Chapitre 14 : Fonctions de deux variables réelles

1 Fonctions de deux variables

Définition 1 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application f définie sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y). \end{aligned}$$

Exemple 1

1. *Les fonctions suivantes sont appelées les* ***fonctions coordonnées*** *:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

2. *Les fonctions de la forme suivante sont appelées* ***des fonctions polynomiales*** *:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

avec $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}^2$ ***fini****.*

3. *La fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ *est une fonction numérique de deux variables réelles.*
4. *La fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$ *est une fonction numérique de deux variables réelles.*
5. *Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable sont des fonctions numériques de deux variables réelles. Par exemple :*

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto xe^{-x} \quad \textit{ou} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto y^2 + \ln(y^4+2).$$

Exemple 2

1. *La fonction* $(x,y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *est définie sur :*

2. *La fonction* $(x,y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ *est définie sur :*

3. *La fonction* $(x,y) \longmapsto \ln(x+y)$ *est définie sur :*

4. *En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont les fonctions qui à deux variables réelles (la quantité de travail* L *et le capital investit* K*) associent la production totale* P *définie par :*

$$\mathrm{P}(\mathrm{L},\mathrm{K}) = \beta \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{K}^{1-\alpha},$$

où α *et* β *sont des réels strictement positifs.*

Définition 2 (Applications partielles)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.

- On appelle première **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathscr{D}\}$. On la note f_{y_0}.
- On appelle deuxième **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ définie sur l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathscr{D}\}$. On la note f_{x_0}.

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Déterminons les applications partielles en $(x_0, y_0) = (-1, 3)$.

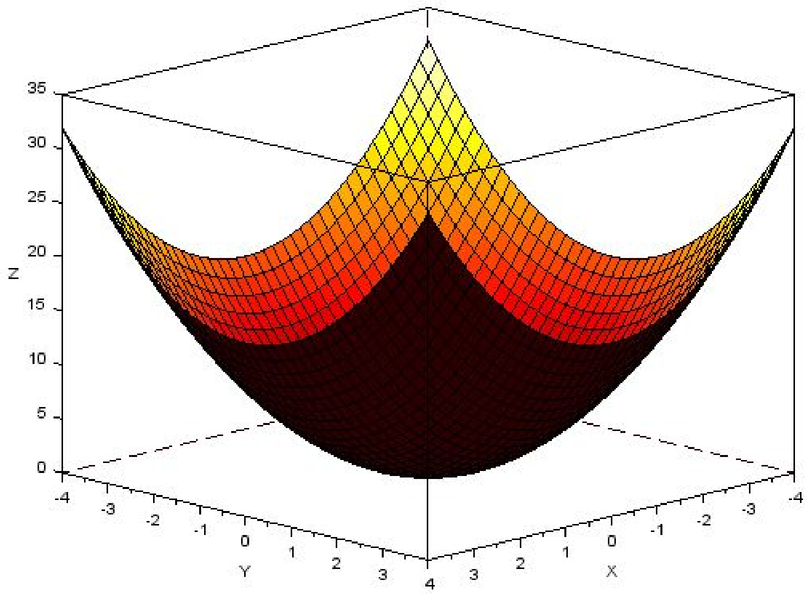
Définition 3 (Représentation graphique)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathscr{D} \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ , \ (x, y) \in \mathscr{D}\}.$$

Exemple 4

Le graphe de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$ est représenté ci-dessous.




```
function z=f(x,y)
    z=x^2+y^2
endfunction

x=-4:0.1:4
y=-4:0.1:4

fplot3d(x,y,f)
```

Définition 4 (Ligne de niveau)

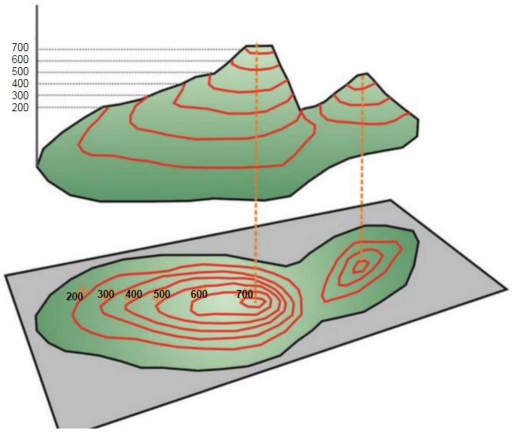
Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $c \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau c de f** le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\{(x, y) \in \mathscr{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

Remarque 1

Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = c$ et on projette sur le plan (Oxy) pour obtenir la ligne de niveau c de f.

