Chapitre 2 : Comparaison de suites

Toutes les suites considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles.

1 Relation de négligeabilité

Définition 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

On notera $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Remarque 1

1. *Parfois, on omettra le « $n \to +\infty$ » et on écrira seulement $u_n = o(v_n)$.*
2. *⚠La notation « petit o » (appelé notation de Landau) est un abus d'écriture : $o(v_n)$ ne désigne pas une suite particulière mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ on n'a pas nécessairement $u_n = w_n$!*

Exemple 1

1. $n = o(n^2)$.
   En effet,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \frac{1}{n} \times n^2$$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$
2. $\sqrt{n} = o(n^2)$.
   En effet,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times n^2$$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0.$
3. $e^{-n} = o(1)$.
   En effet,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-n} = e^{-n} \times 1$$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0.$
4. *Plus généralement $u_n = o(1)$ si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :*
   - *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors, en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_n = u_n$ on voit que $u_n = o(1)$.*
   - *si $u_n = o(1)$ alors il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que*
   $$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n \times 1$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque 2

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$ donc $u_n - \ell = o(1)$ ou encore $u_n = \ell + o(1)$.

Réciproquement si $u_n = \ell + o(1)$ où $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Test 1 (*Voir la solution.*)

Que signifie « $u_n = o(0)$ » ?

Test 2 (*Voir la solution.*)

Montrer que $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si, à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et supposons qu'à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$.

- Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Par définition, cela signifie qu'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que
$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$
De plus, il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n \neq 0$. Donc
$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1) \quad \frac{u_n}{v_n} = \epsilon_n.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0.$$
- Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Il existe un rang n_1 tel que
$$\forall n \geqslant n_1 \quad v_n \neq 0.$$
Donc, pour tout $n \geqslant n_1$, on a
$$u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n = \epsilon_n v_n$$
où $\epsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. ∎

Exemple 2

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. $u_n = n^2$ *et* $v_n = n^3$.
   Les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont non nuls à partir du rang* 1 *et*
   $$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}.$$
   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, *on a* $u_n = o(v_n)$.
2. $u_n = \ln(n)$ *et* $v_n = n^2$
   Les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont non nuls à partir du rang* 1 *et*
   $$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ln(n)}{n^2}.$$
   Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ *donc* $u_n = o(v_n)$.

Test 3 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. $u_n = 5^n$ *et* $v_n = n^3$.
2. $u_n = \ln(n)^7$ *et* $v_n = n$
3. $u_n = n^a$ *et* $v_n = n^b$ *avec* $0 < a < b$.

Plus généralement, les croissances comparées se traduisent en terme de négligeabilité par

Proposition 2 (Croissances comparées)

Soient $q > 1$, $a > 0$ et $b > 0$ des réels. On a

- $\ln(n)^b \underset{n\to+\infty}{=} o(n^a)$,
- $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$,
- $\ln(n)^b \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.

Exemple 3

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=n^5+n+1\quad \text{et}\quad v_n=e^n+3n^2+5.$$

Les deux suites sont à termes strictement positifs donc non nuls et pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a*

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^5+n+1}{e^n+3n^2+5}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée mais on peut lever l'indétermination en factorisant numérateur et dénominateur par leur terme dominant :

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n^5\left(1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)}{e^n\left(1+3\frac{n^2}{e^n}+\frac{5}{e^n}\right)}=\frac{n^5}{e^n}\times\frac{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{1+3\frac{n^2}{e^n}+\frac{5}{e^n}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)=1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+3\dfrac{n^2}{e^n}+\dfrac{5}{e^n}\right)=1$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{e^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{e^n}=0$. *Par le théorème d'opération sur les limites, on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{1+3\frac{n^2}{e^n}+\frac{5}{e^n}}=1$$

puis, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^5}{e^n}=0$.

Finalement, par produit on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ *donc* $u_n=o(v_n)$.

Test 4 (*Voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$\forall n\geqslant 1,\quad u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\quad \text{et}\quad v_n=\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\ln n}$$

Montrer que $u_n=o(v_n)$.

Proposition 3 (Opérations sur les o)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

1. (*Transitivité*) Si $u_n=o(v_n)$ et $v_n=o(w_n)$ alors $u_n=o(w_n)$.
2. (*Combinaison linéaire*) Si $u_n=o(w_n)$ et $v_n=o(w_n)$ alors $\lambda u_n+\mu v_n=o(w_n)$.
3. (*Multiplication par un réel* ***non nul***) Si $\lambda\neq 0$ et $u_n=o(v_n)$ alors $u_n=o(\lambda v_n)$.
4. (*Produit*) Si $u_n=o(v_n)$ alors $u_nw_n=o(v_nw_n)$.

