

# Chapitre 9 : Couples de variables aléatoires discrètes

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce chapitre seront des variables aléatoires réelles discrètes.

## 1 Lois associées à un couple de variables aléatoires

### 1.1 Loi du couple

#### Définition 1 (Couple de variables aléatoires)

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Le **couple de variables aléatoires discrètes**  $(X, Y)$  est l'application définie par

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)).$$

#### Définition 2 (Loi d'un couple)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On appelle **loi du couple**  $(X, Y)$  ou **loi conjointe de  $X$  et  $Y$**  la donnée de

$$P([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega).$$

On notera souvent  $P(X = x, Y = y)$  pour désigner  $P([X = x] \cap [Y = y])$ .

#### Exemple 1

On lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse aux résultats possibles. On a donc :

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) =$$

où

1. On note  $X$  la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et  $Y$  celle donnant la valeur du dé blanc. Comme  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :

- (a) On a

$$X(\Omega) = \quad \text{et} \quad Y(\Omega) =$$

- (b) Pour tout  $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  on a

$$P(X = i, Y = j) =$$

2. Maintenant,  $X$  désigne le plus petit des deux nombres obtenus et  $Y$  le plus grand. Comme  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :

- (a) On a

$$X(\Omega) = \quad \text{et} \quad Y(\Omega) =$$

(b) Pour tout  $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  on a :

On peut récapituler la loi sous-forme d'un tableau :

$x \in X(\Omega) \backslash y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

### Test 1 ([Voir solution.](#))

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues indiscernables au touché. On tire simultanément 3 boules dans l'urne au hasard.

- Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- Sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , on considère les variables aléatoires  $X$  égale au nombre de boules blanches obtenues et  $Y$  égale au nombre de boules vertes obtenues. Déterminer la loi de  $(X, Y)$ .

### Exemple 2

On lance en parallèle deux pièces équilibrées une infinité de fois et on s'intéresse aux résultats obtenus (**on suppose tous les lancers indépendants**). On note  $X$  le rang où la première pièce tombe sur « Face » pour la première fois et  $Y$  le rang où la deuxième pièce tombe sur « Face » pour la première fois. Déterminons la loi du couple  $(X, Y)$ .