Exemple 5

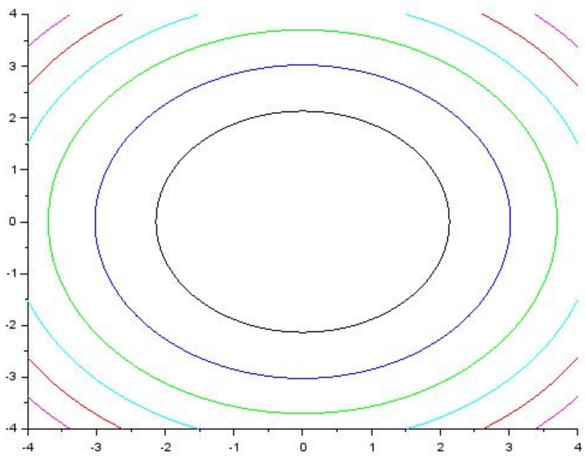


Exemple 6

On reprend l'exemple de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$.

1. *Déterminer la ligne de niveau -1 de f.*
2. *Déterminer la ligne de niveau 0 de f.*
3. *Déterminer la ligne de niveau 1 de f.*
4. *Plus généralement, déterminer la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$.*

Les lignes de niveaux de la fonction de l'exemple 6 : il s'agit bien de cercles (mais le repère n'est pas orthonormé).



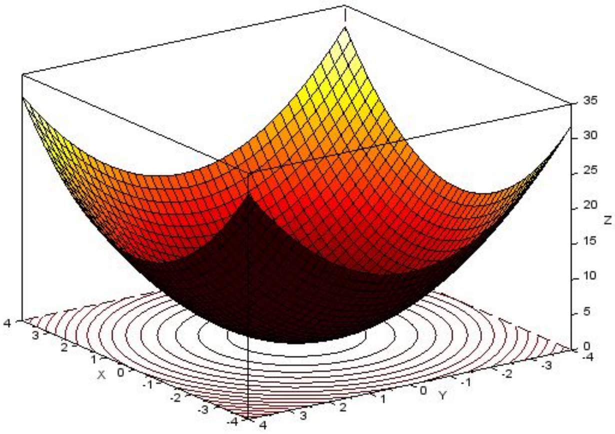

```
x=-4:0.1:4
y=x

z=feval(x,y,f)
contour(x,y,z,6)
```

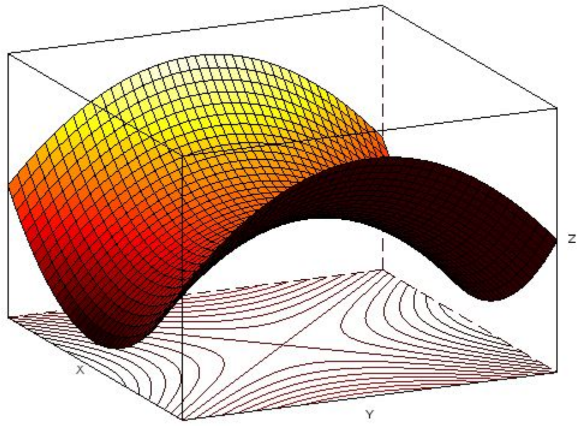
Exemple 7

Graphe et lignes de niveau des fonctions suivantes :

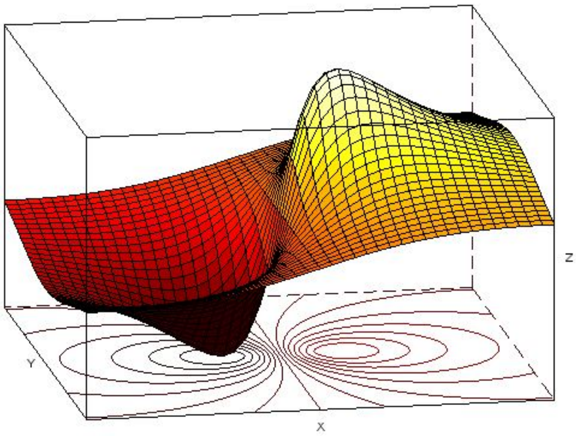
1. *la fonction* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$,



2. *la fonction* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$,



3. *la fonction* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2+y^2+1}$.



