# TD 9-Applications linéaires

## 1 Généralités, noyau, image

**Exercice 1**

*Montrer que les applications suivantes sont linéaires.*

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *L'application* $h$ *définie sur* $\mathbb{R}_2[X]$ *par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad h(P) = XP(X+1) - (X+1)P(X).$$

3. *L'application* $g : \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad g(M) = M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3} + M_{4,4}.$$

**Exercice 2**

*Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes.*

1. *L'application* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}_2[X]$ *par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f(P) = X^2P'(X) - 2XP(X).$$

2. *L'application* $\psi$ *définie sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *par*

$$\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \psi(X) = AX - XB$$

*où* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3**

*Décrire chacun de ces espaces comme le noyau d'une application linéaire.*

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\}$.
2. $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \quad et \quad 2x + z = t\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1)\}$.

**Exercice 4**

*Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.*

1. *Les applications* $f$ *et* $h$ *de l'exercice 1.*
2. *L'application* $f$ *de l'exercice 2.*
3. *L'application* $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

**Exercice 5**

*Soit* $f$ *l'application définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x,y,z)) = 3x - y + z.$$

1. *Montrer que* $f$ *est linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Im}(f)$. *En déduire* $\dim(\ker(f))$.
3. *Déterminer une base de* $\ker(f)$.

**Exercice 6**

*Soit* $f$ *l'application définie par*

$$f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longmapsto (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i).$$

1. *Montrer que* $f$ *est linéaire.*
2. *Sans calcul, justifier que* $f$ *n'est pas injective.*
3. *Déterminer une base de* $\ker(f)$ *et sa dimension.*

4. *En déduire que $f$ est surjective.*

**Exercice 7**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. *Montrer que* $\dim(\ker(f)) \geqslant 2$. *En déduire que* $\mathrm{rg}(f) = 1$.

## 2 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

**Exercice 8**

*Soit*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, 3x - z)$$

1. *Montrer que $f$ est linéaire. Est-elle injective ?*
2. *Déterminer la matrice $A$ représentative de $f$ dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^2$.
3. *À l'aide de la matrice $A$ déterminer :*
   (a) $f((1, 2, 1))$ ;
   (b) $\ker(f)$ ;
   (c) $\mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 9**

*Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On considère l'application $\varphi$ définie par :*

$$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto AM - MA.$$

1. *Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Écrire la matrice $C$ de $\varphi$ dans la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. *Déterminer le noyau de $\varphi$ à l'aide de la matrice $C$. En déduire* $\mathrm{rg}(\varphi)$.
4. *On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M$ telles que $AM = MA$.*
   (a) *Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.*
   (b) *Déterminer une base de $\mathcal{C}$.*

**Exercice 10**

*Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le noyau et l'image de $f$.*
2. (a) *Montrer que la famille $(X, X^2 + 1, X^2 - 1)$ est une base* $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) *Déterminer la matrice $M'$ de $f$ dans cette base.*
   (c) *Déterminer une matrice $P$ telle que $M' = P^{-1}MP$.*

**Exercice 11**

*Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*et $\psi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A$.*

1. *Déterminer le rang de $\psi$. Est-ce un automorphisme ?*
2. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Déterminer* $\psi((x, y, z))$.
3. *On note* $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ *et* $w = (1, 1, 1)$.
   (a) *Montrer que* $(u, v, w)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Déterminer* $\psi(u)$, $\psi(v)$ *et* $\psi(w)$. *En déduire la matrice de $\psi$ dans la base* $(u, v, w)$.
   (c) *En déduire que $A$ est semblable à une matrice diagonale $D$ que l'on précisera et donner une matrice inversible $P$ telle que $D = P^{-1}AP$.*
4. *Avec la matrice $D$, déterminer une base de* $\ker(\psi)$ *et une base de* $\mathrm{Im}(\psi)$.

## 3 Compléments

**Exercice 12**

*On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer $A^3$.*
2. *Déterminer une base $(a)$ de* $\ker(f)$ *ainsi qu'une base $(b, c)$de* $\mathrm{Im}(f)$ .
3. *Montrer que* $\mathrm{Im}(f^2) = \ker(f)$.

4. *Dans la suite, on considère un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :*

$$g^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad g^3 = 0.$$

*En désignant par $M$ la matrice de $g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a donc :*

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0.$$

*On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\left(g^2\right) = \ker\left(g\right)$ .*

   (a) *Justifier qu'il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\left(u\right) \neq 0$ .*
   (b) *Montrer que $\left(u, g\left(u\right), g^2\left(u\right)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ , que l'on notera $\mathcal{B}'$ .*
   (c) *Donner la matrice $N$ de $g$ dans la base $\mathcal{B}'$ .*
   (d) *Déterminer $\mathrm{Im}\left(g\right)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\ker\left(g\right)$.*
   *Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\left(g^2\right)$ puis conclure.*

**Exercice 13**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3. On note $0_E$ le vecteur nul de $E$.*
*On note $i$ l'application identité de $E$, et $\theta$ l'application constante nulle de $E$ dans $E$ :*

$$\begin{array}{rcl} i : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \theta : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0_E \end{array}$$

*On considère un endomorphisme $f$ de $E$ tel que :*

$$f \neq \theta \quad , \quad f^2 + i \neq \theta \quad , \quad f \circ (f^2 + i) = \theta.$$

1. *Montrer que $f$ n'est pas bijectif.*
2. *En déduire qu'il existe un vecteur $v_1$ appartenant à $E$ tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.*
3. (a) *Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif.*
   (b) *En déduire qu'il existe $v_2$ appartenant à $E$ tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$.*
4. *On note $v_3 = f(v_2)$.*
   (a) *Montrer : $f(v_3) = -v_2$.*
   (b) *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $E$.*
   (c) *Déterminer la matrice $C$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*