Chapitre 14 : Systèmes différentiels

1 Rappels

1.1 Équations différentielle d'ordre 1

Définition 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel et b une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et y une fonction définie sur J. On dit que y **est une solution sur J de l'équation différentielle d'ordre 1**

$$y' + ay = b$$

si et seulement si y est dérivable sur J et pour tout $t \in J$:

$$y'(t) + ay(t) = b(t).$$

Proposition 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel et b une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto ce^{-at}, \; c \in \mathbb{R}.$$

- Soit y_0 une solution sur I de l'équation $y' + ay = b$. Alors les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in I \mapsto ce^{-at} + y_0(t), \; c \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

$\blacksquare$

1.2 Équations différentielle d'ordre 2

Définition 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux réels et c une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et y une fonction définie sur J. On dit que y **est une solution sur J de l'équation différentielle d'ordre 2**

$$y'' + ay' + by = c$$

si et seulement si y est deux fois dérivable sur J et pour tout $t \in J$:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c(t).$$

Proposition 2

Soient a et b deux réels.

- Si l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ possède deux racines réelles distinctes, notées r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions de la forme :
$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$
- Si l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ possède une unique racine, notée r_0, alors les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions de la forme :
$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle.

Démonstration :

$\blacksquare$

2 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

2.1 Résolutions

Définition 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que $(y_1, \ldots, y_n)$ est solution du **système différentiel linéaire à coefficients constants**

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}y_1 & + & a_{1,2}y_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}y_n & = & y_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1 & + & a_{n,2}y_2 & + & \ldots & + & a_{n,n}y_n & = & y_n' \end{array}\right.$$

si pour tout réel t on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}y_1(t) & + & a_{1,2}y_2(t) & + & \ldots & + & a_{1,n}y_n(t) & = & y_1'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1(t) & + & a_{n,2}y_2(t) & + & \ldots & + & a_{n,n}y_n(t) & = & y_n'(t) \end{array}\right. .$$

Résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants consiste à déterminer **tous** les n-uplets de fonctions $(y_1, \ldots, y_n)$ solutions du système.

Proposition 3 (Écriture matricielle)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$. Alors $(y_1, \ldots, y_n)$ est solution du système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}y_1 & + & a_{1,2}y_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}y_n & = & y_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1 & + & a_{n,2}y_2 & + & \ldots & + & a_{n,n}y_n & = & y_n' \end{array}\right.$$

si et seulement si $Y' = AY$.

Théorème 1 (de Cauchy)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}y_1 & + & a_{1,2}y_2 & + & \dots & + & a_{1,n}y_n & = & y_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}y_1 & + & a_{n,2}y_2 & + & \dots & + & a_{n,n}y_n & = & y_n' \end{array} \right.$$

possède une unique solution vérifiant **les conditions initiales** suivantes :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ y_k(t_0) = b_k.$$

Remarque 1

Ce théorème ne permet pas de trouver explicitement une solution !

Exemple 1

On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{array} \right. .$$

1. *Mettre ce système sous forme matricielle.*

2. *On pose* $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$ *et* $x_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.
   (a) *Montrer que* $x_1' = -x_1$. *En déduire la forme de* x_1.

   (b) *Montrer que* $x_2' = 3x_2$. *En déduire la forme de* x_1.

   (c) *En déduire l'ensemble des solutions du système.*

   (d) *Déterminer l'unique solution* (y_1, y_2) *du système vérifiant :*

$$y_1(0) = 1 \quad et \quad y_2(0) = -1.$$

La méthode utilisée dans l'exemple ci-dessus est en fait un cas particulier du résultat suivant lorsque A est diagonalisable :

Proposition 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une **matrice diagonalisable** dont on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes).
On considère $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
L'ensemble des solutions du système $Y' = AY$ est :

$$\left\{ t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} e_n \ ; \ (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Nous allons voir pourquoi ce résultat est vrai sur un exemple. La méthode est à savoir : vous devez être capable de refaire le raisonnement.

Méthode 1

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une **matrice diagonalisable**. Il existe donc une matrice diagonale D (dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A) et une matrice inversible P telle que :*

$$D = P^{-1}AP.$$

On s'intéresse au système différentiel $Y' = AY$.

1. *On pose $X = P^{-1}Y$. Alors :*

$$\begin{aligned} Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y &\iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\iff X' = DX. \end{aligned}$$

   Ainsi, Y est solution du système $Y' = AY$ si et seulement si X est solution du système $X' = DX$.

