Chapitre 8 : Correction des tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Une urne contient 3 *boules blanches,* 4 *boules vertes et* 5 *boules bleues indiscernables au touché. On tire simultanément* 3 *boules dans l'urne au hasard.*

1. *Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
2. *Sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$*, on considère les variables aléatoires* X *égale au nombre de boules blanches obtenues et* Y *égale au nombre de boules vertes obtenues. Déterminer la loi de* (X, Y).

Test 2 (***Voir solution.***)

Soit $p \in]0,1[$*. On reprend l'énoncer de l'exemple 2 sauf qu'on ne suppose plus les pièces équilibrées : chacune d'elle donne « Face » avec probabilité* p *et « Pile » avec probabilité* $1-p$*. Déterminer la loi du couple* (X, Y) *dans ce cas.*

Test 3 (***Voir solution.***)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la loi conditionnelle de Y *sachant* $[\mathrm{X}=4]$.

Test 4 (***Voir solution.***)

1. *On reprend l'exemple 4 (cas 2).*
   (a) *Avec la loi du couple* (X, Y)*, déterminer la loi de* X.
   (b) *Trouver la loi de* Y *de deux façons :*
      i. *à partir de la loi de* Y *sachant* $[\mathrm{X}=i]$ *pour tout* $i \in \mathrm{X}(\Omega)$ *(voir exemple 4) et de la loi de* X *;*
      ii. *à partir de la loi de* (X, Y).
2. *Soit* (X, Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par* $\mathrm{X}(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}(\Omega)=\mathbb{N}$ *et pour tout* $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=i, \mathrm{Y}=j)=\frac{e^{-2} 2^{j-i}}{j!}.$$
   Déterminer les lois marginales.

Test 5 (***Voir solution.***)

On tire successivement deux jetons dans une urne contenant n *jetons numérotés de* 1 *à* n*. On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *au deuxième. Dans les deux cas suivants dire si les variables* X *et* Y *sont indépendantes.*

1. *Tirage avec remise.*
2. *Tirage sans remise.*

Test 6 (***Voir solution.***)

Soient X *et* Y *des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$*. On suppose que pour tout* $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$ *tel que* $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right) \neq 0$ *on a :*
$$\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=y]}([\mathrm{X}=x])=\mathrm{P}([\mathrm{X}=x]).$$
Montrer que X *et* Y *sont indépendantes.*

Test 7 (***Voir solution.***)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé suivant une loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$*. Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$,
$$\mathrm{P}([\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n])=(n-1) p^{2}(1-p)^{n-2}.$$

Test 8 (***Voir solution.***)

Prouver la proposition 5.

Test 9 (***Voir solution.***)

Soit $p \in]0,1[$*. On considère* $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ *et* $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$ *deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de* XY *et son espérance.*

Test 10 (***Voir solution.***)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$.

1. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *calculer* $P([\min(X,Y) > k])$.
2. *En déduire la loi de* $\min(X,Y)$.
3. *Expliquer ce résultat à l'aide d'une expérience.*

Test 11 (***Voir solution.***)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1.Déterminer la covariance de X *et* Y.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Ω est l'ensemble des parties de 3 boules parmi les 12 boules (donc Ω contient $\binom{12}{3}$ éléments), $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme sur Ω.*
2. *On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ car on ne tire que trois boules. Soit $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.*
   (a) *Si $i + j > 3$ alors $P(X = i, Y = j) = 0$ car on ne tire que trois boules.*
   (b) *Si $i + j \leqslant 3$, un tirage qui réalise l'événement $[X = i, Y = j]$ est entièrement déterminé par*
   - *le choix des i boules blanches : il y a $\binom{3}{i}$ choix possibles ;*
   - *le choix des j boules vertes : il y a $\binom{4}{j}$ choix possibles ;*
   - *le choix des $3 - i - j$ boules restantes qui sont forcément bleues : il y a $\binom{5}{3-i-j}$ choix possibles.*

   Ainsi $P(X = i, Y = j) = \dfrac{\binom{3}{i}\binom{4}{j}\binom{5}{3-i-j}}{\binom{12}{3}}$.

