# ECE2-Colle 17

**16/02/21**

## 1 Compléments sur les variables aléatoires réelles

**Rappels et compléments sur les variables aléatoires à densité :** définition de variable aléatoire à densité, définition d'une densité. Expression de la fonction de répartition à partir d'une densité, régularité de la fonction de répartition : étant donnée une densité $f$, la fonction de répartition est de classe $C^1$ en tout point où $f$ est continue. Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité. Caractérisation des densités.

**Exemples de transferts :** déterminer la fonction de répartition d'une transformation affine d'une variable aléatoire à densité, déterminer la fonction de répartition de l'exponentielle, du carré d'une variable aléatoire à densité. Loi de $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ pour X suivant une loi uniforme sur $[0,1[$.

**Moments d'une variable à densité :** définition des moments, de l'espérance. Théorème de transfert. Définition de la variance, de l'écart-type, formule de Koenig-Huygens. Variable aléatoire centrée, variable aléatoire réduite.

**Lois usuelles :**

- Lois uniformes : fonction de répartition, densité, espérance, variance.
  $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]) \Longleftrightarrow a+(b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$.
- Lois normales : fonction de répartition, densité, espérance, variance.
  Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
  $X \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu,\sigma^2) \Longleftrightarrow aX+b \hookrightarrow \mathscr{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.
  Loi d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois normales.
- Lois exponentielles : fonction de répartition, densité, espérance, variance.

**Complément sur l'indépendance :** indépendance de variables aléatoires quelconques, indépendance mutuelle, lemme des coalitions. Méthode pour étudier le minimum, le maximum de deux variables aléatoires indépendantes quelconques.

**Complément sur l'espérance, la variance :** linéarité de l'espérance (pour des variables aléatoires quelconques), espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes quelconques ; généralisation au cas de $n$ variables mutuellement indépendantes. Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes quelconques ; généralisation au cas de $n$ variables mutuellement indépendantes. Croissance de l'espérance.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Savoir justifier qu'une variable aléatoire est/n'est pas à densité (exercices 1, 2, 6).
- Savoir montrer qu'une fonction donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité. Savoir montrer qu'une fonction donnée est une densité d'une variable à densité (exercices 3, 4 9, 10, 11, 16).
- Sur des exemples simples, savoir déterminer la fonction de répartition, une densité de fonctions d'une variable aléatoire à densité (exercices 5, 6, 11, 16).
- Savoir déterminer si une variable aléatoire à densité possède une espérance, un moment d'ordre $r$ ($r \in \mathbb{N}^*$) à partir de la définition (exercices 8, 9, 10, 12, 16).
- Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas une espérance à l'aide du théorème de transfert et le cas échéant, la calculer (exercices 7, 10, 11).
- Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas de variance et le cas échéant, la calculer (exercices 8, 9, 10, 12).
- Savoir montrer que deux variables aléatoires quelconques sont/ne sont pas indépendantes. Savoir montrer que des variables aléatoires quelconques sont/ne sont pas mutuellement indépendantes (exercice 14).
- Savoir étudier le min et max de deux variables aléatoires quelconques, de deux variables aléatoires à densité (exercices 1, 15, 16).

## 3 Questions de cours

- Lois usuelles : fonction de répartition, densité, espérance, variance.
- Définitions : espérance, variance, moments.
- Théorèmes : caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité, caractérisation des densités, théorème de transfert, formule de Koenig-Huygens.