Aix–Marseille Université | 2018-2019

Mathématiques – L2 – MPCI

PLANCHE D'EXERCICES 1 : ESPACE PRÉHILBERTIENS

1 Produits scalaires

Exercice 1 *On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\phi(A, B) = tr({}^tAB)$.*

1. *Montrer que ϕ est un produit scalaire.*
2. *Écrire l'expression de la norme associée dans la base canonique ? De quelle norme s'agit-t-il ?*
3. *Écrire l'inégalité triangulaire.*

Exercice 2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application définie par*

$$\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 *La matrice* $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *est-elle la matrice d'un produit scalaire ?*

Exercice 4 *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictements positifs tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

et préciser le cas d'égalité.

Exercice 5 *On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\phi(A, B) = tr(AB)$. Montrer que ϕ n'est ni positive ni négative.*

Exercice 6 *Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$, l'espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur $[-1, 1]$. Pour chaque $f \in E$, on définit*

$$q(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 t^2 e^{-t} \, dt.$$

1 - Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

2 - Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.

Exercice 7 (Partiel) *On considère le produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$ donné par*

$$< X, Y >= \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2$$

1. *Montrer que $< X, Y >=^t \overline{X}Y$ pour tous vecteur X, Y de $\mathbb{C}^2$.*
2. *Soit M une matrice de $M_2(\mathbb{C})$, montrer que*

$$< MX, Y >=< X, ^t\overline{M}Y > .$$

3. *Supposons que ${}^t\overline{M}M = Id$, calculer alors $||MX||$.*
4. *Donner une matrice non diagonale M vérifiant la question précédente.*

Exercice 8 *On note $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\sum_{n\geq 0} |u_n|^2$ converge.*

1. *Soient u et v deux éléments de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \overline{u}_n v_n$ est absolument convergente.*
2. *Montrer que la formule*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\geq 0} \overline{u}_n v_n$$

défini un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

3. *Montrer que pour tout $n \geq 0$, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Exercice 9 *On a vu en cours qu'une norme issue d'un produit scalaire vérifie l'égalité du parallélogramme. L'objectif de cet exercice est de montrer la réciproque dans le cadre réel : une norme vérifiant l'identité du parallélogramme est issue d'un produit scalaire.*

Soit E un espace vectoriel réel et N une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$N(x + y)^2 + N(x - y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2),\ \forall x, y \in E.$$

Guidé par l'expression de la forme polaire d'un produit scalaire, on pose

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(N(x + y)^2 - N(x - y)^2).$$

1. *Montrer que, pour $x, y \in E$, $2B(x, \frac{y}{2}) = B(x, y)$.*
2. *En déduire que pour x_1, x_2, y des éléments de E, on a*

$$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y).$$

3. *Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y).$$

4. *Conclure que B est un produit scalaire dont la norme associée est N.*

2 Orthogonalité

Exercice 10 *Soit E un espace préhilbertien et soit A et B des parties de E.*

1. *Montrer que $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.*
2. *Si A et B sont des sous-espaces vectoriels montrer que $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.*
3. *Si A et B sont des sous-espaces vectoriels montrer que $A^{\perp} + B^{\perp} \subset (A \cap B)^{\perp}$. Que dire de plus si E est de dimension finie ?*

Exercice 11 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère le sous-espace vectoriel propre H constitué des éléments de E s'annulant en zéro. Montrons que $H^{\perp} = \{0\}$. En déduire que $H^{\perp\perp} \neq H$ et $H \oplus H^{\perp} \neq E$.

Exercice 12 (Partiel) *On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues définies sur $[0; 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit alors l'application ϕ sur $E \times E$ par*

$$(f, g) \mapsto \phi(f, g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)dt.$$

- *Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.*
- *Ecrire l'inégalité de Cauchy Schwarz.*
- *Les deux fonctions 1 et $\cos$ sont elles orthogonales pour ϕ ?*
- *Trouver une BON du sous-espace de E engendré par ces deux fonctions.*

Exercice 13 *Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire*

$$\phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

Déterminer une base orhonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.