Exercice 1

1. Le rang étant invariant par opérations élémentaires sur les lignes on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

2. On remarque que :

$$\begin{aligned}
E = \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{aI + bA \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \mathrm{Vect}(I, A).
\end{aligned}$$

   Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. D'après la question précédente, la famille (I, A) est une famille génératrice de E. Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc un famille libre. Ainsi (I, A) est une base de E. Cela permet de dire que E est de dimension finie et que sa dimension est égale à 2.

4. (a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \in F \iff AX = \iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 2z & = & x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & y \\ -x & + & y & + & 3z & = & z \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & x - y - 2z = 0 \\
\iff & x = y + 2z \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Donc $F = \left\{y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel.

(b) D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi $\mathscr{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et sa dimension vaut 2.

(c) D'après la question précédente, l'équation $(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathrm{X}=0$ admet une infinité de solution : le système n'est pas de Cramer. La matrice $\mathrm{A}-\mathrm{I}$ n'est donc pas inversible.

5. (a) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\mathrm{X}\in\mathrm{G}\iff\mathrm{AX}=2\mathrm{X}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2x&-&y&-&2z&=&2x\\2x&-&y&-&4z&=&2y\\-x&+&y&+&3z&=&2z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}&-&y&-&2z&=&0\\2x&-&3y&-&4z&=&0\\-x&+&y&+&z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&+&z&=&0\\&-&y&-&2z&=&0\\2x&-&3y&-&4z&=&0\end{array}\right.\quad \mathrm{L}_1\leftrightarrow\mathrm{L}_3$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&+&z&=&0\\&-&y&-&2z&=&0\\&-&y&-&2z&=&0\end{array}\right.\quad \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3+2\mathrm{L}_1$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&y+z\\y&=&-2z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-z\\y&=&-2z\end{array}\right.$$
$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{G}=\left\{z\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$. En particulier, G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel. De plus, $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de G formée d'un unique vecteur non nul. Ainsi $\mathscr{B}_2=\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de G. Donc G est de dimension finie et sa dimension vaut 1.

(b) Soit $\mathrm{X}\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. Alors $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$ car $\mathrm{X}\in\mathrm{F}$ et $\mathrm{AX}=2\mathrm{X}$ car $\mathrm{X}\in\mathrm{G}$. Donc $2\mathrm{X}=\mathrm{X}$, c'est-à-dire, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\mathrm{F}\cap\mathrm{G}\subset\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Réciproquement, $\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$. Ainsi, on a bien $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

(c) D'après les questions précédentes, on a $\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or le membre de droite de cette égalité appartient à G et le membre de gauche appartient à F. Par conséquent, $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \cap G$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \lambda_1 = 0.$$

Comme on a $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $\mathscr{B}_1$ est libre, cela entraîne que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a ainsi montré que si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Autrement dit, la famille $\mathscr{B}$ est libre et c'est donc une base d'après ce qui a été dit ci-dessus. De plus, comme $\mathscr{B}$ est de cardinal 3 et que $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, alors c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Or

$$(\star) \Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = -2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(2, 5, -1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

6. (a) P est inversible si et seulement si pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ le système

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

admet une unique solution $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Dans ce cas, l'inverse de P s'obtient en inversant le système.

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ 2x&+&y&&&=&b\\ -x&&&+&z&=&c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &-&y&-&4z&=&b-2a\\ &&y&+&3z&=&a+c\end{array}\right.\qquad\begin{array}{l}\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1\end{array}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &&&-&z&=&b+c-a\\ &&y&+&3z&=&a+c\end{array}\right.\qquad \mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &&&&z&=&a-b-c\\ &&&&y&=&-2a+3b+4c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&a-b-2c\\ z&=&a-b-c\\ y&=&-2a+3b+4c\end{array}\right.$$

$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Ainsi P est inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

(b) On trouve

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

7. (a) Remarquons que $\mathrm{M}(a,b)=a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$. Par conséquent :

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}(a\mathrm{I}+b\mathrm{A})\mathrm{P}=a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{IP}+b\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=a\mathrm{I}+b\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a+2b&0&0\\0&a+b&0\\0&0&a+b\end{pmatrix}.$$

(b) Supposons que $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible. Alors

$$\mathrm{D}(a,b)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible. Comme $\mathrm{M}(a,b)=\mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1}$ donc $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
Finalement, $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{D}(a,b)$ l'est.
Or, $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq0$ et $a+b\neq0$. Donc, $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq0$ et $a+b\neq0$.