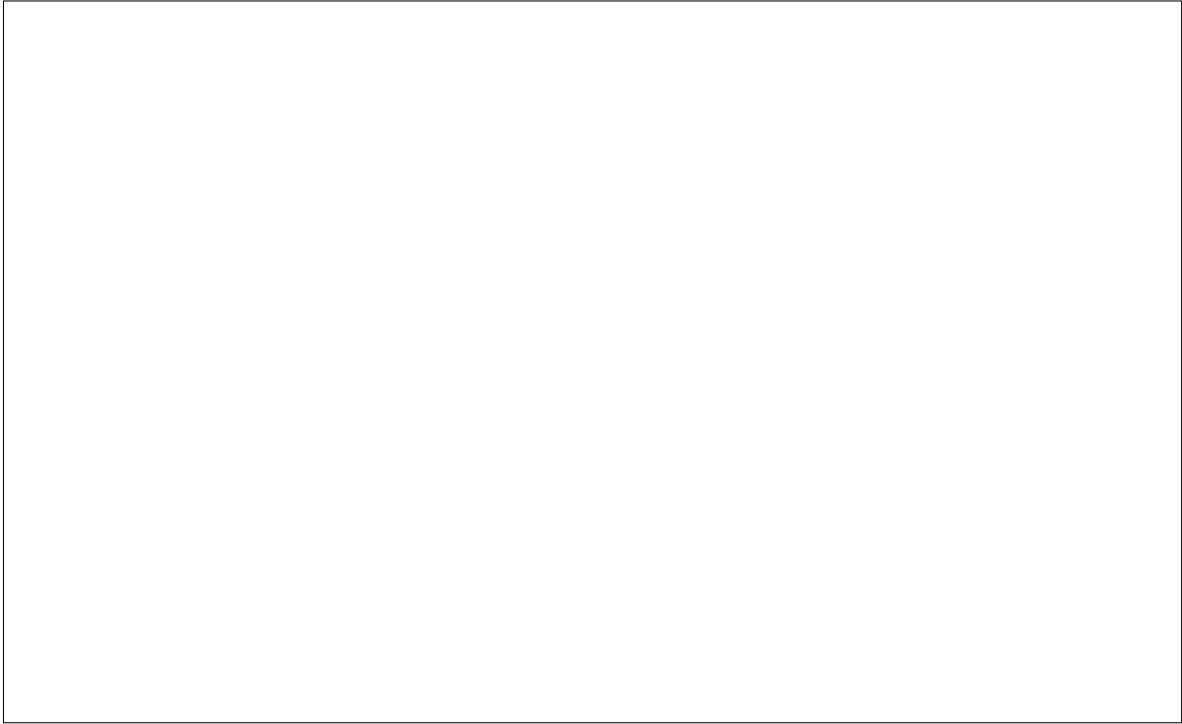
- On a

$X(\Omega) =$

et

$Y(\Omega) =$

2. Pour tout  $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  déterminons  $P(X = i, Y = j)$ .



**Test 2 (Voir solution.)**

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On reprend l'énoncé de l'exemple 2 sauf qu'on ne suppose plus les pièces équilibrées : chacune d'elle donne « Face » avec probabilité  $p$  et « Pile » avec probabilité  $1 - p$ . Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  dans ce cas.

**Proposition 1**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Alors, la famille

$$([X = x] \cap [Y = y])_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}$$

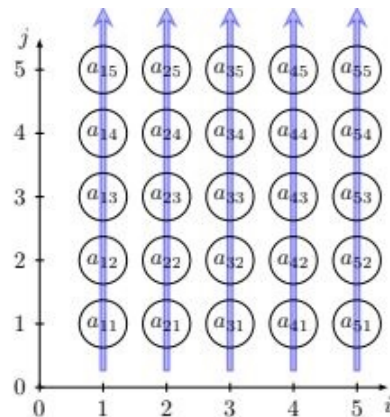
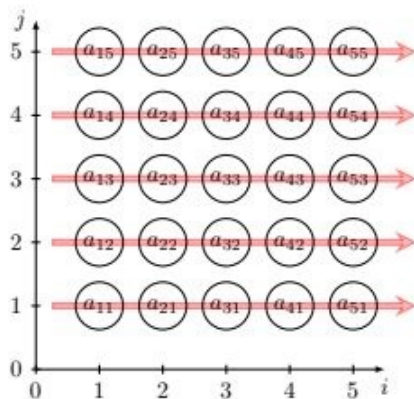
est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \right) = 1.$$

**Remarque 1 (Somme double)**

Soient  $I, J$  deux sous ensembles de  $\mathbb{N}$  et  $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ .

1. **Cas où  $I$  et  $J$  sont finis.** On a toujours  $\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$  et ce nombre est noté  $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ .



2. **Cas où I ou J est infini.** Si pour tout  $i \in I$ , la série  $\sum_{j \in J} a_{i,j}$  est absolument convergente et si de plus la série

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} |a_{i,j}| \right)$$

est (absolument) convergente, alors pour tout  $j \in J$  la série  $\sum_{i \in I} a_{i,j}$  converge absolument et la série

$$\sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} |a_{i,j}| \right)$$

aussi. Dans ce cas, on dit que la série double  $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$  est **absolument convergente** et on a

$$\sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Ce nombre est noté  $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$  et est appelé somme double de la série double.

### Exemple 3

1. **Cas fini :** calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p ij$

2. **Cas infini :** montrer que  $\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{2^{i+j}}$  converge absolument et déterminer sa somme.