   Au final :

$i \in X(\Omega)$ \ $j \in Y(\Omega)$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{55}$
1	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{9}{110}$	0
2	$\frac{3}{44}$	$\frac{3}{55}$	0	0
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.*
2. *Pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ déterminons $P(X = i, Y = j)$.*
   Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons
   - *P_i^1 l'événement « la pièce 1 tombe sur Pile au i-ème lancer »*
   - *F_i^1 l'événement « la pièce 1 tombe sur Face au i-ème lancer »*
   - *P_i^2 et F_i^2 les événements analogues pour la pièce 2.*

   Alors, pour $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a

   $$P(X = i, Y = j) = P(P_1^1 \cap \cdots \cap P_{i-1}^1 \cap F_i^1 \cap P_1^2 \cap \cdots \cap P_{j-1}^2 \cap F_j^2) = (1-p)^{i-1} \times p \times (1-p)^{j-1} \times p = p^2 \times (1-p)^{i+j-2}.$$

   car tous les lancers sont indépendants.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

On rappelle la loi de (X,Y) :

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

- $P(X = 4) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X = 4, Y = k) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$.
- *Donc :*

$y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P_{[X=4]}(Y=y)$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. (a) *C'est l'exemple 6.*

   (b) i. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in[\![1,6]\!]}$, *on a*

$$\forall j \in [\![1,6]\!], \quad P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P_{[X=i]}(Y=j)P(X=i)$$

Donc on a

$j \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P_{[X=1]}(Y=j)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
$P_{[X=2]}(Y=j)$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
$P_{[X=3]}(Y=j)$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
$P_{[X=4]}(Y=j)$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P_{[X=5]}(Y=j)$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P_{[X=6]}(Y=j)$	0	0	0	0	0	1
$P(Y=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

   ii. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in[\![1,6]\!]}$, *on a*

$$\forall j \in [\![1,6]\!], \quad P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i, Y=j)$$

Donc on a

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
$P(Y=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

2. *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ *et pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P(X=i, Y=j) = \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

   - *Loi de* Y. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, *on a*

$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N}, \quad P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!} \\ &= \frac{e^{-2}2^j}{j!} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{e^{-2}2^j}{j!}.\end{aligned}$$

     Ainsi Y *suit la loi de Poisson de paramètre* 2.

- *Loi de* X. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $\left([Y=j]\right)_{j\in\mathbb{N}}$, *on a*

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}P(X=i,Y=j)$$
$$=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}$$
$$=\frac{e^{-2}}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!}=\frac{1}{2^i}$$

Ainsi X *suit la loi de géométrique de paramètre* $\frac{1}{2}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On tire avec remise un jeton dans une urne contenant* n *jetons numérotés de* 1 *à* n. *On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *au deuxième.*
   (a) *On a* $(\Omega,\mathscr{A},P)=\left([\![1,n]\!]^2,\mathscr{P}\left([\![1,n]\!]^2\right),P_{\text{unif.}}\right)$ *où* $P_{\text{unif.}}$ *est la probabilité uniforme sur* Ω.
   (b) *On a* $X(\Omega)=[\![1,n]\!]=Y(\Omega)$ *et pour tout* $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$

$$P([X=i])=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\quad;\quad P\left([Y=j]\right)=\frac{1}{n}\quad;\quad P\left([X=i,Y=j]\right)=\frac{1}{n^2}.$$

   (c) *Donc pour tout* $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $P([X=i])P\left([Y=j]\right)=P\left([X=i,Y=j]\right)$. *Les variables aléatoires sont donc indépendantes.*
2. *On a* $P(X=1,Y=1)=0$ *car le tirage est sans remise.*
   Par ailleurs, $P(X=1)=\frac{1}{n}$ *et, par la formule des probabilités totales,*

$$P(Y=1)=P_{[X=1]}(Y=1)P(X=1)+P_{[X\neq 1]}(Y=1)P(X\neq 1)=0+\frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

   Donc,

$$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)\times P(Y=1)$$

   et les variables ne sont donc pas indépendantes.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

