ECG2 – Mathématiques

DM0

- **À rendre le jour de la rentrée au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

1 Échauffements

Exercice 1

1. Mettre chacune des expressions suivantes sous la sous la forme $a \times q^n$.
   (a) $\dfrac{2^{n-1}}{3^{3n}} \times \frac{1}{5^{n+1}}$, (b) $\dfrac{-2^n}{7^n} \times \frac{(-3)^n}{5^{2n+1}}$, (c) $\dfrac{1}{4^n} \times \frac{1}{8^n}$, (d) $\dfrac{5^{\frac{n}{2}}}{3^{n+1}}$.
2. Factoriser les expressions suivantes le plus possible.
   (a) $2x + x^2$,
   (b) $e^x + e^{2x}$,
   (c) $1 - x^2$,
   (d) $(1-2p)^{n-1} - 2n(1-p)^n$,
   (e) $1 - q^3$.

Exercice 2

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3x + 1 = 4x - 2$,
   (b) $-x + 1 = x + 2$,
   (c) $x + 1 = x - 3$,
   (d) $2x + 7 = -5x$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3e^x + 1 = 4e^x - 2$,
   (b) $-e^x + 1 = e^x + 2$,
   (c) $e^x + 1 = e^x - 3$,
   (d) $2e^x + 7 = -5e^x$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $3\ln(x) + 1 = 4\ln(x) - 2$,
   (b) $-\ln(x) + 1 = \ln(x) + 2$,
   (c) $\ln(x) + 1 = \ln(x) - 3$,
   (d) $2\ln(x) + 7 = -5\ln(x)$.

2 Fonctions

Exercice 3

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes en **justifiant soigneusement**.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln(x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)e^x$.

Exercice 4

Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$,
3. $x \mapsto xe^{-x}$,
4. $x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$.
5. $x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x) - x}{x}$.

Exercice 5

Trouver une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 2xe^{x^2}$;
2. $x \mapsto e^x e^{e^x}$;
3. $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$;
4. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$;
5. $x \mapsto -e^{1-x}$
6. $x \mapsto (x-1)e^{(x-1)^2}$;
7. $x \mapsto \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$;
8. $x \mapsto \frac{6x+1}{3x^2+x+1}$;
9. $x \mapsto 3xe^{x^2}$;
10. $\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;
11. $x \mapsto \frac{\ln(x)+1}{x\ln(x)+1}$;
12. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 6

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
2. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{3}{2}\ln(x+1)$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[1,2]$. On pourra utiliser le fait que $7<e^2<8$.

3 Suites et séries

Exercice 7

1. Énoncer le théorème de la limite monotone.
2. Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée par 2 ?
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=(1-x)^3+x.$$
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=0.4$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (a) i. Dresser le tableau de variations de f.
   ii. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<1$.
   (b) Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n-3 \end{cases}$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0=2 \text{ et } u_1=3 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n \end{cases}$$
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 9

Étudier la nature des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{7^{n-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{(n+1)!}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$.

Indication : montrer que $2n^3-3n^2+1=2(n+3)(n+2)(n+1)-15(n+3)(n+2)+53(n+3)-80$.

Exercice 10

Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(2k-3)$;
2. $\dfrac{1}{2^{10}}+\dfrac{1}{2^{20}}+\dfrac{1}{2^{30}}+\cdots++\dfrac{1}{2^{1000}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{11}(n^2-3n+4)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$;
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

4 Probabilités

Exercice 11

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$.
   (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, son espérance et sa variance.
   (b) On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup. Donner la loi de A **en justifiant soigneusement**.

2. Soit $p \in]0,1[$.
   (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, son espérance et sa variance.
   (b) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise et on note X la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Reconnaître la loi de X.
3. Rappeler la définition d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, son espérance et sa variance.

Exercice 12

1. Donner la définition d'un système complet d'événements.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
3. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. A chaque étape, avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note I_n l'événement « l'information après n transmissions est correcte » et $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{I}_n)$.
   (a) Justifier que $(\mathrm{I}_n, \bar{\mathrm{I}}_n)$ est un système complet d'événements.
   (b) En déduire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
   (c) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

Exercice 13

1. Rappeler le théorème de transfert.
2. Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer E(Y).
   (a) $\mathrm{Y} = n - \mathrm{X}$ où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$,
   (b) $\mathrm{Y} = 2^{\mathrm{X}}$ où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$,
   (c) $\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{X}+1}$ où $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

5 Algèbre linéaire

Exercice 14

1. Rappeler la définition d'une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que la famille $((3,1,3),(2,2,1),(4,3,2))$ est libre.
3. La famille ci-dessus est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 15

1. Rappeler la définition d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que l'ensemble $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et trouver une famille génératrice.

Exercice 16

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x-y, y+z, 0).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau et une base de son image.
3. Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
4. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z &=& 3 \\ x+2y+z &=& 1 \\ 2x+y+z &=& 0 \end{array}\right.$; 2. $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-3t &=& 1 \\ 2x+y-z+t &=& -1 \end{array}\right.$; 3. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4 \\ x+3y-z &=& 11 \\ 2x+5y-5z &=& 13 \\ x+4y+z &=& 18 \end{array}\right.$.

6 Python

Exercice 18

1. (a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie $2x^3 - 3x + 7$.

   (b) En important la bibliothèque `matplotlib.pyplot`, écrire les commandes permettant d'afficher le graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x + 7$ sur l'intervalle $[-1, 1]$

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie x **si** $x \geqslant 0$ et $-x$ **sinon**.
3. Comment appelle-t-on cette fonction en mathématiques ?

Exercice 19

À l'aide d'une boucle `for`, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} (2^k - k^2)$.

Exercice 20

1. En important la bibliothèque `numpy` donner des commandes permettant de construire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Écrire une commande permettant de remplacer le coefficient $(1,3)$ de A par 7.
3. Écrire une commande permettant d'afficher la première ligne de B (sans la recopier à la main...).