Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Le déterminant de A vaut 0 donc A n'est pas inversible.
2. On appelle *spectre de* A et on note Sp(A) l'ensemble des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

   $$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = \lambda(\lambda - 7).$$

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ appartient au spectre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Ainsi :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda(\lambda - 7) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 7.$$

   Donc le spectre Sp(A) de A est $\{0, 7\}$.

   (c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   - On a :

     $$\begin{aligned} X \in E_0(A) \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \\ &\iff x + 2y = 0 \quad \text{car } L_2 = 3L_1 \\ &\iff x = -2y. \end{aligned}$$

     Ainsi :

     $$E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

     La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$. Comme elle est constituée d'un vecteur non nul, c'est aussi une famille libre. Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$.

   - On a :

     $$\begin{aligned} X \in E_7(A) \iff AX = 7X &\iff \begin{cases} x + 2y = 7x \\ 3x + 6y = 7y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff 3x - y = 0 \quad \text{car } L_1 = -3L_2 \\ &\iff y = 3x.. \end{aligned}$$

     Ainsi :

     $$E_7(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

     La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_7(A)$. Comme elle est constituée d'un vecteur non nul, c'est aussi une famille libre. Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_7(A)$.

3. - Montrons que f est linéaire. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

     $$f(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = f(M) + \lambda f(N).$$

     Ainsi : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(M + \lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$.
     L'application f est donc linéaire.

- C'est évident que f est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
M \in \ker(f) \Longleftrightarrow AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a+2c & = & 0 \\ 3a+6c & = & 0 \\ b+2d & = & 0 \\ 3b+6d & = & 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 0 \end{cases} \quad \text{car } L_2 = 3L_1 \text{ et } L_4 = 3L_3 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & -2c \\ b & = & -2d. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} ; (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\ker(f)$. Comme elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est aussi une famille libre. Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker(f)$ et $\dim(\ker(f)) = 2$.

(b) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Autrement dit : $4 = 2 + \dim(\mathrm{Im}(f))$.
Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(c) Un calcul donne facilement :

- $f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
- $f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$;
- $f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
- $f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Comme $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})\big) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est aussi une famille libre. Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. (a) D'après les questions précédentes on a :

$$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right).$$

Montrons que $\mathscr{B}$ est un famille libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_4 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 & = & 2\lambda_1 \\ \lambda_4 & = & 2\lambda_2 \\ 7\lambda_3 & = & 0 \\ 7\lambda_4 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Comme e_1 et e_2 sont dans le noyau de f on sait que $f(e_1) = f(e_2) = 0$. Ainsi les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(0,0,0,0)$.

De plus, un calcul donne :

$$f(e_3) = \mathrm{A}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 0\\21 & 0\end{pmatrix} = 7e_3 \quad \text{et} \quad f(e_4) = \mathrm{A}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 7\\0 & 21\end{pmatrix} = 7e_4.$$

Les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont donc $(0,0,7,0)$ et celle de $f(e_4)$ sont $(0,0,0,7)$.

Finalement, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 7 & 0\\0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme $f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})})$ n'est pas inversible. Or :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \lambda\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 7 & 0\\0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix} - \lambda\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 0 & 0\\0 & -\lambda & 0 & 0\\0 & 0 & 7-\lambda & 0\\0 & 0 & 0 & 7-\lambda\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas inversible si et seulement si $-\lambda = 0$ ou $7 - \lambda = 0$. Donc

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, 7\}.$$

(d) On remarque que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

6. (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Cela signifie que $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.

i. Soit g l'endormorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$. Alors g n'est pas bijectif puisque $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$ n'est pas inversible. Comme g est un endomorphisme non bijectif d'un espace vectoriel de dimension fini, il n'est donc pas non plus injectif (conséquence du théorème du rang). En particulier, il existe $x \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que $g(x) = 0$. Si X est la matrice de x dans la base canonique on a alors :

$$(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2)\mathrm{X} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$.

De plus, comme x est non nul, X est non nul.

ii. Comme $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$. Par conséquent on a bien : $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, comme $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ on trouve bien :

$$f(\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}) = \mathrm{AX}\,{}^t\mathrm{X} = \lambda\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}.$$

iii. En particulier, on a :

$$(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})})(\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}) = f(\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}) - \lambda\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X} \in \ker(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})})$. Or, X étant non nul, $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}$ est non nul aussi.

Ainsi $\ker(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}) \neq \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$ et donc $f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas injective donc pas bijective.

