Chapitre 4 : Familles génératrices, libres, bases

1 Familles génératrices, familles libres

1.1 Familles génératrices

Définition 1 (Famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Cela signifie que tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$.

Exemple 1

1. *La famille* $((1,0),(0,1))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$. *En effet :*

2. *La famille formée des matrices suivantes :*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *En effet :*

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *La famille* $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}_n[x]$. *En effet :*

Méthode 1

1. *Pour déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel, on utilisera les méthodes vues au paragraphe 2.3 du chapitre précédent ("Sous-espace engendré").*
2. *Pour vérifier si une famille donnée* $(u_1, \dots, u_n)$ *est génératrice de* E*, on considère un vecteur* $u \in E$ *quelconque et on cherche des scalaires* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tels que*

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

   La famille est alors génératrice si et seulement si le système linéaire ainsi obtenu a des solutions quel que soit $u \in E$.

Exemple 2

Montrons que la famille $((2,1),(1,1),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Test 1 (*Voir solution.*)

La famille (u,v,w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$, où

$$u=(1,2,3)\ ,\ v=(0,-1,-2)\ ,\ w=(2,3,8)\ ?$$

Proposition 1

On ne change pas le caractère générateur d'une famille en

- changeant l'ordre des vecteurs,
- en ajoutant à cette famille des nouveaux vecteurs,
- en multipliant un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
- retirant de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Remarque 1

Comparer avec la proposition 7 du chapitre précédent.

Test 2 (*Voir solution.*)

On admet que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En déduire, à l'aide de la proposition précédente, que $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2 (Dimension et cardinal d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{G})\geqslant n$.

Méthode 2

*Ce résultat peut servir à montrer qu'une famille **n'est pas** génératrice en montrant que son cardinal est strictement inférieur à la dimension.*

Exemple 3

La famille $(1, (x-1), (x-1)^3)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$?

1.2 Familles libres

Définition 2 (Famille libre/liée)

Soient E un espace vectoriel et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est dite **libre** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque 2

1. *Autrement dit, une famille est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire de ses vecteurs donnant le vecteur nul est la combinaison triviale.*
2. *Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont **linéairement indépendants**.*

Méthode 3

Pour déterminer si une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est libre ou liée, on cherche les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire homogène d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il y a deux cas possibles :

1. *le système a pour unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, la famille est alors libre ;*
2. *le système admet une infinité de solutions, la famille est alors liée.*

Exemple 4

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $((2,1,4), (6,3,1), (-2,-1,7))$. Déterminons si cette famille est libre ou liée.*

2. *Dans $\mathbb{R}^2$, montrons que la famille $((1,2),(2,3))$ est libre.*

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(1, x, \dots, x^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$. En effet, pour tous $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :*

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la famille*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

2. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la famille constituée des matrices*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Dans $\mathbb{R}_5[x]$ la famille*

$$(x^2 - x + 1 \, , \, 2x^2 - x + 3 \, , \, -x^2 + x - 1).$$

Proposition 3

- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
- Si on ajoute un vecteur à une famille liée, elle reste liée.

Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Proposition 4

- Une famille constituée d'**un seul vecteur** est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille constituée de **deux vecteurs** est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
- On ne change pas le caractère libre d'une famille en changeant l'ordre des vecteurs, en retirant un vecteur à la famille, un multipliant un vecteur par un scalaire **non nul**, en ajoutant un vecteur qui **n'est pas** combinaison linéaire des autres.

Proposition 5

Une famille de polynômes **non nuls** de degrés **distincts** est libre. Une telle famille est appelée une famille **échelonnée** de polynômes.

Remarque 3

Une famille qui n'est pas échelonnée peut-être libre ou liée selon les cas !

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $(x+1, x+2)$,
2. $(x+1, 2x+2)$.

Proposition 6 (Dimension et cardinal d'une famille libre)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E. Alors $\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$.

Méthode 4

Ce résultat peut servir pour montrer qu'une famille n'est pas libre.

Exemple 5

Dans $\mathbb{R}^3$, *la famille* $\mathcal{F} = ((1,0,2),(0,2,-1),(1,1,1),(-2,1,5))$ *est-elle libre ?*

2 Bases

2.1 Bases

Définition 3 (Base)

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice de E.