Dans les deux prochaines parties du chapitre on ne s'intéressera qu'aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2 Continuité des fonctions de deux variables

En première année, on définit la continuité des fonctions d'une variable réelle. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en x_0 si

ou encore

Autrement dit, une fonction d'une variable réelle f est continue en x_0 si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.

La principale différence lorsque f est une fonction de deux variables réelles est la notion de « suffisamment proche de ».

2.1 Distance euclidienne

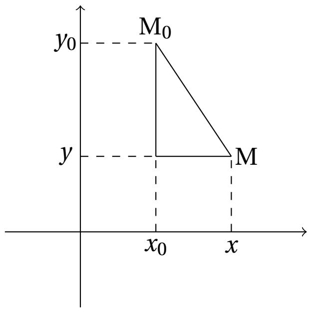
Définition 5 (Distance euclidienne entre deux points)

Soient $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle **distance euclidienne entre** M_0 **et** M le réel noté $d(M_0, M)$ défini par :

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Remarque 2

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore (voir figure ci-dessous).



Exemple 8

Soient $A = (x_A, y_A)$ *un point de* $\mathbb{R}^2$ *et* $r > 0$.

1. *Décrire l'ensemble* $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) = r\}$.

2. *Décrire l'ensemble* $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$

   Cet ensemble est appelé ***la boule ouverte de centre*** A ***et de rayon*** r.

3. *Décrire l'ensemble* $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leqslant r\}$

   Cet ensemble est appelé ***la boule fermée de centre*** A ***et de rayon*** r.

Proposition 1 (Propriétés de la distance euclidienne)

La distance euclidienne d vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A, B) \geqslant 0$;
2. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$;
3. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A, B) = d(B, A)$ (*symétrie*) ;
4. $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$ (*inégalité triangulaire*).

2.2 Continuité

Définition 6 (Continuité en un point)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x, y)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0, y_0)$ pourvu que (x, y) soit suffisamment proche de (x_0, y_0).

Exemple 9

La fonction $f : (x, y) \mapsto x + y$ *est continue en* $(0, 0)$.

Définition 7 (Continuité sur $\mathbb{R}^2$)

Soit f une fonction numérique de deux variables. On dit que f est **continue sur** $\mathbb{R}^2$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Alors

1. toute combinaison linéaire de f et de g est continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 10

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 1 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 11

1. *Montrons que* $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrons que* $(x, y) \mapsto x \ln(x^2+y^2+1)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 2 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.
2. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.

Méthode 1

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est continue on utilisera souvent les propositions 2 et 3 et les exemples usuels.

3 Calcul différentiel

3.1 Fonctions de classe C^1

Définition 8 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable en** (x_0,y_0) si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0,y_0)$.
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable en** (x_0,y_0) si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0,y_0)$.

Remarque 3

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *une fonction de deux variables et* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

- *La fonction* f *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à la première variable en* (x_0,y_0) *si la limite suivante existe :*
- *La fonction* f *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à la deuxième variable en* (x_0,y_0) *si la limite suivante existe :*

Définition 9

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\partial_1(f):\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto \partial_1(f)(x,y).$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\partial_2(f):\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto \partial_2(f)(x,y).$$

Méthode 2

Pour déterminer la dérivée partielle par rapport à une variable, on considère l'autre variable comme une constante *et on utilise les formules de dérivation des fonctions d'une variable.*

Exemple 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

1. *Montrons que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en $(1, 2)$.*

2. *Montrons que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point (x, y).*
   (a) *On fixe la deuxième variable : soit $y \in \mathbb{R}$.*

   (b) *On dérive par rapport à la variable x (y est fixé et donc à considérer comme une constante).*

   (c) *Conclusion :*

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f de l'exemple ci-dessus.

Exemple 13

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Déterminer les dérivées partielles.

1. *Par rapport à la première variable.*

2. *Par rapport à la deuxième variable.*

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=e^{xy}\ln(1+x^2+y^2)$;
2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(1+xy)(2x-2y+1)$.

Définition 10 (Fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
On dit que f est de **classe** C^1 **sur** $\mathbb{R}^2$ si elle admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 14

On reprend la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *de l'exemple précédent :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=e^{x^2+y^2}.$$

On a vu que g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(g)(x,y)=2xe^{x^2+y^2}\quad \textit{et}\quad \partial_2(g)(x,y)=2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4 (Opérations sur les fonctions de classe C^1)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Alors :

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 15

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 16

1. *Montrons que* $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrons que $(x, y) \mapsto x\ln(x^2+y^2+1)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

Méthode 3

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^1 on utilisera souvent les propositions 4 et 5 et les exemples usuels.

