TD4-Familles de vecteurs

Exercice 1 (Vrai ou Faux).

1. **Faux** : dans $\mathbb{R}^2$, prenons $u = (1,0)$, $v = (1,1)$ et $w = (0,1)$. Alors (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres (ce sont des familles de deux vecteurs non colinéaires). Pourtant, la famille (u,v,w) est liée car $v = u + w$.

2. **Vrai** : soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$ tels que $w \in \text{Vect}(u,v)$. Alors w est combinaison linéaire de u et de v donc (u,v,w) est liée.

3. **Faux** : la dimension de $\mathbb{R}_5[x]$ est 6.

4. **Faux** : dans $\mathbb{R}^3$ prenons $F = \text{Vect}((1,0,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0))$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 mais $F \neq G$.

5. **Faux** : la famille contient 4 éléments et la dimension de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est égale à 6. Donc ça ne peut pas être une base.

Exercice 2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_5$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & = & 0 \\ & & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, la famille (A, B, C) est libre.

Exercice 3. 1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) = (0,0,0)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} & & \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -3\lambda_3. \end{array}\right.$$

En prenant $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$, on voit que

$$\lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) = (0,0,0).$$

Donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Pour savoir si $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non, on peut procéder de plusieurs façons :

- Méthode 1 : supposons qu'elle le soit. Comme $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors c'est une base. En particulier, elle est libre ce qui contredit ce qui précède. Par conséquent, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Méthode 2 : soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & (x,y,z) \in \text{Vect}(\mathcal{F}) \\ \Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3\ (x,y,z) = \lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) \\ \Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & y \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & x+y \\ & - & 5\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & z-2x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow\ & \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{x+y}{3} \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{2x-z}{5} \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x+y}{3} = \frac{2x-z}{5}. \end{aligned}$$

Donc, par exemple le vecteur $(0,0,1)$ n'appartient pas à $\text{Vect}(\mathcal{F})$ car

$$\frac{0+0}{3} \neq \frac{2\times 0 - 1}{5}.$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} & \lambda_1(x^2+2x) + \lambda_2(x^2+x+1) + \lambda_3(x+2) = 0 \\ \iff\ & \lambda_2 + 2\lambda_3 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + (\lambda_1+\lambda_2)x^2 = 0 \\ \iff\ & \left\{\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\ \iff\ & \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\ \iff\ & \left\{\begin{array}{ccc} 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\ \iff\ & \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre.

(b)
- Méthode 1 : comme $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$, alors c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. En particulier, elle est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Méthode 2 :

$$\begin{aligned} & \text{Vect}(x^2+2x, x^2+x+1, x+2) \\ & = \text{Vect}(x^2+2x, -x+1, x+2) \quad \text{en soustrayant le } 1^{er} \text{ vecteur au } 2^{ieme} \\ & = \text{Vect}(x^2+2x, -x+1, 3) \quad \text{en ajoutant le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 3^{ieme} \\ & = \text{Vect}(x^2+2x, -x+1, 1) \\ & = \text{Vect}(x^2+2x, -x, 1) \quad \text{en soustrayant le } 3^{ieme} \text{ vecteur au } 2^{ieme} \\ & = \text{Vect}(x^2, -x, 1) \quad \text{en ajoutant deux fois le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 1^{er} \\ & = \text{Vect}(x^2, x, 1) = \mathbb{R}_2[x]. \end{aligned}$$

- Méthode 3 : en montrant que pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \lambda_1(x^2+2x) + \lambda_2(x^2+x+1) + \lambda_3(x+2)$$

d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ possède des solutions.

3. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\\lambda_2+\lambda_3=0\\2\lambda_2=0\end{cases}\quad L_4\leftarrow L_4-L_1$$
$$\iff\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_3=0\\\lambda_2=0.\end{cases}$$

La famille est donc libre.