Remarque 4

Dans un espace vectoriel E, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de vecteurs de E alors c'est une base de l'espace $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple 6

1. *D'après l'exemple 1 et le test 3, la famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les exemples 1 et 4, la famille $(1, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.*
3. *Montrons que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ où*

$$e_1 = (1, 0, 1) \ , \ e_2 = (0, 1, 1) \ , \ e_3 = (1, 1, 0).$$

Méthode 5

1. *Pour montrer qu'une famille donnée est une base, on montre qu'elle est génératrice et libre.*
2. *Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on trouve une famille génératrice (voir chapitre précédent) puis on cherche à savoir si cette famille est libre ou liée :*
   - *si elle est libre, c'est donc une base ;*
   - *si elle est liée, un vecteur est combinaison linéaire des autres : d'après la proposition 1 la famille obtenue en retirant ce vecteur est toujours génératrice. Si cette nouvelle famille est libre, on a gagné, sinon on peut encore enlever un vecteur pour trouver une famille génératrice plus petite. Le processus s'arrête au bout d'un moment et on tombe sur une famille libre et génératrice.*

Exemple 7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$u = (2,1,1)\ ,\ v = (1,-1,3)\ ,\ w = (4,5,-3).$$

Déterminons une base de $E = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.

Test 5 (*Voir solution.*)

1. *Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel et trouver en une base.*
2. *Soient*

$$P_0 = (x-1)(x+1)\ ,\ P_1 = (x+1)(x-2)\ ,\ P_2 = (x-1)(x-2).$$

Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs. De plus, ce nombre est égal à la dimension de E.

Exemple 8

1. *La dimension de $\mathbb{R}_3$ est égale à 3 donc toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ sont formées de 3 vecteurs.*
2. *La dimension de $\mathbb{R}_4[x]$ est égale à 5 donc toutes les bases de $\mathbb{R}_4[x]$ sont formées de 5 vecteurs.*
3. *La dimension de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est égale à 6 donc toutes les bases de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont formées de 6 vecteurs.*

Méthode 6

Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, il suffit donc d'en trouver une base et de compter le nombre de vecteurs dont elle est constituée.

Test 6 (*Voir solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base et la dimension.

1. *$F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(1,1,1))$,*
2. *$F = \mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))$,*
3. *$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$.*

Le résultat suivant complète les propositions 6 et 2 :

Proposition 7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E.
   Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geqslant n$. De plus, si $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = n$ alors $\mathcal{G}$ est une base de E.
2. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E.
   Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant n$. De plus, si $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) = n$ alors $\mathcal{L}$ est une base de E.

Méthode 7

Si on connaît la dimension de l'espace et qu'on souhaite en trouver une base, il suffit donc de trouver une famille génératrice ou libre dont le cardinal est égal à la dimension !

Exemple 9

La famille $\mathcal{F} = (1, (x-1), (x-1)^2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?

Test 7 (*Voir solution.*)

1. *Montrer que $((1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,3), (1,0,3,3))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Montrer que $(1+x+x^2, x+x^2, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.*
3. *La famille $((1,1), (1,2), (2,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?*

2.2 Coordonnées dans une base

Remarque 5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient E un espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice alors tout vecteur $u \in E$ s'écrit **d'au moins** une façon comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre alors tout vecteur $u \in E$ s'écrit **d'au plus** une façon comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$.*

Définition 4 (Proposition/Définition : coordonnées dans une base)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E. Pour tout $u \in E$, il existe un unique p-uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$
Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Méthode 8

Étant donnée une base $(u_1, \dots, u_p)$ et un vecteur u pour trouver les coordonnées de u dans cette base on cherche à trouver l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ de $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$. Cela revient à résoudre un système.

Exemple 10

1. *D'après l'exemple 6, la famille*
$$e_1 = (1, 0, 1)\ ,\ e_2 = (0, 1, 1)\ ,\ e_3 = (1, 1, 0)$$
est une base de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
$$(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2} e_1 + \frac{z - x + y}{2} e_2 + \frac{y - z + x}{2} e_3.$$
Les coordonnées de (x, y, z) dans cette base sont donc

2. *Dans $\mathbb{R}_3[x]$, la famille $(1, x, x^2, x^3)$ est une base car*

Les coordonnées de $2x^2 + 1$ dans cette base sont :

Test 8 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{B} = ((1, 2, -1), (-1, 0, 2), (1, 1, 1))$.
1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans cette base.*
3. *Soient x, y, z trois réels. Déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans cette base.*

Test 9 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[x]$, on considère la famille $\mathcal{B} = (x^2 + 1, x + 1, 1)$.
1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $4x^2 + 3x + 5$ dans cette base.*

2.3 Bases canoniques

Certains espaces vectoriels possèdent, par leur définition, une base naturelle appelée **base canonique**, dans laquelle les cordonnées sont particulièrement simples à lire.
Soient $n, p \in \mathbb{R}^*$.