Test 6 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les dérivées partielles.

1. *La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.*
2. *La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.*

Proposition 6

Toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4

Attention, contrairement à ce qu'il se passe pour les fonctions d'une variable, l'existence des dérivées partielles d'une fonction f en un point (x_0, y_0) n'assure pas que f est continue en (x_0, y_0) : l'existence des dérivées partielles en (x_0, y_0) assure que f « paraît continue » en (x_0, y_0) tant qu'on approche (x_0, y_0) selon une direction verticale ou horizontale mais ne donne aucune information sur ce qu'il se passe lorsqu'on approche ce point par une autre direction !
L'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues permet d'assurer la continuité de f.

Définition 11 (Gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **gradient de f en** (x_0, y_0) le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x_0, y_0)$ (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0, y_0) \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Développement limité d'ordre 1)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \epsilon(h, k)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.
Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en** (x_0, y_0) et est unique.

Remarque 5

1. *De manière équivalente, le développement limité en* (x_0, y_0) *s'écrit aussi :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \cdot \epsilon(x,y)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* (x_0, y_0) *telle que* $\epsilon(x_0, y_0) = 0$.

2. *Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variables du développement limité d'ordre 1 pour les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

3. *Graphiquement, l'équation* $z = f(x_0,y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ *est l'équation du plan tangent au graphe de* f *au point de coordonnées* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exemple 17

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

1. *Justifions que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Déterminons le gradient de* f *en* $(0,1)$.

3. *Déterminons le développement limité de* f *en* $(0,1)$

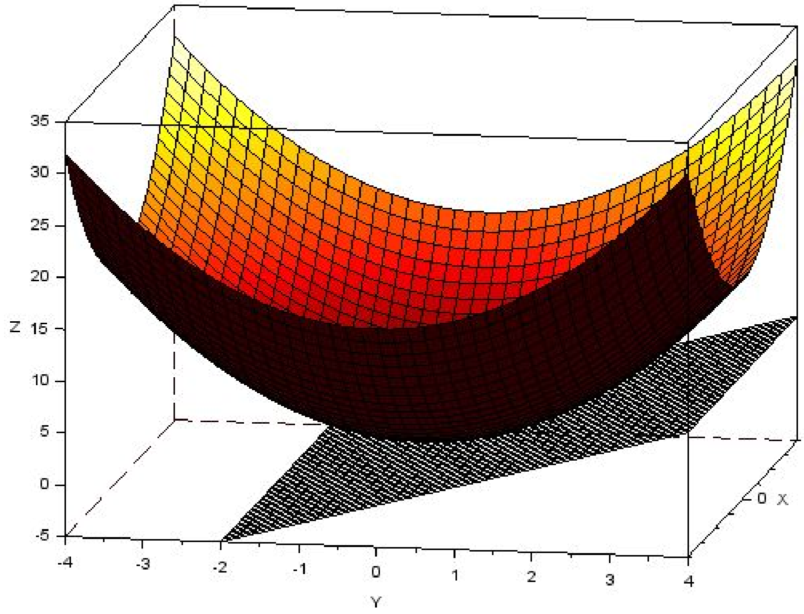


FIGURE 1 – Graphe de la fonction de l'exemple 17 avec le plan tangent en $(0,1)$

3.2 Fonctions de classe C^2

Définition 12 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

Exemple 18

Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$.
On a vu dans l'exemple 12 que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable :

$$\forall (x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = -2y^2 + 6y^2x.$$

Montrons que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivantes : $\partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{1,1}(f)$.

1. *Justifions l'existence de $\partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{1,1}(f)$.*

2. *Calculons $\partial^2_{1,1}(f)$.*

3. *Calculons* $\partial^2_{2,1}(f)$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Déterminer les dérivées partielles $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *de la fonction* f *de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le test 3.*

Définition 13 (Fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
On dit que f est de **classe** C^2 **sur** $\mathbb{R}^2$ si

- elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$;
- ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 19

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu dans l'exemple 14 que g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 8

Toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 9 (Opérations sur les fonctions de classe C^2)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Alors :

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 20

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction de classe C^2 sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 21

1. *Montrons que* $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrons que* $(x, y) \mapsto x\ln(x^2 + y^2 + 1)$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Méthode 4

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^2 on utilisera souvent les propositions 9 et 10 et les exemples usuels.

