ECE2 – Mathématiques

DM3

- **A rendre le vendredi 18 décembre au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**
- **Toute réponse doit être justifiée.**
- **Toute tentative d'escroquerie sera lourdement sanctionnée.**

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Écrire un programme en `Scilab` qui, pour une valeur `N` fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_{N}.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$
puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
6. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.
7. Établir que :
$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$
En déduire que :
$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0$$
8. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n$$
9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 2

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer $A^2 - 7A$.

   (b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

   (c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

   (d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.

   (b) Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.

   (c) Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.

   (d) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.

3. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

   - La matrice $D_2 = P^{-1}\,B\,P$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
   - Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
   - La matrice $D_1 = P^{-1}\,A\,P$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.

2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}\,a_{n+1} + \frac{1}{2}\,a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}\,b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}\,c_{n+1} + \frac{1}{3}\,c_n \end{cases}$$

3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.

4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

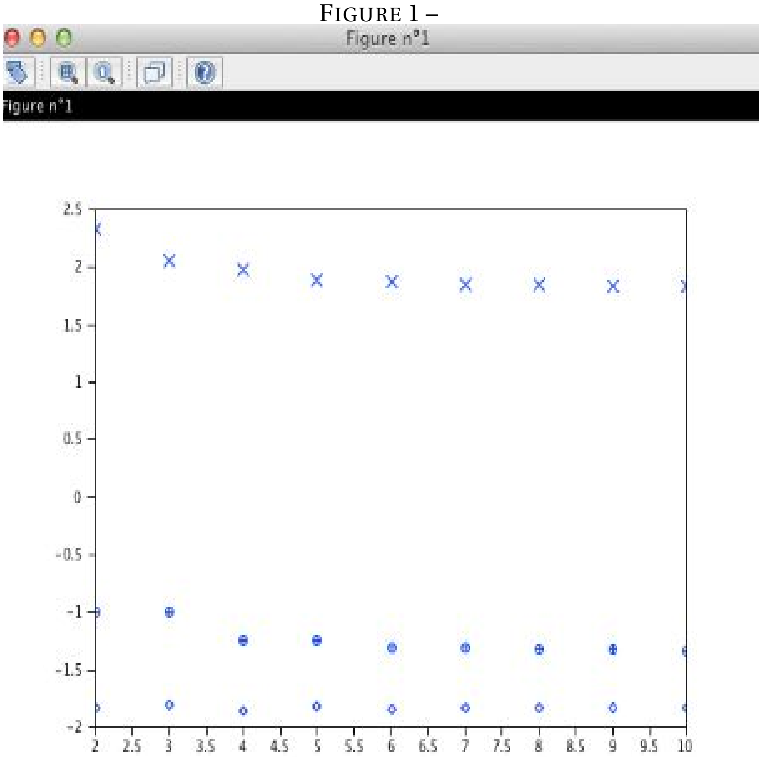
$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}$$

6. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
    B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
    for i=2:n
        Aux= ................
        Xold=................
        Xnew=..............
    end
    res=..........
endfunction
```

(b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

FIGURE 1 –



Exercice 3

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

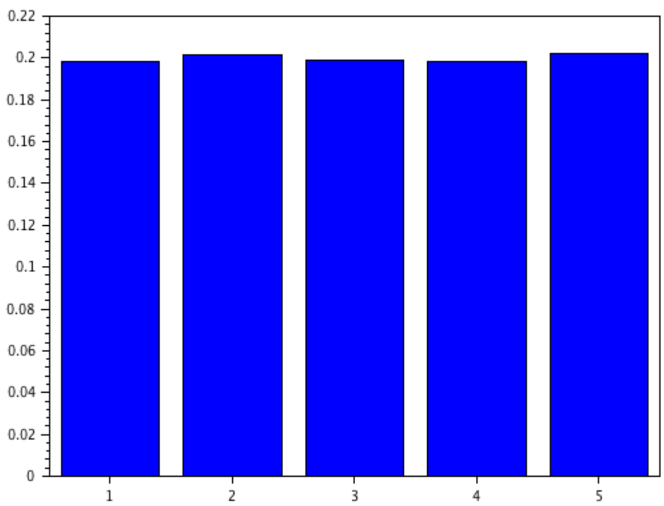
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
   Recopier et compléter le programme SCILAB suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = input(' Donner un entier naturel non nul') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i = 1 ;
        M = N ;
        while ________________
                i = i + 1 ;
                M = ________________ ;
        end
        S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



   Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
$$P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$
2. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).
3. Montrer que :
$$P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
4. Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement (c'est-à-dire avec probabilité 1) au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T = 4$ et $U = 1$.

1. Préciser les valeurs prises par T.
2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$P(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$
3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Calculer $P([U=1] \cap [T=2])$.
   (b) Calculer $P([U=1] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.
   (a) Calculer $P([U=j] \cap [T=j+1])$.
   (b) Que vaut $P([U=j] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?
6. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
7. Calculer $P(U=1)$ puis déterminer la loi de U.