1. **Base canonique de $\mathbb{R}^n$.**
   La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille constituée des vecteurs
   $$e_1 = (1,0,\dots,0)\ ,\ e_2 = (0,1,0,\dots,0)\ ,\ \dots\ ,\ e_n = (0,\dots,0,1).$$
   Les coordonnées d'un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique sont :

2. **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.**
   La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1.
   Les coordonnées d'une matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ dans la base canonique sont :

   Par exemple, pour $n = p = 2$ la base canonique est la base de l'exemple 6 et les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sont :

3. **Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.**
   La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est la famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.
   Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dans la base canonique sont :

3 Rang

3.1 Rang d'un famille de vecteurs

Définition 5 (Rang d'un famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **rang** de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n)$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_\mathrm{n})$.

Remarque 6

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on a, pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

1. $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité si et seulement si* $E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

2. $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) \leqslant n$ *avec égalité si et seulement si* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est libre.*

Exemple 11

Déterminons le rang des familles suivantes.

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$:

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
3. $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Proposition 8 (Rang et opérations)

Le rang d'une famille de vecteurs reste inchangé si :

- on change l'ordre des vecteurs,
- on multiplie un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
- on retire de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres,
- on ajoute à l'un des éléments de la famille une combinaison linéaires des autres.

Remarque 7

Comparer avec la proposition 1 du chapitre 4.

Méthode 9

Pour trouver le rang d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$, on peut appliquer successivement les opérations de la proposition 8 pour transformer la famille en une famille de même rang dont on connaît le rang.

Exemple 12

Déterminons le rang de la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Test 11 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$; 2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$.

3.2 Rang d'une matrice

Définition 6 (Rang d'une matrice)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **rang** de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs colonnes de A.

Remarque 8

En d'autres termes, si $A = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ C_1 & \dots & C_p \\ | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *alors*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)).$$

Remarque 9

D'après la proposition 8, le rang d'une matrice est invariant par opération élémentaire sur les colonnes (voir aussi la proposition 11 ci-dessous).

D'après la remarque 6 , on a :

Proposition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(A) \leqslant p.$$

Exemple 13

Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On procède par opération sur les colonnes pour se ramener à une matrice dont le rang est facile à calculer :

Proposition 10

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Remarque 10

En particulier, le rang d'une matrice est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

En conséquence, le rang est aussi invariant par opérations élémentaires sur les lignes :

Proposition 11

Le rang d'une matrice est inchangé si

- on multiplie l'une des colonnes ou l'une des lignes par un scalaire non nul ;
- on ajoute à l'une des colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ;
- en échangeant deux colonnes ou deux lignes entre elles.

Méthode 10

Pour déterminer le rang d'une matrice, on effectue des opérations sur les lignes et les colonnes pour obtenir une matrice de même rang et dont le rang est facile à calculer. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_r & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

où $a_1, \ldots, a_r$ sont non nuls, est de rang r.
Si on agit sur les lignes, l'algorithme du pivot de Gauss permet d'obtenir une telle matrice !

Exemple 14

Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Effectuer la méthode du pivot de Gauss (opération sur les lignes)*

2. *Le rang est le nombre de pivots non nuls.*

Test 12 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 & 3 \\ -2 & 1 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

La méthode du pivot de Gauss marche à tous les coups mais dans certains cas, on peut déterminer le rang bien plus facilement !

Test 13 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 12 (Rang et inversibilité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Remarque 11

Cette proposition sera utile dans les chapitres suivants. Pour le moment, elle est déjà pratique pour montrer que certaines matrices ne sont pas inversibles.

Test 14 (*Voir solution.*)

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Objectifs

1. Avoir compris et connaître par coeur les définitions de *famille génératrice*, *famille libre*, *base*.
2. Savoir montrer qu'une famille est libre/ liée :
3. Savoir monter qu'une famille est ou n'est pas génératrice.
4. Savoir montrer qu'une famille est une base en montrant :
   - qu'elle est libre et génératrice ;
   - qu'elle est libre et que son cardinal est la dimension de l'espace ;
   - ou qu'elle est génératrice et que son cardinal est la dimension de l'espace.
5. Savoir exhiber une base d'un espace vectoriel donné.
6. Avoir compris la notion de coordonnées dans une base.
7. Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.
8. Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel en déterminant une base.
9. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.