TD14-Systèmes différentiels

Exercice 1. On sait que le système de Cauchy admet une unique solution y. Les solutions de l'équation $y' - 3y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto ce^{3t} \, , \, c \in \mathbb{R}.$$

Donc on sait qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout réel t :

$$y(t) = ce^{3t}.$$

Comme $2 = y(1) = ce^3$ alors $c = 2e^{-3}$. Ainsi l'unique solution est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 2e^{-3}e^{3t} = 2e^{3(t-1)}.$$

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' + 2y = te^t.$$

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions y telles que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \, \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = ce^{-2t}.$$

2. On cherche maintenant une solution particulière de l'équation $y' + 2y = te^t$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et posons $y_0 : t \mapsto (at + b)e^t$.
   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et posons $y_0 : t \mapsto (at + b)e^t$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y_0'(t) = (at + b)e^t + ae^t = (at + a + b)e^t.$$

   Ainsi, si y_0 est solution de $y' + 2y = te^t$ alors pour tout réel t on a :

$$te^t = y_0'(t) + 2y_0(t) = e^t(at + a + b + 2at + 2b) = e^t(3at + a + 3b).$$

   Donc

$$\begin{cases} 3a &= 1 \\ 3b + a &= 0 \end{cases}.$$

   (b) On a :

$$\begin{cases} 3a &= 1 \\ 3b + a &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{3} \\ b &= -\frac{1}{9} \end{cases}$$

   (c) Réciproquement, on vérifie que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0(t) = \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\right)e^t$$

   est bien solution.

3. Finalement les solutions de l'équation $y' + 2y = te^t$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\exists c \in \mathbb{R} \, \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = ce^{-2t} + y_0(t).$$

Exercice 3. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' + t^2 y = 0.$$

1. La fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ convient.
2. Soit $y_0 : t \mapsto e^{-\frac{t^3}{3}}$. Par composition de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t on a :

$$y_0'(t) = -A'(t)e^{-A(t)} = -t^2 y_0(t).$$

   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y_0'(t) + t^2 y_0(t) = 0.$$

   La fonction y_0 est bien solution de l'équation.
3. Soit y une solution quelconque de l'équation. On pose $z = e^{A(t)}y$.
   (a) La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} z'(t) = A'(t)e^{A(t)}y(t) + e^{A(t)}y'(t) &= e^{A(t)}(A'(t)y(t) + y'(t)) \\ &= e^{A(t)}\left(t^2 y(t) + y'(t)\right) \\ &= 0 \quad \text{car } y \text{ est solution de } y' + t^2 y = 0. \end{aligned}$$

   (b) La fonction z est donc constante sur $\mathbb{R}$:

$$\exists c \in \mathbb{R} \, \forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = c.$$

Par conséquent, il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = ce^{-A(t)}.$$

4. Réciproquement on vérifie que les fonctions y de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = ce^{-A(t)}\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

sont bien des solutions de $y' + t^2y = 0$. Ainsi les solutions sont les fonctions y de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = ce^{-A(t)}\ ,\ c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. L'équation caractéristique est :

$$r^2 - r - 12 = 0.$$

Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-12) = 49.$$

L'équation caractéristique possède donc deux solutions r_1 et r_2 données par :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{49}}{2} = -3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{49}}{2} = 4.$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' - 12y = 0$ sont les fonctions y pour lesquelles il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{4t}.$$

2. L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Son discriminant vaut 0. L'équation caractéristique possède une unique solution : -2. Ainsi les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont les fonctions y pour lesquelles il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (c_1t + c_2)e^{2t}.$$

Exercice 5. On considère l'équation différentielle suivante dont on cherche les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y'' - 3y' + 2y = t\ln(t).$$

1. L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1.$$

L'équation caractéristique possède donc deux solutions r_1 et r_2 données par :

$$r_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont les fonctions y pour lesquelles il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t}.$$

2. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_1(t) = -e^{-t}t\ln(t) \quad ; \quad f_2(t) = e^{-2t}t\ln(t).$$

   (a) Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admettent des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_1 et F_2 une primitive de f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}_+^*$ respectivement.

