Chapitre 7 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

1. *Montrer que :* $\forall n > 1$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. *Montrer que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Montrer, à l'aide d'un télescopage, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Test 3 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.
3. *Montrer que* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *n'est pas majorée et en déduire la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Test 6 (*Voir solution.*)

On considère la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$.

1. *Montrer que le série est convergente et calculer sa somme.*
2. *Avec une boucle* for, *écrire une fonction Python qui prend un argument un entier naturel* n *et qui renvoie la somme partielle d'indice* n *de la série.*
3. *Avec une boucle* while, *écrire une fonction Python qui prend un argument un réel* `epsilon` > 0 *et qui renvoie l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à* `epsilon` *près.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} (n^{27} + 2n^3)3^{-n}$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
2. $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$.
3. $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$.

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a pour tout entier* $n>1$: $n(n-1)\leqslant n^2$. *Donc par décroissance de la fonction inverse sur* $]0,+\infty[$:
$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\geqslant\frac{1}{n^2}.$$
2. *Pour tout* $n\geqslant 1$ *on en déduit :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \quad \textit{d'après la question précédente}\\ &\leqslant 1+1-\frac{1}{n} \quad \textit{par télescopage}\\ &\leqslant 2.\end{aligned}$$
Ainsi $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *Pour tout* $n\geqslant 1$, *on a :*
$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}\geqslant 0.$$
Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est croissante. De plus, elle est majorée donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Ainsi la série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *converge.*

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Pour tout $n\geqslant 1$, *on a :*
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln(n).$$
Par conséquent, pour tout $n\geqslant 1$, *on obtient :*
$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1).$$
Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *On a :*
$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$
Or, pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, *on a :* $\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{2n}$. *On en déduit donc :*
$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}(2n-(n+1)+1)=\frac{1}{2}.$$
Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}-S_n\geqslant\frac{1}{2}$.
2. *Montrons par récurrence que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2^n}\geqslant\frac{n}{2}$.
   - ⋆ *Initialisation :* $S_{2^0}=S_1=1\geqslant 0$.
   - ⋆ *Hérédité : supposons que* $S_{2^n}\geqslant\frac{n}{2}$ *pour un certain* $n\in\mathbb{N}^*$ *et montrons que* $S_{2^{n+1}}\geqslant\frac{n+1}{2}$.
   Comme $2^{n+1}=2\cdot 2^n$, *d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a :*
$$S_{2^{n+1}}\geqslant S_{2^n}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$
   - ⋆ *Par le principe de récurrence, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2^n}\geqslant\frac{n}{2}$.

3. *D'après la question précédente $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas majorée. En effet, supposons qu'elle le soit : il existe un réel $A>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n\leqslant A$. Alors pour un entier N tel que $N>2A$ on a*

$$A<\frac{N}{2}\leqslant S_{2^N}\leqslant A$$

ce qui est absurde ! Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est non majorée. De plus, elle est croissante car Pour tout $n\geqslant 1$, on a

$$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}\geqslant 0.$$

Par convergence monotone, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge donc vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est donc divergente.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)+k}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{2}<1$, donc toutes deux convergentes. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=6.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+7}{2^k k!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(k-1)!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+7}{2^n n!}$ converge aussi et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+7}{2^n n!}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+7e^{\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *En procédant comme au test 4, on montre que la série est convergente et que sa somme vaut $\frac{3}{2}$.*
2. *Avec une boucle* for

```
def somme(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        s=s+i^2/3^i
    return s
```

3. *Avec une boucle* while

```
import numpy as np
def indice(epsilon)
    n=0
    s=0
    while np.abs(s-3/2)>epsilon:
        s=s+n^2/3^n
```

```
        n=n+1
    return n
```

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $n^2 + \sqrt{n} \geqslant n^2$. Donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient :*

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

   Par suite, pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

   Or, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est convergente.

2. *Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $\sqrt{n^3-1} \leqslant \sqrt{n^3}$. On en déduit de même que précédemment :*

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}.$$

   Or, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann divergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ est divergente.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

Par croissance comparée et opération sur les limites, on voit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot (n^{27}+2n^3)3^{-n} = 0.$$

Ainsi : $(n^{27}+2n^3)3^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
De plus, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^{27}+2n^3)3^{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27}+2n^3)3^{-n}$ est convergente.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On sait que :* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$*. Par équivalent usuel, on a donc :*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Or les séries $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ *est convergente.*

2. *Pour tout* $n \geqslant 0$ *on a :*

$$\frac{2^n-3^n}{2^n-4^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)}{4^n\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n-1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$*. Par conséquent :* $\frac{2^n-3^n}{2^n-4^n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n$*.*
Or la série $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ *est à termes positifs car pour tout* $n \geqslant 0$*,* $2^n - 3^n \leqslant 0$ *et* $2^n - 4^n \leqslant 0$*. La série* $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *est aussi à termes positifs et converge par le critère de convergence des séries géométriques. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que* $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ *est convergente.*

3. (a) *Pour tout* $n \geqslant 1$ *on a :*

$$\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \frac{n^2}{e^n}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}.$$

De plus, par croissances comparées, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2} = 0.$$

Par opérations sur les limites on en déduit alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}} = 1.$$

Cela montre : $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} \sim \frac{n^2}{e^n}$*.*

(b) *De plus, toujours par croissance comparée, on sait que :* $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{n^2}{e^n} = 0$*. Donc* $\frac{n^2}{e^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$*.*
Les séries $\sum \frac{n^2}{e^n}$ *et* $\sum \frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série* $\sum \frac{n^2}{e^n}$ *converge.*

(c) *Comme* $e^n - n - 2\ln n = e^n(1 - ne^{-n} - 2e^{-n}\ln n)$*, on en déduit par croissance comparée que*

$$\lim_{n\to+\infty} e^n - n - 2\ln n = +\infty.$$

En particulier, $e^n - n - 2\ln n$ *est positif à partir d'un certain rang.*

(d) *Finalement, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que* $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$ *est de même nature que* $\sum \frac{n^2}{e^n}$ *donc converge.*

Remarque : *on peut remplacer les étapes (a) et (b) par le calcul suivant :*

$$n^2\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \frac{n^4}{e^n}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}$$

pour montrer, par croissance comparée, que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *puis conclure par le critère de comparaison. Dans les deux cas, il convient de justifier soigneusement que la série est à termes positifs à partir d'un certain rang car ce n'est pas si évident.*

Correction du test 10 (***Retour à l'énoncer.***)

Montrons que la série est absolument convergente. On a, pour tout entier naturel n :

$$\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} = \frac{(-1)^n n^5}{e^n}\frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}} = 1$.
Ainsi : $\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \sim \frac{(-1)^n n^5}{e^n}$. *Par compatibilité de la relation d'équivalence avec la valeur absolue, on en déduit :*

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \sim \frac{n^5}{e^n}$$

puis :

$$n^2\cdot\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \sim \frac{n^7}{e^n}.$$

Or par croissance comparée, on sait que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{e^n} = 0$. *On en déduit donc :*

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les séries $\sum\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ *et* $\sum\frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série* $\sum\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ *converge. Donc* $\sum\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$ *est absolument convergente. En particulier elle converge.*