Chapitre 7 : Variables aléatoires discrètes (révisions)

1 Variables aléatoires discrètes

Définition 1 (Variable aléatoire réelle)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

- On appelle **variable aléatoire réelle** sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ toute application $\mathrm{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$[\mathrm{X} \leqslant x] \in \mathscr{A}$$
où $[\mathrm{X} \leqslant x]$ désigne l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \leqslant x\}$.
- Une **variable aléatoire discrète** est une variable aléatoire réelle X si $\mathrm{X}(\Omega)$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{Z}$).

Remarque 1

1. *Soient* X *une variable aléatoire réelle et* I *une partie de* $\mathbb{R}$*. On note* $[\mathrm{X} \in \mathrm{I}]$ *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{I}\}$.
De même, pour $x \in \mathrm{R}$*, on note* $[\mathrm{X} = x]$ *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) = x\}$.
2. *On distingue deux types de variables aléatoires discrètes :*
   - ***variable aléatoire discrète finie*** X *lorsque* $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *(où* $n \in \mathbb{N}$*),*
   - ***variable aléatoire discrète infinie*** X *lorsque* $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ *où* I *est une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *(ou de* $\mathbb{Z}$*).*

Définition 2 (Fonction de répartition)

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On appelle **fonction de répartition** de X la fonction notée $\mathrm{F_X}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{P}([\mathrm{X} \leqslant x]).$$

Proposition 1

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. Alors :

1. $\mathrm{F_X}$ est croissante,
2. $\mathrm{F_X}$ est continue à droite en tout point,
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{F_X}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F_X}(x) = 1$,
4. Si $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \mathrm{F_X}(k) - \mathrm{F_X}(k-1)$.

Définition 3 (Loi d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On appelle **loi** de X la donnée de toutes les probabilités $\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$ où A est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 2 (Caractérisation de la loi)

1. La fonction de répartition caractérise la loi : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé elles ont la même loi si et seulement si $\mathrm{F_X} = \mathrm{F_Y}$.
2. La loi d'une variable aléatoire discrète X est caractérisée par la donnée des valeurs $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x)$ pour $x \in \mathrm{X}(\Omega)$.

Test 1 (*Voir solution.*)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise *en rajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro premier tirage où apparaît une boule noire, si un tel tirage et existe, et valant 0 si à chaque tirage on obtient une boule blanche.*

1. *Pour tout $k \geqslant 1$, déterminer $P(X = k)$.*
2. *Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} P(X = k)$ converge et que sa somme vaut 1.*
3. *En déduire $P(X = 0)$.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = a3^{-k}.$$

1. *Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.*
2. *X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?*

Définition 4

Soit X une **variable aléatoire discrète** définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$. On note $g(X)$ la composée $g \circ X$.

Proposition 3

Soit X une **variable aléatoire discrète** définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ est discrète et sa loi est donnée par

1. $g(X)(\Omega) = \{g(x),\ x \in X(\Omega)\}$
2. pour tout $y \in g(X)(\Omega)$ on a

$$P(g(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tel que } g(x) = y} P(X = x).$$

2 Moments

2.1 Espérance

Définition 5 (Espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- Si X est discrète finie, on appelle **espérance** de X et on note $E(X)$, le nombre défini par

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega} x P(X = x).$$

- Si X est discrète infinie, on dit que X **admet une espérance** si la série $\sum_{x \in X(\Omega} x P(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'**espérance** de X, notée $E(X)$ est la somme de cette série

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega} x P(X = x).$$

Remarque 2

1. *Une variable aléatoire discrète **finie** possède donc toujours une espérance.*
2. *Une variable aléatoire discrète **infinie** ne possède pas nécessairement une espérance : l'hypothèse de convergence absolue est fondamentale.*

Exemple 1

Dans le cas où $X(\Omega) = E(X) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, X *possède une espérance si et seulement si la série* $\sum_{k\geqslant 0} x_k P(X = x_k)$ *est absolument convergente.*

Test 3 (*Voir solution.*)

On considère les variables aléatoires X *du test 2. Montrer que* X *possède une espérance et déterminer la.*

Proposition 4

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et admettant une espérance.

