Compléments sur les variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (*HEC 2019, oral sans préparation*)

Une urne contient p boules numérotées de 1 à p, p étant un entier naturel non nul.

L'entier naturel n étant aussi non nul, on considère la variable aléatoire S égale au nombre de numéros distincts obtenues en n tirages d'une boule de l'urne avec remise.

Déterminer l'espérance de S.

Exercice 2 (*HEC 2018, oral sans préparation*)

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirages, si elle est verte on la remet dans l'urne et on ajoute une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués.

1. *Montrer que X admet une espérance et la calculer.*
2. *Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.*

Exercice 3 (*HEC 2016, oral avec préparation*)

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit p, q et r trois réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_n = 1) = p\ ;\ P(X_n = -1) = q\ ;\ P(X_n = 0) = r.$$

On pose, pour tout $n \geq 1$: $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) *Pour tout entier $n \geq 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $P(Y_n = 0)$.*
   (b) *Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $E(X_n)$ et $E(Y_n)$.*
2. *On pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(Y_n = 1)$.*
   (a) *Calculer p_1 et p_2.*
   (b) *Établir une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.*
   (c) *En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.*
   (d) *Pouvait-on, à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?*
3. (a) *Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $V(Y_n)$.*
   (b) *Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.*