(c) On rappelle que $\mathrm{M}(a,b)=\mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I} &\iff (\mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1})^2 = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{PD}(a,b)\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{P}(\mathrm{D}(a,b))^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{-1} \quad \text{en multipliant à gauche par } \mathrm{P}^{-1} \text{ de part et d'autre}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} \quad \text{en multipliant à droite par } \mathrm{P}^{-1} \text{ de part et d'autre}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}.
\end{aligned}$$

Or, $(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}$ si et seulement si $(a+2b)^2 = 1$ et $(a+b)^2 = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I} &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 1\\ a & + & b & = & 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 1\\ a & + & b & = & -1\end{array}\right.\\
&\quad \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & -1\\ a & + & b & = & 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & -1\\ a & + & b & = & -1\end{array}\right.\\
&\iff (a,b) = (1,0) \text{ ou } (a,b) = (-3,2) \text{ ou } (a,b) = (3,-2) \text{ ou } (a,b) = (-1,0).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie A

1. On a :

$$[\mathrm{X}=2] = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \quad ; \quad [\mathrm{X}=3] = \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \quad ; \quad [\mathrm{X}=4] = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3 \cap \mathrm{P}_4 \cup \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3 \cap \mathrm{P}_4.$$

   Ainsi par indépendance mutuelle des lancers on a :

$$a_2 = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{4} \quad ; \quad a_3 = \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{1}{8} \quad ; \quad a_4 = \mathrm{P}(\mathrm{X}=4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Il est clair que

$$\mathrm{U}_n = \bigcup_{i=2}^{n} [\mathrm{X}=i].$$

   Comme les événements $[\mathrm{X}=i]$, $i = 2, \ldots, n$ sont deux à deux disjoints, on obtient donc :

$$u_n = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=i) = \sum_{i=2}^{n} a_i.$$

3. On obtient

```
import numpy.random as rd
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile !=2 :
        if rd.random() < 1/2 :
            pile = pile + 1
        else:
            pile = 0
        tirs = tirs + 1
    return tirs
```

Partie B

4. (a) L'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si au cours des $(n+1)$ premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs. Il y a deux façons incompatibles de réaliser cela :

- soit on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers : c'est l'événement U_n ;
- soit U_n n'est pas réalisé et nécessairement on doit faire pile aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers : c'est l'événement $\overline{U}_n \cap B_{n+1}$.

Ainsi : $U_{n+1} = U_n \cup \left(\overline{U}_n \cap B_{n+1}\right)$.
Par conséquent, on trouve :

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n \cup \overline{U}_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(U_n) + P(\overline{U}_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}). \end{aligned}$$

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Il est clair que :

$$U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \subset U_n \cap B_{n+1} \quad \text{et} \quad P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} \subset U_n \cap B_{n+1}.$$

Par conséquent, on a :

$$U_{n-2} \cap F_{n-1} \subset U_n \quad \text{et} \quad P_{n-1} \cap P_n \subset U_n.$$

Ainsi on obtient l'inclusion :

$$(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \subset U_n \cap B_{n+1}.$$

L'événement U_n est réalisé si et seulement si au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs et qu'on obtient pile au n-ième et $n+1$-ième lancers. Il y a deux façons incompatibles de réaliser cela :

- soit on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs au cours des $(n-2)$ premiers lancers : c'est l'événement U_{n-2} ;
- soit U_{n-2} n'est pas réalisé et nécessairement on doit faire pile aux $(n-1)$-ième (de façon à avoir soit $P_{n-2} \cap P_{n-1}$ soit $P_{n-1} \cap P_n$).

