



AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille – ED 184

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE – UMR 7373

Thèse pour le grade universitaire de docteur de l'université d'Aix-Marseille

Discipline : Mathématiques

présentée par

Arnaud Stocker

Géométrie de certains espaces de courbure négative

Directeurs de thèse : **Gérard Besson** et **Peter Haïssinsky**

Soutenue le 19 juin 2019 devant le jury composé de :

| | | |
|-------------------------|----------------------------------|--------------------|
| Gérard Besson | Université Grenoble Alpes | Directeur de thèse |
| Marc Bourdon | Université de Lille | Examineur |
| Gilles Courtois | Université Pierre et Marie Curie | Examineur |
| Joel Fine | Université Libre de Bruxelles | Rapporteur |
| Peter Haïssinsky | Aix-Marseille Université | Directeur de thèse |
| Barbara Schapira | Université de Rennes 1 | Rapporteuse |



Cette oeuvre est mise à disposition selon les termes de la [Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International](#).

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont, bien évidemment, à mes directeurs de thèse Gérard Besson et Peter Haïssinsky, pour leur patience et leur soutien tout au long de ces trois années.

Merci à Joel Fine et Barbara Schapira d'avoir accepté de rapporter ce mémoire. Je leur suis reconnaissant pour leur relecture méticuleuse qui a contribué à l'amélioration de ce texte et pour leur présence à la soutenance. Merci également à Marc Bourdon et Gille Courtois d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Merci à Jérôme et Patrick pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, pour leur écoute et leurs idées. Merci aussi à Thierry pour m'avoir donné l'opportunité d'exposer mes travaux au Teich. Merci également à Guillemette, Nicolas et Benjamin. J'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner à vos côtés. Plus généralement, merci à tout le personnel du CMI.

Je ne serais sans doute pas là aujourd'hui sans Mme Merceron qui m'a donné l'envie de faire des mathématiques. J'espère être un jour un aussi bon professeur que vous l'avez été pour mon frère Nicolas et pour moi.

Durant ces trois années, un certain nombre de doctorants (et post-doctorants) a foulé le sol du CMI, apportant un peu de gaieté dans ce labo qui, sans eux, aurait été parfois bien désert. Je pense tout d'abord aux membres du groupe de travail des doctorants en théorie des groupes, qui furent les premiers à m'accueillir lors de mon arrivée à Marseille et auprès desquels j'ai énormément appris : merci à Anthony, source inépuisable de connaissances, et merci à Antoine qui m'a autant apporté sur le plan mathématique qu'humain lors de nos conversations sur les téléphones ou le féminisme. Viennent ensuite les membres, passés ou présents, du bureau 315. Damien, ta motivation, ta gentillesse et ton amitié ont été d'un grand soutien dans les moments difficiles. Lydia, dont la bonne humeur et la gentillesse font de ce bureau un endroit si chaleureux. J'espère te voir très bientôt soutenir à ton tour, accroche-toi ! Merci aussi à Nissa pour m'avoir fait découvrir la pâtisserie libanaise et à Mingmin qui m'a fait pratiquer l'anglais. Je n'oublie pas les soirées au Nain Jaune à jouer à Mascarade pour se changer les idées : merci à Damien, Fanny, Lydia, Antoine, Juliana, Romain et Rym pour ces moments. Aujourd'hui, je peux le dire, c'est un peu moi le Roi ! Je remercie également Irène, Aurélien, Pierre, Quentin, Clément, Antoine E, Yannis et Adrien. Je n'oublie pas non plus tous les rennais avec qui j'ai gardé contact de près ou de loin : le couple de la tour des maths, Camille et Florian, mais aussi Laura, Fred et Simon. Enfin, merci à Gabriel que j'ai eu plaisir à retrouver dans presque toutes les conférences auxquelles j'ai assisté.

Merci Florian et Laura pour votre expertise sur les règles d'accord de la langue française. Sans vous rien n'aurait été possible, vous êtes le ciment de ma vie, le nez de mon sphinx.

Un grand merci à Florian, mon meilleur ami, pour tous les trajets que tu as faits jusqu'à Marseille pour venir me remonter le moral, pour toutes tes invitations à Rennes aussi. Merci pour ta complicité, ta cuisine, les soirées à regarder des épisodes de Monsieur Lent, merci pour tous ces bons souvenirs passés et pour tous ceux à venir.

Merci Mathilde de m'avoir pris sous ton aile lorsque j'étais un peu perdu en L2 et d'avoir fait le déplacement pour ma soutenance et mes 27 ans (ou peut-être est-ce 26 ou 28, je ne sais plus).

Papa, Maman, merci pour votre soutien inconditionnel, pour l'éducation que vous m'avez donnée. Sans tout le temps que vous avez passé derrière moi pour me donner le goût du travail, je n'aurais sans doute pas été jusque là. Merci aussi Vivien pour tes conseils et pour avoir été un si bon modèle pour moi. Cette thèse vous est dédiée à vous et à Nicolas que je n'oublie pas et dont l'absence aujourd'hui est la seule ombre au tableau. J'espère que le chapitre 0 vous donnera un bref aperçu de tout le charabia qui constitue ce texte.

Pour finir, je remercie Sophie. Merci pour la joie que tu m'apportes au quotidien depuis deux ans maintenant, merci d'être entrée dans ma vie avec tes deux machines à ronrons. Merci pour ton amour.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Remerciements | iii |
| Table des matières | iii |
| Introduction | 1 |
| 0 Introduction aux objets de cette thèse | 7 |
| 0.1 Une brève histoire de la géométrie, d'Euclide à aujourd'hui | 7 |
| 0.2 Qu'est-ce qu'un groupe? | 10 |
| 0.3 Groupes et géométrie | 12 |
| 1 Espaces CAT(-1) | 13 |
| 1.1 Espaces CAT(κ) | 13 |
| 1.2 Bord visuel des espaces CAT(-1) | 15 |
| 1.3 Flot géodésique | 19 |
| 2 Rigidité au bord des variétés de courbure strictement négative | 23 |
| 2.1 Introduction | 23 |
| 2.2 Bord épointé | 23 |
| 2.3 Espaces tangents faibles des bords épointés | 29 |
| 2.4 Courbes rectifiables au bord | 31 |
| 2.5 Annexe : Métriques de Bourdon pointées vs métriques de Hamenstädt | 36 |
| 3 Flot singulier et dimension de Hausdorff au bord de certaines variétés de Gromov-Thurston | 41 |
| 3.1 Introduction | 41 |
| 3.2 Variétés de Gromov-Thurston | 43 |
| 3.2.1 Construction des variétés | 43 |
| 3.2.2 Métriques riemanniennes à courbure strictement négative | 44 |
| 3.3 Variétés de Gromov-Thurston en tant qu'espaces singuliers | 46 |
| 3.3.1 Métrique CAT(-1) singulière | 47 |
| 3.3.2 Flot géodésique singulier | 48 |
| 3.3.3 Entropie volumique | 61 |
| 3.4 Annexe : preuve du lemme 3.3.36 | 67 |
| 4 Groupes et espaces partiellement CAT(-1) | 69 |
| 4.1 Introduction | 69 |

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2 | Groupes acylindriquement hyperboliques | 71 |
| 4.3 | Espaces CAT(0) partiellement CAT(-1) | 72 |
| 4.3.1 | Construction de la géodésique | 73 |
| 4.3.2 | Preuve de la proposition 4.1.2 | 75 |
| 4.4 | Variétés sans point focal partiellement CAT(-1) | 81 |
| 4.4.1 | Variétés riemanniennes sans point focal | 81 |
| 4.4.2 | Preuve du théorème 4.4.1 | 82 |
| 4.5 | Complexes polyédraux partiellement CAT(-1) | 84 |
| 4.5.1 | Cas des complexes cubiques CAT(0) | 85 |
| 4.5.2 | Cas général : état de l'art et perspectives | 87 |
| 4.6 | Exemples et contre-exemples | 89 |
| 4.6.1 | Sur la nécessité de l'hypothèse de complétude géodésique | 90 |
| 4.6.2 | Une géodésique non contractante passant par une infinité de points CAT(-1) | 90 |
| 4.6.3 | Un groupe partiellement CAT(-1) qui n'est pas relativement hyperbolique | 91 |

| | |
|----------------------|-----------|
| Bibliographie | 94 |
|----------------------|-----------|

INTRODUCTION

La philosophie de la théorie géométrique des groupes est d'étudier un groupe en le réalisant comme un groupe d'isométries d'un espace possédant une géométrie sympathique. On peut alors chercher à extraire des propriétés algébriques du groupe en exploitant d'une part la topologie et la géométrie de l'espace sur lequel il agit et, d'autre part, les propriétés dynamiques de l'action elle-même. Comme on le voit, il y a deux facteurs sur lesquels jouer : la géométrie de l'espace et la nature de l'action.

Lorsque l'action est suffisamment bonne, à savoir lorsqu'elle est *géométrique* — c'est-à-dire proprement discontinue et cocompacte — on peut déjà obtenir des informations non triviales sur le groupe sans aucune hypothèse (ou presque) sur la géométrie de l'espace. Par exemple :

Lemme de Milnor-Švarc. *Un groupe G agissant géométriquement sur un espace métrique (X, d) géodésique et propre est de type fini.*

En fait, le Lemme de Milnor-Švarc dit un peu plus. On peut faire de tout groupe de type fini un espace métrique en le munissant d'une *métrique des mots* d_S associée à un système fini de générateurs S : la longueur d'un élément g du groupe est alors le nombre minimal d'éléments de S nécessaires pour exprimer g . Le lemme de Milnor-Švarc affirme alors que les espaces métriques (G, d_S) et (X, d) sont *quasi-isométriques* :

Définition 0.0.1. Soient X, Y deux espaces métriques et $A \geq 1, B \geq 0$ des constantes. Une application $f : X \rightarrow Y$ est

1. un *plongement* (A, B) -*quasi-isométrique* si pour tous $x, x' \in X$ on a

$$\frac{1}{A}d_X(x, x') - B \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Ad_X(x, x') + C.$$

2. une *quasi-isométrie* si, de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq C$.

