Exercice 1

1) Étude préalable de f sur $[0,1]$

f est une fonction polynomiale donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -3(1-x)^2 + 1$

Soit $x \in [0,1]$, $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{3} \geq (1-x)^2$

$$\iff \sqrt{\tfrac{1}{3}} \geq 1-x \geq -\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$\iff x \in \left[1-\sqrt{\tfrac{1}{3}} \,;\, 1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right]$$

Ainsi :

x	0		$1-\sqrt{\frac{1}{3}}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f		↘		↗	

De plus, $f(0) = 1 = f(1)$

$$f\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \left(1-\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\right)^3 + 1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)^3 + 1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}} > 0$$

* f est strictement décroissante sur $\left[0, 1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$
  donc, $\forall x \in \left]0, 1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$, $f(x) \in \left[f\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right); f(0)\right[\subset$
* f est strictement croissante sur $\left[1-\sqrt{\frac{1}{3}} ; 1\right]$
  donc, $\forall x \in \left[1-\sqrt{\frac{1}{3}} ; 1\right[$, $f(x) \in \left[f\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right), f(1)\right[\subset \left]0,1\right[$

Ainsi, $\forall x \in \left]0;1\right[$, $f(x) \in \left]0,1\right[\quad (*)$

Rmq : $\left]0,1\right[$ est stable par f.

(Fin de l'étude de f)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

Initialisation : $u_0 = 0,4$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que la propriété est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
Par hypothèse de récurrence, on a : $0 < u_n < 1$
Donc par $(*)$ on a : $0 < f(u_n) = u_{n+1} < 1$
Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$0 < u_n < 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (1-u_n)^3$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1-u_n)^3 \geq 0$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_n$ est donc croissante

3) D'après les questions 1 et 2, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone $(u_n)_n$ converge.

Notons ℓ sa limite. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que ℓ est un point fixe de f.

Or, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \iff (1-x)^3 = 0 \iff x = 1$

L'unique point fixe de f est donc 1.

Ainsi $\ell = 1$ et $(u_n)_n$ converge vers 1.

Exercice 2

1) La fonction exponentielle est strictement croissante donc f est strictement croissante.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - x$$

g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = e^{x} - 1$$

Sur $]-\infty ; 0]$: $\forall x \in]-\infty ; 0]$ $\quad g'(x) \leq 0$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Ainsi g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Donc, pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on a :

$$g(x) > g(0) = 0.$$

Sur $[0, +\infty[$: $\forall x \in [0 ; +\infty[$ $\quad g'(x) \geq 0$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Ainsi g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$g(x) > g(0) = 0$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = x \iff g(x) = 0$$

donc l'équation $f(x) = x$ admet comme unique solution 0

D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) - x = g(x) \geq 0$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$

d'après la question précédente.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} \geq u_n$.

La suite $(u_n)_n$ est donc croissante.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 = 1$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$

4) La suite $(u_n)_n$ est croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone, ou bien elle diverge vers $+\infty$ ou bien elle converge.

Supposons par l'absurde qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de f.

D'après la question 2) on a donc $\ell = 0$.

Or,

$$\forall n, \quad u_n \geq 1$$

donc par passage à la limite on trouve $\ell \geq 1$. Contradiction

Ainsi $(u_n)_n$ ne converge pas.

Donc $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3

1) La fonction f est somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

On en déduit

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variat° de f	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$

Initialisation : $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $f(u_n)$ est bien défini et, d'après l'étude des variations de f, $f(u_n) \geqslant f(1) > 0$.

Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et strictement positif.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > 0$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

La suite est donc strictement croissante.

4) Soit $x \in]0,+\infty[$.

$x = f(x) \iff x + \frac{1}{x} = x \iff \frac{1}{x} = 0$

Donc f n'a pas de point fixe

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite. Par croissance on a

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \geqslant u_0 = 1$

donc en passant à la limite : $\ell \geqslant 1$, donc $\ell \in]0,+\infty[$.

Or f est continue sur $]0,+\infty[$, $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in]0,+\infty[$. D'après le cours, ℓ est un point fixe de f. Ceci est absurde car f ne possède pas de point fixe.

Ainsi $(u_n)_n$ diverge (mieux, comme elle est croissante d'après le théorème de convergence monotone, elle diverge vers $+\infty$).