(b)
- Méthode 1 : la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4 et comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=3<4$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Méthode 2 : soit $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$
$$\iff\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$
$$\iff\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=x\\2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=y\\\lambda_2+\lambda_3=z\\\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=t\end{cases}$$
$$\iff\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=x\\-\lambda_2-\lambda_3=y-2x\\\lambda_2+\lambda_3=z\\2\lambda_2=t-x\end{cases}\quad\begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_4\leftarrow L_4-L_1\end{matrix}$$
$$\iff\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=x\\\lambda_2+\lambda_3=2x-y\\\lambda_2+\lambda_3=z\\2\lambda_2=t-x\end{cases}$$
$$\iff 2x-y=z.$$

Donc par exemple, la matrice $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

1.
- L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non vide car
$$A0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}=0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}D.$$
- Montrons que E est stable par combinaison linéaire. Soient M, N deux éléments de E, $\lambda\in\mathbb{R}$ et montrons que $M+\lambda N\in E$.
Comme $M\in E$, on sait que $AM=MD$ et, de même, comme $N\in E$, on sait que $AN=ND$. Ainsi :
$$\begin{aligned}A(M+\lambda N)&=AM+A(\lambda N)\\&=MD+\lambda AN\\&=MD+\lambda ND\\&=(M+\lambda N)D.\end{aligned}$$
Ainsi, $M+\lambda N\in E$. Ainsi, pour tout $M,N\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $M+\lambda N\in E$. Cela montre que E est stable par combinaison linéaire.
- D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ où $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. On a
$$AM=\begin{pmatrix}z&t\\z&t\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad MD=\begin{pmatrix}0&y\\0&t\end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}M\in E&\iff AM=MD\\&\iff\begin{pmatrix}z&t\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y\\0&t\end{pmatrix}\\&\iff z=0\quad\text{et}\quad y=t.\end{aligned}$$

3. Soit $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ où $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. D'après la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}M\in E&\iff z=0\quad\text{et}\quad y=t\\&\iff M=\begin{pmatrix}x&t\\0&t\end{pmatrix}\\&\iff M=xU+tA.\end{aligned}$$
Ainsi, $E=\mathrm{Vect}(U,A)$ et la famille (U,A) est donc génératrice de E. De plus, U et A ne sont pas colinéaires donc (U,A) est une famille libre. Ainsi la famille (U,A) est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

4. On a
$$UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Comme UA ne satisfait pas les équations de la question 2, on en conclut que $UA \notin E$.

Exercice 5.

1. On note $A = M(1,0)$.
   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = I_3$.
   (b) Comme $A^2 = AA = I_3$, A est inversible et $A^{-1} = A$.
2.
$$\begin{aligned} E = \{M(a,b),\quad a,b \in \mathbb{R}\} &= \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix},\quad a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & b & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix},\quad a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad a,b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$
   Donc, $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E. Elle est formée de deux matrices non colinéaires donc elle est libre. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.

Exercice 6.

1. • Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. On note $e_1 = (3,1,3)$, $e_2 = (2,2,1)$ et $e_3 = (4,3,2)$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :
$$\begin{aligned} &(x,y,z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ \iff &\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = y \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = y - x & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = z \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - \lambda_3 = y - x & (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \\ 3\lambda_1 = 2z - x \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \lambda_2 = \frac{x - 3\lambda_1 - 4\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 = x - y - \lambda_1 \\ \lambda_1 = \frac{2z-x}{3} \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \lambda_2 = \frac{x - 3\frac{2z-x}{3} - 4\left(x - y - \frac{2z-x}{3}\right)}{2} \\ \lambda_3 = x - y - \frac{2z-x}{3} \\ \lambda_1 = \frac{2z-x}{3} \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \lambda_2 = \frac{-7x+6y+5z}{3} \\ \lambda_3 = \frac{5x-3y-4z}{3} \\ \lambda_1 = \frac{2z-x}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, (x,y,z) est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3. Plus précisément, on a
$$(x,y,z) = \frac{2z-x}{3} \cdot e_1 + \frac{-7x+6y+5z}{3} \cdot e_2 + \frac{5x-3y-4z}{3} \cdot e_3.$$
   La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   • Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. En appliquant les calculs précédents avec $(x,y,z) = (0,0,0)$ on voit que
$$(0,0,0) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{-7\times 0 + 6\times 0 + 5\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_3 = \frac{5\times 0 - 3\times 0 - 4\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_1 = \frac{2\times 0 - 0}{3} = 0 \end{cases}$$
   Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.
   • La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base[1] de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans

1. Avec les résultats de la proposition 7 on peut simplement montrer que $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. La même remarque vaut pour les questions suivantes.

cette base sont :

$$\left(\frac{2z-x}{3}, \frac{-7x+6y+5z}{3}, \frac{5x-3y-4z}{3}\right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$.