Lorsque $X \subset \mathbb{R}$, on parle de *quasi-géodésique*.

Une quasi-isométrie est donc une application bilipschitzienne à grande échelle et les propriétés géométriques à grande échelle de X sont, en fait, intrinsèques au groupe.

Maintenant, en ajoutant des contraintes sur la géométrie de l'espace sur lequel le groupe agit, on peut obtenir des informations plus fines sur notre groupe. Les géométries qui nous intéresseront sont des géométries de courbure négative. Si on se fie à l'intuition donnée par la géométrie riemannienne, la courbure rend compte de la finesse des triangles : en courbure négative les triangles sont plus fins que les triangles euclidiens tandis qu'ils sont plus épais en courbure positive.



FIGURE 0.1 – De gauche à droite, un triangle en courbure nulle, négative et positive.

Cette idée a donné naissance à la notion d'espace métrique à courbure majorée (voir le chapitre 1) et à la notion d'hyperbolicité au sens de Gromov :

Définition 0.0.2. Un espace métrique géodésique X (voir la définition 1.1.1) est *hyperbolique au sens de Gromov* (ou *δ -hyperbolique*) s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que tout triangle est δ -fin, i.e. chaque côté d'un triangle est inclus dans le δ -voisinage des deux autres côtés.

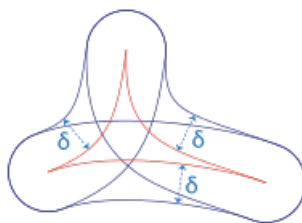


FIGURE 0.2 – Triangle δ -fin.

Bien que ces conditions sur les triangles puissent sembler faibles, ces géométries se révèlent extrêmement riches, et faire agir un groupe sur de tels espaces permet d'extraire des informations intéressantes sur les propriétés algébriques de ce groupe, comme l'illustre le travail fondateur de Gromov sur les groupes hyperboliques [37].

Convention. Dans tout ce mémoire nous utiliserons la convention française concernant la terminologie employée pour désigner les inégalités strictes et larges. Par exemple, un nombre x sera dit *strictement négatif* si $x < 0$ et *négatif* si $x \leq 0$.

Organisation du mémoire et présentation des résultats

Dans cette thèse nous étudions principalement des espaces métriques de courbure négative admettant des concentrations de courbure strictement négative à des endroits localisés et aux groupes agissant géométriquement sur ces espaces. Notamment, nous nous intéresserons aux conséquences de ces phénomènes de concentration de la courbure sur la géométrie du groupe.

Le chapitre 0 ne fait pas, à proprement parler, partie de cette thèse : il s'agit d'un texte introductif à l'intention des non-mathématiciens. Le reste du mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Espaces CAT(-1)

Dans ce chapitre, on introduit les pré-requis de géométrie en courbure négative qui seront essentiels dans la suite du texte.

Chapitre 2 : Rigidité au bord des variétés de courbure strictement négative

L'objectif principal de ce court chapitre est de donner une nouvelle démonstration d'un théorème de Connell (voir le théorème 0.0.3 ci-dessous) qui motivera l'étude faite au chapitre suivant.

Théorème 0.0.3 (théorème 2.4.11 ou théorème 4.3 de [22] pour la mesure de Patterson-Sullivan). *Soit X une variété simplement connexe cocompacte de courbure majorée par -1 . Si ∂X possède une famille de courbes rectifiables de Q -module positif, $Q \geq 1$, pour la mesure de Patterson-Sullivan alors X est une variété symétrique de rang 1.*

Notre approche se base sur l'étude de la structure infinitésimale du bord. On montre :

Proposition 0.0.4 (proposition 2.3.3). *Soient X un espace $CAT(-1)$ possédant un quotient compact par un groupe d'isométries et $(\partial X, d_\omega)$ son bord muni d'une métrique visuelle de Bourdon. Alors tout espace tangent faible de $(\partial X, d_\omega)$ est isométrique à un espace de la forme $(\partial X \setminus \{\xi\}, d_{\xi, \omega})$ où $d_{\xi, \omega}$ est une métrique de Bourdon pointée.*

Ce résultat, dans la lignée de [10], était déjà connu des spécialistes (voir [11]). On se propose tout de même d'en donner une preuve complète et détaillée.

La preuve du théorème 0.0.3 suit alors le schéma suivant : on utilise les courbes rectifiables pour obtenir des géodésiques bi-infinies dans les espaces tangents ; la description ci-dessus des espaces tangents implique alors que ces géodésiques sont des cercles, *i.e.* des plongements Möbius du bord de \mathbb{H}^2 dans le bord de notre espace $CAT(-1)$. On peut alors reconstruire des plans hyperboliques isométriquement plongés dans l'espace. La conclusion découle ensuite du théorème de rigidité du rang de Hamenstädt [43] (voir aussi le théorème 2.4.10).

L'intérêt de notre approche est qu'elle se base le plus possible sur des outils purement métriques. Ainsi tous nos arguments, à l'exception de l'argument final faisant appel à [43], sont valables dans les espaces $CAT(-1)$.

Chapitre 3 : Flot singulier et dimension de Hausdorff au bord de certaines variétés de Gromov-Thurston

Dans ce chapitre, nous étudions une famille d'exemples due à Gromov et Thurston [39]. Il s'agit d'espaces métriques obtenus par revêtements ramifiés de variétés hyperboliques compactes. Heuristiquement, on peut se convaincre que les revêtements ramifiés accroissent la courbure (voir l'exemple ci-dessous) : en tirant en arrière la métrique hyperbolique, on obtient des variétés de courbure strictement négative possédant des singularités où la courbure est plus forte.

Exemple 0.0.5. Considérons une surface hyperbolique Σ_g de genre $g \geq 2$ et $c : [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$ une géodésique fermée simple séparante. En découpant Σ_g le long de $c([0, \frac{1}{2}])$ et en recollant cycliquement k copies de l'espace ainsi obtenu, on obtient une surface Σ_{kg} de genre kg et un revêtement $\Sigma_{kg} \rightarrow \Sigma_g$ ramifié au dessus de $c(0)$ et $c(\frac{1}{2})$. Pour la métrique tirée en arrière, le volume de Σ_{kg} est égal à k fois le volume de Σ_g . Si on se laisse guider par la formule de Gauss-Bonnet, on doit adjoindre à la courbure une masse de Dirac en chaque point de ramification, pondérée par un coefficient $2\pi(k-1)$.

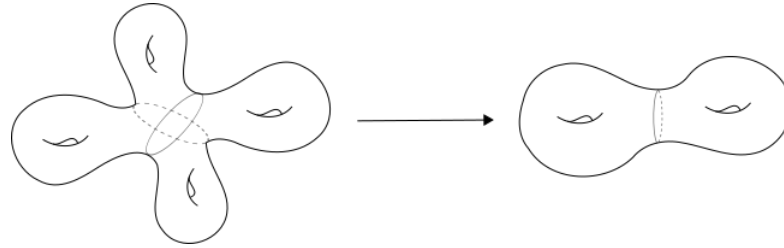


FIGURE 0.3 – Revêtement de degré 2 d’une surface de genre 2, ramifié en 2 points.

Il s’avère qu’en dimension supérieure à quatre, cette famille contient des variétés portant des métriques de courbure arbitrairement pincée proche de -1 mais qui ne sont pas hyperboliques (ni localement symétriques). Il est alors naturel de se demander si les variétés de Gromov-Thurston sont distinguables des variétés hyperboliques par des invariants numériques, par exemple, des invariants de quasi-isométries. Plus précisément, les questions suivantes, auxquelles nous ne savons pas répondre, ont motivé le travail exposé dans ce chapitre (voir le chapitre 3 pour les définitions) :

Question 0.0.6. La dimension conforme du bord visuel des variétés de Gromov-Thurston est-elle atteinte ? Est-elle strictement plus grande que la dimension conforme du bord de l’espace hyperbolique ?

Notons que d’après le théorème 0.0.3, la dimension conforme ne peut pas être atteinte par une métrique lisse de courbure strictement négative. Cette remarque nous a conduit à étudier la métrique singulière obtenue en relevant la métrique hyperbolique. Plus précisément, nous montrons que la dimension de Hausdorff du bord visuel pour cette métrique croît comme le logarithme du degré de ramification :

Théorème 0.0.7 (corollaire 3.1.5). *Soit V^{lm} , $l, m > 1$, une variété de Gromov-Thurston obtenue comme revêtement ramifié cyclique de degré lm d’une variété hyperbolique compacte V de dimension $n \geq 2$. Alors la dimension de Hausdorff δ_{lm} du bord visuel de son revêtement universel pour toute métrique de Bourdon associée à la métrique singulière vérifie*

$$\delta_{lm} \geq \delta_l + \lambda_l \ln(m),$$

où $\lambda_l > 0$ est une constante ne dépendant que de la géométrie de V^l .

