Exercice 1

1) On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y(\Omega) = [\![2, 8]\!]$

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
1	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	0	0	0
2	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	0	0
3	0	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	0
4	0	0	0	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$

$P(X=1, Y=2) = P(X=1, \text{dé rouge} = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ par indépend.

$P(X=1, Y=3) = P(\{\text{dé bleu} = 1, \text{dé rouge} = 2\}) = \frac{1}{16}$ par indépendance

etc...

2) En utilisant la formule des probabilités totales : $\forall j \in [\![2,8]\!]$

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{4} P(X=i, Y=j)$$

Donc

$j \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y=j)$	$1/16$	$1/8$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$3/16$	$1/8$	$1/16$

3) $\forall i \in [\![1,4]\!]$ on a $P_{[Y=5]}(X=i) = \dfrac{P(X=i, Y=5)}{P(Y=5)} = 4 \times P(X=i, Y=5)$

donc

$i \in X(\Omega)$	1	2	3	4
$P_{[Y=5]}(X=i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

Exercice 2

On a : $X(\Omega) = \mathbb{N} = Y(\Omega)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$

$P([X=k]) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ et $P_{[X=k]}(Y=i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$

1) Soit $(k, i) \in \mathbb{N}^2$

$$P(X=k, Y=i) = P(X=k) P_{[X=k]}(Y=i) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

2) Voir ex 7 du cours.

Exercice 3

$Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ (voir exo 2 et ex 7 du cours)

Exercice 4

1) L'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. La variable X est le rang du 1er succès donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Sachant que $[X=k]$, le joueur B fait k lancers et Y compte le nombre de succès de la répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes. Donc la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$ est $\mathcal{B}(k, p)$.

2) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$: quand $[X=k]$ est réalisé, Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0,k]\!]$; et X prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$.

3) D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$

on a :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=0)\,P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{0} p^0(1-p)^{k-0}\; p(1-p)^{k-1}$$

$$= p\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1} = \frac{p}{1-p} \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \times (1-p)^2$$

car $(1-p)^2 \neq 1$ puisque $p \in]0,1[$.

Ainsi $P(Y=0) = \dfrac{p(1-p)}{2p-p^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$ (⚠ erreur dans l'énoncé)

4) De même qu'à la question précédente :

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\quad P(Y=m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=m)\,P(X=k)$ d'après la formule des probas totales

$$= \sum_{k=m}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=m)P(X=k)$$ car $\forall k < m$, $P_{[X=k]}(Y=m)$ est égale à 0.

$$= \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} p^m(1-p)^{k-m}\; p(1-p)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} p^{m+1}(1-p)^{2k-m-1}$$

Exo 10

Méthode 1 : on remarque que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Donc $\min(X,Y) = \dfrac{X+Y-\Delta}{2}$ et ainsi

$$\Delta = X+Y-2\min(X,Y)$$

Or d'après l'exo 9, $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$

donc Δ possède une espérance et

$$E(\Delta) = E(X+Y) - 2E(\min(X,Y))$$

$$= E(X)+E(Y) - 2E(\min(X,Y))$$

$$= \frac{2}{p} - \frac{2}{1-(1-p)^2}$$

Méthode 2 : on remarque que

$$\Delta = |X-Y| = |\max(X,Y) - \min(X,Y)|$$

$$= \max(X,Y) - \min(X,Y)$$

Or $E(\min(X,Y)) = \dfrac{1}{1-(1-p)^2}$ d'après l'exo 9 et

comme $X+Y = \max(X,Y) + \min(X,Y)$

on a : $E(X+Y) = E(\max(X,Y)) + E(\min(X,Y))$

donc $E(\max(X,Y)) = E(X+Y) - E(\min(X,Y)) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-(1-p)^2}$

et finalement :

$$E(\Delta) = E(\max(X,Y)) - E(\min(X,Y)) = \frac{2}{p} - \frac{2}{1-(1-p)^2}$$

Exercice 6

$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \in X(\Omega)$ $\forall i \in Y(\Omega)$ on a :

$$P(X=k, Y=i) = P(X=k)\, P(Y=i) \quad \text{par indépendance}$$
$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$