5)
```
n = input('Entrer la valeur de n:')
u = 1
for k = 1:n
    u = u + 1/u
end
disp(u)
```

Exercice 4

1) Les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\ln(x) - 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est le produit de ces deux fonctions.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{\left(x \times \frac{1}{x} + \ln(x)\right)x - (x\ln x - 1)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0$$

Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étudions les limites de φ en 0 et $+\infty$

- en zéro : par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x - 1 = -1$.

  Par quotient, on a donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$

- en $+\infty$: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

  Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$. Donc, par somme,

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Ainsi

x	0	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left]\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)\right[= \mathbb{R}$ (de plus sa bijection réciproque φ^{-1} est continue et croissante). En particulier, comme $0 \in \varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$, 0 possède un unique antécédent par φ donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.

On a $\varphi(1) = \frac{1 \times \ln 1 - 1}{1} = -1$ et $\varphi(e) = \frac{e\ln e - 1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

donc $\varphi(1) < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e)$

Comme φ^{-1} est croissante stricte on a : $1 < \alpha < e$.

donc $1 \leqslant \alpha \leqslant e$.

3) Montrons par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant \alpha$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 = e$ et d'après la question précedente $\alpha < e$

La propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> : supposons la propriété vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de recurrence, $u_n > \alpha$.

Montrons que $u_{n+1} > \alpha$.

Par croissance stricte de φ, on a : $\varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0$

On en déduit que :

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > u_n > \alpha.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > \alpha.$$

4) Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel L.

En passant à la limite dans l'inégalité de la question 3 on trouve que $L \geqslant \alpha$.

Or, la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \varphi(x) + x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $L \in \mathbb{R}_+^*$

donc L est un point fixe de g.

Etudions les points fixe de g : soit $L \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$g(L) = L \iff \varphi(L) + L = L \iff \varphi(L) = 0 \iff L = \alpha.$$

Ainsi, si $(u_n)_n$ converge, sa limite est nécessairement α.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) + u_n - u_n = \varphi(u_n)$$

Or, par strict croissance de φ et d'après la question 3, on a :

$$\varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0.$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$.

6.) D'après la question 5 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n > u_0$$

Supposons que $(u_n)_n$ converge et notons L sa limite.
En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus on trouve que :
$$L \geqslant u_0 > \alpha.$$

Or d'après la question 4, $L = \alpha$ donc on a
$$\alpha = L \geqslant u_0 > \alpha.$$

Contradiction.
Ainsi $(u_n)_n$ diverge. Comme elle est croissante, par le théorème de convergence monotone, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 5

1) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[\quad , \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Etudions le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$: soit $x \in]0,+\infty[$
$$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff x > 1$$
et $f'(x) = 0 \iff x = 1$.

On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On a : ∗ $f(1) = 1$

∗ $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

∗ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

2) f est continue sur $]0,1]$ (car dérivable sur $]0,1]$) et strictement décroissante sur $]0,1]$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de

$]0,1]$ sur $f(]0,1]) = [1,+\infty[$. Comme $2 \in f(]0,1])$, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution dans $]0,1]$, notée a. Comme $f(1)=1$, $a \neq 1$ donc $0 < a < 1$.

De même, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution $b \in [1,+\infty[$ et $b \neq 1$ car $f(1)=1$. Donc $1 < b$.

3) f est strictement croissante et continue sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. De plus sa bijection réciproque, notée g, est continue et strictement croissante.

Or $f(2) = 2 - \ln 2 < 2 = f(b) < 4 - \ln 4 = 4 - 2\ln 2 = f(4)$

donc par croissance de g :

$$2 = g(f(2)) \leqslant g\circ f(b) = b \leqslant g\circ f(4) = 4.$$

Ainsi $b \in [2;4]$.

4) Cela se montre par recurrence en utilisant le fait que si $u_n \geqslant b > 1$, par croissance $\ln$ on a :

$$u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 \geqslant \ln(b) + 2 = b \quad \text{car} \quad b - \ln b = 2.$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) - u_n + 2 = 2 - f(u_n)$$

Or, f est croissante sur $[1,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < b \leqslant u_n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2 = f(b) \leqslant f(u_n)$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = 2 - f(u_n) \leqslant 0.$$

La suite est donc décroissante.

De plus elle est minorée par b donc elle converge vers une limite ℓ.

Comme pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant b$, par passage à la limite $\ell \geqslant b$. En particulier $\ell \in [1,+\infty[$.

La fonction $x \mapsto \ln x + 2$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc ℓ est un point fixe de cette fonction.

Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln x + 2 = x \iff f(x) = 2 \iff x = b$

Ainsi, $\ell = b$ donc $(u_n)_n$ converge vers b.