Par conséquent $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Cela signifie que $f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ n'est pas inversible (c'est-à-dire non bijectif).

i. Comme $f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est un endomorphisme non bijectif d'un espace vectoriel de dimension fini, il n'est pas injectif. Ainsi, il existe une matrice M non nulle dans son noyau, c'est-à-dire telle que :

$$(f - \lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})})(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) - \lambda\mathrm{M} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, il existe une matrice non nulle M telle que : $f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M}$.

ii. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$ la matrice de la question précédente et notons $\mathrm{C}_1 = \begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}$, $\mathrm{C}_2 = \begin{pmatrix}y\\t\end{pmatrix}$ les colonnes de M. On sait que :

$$f(\mathrm{M}) = \lambda\mathrm{M},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}ax + bz & ay + bt\\cx + dz & cy + dt\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{AC}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz \\ ay+bt \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{C}_1$$

et de même $\mathrm{AC}_2 = \lambda \mathrm{C}_2$.
Or, M étant non nulle, C_1 ou C_2 est non nulle.

iii. En particulier le système $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ n'est pas de Cramer. Donc $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

(c) D'après 6.a) on a : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Sp}(f)$.
D'après 6.b) on a : $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
Finalement : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 2

1. (a) Les événements $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ et A_2 sont de probabilités non nuls et forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_0)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{X}=1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Les événements $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ et A_2 sont de probabilités non nuls et forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_0)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{X}=n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{X}=n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{X}=n).$$

Or :

- sachant A_0, X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$;
- sachant A_1, X suit la loi certaine égale à 1 ;
- sachant A_2, X suit la loi certaine égale à 0.

D'où, comme $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}=n) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_0)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{X}=n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{X}=n) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{X}=n) \\ &= 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 0 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \geqslant 2, \mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

(c) Il est clair que $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) &= 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge absolument. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle converge.
Or :

$$\forall k \geqslant 2 \quad k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{6}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

Comme la série géométrique dérivée d'ordre 1 $\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ converge, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$ converge absolument. Ainsi X possède une espérance et :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) = 1.$$

3. D'après le théorème de transfert la variable aléatoire $X(X-1)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)P(X=k)$ converge absolument. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle converge.
Or :
$$\forall k \geqslant 2 \quad k(k-1)P(X=k) = \frac{1}{3}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{12}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$
Comme la série géométrique dérivée d'ordre 2 $\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ converge, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)P(X=k)$ converge absolument. Ainsi $X(X-1)$ possède une espérance et :
$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) = 0+0+\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{12}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{3}.$$
Comme les variables $X(X-1)$ et X possèdent une espérance, par linéarité $X^2 = X(X-1)+X$ possède une espérance. En particulier X possède un moment d'ordre 2 donc, d'après la formule de Koenig-Huygens, X possède une variance donnée par :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{4}{3}.$$

4. Les rôles de X et Y étant parfaitement symétriques, en reprenant la question 1 avec Y on voit que Y a la même loi que X.

5. (a) Soit $j \geqslant 2$.
Il est clair que $[X=1]\cap[Y=j] \subset [Y=j]$.
Réciproquement, si $[Y=j]$ est réalisé alors le premier face a été obtenu au lancé numéro $j \geqslant 2$ donc le premier lancé a donné un Pile : $[X=1]$ est donc réalisé. Ainsi : $[Y=j] \subset [X=1]\cap[Y=j]$.
Finalement, $[X=1]\cap[Y=j] = [Y=j]$ et en particulier :
$$P([X=1]\cap[Y=j]) = P([Y=j]).$$
(b) C'est le même raisonnement qu'à la question précédente.

6. (a)
- Les variables X et Y ont pour support $\mathbb{N}$ donc l'événement $[X+Y=0]$ est réalisé si et seulement si $[X=0]$ et $[Y=0]$. Or, il est impossible de n'obtenir ni pile et ni face au premier lancé ! Donc $[X+Y=0]$ est l'événement impossible.
- De même, les variables X et Y ont pour support $\mathbb{N}$ donc l'événement $[X+Y=2]$ est réalisé si et seulement si $[X=1]$ et $[Y=1]$. Or, il est impossible d'obtenir pile et face au premier lancé ! Donc $[X+Y=2]$ est l'événement impossible.
- Soit $k\in\mathbb{N}$ avec k différent de 0 et de 2. Alors :
$$P(X+Y=k) \geqslant P(X=1, Y=k-1) > 0.$$
Ainsi $X+Y$ peut prendre la valeur k.