Exercice 7

1) $X \sim \mathcal{G}(p)$

2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \{m \in \mathbb{N}, m \geq 2\}$

* $P(X=i, Y=j) = 0$ si $j \leq i$
* soit $i \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}$ avec $j \geq 2$ et $i < j$

$$P(X=i, Y=j) = P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j)$$
$$= p(1-p)^{i-1} \times (1-p)^{j-i-1} \times p$$ indépendance mutuelle des lancers.
$$= p^2(1-p)^{j-2}$$

3) $([X=i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements donc par la formule des probabilités totales : pour tout $j \geq 2$

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X=i, Y=j)$$
$$= (j-1)\, p^2(1-p)^{j-2}$$

4) $(Y-X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales on a :

$$P(Y-X=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y-X=k, X=i)$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=k+i)$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{k+i-2}$$
$$= p^2(1-p)^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j$$ en faisant le changement de variable $j = i-1$
$$= p^2(1-p)^{k-1} \times \frac{1}{1-(1-p)}$$
$$= p(1-p)^{k-1}$$

Les variables étant indépendantes, après l'obtention du 1e Pile, on peut considérer les lancers comme une nouvelle séquence de lancers et $Y-X$ donne alors le rang d'apparition du 1e P de cette nouvelle séquence. Donc $Y-X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 13

1) a) On a vu au test 10 et à l'exercice 9 que

$$I \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$$

donc $V(I) = \dfrac{1-(1-(1-p)^2)}{(1-(1-p)^2)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}$

b) D'après la formule de Koenig-Huygens, comme I et S possèdent un moment d'ordre 2 *, $Cov(I,S)$ existe et

$$Cov(I,S) = E(IS) - E(I)E(S)$$

* On sait que $E(I) = \dfrac{1}{1-(1-p)^2}$ car $I \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$

* Déterminons $E(IS)$: remarquons que $IS = G_1 G_2$ donc par indépendance de G_1 et G_2

$$E(IS) = E(G_1)E(G_2) = \frac{1}{p^2}$$

* Déterminons $E(S)$: remarquons que $I+S = G_1 + G_2$ donc par linéarité de l'espérance :

$$E(G_1+G_2) = E(I+S) = E(I)+E(S)$$

donc $E(S) = E(G_2+G_1) - E(I) = E(G_1) + E(G_2) - E(I)$

$$= \frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

Finalement

$$Cov(I,S) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{1-(1-p)^2} \times \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2p-p^2} \times \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{2p-p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(2-p)p} \times \left(\frac{2(2-p)-1}{p(2-p)}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(2-p)^2p^2} \times (3-2p)$$

$$= \frac{(2-p)^2 - 3 + 2p}{(2-p)^2p^2} = \frac{1-2p+p^2}{p^2(2-p)^2} = \frac{(p-1)^2}{p^2(2-p)^2} = \frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}$$

c) On sait que

$$V(I+S) = V(I) + V(S) + 2Cov(I,S)$$

$$= \frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2} + V(S) + 2\frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}$$

$$= 3\frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2} + V(S)$$

d'autre part, $I+S = G_1 + G_2$ donc

$V(I+S) = V(G_1+G_2) = V(G_1) + V(G_2)$ car G_1 et G_2 sont indépen

$$= 2\frac{1-p}{p^2}$$

Ainsi $V(S) = \dfrac{2(1-p)}{p^2} - \dfrac{3(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}$

2) a) On a vu à l'exercice 5 que

$$A \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p^2) \text{ et } B \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 2p(1-p))$$

Methode 1 : soit C la variable aléatoire comptant le nombre de tireur ne touchant aucune cible. Alors C compte le nb de succès lorsque l'expérience de Bernoulli de succès "rater les 2 cibles" est répétée n fois de manière indépendantes. Donc $C \hookrightarrow \mathcal{B}(n, (1-p)^2)$

Or $A + B + C = n$ (chaque tireur touche ou bien les 2 cibles, ou bien une seule des deux ou bien aucune).