## 1.2 Lois conditionnelles

### Définition 3 (Lois conditionnelles)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- Pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P([Y = y]) \neq 0$ , on appelle **loi conditionnelle de  $X$  sachant (que l'événement)  $[Y = y]$  (est réalisé)** la donnée de

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P([Y = y])} \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega).$$

- Pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P([X = x]) \neq 0$ , on appelle **loi conditionnelle de  $Y$  sachant (que l'événement)  $[X = x]$  (est réalisé)** la donnée de

$$P_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{P([Y = y] \cap [X = x])}{P([X = x])} \quad \text{pour tout } y \in Y(\Omega).$$

### Exemple 4

On reprend les deux cas de l'exemple 1.

1. Soit  $j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  et déterminons la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = j]$ .

2. On rappelle que dans le deuxième cas, la loi de  $(X, Y)$  est donnée par le tableau suivant.

$x \in X(\Omega) \backslash y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Déterminons la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = 3]$ .

### Méthode 1

Pour déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = y]$  à partir de la loi du couple  $(X, Y)$  :

1. on commence par déterminer  $P(Y = y)$  à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

2. on calcule ensuite  $P_{[Y=y]}([X = x])$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .

Remarquons que, dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont finies et la loi de  $(X, Y)$  donnée par un tableau :

1.  $P(Y = y)$  est la somme des probabilités de la colonne correspondant à  $[Y = y]$ ,

2. la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $[Y = y]$  s'obtient en renormalisant la colonne correspond à  $[Y = y]$  par  $P(Y = y)$

(c'est le même principe pour la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = x]$  mais avec les lignes).

### Exemple 5

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P([X = i, Y = j]) = \frac{e^{-i} i^j}{2^i j!}.$$

Soit  $i \in \mathbb{N}^*$  et déterminons la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = i]$ .

1. On commence par déterminer  $P([X = i])$  :

2. On en déduit la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = i]$  :

### Test 3 (Voir solution.)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 4]$ .

### Remarque 2

1. Une loi conditionnelle est une loi de probabilité. En particulier, pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P(Y = y) \neq 0$ ,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P_{[Y=y]}([X = x]) = 1$$

et de même, pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P(X = x) \neq 0$ ,

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} P_{[X=x]}([Y = y]) = 1.$$

2. La connaissance des lois conditionnelles ne permet pas de retrouver la loi du couple.

## 1.3 Lois marginales

### Définition 4 (Lois marginales)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On appelle

1. **première loi marginale** du couple  $(X, Y)$  la loi de  $X$ ,
2. **deuxième loi marginale** du couple  $(X, Y)$  la loi de  $Y$ .

Pour le calcul pratique des lois marginales, on utilise la formules des probabilités totales :

**Proposition 2** (Calcul des lois marginales)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1. On a, pour tout  $x \in X(\Omega)$

$$P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x, Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega) \mid P([Y = y]) \neq 0} P_{[Y=y]}([X = x]) P([Y = y]).$$

2. On a, pour tout  $y \in Y(\Omega)$

$$P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid P([X = x]) \neq 0} P_{[X=x]}([Y = y]) P([X = x]).$$

**Remarque 3**

1. Les égalités du point 1 résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$  et les égalités point 2 résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ .
2. La proposition ci-dessus entraîne en particulier la convergence des séries considérées.
3. La connaissance de la loi du couple  $(X, Y)$  permet de déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
4. La connaissance des lois de  $X$  et  $Y$  prises séparément n'apporte aucune information sur leur interaction et donc sur la loi du couple  $(X, Y)$ .
5. En revanche, la connaissance de la loi de  $X$  et des lois conditionnelles de  $Y$  sachant  $[X = x]$  pour tout  $x \in X(\Omega)$  permet de trouver la loi du couple.

**Méthode 2**

1. Pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple, on utilise les égalités

$$P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x, Y = y]) \quad \text{ou} \quad P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, Y = y])$$

de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.

2. Pour trouver la loi de  $X$  connaissant les lois conditionnelles de  $X$  sachant  $[Y = y]$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$  et la loi de  $Y$  on utilise l'égalité

$$P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega) \mid P([Y = y]) \neq 0} P_{[Y=y]}([X = x]) P([Y = y])$$

de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.