2.
- Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1) + x(1,0,0).$$

La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1(0,1,0) + \lambda_2(0,0,1) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est donc libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont (y,z,x). En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(2,1,3)$.

3.
- Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$\begin{aligned} P = \lambda_1 + \lambda_2(x-1) + \lambda_3(x-1)^2 &\iff P = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)x + \lambda_3 x^2 \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & a_1 \\ & & & & \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ \lambda_2 & = & a_1 + 2a_2 \\ \lambda_3 & = & a_2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, P est combinaison linéaire de 1, $x-1$ et $(x-1)^2$; plus précisément :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1 + a_2)\cdot 1 + (a_1 + 2a_2)\cdot(x-1) + a_2\cdot(x-1)^2.$$

- La famille $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée formée de vecteurs non nuls donc elle est libre.
- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dans cette base sont $(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, a_2)$. En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(3,3,1)$.

4.
- Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$; on a :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff &\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & t \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{cccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z & \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{cccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & \\ & & & - & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & z+y-x & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & x - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & x - y - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_4 & = & z + y - x + \lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2}. \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \frac{3x+2y-2z-t}{4} \\ \lambda_2 & = & \frac{-x-2y+2z+3t}{4} \\ \lambda_4 & = & \frac{2z+2y-x-t}{4} \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. En appliquant les calculs précédents avec $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on voit que

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ dans cette base sont :

$$\left(\frac{3x+2y-2z-t}{4}, \frac{-x-2y+2z+3t}{4}, \frac{x-t}{2}, \frac{2z+2y-x-t}{4}\right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Exercice 7.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Fait en TD.
5. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   On a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2a & 0 & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & -b & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F.
   Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
   Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F.
6. Notons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d \right\}$. Alors :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -b+c+d \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -b+c+d & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille génératrice de F.

   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

   C'est une famille libre et génératrice de F donc une base de F.

Exercice 8.

1. La famille (u, v, w) est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre.
   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,0,0) & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\ 3\lambda_1 & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Donc la famille (u, v, w) est libre. Par ce qui précède, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille $(x^2+x+1, x-1, x+1)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[x]$ de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(x^2+x+1)+\lambda_2(x-1)+\lambda_3(x+1)=0\\
&\iff \lambda_1x^2+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda_1 & & & & & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc}\lambda_1 & & & = & 0\\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc}\lambda_1 & & & = & 0\\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & 2\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(x^2+x+1,x-1,x+1)$ est une famille libre. Par ce qui précède, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. La famille $(1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$ car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée). De plus, cette famille est de cardinal 4 et $\dim(\mathbb{R}_3[x])=4$. Par conséquent, $(1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^4$. Si

$$P=\lambda_0+\lambda_1(x-1)+\lambda_2(x-1)^2+\lambda_3(x-1)^3$$

alors

$$P'=\lambda_1+2\lambda_2(x-1)+3\lambda_3(x-1)^2 \quad ; \quad P''=2\lambda_2+6\lambda_3(x-1) \quad ; \quad P'''=6\lambda_3.$$

En particulier on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}P(1) & = a+b+c+d & =\lambda_0\\ P'(1) & = 3a+2b+c & =\lambda_1\\ P''(1) & = 6a+2b & =2\lambda_2\\ P'''(1) & = 6a+ & =6\lambda_3\end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{ll}a+b+c+d & =\lambda_0\\ 3a+2b+c & =\lambda_1\\ 3a+b & =\lambda_2\\ a+ & =\lambda_3.\end{array}\right.$$