En courbure strictement négative, la dimension de Hausdorff du bord possède différentes interprétations : il s’agit également de l’exposant critique de l’action de $\pi_1(V^k)$ et de l’entropie topologique du flot géodésique sur V^k . L’étude de δ_k passe donc naturellement par l’étude du flot géodésique sur V^k pour la métrique singulière et la constante λ_k qui apparaît dans le théorème ci-dessus est de nature dynamique :

Proposition 0.0.8 (voir la proposition 3.3.22). *Presque tout géodésique de V^k passe par le lieu de ramification avec une fréquence $\lambda_k > 0$.*

Chapitre 4 : Groupes et espaces partiellement CAT(-1)

Dans le chapitre 4, nous étudions des espaces *partiellement CAT(-1)* — i.e. des espaces dont la géométrie globale est, *a priori*, une géométrie de courbure négative mais possédant tout de même un voisinage où la courbure est strictement négative — et les groupes agissant dessus. Contrairement aux exemples précédents, dans ces espaces la courbure strictement négative est concentrée au voisinage d’un point et on autorise potentiellement de la courbure nulle voire positive. Malgré cela, la présence de courbure strictement négative a des conséquences fortes sur

la géométrie globale. En particulier, on montre qu'un groupe agissant géométriquement sur un espace partiellement CAT(-1) est hyperbolique dans un sens faible :

Théorème 0.0.9 (théorème 4.1.1). *Soit G un groupe agissant géométriquement sur un espace métrique X possédant un voisinage CAT(-1). Supposons qu'on soit dans l'un des deux cas suivants*

1. *X est un espace CAT(0) propre, géodésiquement complet,*
2. *X est une variété riemannienne simplement connexe sans point focal et G agit librement.*

Alors G est virtuellement cyclique ou acylindriquement hyperbolique.

La stratégie pour démontrer ce résultat est de construire une géodésique qui passe régulièrement par le voisinage CAT(-1) puis de montrer qu'une telle géodésique est contractante. La théorie générale permet alors de conclure à l'hyperbolicité acylindrique du groupe (on renvoie au chapitre 3 et aux références qui y sont mentionnées pour plus de détails). Pour cela, on démontre les critères suivants :

Proposition 0.0.10 (proposition 4.1.2). *Soient X un espace CAT(0) et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ une géodésique bi-infinie passant par une infinité de voisinages CAT(-1) de sorte que la distance entre deux tels voisinages soit uniformément majorée et minorée par des constantes strictement positives, et que le rayon des voisinages CAT(-1) soit uniformément minoré par une constante strictement positive. Alors γ est une géodésique contractante.*

Proposition 0.0.11 (proposition 4.4.11). *Soient X une variété riemannienne sans point focal simplement connexe, cocompacte et l une géodésique dans X passant par un point CAT(-1). Si l est l'axe d'une isométrie g alors l est contractante.*

L'hyperbolicité acylindrique est une propriété plus faible que l'hyperbolicité relative, elle-même plus faible que l'hyperbolicité au sens de Gromov. Il s'avère cependant qu'on ne peut pas espérer conclure à l'une de ces formes d'hyperbolicité plus fortes sous les seules hypothèses du théorème 0.0.9. Dans ce sens notre résultat est optimal.

Proposition 0.0.12. *Le groupe G défini par la présentation*

$$\left\langle \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \mid \begin{array}{l} [a_1, a_2][a_3, a_4] = [b_1, b_2] = [b_2, b_3] = [b_3, b_4] = 1 \\ [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = [a_4, b_4] = 1 \end{array} \right\rangle$$

satisfait les hypothèses du théorème 0.0.9 et n'est pas relativement hyperbolique.

La philosophie du théorème 0.0.9 est qu'un groupe de courbure négative devrait être acylindriquement hyperbolique (ou virtuellement cyclique) dès lors qu'il présente un minimum de courbure strictement négative, à condition d'exprimer la notion de courbure strictement négative de manière adaptée. Par exemple, dans le cas des complexes cubiques CAT(0), comme chaque cube est isométrique à un cube euclidien, aucun point ne possède de voisinage CAT(-1). En revanche, si le link d'un sommet ne contient pas de cycle de longueur quatre ce sommet est, d'une certaine façon, de courbure strictement négative : moralement, l'angle autour de ce sommet est strictement supérieur à 2π . On montre alors une version combinatoire du théorème 0.0.9 :

Proposition 0.0.13 (voir le corollaire 4.5.8). *Un groupe agissant géométriquement et essentiellement sur un complexe cubique CAT(0) contenant un sommet dont le link ne possède pas de cycle de longueur quatre est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.*

La majorité des résultats de ce chapitre est issue d'un travail en collaboration avec Anthony Genevois [32].

INTRODUCTION AUX OBJETS DE CETTE THÈSE

Ce chapitre est destiné aux non-mathématiciens.

0.1 Une brève histoire de la géométrie, d'Euclide à aujourd'hui

Toute conclusion suppose des prémisses; ces prémisses elles-mêmes ou bien sont évidentes par elles-mêmes et n'ont pas besoin de démonstration, ou bien ne peuvent être établies qu'en s'appuyant sur d'autres propositions, et comme on ne saurait remonter ainsi à l'infini, toute science déductive, et en particulier la géométrie, doit reposer sur un certain nombre d'axiomes indémontrables.

Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*

Vers 500 avant notre ère, le mathématicien grec Euclide entreprend la rédaction de ses fameux *Éléments*, grand traité de mathématiques en treize livres dont le but est de collecter et de formaliser toutes les connaissances mathématiques de son époque. Le premier livre pose les bases de la géométrie plane et en définit les axiomes :

1. un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts ;
2. un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite ;
3. étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre ;
4. tous les angles droits sont congruents, c'est-à-dire superposables ;
5. si deux lignes droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté (voir la figure 0.1).

Ce dernier axiome est un peu plus compliqué à appréhender. Il est illustré sur la figure 0.1 : les deux droites noires sont coupées par la droite rouge et les angles α et β situés à gauche de la droite rouge sont tous les deux plus petits que des angles droits. Par conséquent, les droites noires se coupent et leur point d'intersection est à gauche de la droite rouge.

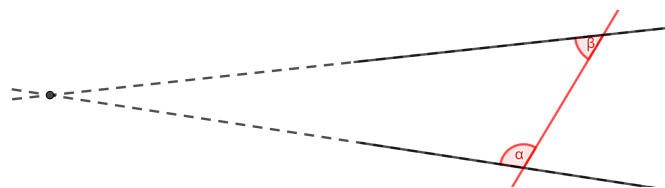


FIGURE 0.1 – La somme des angles rouges est inférieure à deux angles droits, les droites noires se croisent donc à gauche de la sécante rouge.

Ce dernier axiome entraîne en particulier le *postulat des parallèles* qui affirme que par un point extérieur à une droite passe une unique droite parallèle à la première. Ce cinquième axiome a longtemps laissé les mathématiciens perplexes notamment par sa formulation plus compliquée que les autres, qui se rapproche plus de l'énoncé d'un théorème que d'un axiome. Pour cette raison, de nombreux efforts ont été déployés pour démontrer le cinquième postulat à l'aide des quatre premiers. Si ce dernier axiome découlait des précédents on aboutirait à des conclusions contradictoires en le niant, c'est-à-dire supposant vrai son exact contraire. Partant de ce constat, Giovanni Saccheri¹ consacra sa vie à essayer d'aboutir à de telles contradictions ... en vain. Il obtint cependant une série de résultats cohérents entre eux et avec les quatre premiers axiomes mais plutôt que d'y voir le signe de l'existence de géométries non-euclidiennes, il rejeta ses découvertes qui "répugnaient à la nature de la ligne droite".

Ce n'est qu'avec les travaux de Gauss² en 1813 puis de Lobatchevski³ en 1829 et Riemann⁴ en 1827 que l'existence de géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire de géométries où le cinquième postulat n'est pas vérifié, fut définitivement acceptée.

La géométrie de Riemann ou géométrie sphérique. La géométrie sphérique n'est pas si difficile à concevoir puisque nous vivons sur une sphère.

À quoi peut bien ressembler une droite dans cette géométrie ?

Avant de répondre à cette question, il convient de préciser ce que l'on entend par *droite*. Concrètement, en géométrie euclidienne, le segment de droite entre deux points est le chemin le plus court reliant ces deux points. Par analogie, en géométrie non-euclidienne on appelle droite les lignes de plus court chemins. Pour se faire une idée de ce à quoi ressemblent les droites sphériques, il ne tient qu'à vous de faire l'expérience (ou de vous convaincre à l'aide de la figure 0.2) : si vous marchez tout droit sur la surface de la Terre vous reviendrez au bout d'un certain temps exactement à votre point de départ. Vous aurez alors parcouru un *grand cercle* c'est-à-dire un cercle dont le centre est le centre de la Terre. Les droites en géométries sphériques sont donc les grands cercles : par exemple les méridiens en sont mais les parallèles n'en sont pas.

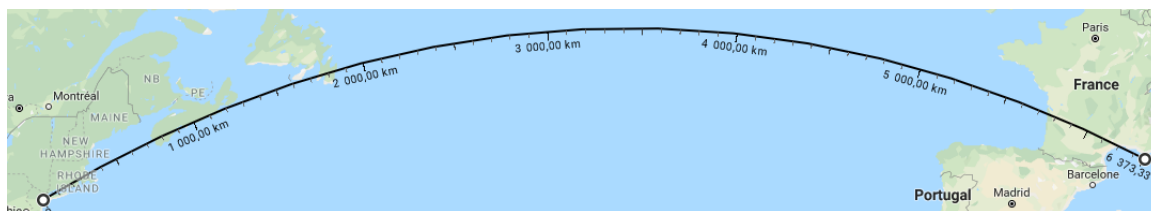


FIGURE 0.2 – Le plus court chemin de Marseille à New-York est une portion de grand cercle.

1. Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) : mathématicien italien.
2. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : mathématicien, astronome et physicien allemand.
3. Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) : mathématicien russe.
4. Bernhard Riemann (1826-1866) : mathématicien allemand.

Dans cette géométrie le postulat des parallèles n'est pas vérifié : puisque deux grands cercles s'intersectent toujours il n'y a pas de droite parallèles !