3. Pour trouver la loi du couple  $(X, Y)$  connaissant la loi de  $X$  et les lois conditionnelles de  $Y$  sachant  $[X = x]$  pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P(X = x) \neq 0$ , on utilise l'égalité :

$$P([X = x, Y = y]) = P([X = x]) P_{[X=x]}([Y = y])$$

qui provient de la définition d'une probabilité conditionnelle.

**Exemple 6**

On reprend le cas 2 l'exemple 1. Déterminons la loi marginale de  $X$ .

### Exemple 7

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  et que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la loi de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est la loi  $\mathcal{B}(k, p)$  avec  $0 < p < 1$ .

1. Déterminons la loi de  $Y$ .

(a) On sait que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$

$$P([X = k]) = \quad \text{et} \quad P_{[X=k]}([Y = i]) = \quad .$$

(b) De plus,

(c) Donc  $Y$  suit la loi

2. Déterminons la loi du couple  $(X, Y)$ . Pour tout  $(k, i) \in \mathbb{N}^2$  on a

$$P([X = k, Y = i]) =$$



#### Test 4 (Voir solution.)

- On reprend l'exemple 4 (cas 2).
  - Avec la loi du couple  $(X, Y)$ , déterminer la loi de  $X$ .
  - Trouver la loi de  $Y$  de deux façons :
    - à partir de la loi de  $Y$  sachant  $[X = i]$  pour tout  $i \in X(\Omega)$  (voir exemple 4) et de la loi de  $X$ ;
    - à partir de la loi de  $(X, Y)$ .
- Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-2} 2^{j-i}}{j!}.$$

Déterminer les lois marginales.

## 2 Indépendance

### 2.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

#### Définition 5 (Indépendance de deux variables aléatoires discrètes)

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On dit que  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** (pour la probabilité  $P$ ) si

$$\forall x \in X(\Omega) \forall y \in Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) P([Y = y]).$$

#### Remarque 4

- Autrement dit les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si pour tout  $x \in X(\Omega)$  et tout  $y \in Y(\Omega)$ , les événements  $[X = x]$  et  $[Y = y]$  sont indépendants.
- En cas d'indépendance de  $X$  et  $Y$ , les lois marginales permettent donc de retrouver la loi du couples.
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P([Y = y]) \neq 0$  on a :

La loi de  $X$  sachant  $[Y = y]$  est donc la loi de  $X$ .

#### Méthode 3

- Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sont indépendantes il faut montrer que  $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) P([Y = y])$  **pour tout**  $x \in X(\Omega)$  **et**  $y \in Y(\Omega)$ .
- Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes il suffit de montrer que  $P([X = x] \cap [Y = y]) \neq P([X = x]) P([Y = y])$  **pour (au moins) un**  $x \in X(\Omega)$  **et un**  $y \in Y(\Omega)$ .

#### Exemple 8

On reprend l'exemple 1 : on lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On a

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([1, 6]^2, \mathcal{P}([1, 6]^2), P_{\text{unif}})$$

où  $P_{\text{unif}}$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$ .

- On note  $X$  la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et  $Y$  celle donnant la valeur du dé blanc. D'après l'exemple 1, pour tout  $(i, j) \in [1, 6]^2$  on a :

$$P([X = i]) = \quad ; \quad P([Y = j]) = \quad ; \quad P([X = i, Y = j]) = \quad .$$

2.  $X$  désigne le plus petit des deux nombres obtenus et  $Y$  le plus grand. On a

$$P([X = 2, Y = 1]) =$$

Or

#### Test 5 (Voir solution.)

On tire successivement deux jetons dans une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On note  $X$  la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et  $Y$  au deuxième. Dans les deux cas suivants dire si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

1. Tirage avec remise.
2. Tirage sans remise.

#### Test 6 (Voir solution.)

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P([Y = y]) \neq 0$  on a :

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = P([X = x]).$$

Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

## 2.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

### Définition 6 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égale à 2.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- On dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

- Plus généralement, si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires discrètes définies  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On dit que les variables  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont **mutuellement indépendantes** si pour tout  $n \geq 2$ ,  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

#### Exemple 9

On lance deux fois successives une pièce équilibrée. On note  $X$  (resp.  $Y$ ) la variable aléatoire valant 1 si le premier lancer (resp. deuxième lancer) donne Pile et 0 sinon; et  $Z$  la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu exactement un Pile et 0 sinon.