Réciproquement, on vérifie que

$$P=(a+b+c+d)+(3a+2b+c)(x-1)+(3a+b)(x-1)^2+a(x-1)^3.$$

Les coordonnées de P dans la base $(1,x-1,(x-1)^2,(x-1)^3)$ sont donc

$$(a+b+c+d,3a+2b+c,3a+b,a).$$

Exercice 9. 1. Soit $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$AM=\begin{pmatrix}a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i\\ d+2g & e+2h & f+2i\\ g & h & i\end{pmatrix} \text{ et } MA=\begin{pmatrix}a & 2a+b & 3a+2b+c\\ d & 2d+e & 3d+2e+f\\ g & 2g+h & 3g+2h+i\end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
M \in F &\iff AM = MA \\
&\iff \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b & 3a+2b+c \\ d & 2d+e & 3d+2e+f \\ g & 2g+h & 3g+2h+i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2d+3g=0 \\ -2a+2e+3h=0 \\ -3a-2b+2f+3i=0 \\ 2g=0 \\ h-d=0 \\ 2i-3d-2e=0 \\ 2g=0 \\ 3g+2h=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g=0 \\ 2d=0 \\ -2a+2e+3h=0 \\ -3a-2b+2f+3i=0 \\ h-d=0 \\ 2i-3d-2e=0 \\ 2h=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g=0 \\ d=0 \\ h=0 \\ -2a+2e=0 \\ -3a-2b+2f+3i=0 \\ 2i-2e=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g=0 \\ d=0 \\ h=0 \\ a=e \\ i=e \\ b=f. \end{cases}
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$M \in F \iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $F = \mathrm{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

2. D'après la question précédente, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff a=b=c=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre. C'est une famille libre et génératrice de F donc c'est une base de F. En particulier, F est de dimension finie et sa dimension est égale à 3.

3. (a) On a

$$A = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons, B la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \geq 3$, on a :

$$B^k = B^{k-3}B^3 = 0.$$

D'après la formule du binôme de Newton, comme $I_3B = BI_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k}B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, on a donc

$$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1)+3n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

formule aussi valable pour $n=1$. Or, I_3, B et B^2 sont des éléments de F. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est combinaison linéaire d'éléments de F. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.

(b) D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, A^n &= I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I_3 + 2n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I_3 + 2n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(2n+1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc les coordonnées de A^n dans la base déterminée ci-dessus sont $(1, 2n, n(2n+1))$.

Exercice 10. 1.

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel de dimension finie (car $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie). De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E.

Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned}
a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\iff a = b = c = 0.
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille libre et génératrice de E. Ainsi, c'est une base de E et E est de dimension 3.

2. On a :

$$J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) On trouve :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Donc, pour tout $n \geq 3$, on a

$$J^n = J^{n-3} J^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

(b) Soit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= (I_3 + J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k \quad \text{(binôme de Newton car } I_3 \text{ et } J \text{ commutent)} \\
&= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \quad \text{car, pour tout } n \geq 3,\ J^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, la formule ci-dessus donne bien $M^0 = I_3$ et pour $n = 1$, on trouve $M^1 = I_3 + J$. Donc la formule est valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit des questions précédentes que :

$$\begin{aligned}
(M(1,1,1))^n &= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 11. Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. (a) H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide car $(0, \ldots, 0) \in H$.

(b) Montrons que H est stable par combinaison linéaire. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de H et $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $x + \lambda y \in H$.
On sait que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car $x \in H$ et $y_1 + \cdots + y_n = 0$ car $y \in H$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(x_1 + \lambda y_1) + \cdots + (x_n + \lambda y_n) &= x_1 + \cdots + x_n + \lambda(y_1 + \cdots + y_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $x + \lambda y \in H$.
Cela montre que pour tout $x, y \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda y \in H$. Ainsi H est stable par combinaison linéaire.

(c) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on en conclut que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Pour $i = 2, \ldots, n$, on note $f_i = e_1 - e_i$. Comme la famille $(f_2, \ldots, f_n)$ est de cardinal $n-1$ et que H est de dimension $n-1$ d'après l'énoncé, pour montrer que $(f_2, \ldots, f_n)$ est une base de H il suffit

   (a) de vérifier que pour tout $i = 2, \ldots, n$, $f_i \in H$,

   (b) de montrer que $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

   Montrons cela.