1. *Linéarité* : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY$ possède une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
2. *positivité* : si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.

Théorème 1 (Transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Remarque 3

Si X *est* ***finie*** *alors* $g(X)$ *possède toujours une espérance.*

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit X *une variable aléatoire du test 2. Montrer que* $E(X(X-1))$ *existe et calculer la.*

2.2 Moments

Définition 6 (Moments d'ordre r)

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X possède un **moment d'ordre** r si X^r possède une espérance. On note alors

$$m_r(X) = E(X^r).$$

Remarque 4

Si X *est* ***finie*** *alors* X *possède des moments de tout ordre.*

Définition 7 (Variance)

Soit X une variable aléatoire discrète. **Sous réserve d'existence** :

- la **variance** de X, notée V(X) est le réel $V(X) = E((X - E(X))^2)$;
- l' **écart-type** de X, notée $\sigma(X)$ est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 5 (Formule de Koenig-Huygens)

Une variable aléatoire discrète X possède une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Proposition 6

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors

1. $V(X) \geqslant 0$
2. pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX+b)$ existe et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

3 Lois usuelles

3.1 Loi certaine

Loi certaine

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad P(X = a) = 1.$$

- Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

- Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $V(X) = 0$.

3.2 Loi de Bernoulli

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si :
  - i) $X(\Omega) = \{0,1\}$
  - ii) $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Exemple 2 (*Expérience de référence*)

On considère une expérience aléatoire possédant deux issues. L'une de ces issues est nommée « succès » et se produit avec probabilité p ; l'autre est nommée « échec » et se produit avec probabilité $1-p$ (une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).
La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathscr{B}(p)$.

Exemple 3

On lance une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile et à 0 si on obtient Face . Alors

- $X(\omega) = \{0,1\}$
- $P(X=0) = 1-p$ *et* $P(X=1) = p$.

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$

3.3 Loi binomiale

Loi binomiale

Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
  ii) $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple 4 (*Expérience de référence*)

On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 5

On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance n fois consécutives cette pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenues . Alors

- $\Omega = \{Pile, Face\}^n$,
- $X(\omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
- *pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$*
  i) $\binom{n}{k}$ *issues réalisant $[X = k]$ (cela correspond au nombres de façon de choisir la position des k Piles parmi les n lancers) ;*
  ii) la probabilité pour qu'une des issues ci-dessus arrive est $p^k(1-p)^{n-k}$;
  iii) donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

3.4 Loi uniforme

Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ si :
  i) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
  ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple 6 (*Expérience de référence*)

On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.
La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

Remarque 5

Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

- *On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![a,b]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ si :*
  i) $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$
  ii) $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.
- *Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$ alors*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \textit{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

3.5 Loi géométrique

Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ si :
  i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
  ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ alors
$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 7 (***Expérience de référence***)

On considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
La variable aléatoire X donnant le rang du premier succès obtenu suit une loi $\mathscr{G}(p)$.

Exemple 8

On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance la pièce une infinité de fois consécutives et note X la variable égale au rang de la première apparition d'un Pile. Alors

- $\Omega = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}$,
- $X(\omega) = \mathbb{N}^*$
- *i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a*
$$[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$$
  où F_i =« obtenir Face au i-ème lancer » et P_i =« obtenir Pile au i-ème lancer ».
  ii) Par indépendance des lancers
$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= P(F_1) \cdot P(F_2) \cdot \cdots \cdot P(F_{k-1}) \cdot P(P_k) \\ &= (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

3.6 Loi de Poisson

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ si :
  i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
  ii) $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors
$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Test 5 (***Voir solution.***)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer, si elles existent, $E(e^{-X})$ et $V(e^{-X})$.

4 Objectifs

1. Connaître par coeur les lois usuelles : loi, espérance, variance.
2. Savoir reconnaître les lois usuelles d'après leur loi ou par l'expérience de référence.
3. Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète donnée.

4. Savoir justifier l'existence de l'espérance, la variance d'une variable donnée.
5. Savoir utiliser le théorème de transfert.