1. D'une part

$$P([X = 1, Y = 1, Z = 1]) =$$

2. D'autre part

3. Conclusion :

#### Remarque 5

⚠ La notion d'indépendance mutuellement est plus contraignante que l'indépendance deux à deux. Dans l'exemple précédent,  $X, Y$  sont indépendantes ;  $Y, Z$  aussi et  $X, Z$  aussi. Mais  $X, Y, Z$  ne sont pas mutuellement indépendantes !

#### Proposition 3 (Lemme des coalitions)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égale à 2.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de  $X_1, \dots, X_k$  est indépendante de toute variable aléatoire fonction de  $X_{k+1}, \dots, X_n$ .

#### Exemple 10

Si  $X_1, \dots, X_5$  sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors  $X_1 + 2X_3^2$  est indépendante de  $X_2 + e^{X_4 + X_5}$ .

#### Compléments sur l'indépendance

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égale à 2.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et **mutuellement indépendantes**. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  soit  $A_i \subset X_i(\Omega)$ . Alors

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \dots \times P(X_n \in A_n).$$

#### Exemple 11

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes alors pour tout  $x \in X(\Omega)$  et pour tout  $y \in Y(\Omega)$  on a :

- $P([X \geq x] \cap [Y \geq y]) = P([X \geq x]) P([Y \geq y]),$
- $P([X < x] \cap [Y \geq y]) = P([X < x]) P([Y \geq y]),$
- ...

### 3 Variable aléatoire fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes : $Z = g(X, Y)$

#### 3.1 Cas général

##### Définition 7 (Loi de $g(X, Y)$ )

Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ . On note  $Z = g(X, Y)$  l'application

$$\begin{aligned}\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto g(X(\omega), Y(\omega)).\end{aligned}$$

Alors

1.  $Z$  est une variable aléatoire discrète.
2. L'ensemble des valeurs prises par  $Z$  est donné par

$$Z(\Omega) = \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \subset \{g(x, y) \mid x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}.$$

3. La loi de  $Z$  est donnée par

$$\forall z \in Z(\Omega), P([Z = z]) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid z = g(x, y)} P([X = x] \cap [Y = y]).$$

##### Théorème 1 (Théorème de transfert)

Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Soit  $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ . On note  $Z = g(X, Y)$ .

Si la somme double  $\sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y])$  est absolument convergente alors  $Z$  possède une espérance. Dans ce cas,

$$E(Z) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

#### Remarque 6

1. Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont à support **fini**, la somme double est finie donc converge absolument; dans ce cas  $Z$  admet toujours une espérance.
2. Dans le cas où  $X$  ou  $Y$  est infinie, voir la remarque 1 concernant la convergence absolue des sommes doubles.

### Exemple 12

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les trois faces sont numérotées de 1 à 3 ; il gagne 2 fois la valeur du premier dé et perd 2 fois la valeur du second dé. On note  $X$  la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,  $Y$  celle donnant la valeur du second dé et  $Z$  celle donnant les gains (algébriques) du joueur.

1. La variable aléatoire  $Z$  est fonction de  $X$  et  $Y$  :

2. Les valeurs prises par  $Z$  sont :

3. La loi de  $Z$  est donnée par :

4. Comme les variables  $X$  et  $Y$  sont finies,  $Z$  possède une espérance et

### Exemple 13

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  dont la loi conjointe est définie par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([X = i, Y = j]) = \frac{i + j}{e 2^{i+j} i! j!}.$$

Montrons que  $Z = 2^{X+Y}$  possède une espérance et calculons la.