En particulier, on a :

$$U_n \subset U_{n-2} \cup P_{n-1} = ((U_{n-2} \cap F_{n-1}) \cup (U_{n-2} \cap P_{n-1})) \cup P_{n-1} \subset (U_{n-2} \cap F_{n-1}) \cup P_{n-1}.$$

Ainsi, on obtient l'inclusion :

$$U_n \cap B_{n+1} \subset ((U_{n-2} \cap F_{n-1}) \cup P_{n-1}) \cap P_n \cap P_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

Finalement, par double inclusion on peut conclure :

$$U_n = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

(c) Soit $n \geqslant 4$. D'après la question 4.a on a :

$$u_{n+1} = u_n + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{4} - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

D'après la question 4.b, les événements $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ et $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ étant incompatibles, on a aussi :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1} \cap U_n) &= P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\ &= P(U_{n-2})P(F_{n-1} \cap P_n) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \end{aligned}$$

car les $(n-2)$ premiers lancers sont indépendants des deux derniers. Puis encore par indépendance des lancers, on trouve :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1} \cap U_n) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1} \cap P_n) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\ &= \frac{1}{4} u_{n-2} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} u_{n-2} - \frac{1}{8} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. On sait que pour tout entier naturel n : $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) \in [0,1]$.
En particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$ on a :

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{\frac{1}{8}(1-u_{n-2})}_{\geqslant 0} \geqslant u_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est croissante. De plus, elle est majorée par 1 donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers un réel ℓ.
Enfin, comme pour tout $n \geqslant 4$ on a :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1-u_{n-2}),$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1-\ell).$$

Ainsi $\ell = 1$.

6. On a :

$$[\mathrm{X}=-1] = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty}[\mathrm{X}=n]}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=-1) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}[\mathrm{X}=n]\right).$$

Les événements $([\mathrm{X}=n])_{n\geqslant 2}$ étant deux à deux disjoints, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}=-1) &= 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty}[\mathrm{X}=n]\right)\\ &= 1 - \sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)\\ &= 1 - \sum_{n=2}^{+\infty}a_n.\end{aligned}$$

Or d'après la question 2 :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \sum_{i=2}^{n} a_i.$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge et a pour somme 1. On en déduit donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=-1) = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n = 1 - 1 = 0.$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} k\mathrm{P}([\mathrm{X}=k]).$$

7. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Par définition de la suite $(v_n)_{n\geqslant 4}$ on a :

$$\begin{aligned}v_n - v_{n+1} &= 1 - u_n - (1-u_{n+1})\\ &= u_{n+1} - u_n\\ &= \frac{1}{8}(1-u_{n-2}) \quad \text{d'après 4.c}\\ &= \frac{1}{8}v_{n-2}.\end{aligned}$$

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Comme $[\mathrm{X}=n+1] = \mathrm{U}_{n+1}\backslash\mathrm{U}_n$ et $\mathrm{U}_n \subset \mathrm{U}_{n+1}$ on a :

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}=n+1]) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_{n+1}) - \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) = u_{n+1} - u_n = v_n - v_{n+1}.$$

9. Pour tout $n \geqslant 2$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : $S_2 = 2P(X = 2) = \frac{1}{2}$ et d'autre part :
   $$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 8\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que :
   $$S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n.$$
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} S_{n+1} = (n+1)P(X = n+1) + S_n &= (n+1)P(X = n+1) + 6 - 8v_{n+2} - nv_n \\ &= (n+1)(v_n - v_{n+1}) + 6 - 8v_{n+2} - nv_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= 6 + v_n - 8v_{n+2} - (n+1)\,v_{n+1}. \end{aligned}$$
   Or d'après la question 7, on sait que :
   $$v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8} v_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad -8v_{n+3} = v_n - 8v_{n+2}.$$
   On obtient donc :
   $$S_{n+1} = 6 + v_n - 8v_{n+2} - (n+1)\,v_{n+1} = 6 - 8v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+1}.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
   $$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$

10. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = P(U_n) \leqslant 1$. Ainsi, $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est à termes positifs. On en déduit donc :
$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \leqslant 6.$$
La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est donc majorée.
Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$S_{n+1} - S_n = (n+1)P(X = n+1) \geqslant 0.$$
La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est donc croissante.

11. La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Cela signifie que la série $\sum_{n \geqslant 2} nP(X = n)$ converge. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, elle converge donc aussi absolument. En particulier, X admet une espérance.

12. (a) On sait que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n.$$
De plus, les suites $(S_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_{n+2})_{n \geqslant 2}$ sont convergentes. Donc la suite $(n\,v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un certain réel λ.

    (b) Comme $(n\,v_n)_{n \geqslant 2}$ est à termes positifs, λ est positif.
Supposons $\lambda > 0$. Comme $\lim_{n \to +\infty} nv_n = \lambda$ on a donc l'équivalent :
$$nv_n \sim \lambda.$$
Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit, on obtient :
$$v_n \sim \frac{\lambda}{n}.$$
Or les séries $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ et $\sum_{n \geqslant 2} \frac{\lambda}{n}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{\lambda}{n}$ est divergente. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ diverge aussi.