La géométrie de Lobatchevski ou géométrie hyperbolique. Imaginons une Terre plate, en forme de disque, soumise à des lois physiques simplifiées : la température n'y est pas uniforme — elle est maximale au centre du disque et diminue à mesure qu'on s'en éloigne jusqu'à atteindre le zéro absolu au niveau du cercle délimitant ce monde — et tous les objets se comportent comme des gaz parfaits à pression constante — le volume d'un corps est proportionnel à sa température : plus on s'éloigne du centre plus il fait froid et plus les corps sont petits.

De notre point de vue, ce monde est limité (il est contenu dans un disque) et ses habitants rapetissent en s'approchant du bord du disque du fait de la baisse de température. Cependant, pour ses habitants ce monde est bel et bien infini : en se rapprochant du bord, ils refroidissent, deviennent de plus en plus petits et donc leurs pas sont de plus en plus petits. Ainsi, ils n'atteindront jamais le bord ! De même, ils n'ont pas conscience qu'ils rapetissent puisqu'ils se mesurent avec un mètre qui est soumis aux mêmes lois et rapetisse donc en même temps qu'eux !

À quoi peut bien ressembler une droite dans ce monde ?

Les segments de droites sont les chemins les plus courts entre deux points. Un habitant du disque souhaitant aller d'un point *A* à un point *B* aura tendance à prendre un chemin passant près du centre car ses pas y sont plus grands puisque la température est plus élevée.

En fait, en choisissant de manière convenable la vitesse à laquelle la température décroît en s'éloignant du centre, on peut montrer que dans cette géométrie le plus court chemin entre deux points est un arc de cercle perpendiculaire au cercle qui borde ce monde ou un diamètre de ce cercle. Les droites de cette géométrie sont donc les arcs de cercles perpendiculaires au bord du disque ainsi que ses diamètres. Dans cette géométrie le cinquième postulat d'Euclide n'est pas vérifié : étant donnée une droite et un point hors de cette droite il existe une infinité de droites parallèles à cette droite (c'est-à-dire de droites qui ne l'intersectent pas) et passant par ce point (voir la figure 0.3).

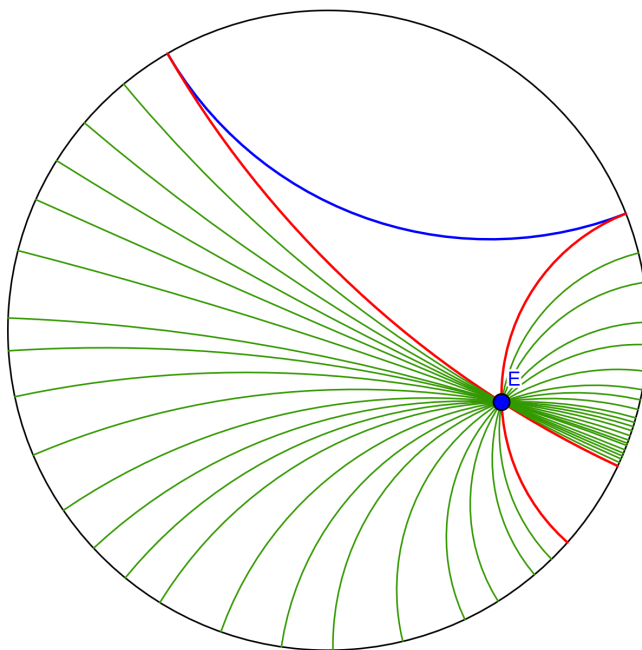


FIGURE 0.3 – Toutes les droites vertes passent par le point bleu et sont parallèles à la droite bleue.

Une différence notable entre la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique se trouve dans la forme des triangles. Par exemple, en géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle est égale à 180° alors qu'elle est strictement plus grande dans un triangle sphérique et strictement plus petite dans un triangle hyperbolique. En conséquence, les triangles sphériques sont plus épais et les triangles hyperboliques plus fins que leurs cousins euclidiens (voir la figure 0.4).



FIGURE 0.4 – De gauche à droite, un triangle euclidien, hyperbolique et sphérique.

Bien que cela puisse paraître surprenant, la plupart des propriétés intéressantes de la géométrie hyperbolique est due à la finesse des triangles. Cette observation a mené Gromov⁵ à étudier des espaces géométriques plus généraux possédant cette propriété de finesse des triangles. Ces espaces, que l'on appelle maintenant des espaces *Gromov hyperboliques*, constituent l'un des objets centraux de cette thèse.

Une géométrie ne peut être plus vraie qu'une autre,
elle peut simplement être plus commode.

Henri Poincaré

0.2 Qu'est-ce qu'un groupe ?

Dans la théorie moderne des mathématiques, les objets fondamentaux sont les *ensembles*. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets qui constituent les *éléments* de l'ensemble. Par exemple, les nombres entiers forment un ensemble, les rotations aussi etc. . . Lorsque l'on a un ensemble en main, on a bien souvent envie de combiner ses éléments entre eux : par exemple, additionner deux entiers ou composer deux rotations. C'est ce que l'on appelle une *loi de composition interne* ; il s'agit d'un procédé qui "mange" deux éléments de l'ensemble et en "recrache" un troisième, à l'instar de l'addition de nombres. Usuellement, la loi de composition est notée par le symbole $*$ et la combinaison d'un élément a et d'un élément b est notée $a * b$. Un *groupe* est la donnée d'un ensemble et d'une loi de composition interne avec quelques propriétés calquées sur celle de l'addition des nombres relatifs :

- l'associativité : $a * (b * c) = (a * b) * c$;
- l'existence d'un neutre, noté e , caractérisé par la propriété : $a * e = e * a = a$ pour tout élément a ;
- l'existence d'inverses : l'inverse d'un élément a , noté a^{-1} , est un élément vérifiant $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Exemple 0.2.1. 1. L'ensemble des nombres entiers relatifs, que l'on note \mathbb{Z} , est un groupe pour l'addition. En effet,

- quand on additionne trois nombres, peu importe dans quel ordre, on obtient toujours la même chose : par exemple $(2+3)+5=5+5=10$ et $2+(3+5)=2+8=10$. C'est l'associativité de l'addition.

5. Mikhaïl Leonidovitch Gromov (1943-...) : mathématicien russe.

- zéro est neutre : $0 + n = n$ et $n + 0 = n$.
- l'inverse d'un entier n est l'entier $-n$ car $n + (-n) = n - n = 0$. Par exemple, l'inverse de 3 est -3 .

Remarquons au passage que l'addition a une propriété supplémentaire : elle est commutative. Cela signifie que le résultat d'une addition ne dépend pas de l'ordre des termes : $n + m = m + n$. Cela n'est pas toujours le cas dans un groupe !

2. L'ensemble des nombres rationnels (c'est-à-dire qui s'écrivent comme une fraction de deux entiers relatifs) est aussi un groupe pour l'addition pour exactement les mêmes raisons que \mathbb{Z} .
3. En revanche, l'ensemble des nombres entiers **positifs**, noté \mathbb{N} , muni de l'addition n'est pas un groupe ! En effet, bien que l'addition soit associative et que zéro soit toujours neutre, tous les éléments n'ont pas d'inverse. Par exemple, 2 n'a pas d'inverse puisqu'il n'existe pas de nombre entier **positif** n vérifiant $2 + n = 0$.
4. L'ensemble des rotations du plan autour de l'origine est un groupe pour la loi décrite comme suit : la composition de la rotation d'angle α et de la rotation d'angle β est la rotation d'angle $\alpha + \beta$ (voir la figure 0.5). Cette loi est bien associative et possède la rotation d'angle 0 pour neutre. Par ailleurs, l'inverse de la rotation d'angle α est la rotation d'angle $-\alpha$ (par convention la valeur d'un angle est positive si l'angle "tourne" dans le sens anti-horaire et négative si l'angle "tourne" dans le sens horaire).

Cette définition de groupe est assez abstraite et il peut être plus commode de penser à un groupe comme à un ensemble de symétries d'un objet mathématique, c'est-à-dire de transformations laissant invariant cet objet. Par exemple les rotations sont les symétries du cercle.

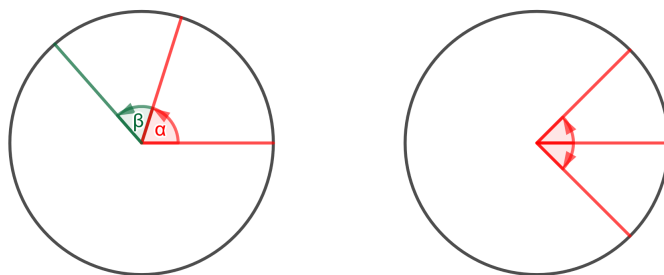


FIGURE 0.5 – La composition des rotations d'angles α et β est la rotation d'angle $\alpha + \beta$. Le neutre est la rotation d'angle 0, l'inverse d'une rotation d'angle α dans le sens horaire est la rotation d'angle α dans le sens anti-horaire (et vice-versa).

La notion de groupe a fait son apparition avec l'étude des solutions des équations polynomiales. Alors que l'on sait exprimer les solutions d'une équation de degré 2⁶ en fonction de ses coefficients depuis les travaux de Al-Khwarizmi⁷ au IX^e siècle, ce n'est que sept siècles plus tard que des formules analogues firent leur apparition pour les équations de degré 3 et 4⁸ grâce aux travaux de Tartaglia, Cardan et Ferrari⁹. Cependant, de nombreux mathématiciens se cassèrent les dents sur la question de l'existence d'une formule analogue, exprimant les solutions d'une équation de degré 5 ou plus en fonction de ses coefficients, jusqu'à sa résolution par Évariste Galois¹⁰. L'idée révolutionnaire de Galois fut d'associer à chaque équation un groupe décrivant les symétries de ses solutions puis de relier l'existence d'une formule pour les solutions à une

6. De la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

7. Al-Khwarizmi (vers 780-vers 850) : mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse.

8. De la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ et $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

9. Niccolò Fontana dit Tartaglia (1449-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576), Lodovico Ferrari (1522-1565) : mathématiciens italiens.

