ *procéder comme pour la question 3 de l'exercice 9.*
5. *Montrer que* $(u_n)_{n\geq 3}$ *converge et utiliser la relation* $f(u_n) = \frac{1}{n}$ *pour trouver sa limite.*

   Utiliser la relation $f(v_n) = \frac{1}{n}$ *et la question 3 pour montrer par l'absurde que* $(v_n)_{n\geq 3}$ *ne converge pas.*

Exercice 11

1. *Étudier les variations de* f_n *sur* $]-\infty,0]$.
2. *En utilisant la relation* $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, *montrer que* $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n) = 0$ *puis raisonner comme pour la question 3 de l'exercice 9.*

   Pour la convergence, calculer $f_n(-1)$ *et en déduire que la suite est minorée.*
3. *Passer à la limite dans la relation* $x_n + 1 - \frac{e^{x_n}}{n} = 0$.