Test 8 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les dérivées partielles secondes.

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 + xy)(2x - 2y + 1)$
4. $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Exemple 22

1. *On considère la fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

Déterminer $\partial^2_{1,2}(f)$ et $\partial^2_{2,1}(f)$.

2. *On considère la fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Déterminer $\partial^2_{1,2}(f)$ et $\partial^2_{2,1}(f)$.

3. *Que remarque-t-on ?*

Théorème 1 (de Schwarz)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a l'égalité suivante :

$$\partial^2_{2,1}(f)(x, y) = \partial^2_{1,2}(f)(x, y).$$

Définition 14 (Matrice hessienne)

Soient f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle matrice hessienne de f en (x, y) la matrice de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x, y) & \partial^2_{1,2}(f)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x, y) & \partial^2_{2,2}(f)(x, y) \end{pmatrix}.$$

Remarque 6

Si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de f en tout point est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Exemple 23

Déterminons la matrice hessienne en $(1, 2)$ de la fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Proposition 11 (Développement limité d'ordre 2)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.
Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 2 de f en** (x_0, y_0) et est unique.

Remarque 7

1. *De manière équivalente, le développement limité en* (x_0, y_0) *s'écrit aussi, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix}\cdot\nabla^2(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\epsilon(x,y)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* (x_0, y_0) *telle que* $\epsilon(x_0, y_0) = 0$.

2. *Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variables de la formule de Taylor à d'ordre 2 vue au chapitre 10.*

Exemple 24

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

1. *Justifions que* f *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *On a vu à l'exemple 17 que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x, y) = 2x$ *et* $\partial_2(f)(x, y) = 2y$.
Déterminons la hessienne de f *en* $(0, 1)$.

3. *Déterminons le développement limité de* f *en* $(0, 1)$ *à l'ordre 2.*

4 Extension aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Pour le moment, nous n'avons étudié que des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Cependant, il est fréquent de rencontrer des fonctions qui ne sont définies que sur une partie de $\mathbb{R}^2$ (comme dans l'exemple 2).

Le but de cette partie est d'étendre les notions rencontrées dans les parties 2 et 3 aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

4.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition 15 (Boules ouvertes,boules fermées)

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte de centre** A **et de rayon** r et on note $B(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$B(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\right\}.$$
- On appelle **boule fermée de centre** A **et de rayon** r et on note $B_f(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$B_f(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leqslant r\right\}.$$

Définition 16 (Ouverts, fermés)

- On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $D = \varnothing$ ou si pour tout point $M \in D$ il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D$.
- On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

Exemple 25

1. *Les boules ouvertes sont des ouverts. Il est conseillé de faire un dessin!*

2. *Les boules fermées sont des fermés. Il est conseillé de faire un dessin!*

3. *L'ensemble* $\mathbb{R}^2$ *est ouvert, son complémentaire* $\varnothing$ *est donc fermé.*
   L'ensemble vide $\varnothing$ *est ouvert, son complémentaire* $\mathbb{R}^2$ *est donc fermé.*
   Ainsi $\mathbb{R}^2$ *et* $\varnothing$ *sont à la fois ouverts et fermés.*
4. *Les ensembles de la forme* $]a,b[\times]c,d[$ *sont ouverts.*
5. *Les ensembles de la forme* $[a,b]\times[c,d]$ *sont fermés.*
6. *L'ensemble* $[0,1[\times[0,1[$ *n'est ni ouvert ni fermé.*
7. *Les ensembles* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ *et* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>0\}$ *sont des ouverts (voir exemple 2).*

Définition 17 (Ensemble borné)

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est **bornée** si elle est incluse dans une boule centrée en $(0,0)$:

$$\exists r>0 \quad \mathrm{D}\subset \mathrm{B}((0,0),r) \quad \text{ou encore} \quad \exists r>0\ \forall \mathrm{M}\in\mathrm{D} \quad d((0,0),\mathrm{M})<r.$$

Exemple 26

1. *Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée. Il est conseillé de faire un dessin !*
2. *L'ensemble* $[0,1]\times[0,1]$ *est borné.*
3. *L'ensemble* $\left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ *est non borné.*

Test 9 (***Voir solution.***)

Représenter chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ *suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).*

1. $\mathrm{U}_1=[0,1]\times\mathbb{R}$,
2. $\mathrm{U}_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$,
3. $\mathrm{U}_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x\right\}$,
4. $\mathrm{U}_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x \text{ et } 0\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

4.2 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Définition 18 (Continuité)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$.