2. *Comme D est diagonale le système $X' = DX$ est :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 x_1 & = & x_1' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n x_n & = & x_n' \end{array} \right. .$$

   Il s'agit simplement de n équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants que vous savez résoudre depuis l'an dernier.

3. *On en déduit les solutions Y à l'aide de la formule $Y = PX$.*

Exemple 2

On considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{array} \right. .$$

1. *Mettre le système sous forme matricielle. On note A la matrice déterminée.*

2. *Justifier que A est diagonalisable.*

3. *Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.*

4. On pose $X = P^{-1}Y$. Montrer que X est solution du système $X' = DX$ puis résoudre ce système.

5. En déduire les solutions Y du système initial.

Test 1 (*Voir solution.*)

On reprend le système

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

de l'exemple 1.

1. *Résoudre ce système à l'aide de la méthode 1.*
2. *Comparer avec l'exemple 1.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Résoudre le système

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases}.$$

2.2 Lien avec les équations différentielles d'ordre 2

Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Soit y une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Alors on a les équivalences suivantes :

Ainsi l'équation différentielle d'ordre 2 $y'' + ay' + by = 0$ est équivalente au système différentiel $Y' = AY$.

Soit $r \in \mathbb{R}$. On a :

Or, un calcul direct donne :

On obtient finalement

$$r \in \mathrm{Sp}(A) \iff r^2 + ar + b = 0$$

et on retrouve l'équation caractéristique de l'équation différentielle d'ordre 2.
En particulier, si l'équation caractéristique **possède deux solutions distinctes** r_1 et r_2 alors A possède deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2 donc est diagonalisable.

- Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre r_1. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

  Ainsi $E_{r_1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}\right)$.
- De même, $E_{r_2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}\right)$.
- D'après la propriété 4 les solutions Y sont les fonctions de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} : t \longmapsto e^{r_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} + e^{r_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve donc le résultat de la proposition 2.

Exemple 3

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + 2y' - 3y = 0.$$

1. *Soit y une solution de cette équation. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $Y' = AY$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.*
3. *En déduire les solutions du système $Y' = AY$ puis les solutions de $y'' + 2y' - 3y = 0$.*

Test 3 (*Voir solution.*)

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

1. *Soit y une solution de cette équation. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $Y' = AY$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.*
3. *En déduire les solutions du système $Y' = AY$ puis les solutions de $y'' - y' - 2y = 0$.*

3 Trajectoires et états stables

3.1 États d'équilibre

Définition 4 (États d'équilibre)

On appelle **état d'équilibre** ou **point d'équilibre** d'un système différentiel toute solution formée de fonctions constantes.

Méthode 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère le système $Y' = AY$.
Soit $(y_1, \dots, y_n)$ un n-uplet de fonctions constantes :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \exists c_i \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_i(t) = c_i.$$

La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on a :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{est solution du système} \iff A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, déterminer les états d'équilibres revient à trouver le noyau de A.

En particulier, si A est inversible le seul point d'équilibre est $(0, \dots, 0)$.

Exemple 4

On reprend le système de l'exemple 2 :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + y_1 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Déterminons les états d'équilibres.

Exemple 5

On considère le système :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_1 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y.$$

Déterminons les états d'équilibres.

Test 4 (*Voir solution.*)

1. Déterminer les états d'équilibre du système du test 1.
2. Déterminer les états d'équilibre du système du test 2.

3.2 Trajectoires

Définition 5 (Trajectoires)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle **trajectoire** du système différentiel $Y' = AY$ tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\{(y_1(t), \ldots, y_n(t))\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$$

où $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est une solution du système.

Remarque 2

1. *Si A est une matrice carrée de taille n alors une trajectoire est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Il s'agit d'une courbe qui peut être réduite à un point.*
3. *D'après le théorème 1, deux trajectoires distinctes ne s'intersectent jamais.*

Définition 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit qu'une trajectoire $\{(y_1(t), \ldots, y_n(t))\ ;\ t \in \mathbb{R}\}$ du système différentiel $Y' = AY$ **converge** (quand t tend vers $+\infty$) si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la fonction y_i possède une limite finie quand t tend vers $+\infty$.
Dans les autres cas, on dit que la trajectoire **diverge**.

