

Exercice 1

1. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i -ème lancer donne Pile » et F_i l'événement « le i -ème lancer donne Face ».

- L'événement $[X = 0]$ est égal à l'événement $P_1 \cap P_2$. Donc on trouve :

$$P([X = 0]) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) = \frac{4}{9}.$$

- L'événement $[X = 1]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Donc on trouve :

$$\begin{aligned} P([X = 1]) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{car } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(P_3) + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(P_3) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

- L'événement $[X = 2]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$.
Donc on trouve :

$$\begin{aligned} P([X = 2]) &= P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 \cap F_2}(P_3)P_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(P_4) + P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(F_3)P_{F_1 \cap P_2 \cap F_3}(P_4) \\ &\quad + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(F_3)P_{P_1 \cap F_2 \cap F_3}(P_4) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X = n]$ signifie qu'il y a eu $n + 2$ tirages (n Faces et 2 Piles), que le dernier tirage est une Pile et que le premier Pile a été obtenu lors d'un des $n + 1$ tirages. Ainsi :

$$[X = n] = \bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right).$$

Comme les événements $\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right)$ pour $i = 1, \dots, n + 1$ sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P([X = n]) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

2. (a) On a $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(U = n) \geq P(X = n, U = n) = P_{[X=n]}(U = n)P(X = n) = \frac{1}{n+1}P(X = n) > 0.$$

Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X = n]$, l'urne contient $n + 1$ boules numérotées de 0 à n indiscernables. Donc la loi de U sachant $[X = n]$ est une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$. Ainsi on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ et comme d'après la question précédente, pour tout $n < k$, $P_{[X=n]}(U = k) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(U = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la question 1)b), on trouve :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

- (d) La variable aléatoire U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Montrons qu'elle est convergente. On a :

$$\sum_{k \geq 0} kP(U = k) = \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 0} k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}.$$

On reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$ (donc convergente). Par conséquent, la série à termes positifs $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge. On peut donc conclure que U possède une espérance et :

$$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que U possède une variance, il suffit de montrer que U possède un moment d'ordre 2 c'est-à-dire que $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$ converge absolument. Cette série est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 P(U = k) &= k^2 \frac{2}{3^{k+1}} = (k(k-1) + k) \frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{3^3} k(k-1) \left(\frac{1}{3} \right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} k \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$ est combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{3}$ toutes deux convergentes (car $0 \leq \frac{1}{3} < 1$). Ainsi la série converge et on a :

$$E(U^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) = \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1.$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens on trouve

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $U + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

3. (a) On a toujours $0 \leq U \leq X$ donc $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(V = n) \geq P(X = 2n, U = n) = P_{[X=2n]}(U = n)P(X = 2n) > 0.$$

Donc $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} P_{[X=n]}(V = k) &= P_{[X=n]}(X - U = k) = P_{[X=n]}(n - U = k) = P_{[X=n]}(U = n - k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n - k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[X = n]$, V suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$.

- (c) Le même calcul qu'en 2.c) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

4. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\begin{aligned} P(U = n, V = k) &= P(U = n, X - U = k) = P(U = n, X = n + k) \\ &= P_{[X=n+k]}(U = n)P(X = n + k) \\ &= \frac{1}{n + k + 1} \times \frac{4(n + k + 1)}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{n+k+2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 2.c et 3.c :

$$P(U = n)P(V = k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout $(n, k) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$ on a :

$$P(U = n, V = k) = P(U = n)P(V = k).$$

Les variables aléatoires U et V sont donc indépendantes.

5. D'après la question précédente les variables aléatoires U et V sont indépendantes donc $\text{Cov}(U, V) = 0$. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on obtient :

$$\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U + V, U) = \text{Cov}(U, U) + \text{Cov}(V, U) = V(U) + \text{Cov}(U, V) = V(U) = \frac{3}{4}.$$

6. (a)

```
import numpy as np
def simule_X():
    nb_pile=0
    nb_face=0
    while nb_pile<2 :
        if np.rand()<2/3:
            nb_pile=nb_pile+1
        else:
            nb_face=nb_face+1
    return nb_face
```

- (b) La fonction `mystere` renvoie la fréquence de victoire du joueur A lors de 10 000 parties.

- (c) En ordonnée, on lit la probabilité que A gagne : elle est d'environ $\frac{1}{2}$ lorsque que p vaut environ 0,8.