6) a) Soit h la fonction définie sur $[b ; +\infty[$ par

$$\forall x \in [b, +\infty[\qquad h(x) = \ln x + 2$$

h est dérivable sur $]b ; +\infty[$, continue sur $[b, +\infty[$ et

$$\forall x \in]b, +\infty[, \; 0 \leqslant h'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{car } b \geqslant 2 \text{ d'après 3)}..$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [b, +\infty[^2$ tel que $x > y$ on a : $0 \leqslant h(x) - h(y) \leqslant \frac{1}{2}(x - y)$.

D'après 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant h(u_n) - h(b) \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

Or $u_{n+1} = h(u_n)$ et $b - \ln b = 2$ donc $b = h(b)$.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

b) Par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - b \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - b) = \frac{1}{2^n}(4 - b)$$

De plus, $b \geqslant 2$ donc $-b \leqslant -2$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^n}(4 - 2) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

7) a)

```
function u = suite(n)
    u=4
    for k=1:n
        u= log(u) + 2
    end
endfunction
```

b) `while 1/2^(n-1) > epsilon`

Exercice 6

1) $u_1 = f(u_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$

2) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si $(u_n)_n$ converge sa limite est un point fixe de f. Déterminons les points fixes de f : soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = x \iff x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - \frac{3}{4} = 1/4$ donc les racines sont $\ell_1 = \frac{1 - 1/2}{2} = \frac{1}{4}$ et $\ell_2 = \frac{1+1/2}{2} = 3/4$

Les points fixes de f sont donc $1/4$ et $3/4$. Donc les limites possibles de $(u_n)_n$ sont $1/4$ et $3/4$

3) f est strictement croissante donc $f([0, \frac{7}{16}]) = [f(0), f(\frac{7}{16})]$

Or $f(0) = \frac{3}{16} \geq 0$ et $f(\frac{7}{16}) = \left(\frac{7}{16}\right)^2 + \frac{3}{16} = \frac{1}{16^2} \times (49 + 3 \times 16)$

$\leq \frac{7 \times 16}{16^2} = \frac{7}{16}$

Donc $f([0, \frac{7}{16}]) \subset [0, \frac{7}{16}]$.

Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, \frac{7}{16}]$

Initialisation : $u_1 = \frac{7}{16} \leq \frac{7}{16}$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang n+1. Par hypothèse de récurrence $u_n \in [0, \frac{7}{16}]$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, \frac{7}{16}]) \subset [0, \frac{7}{16}]$.

La propriété est vraie au rang n+1

Conclusion : d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \in [0, \frac{7}{16}]$

4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale et

$\forall x \in [0, \frac{7}{16}]$ $f'(x) = 2x \in [0, \frac{7}{8}]$

Ainsi, $\forall x \in [0, \frac{7}{16}]$ $|f'(x)| \leq \frac{7}{8}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée avec $u_n \in [0, \frac{7}{16}]$ et $\frac{1}{4}$ on a : $|f(u_n) - f(\frac{1}{4})| \leq \frac{7}{8} |u_n - \frac{1}{4}|$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\frac{1}{4} = f(\frac{1}{4})$.

Ainsi $|u_{n+1} - \frac{1}{4}| \leq \frac{7}{8} |u_n - \frac{1}{4}|$

5) Par récurrence, on en déduit que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n - \frac{1}{4}| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n |u_0 - \frac{1}{4}|$.

Or $|u_0 - \frac{1}{4}| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|u_n - \frac{1}{4}| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$

$\leq \frac{7}{16} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$

6) Comme $\frac{7}{8} < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = 0$ donc par encadrement

$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \frac{1}{4}| = 0$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1/4$.

Exercice 7

1) La fonction f est la composée $h \circ g$ des fonctions où

- $g :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ dérivable sur $]-1;+\infty[$

et telle que $g(]-1;+\infty[) =]0;+\infty[$

- $h = \ln$ dérivable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

2) Soit $g :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$; c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$ donc g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et :

$\forall x \in]-1;+\infty[\quad g'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} - 1.$

Pour tout $x \in [1,2]$, $\quad \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ donc $g'(x) \leq \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

Ainsi g est strictement décroissante sur $[1,2]$.

g est continue sur $[1,2]$ car dérivable.

$$g(1) = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 = \frac{1}{2}\ln 8 - \ln e = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{e^2}\right) > 0$$

car $\frac{8}{e^2} > 1$.

$$g(2) = \frac{3}{2}\ln(3) - 2 = \frac{1}{2}\ln(27) - \ln(e^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{e^4}\right) < 0$$

car $\frac{27}{e^4} < \frac{49}{e^4} = \left(\frac{7}{e^2}\right)^2 < 1$.

Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1,2]$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,2]$.

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq \alpha$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 3 \geq 2 \geq \alpha$ donc la propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> : supposons la propriété vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \geq \alpha$.

Donc, comme $\alpha \geq 2 > -1$, f est définie en u_n. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus, $u_n \geq \alpha$ et f est croissante sur $]-1,+\infty[$ donc :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(\alpha) = \alpha.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

<u>Conclusion</u> : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq \alpha$.

4) D'après 1), $\forall x \in [1,+\infty[\quad f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x+1}$. Donc

$\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{1+1} = \frac{3}{4}$ car $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$

5) • f est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[, 0 \leq f'(x) \leq 3/4$. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq \alpha \geq 1$ d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$

<u>Initialisation</u> : $0 \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - \alpha$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha) \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha)$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$$

5) Comme $\frac{3}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) = 0$

Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \alpha) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 8 :

1) La fonction inverse est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$ et la fonction exp est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ donc par composition la fonction $x \in]0,+\infty[\longmapsto e^{1/x}$ est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto x$ est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$ donc par produit puis par somme φ est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$. De plus

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = e^x - e^{1/x} + \frac{1}{x^2} \times x e^{1/x} = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{1/x}$$

$$\varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} e^{1/x} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \times \frac{-1}{x^2} e^{1/x} = e^x - \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

$$\varphi'''(x) = e^x + \frac{3}{x^4} e^{1/x} - \frac{1}{x^3} \times \frac{-1}{x^2} e^{1/x} = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{1/x}$$

2) On a $\varphi''(1) = e - e = 0$. De plus, $\forall x \in]0,+\infty[\quad \varphi'''(x) > 0$ donc φ'' est strictement croissante.

Donc

x	0		1		$+\infty$
Variation de φ''		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'		$\searrow$		$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, φ' admet un minimum global en 1. Comme $\varphi'(1) = e$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) \geq e$$

3) Posons $y = \frac{1}{x}$ alors $x e^{1/x} = \frac{e^y}{y}$ et lorsque x tend vers 0^+ y tend vers $+\infty$. Par composition des limites et croissance comparées on a

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

4) $\forall x \in]0,+\infty[, \quad \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^x}{x} - e^{1/x}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$.

$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = e^x (1 - x e^{-x} e^{1/x})$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x e^{-x} e^{1/x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

5) Soit $g : \begin{array}{l} [3;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x) - ex \end{array}$; g est dérivable sur $[3;+\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur $[3;+\infty[$ et

$\forall x \in [3;+\infty[\quad g'(x) = \varphi'(x) - e \geq 0$ d'après 2.

Donc g est croissante sur $[3;+\infty[$. Ainsi,

$\forall x \in [3;+\infty[\quad g(x) \geq g(3) = \varphi(3) - 3e$

donc, $\forall x \in [3,+\infty[\quad \varphi(x) \geq ex + \varphi(3) - 3e \geq ex$ car $\varphi(3) - 3e \geq 0$ d'après les indications.

Rmq : on peut assi procéder par intégration :

d'après 2) : $\forall x \in [3,+\infty[\quad \varphi'(x) \geqslant e$

par croissance de l'intégrale on a donc :

$$\forall x \in [3,+\infty[\qquad \int_3^x \varphi'(t)dt \geqslant \int_3^x e\,dt$$

donc

$$\forall x \in [3;+\infty[\qquad \varphi(x) - \varphi(3) \geqslant ex - 3e$$

donc $\forall x \in [3;+\infty[\qquad \varphi(x) \geqslant ex + \varphi(3) - 3e \geqslant ex$.

6) On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini et $u_n \geqslant 3e^n$

Initialisation : $u_0 = 3 = 3e^0$ donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_n \geqslant 3e^n$ donc φ est définie en u_n

D'après la question précédente on a : $\varphi(u_n) \geqslant eu_n \geqslant 3e^{n+1}$

Or $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ donc $u_{n+1} \geqslant 3e^{n+1}$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est défini et $u_n \geqslant 3e^n$.

7) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3e^n = +\infty$ (car $e > 1$) par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

D'après 3), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n > eu_n - u_n = u_n(e-1) > 0$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

8)
```
u=3
n=0
while u <= 10^3
    n=n+1
    u= exp(u)-u*exp(1/u)
disp(n)
```

9) D'après 6), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3e^n$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{3e^n} = \dfrac{1}{3} \times (e^{-1})^n$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^k = \frac{1}{3}\,\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-e^{-1}}$

de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{u_n} \geqslant 0$ donc la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; elle est majorée par $\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{1-e^{-1}}$. D'après le théorème de la limite monotone, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{u_n}$ converge.

Exercice 9

1) f est strictement croissante et continue car somme de fonctions strictement croissantes et continues sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, n possède un unique antécédent par f ie $\forall n \in \mathbb{N}$ l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n

3) D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante. Or

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n+1 = f(x_{n+1}) > f(x_n) = n$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > x_n = f^{-1}(n)$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$

donc f^{-1} n'est pas majorée. D'après le théorème de la limite monotone on a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = +\infty.$$

Exercice 10

1) f est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f'(x) = -xe^{-x} + e^{-x} = (1-x)e^{-x}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} > 0$ et $1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x$ donc

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$ donc par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) On sait que $e < 3$ donc $e^{-1} > \frac{1}{3}$.

D'autre part, f est strictement croissante et continue sur $[0,1]$ donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [0, e^{-1}]$. Or, $\forall n \geq 3$, $\frac{1}{n} \in [0, e^{-1}[$ donc $\forall n \geq 3$, $\frac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f dans $[0,1[$ ie l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

De même, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$.

3) D'après la question précédente, $\forall n \geq 3 \quad u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [1, +\infty[$

4) D'après le théorème de la bijection réciproque, la bijection réciproque de f restreinte à $[0,1]$ est strictement croissante. Or

$\forall n \geq 3 \qquad f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < f(u_n) = \frac{1}{n}$

donc $\forall n \geq 3 \quad u_{n+1} < u_n$

De même, la bijection réciproque de f restreinte à $[1,+\infty[$ est strictement décroissante et

$$\forall n \geqslant 3 \qquad f(v_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < f(v_n) = \frac{1}{n}$$

donc $\forall n \geqslant 3 \qquad v_{n+1} > v_n$

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante

5) La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante minorée donc converge vers un réel ℓ.

Or, $\forall n \qquad u_n e^{-u_n} = \frac{1}{n}$

donc par continuité de f, en passant à la limite on a

$$\ell e^{-\ell} = 0$$

donc $\ell = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante. Donc soit $(v_n)_{n\geqslant 3}$ diverge vers $+\infty$ soit $(v_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

Supposons par l'absurde que $(v_n)_{n\geqslant 3}$ converge et notons ℓ sa limite. On a

- d'une part, $\forall n \geqslant 3 \quad v_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$
- d'autre part $\forall n \geqslant 3 \quad v_n e^{-v_n} = \frac{1}{n}$ donc par continuité de f, $\ell e^{-\ell} = 0$ ie $\ell = 0$.

Contradiction. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 11

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = 1 - \frac{e^x}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $f_n'(x) \geqslant 0 \iff \ln n \geqslant x$

D'où

x	$-\infty$		$\ln n$		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

De plus $f_n(0) = 1 - \frac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

Ainsi f_n est strictement croissante et continue sur $]-\infty, 0]$ donc, d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $f_n(]-\infty; 0]) =]-\infty; 1 - \frac{1}{n}]$.

Comme $0 \in f_n(]-\infty; 0])$, 0 possède un unique antécédent dans $]-\infty; 0]$ par f_n : l'équation $f_n(x) = 0$ possède donc une unique solution x_n dans $]-\infty, 0]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \quad \text{ie} \quad x_{n+1} + 1 - \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1} = 0$$

donc :

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1} - 1$$

Ainsi

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + 1 - \frac{e^{x_{n+1}}}{n}$$
$$= \frac{e^{x_{n+1}}}{n+1} - \frac{e^{x_{n+1}}}{n} < 0 = f_n(x_n)$$

Ainsi $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$

Or f_n est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ donc

$$x_{n+1} < x_n.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_{n+1} < x_n$. La suite est donc strictement décroissante.

Montrons qu'elle est minorée. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(-1) = -1+1-\frac{e^{-1}}{n} = -\frac{e^{-1}}{n} < 0 = f_n(x_n)$$

donc, comme f_n est strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq x_n.$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc converge. On note ℓ sa limite.

