DM1 : Correction

Exercice 1

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} = \{\mathrm{M}(a,b),\quad a,b\in\mathbb{R}\} &= \left\{\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} 0 & a & 0\\ a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 & b\\ 0 & b & b\\ b & b & 0\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A},\mathrm{B})$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille (A,B) est une famille génératrice de E.

(b) La famille (A,B) est formée de deux matrices non colinéaires donc elle est libre.
Ainsi (A,B) est une famille libre et génératrice de E donc c'est une base de E.
Comme $\mathrm{Card}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 2$, E est de dimension finie et $\dim(\mathrm{E}) = 2$.

(c) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. D'après la question 1.(a), on a :

$$\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix} = a\mathrm{A}+b\mathrm{B}.$$

Les coordonnées de $\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ dans la base (A,B) sont donc (a,b).

2. (a) Un simple calcul donne : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^2 = \mathrm{I}_3$.

(b) Comme $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$, A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}$.

3. (a) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}\in\mathrm{F} \iff \mathrm{BX} = 2\mathrm{X} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 2x\\ y+z &=& 2y\\ x+y &=& 2z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z &=& 0\\ -y+z &=& 0\\ x+y-2z &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z &=& 0\\ x-z &=& 0\\ -y+z &=& 0\end{array}\right..
\end{aligned}$$

(b) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}\in\mathrm{F} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z &=& 0\\ x-z &=& 0\\ -y+z &=& 0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z &=& 0\\ x-z &=& 0\\ x-z &=& 0\end{array}\right. \quad (\mathrm{L}_3 \longleftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z &=& 0\\ x-z &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& z\\ x &=& z\end{array}\right..
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Par conséquent, F est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est formée d'un unique vecteur non nul donc est libre. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre et génératrice de F donc c'est une base de F. En particulier, F est de dimension finie et sa dimension est égale à 1.

Exercice 2

1. Sur $]-\infty, 0[$, la fonction f est polynomiale donc continue. De même, sur $]0, +\infty[$, f s'exprime comme le produit et la composée de fonctions usuelles continues sur cet intervalle. Ainsi, f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. On s'intéresse à la continuité de f en 0.
   (a) On dit que f est continue en 0 si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe et vaut $f(0)$.
   (b) Pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) = x$ donc
   $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0).$$
   (c) Effectuons le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. On a
   $$\lim_{x \to 0^+} X = +\infty$$
   donc, par composition des limites et croissance comparée, on obtient
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{X \to +\infty} Xe^{-X} = 0.$$
   (d) D'après les deux questions précédentes, comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ on a :
   $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$
   Ainsi f est continue en 0.

Exercice 3

1. (a) La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2 \geqslant 1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Ce sont des sommes de limites usuelles qui ne posent pas de problème.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $2 \leqslant u_n$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 > 0$, d'après le tableau de variations de f, on a $u_1 = f(u_0) \geqslant 2$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $2 \leqslant u_n$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f donc u_{n+1} est bien défini. De plus, comme $u_n > 0$, d'après le tableau de variations de f, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 2.$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \text{ est bien défini et } 2 \leqslant u_n.$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, u_n est bien définie et $2 \leqslant u_n$.

(b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) - x = \frac{1}{x} > 0.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone, ou bien elle converge ou bien elle diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde qu'elle converge et notons ℓ sa limite. D'après la question 2.(b), par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$\ell \geqslant 2.$$

Or la fonction f est continue sur $[2, +\infty[$ donc *a fortiori* en ℓ. On en conclut que ℓ est un point fixe de f.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = 0.$$

Donc f ne possède pas de point fixe. On aboutit donc à une contradiction.
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^a - u_n^a &= \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^a - u_n^a \\ &= \left(u_n\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)\right)^a - u_n^a \\ &= u_n^a\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)^a - u_n^a \\ &= u_n^a\left(\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)^a - 1\right). \end{aligned}$$

(b) On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$. On reconnaît alors un équivalent usuel :

$$\left(\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)^a - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{u_n^2}.$$

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit, on trouve :

$$u_{n+1}^a - u_n^a = u_n^a\left(\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)^a - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{u_n^2} u_n^a = a u_n^{a-2}.$$

(c) En prenant $a = 2$, l'équivalent précédent devient :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2.$$

Le théorème admis permet donc de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = 2.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2.$$

En particulier, avec la question précédente, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2 - u_0^2}{n-1} = 2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0^2}{n-1} = 0$ on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{n-1} = 2.$$

En d'autres termes :

$$\frac{u_n^2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

Puis par compatibilité avec le produit, équivalent usuel et transitivité :

$$u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2}{2n} = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{u_n^2}{2n}} = \sqrt{1} = 1.$$

D'où l'équivalent suivant :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$