Exercice 4

1) On a vu dans l'exercice 3 que $Sp(\Psi) = \{1,2,3\}$

Déterminons $E_1(\Psi)$: soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in E_1(\Psi) \Leftrightarrow \Psi((x,y,z)) = (x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = x \\ 2y+2z = y \\ 3z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y+2z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi $E_1(\Psi) = \{(x,0,0) , x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,0) ; x \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((1,0,0))$

Comme $(1,0,0) \neq (0,0,0)$; c'est une famille libre de $E_1(\Psi)$. Ainsi $(1,0,0)$ est une base de $E_1(\Psi)$.

Déterminons $E_2(\Psi)$: soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in E_2(\Psi) \Leftrightarrow \Psi((x,y,z)) = 2(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2x \\ 2y+2z = 2y \\ 3z = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi $E_2(\Psi) = \{(x,x,0) ; x \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,1,0) ; x \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((1,1,0))$

Ainsi $(1,1,0)$ est une base de $E_2(\Psi)$ (famille génératrice formée d'un vecteur non nul).

Déterminons $E_3(\Psi)$: soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in E_3(\Psi) \Leftrightarrow \Psi((x,y,z)) = 3(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 3x \\ 2y+2z = 3y \\ 3z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}z \\ y = 2z \end{cases}$$

Ainsi $E_3(\Psi) = \{(\frac{3}{2}z, 2z, z) ; z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(\frac{3}{2}, 2, 1) ; z \in \mathbb{R}\}$

$= Vect((3/2, 2, 1))$

La famille $((\frac{3}{2}, 2, 1))$ est génératrice de $E_3(\Psi)$ et libre. C'est donc une base de $E_3(\Psi)$

2) On a vu que $Sp(A) = \{1,2\}$

<u>Déterminons $E_1(A)$</u> : soit $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x+2y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$$

Ainsi

$$E_1(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \\ z \end{bmatrix} ; z \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; (z,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est génératrice de $E_1(A)$

De plus elle est formée de 2 vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

<u>Déterminons $E_2(A)$</u> : soit $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ x+2y = 2y \\ z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ainsi $E_2(A) = \{(0,y,0) ; y \in \mathbb{R}\}$

$$= \mathrm{Vect}((0,1,0))$$

Ainsi $((0,1,0))$ est une base de $E_2(A)$.

<u>Exercice 3</u> (Fin)

Avec l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$
$P \mapsto XP'(X)$

1) Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

On a $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$; $\varphi(X^2) = 2X^2$

$\varphi(X^3) = 3X^3$ et $\varphi(X^4) = 4X^4$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(0, X, 2X^2, 3X^3, 4X^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale donc en particulier elle est triangulaire. Donc

$$Sp(\varphi) = Sp(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$