Exemple 6

On considère le système différentiel suivant :

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} Y.$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. *En déduire les solutions du système.*

3. *Donner une trajectoire convergente et une trajectoire divergente.*

Théorème 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable**.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles alors toutes les trajectoires du système $Y' = AY$ converge vers un point d'équilibre.
- Sinon, il existe des trajectoires divergentes.

Exemple 7

On considère le système différentiel $Y' = AY$ *où* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Il est facile de voir que :*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\} \quad ; \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

1. *Rappeler la forme des solutions.*

2. *Déterminer l'ensemble des points d'équilibre. Ce sont des trajectoires convergentes.*

3. *La trajectoire* $Y : t \mapsto e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est-elle convergente ?*

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit A *la matrice de l'exemple précédent. Montrer :*

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\} \quad ; \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

3.3 Trajectoires en dimension 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et on note λ_1, λ_2 ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et (e_1, e_2) une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

L'ensemble solutions du système $Y' = AY$ est alors :

$$\left\{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} e_2 \; ; \; (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$: A est alors inversible donc $(0, 0)$ est le seul état d'équilibre. Il s'agit d'un équilibre instable car les trajectoires non nulles divergent.

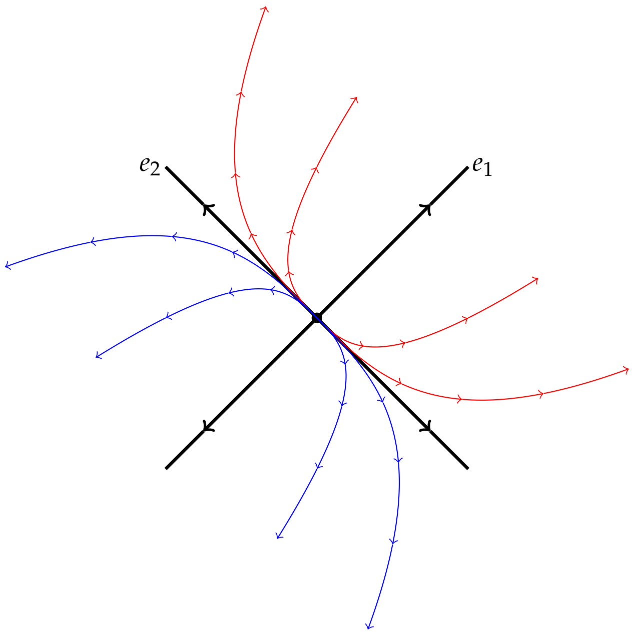

FIGURE 1 – Cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

- Cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$: A est alors inversible donc $(0, 0)$ est le seul état d'équilibre. Il s'agit d'un équilibre stable car les trajectoires convergent toutes vers $(0, 0)$.

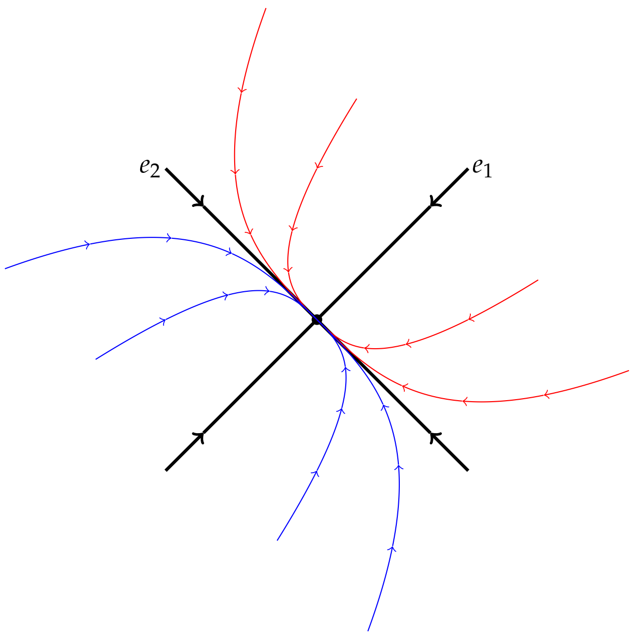

FIGURE 2 – Cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

- Cas où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: A est alors inversible donc $(0,0)$ est le seul état d'équilibre. Il s'agit d'un équilibre instable.