1. Montrons que pour tout  $i \in \mathbb{N}$  la série  $\sum_{j \geq 0} 2^{i+j} P([X = i, Y = j])$  est absolument convergente.

2. Montrons que la série  $\sum_{i \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} P([X=i, Y=j]) \right)$  est absolument convergente.

3. Conclusion :

## 3.2 Loi de la somme

### Loi de la somme de variables aléatoires discrètes

Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . La variable aléatoire  $X + Y$  est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), P([X + Y = z]) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid z - x \in Y(\Omega)} P([X = x, Y = z - x]).$$

**Démonstration :** A savoir refaire dans les exercices!

■

#### Méthode 4

On retiendra que pour déterminer la loi de la somme à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ . Il est important de remarquer que

$$[X = x, X + Y = z] = [X = x, x + Y = z] = [X = x, Y = z - x].$$

#### Remarque 7

On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ . On obtient alors

$$P([X + Y = z]) = \sum_{y \in Y(\Omega) \mid z - y \in X(\Omega)} P([X = z - y, Y = y]).$$

#### Exemple 14

Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 4])$ . On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

1.  $(X + Y)(\Omega) =$
2. Soit  $k \in (X + Y)(\Omega)$ .

#### Test 7 ([Voir solution.](#))

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé suivant une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$P([X + Y = n]) = (n - 1)p^2(1 - p)^{n-2}.$$

**Proposition 4** (Stabilité des lois binomiales)

Soient  $p \in ]0, 1[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$  deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$

**Démonstration :** On admet la formule de Vandermonde : pour tout  $(n, m, z) \in \mathbb{N}^3$

$$\sum_{i=\max(0, z-m)}^{\min(n, z)} \binom{n}{i} \binom{m}{z-i} = \binom{m+n}{z}.$$

■

**Proposition 5** (Stabilité des lois de Poisson)

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ . Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$  deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

**Test 8** ([Voir solution.](#))

Prouver la proposition 5.

**Remarque 8** ([Voir TD](#))

Plus généralement, si  $X_1, \dots, X_r$  sont **mutuellement indépendantes** alors

1. si  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p), \dots, X_r \hookrightarrow \mathcal{B}(n_r, p)$  alors  $X_1 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_r, p)$  ;
2. si  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \dots, X_r \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_r)$  alors  $X_1 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$ .



**Proposition 6** (Linéarité de l'espérance)

Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors

1.  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$  possède une espérance,
2.  $E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \dots + \lambda_n E(X_n)$ .

**Exemple 15**

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

- D'après la remarque 8,  $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .
- D'après la proposition ci-dessus

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np.$$

On retrouve la formule de l'espérance d'une loi binomiale.

**Méthode 5**

**Sous réserve d'existence**, il y a trois façons de calculer  $E(X + Y)$ .

1. Si on connaît la loi de  $X$  et de  $Y$ , on utilise la linéarité :  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .
2. Si on connaît la loi de  $X + Y$ , on utilise la définition de l'espérance.
3. Si on connaît la loi du couple  $(X, Y)$  on utilise le théorème de transfert :  $E(X + Y) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} (x + y) P([X = x] \cap [Y = y])$ .

**3.3 Loi du produit****Loi du produit de variables aléatoires discrètes**

Soient  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . La variable aléatoire  $XY$  est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (XY)(\Omega), P([XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, xY = z]).$$

**Démonstration :** A savoir refaire dans les exercices!

■

**Méthode 6**

On retiendra que pour déterminer la loi du produit à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ . Il est important de remarquer que

$$[X = x, XY = z] = [X = x, xY = z].$$

**Remarque 9**

*On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ .  
On obtient alors*

$$P([XY = z]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([YX = z, Y = y]).$$

### Exemple 16

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 3 ; il gagne alors un montant égal au produit des deux nombres obtenus. On note  $X$  la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,  $Y$  celle donnant la valeur du second dé et  $Z$  celle donnant les gains du joueur.