   (b) On sait que F_1 et F_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$F_1' = f_1 \quad ; \quad F_2' = f_2.$$

   Or f_1 et f_2 sont elles-même dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F_1 et F_2 sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme et produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= F_1'(t)e^t + F_1(t)e^t + F_2'(t)e^{2t} + 2F_1(t)e^{2t} \\ &= (f_1(t) + F_1(t))e^t + (f_2(t) + 2F_2(t))e^{2t} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} y_0''(t) &= (f_1'(t) + F_1'(t))e^t + (f_1(t) + F_1(t))e^t + (f_2'(t) + 2F_2'(t))e^{2t} + 2(f_2(t) + 2F_2(t))e^{2t} \\ &= (f_1'(t) + 2f_1(t) + F_1(t))e^t + (f_2'(t) + 4f_2(t) + 4F_2(t))e^{2t}. \end{aligned}$$

   (c) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\begin{aligned} y_0''(t) - 3y_0'(t) + 2y_0(t) &= e^t(f_1'(t) - f_1(t)) + e^{2t}(f_2'(t) + f_2(t)) \\ &= 2t\ln(t) - \ln(t) - 1 - t\ln(t) + \ln(t) + 1 \\ &= t\ln(t). \end{aligned}$$

   Ainsi y_0 est une solution particulière de l'équation $y'' - 3y' + 2y = t\ln(t)$.

3. Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $y'' - 3y' + 2y = t\ln(t)$ et posons $z = y - y_0$. On vérifie facilement que :

$$z'' - 3z' + 2z = y'' - 3y' + 2y - (y_0'' - 3y_0' + 2y_0) = (t\ln(t) - t\ln(t)) = 0.$$

Ainsi z est solution de $z'' - 3z' + 2z = 0$. D'après la première question il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Ainsi, il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$y(t) = y_0(t) + c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Réciproquement on vérifie que les fonctions de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = y_0(t) + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

où $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ sont bien solutions.
Finalement les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = y_0(t) + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

où $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6. On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & -4y_1 + 2y_2 \\ y_2' & = & -3y_1 + y_2 \end{array} \right. .$$

1. Soient y_1, y_2 deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit sous forme matricielle :

$$Y' = AY.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (-4-\lambda)(1-\lambda) + 6 = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1\}$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} -4x & + & 2y & = & -x \\ -3x & + & y & = & -y \end{array} \right. \iff y = \frac{3}{2}x.$$

Ainsi $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. De même :

$$AX = -23X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} -4x & + & 2y & = & -2x \\ -3x & + & y & = & -2y \end{array} \right. \iff x = y.$$

Ainsi $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

En particulier A est diagonalisable.

3. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avec y_1 et y_2 deux fonctions dérivables et posons $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = P^{-1}Y$. Alors on a :

$$Y' = AY \iff X' = DX.$$

Or, on a :

$$X' = DX \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & -2x_1 \\ x_2' & = & -x_2 \end{array} \right. \iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{-2t} \\ x_2(t) & = & c_2 e^{-t}. \end{array} \right.$$

Donc les solutions (y_1, y_2) du système initial sont les couples pour lesquels il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel t :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{-2t} + 3c_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4. Les conditions initiales :

$$y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_2(0) = -1$$

donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & c_1 + 2c_2 \\ -1 & = & c_1 + 3c_2 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & c_1 + 2c_2 \\ -2 & = & c_2 \end{array} \right.$$

$$\text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & 5 \\ c_2 & = & -2. \end{array} \right.$$

Ainsi la solution (y_1, y_2) du problème de Cauchy est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & 5e^{-2t} - 4e^{-t} \\ y_2(t) & = & 5e^{-2t} - 6e^{-t}. \end{array} \right.$$

Exercice 7. On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} \\ y_2' & = & \frac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{3} \\ y_3' & = & \frac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{3} \end{array} \right.$$

