TD4-Familles de vecteurs

Exercice 1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_5$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, la famille (A, B, C) est libre.

Exercice 2. 1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) = (0,0,0)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -3\lambda_3 \end{array}\right.$$

En prenant $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$, on voit que

$$\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) = (0,0,0).$$

Donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Pour savoir si $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non, on peut procéder de plusieurs façons :

- Méthode 1 (voir chapitre 5) : supposons qu'elle l'est. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, alors c'est une base. En particulier, elle est libre ce qui contredit ce qui précède. Par conséquent, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Méthode 2 : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$
$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \ (x,y,z) = \lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8)$$
$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & y \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & x+y \\ & - & 5\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & z-2x \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$
$$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{x+y}{3} \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{2x-z}{5} \end{array}\right.$$
$$\iff \frac{x+y}{3} = \frac{2x-z}{5}.$$

Donc, par exemple le vecteur $(0,0,1)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ car

$$\frac{0+0}{3} \neq \frac{2\times 0-1}{5}.$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(X^2+2X)+\lambda_2(X^2+X+1)+\lambda_3(X+2)=0\\
\iff& \lambda_2+2\lambda_3+(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X+(\lambda_1+\lambda_2)X^2=0\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\end{array}\right.\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_1 & = & -\lambda_2\end{array}\right.\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccc} 3\lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & \lambda_2\\ \lambda_1 & = & -\lambda_2\end{array}\right.\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & = & 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre.

(b)
- Méthode 1 (voir chapitre 5) : comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=3=\dim\mathbb{R}_2[X]$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, alors c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En particulier, elle est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vect}(X^2+2X,X^2+X+1,X+2)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+2X,-X+1,X+2) \quad \text{en soustrayant le } 1^{er} \text{ vecteur au } 2^{ieme}\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+2X,-X+1,3) \quad \text{en ajoutant le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 3^{ieme}\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+2X,-X+1,1)\\
&=\mathrm{Vect}(X^2+2X,-X,1) \quad \text{en soustrayant le } 3^{ieme} \text{ vecteur au } 2^{ieme}\\
&=\mathrm{Vect}(X^2,-X,1) \quad \text{en ajoutant deux fois le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 1^{er}\\
&=\mathrm{Vect}(X^2,X,1)=\mathbb{R}_2[X].
\end{aligned}$$

- Méthode 3 : en montrant que pour tout $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$ le système

$$a_0+a_1X+a_2X^2=\lambda_1(X^2+2X)+\lambda_2(X^2+X+1)+\lambda_3(X+2)$$

d'inconnues $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ possède des solutions.

3. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & & & 2\lambda_2 & = & 0\end{array}\right. \qquad L_4\leftarrow L_4-L_1\\
\iff& \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille est donc libre.

(b)
- Méthode 1 (voir chapitre 5) : la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4 et comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=3<4$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Méthode 2 : soit $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\\
\iff& \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.\\
\iff& \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & t\end{array}\right.\\
\iff& \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x\\ & & -\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & y-2x\\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z\\ & & & & 2\lambda_2 & = & t-x\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1\end{array}\\
\iff& \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & + & \lambda_3 & = & x\\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2x-y\\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z\\ & & 2\lambda_2 & = & t-x\end{array}\right.\\
\iff& 2x-y=z
\end{aligned}$$

Donc par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 (2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2 (3^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3 (4^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n + \lambda_3 4^n = 0 \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \quad (n=0) \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 \quad (n=0) \\ 4\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 16\lambda_3 & = & 0 \quad (n=2) \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 5\lambda_2 & + & 12\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \\ & & -10\lambda_3 & + & 12\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Supposons que $(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Alors il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5^n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n + \lambda_3 4^n.$$

Donc, en divisant par 5^n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = \lambda_1 \left(\frac{2}{5}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \lambda_3 \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

En passant à la limite dans cet égalité, on obtient :

$$1 = 0.$$

Ceci est une contradiction. Ainsi $(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En particulier F n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

On cherche à montrer que nécessairement, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$. Supposons par l'absurde que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et considérons n_0 le plus petit entier de $\{0, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k < n_0$, $\lambda_k = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} &= \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \quad \text{car, pour tout } k < n_0,\ \lambda_k = 0 \\
&= e^{-n_0 x} \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \\
&= e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right).
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = 0.$$

Or , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-n_0 x} \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} = 0.$$

De plus, pour $k \geq n_0 + 1$, $n_0 - k < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(n_0-k)x} = 0$. Donc, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k \lim_{x\to+\infty} e^{(n_0-k)x} = \lambda_{n_0}.$$

Cela est absurde car, par définition de n_0, $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, notre supposition est fausse et donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$.