- On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall (x, y) \in \mathrm{D},\ d((x, y),(x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

- On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

Tous les résultats vus dans la partie 2 s'étendent aux fonctions continues sur une partie D **de** $\mathbb{R}^2$**.**

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$. Comme D est un ouvert

- l'application partielle f_{y_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0,
- l'application partielle f_{x_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant y_0.

Définition 19 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point de D, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y). \end{aligned}$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point de D, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y). \end{aligned}$$

Définition 20 (Fonctions de classe C^1 sur un ouvert)

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est de **classe** C^1 **sur** D si elle admet des dérivées partielles sur D et que les dérivées partielles sont continues sur D.

Définition 21 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable sur** D si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur D. On note

$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On définit de même, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2 $\partial^2_{2,1}(f)$, $\partial^2_{1,2}(f)$, $\partial^2_{2,2}(f)$ sur D.

Définition 22 (Fonctions de classe C^2 sur un ouvert)

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est de **classe** C^2 **sur** D si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D et que les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur D.

Tous les résultats vus dans la partie 3 s'étendent aux fonctions de classe C^1 et C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 27

On considère la fonction $g : (x, y) \longmapsto \ln(x+y)$ définie sur l'ouvert $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

1. *Montrons que g est de classe C^2 sur D.*

2. *Déterminons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*

3. *Déterminons le développement limité de g au voisinage de $(1,0)$.*

Exemple 28

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

2. *Est-elle continue en $(0,0)$?*

3. *Montrons que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$.*

Remarque 8

Cela montre que l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité ! Il faut l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues (voir la remarque 4).

5 Extrema des fonctions de deux variables

Définition 23 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **minimum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r) \cap D \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

  Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in D$.
- On dit que f admet un **maximum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),r) \cap D \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

  Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in D$.

Remarque 9

1. *Un minimum/ maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.*
2. *Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).*
3. *Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement atteint en un unique point.*

Exemple 29

Soit f la fonction définie sur U *par :*

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

où U *est une partie de* $\mathbb{R}^2$.

1. *On prend* $U = \mathbb{R}^2$.
2. *On prend* $U = B_f((0,0),1)$.

Proposition 12

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie (elle possède un maximum global et un minimum global sur cette partie).

Proposition 13 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$.
Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 10

Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy.$$

Définition 24 (Point critique)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$.
On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f si $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 11

Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

Méthode 5 (*Déterminer les points critiques*)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$, pour déterminer ses points critiques on procède de la façon suivante :

1. *on s'assure que U est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe C^1 sur U ;*
2. *on résout le système de deux inconnues à deux équations $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.*

Attention, ce système n'est en général pas linéaire ! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum !

Exemple 30

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Cherchons les extrema de f.

1. *Recherche des points critiques.*

2. Étude des points critiques.

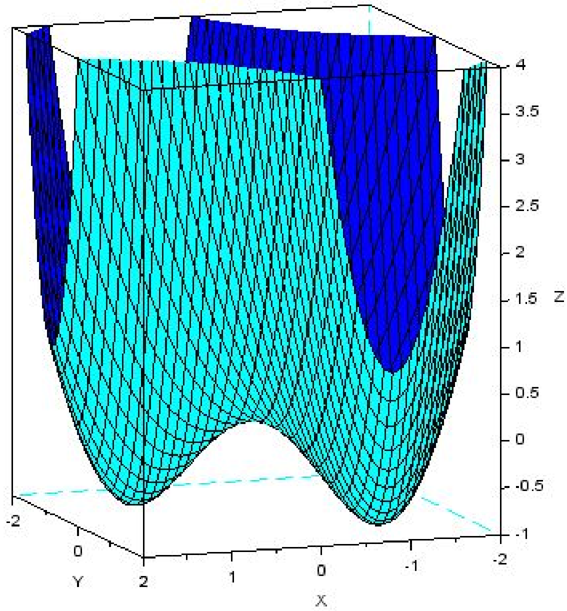


FIGURE 2 – Graphe de la fonction de l'exemple 30

Proposition 14 (Condition suffisante d'existence d'un extremum)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ un point critique de f.

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). On dit que (x_0, y_0) est un **point selle** ou **point col** de f.
- Si l'une des valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure.