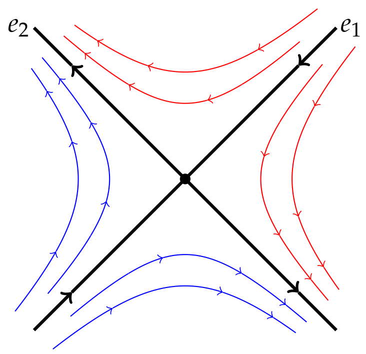

FIGURE 3 – Cas où $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

- Cas où $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Les états d'équilibres sont les éléments de $\mathrm{Vect}(e_1)$. Si $\lambda_2 < 0$ ce sont des états stables. Si $\lambda_2 > 0$ il existe des trajectoires divergentes.

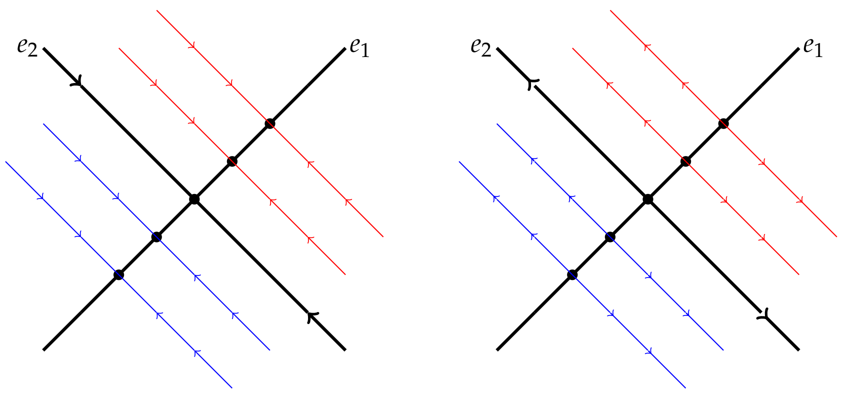

FIGURE 4 – À gauche : cas où $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$. À droite : cas où $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$.

- Cas où $\lambda_1 = \lambda_2$: dans ce cas $A = \lambda_1 I_2$.
  — Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ alors toutes les solutions sont des états d'équilibres.
  — Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ alors $(0,0)$ est une équilibre stable.
  — Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ les trajectoires non nulles divergent.

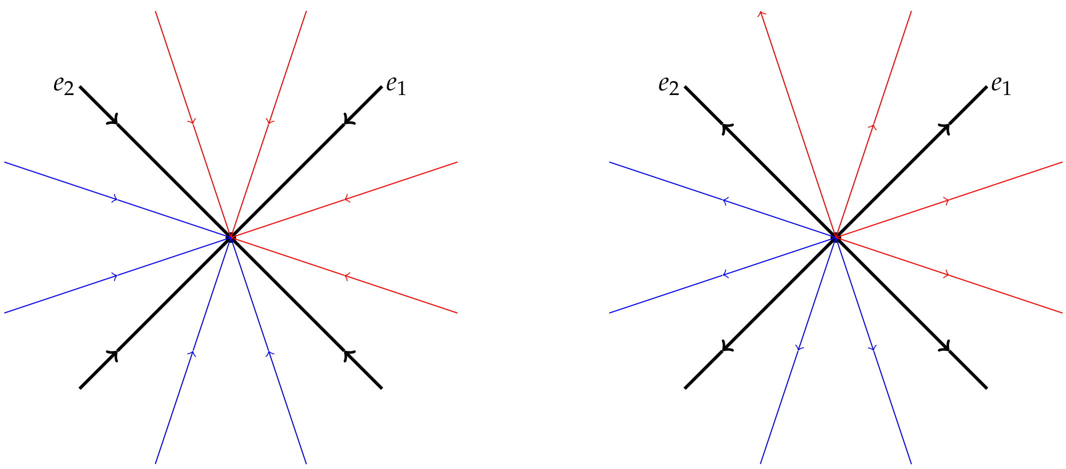

FIGURE 5 – À gauche : cas où $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$. À droite : cas où $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

4 Objectifs

1. Savoir résoudre une équation différentielle du premier ordre, une équation différentielle à coefficients constants du second ordre.

2. Savoir mettre un système différentiel sous forme matricielle.
3. Savoir résoudre un système différentiel dans le cas où la matrice est diagonalisable.
4. Savoir résoudre une équation différentielle à coefficients constants du second ordre en se ramenant à un système.
5. Savoir déterminer les états d'équilibre d'un système différentiel.
6. Savoir étudier la convergence de trajectoires.