On a montré que

$$\forall (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est donc libre.

Exercice 4. On note F l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

1. • F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non-vide car la suite nulle vérifie la relation de récurrence.

- Montrons que F est stable par combinaison linéaire. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F, $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\begin{aligned} u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= 2u_{n+1} + u_n + \lambda(2v_{n+1} + v_n) \\ &= 2(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + u_n + \lambda v_n. \end{aligned}$$
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Donc pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F. Cela montre que F est stable par combinaison linéaire.
- D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions distinctes $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{2}$. Par conséquent, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$
Ainsi, $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{2}$ conviennent.

3. (a) D'après la question précédente, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Cela signifie que tout élément de F est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Réciproquement, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à F donc $\mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset F$.
Finalement, $F = \mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et la famille $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc une famille génératrice de F.

(b) On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$.
D'autre part, $1 + \sqrt{2} > 1 > 0$ donc $|r_2| = r_2 = 1 + \sqrt{2} > 1$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$
où $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| \leq \frac{|r_1|}{|r_2|} < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(c) On sait que c'est une famille génératrice de F. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et supposons que
$$\lambda_1(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$$
Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n = 0.$$
En factorisant par $b_n \neq 0$, on trouve que pour tout entier naturel n :
$$b_n\left(\lambda_1 \frac{a_n}{b_n} + \lambda_2\right) = 0.$$
Or $b_n \neq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\lambda_1 \frac{a_n}{b_n} + \lambda_2 = 0.$$
Grâce à la question, précédente, en passant à la limite on obtient
$$0 = \lim_{n\to+\infty} \lambda_1 \frac{a_n}{b_n} + \lambda_2 = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 = \lambda_2.$$
Ainsi $\lambda_2 = 0$. On vérifie ensuite que $\lambda_1 = 0$. Ainsi, on a montré que
$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_1(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$
La famille est donc libre. Par ce qui précède, on peut conclure que c'est une base de F.

4. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
- Analyse (recherche d'une condition nécessaire) : soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
En prenant $n = 0$ et $n = 1$ on obtient
$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & = & 2 \\ \alpha(1-\sqrt{2}) & + & \beta(1+\sqrt{2}) & = & 3 \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} & & \beta & = & 2-\alpha \\ \alpha(1-\sqrt{2}) & + & (2-\alpha)(1+\sqrt{2}) & = & 3 \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} \beta & = & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \alpha & = & 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

- Synthèse : on vérifie que réciproquement, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) a_n + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) b_n$$

car la suite définie par le membre de droite vérifie la même relation de récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les mêmes conditions initiales.

- Ainsi, les coordonnées de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sont $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Exercice 5.

1. - E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non vide car $A0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}D$.
   - Montrons que E est stable par combinaison linéaire. Soient M, N deux éléments de E, $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $M + \lambda N \in E$.

     Comme $M \in E$, on sait que $AM = MD$ et, de même, comme $N \in E$, on sait que $AN = ND$. Ainsi

     $$\begin{aligned} A(M+\lambda N) &= AM + A(\lambda N) \\ &= MD + \lambda AN \\ &= MD + \lambda ND \\ &= (M+\lambda N)D \end{aligned}$$

     Ainsi, $M + \lambda N \in E$. Ainsi, pour tout $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $M + \lambda N \in E$. Cela montre que E est stable par combinaison linéaire.
   - D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. On a

   $$AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

   Ainsi

   $$\begin{aligned} M \in E &\iff AM = MD \\ &\iff \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &\iff z = 0 \quad \text{et} \quad y = t. \end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. D'après la question précédente, on

   $$\begin{aligned} M \in E &\iff z = 0 \quad \text{et} \quad y = t \\ &\iff M = \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &\iff M = xU + tA. \end{aligned}$$

   Ainsi, $E = \mathrm{Vect}(U, A)$ et la famille (U, A) est donc génératrice de E. De plus, U et A ne sont pas colinéaires donc (U, A) est une famille libre. Ainsi la famille (U, A) est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

4. On a

   $$UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Comme UA ne satisfait pas les équations de la question 2, on en conclut que $UA \notin E$.

