

TD12-Intégration

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 te^{2t} dt,$
2. $\int_1^e \ln(x) dx,$
3. $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2} dx,$
4. $\int_1^5 \sqrt{y} \ln(y) dy,$
5. $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}} dr,$
6. $\int_0^2 x\sqrt{3x+1} dx.$

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$$

et on note $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , I_n est bien définie et calculer I_1 .
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

1. Justifier que f est bien définie et est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer sa fonction dérivée.
2. En déduire $f(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 4

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt,$
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx,$
3. $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt,$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt.$

Exercice 5

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt,$
2. $\int_1^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx,$
3. $\int_0^1 t \ln(t) dt,$
4. $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{3t+1} dt,$
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2(t)} dt.$

Exercice 6

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2} dx,$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt,$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx.$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de comparaison.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt,$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt,$
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt.$

Exercice 8

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de négligeabilité.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx,$
2. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx,$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt,$
4. $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt, k \in \mathbb{N},$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} dt,$
6. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt.$

Exercice 9

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème d'équivalence.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 2t}{t^4 + 1} dt,$
3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} dt,$
5. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt,$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx,$
4. $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{t}} dt,$
6. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$

Exercice 10

On définit sur \mathbb{R}_+^* la fonction h par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$.

1. Étudier le signe de h .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
3. En déduire que $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est convergente. On note alors $K = \int_1^{+\infty} h(x) dx$.
4. Montrer, grâce au changement de variable $u = \frac{1}{x}$ que $\int_0^1 h(u) du$ est convergente et vaut $-K$.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} |h(x)| dx$ et $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ convergent et déterminer leur valeur.

Exercice 11

1. (a) Étudier la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$.
(b) Plus généralement, montrer que si f est une fonction continue paire et que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut $2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$.
2. (a) Étudier la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.
(b) Plus généralement, montrer que si f est une fonction continue impaire et que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 0.

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ est convergente.
2. (a) Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2 .

En déduire : $I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

En déduire : $I_1 = a^2$.

3. (a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1) a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

(b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1) a^2 I_{n-2}$.

(c) Calculer I_2 et I_3 .

Exercice 13

1. Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est convergente.

2. (a) Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)$.

(b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $J(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.