Finalement, $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

(b) On a :
$$\begin{aligned} P(X+Y=1) = P([X=1,Y=0]\cup[X=0,Y=1]) &= P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)\\ &= P_{[Y=0]}(X=1)P(Y=0)+P_{[X=0]}(Y=1)P(X=0)\\ &= 1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$
(c) Remarquons que l'événement complémentaire de $[X=1]$ est $[Y=1]$ puisque le premier lancé donne soit face soit pile. Ainsi, on obtient pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
$$\begin{aligned} [X+Y=n] &= ([X=1]\cap[X+Y=n])\cup([Y=1]\cap[X+Y=n])\\ &= ([X=1]\cap[1+Y=n])\cup([Y=1]\cap[X+1=n])\\ &= ([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1]). \end{aligned}$$
(d) Soit $n \geqslant 3$. On déduit de la question précédente :
$$P(X+Y=n) = P([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1]) = P([X=1]\cap[Y=n-1])+P([Y=1]\cap[X=n-1]).$$
D'après les questions 5, 4 et 1.b on obtient alors :
$$P(X+Y=n) = P([Y=n-1])+P([X=n-1]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. (a) (Bonus) Erreur dans l'énoncé à la ligne 10.

```
1  piece = grand(1,1,"uin",0,2)
2  x = 1
3  if piece == 0 then
4      lancer = grand(1,1,"uin",0,1)
5      while lancer == 0
6          lancer = grand(1,1,"uin",0,1)
7          x = x + 1
8      end
9  else
10     if piece == 2 then
11         x = 0
12     end
13 end
14 disp(x)
```

(b) (Bonus) L'erreur dans l'énoncé de la question précédente ne permettait pas de répondre à cette question. Toute tentative a été valorisée.

Exercice 3

1. Un calcul donne :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = \frac{15}{4}.$$

2. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

Or pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $1+\frac{1}{2^k} \geqslant 1$ donc :

$$u_n \geqslant 2\prod_{k=1}^{n} 1 = 2.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n.$$

Ainsi : $u_{n+1} > u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

3. (a) Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Ainsi :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de g	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

En particulier : $\forall x > -1,\ g(x) \leqslant 0$.
Ainsi : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} \quad \text{d'après la question précédente}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = 2.$$

Ainsi 2 est un majorant de $\ln(u_n)$ pour tout entier naturel n.

4. D'après la question précédente et par croissance de la fonction exponentielle on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant e^2.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par e^2. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant e^2$. De plus, la question 2.a) permet de conclure que $\ell \geqslant 2$. Ainsi : $\ell \in [2, e^2]$.

5. (a) D'après la question précédente et par continuité de la fonction logarithme sur $[2, e^2]$, la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

Donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge et sa somme vaut $\ln(\ell)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le résultat de la question 3a) on a :

$$\forall k \geqslant n+1, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi :

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

(d) Par décroissance de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, l'inégalité de la question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{\ell} \geqslant e^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -u_n \leqslant -\ell e^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - u_n \leqslant \ell - \ell e^{-\frac{1}{2^n}} = \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

De plus, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - u_n.$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

(e) La fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est convexe donc sa courbe représentative est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 (d'équation réduite $y = -x + 1$). On déduit donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \geqslant -x + 1.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a : $1 - e^{-x} \leqslant x$.
Avec la question précédente on obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}.$$

Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\ell - u_n)$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{\ell}{2^n}$ sont à termes positifs et la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{\ell}{2^n}$ est une série géométrique convergente. L'inégalité obtenue permet donc de conclure, par comparaison pour les séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\ell - u_n)$ est convergente.

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$.
On rappelle les inégalités suivantes :

$$0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,7.$$

Partie 1 : étude de f

1. (a) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\ln(1+t^2) \geqslant 0$. Ainsi :
   - si $x \geqslant 0$, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant, alors $f(x) \geqslant 0$;
   - si $x \leqslant 0$, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre décroissant, alors $f(x) \leqslant 0$.

   (b) La fonction f est la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue $t \mapsto \ln(1+t^2)$. Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
   $$f'(x) = \ln(1+x^2).$$

   (c) D'après la question précédente, pour tout réel x on a : $f'(x) \geqslant 0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $s = -t$, on obtient :
   $$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2) dt = \int_0^{x} \ln(1+(-s)^2) \times (-1) ds = -f(x).$$
   Ainsi f est impaire.