Exercice 6.

Exercice 7.

1. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. On note $e_1 = (3, 1, 3)$, $e_2 = (2, 2, 1)$ et $e_3 = (4, 3, 2)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$\begin{aligned}
& (x, y, z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\
\iff & \begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = y \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} 3\lambda_1 + {\color{red}2\lambda_2} + 4\lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = y - x \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
\iff & \begin{cases} 3\lambda_1 + {\color{red}2\lambda_2} + 4\lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = y - x \\ 3\lambda_1 = 2z - x \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \\
\iff & \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x - 3\lambda_1 - 4\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 = x - y - \lambda_1 \\ \lambda_1 = \frac{2z - x}{3} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x - 3\frac{2z-x}{3} - 4\left(x - y - \frac{2z-x}{3}\right)}{2} \\ \lambda_3 = x - y - \frac{2z-x}{3} \\ \lambda_1 = \frac{2z-x}{3} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} \lambda_2 = \frac{-7x+6y+5z}{3} \\ \lambda_3 = \frac{5x-3y-4z}{3} \\ \lambda_1 = \frac{2z-x}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, (x,y,z) est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3. Plus précisément, on a

$$(x,y,z) = \frac{2z-x}{3} \cdot e_1 + \frac{-7x+6y+5z}{3} \cdot e_2 + \frac{5x-3y-4z}{3} \cdot e_3.$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. En appliquant les calculs précédents avec $(x,y,z) = (0,0,0)$ on voit que

$$(0,0,0) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda_2 & = & \frac{-7\times 0+6\times 0+5\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_3 & = & \frac{5\times 0-3\times 0-4\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_1 & = & \frac{2\times 0-0}{3} = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base[1] de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont :

$$\left(\frac{2z-x}{3}, \frac{-7x+6y+5z}{3}, \frac{5x-3y-4z}{3}\right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

2. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1) + x(1,0,0).$$

La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\lambda_1(0,1,0) + \lambda_2(0,0,1) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est donc libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont (y,z,x). En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(2,1,3)$.

3. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$P = \lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 \iff P = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3X^2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & a_1 \\ & & & & \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ \lambda_2 & = & a_1 + 2a_2 \\ \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right.$$

1. Avec les résultats du chapitre 5 on peut simplement montrer que $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. La même remarque vaut pour les questions suivantes.

Ainsi, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, P est combinaison linéaire de 1, $X-1$ et $(X-1)^2$; plus précisément :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 1 + (a_1 + 2a_2) \cdot (X-1) + a_2 \cdot (X-1)^2.$$

- La famille $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée formée de vecteurs non nuls donc elle est libre.
- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ dans cette base sont $(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, a_2)$. En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(3,3,1)$.

4. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$; on a :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z & \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & \\ & & & - & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & z+y-x & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & x - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & x - y - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_4 & = & z + y - x + \lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & \frac{3x+2y-2z-t}{4} \\ \lambda_2 & = & \frac{-x-2y+2z+3t}{4} \\ \lambda_4 & = & \frac{2z+2y-x-t}{4} \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$. En appliquant les calculs précédents avec $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ on voit que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

  Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.
- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t\end{pmatrix}$ dans cette base sont :

$$\left(\frac{3x+2y-2z-t}{4}, \frac{-x-2y+2z+3t}{4}, \frac{x-t}{2}, \frac{2z+2y-x-t}{4}\right).$$

  En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$.

Exercice 8.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Fait en TD.
5. Soit $F=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

   On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2a & 0 & 3a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & -b & 2b\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.
   Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
   Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)$ est une base de F.
6. Même question que 4.
7. Notons $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b=c+d\right\}$. Alors :

$$\begin{aligned} F &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a=-b+c+d\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -b+c+d & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ (b,c,d)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ (b,c,d)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ;\ (b,c,d)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de F.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\lambda_1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_3 &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_3 &=& 0\end{array}\right.$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est libre.
C'est une famille libre et génératrice de F donc une base de F.