Démonstration : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

1. Supposons que $u_n=o(v_n)$ et $v_n=o(w_n)$.
   - Comme $u_n=o(v_n)$, il existe donc un entier naturel n_1 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro tels que
   $$\forall n\geqslant n_1\quad u_n=\epsilon_n v_n.$$
   - Comme $v_n=o(w_n)$, il existe donc un entier naturel n_2 et une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro tels que
   $$\forall n\geqslant n_2\quad v_n=\omega_n w_n.$$

   Ainsi,
   $$\forall n\geqslant \max(n_1,n_2),\quad u_n=\epsilon_n u_n=(\epsilon_n\omega_n)w_n$$
   avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\epsilon_n\omega_n=0$. Ainsi $u_n=o(w_n)$.
2. Supposons que $u_n=o(w_n)$ et $v_n=o(w_n)$.
   - Comme $u_n=o(w_n)$, il existe donc un entier naturel n_1 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro tels que
   $$\forall n\geqslant n_1\quad u_n=\epsilon_n w_n.$$
   - Comme $v_n=o(w_n)$, il existe donc un entier naturel n_2 et une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro tels que
   $$\forall n\geqslant n_2\quad v_n=\tau_n w_n.$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant \max(n_1, n_2), \quad \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \epsilon_n w_n + \mu \tau_n w_n = (\lambda \epsilon_n + \mu \tau_n) w_n$$

avec $\lim_{n\to+\infty} (\lambda\epsilon_n + \mu\tau_n) = 0$. Ainsi $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.

3. Voir test
4. Voir test ■

Exemple 4

Comparons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 e^n + 3^n \quad et \quad v_n = 4^n.$$

Comme $\frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ on a : $3^n = o(4^n)$.
D'autre part, comme $\frac{e}{4} < 1$ par croissance comparée on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\frac{4^n}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{e}{4}\right)^n = 0$ donc $n^2 = o\left(\frac{4^n}{e^n}\right)$.
On en déduit par produit que $n^2 e^n = o(4^n)$ puis par somme que $u_n = o(4^n)$.

Remarque 3

1. *En général, on ne garde pas les constantes multiplicatives à l'intérieure du o grâce au troisième point.*
   Par exemple, si $u_n = o(2n)$ alors $u_n = o(\frac{1}{2} 2n) = o(n)$.
   De même, si $u_n = o(2)$ alors $u_n = o(1)$.
2. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*

Test 5 (*Voir la solution.*)

En revenant à la définition de la relation de négligeabilité, démontrer les points 3 et 4 de la proposition.

2 Relation d'équivalence

2.1 Généralités

Définition 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 4

Parfois, on omettra le « $n \to +\infty$ » et on écrira seulement $u_n \sim v_n$.

Exemple 5

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ *si et seulement si u_n est nulle à partir d'un certain rang.*

On n'écrira donc jamais cela !

Exemple 6

On a $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$n+1 = \frac{n+1}{n} \times n \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Proposition 4 (Caractérisation)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).$$

En pratique, si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Exemple 7

Si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = e^n + n^2 + 2 - \frac{1}{n}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$.

Remarquons que ce n'est pas le seul équivalent possible : par exemple $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$. L'intérêt d'un équivalent est d'avoir une expression la plus simple possible de l'ordre de grandeur de la suite c'est pourquoi on préférera écrire le premier équivalent.

En revanche, l'équivalent $u_n - e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ apporte une information supplémentaire car il signifie que

$$u_n - e^n = n^2 + o(n^2)$$

alors que l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$ signifie

$$u_n = e^n + n^2 + o(e^n + n^2).$$

*En particulier, $u_n - e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ **ne se déduit pas de** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$ (on n'ajoute pas les équivalents membre à membre !)*

Test 6 (***Voir la solution.***)

On considère la suite définie par $\forall n \geqslant 1,\ u_n = e^n + n^2 + n^3$.

1. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.*
2. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$.*
3. *A-t-on $u_n - e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$?*

Proposition 5 (Opérations sur les équivalents)

Soient $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites et soit $k \in \mathbb{N}$.

1. (*Symétrie*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. (*Transitivité*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
3. (*Produit*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $t_n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$.
4. (*Inverse*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ avec $t_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{u_n}{t_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{w_n}$.
5. (*Puissance*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$.
6. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

Démonstration : Les points 1,2 et 6 sont laissés en exercice. Soient $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites et soit $k \in \mathbb{N}$.

3. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
   - Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe un entier naturel n_1 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 tels que
   $$\forall n \geqslant n_1, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$
   - Comme $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, il existe un entier naturel n_2 et une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 tels que
   $$\forall n \geqslant n_2, \quad t_n = \tau_n w_n.$$

Donc

$$\forall n \geqslant \max(n_1, n_2), \quad t_n u_n = (\epsilon_n \tau_n) v_n w_n$$

où $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n \tau_n = 1$. Donc $t_n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$.

5. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Il existe donc un entier naturel n_1 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 tels que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geqslant n_1, \quad u_n^k = \epsilon_n^k v_n^k$$

et $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n^k = 1$. Ainsi $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$. ■

Remarque 5

1. *Un cas particulier du point 3 en prenant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :*
   si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$.
2. *Les points 3 et 4 signifie que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.*
3. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*
4. ***On n'additionne jamais des équivalents, on ne peut pas appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence!***

Test 7 (*Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.*)

On considère

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = n + \sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = n + \ln(n).$$

1. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
2. *A-t-on $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n - n$?*

Test 8 (*Incompatibilité avec la composition, voir la solution.*)

On considère

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n + 1 \quad \text{et} \quad v_n = n.$$

1. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
2. *A-t-on $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$?*

2.2 Calculer un équivalent

2.2.1 Les outils

Proposition 6 (Équivalents usuels)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On a les équivalents suivants :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n \ (a \in \mathbb{R}^*)$$

2. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ avec $a_k \neq 0$. Alors

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^k.$$

Exemple 8

On a

$$n^2 + 3n^3 + n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4$$

et

$$n^3 + 6n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} 6n^5$$

donc par compatibilité avec le quotient

$$\frac{n^2 + 3n^3 + n^4}{n^3 + 6n^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}.$$

Proposition 7 (Limite et équivalent)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ **non nul** alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Exemple 9

On cherche la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \frac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}.$$

- $9n+10 \underset{n\to+\infty}{\sim} 9n$ *d'après la proposition 6.*
- $3n+4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ *d'après la proposition 6. Ainsi, d'après la compatibilité par passage aux puissances, on a*

$$(3n+4)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)^3.$$

- $8n^{-2}+2n^{-4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^{-2}$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{8n^{-2}+2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1.$

Par compatibilité des équivalents avec le produit et le passage au quotient, on en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(3n)^3\times 8n^{-2}}{9n} = 24.$$

En appliquant le premier point de la proposition ci-dessous (avec $v_n = 24$) on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 24.$

2.2.2 Quelques méthodes

- Pour déterminer un équivalent simple, on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le coefficient dominant, multiplication par la quantité conjuguée...).

Exemple 10

1. *On considère la suite suivante :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad , u_n = n - \ln(n)^2.$$

Pour déterminer un équivalent simple, on procède souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée. Ici, par exemple, on va factoriser par le terme prépondérant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n = n\left(1-\frac{\ln(n)^2}{n}\right).$$

Par les croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)^2}{n} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(n)^2}{n}\right) = 1.$

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$

2. *On considère la suite suivante :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}.$$

Ici, les deux termes sont du même ordre de grandeur. L'astuce consiste à multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ *:*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Puis

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = 1.$

Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$

Test 9 (***Voir la solution.***)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}.$$

Test 10 (***Voir la solution.***)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

- On peut aussi parfois déterminer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'un encadrement par deux suites équivalentes entre elles.

Exemple 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n+1 \leqslant \frac{u_n}{2} \leqslant 2n+2.$$

Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n$.

On a :

$$2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \quad \text{et} \quad 2n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n.$$

En divisant par $2n$ membre à membre, on trouve

$$1+\frac{1}{2n} \leqslant \frac{u_n}{4n} \leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ on déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{4n} = 1$ c'est-à-dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n$.

Test 11 (***Voir la solution.***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n+\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n+2\sqrt{n}.$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

2.3 Les erreurs à ne pas commettre

1. Il ne faut pas sommer (ou soustraire) les équivalents (voir les tests 6 et 7).
2. On ne compose pas les équivalents : on ne passe pas à l'exponentielle, au logarithme dans un équivalent;cela est faux en général ou demande une justification! (voir test 8)
3. On ne passe pas à la « puissance n » dans un équivalent (où n est l'indice de la suite) : dans la proposition 5.5 l'exposant est indépendant de n! (Voir TD exercice 4)
4. On n'écrit jamais $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$: lorsqu'on écrit cela, dans 99,99% des cas c'est qu'on a faux (dans le 0,01% de cas où c'est juste, c'est dire de façon inutilement compliqué que $u_n = 0$ à partir d'un certain rang...)
5. On ne supprime pas les constantes multiplicatives dans les équivalents (contrairement à ce qu'on a pu voir sur les o) :

$$u_n = o(2e^n) \Longleftrightarrow u_n = o(e^n)$$

mais

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^n \quad \text{n'a rien avoir avec} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$$

3 Objectifs

1. Connaître et avoir compris la définition de suite négligeable devant une autre, de suites équivalentes.
2. Savoir montrer que deux suites sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
3. Connaître par coeur les croissances comparées en terme de petits o et les équivalents usuels.
4. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.
5. Savoir déterminer un équivalent par encadrement ou de manière directe.