Or d'après la question 7, pour tout $N \geqslant 2$ on a :

$$\sum_{n=2}^{N} v_n = 8\sum_{n=2}^{N}(v_{n+2} - v_{n+3}) = v_4 - v_{N+3}.$$

Comme la suite (v_n) converge, on en déduit que la suite $\left(\sum_{n=2}^{N} v_n\right)_{N\geqslant 2}$ converge aussi. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge.

On obtient une contradiction ; par conséquent $\lambda = 0$.

(c) On a :

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}(6 - 8v_{n+2} - nv_n) \\ &= 6 - 8\lim_{n\to+\infty} v_{n+2} - \lim_{n\to+\infty} nv_n \\ &= 6. \end{aligned}$$

Exercice 3

Partie A-Étude d'une fonction

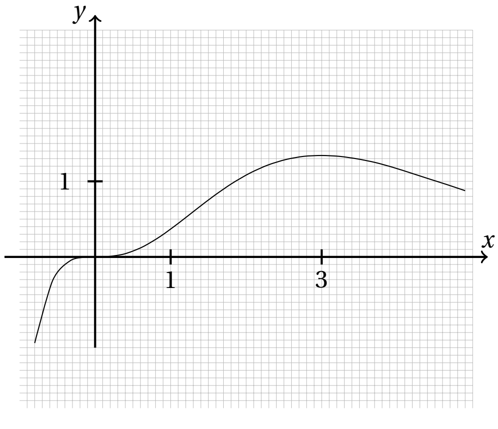
1. La fonction f est le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$f'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}.$$
2. Par opération sur les limites usuelles :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
Par croissance comparée :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
3. (a) On trouve :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	+	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$				$\searrow$	0

(b) On a : $f(0) = 0$. On en déduit à l'aide du tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	+	

4. Courbe représentative de f dans un repère orthonormé



5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) - x = x^3 e^{-x} - x = x(x^2 e^{-x} - 1) = x(xe^{-\frac{x}{2}} - 1)(xe^{-\frac{x}{2}} + 1).$$

(b) La fonction g est produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

On obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Par opération sur les limites usuelles :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$

(c) D'après les inégalités données dans l'énoncé, on a :

$$g(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1.$$

Donc, g admettant un maximum global en 2, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leqslant g(2) < 1.$$

En particulier l'équation $g(x) = 1$ n'admet pas de solution.

(d) D'après le tableau de variations, pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) \geqslant 0$. Donc l'équation $g(x) = -1$ n'admet pas de solution sur $[2, +\infty[$.
Sur $]-\infty, 2[$ la fonction g est continue et strictement croissante.
Comme $-1 \in g(]-\infty, 2[) =]-\infty, g(2)[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = -1$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 2[$.
Ainsi, α est l'unique solution de l'équation $g(x) = -1$ sur $\mathbb{R}$.
Enfin, on remarque que :

$$g(-1) = -e^{\frac{1}{2}} < -1 = g(\alpha) < 0 = g(0).$$

Comme g est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$, on en déduit que :

$$-1 < \alpha < 0.$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions précédentes on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff f(x) - x = 0 &\Longrightarrow x(xe^{-\frac{x}{2}} - 1)(xe^{-\frac{x}{2}} + 1) = 0 \\ &\iff x(g(x) - 1)(g(x) + 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad g(x) = 1 \quad \text{ou} \quad g(x) = -1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha. \end{aligned}$$

Les points fixes de f sont 0 et α.

Partie B-Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = f(u_n).$$

6. (a) On a : $f(3) = 3^3 e^{-3} = \frac{27}{e^3} > 0$. D'après les inégalités données dans l'énoncé, on a :

$$f(3) = \frac{27}{e^3} \leqslant \frac{27}{20.08} < 2.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \in]0,2[$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0,2[$. Par croissance stricte de f et la question précédente, on remarque que :

$$\forall x \in]0,2[, \quad 0 = f(0) < f(x) < f(2) < f(3) < 2.$$

  En particulier :

$$0 < u_{n+1} = f(u_n) < 2.$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,2[.$$

7. (a) D'après la question 5.a, on sait que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) - x = \underbrace{x}_{\geqslant 0}\underbrace{(g(x)-1)}_{<0}\underbrace{(g(x)+1)}_{\geqslant 0} \leqslant 0.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \geqslant 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leqslant 0.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 0$.

