TD 3-Espaces vectoriels

Exercice 1. On cherche s'il existe des réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (x+4)^2 = a(x+2)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1).$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** : supposons qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x+4)^2 = a(x+2)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1).$$

Alors, pour $x = -2$, $x = -1$ et $x = 1$ on obtient :

$$\begin{cases} & b & - & 3c & = & 4 \\ a & & - & 2c & = & 9 \\ 9a & + & 4b & & = & 25. \end{cases}$$

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} & b & - & 3c & = & 4 \\ a & & - & 2c & = & 9 \\ 9a & + & 4b & & = & 25. \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b & = & 4+3c \\ a & = & 9+2c \\ 9(9+2c)+4(3c+4) & = & 25 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a & = & \frac{21}{5} \\ b & = & -\frac{16}{5} \\ c & = & -\frac{12}{5} \end{cases}$$

- **Synthèse** : réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{21}{5}(x+2)^2 - \frac{16}{5}(x+1)^2 - \frac{12}{5}(x-1) &= \frac{21}{5}(x^2+4x+4) - \frac{16}{5}(x^2+2x+1) - \frac{12}{5}(x-1) \\ &= x^2+8x+16 \\ &= (x+4)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$P(x) = \frac{21}{5}Q(x) - \frac{16}{5}R(x) - \frac{12}{5}S(x).$$

Le polynôme P est donc combinaison linéaire des polynômes Q, R et S.

Exercice 2.

1. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset E$.
   - F est non vide car la matrice nulle est symétrique.
   - Soient A et B deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

   $${}^tA = A \quad \text{et} \quad {}^tB = B.$$

   Donc, par linéarité de la tranposition :

   $${}^t(A+\lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB = A + \lambda B.$$

   Ainsi :

   $$\forall (A,B) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A + \lambda B \in F.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset \mathbb{R}^4$.
   - F est non vide car $(0,0,0,0) \in F$.
   - Soient (x_1,y_1,z_1,t_1) et (x_2,y_2,z_2,t_2) deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que

   $$(x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2) \in F.$$

   On a :

   $$(x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2) = (x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2).$$

   Or, puisque (x_1,y_1,z_1,t_1) et (x_2,y_2,z_2,t_2) appartiennent à F :

   $$\begin{aligned} 2(x_1+\lambda x_2)+(y_1+\lambda y_2)-(t_1+\lambda t_2) &= \underbrace{2x_1+y_1-t_1}_{=0 \text{ car } (x_1,y_1,z_1,t_1)\in F} + \lambda(\underbrace{2x_2+y_2-t_2}_{=0 \text{ car } (x_2,y_2,z_2,t_2)\in F}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$y_1 + \lambda y_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

Ainsi :

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) \in F.$$

On a donc montré que

$$\forall((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in F^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ (x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) \in F.$$

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En particulier, c'est un espace vectoriel.

3. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset E$.
   - F est non vide car le polynôme nul vérifie bien $P'(3) = 2P(3)$.
   - Soient P et Q deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

     $$P'(3) = 2P(3) \quad \text{et} \quad Q'(3) = 2Q(3).$$

     Donc, par linéarité de la dérivation :

     $$(P + \lambda Q)'(3) = P'(3) + \lambda Q'(3) = 2P(3) + 2\lambda Q(3) = 2(P + \lambda Q)(3).$$

     Ainsi :

     $$\forall(P, Q) \in F^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ P + \lambda Q \in F.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3. On va montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

- On a bien $F \cap G \subset E$.
- Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.
  De même, comme G est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in G$.
  Ainsi $0_E \in F \cap G$. En particulier $F \cap G$ est non vide.
- Soient x et y deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Comme $x \in F$ et $y \in F$ et que F est un sous-espace vectoriel de E alors

  $$x + \lambda y \in F.$$

  De même, comme $x \in G$ et $y \in G$ et que G est un sous-espace vectoriel de E alors

  $$x + \lambda y \in G.$$

  Donc : $x + \lambda y \in F \cap G$. Ainsi :

  $$\forall(x, y) \in (F \cap G)^2,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda y \in F \cap G.$$

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4.

1. L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x^3, x^2, x, 1)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de 1, x, x^2, x^3 :

   $$\mathrm{Vect}(x^3, x^2, x, 1) = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\ ;\ (a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}_3[x].$$

2. D'après les propriétés sur les sous-espaces engendrés :

   $$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(x+1, x+2, x+3) &= \mathrm{Vect}(x+1, x+2-(x+1), x+3)\\ &= \mathrm{Vect}(x+1, 1, x+3)\\ &= \mathrm{Vect}(x+1-1, 1, x+3)\\ &= \mathrm{Vect}(x, 1, x+3)\\ &= \mathrm{Vect}(x, 1) \text{ car } x+3 \text{ est combinaison linéaire de } x \text{ et } 1\\ &= \mathbb{R}_1[x].\end{aligned}$$

3. Comme $(2, -4) = -2(-1, 2)$ alors :

   $$\mathrm{Vect}((-1, 2), (2, -4)) = \mathrm{Vect}((-1, 2)) = \{(-a, 2a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}.$$

   Il s'agit de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = -2x$.

4. On a

   $$\mathrm{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \{x(1, 0) + y(0, 1)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5.

- **Méthode 1** : on procède par double inclusion.
  — Montrons que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{s}$ et de $\overrightarrow{t}$.
  On voit facilement que :

  $$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{s} + \overrightarrow{t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{s} + 2\overrightarrow{t}.$$

  Ainsi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$. Donc :

  $$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}).$$

  — De même, montrons que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.