10. Évariste Galois (1811-1832) : mathématicien français.

propriété abstraite du groupe. Cela lui permit de démontrer qu'en degré 5 ou plus, de telles formules n'existent pas.

0.3 Groupes et géométrie

Comme on l'a vu, on peut penser à un groupe comme à un ensemble de symétries; les groupes et la géométrie sont donc intimement liés. En fait, depuis la publication du *programme d'Erlangen* par Klein en 1872¹¹ la théorie des groupes est au centre de la géométrie. Alors qu'avant une géométrie se définissait par un jeu d'axiomes (voir le premier paragraphe ci-dessus), Klein propose de voir une géométrie comme la donnée d'un ensemble et d'un groupe de transformations de cet ensemble (ce groupe définit les symétries de notre géométrie). La géométrie consiste alors en l'étude des "êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérés par les transformations du groupe".

- Exemple 0.3.1.**
1. Si on considère le plan muni du groupe des isométries euclidiennes (c'est-à-dire les transformations qui préservent les longueurs), on retrouve la géométrie d'Euclide. Les propriétés vues par cette géométrie sont les propriétés liées aux longueurs, aux angles, à l'alignement, au parallélisme car ce sont des propriétés préservées par les isométries.
 2. Si on considère le plan muni du groupe des transformations affines¹², on obtient la *géométrie affine*. Les propriétés vues par cette géométrie sont les propriétés de parallélisme et d'alignement car les transformations affines préservent ces propriétés. En revanche, cette géométrie ne voit pas la notion de longueur car les transformations affines ne conservent pas les longueurs.
 3. De même les géométries sphériques et hyperboliques peuvent être obtenues en munissant la sphère et le disque respectivement d'un groupe que nous n'explicitons pas.

Schématiquement, le point de vue de Klein est de dire que la géométrie peut se comprendre au travers de l'étude d'un groupe convenable. Le travail qui suit s'inscrit dans le cheminement inverse : on tente de comprendre un groupe en le réalisant comme le groupe de symétries d'un espace géométrique. On espère alors tirer des propriétés algébriques par des outils géométriques.

11. Félix Klein (1849-1925) : mathématicien allemand.

12. C'est-à-dire les transformations de la forme $f : (x, y) \mapsto (a_{1,1}x + a_{1,2}y + b_1, a_{2,1}x + a_{2,2}y + b_2)$ où $a_{1,1}, a_{1,2}, b_1, a_{2,1}, a_{2,2}, b_2$ sont des nombres réels.

ESPACES CAT(-1)

1.1 Espaces CAT(κ)

En géométrie riemannienne, la courbure sectionnelle permet de quantifier la manière dont des géodésiques issues d'un même point s'écartent l'une de l'autre : sur des petites distances, elles s'écartent plus ou moins rapidement qu'elles ne le font dans l'espace tangent selon que la courbure est négative ou positive. Cette interprétation métrique de la courbure a donné lieu à la notion d'espace métrique de courbure majorée, qui sera l'objet central de ce chapitre et des suivants. On se réfère à [15] pour plus de précisions sur le sujet.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, rappelons tout d'abord quelques définitions utiles.

Définition 1.1.1. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Une application $c : I \rightarrow X$ telle que $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ pour tous $t, t' \in I$ est appelée un *rayon géodésique* si $I = \mathbb{R}^+$, une *géodésique* (ou géodésique bi-infinie) si $I = \mathbb{R}$ et un *segment géodésique* si I est un segment.
2. Un segment géodésique $c : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ relie les points $x, y \in X$ si $c(0) = x$ et $c(d(x, y)) = y$.
3. Une *géodésique locale* est une application $c : I \rightarrow X$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que pour tout $t \in I$, il existe un voisinage I_t de t dans I tel que $d(c(s), c(s')) = |s - s'|$ pour tous $s, s' \in I_t$.

L'espace (X, d) est dit *géodésique* si deux points peuvent toujours être reliés par un segment géodésique. Si ce segment est unique, l'espace est dit *uniquement géodésique*.

Définition 1.1.2. Un espace métrique (X, d) est dit *propre* si les boules fermées sont compactes.

Un *triangle* dans un espace géodésique est la donnée de trois points $p, q, r \in X$ (les *sommets*) et de segments géodésiques $[p, q]$, $[q, r]$ et $[r, p]$. Un tel triangle sera noté $\Delta(p, q, r)$. Cette notation est ambiguë car en général un segment géodésique entre deux points n'est pas nécessairement unique. Cependant, les espaces qui nous intéresseront par la suite seront uniquement géodésiques, ce problème ne se posera donc pas.

Étant donnée une constante négative κ , on note (M_κ^2, d_κ) la variété riemannienne de dimension deux simplement connexe de courbure constante égale à κ , c'est-à-dire

$$M_\kappa^2 = \begin{cases} (\mathbb{H}^2, \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} d_{\mathbb{H}^2}) & \text{si } \kappa < 0 \\ \mathbb{E}^2 & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

Un *triangle de comparaison* dans M_κ^2 pour $\Delta(p, q, r)$ est un triangle $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ de M_κ^2 tel que $d_\kappa(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$, $d_\kappa(\bar{q}, \bar{r}) = d(q, r)$ et $d_\kappa(\bar{r}, \bar{p}) = d(r, p)$. Un tel triangle existe toujours et

est unique à isométrie près. Un point $\bar{x} \in [\bar{p}, \bar{q}]$ est appelé un *point de comparaison* pour $x \in [p, q]$ si $d(p, x) = d_\kappa(\bar{p}, \bar{x})$. De même, on définit les points de comparaison sur $[\bar{q}, \bar{r}]$ et $[\bar{p}, \bar{r}]$.

Définition 1.1.3. Soit (X, d) un espace métrique géodésique et soit $\kappa \leq 0$.

- Un triangle $\Delta(p, q, r)$ de X satisfait l'*inégalité CAT*(κ) si pour tous $x, y \in \Delta(p, q, r)$ et tous points de comparaison $\bar{x}, \bar{y} \in \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$,

$$d(x, y) \leq d_\kappa(\bar{x}, \bar{y}).$$

- X est un *espace CAT*(κ) si tous ses triangles satisfont l'*inégalité CAT*(κ).
- X est de *courbure au plus* κ (ou *majorée par* κ) s'il est localement CAT(κ), c'est-à-dire que tout point possède un voisinage CAT(κ) pour la métrique induite.

Par exemple, les variétés riemanniennes de courbure sectionnelle majorée par κ sont de courbure majorée par κ et sont CAT(κ) lorsqu'elles sont simplement connexes. Plus généralement, le revêtement universel d'un espace de courbure majorée par κ est CAT(κ).

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons uniquement à des espaces de courbure négative ($\kappa \leq 0$). Ces espaces partagent des propriétés communes avec les variétés de courbure négative. Par exemple, une conséquence immédiate de l'*inégalité CAT*(0) est que ces espaces sont uniquement géodésiques (et un segment varie continûment par rapport à ses extrémités). Par ailleurs, toute géodésique locale est une géodésique. Une autre conséquence importante de l'*inégalité CAT*(0) est la convexité de la distance :

Proposition 1.1.4 (voir le Chapitre II.2 de [15]). Si (X, d) est un espace CAT(0) alors la distance est convexe, i.e. pour toute paire de géodésiques $c, c' : [0, 1] \rightarrow X$ paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc, l'*inégalité* suivante est vérifiée pour tout $t \in [0, 1]$:

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1)).$$

Notation 1.1.5. Par la suite, il nous arrivera souvent de noter $|x - y|$ la distance $d(x, y)$ entre deux points de X . Cette notation sera réservée aux distances CAT(-1) sur X par opposition aux distances que nous allons définir sur le bord.

On peut de plus définir une notion d'angle :

Définition 1.1.6. Soit (X, d) un espace CAT(κ) avec $\kappa \leq 0$ et soient p, x, y des points distincts de X . Soient c_x, c_y les segments géodésiques reliant p à x et y respectivement. Alors, la limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \angle_p^{(0)}(c_x(t), c_y(t)),$$

existe, où $\angle_p^{(0)}(c_x(t), c_y(t))$ est l'angle en \bar{p} dans un triangle de comparaison pour $\Delta(p, c_x(t), c_y(t))$ dans M_κ^2 . Cette limite est appelée l'*angle d'Alexandrov* en p entre x et y et est notée $\angle_p(x, y)$.

Corollaire 1.1.7. Soient X un espace CAT(0) et C un convexe de X complet pour la métrique induite. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique point $\pi_C(x) \in C$ tel que $d(x, \pi_C(x)) = d(x, C)$. De plus, pour tout $c \in C, c \neq \pi_C(x)$ on a

$$\angle_{\pi_C(x)}(x, c) \geq \frac{\pi}{2},$$

et pour tout $z \in [x, \pi_C(x)]$, $\pi_C(x) = \pi_C(z)$.

On utilisera aussi une seconde notion d'angle :

Définition 1.1.8 (voir [13] et [8] paragraphe 3.2 pour des détails). Soit (X, d) un espace CAT(κ) avec $\kappa \leq 0$ et soient p, x, y des points distincts de X . On notera $\angle_p^\kappa(x, y)$ l'angle en \bar{p} dans un triangle de comparaison $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y}) \subset M_\kappa^2$.

L'angle d'Alexandrov $\angle_p(x, y)$ est toujours plus petit que l'angle $\angle_p^K(x, y)$ (voir la proposition 3.1 du chapitre II de [15]) et satisfait l'inégalité triangulaire.

Enfin, concluons cette partie par une remarque élémentaire mais non moins utile.

