TD10-Comparaison de fonctions et DL

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas si l'une des deux fonctions est négligeables devant l'autre au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$ en $+\infty$.
2. $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(x + x^2)$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ en 0.
4. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en 0^+.

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 et en déduire la limite en x_0.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{5x^4 + 2x^2}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
3. $h(x) = e^{x^2} - 1$ en $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $x_0 = +\infty$.
5. $j(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en $x_0 = 0$.
6. $k(x) = e^x - 2 + 3x$ en $x_0 = 1$.
7. $l(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = +\infty$.
8. $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $x_0 = +\infty$.
9. $n(x) = \frac{x - \ln(x)}{x+1}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 4, \quad \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \leq f(x) \leq \sqrt{x+2}\ln(x+1).$$

Déterminer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4

Déterminer le DL à l'ordre 2 des fonctions suivantes en x_0 avec la formule de Taylor-Young.

1. $f(x) = \ln(2 + x)$ en $x_0 = 0$.
2. $g(x) = e^{x^2 - 1}$ en $x_0 = 2$.

Exercice 5

Déterminer le DL des fonctions suivantes en x_0 avec les DL usuels et les opérations sur les DL.

1. $a(x) = -x + \ln(1 + x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 2.
2. $b(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 1.
3. $c(x) = e^x - \sqrt{1 + x}$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 2.
4. $d(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 1$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 2.

Exercice 6

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes en x_0 à l'aide d'un DL.

1. $f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}$ en $x_0 = 0$.
2. $g(x) = \ln(1 + x^2)$ en $x_0 = +\infty$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.*
2. *Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\frac{1}{2}$ (on pourra poser $u = x - 1$).*

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}.$$

1. *Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0.*
2. *Montrer que ce prolongement est dérivable en 0.*

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

Faire l'étude locale de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0).