On voit facilement que :

$$\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{t} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}.$$

Ainsi $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) \subset \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Ainsi : $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$.

- **Méthode 2** :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) \\ &= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{t}) \\ &= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{t}, \overrightarrow{t}) \\ &= \mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}).\end{aligned}$$

Exercice 6.

Dans chaque cas, on va écrire F sous la forme $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ avec $u_i \in E$. En particulier, cela montrera que F est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $(u_1, \ldots, u_n)$.

1. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.
   (a) On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in F \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0\end{array}\right.$$

   (b) Ici le système est déjà sous forme triangulaire.

   (c) On exprime les inconnues principales en fonctions des autres.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -y-z \\ 2y & = & z\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -3y \\ z & = & 2y\end{array}\right.$$

   (d) Finalement, $(x,y,z) \in F \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -3y \\ z & = & 2y\end{array}\right.$. Donc

$$F = \left\{(-3y, y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(-3,1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((-3,1,2)).$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $((-3,1,2))$ est une famille génératrice de F.

2. L'ensemble F est décrit par une équation.
   On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in F \Longleftrightarrow a = 2c$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}F &= \left\{\begin{pmatrix} 2c & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

3. L'ensemble F est donné sous forme paramétrique.

$$\begin{aligned}F &= \{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(x+2x^3) + bx^2 + c(x-x^2),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(x+2x^3, x^2, x-x^2)\end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(x+2x^3, x^2, x-x^2)$ est une famille génératrice de F.

4. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.
   On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors

$$P \in F \Longleftrightarrow P(1) = P(2) \Longleftrightarrow a+b+c = 4a+2b+c \Longleftrightarrow b = -3a.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned}F &= \left\{ax^2 - 3ax + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a(x^2-3x) + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(x^2-3x, 1).\end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(x^2-3x, 1)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 7. On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + 2z - t = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\}.$$

Il s'agit de montrer que :

$$F = \mathrm{Vect}(2, -1, -1, 1), (0, 1, -1, -1)).$$

On va commencer par déterminer une famille génératrice de F. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.

1. On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors
$$(x, y, z, t) \in F \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right.$$
2. Ici le système est déjà sous forme triangulaire.
3. On exprime les inconnues principales en fonctions des autres.
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} t & = & 2x + y + 2z \\ x & = & -y - z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} t & = & -y \\ x & = & -y - z \end{array}\right.$$
4. Finalement, $(x, y, z, t) \in F \iff \left\{\begin{array}{ccc} t & = & -y \\ x & = & -y - z \end{array}\right.$. Donc
$$\begin{aligned} F &= \left\{(-y - z, y, z, -y) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y(-1, 1, 0, -1) + z(-1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0)). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, 0)) &= \mathrm{Vect}((-1, 1, 0, -1) + (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((-2, 1, 1, -1), (-1, 0, 1, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2, -1, -1, 1), (-1, 0, 1, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2, -1, -1, 1), (-2, 0, 2, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2, -1, -1, 1), (-2, 0, 2, 0) + (2, -1, -1, 1)) \\ &= \mathrm{Vect}((2, -1, -1, 1), (0, -1, 1, 1)) \\ &= \mathrm{Vect}(2, -1, -1, 1), (0, 1, -1, -1)). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F = \mathrm{Vect}((2, -1, -1, 1), (0, 1, -1, -1)).$$

Exercice 8.

1. Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de F.
   (a) On écrit la condition pour qu'un vecteur appartienne à F sous forme d'un système (non-homogène).
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 2, 1) \\ &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (S) \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ \lambda & + & 2\mu & = & y \\ \lambda & + & \mu & = & z \end{array}\right. \end{aligned}$$
   Ainsi
$$(x, y, z) \in F \iff (S) \text{ possède au moins une solution.}$$
   (b) On met le système sous forme triangulaire. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ \lambda & + & 2\mu & = & y \\ \lambda & + & \mu & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & 3\lambda & = & y + 2x \\ & & 2\lambda & = & x + z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & 3\lambda & = & y + 2x \\ \dfrac{y + 2x}{3} & - & \dfrac{x + z}{2} & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{3}L_2$$
   (c) Ainsi, (S) possède des solutions si et seulement si $\dfrac{y + 2x}{3} - \dfrac{x + z}{2} = 0$. Donc
$$(x, y, z) \in F \iff \frac{y + 2x}{3} - \frac{x + z}{2} = 0 \iff x + 2y - 3z = 0.$$

   Finalement,
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}.$$
2. Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de F.
   (a) On écrit la condition pour qu'un vecteur appartienne à F sous forme d'un système (non-homogène).
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors
$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) = \lambda(2, 1, -3) + \mu(1, 1, -2) + \gamma(1, 0, 0) \\ &\iff \exists(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad (S) \left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -3\lambda & - & 2\mu & & & = & z \end{array}\right. \end{aligned}$$
   Ainsi
$$(x, y, z) \in F \iff (S) \text{ possède au moins une solution.}$$

(b) On met le système sous forme triangulaire. Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -3\lambda & - & 2\mu & & & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -\lambda & & & & & = & z+2y \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \gamma & = & x+y+z \\ \mu & = & 3y+z \\ \lambda & = & -z-2y \end{array}\right. .$$

(c) Ainsi (S) possède des solutions pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donc

$$F = \mathbb{R}^3.$$

Exercice 9.

- $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de E. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E et donc $\dim E = 2$.
- De même, $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F donc $\dim F = 2$.
- On remarque que

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  donc $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \in E$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$. Par conséquent, $F \subset E$.
- On a $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$ donc $F = E$.