Remarque(s) 1.1.9. Puisque \mathbb{H}^2 est hyperbolique au sens de Gromov, la définition d'espace CAT(-1) implique que ces espaces sont Gromov-hyperboliques avec une constante d'hyperbolicité universelle qui peut être choisie égale à $\ln(1 + \sqrt{2})$.

1.2 Bord visuel des espaces CAT(-1)

Dans [25], Eberlein et O'Neill introduisent une compactification de certaines variétés riemanniennes de courbure négative en leur adjoignant un *bord à l'infini* (voir ci-dessous). Leur construction s'étend sans mal aux espaces CAT(0) complet et propre. Le but de cette section est d'introduire cette compactification et de passer en revue quelques-unes de ses propriétés, que nous utiliserons par la suite.

Définition 1.2.1. Deux rayons géodésiques r et r' de X sont dits *asymptotes* s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $d(r(t), r'(t)) \leq C$.

De manière équivalente, deux rayons sont asymptotes s'ils sont à distance de Hausdorff finie l'un de l'autre. Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons géodésiques de X que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Définition 1.2.2. Le *bord à l'infini* ∂X de X est l'espace topologique obtenu en quotientant l'espace des rayons géodésiques par la relation d'équivalence d'asymptoticité.

Les éléments de ∂X sont appelés les *points à l'infini* de X . On notera souvent $r(+\infty)$ pour désigner la classe d'équivalence d'un rayon géodésique r .

Si on fixe un point de base x_0 , ∂X s'identifie avec l'ensemble des rayons géodésiques d'origine x_0 (toujours muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts). En particulier, puisque X est propre, le théorème d'Ascoli entraîne que ∂X est compact. De plus, il existe une unique topologie sur $\bar{X} = X \cup \partial X$ qui induit les topologies initiales sur X et ∂X ; cette topologie est métrisable et fait de \bar{X} un espace compact. Pour cette topologie, l'application $\angle^K(\cdot, \cdot)$ définie en 1.1.8 s'étend continûment à $X \times \bar{X} \times \bar{X}$ (voir [13] et [8] paragraphe 3.2).

Remarque(s) 1.2.3. 1. Si X est une variété riemannienne simplement connexe de courbure négative, ∂X s'identifie aussi naturellement avec $T_{x_0}^1 X$.

2. On verra à la partie 4.4 qu'on peut définir un bord ∂X pour une famille un peu plus large de variétés riemanniennes, à savoir les variétés sans point focal.

On se restreint maintenant au cas où X est CAT(-1). Les fonctions de Busemann, que nous allons définir, jouent un rôle important dans l'étude du bord de X .

Notation 1.2.4. Soient f et g deux fonctions définies sur un espace Y à valeurs dans \mathbb{R} . On notera

- $f \lesssim g$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $f \leq Cg$,
- $f \asymp g$ si $f \lesssim g$ et $g \lesssim f$.

Définition 1.2.5. Soient $\xi \in \partial X$ et $\omega \in X$. La fonction de Busemann associée au rayon géodésique $h = [\omega, \xi]$, notée $\beta_\xi(\cdot, \omega)$ ou β_h , est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \beta_\xi(\cdot, \omega) : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} |x - h(t)| - t. \end{aligned}$$

Étant donné un point de base $\omega \in X$, on rappelle que le produit de Gromov relativement à ω entre deux points $x, y \in X$ est défini par

$$(x|y)_\omega = \frac{1}{2}(|x - \omega| + |y - \omega| - |x - y|).$$

Dans [13], Bourdon montre que ce produit de Gromov s'étend continûment à ∂X en posant, pour $\xi, \eta \in \partial X$,

$$(\xi|\eta)_\omega = \frac{1}{2}(\beta_\xi(\omega, z) + \beta_\eta(\omega, z)),$$

où $z \in (\xi, \eta)$. Cette quantité est indépendante du choix de $z \in (\xi, \eta)$ et prolonge le produit de Gromov usuel dans le sens où $(\xi|\eta)_\omega = \lim_{x, y \rightarrow \xi, \eta} (x|y)_\omega$ pour $x \in [\omega, \xi)$ et $y \in [\omega, \eta)$. De plus,

Proposition 1.2.6 ([13]). *Soit X un espace $CAT(-1)$. L'application $d_\omega := e^{-(\cdot|\cdot)_\omega}$ définie sur $\partial X \times \partial X$ est une distance sur ∂X qui induit la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Cette distance est visuelle, c'est-à-dire que pour tous $\xi, \eta \in \partial X$,*

$$d_\omega(\xi, \eta) \asymp e^{-d(\omega, (\xi, \eta))}.$$

De plus, pour tous $\omega, \omega' \in X$, d_ω et $d_{\omega'}$ sont conformes.

On rappelle que deux métriques d_1 et d_2 sur un même espace Y sont conformes si pour tout $y_0 \in Y$ le rapport

$$\frac{d_1(y_0, y)}{d_2(y_0, y)}$$

admet une limite finie quand y tend vers y_0 .

Les boules pour la distance d_ω ressemblent aux ombres $\mathcal{O}_\omega(y, R)$ de boules $B(y, R)$ vues depuis ω et définies par

$$\mathcal{O}_\omega(y, R) = \{\xi \in \partial X \mid [\omega, \xi) \cap B(y, R) \neq \emptyset\}.$$

Une telle ombre est dite centrée en $\xi \in \partial X$ si $y \in [\omega, \xi)$. Plus précisément,

Lemme 1.2.7 (lemme 1.6.3 de [13]). *Fixons $R_0 > 5 \ln(1 + \sqrt{2})$ et soit (X, d, ω) un espace métrique pointé $CAT(-1)$. Alors il existe une constante $C = C(R_0) > 1$ telle que pour toute ombre $\mathcal{O}_\omega(y, R_0)$ centrée en $\xi \in \partial X$ on a :*

$$B_{d_\omega}(\xi, C^{-1}e^{-d(\omega, y)}) \subset \mathcal{O}_\omega(y, R_0) \subset B_{d_\omega}(\xi, Ce^{-d(\omega, y)}).$$

Les distances d_ω , que nous appellerons *distances de Bourdon*, possèdent une interprétation sympathique en terme d'angle : pour ξ et η dans ∂X , $d_\omega(\xi, \eta) = \sin \frac{\angle_\omega^{-1}(\xi, \eta)}{2}$ où $\angle_\omega^{-1}(\xi, \eta)$ est l'angle défini en 1.1.8.

Définition 1.2.8. Soient X un espace $CAT(-1)$ complet et propre admettant une action géométrique d'un groupe discret Γ et $a > 0$. Une famille de mesures finies $(\mu_x)_{x \in X}$ sur ∂X est dite a -conforme si pour tous $x, y \in X$ et $g \in \Gamma$

- μ_y est absolument continue par rapport à μ_x et $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = e^{a\beta_\xi(x, y)}$,
- $g^*\mu_x = \mu_{g^{-1}x}$.

Définition 1.2.9. Une mesure μ sur un espace métrique (Z, d) est Q -Ahlfors régulière si pour tout $R \in]0, \text{diam}(Z)]$, $\mu(B_b(R)) \asymp R^Q$.

Proposition 1.2.10 ([13]). *Soit X un espace $CAT(-1)$ complet et propre admettant une action géométrique d'un groupe discret Γ . Alors :*

1. la δ_Γ -mesure de Hausdorff μ_ω associée à d_ω est δ_Γ -Ahlfors régulière, où

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \ln \text{Card}(\Gamma.x \cap B(x, R));$$

2. l'action diagonale de Γ sur $\partial X \times \partial X$ est ergodique par rapport à $\mu_\omega \otimes \mu_\omega$;

3. la famille de mesures $(\mu_\omega)_{\omega \in X}$ est δ_Γ -conforme.

On termine cette partie en établissant un raffinement de la propriété visuelle donnée dans la proposition 1.2.6. Cela nous sera utile pour obtenir l'estimation finale du théorème 3.1.3.

La propriété visuelle est généralement démontrée via des techniques issues de la théorie des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Ici, nous utilisons toute la force de l'inégalité CAT(-1) pour obtenir un résultat plus fin. Bien qu'ils soient probablement connus des spécialistes, les résultats suivants ne sont, à notre connaissance, pas présents dans la littérature.

Lemme 1.2.11. Dans \mathbb{H}^2 , soit d_y la métrique de Bourdon au bord par rapport au point de base $y \in \mathbb{H}^2$. Alors, pour tous $\xi, \xi' \in \partial \mathbb{H}^2$, on a

$$d_y(\xi, \xi') = (\text{ch } d(y, (\xi, \xi')))^{-1}.$$

Démonstration. Soient x la projection de y sur la géodésique (ξ, ξ') et r (respectivement r') le rayon géodésique de y à ξ (respectivement ξ'). Soit x_t le point d'intersection entre les segments $[r(t), r'(t)]$ et $[y, x]$. Les triangles $\Delta(y, r(t), x_t)$ et $\Delta(y, r'(t), x_t)$ étant rectangles en x_t , la loi des cosinus hyperboliques donne :

$$\text{ch}(t) = \text{ch}(d(y, x_t))\text{ch}(d(x_t, r(t))) \text{ et } \text{ch}(t) = \text{ch}(d(y, x_t))\text{ch}(d(x_t, r'(t))).$$

Donc

$$\begin{aligned} (\xi|\xi')_y &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (r(t)|r'(t))_y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (d(r(t), y) + d(r'(t), y) - d(r(t), r'(t))) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(2t - 2 \arg \text{ch} \frac{\text{ch}(t)}{\text{ch}(d(y, x_t))} \right) \\ &= \ln(\text{ch}(d(x, y))), \end{aligned}$$

car $d(x_t, y) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} d(x, y)$. Par conséquent,

$$d_y(\xi, \xi') = e^{-(\xi|\xi')_y} = (\text{ch } d(x, y))^{-1} = (\text{ch } d(y, (\xi, \xi')))^{-1}.$$

□

Plus généralement, l'inégalité suivante est vraie.

