ECG2 – Mathématiques

CONCOURS BLANC 2-MATHÉMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type EM Lyon (pages 2 à 5) ;

— un sujet type EDHEC (pages 6 à 9).

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type EM Lyon

Exercice 1

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty; 0[$ et continues sur $[0; +\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0; +\infty[$, $0 \leqslant F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t)$.

   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt = \mathbb{P}([U \leqslant V]).$$

2. En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t)\,dt$.

3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.

   (a) Rappeler, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.

   (b) En déduire : $\mathbb{P}([U > V]) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

   (a) Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{P}([M_n > t])$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
   Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

5. (a) Montrer : $\mathbb{P}([N = 1]) = \mathbb{P}([T_1 \leqslant T_0]) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de $\mathbb{P}([N > n])$ en fonction de n.

   (c) Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $\mathbb{P}([N = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   (d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

il existe une matrice P *de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *inversible telle que :* $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3. On note $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs U_1 et U_2 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par : $\mathrm{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Vérifier que 1 est valeur propre de M et que $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ est une base du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer un vecteur U_3 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{MU}_3 - \mathrm{U}_3 = \mathrm{U}_2$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On admet que $\mathscr{B}_2 = (\mathrm{U}_1, -\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3)$ est également une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathscr{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathscr{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$.
8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $\mathrm{N} = \mathrm{T} - \mathrm{I}_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?
10. (a) Calculer N^3 et $(\mathrm{I}_3 + \mathrm{N})(\mathrm{I}_3 - \mathrm{N} + \mathrm{N}^2)$.
    (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.
11. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
    (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
    (b) Montrer que la famille $\mathscr{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$.
    (d) Calculer $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}$ et en déduire que les matrices N et $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}$ sont semblables.
12. Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathrm{U} =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}, \quad h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x,y) \in \mathrm{U}$.
5. Soit $(x,y) \in \mathrm{U}$. Montrer :

$$(x,y) \quad \text{est un point critique de } h \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).
7. (a) Vérifier : $\forall (x,y) \in \mathrm{U},\ h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   (b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n).$$

8. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n) :
    u  = 1
    for k in .............. :
        u = ..............
    return u
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
    (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.
    (c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.
    En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2;3]$.

(d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

(e) En déduire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

•Fin du sujet 1 •

Sujet 2 – Type EDHEC

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$$

Partie A

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie B

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=f(x,1).$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x)=n$, d'inconnue x, possède une unique solution que l'on notera u_n.
6. On note h la restriction de g à $[1,+\infty[$.
   (a) Justifier que h est bijective et dresser le tableau de variations de h^{-1}.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Exercice 2

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. (a) Soit $\mathrm{A}>a>0$. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_a^{\mathrm{A}}\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$ puis sa limite quand a tend vers 0^+ et A vers $+\infty$.
   (b) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.
   (c) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $\mathrm{F}(x)$ selon que $x>0$ ou $x\leqslant 0$.
2. (a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x\geqslant 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.
   (b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $\mathrm{G}(x)$ selon que $x\geqslant 1$ ou $x<1$.
3. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{M}_n=\max(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$.
   (a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $\mathrm{G}_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $\mathrm{G}_n(x)$ en fonction de x.

(b) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. (a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

   (b) Donner un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0 , puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

EXERCICE 3

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner les valeurs propres de M_a.

   (b) Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

   (c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.
2. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

   (a) Quelle est la dimension de E ?

   (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

   (c) En déduire que M_a^3 appartient à E.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n), tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$

   On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

   (b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script Python qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = int( input('Entrez une valeur pour n :'))
a = input('Entrez une valeur pour a :')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(1,n+1):
    u = (2*a+1)*u+v
    v = -a*(a+2)*u+w
    w = a*a*u
print(w,v,u)
```

   (c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

   On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}.$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A.

   Il en résulte (et on admet ce résultat) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)\mathrm{M}_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right)\mathrm{M}_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right)\mathrm{I}$.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

   (b) En déduire la limite L_a, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $\left(\mathrm{M}_a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Vérifier que $\mathrm{L}_a^2 = \mathrm{L}_a$.

6. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a.
   Montrer que :

   (a) $\forall x \in \mathrm{Ker}\left(f_a - \mathrm{I}d\right)$, $\varphi_a(x) = x$.

   (b) $\forall x \in \mathrm{Im}\left(f_a - \mathrm{I}d\right)$, $\varphi_a(x) = 0$.

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1er pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k-ième manche ».

On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche ».

1. Étude de la première manche.

   (a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible (c'est-à-dire de probabilité zéro) que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

   (b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

   (c) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{E}_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = i)\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $\mathrm{P}(\mathrm{E}_1)$ en fonction de p et q.

   (d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

   (a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(\mathrm{X}_n < \mathrm{Y}_n)$.

   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{E}_1\cap\ldots\mathrm{E}_{k-1}}(\mathrm{E}_k)$ puis en déduire :

   $$\forall n \geqslant 2,\ \ \mathrm{P}(\mathrm{G}_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

   (c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

   (d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $\mathrm{P}(\mathrm{G}) = \dfrac{1}{2}$.

   (e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

   (b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. (a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la n-ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

Dans cette partie, on suppose définie une fonction Python `geom` qui prend en argument un nombre $p \in]0,1[$ et simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('Entrez une valeur pour p:')
c = 1
X = geom(p)
Y = geom(p)
while X == Y :
    X=------
    Y=------
    c=------
if X<Y :
    ------
else :
    ------
print(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur?

```
if ------ :
    print("A gagne le deuxieme jeu")
else :
    ------
```

•Fin du sujet 2 •