Soient X *et* Y *des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},P)$. *On suppose que pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *tel que* $P\left([Y=y]\right)\neq 0$ *on*

$$P_{[Y=y]}([X=x])=P([X=x]).$$

Montrons que X *et* Y *sont indépendantes c'est-à-dire que pour tout* $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, *on a*

$$P([X=x,Y=y])=P(X=x)P(Y=y).$$

1. *Soit* y *tel que* $P(Y=y)\neq 0$, *alors*

$$P([X=x])=P_{[Y=y]}([X=x])=\frac{P([X=x,Y=y])}{P([Y=y])}\quad\text{donc } P([X=x,Y=y])=P(X=x)P(Y=y).$$

2. *Soit* y *tel que* $P(Y=y)=0$. *Comme* $[X=x,Y=y]\subset[Y=y]$, *on a aussi*

$$P\left([X=x,Y=y]\right)=0$$

   et par conséquent,

$$0=P\left([X=x,Y=y]\right)=P(X=x)P(Y=y)=P(X=x)\times 0=0.$$

Dans tous les cas, on a bien $P([X=x,Y=y])=P(X=x)P(Y=y)$ *donc les variables sont indépendantes.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $n\geqslant 2$. *D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$

on a

$$\begin{aligned}
P([X+Y=n]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X=i, X+Y=n]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X=i, Y=n-i]) \quad \text{car } [X=i, X+Y=n]=[X=i, Y=n-i],\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P([X=i, Y=n-i]) \quad \text{car } P([X=i, Y=n-i])=0 \text{ si } n-i\leqslant 0,\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P([X=i])\,P([Y=n-i]) \quad \text{par indépendance de X et Y},\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-i-1} \quad \text{car X et Y suivent une loi } \mathscr{G}(p),\\
&= p^2\sum_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1+n-i-1}\\
&= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. *Soient* $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ *deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé.*

1. *Comme* $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$, *on a* $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$.
2. *De plus, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in\mathbb{N}}$ *on a*

$$\begin{aligned}
P([X+Y=n]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X=i, X+Y=n]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P([X=i, Y=n-i]) \quad \text{car } [X=i, X+Y=n]=[X=i, Y=n-i],\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i, Y=n-i]) \quad \text{car } P([X=i, Y=n-i])=0 \text{ si } n-i<0,\\
&= \sum_{i=0}^{n} P([X=i])\,P([Y=n-i]) \quad \text{par indépendance de X et Y},\\
&= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} \quad \text{car X et Y suivent des lois de Poisson},\\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n
\end{aligned}$$

Ainsi

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Déterminons* $P([XY=0])$ *:*

$$\begin{aligned}
P([XY=0]) &= P([XY=0, X=0]) + P([XY=0, X=1])\\
&= P([X=0]) + P([XY=0, X=1]) \quad \text{car } [XY=0, X=0]=[X=0],\\
&= P([X=0]) + P([Y=0, X=1]) \quad \text{car } [XY=0, X=1]=[Y=0, X=1],\\
&= 1-p+P([Y=0])\,P([X=1]) \quad \text{car les variables sont indépendantes},\\
&= 1-p+p^2.
\end{aligned}$$

- *Déterminons* $\mathrm{P}([\mathrm{XY}=1])$ *:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\mathrm{XY}=1]) &= \mathrm{P}([\mathrm{XY}=1,\mathrm{X}=0])+\mathrm{P}([\mathrm{XY}=1,\mathrm{X}=1])\\
&= 0+\mathrm{P}([\mathrm{XY}=1,\mathrm{X}=1]) \quad \textit{car } [\mathrm{XY}=1,\mathrm{X}=0]=\varnothing,\\
&= \mathrm{P}([\mathrm{Y}=1,\mathrm{X}=1]) \quad \textit{car } [\mathrm{XY}=1,\mathrm{X}=1]=[\mathrm{Y}=1,\mathrm{X}=1],\\
&= \mathrm{P}([\mathrm{Y}=1])\,\mathrm{P}([\mathrm{X}=1]) \quad \textit{car les variables sont indépendantes},\\
&= (1-p)p.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{XY} \to \mathscr{B}(p(1-p))$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