Par conséquent :

* $\mathrm{Cov}(A+B+C, A+B+C) = \mathrm{Cov}(A+B+C, n) = 0$ d'une part et, par linéarité et symétrie :

$$\mathrm{Cov}(A+B+C, A+B+C) = \mathrm{Cov}(A+B+C, A) + \mathrm{Cov}(A+B+C, B) + \mathrm{Cov}(A+B+C, C)$$

$$= V(A) + \mathrm{Cov}(A,B) + \mathrm{Cov}(A,C) + \mathrm{Cov}(A,B) + V(B) + \mathrm{cov}(B,C) + \mathrm{Cov}(A,C) + \mathrm{cov}(B,C) + V(C)$$

$$= V(A) + V(B) + V(C) + 2(\mathrm{Cov}(A,B) + \mathrm{Cov}(A,C) + \mathrm{Cov}(B,C))$$

Ainsi :

$$-\mathrm{Cov}(A,B) = \mathrm{Cov}(A,C) + \mathrm{Cov}(B,C) + \frac{V(A)+V(B)+V(C)}{2}$$

$$= \mathrm{Cov}(A+B, C) + \frac{V(A)+V(B)+V(C)}{2}$$

* $\mathrm{Cov}(A+B+C, C) = \mathrm{Cov}(A+B, C) + V(C)$

et $\mathrm{Cov}(A+B+C, C) = \mathrm{Cov}(n, C) = 0$

donc $\mathrm{Cov}(A+B, C) = -V(C)$

Finalement :

$$-\mathrm{Cov}(A,B) = -V(C) + \frac{V(A)+V(B)+V(C)}{2}$$

$$= \frac{V(A)+V(B)-V(C)}{2}$$

d'où $\mathrm{Cov}(A,B) = \dfrac{V(C)-V(A)-V(B)}{2}$

$$= \frac{n}{2}\Big((1-p)^2(1-(1-p)^2) - p^2(1-p^2) - 2p(1-p)(1-2p(1-p))\Big)$$

$$= \frac{n}{2}\Big((1-p)^2(2p-p^2) - p^2(1-p)(1+p) - 2p(1-p)(1-2p+2p^2)\Big)$$

$$= \frac{np(1-p)}{2}\Big((1-p)(2-p) - p(1+p) - 2(1-2p+2p^2)\Big)$$

$$= \frac{np(1-p)}{2}\Big(\cancel{2} - \cancel{p} - \cancel{2p} + \cancel{p^2} - \cancel{p} - p^2 - \cancel{2} + \cancel{4p} - 4p^2\Big)$$

$$= -2np^3(1-p)$$

Méthode 2 : en utilisant la loi de AB et la formule de Koenig-Huygens

A et B ont un moment d'ordre 2 donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(A,B) = E(AB) - E(A)E(B) = $$
$$= E(AB) - m\, p \times m\, 2p(1-p)$$

Donc il reste à déterminer $E(AB)$. D'après le théorème de transfert on a :

$$E(AB) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} ij\, P(A=i, B=j)$$

Or, $[A=i, B=j]$ = i tireurs touchent la cible 2, j tireurs la touche seulement une fois et les autres ne la touche jamais.

Donc :

* si $i+j > m$, $P(A=i, B=j) = 0$

* si $i+j \leq m$, $P(A=i,B=j) = \underbrace{\binom{m}{i}}_{①}\underbrace{\binom{m-i}{j}}_{③}\underbrace{p^{2i}}_{②}\underbrace{[2p(1-p)]^{j}}_{④}\underbrace{[(1-p)^2]^{m-i-j}}_{⑤}$

① et ② : il y a $\binom{m}{i}$ choix possibles de tireurs qui vont toucher 2 fois la cible et la proba de toucher 2x est p^2

③ et ④ : il y a $\binom{m-i}{j}$ choix possibles pour les j tireurs qui vont toucher 1 seule fois la cible (car ils ne font pas partie des i qui touchent 2 fois la cible) et la proba de toucher 1 seule fois est $2p(1-p)$

⑤ Les $m-i-j$ tireurs restant ne touchent aucun cible ce qui arrive avec probabilité $[(1-p)^2]^{m-i-j}$.