1. Soient y_1, y_2, y_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le système s'écrit sous forme matricielle :
$$Y' = AY.$$
2. Voir le corrigé du sujet Ecricome du concours blanc :
$$\mathrm{Sp}(A) = \{0,1\} \quad ; \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A valant 3, A est diagonalisable. En posant :
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
on a $A = PDP^{-1}$.
3. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ avec y_1, y_2, y_3 trois fonctions dérivables et posons $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = P^{-1}Y$. Alors on a :
$$Y' = AY \iff X' = DX.$$
Or, on a :
$$X' = DX \iff \begin{cases} x_1' &= 0 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{cases} \iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \begin{cases} x_1(t) &= c_1 \\ x_2(t) &= c_2 e^t \\ x_3 &= c_3 e^t. \end{cases}$$
Donc les solutions (y_1, y_2, y_3) du système initial sont les triplets pour lesquels il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel t :
$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ c_1 - c_3 e^t \\ c_1 - c_2 e^t \end{pmatrix}.$$
4. Les conditions initiales :
$$y_1(0) = 1 \quad ; \quad y_2(0) = -1 \quad \text{et} \quad y_3(0) = 2$$
donnent :
$$\begin{cases} 1 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ -1 &= c_1 - c_3 \\ 2 &= c_1 - c_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 1 &= c_2 + c_1 + c_3 \\ -1 &= c_1 - c_3 \\ 3 &= 2c_1 + c_3 \end{cases}$$
$$\text{donc} \quad \begin{cases} 1 &= c_2 + c_1 + c_3 \\ -1 &= c_1 - c_3 \\ 2 &= 3c_1 \end{cases}$$
$$\text{donc} \quad \begin{cases} c_2 &= -\frac{4}{3} \\ c_3 &= \frac{5}{3} \\ c_1 &= \frac{2}{3} \end{cases}$$
Ainsi la solution (y_1, y_2, y_3) du problème de Cauchy est :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y_1(t) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^t \\ y_2(t) &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}e^t \\ y_3(t) &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}e^t. \end{cases}$$

Exercice 8. On considère le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -2x - 2y \end{cases}.$$
1. Sous forme matricielle le système s'écrit :
$$Y' = AY$$
où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (-2-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \\ &\iff \lambda^2 + \lambda = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0. \end{aligned}$$
Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -1\}$. Toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles donc toutes les trajectoires sont convergentes.
2. Soit (y_1, y_2) un état d'équilibre. Alors les fonctions y_1, y_2 sont constantes donc il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = c_1 \quad \text{et} \quad y_2(t) = c_2.$$
On a donc :
$$Y' = AY \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in E_0(A).$$
On voit facilement que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi les états d'équilibre sont les $(c, -c)$, $c \in \mathbb{R}$.

3. On voit facilement que $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

   En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

   En particulier A est diagonalisable.

4. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avec y_1 et y_2 deux fonctions dérivables et posons $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = P^{-1}Y$. Alors on a :

$$Y' = AY \Longleftrightarrow X' = DX.$$

   Or, on a :

$$X' = DX \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & -x_1 \\ x_2' & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R}\ \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ x_2(t) & = & c_2 \end{array} \right.$$

   Donc les solutions (y_1, y_2) du système initial sont les couples pour lesquels il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout réel t :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 \\ -2c_1 e^{-t} - c_2 \end{pmatrix}.$$

5. La trajectoire associée à la solution

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 \\ -2c_1 e^{-t} - c_2 \end{pmatrix}$$

   converge vers $(c_2, -c_2)$ quelle que soit la valeur de c_1. Ainsi la trajectoire associée à la solution

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 2 \\ -2e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

   converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Exercice 9. On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 4y - 4z \\ y' & = & 3x + 2y - 4z \\ z' & = & 3x - 3y + z. \end{array} \right.$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ le système a pour forme matricielle :

$$X' = AX.$$

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3.$$

   Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & -4 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 1-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 0 & 5-\lambda & -5+\lambda \\ 0 & 15-3\lambda & -12-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{c} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1-\lambda \\ 0 & 5-\lambda & -5+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2.
\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow 5 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - \lambda - \lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 5 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.$$

   Donc : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1, 5\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_{-2}(A) \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & 4z & = & -2x \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & -2y \\ 3x & - & 3y & + & z & = & -2z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & y \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

     Ainsi : $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- On a :

$$X \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & - & 4z & = & x \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & y \\ 3x & - & 3y & + & z & = & z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 4y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & & & = & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & y \end{array} \right. .$$

Ainsi : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- On a :

$$X \in E_5(A) \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & - & 4z & = & 5x \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 5y \\ 3x & - & 3y & + & z & = & 5z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} -4x & + & 4y & - & 4z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi : $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a alors : $A = PDP^{-1}$.

