DM0

À rendre le jour de la rentrée

Exercice 1

Partie A : étude d'une première fonction

On considère la fonction d est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Justifier que d est dérivable et déterminer sa fonction dérivée. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > -1$: $0 < d(x) < e$.
4. (a) En Python, quelle bibliothèque doit-on importer pour définir la fonction exponentielle? Quelle instruction doit-on écrire pour importer cette bibliothèque?
   (b) Écrire une fonction Python pour définir la fonction d.
   (c) Quelle bibliothèque doit-on importer pour tracer des courbes? Quelle instruction doit-on écrire pour importer cette bibliothèque?
   (d) Écrire un programme permettant de tracer la courbe de la fonction d sur $[0,10]$.

Partie B : étude d'une deuxième fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x+1-e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

5. (a) Déterminer f' et f''.
   Vérifier que pour tout $x > -1$: $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$.
   (b) Montrer :
   $$\lim_{x\to -1} f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 1.$$
   (c) Dresser le tableau des variations de f'.
6. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
   On notera α *la solution non nulle.*
7. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Partie C : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0,+\infty[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

8. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 1 - e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$.
   En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2

Partie A

1. On considère l'ensemble E définie par :

$$\mathrm{E}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-2z=3x \text{ et } x-y+5z=3z\right\}.$$

   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Le vecteur $(1,-1,-1)$ appartient-il à E ?

   (c) Déterminer une base de E.

2. (a) La famille $((1,-1,-1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est-elle libre ?

   (b) Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?

   (c) Exprimer le vecteur $(1,2,3)$ comme combinaison linéaire de $(1,-1,-1)$, $(1,1,0)$ et $(-1,0,1)$.

Partie B

Soient A,B et P les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ données par :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&3&0\\1&-1&5\end{pmatrix}\quad;\quad \mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-3&3&-3\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

3. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Calculer $\mathrm{D}_1=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{D}_2=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$.

Partie C

On pose $\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $\quad \mathrm{X}_{n+2}=\dfrac{1}{6}\mathrm{AX}_{n+1}+\dfrac{1}{6}\mathrm{BX}_n$.

Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Y}_n=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_n$.

5. Démontrer que : $\qquad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \mathrm{Y}_{n+2}=\dfrac{1}{6}\mathrm{D}_1\mathrm{Y}_{n+1}+\dfrac{1}{6}\mathrm{D}_2\mathrm{Y}_n$.
6. Pour tout entier naturel n, on note $\mathrm{Y}_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\,a_{n+1}+\dfrac{1}{2}\,a_n\\[2ex] b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}\,b_{n+1}\\[2ex] c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}\,c_{n+1}+\dfrac{1}{3}\,c_n\end{cases}$$

7. Calculer les matrices Y_0 et Y_1.
8. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
9. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

   On notera $\mathrm{X}_n=\begin{pmatrix}\alpha_n\\\beta_n\\\gamma_n\end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}.$$

Exercice 3

Un crabe se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le crabe se situe à l'origine. Puis il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$:

- il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$,
- il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note Y_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $\mathrm{Y}_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, Y_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note S l'instant auquel le crabe se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du crabe après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a S = 1. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a S = 4.
On admet que S est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(\mathrm{S} = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables Y_i.

   (b) Donner la loi de Y_1.

   (c) En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{S} = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de S.

2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{Y}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $\left(\mathrm{Y}_{n-1} = k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 0) = 1 - p$.

3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots n+1\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k-1)$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$, $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = p^k\left(1-p\right)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = 1$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{\left(1-p\right)^2}$.

   (b) En déduire que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \dfrac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{n+1}^2\right) = p\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right) + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + 1\right)$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p\left(1+p\right)}{1-p}$.

   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right)$ en fonction de p et n.

   (d) Montrer enfin que : $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\left(1-p\right) - p^{2n+1}\right)$.