Lemme 1.2.12. Soit X un espace CAT(-1) propre et soit $y \in X$. Alors, pour tous $\xi, \xi' \in \partial X$, on a

$$\text{ch } d(y, (\xi, \xi')) \leq d_y(\xi, \xi')^{-1}.$$

Démonstration. Soit x la projection de y sur la géodésique (ξ, ξ') et soit r (respectivement r') le rayon géodésique de y à ξ (respectivement ξ'). Dans un triangle de comparaison $\Delta(\bar{r}'(t), \bar{r}(t), \bar{y})$ dans \mathbb{H}^2 pour le triangle $\Delta(r'(t), r(t), y)$, soit \bar{x}_t la projection de \bar{y} sur $[\bar{r}'(t), \bar{r}(t)]$. D'après l'inégalité CAT(-1), si $x_t \in [r'(t), r(t)]$ est le point correspondant à \bar{x}_t alors

$$d(y, x_t) \leq d(\bar{y}, \bar{x}_t),$$

donc

$$\begin{aligned} (r(t)|r'(t))_y &= \frac{1}{2} \left(2t - 2 \operatorname{argch} \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}(d(\bar{y}, \bar{x}_t))} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(2t - 2 \operatorname{argch} \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}(d(y, x_t))} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, \mathbb{H}^2 étant Gromov-hyperbolique, \bar{x}_t reste à distance bornée de \bar{y} ; donc la distance entre x_t et y est aussi bornée. Ainsi, quitte à extraire, on peut supposer que x_t converge vers un point $x_\infty \in (\xi, \xi')$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$e^{(\xi|\xi')_y} \geq \operatorname{ch} d(y, x_\infty) \geq \operatorname{ch} d(y, (\xi, \xi')).$$

□

Lemme 1.2.13 (lemme 3.6 de [8]). *Soit X un espace $\operatorname{CAT}(-1)$. Pour tous $x, y \in X$ et $\xi \in \partial X$, on a*

$$e^{\beta_\xi(x,y)} = \frac{1}{2 \operatorname{sh}(d(x,y)) \sin^2 \left(\frac{\angle_x^{-1}(y, \xi)}{2} \right) + e^{-d(x,y)}}.$$

Corollaire 1.2.14. *Soient X un espace $\operatorname{CAT}(-1)$ propre, $\xi^-, \xi^+ \in \partial X$, $x \in (\xi^-, \xi^+)$ et $\epsilon > 0$. Soient $(\eta^-, \eta^+) \in B_{d_x}(\xi^-, \epsilon) \times B_{d_x}(\xi^+, \epsilon)$ et $y \in (\eta^-, \eta^+)$ tels que la projection de y sur (ξ^-, ξ^+) soit x . Alors*

$$d(x, y) \leq \operatorname{argch} \left(\frac{1}{1 - 2\sqrt{2}\epsilon} \right).$$

Démonstration. Puisque x est la projection de y sur (ξ^-, ξ^+) , l'angle $\angle_x^{-1}(y, \xi^\pm)$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π et donc $\sin^2 \left(\frac{\angle_x^{-1}(y, \xi^\pm)}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$. Par suite,

$$e^{\beta_{\xi^\pm}(x,y)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(d(x,y)) + e^{-d(x,y)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(d(x,y))}.$$

De plus,

$$e^{\beta_{\eta^\pm}(x,y)} \leq e^{d(x,y)}.$$

Remarquons que $d_y(\eta^-, \eta^+) = 1$ puisque $y \in (\eta^-, \eta^+)$, et que pour tous $\eta, \xi \in \partial X$

$$d_y(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2}(\beta_\eta(x,y) + \beta_\xi(x,y))} d_x(\eta, \xi).$$

L'inégalité triangulaire implique donc

$$\begin{aligned} d_y(\xi^-, \xi^+) &\geq d_y(\eta^-, \eta^+) - d_y(\eta^-, \xi^-) - d_y(\eta^+, \xi^+) \\ &= 1 - d_y(\eta^-, \xi^-) - d_y(\eta^+, \xi^+) \\ &= 1 - e^{\frac{1}{2}(\beta_{\xi^-}(x,y) + \beta_{\eta^-}(x,y))} d_x(\eta^-, \xi^-) - e^{\frac{1}{2}(\beta_{\xi^+}(x,y) + \beta_{\eta^+}(x,y))} d_x(\eta^+, \xi^+) \\ &\geq 1 - 2 \left(\frac{e^{d(x,y)}}{\operatorname{ch}(d(x,y))} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon \\ &\geq 1 - 2\sqrt{2}\epsilon. \end{aligned}$$

La conclusion découle alors du lemme 1.2.12. □

1.3 Flot géodésique

On va maintenant définir le flot géodésique sur un espace CAT(-1) en suivant une construction de Bourdon. Les principales références de cette partie sont [13] et [63].

On considère toujours un espace X CAT(-1) muni d'une action géométrique d'un groupe Γ (même si la plupart des constructions est valable pour une action convexe-cocompacte en remplaçant ∂X par l'ensemble limite de Γ).

Définition 1.3.1. L'espace du flot géodésique de X est l'ensemble \mathcal{GX} des géodésiques de X , i.e. l'ensemble des isométries de \mathbb{R} dans X .

L'espace du flot, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est métrisable par la distance $d_{\mathcal{GX}}$ définie par (voir [13]) :

$$d_{\mathcal{GX}}(c_1, c_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(c_1(t), c_2(t)) e^{-2|t|} dt.$$

Proposition 1.3.2. La projection $ev_0 : c \in \mathcal{GX} \mapsto c(0)$ est un plongement $(1, 1)$ -quasi-isométrique.

Démonstration. Soient $c_1, c_2 \in \mathcal{GX}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$d(c_1(t), c_2(t)) - 2|t| \leq d(c_1(0), c_2(0)) \leq d(c_1(t), c_2(t)) + 2|t|,$$

ce qui donne, en multipliant par $e^{-2|t|}$ puis en intégrant ces inégalités,

$$d_{\mathcal{GX}}(c_1, c_2) - 1 \leq d(c_1(0), c_2(0)) \leq d_{\mathcal{GX}}(c_1, c_2) + 1.$$

□

Comme Γ agit sur X par isométries, il agit aussi naturellement sur \mathcal{GX} et la projection ev_0 est équivariante.

Proposition 1.3.3. Soit X un espace CAT(-1) propre et Γ un groupe agissant géométriquement sur X . L'action de Γ sur \mathcal{GX} est géométrique.

Démonstration. Il est clair que Γ agit sur $(\mathcal{GX}, d_{\mathcal{GX}})$ par isométries. Il suffit donc de montrer que cette action est proprement discontinue et possède un domaine fondamental relativement compact.

Montrons que l'action est proprement discontinue. Soit K un compact de \mathcal{GX} . La topologie sur \mathcal{GX} étant la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, la projection ev_0 est continue; en particulier $L = ev_0(K)$ est un compact de X . Il s'ensuit que

$$|\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}| \leq |\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(L) \cap L \neq \emptyset\}| < \infty,$$

puisque Γ agit sur X proprement discontinuement.

Montrons que l'action possède un domaine fondamental relativement compact. Soit D un domaine fondamental relativement compact de X pour l'action de Γ sur X . Pour tout $x \in X$, il existe un élément γ de Γ tel que $\gamma(x) \in D$. Alors, l'ensemble

$$\mathcal{GD} = \{c \in \mathcal{GX} \mid c(0) \in D\}$$

est un domaine fondamental de \mathcal{GX} pour l'action de Γ . De plus, le théorème d'Arzela-Ascoli implique que \mathcal{GD} est relativement compact. □

L'espace compact \mathcal{GX}/Γ est appelé l'espace du flot géodésique de X/Γ .

Une façon plus visuelle de se représenter l'espace du flot passe par le paramétrage de Hopf. Pour cela, on fixe un point de base $x \in X$ puis, une géodésique étant uniquement déterminée par ses points à l'infini et son origine, on a :

Proposition 1.3.4 (Paramétrage de Hopf). *Soit Δ la diagonale de $\partial X \times \partial X$ et notons $\partial^2 X$ l'ensemble $(\partial X \times \partial X) \setminus \Delta$. L'espace du flot $\mathcal{G}X$ est homéomorphe à $\partial^2 X \times \mathbb{R}$ via le paramétrage de Hopf :*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}X &\longrightarrow \partial^2 X \times \mathbb{R} \\ c &\longmapsto (c(-\infty), c(+\infty), \beta_{c(-\infty)}(c(0), x)). \end{aligned}$$

Remarquons que cette identification n'est pas canonique puisqu'elle est assujettie au choix d'un point de base x . Cependant, les propriétés dynamiques n'en seront pas affectées ; en effet si Γ agit géométriquement sur X , la mesure \tilde{m}_Γ définie par

$$d\tilde{m}_\Gamma(\eta, \xi, t) = \frac{d\mu_x(\eta)d\mu_x(\xi)dt}{d_x(\eta, \xi)^{2\delta_\Gamma}},$$

est, quant à elle, indépendante du point de base et définit donc une mesure Γ -invariante sur $\mathcal{G}X$. De plus :

Proposition 1.3.5. *Soit X un espace $CAT(-1)$ propre muni d'une action géométrique d'un groupe Γ . La mesure \tilde{m}_Γ induit une mesure finie m_Γ sur $\mathcal{G}X/\Gamma$.*

La mesure m_Γ sur $\mathcal{G}X/\Gamma$ est appelée la *mesure de Bowen-Margulis*. Par abus de langage, nous appellerons aussi \tilde{m}_Γ la mesure de Bowen-Margulis sur $\mathcal{G}X$.