7. (a) La variable aléatoire Z donne le rang du premier Pile et suit donc une loi géométrique de paramètre p . Ainsi on a :

$$E(Z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(b) On a $Y + 1 = Z$ donc Y possède une espérance et une variance données par :

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad V(Y) = V(Z - 1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) = P(Z \geq n + 1) = 1 - P(Z < n + 1) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n [Z = i]\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n P(Z = i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} \\ &= 1 - p \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} \\ &= (1-p)^n. \end{aligned}$$

8. (a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$, on sait que :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, n \leq Y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(n \leq Y) \quad \text{car les joueurs sont indépendants} \end{aligned}$$

(b) D'après les questions précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(n \leq Y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\ &= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{1 - \frac{1-p}{3}} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1-p}{3}} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1-p}{3} \times \frac{9}{(2+p)^2} + \frac{3}{2+p} \right) \\ &= \frac{4}{(2+p)^2}. \end{aligned}$$

- (c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2}$. Or, la probabilité que A gagne est $P(X \leq Y)$. Ainsi, le jeu est équilibré si et seulement si $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or, on a :

$$\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \iff 8 = (2+p)^2 \iff p^2 + 4p - 4 = 0 \iff p = -2 + 2\sqrt{2} \text{ ou } p = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Comme $p > 0$, le jeu est équilibré si et seulement si $p = -2 + 2\sqrt{2}$ (on remarque que $-2 + 2\sqrt{2}$ vaut environ 0,8 donc cohérent avec la question précédente).

Exercice 2

Partie A

1. (a) Soient $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) &= f((x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')) \\ &= \left(\frac{-(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') + z + \lambda z'}{3}, \frac{-(x + \lambda x') - (y + \lambda y') - 2(z + \lambda z')}{3}, \frac{x + \lambda x' + y + \lambda y' + 2(z + \lambda z')}{3} \right) \\ &= \left(\frac{-x + 2y + z}{3}, \frac{-x - y - 2z}{3}, \frac{x + y + 2z}{3} \right) + \lambda \left(\frac{-x' + 2y' + z'}{3}, \frac{-x' - y' - 2z'}{3}, \frac{x' + y' + 2z'}{3} \right) \\ &= f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z')). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) = f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z')).$$

Ainsi f est linéaire. Il est alors clair que c'est une endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

- (b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_3 = -L_2 \\ &\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, -1, 1)).$$

Le vecteur $(-1, -1, 1)$ est un vecteur générateur de $\ker(f)$ non nul donc c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$ et f n'est pas injective.

- (c) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f), \quad \text{càd} \quad 3 = 1 + \text{rg}(f).$$

Ainsi f est de rang 2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on a donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

- (d) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} f^2((x, y, z)) &= \frac{1}{3} f((-x + 2y + z, -x - y - 2z, x + y + 2z)) \\ &= \frac{1}{3} ((-x + y + z) f((1, 0, 0)) + (-x - y - 2z) f((0, 1, 0)) + (x + y + 2z) f((0, 0, 1))) \quad \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{3} ((-x + y + z) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (-x - y - 2z) \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (x + y + 2z) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)) \\ &= \frac{1}{9} ((-x + y + z)(-1, -1, 1) + (-x - y - 2z)(2, -1, 1) + (x + y + 2z)(1, -2, 2)) \\ &= \frac{1}{9} ((x - y - z, x - y - z, -x + y + z) + (-2x - 2y - 5z, x + y + 2z, -x - y - 2z) \\ &\quad + (x + y + 2z, -2x - 2y - 4z, 2x + 2y + 4z)) \\ &= \frac{1}{9} (-3y - 3z, -3y - 3z, 3y + 3z) \\ &= \frac{1}{3} (-y - z, -y - z, y + z). \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{3}(-y - z, -y - z, y + z) = \frac{x+y}{3}(-1, -1, 1) \in \ker(f)$, on trouve donc :

$$f^3((x, y, z)) = f(f^2((x, y, z))) = f\left(\frac{x+y}{3}(-1, -1, 1)\right) = \frac{x+y}{3} f((-1, -1, 1)) = (0, 0, 0).$$

Ainsi

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^2((x, y, z)) = \left(\frac{-y-z}{3}, \frac{-y-z}{3}, \frac{y+z}{3}\right) \quad \text{et} \quad f^3((x, y, z)) = (0, 0, 0).$$

2. Soit g un tel endomorphisme de E . On remarque que

$$g(e_1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_1); \quad g(e_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_2); \quad g(e_3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = f(e_3).$$

Ainsi, f et g sont deux endomorphismes de \mathbb{R}^3 qui coïncident sur la base (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . Donc $f = g$.