1. La variable aléatoire  $Z$  est fonction de  $X$  et  $Y$  :

2. Calculons  $P([Z = 6])$ .

### Proposition 7

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors  $XY$  a une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

### Méthode 7

**Sous réserve d'existence**, il y a trois façons de calculer  $E(XY)$ .

1. Si on connaît la loi de  $X$  et de  $Y$  et que  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes**, on utilise  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .
2. Si on connaît la loi de  $XY$ , on utilise la définition de l'espérance.
3. Si on connaît la loi du couple  $(X, Y)$  on utilise le théorème de transfert :  $E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy P([X = x] \cap [Y = y])$ .

### Test 9 (Voir solution.)

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On considère  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p)$  deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de  $XY$  et son espérance.

## 3.4 Loi du min, max

### Méthode 8

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à **valeurs entières** définies sur un même espace probabilisé et **indépendantes** et soit  $U = \max(X, Y)$ .

Pour déterminer la loi de  $U$  :

1. on justifie que pour tout  $k \in U(\Omega)$  on a  $[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$  ;
2. par indépendance, on en déduit la fonction de répartition  $F_U$  de  $U$  ;
3. on utilise  $P([U = k]) = F_U(k) - F_U(k - 1)$ .

### Exemple 17

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On note  $X$  la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et  $Y$  celle égale au deuxième numéro tiré.

On note  $U = \max(X, Y)$ . On a  $U(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Justifions que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$ .

2. Déterminons  $F_U$ .

3. Déterminons la loi de  $U$ .

### Méthode 9

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à **valeurs entières** définies sur un même espace probabilisé et **indépendantes** et soit  $V = \min(X, Y)$ .

Pour déterminer la loi de  $V$  :

1. on justifie que pour tout  $k \in V(\Omega)$  on a  $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$  ;
2. par indépendance, on en déduit  $1 - F_V$  ;
3. on utilise  $P([V = k]) = F_V(k) - F_V(k - 1)$ .

### Remarque 10

Parfois on peut déterminer la loi du minimum et du maximum directement comme on l'a fait dans le cas 2 de l'exemple 1.

### Exemple 18

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On note  $X$  la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et  $Y$  celle égale au deuxième numéro tiré.

On note  $V = \min(X, Y)$ . On a  $V(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Justifions que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$ .

2. Déterminons  $1 - F_V$ .

3. Déterminons la loi de  $V$ .

#### Test 10 (Voir solution.)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $P(\lfloor \min(X, Y) \rfloor > k)$ .
2. En déduire la loi de  $\min(X, Y)$ .
3. Expliquer ce résultat à l'aide d'une expérience.

## 4 Variance et covariance

### 4.1 Covariance

#### Définition 8 (Covariance)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que  $X$  et  $Y$  possèdent un moment d'ordre 2. Alors l'espérance suivante existe :

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

On l'appelle la **covariance** de  $X$  et  $Y$  et on note  $\text{Cov}(X, Y)$ .

#### Remarque 11

En particulier, si  $X$  a un moment d'ordre deux alors le couple  $(X, X)$  possède une covariance et :  $\text{Cov}(X, X) = V(X)$ .

#### Proposition 8 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que  $X$  et  $Y$  possèdent un moment d'ordre 2. Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

#### Remarque 12

⚠ Le fait que  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  n'implique pas que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes (voir exemple ci-dessous).

#### Exemple 19

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$  et  $Y = X^2$ .

- Les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes :

- La covariance de X et Y existe car

#### Test 11 ([Voir solution.](#))

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la covariance de X et Y.

#### Proposition 9

Soient  $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2$  des variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre deux. Alors

1.  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$  (symétrie);
2.  $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$  (linéarité à gauche);
3.  $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$  (linéarité à droite);
4.  $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0$ .

#### Méthode 10

En pratique, pour déterminer la covariance de deux variables aléatoires, on a deux méthodes :

1. utiliser la formule de Koenig-Huygens;
2. utiliser les propriétés de linéarité de la covariance.