   (a) Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $f_i = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ où le -1 est un $i^{\text{ième}}$ position. Comme
$$1 + 0 + \cdots + 0 - 1 + 0 \cdots + 0 = 0$$
   alors $f_i \in H$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$.

   (b) Montrons que $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre. Soit $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (e_1 - e_k) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) e_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k e_k = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad \text{car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est libre}\end{aligned}$$
   Ainsi, la famille $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

   Par ce qui précède, la famille $(f_2, \ldots, f_n)$ est donc une base de H.

Exercice 12.

1. On remarque que
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$
   Ainsi :
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right).$$
   De plus, $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre car c'est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right)$. Donc
$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right) &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

2. On a
$$7 - 6x^2 = -6(x^2 + 2x) + 12(x+3) - \frac{29}{2} \cdot 2$$
   donc $\mathrm{Vect}(2, 3+x, 7-6x^2, 2x+x^2) = \mathrm{Vect}(2, 3+x, 2x+x^2)$.
   Or la famille $(2, 3+x, 2x+x^2)$ est échelonnée (famille de polynômes non nuls de degrés distincts) donc elle est libre. Ainsi $(2, 3+x, 2x+x^2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(2, 3+x, 7-6x^2, 2x+x^2)$. Donc
$$\mathrm{rg}(2, 3+x, 7-6x^2, 2x+x^2) = \dim\left(\mathrm{Vect}(2, 3+x, 7-6x^2, 2x+x^2)\right) = 3.$$

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne
$$u_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad ; \quad u_3 = (3, -4, -3).$$

1. On remarque que
$$u_3 = u_1 - 2u_2$$
   donc $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}(u_1, u_2)$.
   De plus, (u_1, u_2) est formée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une famille libre. Ainsi,
$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2.$$

2. Par définition du rang, on a $\dim(F) = 2$ d'après la question précédente et (u_1, u_2) est une base F.

Exercice 14.

1. Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes L_1, L_2, L_3 de A. Comme L_2 est nulle,
$$\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \mathrm{Vect}(L_1, L_3)$$
   et comme (L_1, L_3) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, (L_1, L_3) est une base de $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$.

2. La matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible. Ainsi $\mathrm{rg}(B) = 3$.

3. Le rang de C est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes L_1, L_2, L_3 de C. Comme $L_3 = 3L_1$,
$$\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \mathrm{Vect}(L_1, L_2)$$
   et comme (L_1, L_2) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, (L_1, L_2) est une base de $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ et $\mathrm{rg}(C) = 2$.

4. Le rang de D est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2, C_3 de D. Comme $C_1 = C_2 = C_3$,
$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1)$$
et comme C_1 est non nul, c'est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$. Donc $\mathrm{rg}(D) = 1$.
5. Le rang de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2, C_3 de E. Comme $C_1 = C_2$,
$$\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_3)$$
et comme (C_1, C_3) est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Donc (C_1, C_3) est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ et $\mathrm{rg}(E) = 2$.
6. Le rang de F est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2 de F. Comme (C_1, C_2) est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Donc (C_1, C_2) est une base de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{rg}(F) = 2$.

Exercice 15. 1.
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right) && L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 - L_2\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right) && L_4 \leftarrow L_4 - L_3\\
&= 3.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&2&3&0\\1&2&3&1&1\\3&2&1&0&1\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&2&3&0\\0&1&1&-2&1\\3&2&1&0&1\end{pmatrix}\right) && L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&2&3&0\\0&1&1&-2&1\\0&-1&-5&-9&1\end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&2&3&0\\0&1&1&-2&1\\0&0&-4&-11&2\end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_2 + L_3\\
&= 3.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}4&2&3\\1&2&9\\5&2&1\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}2&4&3\\2&1&9\\2&5&1\end{pmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_2\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}2&4&3\\0&-3&6\\0&1&-2\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}2&4&3\\0&-3&6\\0&0&0\end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2\\
&= 2.
\end{aligned}$$