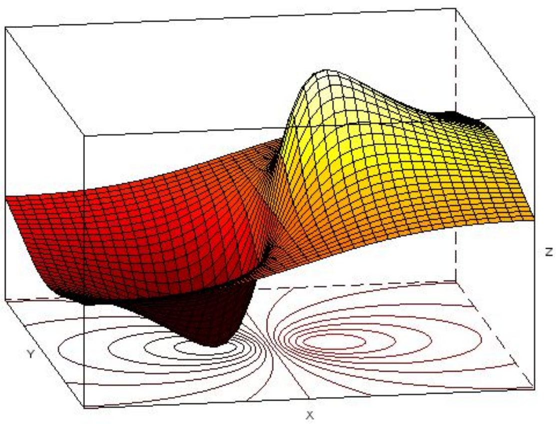


FIGURE 3 – Un minimum (à gauche) et un maximum (à droite)

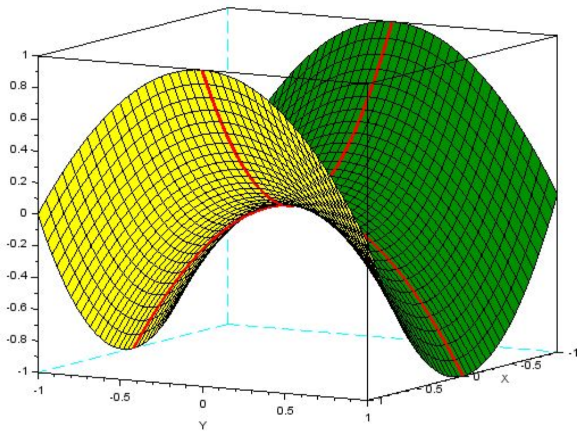


FIGURE 4 – Un point selle

Méthode 6 (*Étudier les extrema*)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$, pour déterminer ses extrema locaux on procède de la façon suivante :

1. *on s'assure que U est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe C^2 sur U ;*
2. *on détermine les points critiques de f sur U ;*
3. *on calcule la hessienne de f en chaque point critique et on détermine ses valeurs propres ;*

4. *on utilise la proposition 14.*

Exemple 31

On reprend la fonction de l'exemple précédent. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Les points critiques sont $(0,0)$, $(1,-1)$ *et* $(-1,1)$. *Déterminons les extrema de* f.

1. *Calcul de la hessienne.*

2. *Étude en* $(0,0)$.

3. *Étude en* $(1,-1)$.

4. *Étude en* $(-1,1)$.