Posons $\mathrm{V}=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

1. *Soit* $k\in\mathbb{N}^*$.
   Pour tout $\omega\in\Omega$*, on a*

$$\mathrm{V}(\omega)>k \Longleftrightarrow \min(\mathrm{X}(\omega),\mathrm{Y}(\omega))>k \Longleftrightarrow \mathrm{X}(\omega)>k \text{ et } \mathrm{Y}(\omega)>k.$$

   Donc $[\mathrm{V}>k]=[\mathrm{X}>k]\cap[\mathrm{Y}>k]$*. Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})>k]) &= \mathrm{P}([\mathrm{X}>k]\cap[\mathrm{Y}>k])\\
&= \mathrm{P}([\mathrm{X}>k])\,\mathrm{P}([\mathrm{Y}>k]) \quad \textit{car } \mathrm{X} \textit{ et } \mathrm{Y} \textit{ sont indépendantes}\\
&= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\right)\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}\right)\\
&= p^2\left(\sum_{\ell=k}^{+\infty}(1-p)^{\ell}\right)^2\\
&= (1-p)^{2k}.
\end{aligned}$$

2. *On a :*
   - $\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})=1])=1-\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})>1])=1-(1-p)^2$.
   - *Pour tout* $k\geqslant 2$*, on a :*

   $$\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})=k])=\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})>k-1])-\mathrm{P}([\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})>k])=(1-p)^{2(k-1)}-(1-p)^{2k}=(1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2).$$

   Ainsi, $\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *suit la loi géométrique de paramètre* $1-(1-p)^2$.

3. *On considère deux pièces numérotées* 1 *et* 2 *qui ont une probabilité* p *de donner Face. On lance les deux pièces de manière indépendante une infinité de fois. On note*
   - X *la variable aléatoire donnant le rang du premier Face de la pièce numéro* 1 *;*
   - Y *la variable aléatoire donnant le rang du premier Face de la pièce numéro* 2*.*

   Alors X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes (lancers indépendants) de même loi géométrique de paramètre* p.
   On considère maintenant la variable Z *donnant le rang du premier tirage où une des deux pièces vaut Face. Alors*
   (a) *d'une part* $\mathrm{Z}=\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$,
   (b) *d'autre part* Z *est le rang du premier succès d'une épreuve de Bernoulli répétée une infinité de fois de manière indépendantes dont la probabilité de succés est :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([\textit{Pièce } 1=\textit{Face}]\cup[\textit{Pièce } 2=\textit{Face}]) &= \mathrm{P}([\textit{Pièce } 1=\textit{Face}])+\mathrm{P}([\textit{Pièce } 2=\textit{Face}])-\mathrm{P}([\textit{Pièce } 1=\textit{Face}]\cap[\textit{Pièce } 2=\textit{Face}])\\
&= 2p-p^2\\
&= 1-(1-p)^2
\end{aligned}$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

On rappelle la loi du couple (X, Y) *:*

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

ainsi que les lois marginales déterminées à l'exemple 6 et au test 4 :

$j \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P([Y = j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$
$i \in X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P([X = i])$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$

Les variables X *et* Y *sont à support fini donc possèdent un moment d'ordre deux. D'après la formule de Koenig-Huygens, le couple* (X, Y) *possède une covariance et elle est donnée par la formule :*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. $E(X) = 1 \times \frac{11}{36} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{5}{36} + 5 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{91}{36}$.
2. $E(Y) = 6 \times \frac{11}{36} + 5 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 2 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{36} = \frac{161}{36}$.
3. *Par la formule de transfert :*

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} i j P([X = i, Y = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{6} i \left(\sum_{j=1}^{6} j P([X = i, Y = j]) \right) \\
&= 1 \times \frac{41}{36} + 2 \times \frac{38}{36} + 3 \times \frac{33}{36} + 4 \times \frac{26}{36} + 5 \times \frac{17}{36} + 6 \times \frac{6}{36} \\
&= \frac{441}{36}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \frac{441}{36} - \frac{91}{36} \times \frac{161}{36} = \frac{1225}{36^2}.$$