3. (a) Montrons que \mathcal{B}' est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \text{ et } L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille \mathcal{B}' est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Comme son cardinal est égal à la dimension de \mathbb{R}^3 , c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

(b) On trouve :

$$f(e'_1) = (0, 0, 0) \quad ; \quad f(e'_2) = e'_1 \quad ; \quad f(e'_3) = e'_2.$$

(c)

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}((0, 0, 0), e'_1, e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. On note A la matrice de f dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) On a : $M = -A + I_3$.

(b) D'après la question précédente :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = -\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f).$$

Ainsi : $h = \text{id}_{\mathbb{R}^3} - f$. On en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f) = -\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après la question précédente $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ est inversible car triangulaire à coefficient diagonaux non nuls. Donc h est bijective et ainsi M est inversible.

(d) D'après la question 4.(a), $(M - I_3)^3 = (-A)^3 = -A^3$. Or f^3 est l'endomorphisme nul d'après 1.d. Donc :

$$0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^3 = A^3.$$

Ainsi :

$$(M - I_3)^3 = (-A)^3 = -A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

D'autre part, avec la formule du binôme de Newton (M et I_3 commutent) :

$$(M - I_3)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I_3.$$

On en déduit donc :

$$I_3 = M^3 - 3M^2 + 3M = M(M^2 - 3M + 3I_3).$$

Par conséquent :

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I_3.$$

(e) On sait que :

$$M = I_3 - A.$$

Or on a vu dans la question précédente que $A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. En particulier :

$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

D'après la formule du binôme de Newton (A et I_3 commutent) :

$$\begin{aligned} M^n &= (I_3 - A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-A)^k I_3^{n-k} \\ &= I_3 - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (I_3 - A)^2 - 3(I_3 - A) + 3I_3 \\ &= I_3 + A + A^2 \end{aligned}$$

La formule donnée est donc valide pour $n = -1$.

Partie B

1. Comme par hypothèse $u \circ u = f$ alors

$$u \circ f = u \circ u \circ u = f \circ u^2 = f \circ u.$$

2. (a) Calculons $f(u(e'_1))$:

$$f(u(e'_1)) = (f \circ u)(e'_1) = (u \circ f)(e'_1) = u(f(e'_1)) = u((0, 0, 0)) = (0, 0, 0).$$

Donc $u(e'_1)$ appartient au noyau de f . Or, d'après la question 1.a de la partie A, on sait que $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$. Ainsi, $u(e'_1)$ appartient $\text{Vect}(e'_1)$: il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e'_1) = ae'_1$.

(b) Calculons $f(u(e'_2) - ae'_2)$:

$$\begin{aligned} f(u(e'_2) - ae'_2) &= f(u(e'_2)) - af(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= u(f(e'_2)) - ae'_1 \quad \text{car } f \circ u = u \circ f \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= u(e'_1) - ae'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } u(e'_1) = ae'_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $u(e'_2) - ae'_2$ appartient à $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$. Donc, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $u(e'_2) - ae'_2 = be'_1$, c'est-à-dire

$$u(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

(c) Comme $f \circ u = u \circ f$, on a :

$$f \circ u(e'_3) = u \circ f(e'_3) = u(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

Calculons $f(u(e'_3) - ae'_3 - be'_2)$:

$$\begin{aligned} f(u(e'_3) - ae'_3 - be'_2) &= f(u(e'_3)) - af(e'_3) - bf(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= u(f(e'_3)) - ae'_2 - be'_1 \quad \text{car } f \circ u = u \circ f, \quad f(e'_3) = e'_2 \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= u(e'_2) - ae'_2 - be'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } u(e'_2) = ae'_2 + be'_1. \end{aligned}$$

Ainsi, $u(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient à $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$.

(d) Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$, c'est-à-dire

$$u(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.$$

(e) On a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), u(e'_2), u(e'_3)) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

De plus :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

(f) On a supposé que $u^2 = u \circ u = f$ donc on doit avoir :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier : $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ c'est-à-dire $a = 0$ et $0 = 1$. Absurde.

Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme u tel que $u \circ u = f$.

3. (a) Par linéarité de u , on trouve :

$$u^2(e'_1) = u(u(e'_1)) = u(ae'_1) = au(e'_1) = a^2e'_1 \quad ; \quad u^2(e'_2) = u(be'_1 + ae'_2) = bu(e'_1) + au(e'_2) = 2abe'_1 + a^2be'_2$$

et

$$u^2(e'_3) = u(ae'_3 + be'_2 + ce'_1) = au(e'_3) + bu(e'_2) + cu(e'_1) = (b^2 + 2ac)e'_1 + 2abe'_2 + a^2e'_3.$$

(b) On retrouve bien la même matrice qu'en 2.e.