TD1-Études de suites

1 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1

1. *Commencer par étudier les variations de f sur $[0,1]$ et en déduire que*

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[\qquad (*)$$

puis faire une récurrence.

2.
3. *Pour déterminer la limite étudier les points fixes de f.*

Exercice 2

2. *Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Utiliser le signe de g ou procéder par récurrence.*
4. *Quelles sont les limites finies possibles ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle réellement converger vers l'une d'elle ?*

Exercice 4 (*Ecricome 2013*)

2. *Utiliser le théorème de la bijection.*
   Regarder le signe de $\varphi(1)$ et $\varphi(e)$.
3. *Par récurrence, en utilisant la croissance de φ.*
4. *Étudier les points fixes de $x \mapsto \varphi(x) + x$ sur $]0, +\infty[$.*
5.
6. *Comme pour l'exercice 2.*

Exercice 5 (*EML 2018*)

3. *Calculer $f(2)$ et $f(4)$ et comparer avec 2.*
4. *Pour l'hérédité, utiliser la croissance de $\ln$ après avoir remarqué que $b - \ln(b) = 2$.*
5. *Idem que dans l'exercice 1.*
6. (a) *Inégalité des accroissements finis.*

Exercice 7

2. *Utiliser le théorème de la bijection ou le corollaire du TVI.*
3.
4.
5. *Idem que dans l'exercice précédent.*

Exercice 8 (*EML 2014*)

5. *Méthode 1 : intégrer l'inégalité précédente.*
   Méthode 2 : étudier la fonction $x \mapsto \varphi(x) - ex$.
6. *Récurrence.*
9. *Utiliser la question 6 pour montrer que la suite des sommes partielles est croissante et majorée.*