   Par ailleurs, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en ℓ. Ainsi, ℓ est un point fixe de f. Donc :

$$\ell = \alpha \quad \text{ou} \quad \ell = 0.$$

   Comme $\ell \geqslant 0$ et que $\alpha < 0$ d'après 5.d alors :

$$\ell = 0.$$

9. Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad h(x) = x^2 e^{-x}.$$

(a) La fonction h est produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, elle est donc dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

On obtient :

x	0		2		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n)}{u_n} = \frac{u_n^3 e^{-u_n}}{u_n} = u_n^2 e^{-u_n} = h(u_n).$$

Or, h admet un maximum global en 2 donc :

$$\forall x > 0, \quad h(x) \leqslant h(2) = \frac{4}{e^2}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant h(u_n) = \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{4}{e^2}.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0.$$

  Ainsi d'après la question précédente :

$$u_{n+1} \leqslant \frac{4}{e^2} u_n \leqslant \frac{4}{e^2}\left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0 = \left(\frac{4}{e^2}\right)^{n+1} u_0.$$

  Par ailleurs, on a déjà prouvé plus haut que $u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0.$$

10. Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0$ sont à termes positifs et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0$ converge car $\left|\frac{4}{e^2}\right| < 1$. D'après la question précédente et le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge aussi.

Partie C-Étude d'une intégrale

11. Soit $\mathrm{A} \in [0, +\infty[$.

(a) Les fonctions $t \mapsto t^3$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \mathrm{A}]$. Par intégration par parties on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} f(t)dt &= [-t^3e^{-t}]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -3t^2e^{-t}dt \\ &= -\mathrm{A}^3e^{-\mathrm{A}} + 3\int_0^{\mathrm{A}} t^2e^{-t}dt.\end{aligned}$$

(b) Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \mathrm{A}]$. Par intégration par parties on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} t^2e^{-t}dt &= [-t^2e^{-t}]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -2te^{-t}dt \\ &= -\mathrm{A}^2e^{-\mathrm{A}} + 2\int_0^{\mathrm{A}} te^{-t}dt.\end{aligned}$$

(c) Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \mathrm{A}]$. Par intégration par parties on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} te^{-t}dt &= [-te^{-t}]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -te^{-t}dt \\ &= -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} -e^{-t}dt \\ &= -\mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - [e^{-t}]_0^{\mathrm{A}} \\ &= -\mathrm{A}^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1.\end{aligned}$$

(d) D'après les questions précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} f(t)dt &= -\mathrm{A}^3e^{-\mathrm{A}} + 3\int_0^{\mathrm{A}} t^2e^{-t}dt \\ &= -\mathrm{A}^3e^{-\mathrm{A}} + 3\left(-\mathrm{A}^2e^{-\mathrm{A}} + 2\int_0^{\mathrm{A}} te^{-t}dt\right) \\ &= -\mathrm{A}^3e^{-\mathrm{A}} + 3\left(-\mathrm{A}^2e^{-\mathrm{A}} + 2(-\mathrm{A}^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}} + 1)\right) \\ &= e^{-\mathrm{A}}(-\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 - 6\mathrm{A} - 6) + 6.\end{aligned}$$

(e) Par croissance comparée, on en déduit :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\,dt = 6.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 6.

12. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad u(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

(a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ donc admet une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. Alors :

$$\forall x > 0, \quad u(x) = \mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x).$$

En particulier, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$u'(x) = \mathrm{F}'(x+1) - \mathrm{F}'(x) = f(x+1) - f(x).$$

(b) Soit $x > 3$. Comme f est décroissante et positive sur $[3,+\infty[$ alors pour tout $t \in [x, x+1]$ on a :

$$0 \leqslant f(t) \leqslant f(x).$$

En particulier, en intégrant entre x et $x+1$ on obtient :

$$0 < u(x) \leqslant f(x)(x+1-x) = f(x).$$

Ainsi :

$$\forall x > 3, \quad |u(x)| = u(x) \leqslant f(x).$$

(c) Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, par encadrement on déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.$$