4 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncer.***)

D'après la définition de « o », $u_n = o(0)$ si et seulement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \epsilon_n \times 0$. Autrement, une suite est un petit o de 0 si et seulement si u_n est nul à partir d'un certain rang.

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncer.***)

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncer.***)

Toutes les suites sont non nulles à partir d'un certain rang, on peut donc utiliser la caractérisation.

1. *Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Donc $v_n = o(u_n)$.*
2. *Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Donc $u_n = o(v_n)$.*
3. *On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{b-a}} = 0$ car $b - a > 0$. Donc $u_n = o(v_n)$.*

Correction du test 4 (***Retour à l'énoncer.***)

Les termes de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sot non nuls et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{e^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\ln n}} &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln n}} \times \frac{\frac{1}{n} + 1 + \frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n} + \frac{\ln n}{2^n} + 1} \\ &= \frac{\ln n}{n} \times \frac{\frac{1}{n} + 1 + \frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n} + \frac{\ln n}{2^n} + 1}.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc, par somme, quotient et produit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} + 1 + \frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n} + \frac{\ln n}{2^n} + 1} = 1 \quad \textit{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Ainsi, $u_n = o(v_n)$.

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncer.***)

3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda \neq 0$ un réel non nul. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Par conséquent, comme $\lambda \neq 0$, on a

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \left(\frac{1}{\lambda}\epsilon_n\right)(\lambda v_n)$$

   avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\epsilon_n = \frac{1}{\lambda} \lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Donc $u_n = o(\lambda v_n)$.
4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suite et supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Donc,

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n w_n = \epsilon_n v_n w_n.$$

   Ainsi, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$.

Correction du test 6 (***Retour à l'énoncer.***)

1. *La suite* $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes non nuls et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^2}{e^n}+\frac{n^3}{e^n}\right)=1$$

car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n}=0$ *par croissance comparée. D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien*

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^n.$$

2. *De même, la suite* $(e^n+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes non nuls et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^3}{e^n+n^2}\right)=1$$

car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n}\times\frac{1}{1+\frac{n^2}{e^n}}=0.$$

D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^n+n^2.$$

3. *En revanche, pour tout* $n\geqslant 1$*, on a*

$$\frac{u_n-e^n}{n^2}=\frac{n^2+n^3}{n^2}$$

donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-e^n}{n^2}=+\infty$*. Par conséquent,* u_n *n'est pas équivalent à* e^n-n^2*. En particulier, on ne peut pas soustraire ou additionner membre à membre des équivalents !*

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncer.***)

1. *Les termes sont non nuls et pour tout* $n\geqslant 1$

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n+\sqrt{n}}{n+\ln n}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{\ln n}{n}}$$

D'après les croissances comparées et les opérations sur les limites, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

Donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$*.*

2. *Pour tout* $n\geqslant 1$*, on a*

$$\frac{u_n-n}{v_n-n}=\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-n}{v_n-n}=+\infty.$$

Ainsi, u_n-n *n'est pas équivalent à* v_n-n*. On voit encore qu'on ne peut pas soustraire ou additionner membre à membre des équivalents !*

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncer.***)

On considère

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=n+1\quad\text{et}\quad v_n=n.$$

1. *On voit facilement que* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ *donc* $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$*.*

2. *En revanche*

$$\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}}=\frac{e^{n+1}}{e^n}=e.$$

Le quotient ne converge donc pas vers 1. Par conséquent, e^{u_n} *et* e^{v_n} *ne sont pas équivalents.*

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}.$$

Ici, le terme prépondérant est $\sqrt{n^2+1}$ *qui est de l'ordre de* n *(car* $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$*). Pour tout* $n \geqslant 1$*, on a*

$$u_n = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$*, on a, par définition de la relation d'équivalence*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

pour tout $n \geqslant 1$ *on a*

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n+1}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Comme, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = 1$*, on a, par définition de la relation d'équivalence*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}.$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

En divisant membre à membre par n *on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Par encadrement, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = 1$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$*.*