En posant $p_0 = p^2$ $p_1 = 2p(1-p)$ et $p_2 = (1-p)^2$ on a donc

$$E(AB) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i} ij\binom{m}{i}\binom{m-i}{j} p_0^i p_1^j p_2^{m-i-j}$$

car si $j > m-i$ alors $i+j > m$ et $P(A=i, B=j) = 0$

$$= \sum_{i=0}^{m} p_0^i \binom{m}{i} i \underbrace{\sum_{j=0}^{m-i}\binom{m-i}{j} j\, p_1^j p_2^{m-i-j}}_{=0 \text{ si } j=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} p_0^i\binom{m}{i} i \sum_{j=1}^{m-i}\binom{m-i}{j} j\, p_1^j p_2^{m-i-j}$$

Or $j\binom{m-i}{j} = \binom{m-i-1}{j-1}\times(m-i)$ ~~donc~~ pour tout $j \in [\![1, m-i]\!]$

$$E(AB) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\times i\, p_0^i (m-i)\sum_{j=1}^{m-i}\binom{m-i-1}{j-1} p_1^j p_2^{m-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} i\, p_0^i (m-i)\sum_{k=0}^{m-i-1}\binom{m-i-1}{k} p_1^{k+1} p_2^{m-i-1-k}$$

en faisant le changement de variable $k = j-1$. Ainsi

$$E(AB) = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} i(m-i)\, p_0^i\, p_1 \sum_{k=0}^{m-i-1}\binom{m-i-1}{k} p_1^k p_2^{m-i-1-k}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} i(m-i)\, p_0^i\, p_1 (p_1+p_2)^{m-i-1}$$ par le binôme de Newton

$$E(AB) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} i(m-i)\, p_1 p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1}$$

$$= p_1 \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (im - i^2)\, p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1}$$

$$= p_1 \left(\sum_{i=0}^{m} \underbrace{\binom{m}{i} mi\, p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1}}_{=0 \text{ si } i=0} - \sum_{i=0}^{m} \underbrace{\binom{m}{i} i^2 p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1}}_{=0 \text{ si } i=0} \right)$$

$$p_1 \left(m \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} i\, p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1} - \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} i \times i\, p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1} \right)$$

et comme pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ $i\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i-1} m$ on a

$$E(AB) = p_1 \left(m^2 \sum_{i=1}^{m} \binom{m-1}{i-1} p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1} - m \sum_{i=1}^{m} \binom{m-1}{i-1} i\, p_0^i (p_1+p_2)^{m-i-1} \right).$$

En posant $k = i-1$ on obtient

$$E(AB) = m p_1 \left(m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p_0^{k+1} (p_1+p_2)^{m-k-2} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (k+1) p_0^{k+1} (p_1+p_2)^{m-k-2} \right)$$

$$= \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (k+1) p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1} \right)$$

$$= \frac{p_1 p_0 m}{p_1+p_2} \left(m (p_0+p_1+p_2)^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} k\, p_0^k (p_1+p_0)^{m-k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1} \right)$$

$$= \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m (p_0+p_1+p_2)^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} k\, p_0^k (p_1+p_0)^{m-k-1} - (p_0+p_1+p_2)^{m-1} \right)$$

en utilisant le binôme de Newton dans les 2 dernières ligne

On, on remarque que $p_0+p_1+p_2 = 1$ donc

$$E(AB) = \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m-1 - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} k\, p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1}}_{=0 \text{ si } k=0} \right)$$

$$= \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m-1 - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k} k\, p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1} \right)$$

Or $\forall k \geq 0$ et $k \leq m-1$ $\binom{m-1}{k} k = \binom{m-2}{k-1}(m-1)$ donc

$$E(AB) = \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m-1 - (m-1) \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-2}{k-1} p_0^k (p_1+p_2)^{m-k-1} \right)$$

et en posant $l = k-1$:

$$E(AB) = \frac{m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(m-1 - (m-1) \sum_{l=0}^{m-2} \binom{m-2}{l} p_0^{l+1} (p_1+p_2)^{m-l-2} \right)$$

$$= \frac{(m-1) m p_1 p_0}{p_1+p_2} \left(1 - p_0 (p_0+p_1+p_2)^{m-2} \right)$$

$$= \frac{m(m-1) p_0 p_1 (1-p_0)}{p_1+p_2} = m(m-1) p_0 p_1 \quad \text{car } p_1+p_2 = 1-p_0$$