   (b) La fonction f est de classe C^1 et sa dérivée est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent :
   - f est concave sur $]-\infty, 0]$;
   - f est convexe sur $[0, +\infty[$;
   - f change de concavité en 0 donc sa courbe représentative possède un point d'inflexion en $(0, f(0)) = (0,0)$.

3. (a) On trouve facilement :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties, pour tout réel x, on a :
   $$\begin{aligned} f(x) = \int_0^x u'(t)v(t) dt &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t) dt \\ &= [t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x t \times \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= x\ln(1+x^2) - 2x - 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

4. (a) i. Soit $t>0$. Comme $t^2 \leqslant 1+t^2$ alors par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

ii. Soit $x \geqslant 1$. D'après la relation de Chasles on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Par croissance de l'intégrale et la question précédente, comme $1 \leqslant x$ on obtient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt.$$

iii. Soit $x \geqslant 0$.

— Si $x \leqslant 1$ alors : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^x 1dt = x \leqslant 1.$

— Si $x \geqslant 1$ alors d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt\\ &\leqslant 1 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x\\ &\leqslant 2-\frac{1}{x}\\ &\leqslant 2.\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant 2.$

iv. La fonction $u : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Ainsi u croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, elle est aussi majorée. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, elle possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Cela signifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est une intégrale convergente.

(b) D'après la question 3.b, pour tout $x>0$ on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2)-2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ainsi :

$$f(x) = x\ln(1+x^2)\left(1-\frac{2}{\ln(1+x^2)} + \frac{2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}{x\ln(1+x^2)}\right).$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ donc par opérations sur les limites et d'après la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}{x\ln(1+x^2)} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{\ln(1+x^2)} + \frac{2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt}{x\ln(1+x^2)}\right) = 1.$$

Finalement, on obtient bien : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

(c) Soit x un réel strictement positif, on a :

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que pour pour $x > 1$ on a :

$$\ln(1+x^2) = 2\ln(x)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}\right)$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}\right) = 1$. Ainsi $\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$ et par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(x^2+1) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

(d) Comme la fonction f est impaire la question précédent permet de conclure que :

$$f(x) = -f(-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -2(-x)\ln(-x) = 2x\ln(-x).$$

5. (a) On a vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto \ln(1+x^2)$. Comme f' est une composée de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, f' est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

(b) On voit facilement que :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = \ln(1+0^2) = 0.$$

De plus, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad ; \quad f'''(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}.$$

D'où :

$$f''(0) = 0 \quad ; \quad f'''(0) = 2.$$

(c) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donnée dans l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to0}{o}(x^3) \\ &= \frac{2}{3!}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence on obtient : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{3}$.

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

6. (a) Oui car

$$\int_0^1 (\ln(1+t^2))^0 dt = 1 = u_0.$$

(b) Il est clair que $u_1 = f(1)$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la fonction logarithme, on a :

$$\forall t \in [0,1], \quad \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \leqslant 1.$$

Donc :

$$\forall t \in [0,1], \quad (\ln(1+t^2))^{n+1} \leqslant (\ln(1+t^2))^n.$$

On en déduit donc :

$$u_{n+1} = \int_0^1 \ln(1+t^2))^{n+1} dt \leqslant \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'intégrale d'une fonction positive (et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant) donc est positif. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend l'inégalité établie en 7.a) :

$$\forall t \in [0,1], \quad \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2).$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit :

$$\forall t \in [0,1], \quad (\ln(1+t^2))^n \leqslant (\ln(2))^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 on obtient, avec la question 7.b :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n.$$

(b) Comme $|\ln(2)| < 1$, on sait que : $\lim_{n\to+\infty}(\ln(2))^n = 0$. Par encadrement, on en déduit que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.
Comme $|\ln(2)| < 1$, on sait que : $\sum_{n\geqslant 0}(\ln(2))^n$ converge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général u_n converge aussi.

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend l'inégalité établie en 7.a) :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) < 1.$$

On en déduit donc :

$$\forall t \in [0,1], \quad 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln(2) > 0.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.$$

(b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, par encadrement on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt = 0.$

(c) Soit n un entier naturel non nul. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^n\right) dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $\ln(1+t^2) \neq 1$ donc par somme des termes d'une suite géométrique on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^n\right) dt = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1}}{1-\ln(1+t^2)}dt = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}dt.$$

Donc, d'après 9.b on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}dt.$$

• FIN •