#### Exemple 20

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre deux. On note  $U = X - Y$  et  $V = X + Y$ . Alors :

#### Proposition 10 (Lien avec la variance)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y ont un moment d'ordre deux. Alors

1.  $X + Y$  possède une variance et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y);$$

2. si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Plus généralement, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre 2 (donc une variance) et **mutuellement indépendantes** alors  $X_1 + \dots + X_n$  possède une variance donnée par

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

### Méthode 11

1. Pour calculer la variance d'une somme on peut :
  - (a) utiliser la formule de Koenig-Huygens (voir chapitre précédent) si l'on connaît la loi de la somme;
  - (b) utiliser la formule  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$ .
2. Parfois, on peut être amené à utiliser la formule  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$  pour déterminer la covariance.

## 4.2 Corrélation linéaire

### Définition 9 (Coefficient de corrélation linéaire)

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de  $X$  et de  $Y$  le réel noté  $\rho(X, Y)$  et défini par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

### Proposition 11

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**. Alors

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

De plus,

- $\rho(X, Y) = 1$  si et seulement si il existe  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $P([Y = aX + b]) = 1$ ;
- $\rho(X, Y) = -1$  si et seulement si il existe  $a < 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $P([Y = aX + b]) = 1$ .

### Méthode 12

On peut calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  de plusieurs façons selon le contexte :

1. à l'aide de la définition si l'on connaît la covariance et les variances;
2. si les variables aléatoires sont indépendantes alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  donc  $\rho(X, Y) = 0$ ;
3. si  $Y = aX + b$  avec  $a \neq 0$ , alors le coefficient de corrélation linéaire vaut  $\pm 1$ .

### Exemple 21

On lance  $n$  fois ( $n \geq 2$ ) une pièce qui donne Pile avec probabilité  $p \in ]0, 1[$  et Face avec probabilité  $1 - p$ . On note  $X$  la variable comptant le nombre de Piles et  $Y$  celle comptant le nombre de Faces. Déterminons  $\rho(X, Y)$ .

## 5 Objectifs et erreurs à éviter

### 5.1 Objectifs

1. Savoir déterminer la loi d'un couple à partir de l'expérience aléatoire, à partir de la loi marginale de  $X$  et des lois conditionnelles de  $Y$  sachant  $[X = x]$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .
2. Savoir trouver les lois conditionnelles à partir de la loi du couple.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver la loi marginale de  $X$  en connaissant la loi de  $Y$  et les lois conditionnelles de  $X$  sachant  $[Y = y]$  pour tout  $y \in Y(\Omega)$ .
5. Connaître la définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle.

6. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de  $XY$ ,  $X + Y$ ,  $\max(X, Y)$ ,  $\min(X, Y)$ .
8. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme  $g(X, Y)$ .
9. Connaître les résultats de stabilité par somme des variables indépendantes Binomiales et de Poisson.
10. Savoir justifier l'existence et déterminer  $\text{Cov}(X, Y)$ ,  $V(X + Y)$ ,  $\rho(X, Y)$ .

## 5.2 Erreurs à éviter

1. Il ne faut jamais écrire  $P([X = x, Y = y]) = P([X = x]) P([Y = y])$  si les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes ou si vous n'avez pas justifié qu'elles le sont!
2. Il ne faut pas confondre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux (voir la remarque 5).
3. Ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance dans la stabilité par somme des lois binomiales et de Poisson.
4. Ne pas oublier que le paramètre  $p$  doit être le même pour les deux variables aléatoires dans la stabilité par somme des lois binomiales.
5. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  mais **la réciproque est fausse!**
6. Ne pas croire que même loi signifie égale!

### Exemple 22

*Si on lance une pièce équilibrée et qu'on note  $X$  la variable valant 1 si on fait Pile et 0 sinon et  $Y$  la variable valant 1 si on fait Face et 0 sinon. Alors  $X$  et  $Y$  suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$  mais elles ne sont pas égales :quand l'une vaut 1 l'autre vaut 0!*

7. N'oubliez pas la formule des probabilités totales!