5 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Au tour numéro i, l'urne contient i boules blanches et une boule noire (donc $i+1$ boules au total)

1. *Pour tout $k \geqslant 1$, $X = k$ si et seulement si pour tout $1 \leqslant i \leqslant k-1$, on a tiré une boule blanche au i-ème tirage (cela arrive avec probabilité $\frac{i}{i+1}$) et au k-ième tirage on a tiré une boule noire (cela arrive avec probabilité $\frac{1}{k+1}$). Les tirages étant indépendants (tirages avec remise), on a*

$$P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

2. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

donc la série converge et sa somme vaut 1.

3. *On a*

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 1 - P(X \neq 0) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X=k]\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \quad (\textit{par } \sigma - \textit{additivité car les événements } [X=k] \textit{ sont deux à deux incompatibles}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = a3^{-k}.$$

1. *On a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-k} = a\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{a}{2}.$$

Donc on définit une loi de probabilité si et seulement $a = 2$.

2. *On a, d'une part,*

$$\begin{aligned} P(X \textit{ est pair}) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [X=2n]\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=2n) \quad (\textit{par } \sigma - \textit{additivité car les événements } [X=2n] \textit{ sont deux à deux incompatibles}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{2n}} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P(X \textit{ est impair}) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X=2n+1]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1) \quad (\textit{par } \sigma - \textit{additivité car les événements } [X=2n+1] \textit{ sont deux à deux incompatibles}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{2n+1}} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, X *a plus de chance de prendre des valeurs impaires.*

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

La série $\sum_{n\geqslant 1} n\frac{2}{3^n}$ *est absolument convergente (à un facteur* $\frac{2}{3}$ *près, il s'agit d'une série géométrique dérivée de raison* $\frac{1}{3}$*) donc* $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ *existe et*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

La série $\sum_{n\geqslant 1} n(n-1)\frac{2}{3^n}$ *est absolument convergente (à un facteur* $\frac{2}{9}$ *près, il s'agit d'une série géométrique dérivée seconde de raison* $\frac{1}{3}$*) donc* $\mathrm{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1))$ *existe et*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\frac{2}{3^n} = \frac{2}{9}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{3^{n-2}} = \frac{2}{9}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$. *Calculer, si elles existent,* $\mathrm{E}(e^{-\mathrm{X}})$ *et* $\mathrm{V}(e^{-\mathrm{X}})$.

1. *Pour l'espérance : on considère la série* $\sum_{k\geqslant 0} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} e^{-k}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!}.$$

   On reconnaît à droite la somme partielle d'indice n *d'une série exponentielle (qui converge). Par conséquent, la série* $\sum_{k\geqslant 0} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ *est convergente donc absolue convergente car ses termes sont positifs. De plus, sa somme vaut*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-1})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-1}} = e^{\lambda(e^{-1}-1)}.$$

   Ainsi, $\mathrm{E}(e^{-\mathrm{X}})$ *existe et vaut* $e^{\lambda(e^{-1}-1)}$.

2. *Pour la variance : on considère la série* $\sum_{k\geqslant 0}\left(e^{-k}\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-k}\right)^2 2e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n} e^{-2k}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda e^{-2})^k}{k!}.$$

   On reconnaît à droite la somme partielle d'indice n *d'une série exponentielle (qui converge). Par conséquent, la série* $\sum_{k\geqslant 0}\left(e^{-k}\right)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ *est convergente donc absolue convergente car ses termes sont positifs et sa somme vaut*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{-2})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{-2}} = e^{\lambda(e^{-2}-1)}.$$

   Ainsi, $e^{-\mathrm{X}}$ *possède un moment d'ordre* 2. *Par la formule de Koenig-Huygens,* $e^{-\mathrm{X}}$ *possède une variance et*

$$\mathrm{V}(e^{-\mathrm{X}}) = \mathrm{E}\left(\left(e^{-\mathrm{X}}\right)^2\right) - \mathrm{E}\left(e^{-\mathrm{X}}\right)^2 = e^{\lambda(e^{-2}-1)} - e^{2\lambda(e^{-1}-1)}.$$