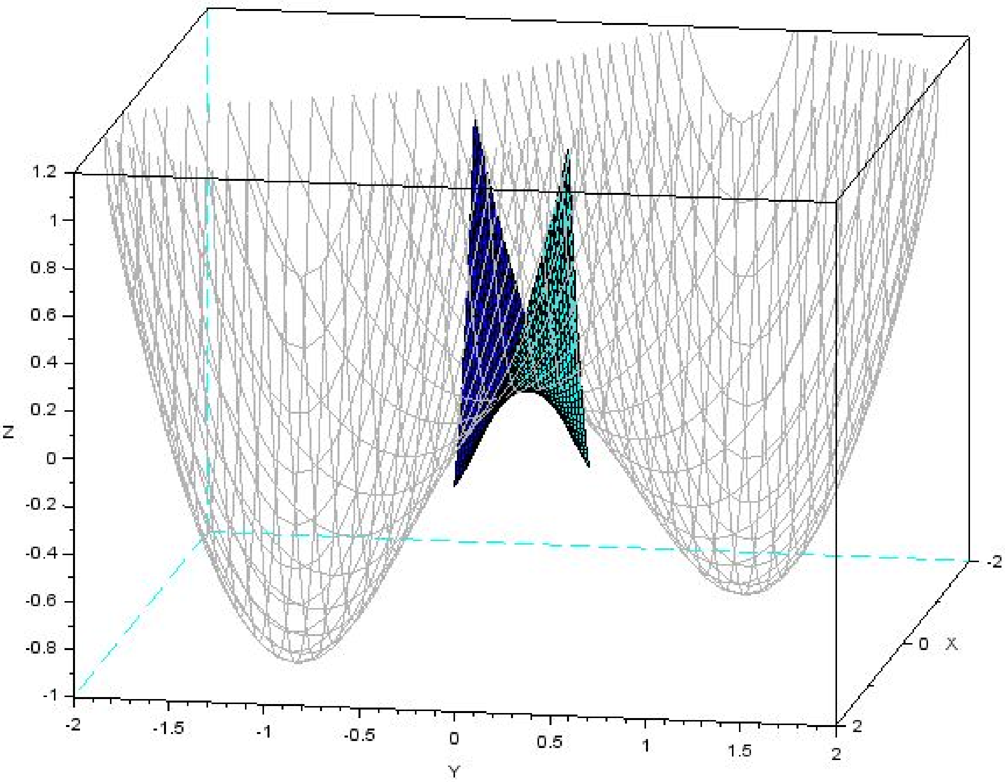


FIGURE 5 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$

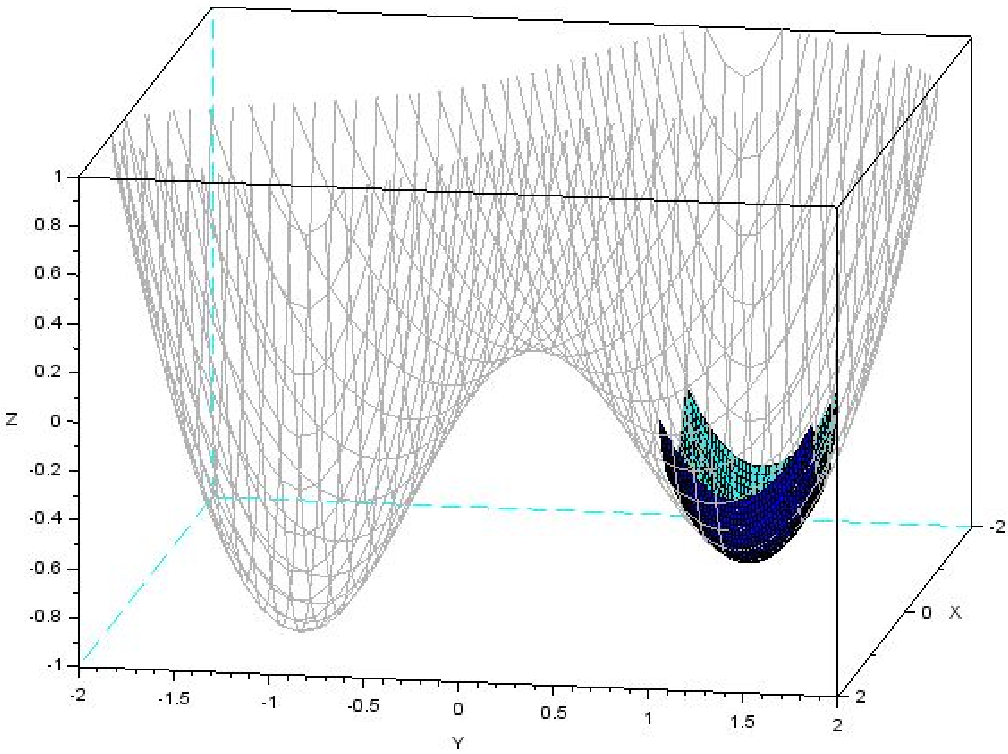


FIGURE 6 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(-1,1)$

Méthode 7 (*Déterminer si un extremum est global*)

On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

- *Pour montrer que f possède un maximum global (resp. minimum global) en $(x_0, y_0) \in U$, il faut montrer que $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$) pour tout $(x, y) \in U$ (voir l'exemple 30).*
- *Pour montrer que f n'a pas d'extremum global, l'énoncé suggère parfois de considérer deux fonctions g et h d'une variable telles que $t \mapsto f(g(t), h(t))$ possède une limite infinie ($-\infty$ pour contredire un minimum et $+\infty$ pour contredire un maximum).*

Exemple 32

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$.
Montrons que f ne possède pas d'extremum global en considérant $y \mapsto f(1, y)$.

1. *Supposons par l'absurde que f possède un maximum global en un point (x_0, y_0).*

2. *Supposons par l'absurde que f possède un minimum global en un point (x_0, y_0).*

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

1. *Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer les points critiques de f.*
3. *Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.*
4. *Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux ?*

6 Objectifs

1. Savoir justifier la continuité, le caractère C^1 ou C^2 d'une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Savoir calculer les dérivées partielles, le gradient d'une fonction de deux variables.
3. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 2, la hessienne.
4. Savoir déterminer un DL d'ordre 1 ou 2 d'une fonction de deux variables.
5. Savoir déterminer les points critiques.
6. Savoir déterminer la nature des points critiques.