Posons $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = Z = P^{-1}X$. Alors on a :

$$X' = AX \Longleftrightarrow Z' = DZ.$$

Or, on a :

$$Z' = DZ \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} z_1' & = & -2z_1 \\ z_2' & = & z_2 \\ z_3' & = & 5z_3 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{ccc} z_1(t) & = & c_1 e^{-2t} \\ z_2(t) & = & c_2 e^{t} \\ z_3(t) & = & c_3 e^{5t} \end{array} \right.$$

Donc les solutions (x_1, x_2, x_3) du système initial sont les triplets pour lesquels il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel t :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

2. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \end{pmatrix}$ une solution. Alors

$$X(0) = X_0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 2 \\ c_1 & + & c_2 & & & = 3 & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 2 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & & & = 3 & \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} c_3 & = & -1 \\ c_2 & = & 2 \\ c_1 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi l'unique solution vérifiant $X(0) = X_0$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^t - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^t \end{pmatrix}$$

3. (a) La trajectoire associée est :

$$\{(2e^t - e^{5t}, e^{-2t} + 2e^t - e^{5t}, e^{-2t} + 2e^t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} (e^{-2t} + 2e^t) = +\infty$ alors la trajectoire est divergente.

Exercice 10 (Un cas où la matrice n'est pas diagonalisable)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère le système différentiel $Y' = AY$.

1. Comme la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{1\}$. Si elle était diagonalisable il existerait P inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2 \neq A$. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ une solution de $Y' = AY$.

   (a) Le couple de fonctions (y_1, y_2) vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} y_1'(t) & = & y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_2(t). \end{array} \right.$$

(b) On en déduit qu'il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_2(t) = c_2 e^t.$$
La fonction y_1 est alors solution de l'équation différentielle :
$$y_1' - y_1 = c_2 e^t.$$
On cherche maintenant une solution particulière y_0 de l'équation $y' + 2y = c_2 e^t$ sous la forme $y_0 : t \mapsto (at+b)e^t$. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$y_0'(t) = (at+b)e^t + ae^t = (at+a+b)e^t.$$
Ainsi, y_0 est solution de $y' + 2y = c_2 e^t$ si et seulement si pour tout réel t on a :
$$c_2 e^t = y_0'(t) - y_0(t) = e^t(at + a + b - at - b) = ae^t$$
si et seulement $a = c_2$. Ainsi la fonction y_0 donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_0(t) = c_2 t e^t$$
est une solution particulière.
Donc les solutions de $y_1' - y_1 = c_2 e^t$ sont les fonctions y_1 de la forme :
$$\exists c_1 \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = c_1 e^t + y_0(t) = (c_1 + tc_2)e^t.$$

(c) Finalement (y_1, y_2) est solution du système si et seulement si il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & (c_1 + tc_2)e^t \\ y_2(t) & = & c_2 e^t \end{array} \right.$$

Exercice 11 (Un cas où la matrice n'est pas diagonalisable)**.** On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et on considère le système différentiel $Y' = BY$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(B) &\iff \det(B - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff -\lambda(2-\lambda) + 1 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = 1. \end{aligned}$$
Ainsi $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$.
Si elle était diagonalisable il existerait P inversible telle que :
$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
Or $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2 \neq B$. Donc B n'est pas diagonalisable.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors :
$$X \in E_1(B) \iff BX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ -x + 2y & = & y \end{array} \right. \iff y = x.$$
Ainsi $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3. On a donc $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) La famille (e_1, e_2) est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Comme la dimension de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est égale à 2 alors (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   (b) On trouve $Be_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$. Ses coordonnées dans la base (e_1, e_2) sont donc $(1, 1)$.
   (c) En posant $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a :
$$B = P^{-1}AP$$
   où A est la matrice de l'exercice précédent.

4. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ où y_1, y_2 sont deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$. On pose $Z = PY$.
   (a) On a :
$$Z' = AZ \iff Z' = PBP^{-1}Z \iff P^{-1}Z' = BP^{-1}Z \iff Y = BY.$$
   (b) D'après l'exercice précédent, les solutions de $Y' = BY$ sont données par :
$$\exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} (c_1 + tc_2)e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 t)e^t \\ (c_1 + c_2 + c_2 t)e^t \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :
$$x'' + 5x' + 4x = 0.$$

- Soit x une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Alors x est solution de l'équation différentielle si et seulement si $X' = AX$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -4. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, -4\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

— On a :

$$X \in E_{-1}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & y & = & -x \\ -4x & - & 5y & = & -y \end{array} \right. \iff y = -x.$$

Ainsi $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

— De même :

$$X \in E_{-4}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & y & = & -4x \\ -4x & - & 5y & = & -4y \end{array} \right. \iff y = -4x.$$

Ainsi $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

- On a alors, en posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Z(t) = P^{-1}X(t)$:

$$\begin{aligned} X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\ &\iff \left(P^{-1}X\right)' = DP^{-1}X \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &\iff Z' = DZ. \end{aligned}$$

Notons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$Z' = DZ \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & -z_1 \\ z_2' & = & -4z_2 \end{array} \right. \iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ z_2(t) & = & c_2 e^{-4t} \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-4t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-4t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \\ -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}. \end{aligned}$$

Les solutions de $x'' + 5x' + 4x = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}\ ,\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 13 (Pour aller plus loin)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Une fonction y définie sur $\mathbb{R}$ est dite solution de l'**équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$$

si y est n fois dérivable $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0.$$

Soit y une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $y_1 = y$, $y_2 = y'$,…,$y_n = y^{(n-1)}$.

   (a) Soit y une solution de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$. Alors, on a :

   $$y_n' = y^{(n)} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{n-1} y_n$$

   et de plus, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

   $$y_i' = (y^{(i-1)})' = y^{(i)} = y_{i+1}.$$

   Ainsi $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ est solution du système différentiel suivante :

   $$\left\{ \begin{array}{ccc} y_2 & = & y_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & y_{n-1}' \\ -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{n-1} y_n & = & y_n' \end{array} \right.$$

   Réciproquement, si $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ est solution du système différentiel ci-dessus alors en posant $y = y_1$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

   $$y_i' = y^{(i)}$$

   et la dernière ligne donne alors :

   $$-a_0 y - a_1 y^{(2)} - \cdots - a_{n-1} y^{(n-1)} = y^{(n)}.$$

   Donc y est solution de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$.

   (b) En posant :

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n_2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

   le système a pour forme matricielle :

   $$Y' = AY.$$

2. **Application**. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y^{(3)} - 2y'' - y' + 2 = 0.$$

(a) D'après la question précédente, l'équation différentielle est équivalent au système $Y' = AY$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

(b) On trouve : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$. En particulier A est diagonalisable. De plus :

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ ; \ E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ ; \ E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

En posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a : $A = P^{-1}DP$.

(c) En posant pour tout réel t, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = X(t) = P^{-1}Y(t)$ on a :

$$Y' = AY \iff X' = DX.$$

Or, on a :

$$X' = DX \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & -x_1 \\ x_2' & = & x_2 \\ x_3' & = & 2x_3 \end{array} \right. \iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ x_2(t) & = & c_2 e^{t} \\ x_3 & = & c_3 e^{2t} \end{array} \right.$$

Donc les solutions (y, y', y'') du système initial sont les triplets pour lesquels il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel t :

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 2c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + 4c_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$ sont les fonctions y pour lesquelles il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}.$$