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad x_n+1-\frac{e^{x_n}}{n} = 0 \quad (*)$

Par continuité de exp, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = e^{\ell}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_n+1-\frac{e^{x_n}}{n}\right) = \ell+1-0\times e^{\ell} = \ell+1$$

En passant à la limite dans (*) on a donc

$$\ell+1 = 0 \quad \text{ie } \ell = -1.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

Exercice 12 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction h_n est somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ on a } h_n'(x) = nx^{n-1} - n\frac{1}{x^{n+1}} = n\left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

Or, $\forall x \in]0,1]$ $\quad h_n'(x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x=1$ car $x^{n-1} \leq 1$ et $\frac{1}{x^{n+1}} \geq 1$.

$\forall x \in [1,+\infty[$ $\quad h_n'(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x=1$ car $x^{n-1} \geq 1$ et $\frac{1}{x^{n+1}} \leq 1$.

Ainsi

x	0		1		$+\infty$
Variations de h_n		↘		↗	

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\lim\limits_{x\to 0} h_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$ et $h_n(1) = 3$

De plus, h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et continue donc d'après le théorème de la bijection h_n réalise une bijection de $]0,1]$ sur $f(]0,1]) = [3,+\infty[$

Comme $4 \in [3,+\infty[$, 4 possède un unique antécédent dans $]0,1]$ par f ie l'équation $h_n(x) = 4$ possède une unique solution dans $]0,1]$.

De plus comme $h_n(1) = 3 \neq 4$ cette solution est dans $]0,1[$

De même l'équation $h_n(x) = 4$ possède une unique solution v_n dans $[1,+\infty[$ et on a $v_n > 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $h_n(x) = 4$ a deux solutions exactement notées u_n et v_n et telles que :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

3) a) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n}$$

$$= \frac{x^{2n+2}+1-x^{2n+1}-x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{x^{2n+1}(x-1)+1-x}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{(x^{2n+1}-1)(x-1)}{x^{n+1}}.$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$h_{m+1}(v_m) - h_m(v_m) = \frac{(v_m-1)(v_m^{2m+1}-1)}{v_m^{m+1}}$$

Or $v_m > 1$ donc $(v_m-1)(v_m^{2m+1}-1) \geq 0$

Ainsi $h_{m+1}(v_m) - h_m(v_m) \geq 0$.

De plus $h_m(v_m) = 4$ donc $h_{m+1}(v_m) - 4 \geq 0$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $h_{m+1}(v_m) \geq 4$.

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après 3)b. on a :

$$h_{m+1}(v_m) \geq h_{m+1}(v_{m+1}) = 4$$

Or, d'après le théorème de la bijection la bijection réciproque de h_{m+1} sur $[1, +\infty[$ est strictement croissante donc

$$v_m \geq v_{m+1}$$

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $v_m \geq v_{m+1}$. La suite $(v_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante

4) a) $(v_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

De plus, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $v_m > 1$

Donc par passage à la limite sa limite ℓ vérifie :

$$\ell \geq 1.$$

b) Supposons que $\ell > 1$. Comme $(v_m)_m$ est décroissante on a :

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_m \geq \ell$

donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_m^m \geq \ell^m$

Or comme $\ell > 1$, $\lim\limits_{m \to +\infty} \ell^m = +\infty$ donc par comparaison,

$$\lim_{m \to +\infty} v_m^m = +\infty$$

Or, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_m^m \leq h_m(v_m) = 4$. Contradiction

c) D'après les questions 4a) et 4.b) on a :

$$\lim_{m \to +\infty} v_m = 1.$$

5) a) $\forall m \geq 1$ $\quad h_m(3) = 3^m + 1 + \frac{1}{3^m} > 4 = h_m(v_m)$

Comme de plus $\forall m \geq 1$ h_m est croissante sur $[1, +\infty[$ et que v_m et 3 appartiennent à cet intervalle on en déduit que :

$\forall m \geq 1$ $\quad v_m \leq 3$.

b)
```
function y=h(m,x)
  y = x^m + 1 + 1/(x^m)
endfunction
```

c)
```
while (b-a) > 10^(-5)
    c=(a+b)/2
    if h(m,c)<4 then a=c
       else b=c
    end
end
res=c
```

d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a $v_m^m + 1 + \frac{1}{v_m^m} = 4$ donc $v_m^{2m} + v_m^m + 1 = 4v_m^m$

ainsi v_m^m est solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ dont le discriminant Δ vaut : $\Delta = 3^2 - 4 = 5$

Les racines sont donc $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La seule racine dans $[1, +\infty[$ est $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc $v_m^m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

e) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_m = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/m} = e^{\frac{1}{m}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$ donc $\lim\limits_{m \to +\infty} v_m = 1$.