Finalement

$$\mathrm{cov}(A,B) = m(m-1) p_0 p_1 - m^2 p_0 p_1$$
$$= -m\, p_0 p_1$$
$$= -2m\, p^3 (1-p)$$

* I possède un moment d'ordre 2 car

$$I \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$$

* Montrons que S possède un moment d'ordre 2.

$$S = \max(G_1, G_2)$$

. que S possède un moment d'ordre 2

On sait que $I + S = G_1 + G_2$ donc

$$S = G_1 + G_2 - I$$

Comme G_1 et G_2 possèdent un moment d'ordre 2 alors G_1+G_2 possède une variance (Prop 10 Chap 8). Donc G_1+G_2 possède un moment d'ordre 2 (Prop 5 Chap 7).

Ainsi S est la somme de 2 variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre 2 (G_1+G_2 et $-I$) donc S possède une variance (Prop 10 Chap 8) donc un moment d'ordre 2 (Prop 5 chap 7)

<u>Rmq</u> : on peut montrer que S a un moment d'ordre 2 de façon plus directe (mais plus calculatoire)

En effet,

$$S^2 = (G_1+G_2)^2 - 2I(G_1+G_2) + I^2$$

$$= G_1^2 + G_2^2 + I^2 + 2G_1G_2 - 2IG_1 - 2IG_2.$$

Comme les variables G_1, G_2 et I suivent des lois géométriques elles possèdent un moment d'ordre 2 : G_1^2, G_2^2 et I^2 possèdent une espérance. Si on montre que G_1G_2, IG_1 et IG_2 possèdent une espérance alors par linéarité S^2 possèdera une espérance c-à-d S aura un moment d'ordre 2.

* <u>G_1G_2</u> : G_1 et G_2 possèdent une espérance et sont indépendantes donc G_1G_2 possède une espérance

* <u>IG_1 et IG_2</u> : on procède de la même manière pour les deux, seul le cas IG_1 sera détaillé.

Pour montrer que IG_1 possède une espérance, d'après le théorème de transfert il faut (et il suffit) de montrer que

$$\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} \min(i,j)\, i\, P(G_1 = i, G_2 = j)$$

est absolument convergente. Comme c'est une série double, à termes positifs, il suffit de montrer

① $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \min(i,j)\, i\, P(G_1=i, G_2=j)$ CV

② $\displaystyle\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{+\infty} \min(i,j)\, i\, P(G_1=i, G_2=j)$ CV.

① Mq $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{j \geq 1} \min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j)$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in \mathbb{N}^*$ on a :

(1) $\min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j) \leq i^2 P(G_1 = i, G_2 = j)$

car $\min(i,j) \leq i$.

Or, d'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'évènements $([G_2 = j])_{j \in \mathbb{N}}$ la série $\sum_{j \geq 1} P(G_1 = i, G_2 = j)$ converge et sa somme :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(G_1 = i, G_2 = j) = P(G_1 = i).$$

Ainsi $\sum_{j \geq 1} i^2 P(G_1 = i, G_2 = j)$ converge et sa somme vaut $i^2 P(G_1 = i)$. D'après (1) et le critère de comparaison des séries à termes positifs on en déduit que $\sum_{j \geq 1} \min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j)$ converge aussi et

(2) $\sum_{j=1}^{+\infty} \min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j) \leq i^2 P(G_1 = i)$

② Comme G_1 possède un moment d'ordre 2 la $\sum_{i \geq 1} i^2 P(G_1 = i)$ converge.

Comme $\sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{+\infty} \min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j)$ et $\sum_{i \geq 1} i^2 P(G_1 = i)$ sont à termes positifs, d'après (2) et le critère de comparaison des séries à termes positifs, comme $\sum_{i \geq 1} i^2 P(G_1 = i)$ converge, $\sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{+\infty} \min(i,j) i P(G_1 = i, G_2 = j)$ converge aussi.

Ainsi IG_1 possède une espérance.

De même IG_2 possède une espérance.

Finalement, S^2 possède une espérance par linéarité donc S possède un moment d'ordre 2.