Chapitre 17 : Correction des tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 2 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.
2. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.

Test 3 (***Voir solution.***)

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f *de l'exemple ci-dessus.*

Test 4 (***Voir solution.***)

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$;
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (1+xy)(2x-2y+1)$.

Test 5 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 6 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles.*

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.
2. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Déterminer les dérivées partielles $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *de la fonction* f *de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le test 3.*

Test 8 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles secondes.*

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1+xy)(2x-2y+1)$
4. $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.

Test 9 (***Voir solution.***)

Représenter chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ *suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).*

1. $\mathrm{U}_1 = [0,1] \times \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{U}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\right\}$,
3. $\mathrm{U}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\right\}$,
4. $\mathrm{U}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 2\right\}$.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x+y-1).$$

1. *Justifier que* f *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer les points critiques de* f.
3. *Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.*
4. *Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux ?*

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ *et* $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *on a :*

$$x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1>0.$$

Ainsi la fonction $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Donc la fonction $(x,y)\mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que quotient de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeurs dans* $[1,+\infty[$. *La fonction logarithme est continue sur* $[1,+\infty[$. *Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \ln(1+x^2+e^y)$ *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
Enfin, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=y^3-2xy^2+3x^2y^2+1.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. *La fonction* $f_x : y\mapsto y^3-2xy^2+3x^2y^2+1$ *est polynomiale donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Ainsi, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *pour tout* $y\in\mathbb{R}$, $\partial_2(f)(x,y)$ *existe et*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=3y^2-4xy+6x^2y.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Pour montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 existent, on va utiliser les résultats sur les fonctions de classe C^1 *(c'est ainsi que l'on procédera toujours désormais).*

1. *Les fonctions* $(x,y)\mapsto xy$ *et* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *est de classe* C^1 *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto\ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Par produit, la fonction f *est donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de* $\mathbb{R}^2$. *De plus, on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

   et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

2. *La fonction* f *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de* $\mathbb{R}^2$. *De plus, on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=y(2x-2y+1)+2(1+xy)$$

   et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=x(2x-2y+1)-2(1+xy).$$

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncé.***)

Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ *et* $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, *on a :*

$$x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1>0.$$

Donc la fonction $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, la fonction $(x,y)\mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que quotient de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 6 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1,+\infty[$. *La fonction logarithme est de classe* C^1 *sur* $[1,+\infty[$. *Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \ln(1+x^2+e^y)$ *est donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

   et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2+e^y}$$

2. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   Enfin, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=1+2y-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

   et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=2x.$$

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncé.***)

D'après le test 3, on sait :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=3y^2-4xy+6x^2y.$$

La fonction $\partial_2(f)$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, les dérivées partielles d'ordre 2* $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial_1(\partial_2(f))(x,y)=-4y+12xy$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\partial_2(\partial_2(f))(x,y)=6y-4x+6x^2.$$

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Les fonctions* $(x,y)\mapsto xy$ *et* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *est de classe* C^2 *à valeurs dans* $\mathbb{R}^*_+$ *et la fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^*_+$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto\ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Par produit, la fonction f_1 *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, d'après le test 4 on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_1)(x,y)=ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_1)(x,y) = xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{1,2}(f_1)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2)+\frac{2y^2}{1+x^2+y^2}+\frac{2x^2}{1+x^2+y^2}-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\partial^2_{1,1}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2)+\frac{4xy}{1+x^2+y^2}+\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

et

$$\partial^2_{2,2}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2)+\frac{4xy}{1+x^2+y^2}+\frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right).$$

2. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1,+\infty[$*. La fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $[1,+\infty[$*. Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\ln(1+x^2+e^y)$ *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 6, on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_2)(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_2)(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2+e^y}.$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{2,1}(f_2)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f_2)(x,y) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2+e^y)^2}$$

$$\partial^2_{2,2}(f_2)(x,y) = \frac{e^y(1+x^2+e^y)-e^{2y}}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{e^y(1+x^2)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

et

$$\partial^2_{1,1}(f_2)(x,y) = \frac{2(1+x^2+e^y)-4x^2}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{2(1-x^2+e^y)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

3. *La fonction* f_3 *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 4 :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_3)(x,y) = y(2x-2y+1)+2(1+xy)$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_3)(x,y) = x(2x-2y+1)-2(1+xy).$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{2,1}(f_3)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f_3)(x,y) = 4x-4y+1$$

$$\partial^2_{1,1}(f_3)(x,y) = 4y \quad \textit{et} \quad \partial^2_{2,2}(f_3)(x,y) = -4x.$$

4. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*.*
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*.*
Enfin, f_4 *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 6 :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f_4)(x,y) = 1 + 2y - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f_4)(x,y) = 2x.$$

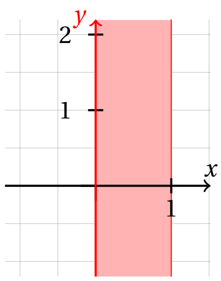
Donc on obtient, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{1,2}(f_4)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f_4)(x,y) = 2$$

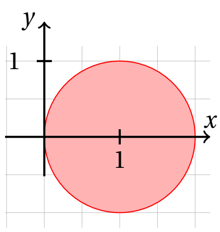
$$\partial^2_{1,1}(f_4)(x,y) = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f_4)(x,y) = 0.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

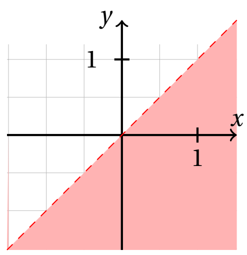
1. *L'ensemble* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *est fermé et non borné.*



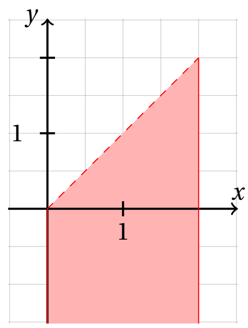
2. *L'ensemble* U_2 *est fermé et bornée.*



3. *L'ensemble* U_3*, est ouvert et non borné.*



4. *L'ensemble* U_4 *est non borné, ni ouvert ni fermé.*



Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* f *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Pour déterminer les points critiques, il faut calculer le gradient. Or pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, on a*

$$\partial_1(f)(x,y) = 2xy + y^2 - y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 2xy + x^2 - x.$$

On en déduit donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 - y \\ 2xy + x^2 - x \end{pmatrix}$*. Or, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2xy + y^2 - y &=& 0 \\ 2xy + x^2 - x &=& 0 \end{array} \right. &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2xy + y^2 - y &=& 0 \\ x^2 - y^2 - x + y &=& 0 \end{array} \right. \quad (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1) \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2xy + y^2 - y &=& 0 \\ (x-y)(x+y-1) &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2xy + y^2 - y &=& 0 \\ x &=& y \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2xy + y^2 - y &=& 0 \\ x &=& 1-y \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3y^2 - y &=& 0 \\ x &=& y \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2(1-y)y + y^2 - y &=& 0 \\ x &=& 1-y \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y(3y-1) &=& 0 \\ x &=& y \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y(1-y) &=& 0 \\ x &=& 1-y \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1/3,1/3) \text{ ou } (x,y) = (1,0) \text{ ou } (x,y) = (0,1).
\end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$, $(1/3,1/3)$, $(1,0)$ *et* $(0,1)$.

3. *On va étudier la hessienne en chaque point critique. Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2. On a, pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\partial^2_{1,1}(f)=2y \quad ; \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=2x \quad ; \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=2x+2y-1.$$

   (a) *Étude en* $(0,0)$. *On a*

$$\nabla^2(f)(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

   On vérifie les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ *sont* 1 *et* -1. *Ainsi,* $(0,0)$ *est une point selle.*

   (b) *Étude en* $(1,0)$. *On a*

$$\nabla^2(f)(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ *sont* $1+\sqrt{2}>0$ *et* $1-\sqrt{2}<0$.
   Ainsi, $(1,0)$ *est une point selle.*

   (c) *Étude en* $(0,1)$. *On a*

$$\nabla^2(f)(0,1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,1)$ *sont* $1+\sqrt{2}>0$ *et* $1-\sqrt{2}<0$.
   Ainsi, $(0,1)$ *est une point selle.*

   (d) *Étude en* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. *On a*

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ *sont* 1 *et* $\frac{1}{3}$.
   Ainsi $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ *est un minimum local.*

4. *Le seul extremum local est* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ *qui est un minimum. Or* $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$ *et pour tout* $y\in\mathbb{R}$ *on a*

$$f(y,y)=y^2(2y-1).$$

Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} f(y,y)=-\infty$ *et donc le minimum n'est pas global.*