Démonstration. Soit D un domaine fondamental pour l'action de Γ sur X et considérons le domaine fondamental $\mathcal{G}D$ pour l'action de Γ sur $\mathcal{G}X$ défini dans la démonstration de la proposition 1.3.3. Pour tout borélien $U \subset \mathcal{G}X/\Gamma$ définissons

$$m_\Gamma(U) := \tilde{m}_\Gamma(\pi^{-1}(U) \cap \mathcal{G}D),$$

où $\pi : \mathcal{G}X \rightarrow \mathcal{G}X/\Gamma$ est la projection canonique. La définition de \tilde{m}_Γ via le paramétrage de Hopf implique que la mesure de tout compact est finie, donc m_Γ est finie. De plus, la définition de \tilde{m}_Γ est indépendante du choix du domaine fondamental de l'action sur $\mathcal{G}X$. En effet, si D_1 et D_2 sont deux domaines fondamentaux et $U \subset \mathcal{G}X$ un borélien, alors l'invariance de \tilde{m}_Γ par Γ entraîne que

$$\begin{aligned} \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot U \cap D_1 \right) &= \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigsqcup_{\tau \in \Gamma} \gamma \cdot U \cap D_1 \cap \tau \cdot D_2 \right) \\ &= \sum_{\tau \in \Gamma} \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot U \cap D_1 \cap \tau \cdot D_2 \right) \\ &= \sum_{\tau \in \Gamma} \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \tau^{-1} \gamma \cdot U \cap \tau^{-1} \cdot D_1 \cap D_2 \right) \\ &= \sum_{\tau \in \Gamma} \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma' \in \Gamma} \gamma' \cdot U \cap \tau^{-1} \cdot D_1 \cap D_2 \right) \\ &= \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma' \in \Gamma} \bigsqcup_{\tau \in \Gamma} \gamma' \cdot U \cap \tau^{-1} \cdot D_1 \cap D_2 \right) \\ &= \tilde{m}_\Gamma \left(\bigcup_{\gamma' \in \Gamma} \gamma' \cdot U \cap D_2 \right), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Définition 1.3.6. Le flot géodésique sur $\mathcal{G}X$ est le flot $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini par $g^t c(\cdot) = c(\cdot + t)$.

Notons que, via le paramétrage de Hopf, le flot géodésique est simplement l'action de \mathbb{R} par translation sur le \mathbb{R} -facteur. En particulier, la mesure de Bowen-Margulis est invariante par le flot géodésique.

Par ailleurs, puisque le flot commute avec l'action de Γ , il passe au quotient en un flot sur $\mathcal{G}X/\Gamma$ que nous noterons aussi $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Lemme 1.3.7. La mesure m_Γ sur $\mathcal{G}X/\Gamma$ est invariante par le flot.

Démonstration. On garde les notations de la preuve précédente. Pour tout borélien $U \subset \mathcal{G}X/\Gamma$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$m_\Gamma(g^t(U)) = \tilde{m}_\Gamma(g^t(\pi^{-1}(U)) \cap \mathcal{G}D) = \tilde{m}_\Gamma(g^t(\pi^{-1}(U) \cap g^{-t}\mathcal{G}D)).$$

Donc, par $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ -invariance de \tilde{m}_Γ on obtient

$$m_\Gamma(g^t(U)) = \tilde{m}_\Gamma(\pi^{-1}(U) \cap g^{-t}\mathcal{G}D).$$

Or

$$g^{-t}\mathcal{G}D = \{c \in \mathcal{G}X \mid c(t) \in D\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathcal{G}X$; puisque la définition de m_Γ ne dépend pas du choix du domaine fondamental on a

$$m_\Gamma(g^t(U)) = m_\Gamma(U).$$

□

Théorème 1.3.8 ([52],[63]). Si Γ agit cocompactement sur X et si ∂X est connexe, alors le flot géodésique sur $\mathcal{G}X/\Gamma$ est mélangeant, donc ergodique, pour m_Γ .

Remarque(s) 1.3.9. Le mélange du flot géodésique est vrai dans un contexte plus général : il est suffisant de supposer que le spectre des longueurs de Γ (agissant sur X) est non arithmétique (voir [24]). C'est en particulier le cas sous les hypothèses du théorème 1.3.8 (voir [13] ou [24]).

RIGIDITÉ AU BORD DES VARIÉTÉS DE COURBURE STRICTEMENT NÉGATIVE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit un produit de Gromov relatif à un point à l'infini nous permettant de définir un analogue des métriques de Bourdon sur le bord épointé d'un espace CAT(-1) X . Cela nous permet d'obtenir une description des espaces tangents faibles (voir la définition 2.3.2 ci-après) du bord lorsque X est cocompact.

Proposition 2.1.1 (proposition 2.3.3). *Si Γ est un sous-groupe d'isométries de X qui agit géométriquement sur X , alors tout espace tangent faible de ∂X muni d'une métrique de Bourdon est isométrique à un bord épointé muni d'une métrique de la forme $d_{\xi, \omega}$.*

Si le bord contient des courbes rectifiables, un résultat de Margulis et Mostow (voir le lemme 2.4.1) permet alors d'obtenir des géodésiques bi-infinies dans les espaces tangents. La caractérisation des espaces tangents implique alors l'existence de cercles (*i.e.* de plongements Möbius de S^1) dans le bord. En présence de suffisamment de courbes rectifiables, on peut alors garantir l'existence d'un grand nombre de cercles au bord et en déduire :

Théorème 2.1.2 (théorème 2.4.11). *Soit X une variété simplement connexe cocompacte de courbure majorée par -1 . Si ∂X possède une famille de courbes rectifiables de Q -module positif pour la mesure de Patterson-Sullivan, $Q \geq 1$, alors X est une variété symétrique de rang 1.*

2.2 Bord épointé

De manière analogue à ce qui a été fait dans la partie 1.2, on peut définir un produit de Gromov relatif à un point à l'infini (ou produit de Gromov pointé). Cela va nous permettre de métriser le bord épointé :

Définition 2.2.1. Soient $\xi \in \partial X$ et $\omega \in X$. Le produit de Gromov relatif à ω et ξ de $x, y \in X$ est défini par

$$(x|y)_{\xi, \omega} = \frac{1}{2}(\beta_{\xi}(x, \omega) + \beta_{\xi}(y, \omega) - |x - y|).$$

On peut alors l'étendre à l'infini de la façon suivante.

Définition 2.2.2. Soient $\xi \in \partial X$ et $\omega \in X$. Le *produit de Gromov relatif à ω et ξ* de $\eta, \eta' \in \partial X \setminus \{\xi\}$ est défini par

$$(\eta|\eta')_{\xi, \omega} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (h(t)|k(t))_{\xi, \omega},$$

où h et k sont les géodésiques minimisantes de ξ vers η et de ξ vers η' respectivement paramétrée de sorte que $\beta_{\xi}(h(0), \omega) = \beta_{\xi}(k(0), \omega) = 0$.

La limite définissant le produit de Gromov relatif à l'infini existe bien. Pour le voir, on renvoie au lemme 4 page 138 de [33] : des modifications mineures de la preuve qui y est présentée permettent de conclure à son existence dans le cadre CAT(-1).

Proposition 2.2.3. Soient $\xi, \eta \in \partial X$ et $\omega \in X$. Pour $x \in X$, on pose $(\xi|x)_{\omega} = \frac{1}{2}(|x - \omega| + \beta_{\xi}(\omega, x))$. Alors

1. $\forall x, y \in X$ on a $(x|y)_{\xi, \omega} = (x|y)_{\omega} - (\xi|x)_{\omega} - (\xi|y)_{\omega}$,
2. Si h est la géodésique minimisante de ξ vers η alors $(\xi|\eta)_{\omega} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\xi|h(t))_{\omega}$.

Démonstration. 1. Soit r le rayon géodésique d'origine ω et asymptote à ξ , alors

$$\begin{aligned} (x|y)_{\xi, \omega} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (|x - r(t)| - t + |y - r(t)| - t - |x - y|) \\ &= (x|y)_{\omega} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (|x - r(t)| - t - |x - \omega| + |y - r(t)| - t - |y - \omega|) \\ &= (x|y)_{\omega} + \frac{1}{2} (\beta_{\xi}(x, \omega) - |x - \omega|) + \frac{1}{2} (\beta_{\xi}(y, \omega) - |y - \omega|) \\ &= (x|y)_{\omega} - (\xi|x)_{\omega} - (\xi|y)_{\omega}. \end{aligned}$$

2. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$(\xi|h(t))_{\omega} = \frac{1}{2} (|h(t) - \omega| + \beta_{\xi}(\omega, h(t))) = \frac{1}{2} (|h(t) - \omega| + \beta_{\xi}(h(0), h(t)) + \beta_{\xi}(\omega, h(0))).$$

Or $\beta_{\xi}(h(0), h(t)) = -t$ et $|h(t) - \omega| - t$ tend vers $\beta_{\eta}(\omega, h(0))$ quand t tend vers $+\infty$. D'où le résultat. □

Corollaire 2.2.4. Soit $\xi \in \partial X$. Alors, pour tous $\eta, \eta' \in \partial X \setminus \{\xi\}$, on a

$$(\eta|\eta')_{\xi, \omega} = (\eta|\eta')_{\omega} - (\xi|\eta)_{\omega} - (\xi|\eta')_{\omega}.$$

Démonstration. Soient h et k les géodésiques de ξ vers η et de ξ vers η' respectivement paramétrée de sorte que $\beta_{\xi}(h(0), \omega) = \beta_{\xi}(k(0), \omega) = 0$. D'après la proposition précédente, on a :

$$(h(t)|k(t))_{\xi, \omega} = (h(t)|k(t))_{\omega} - (\xi|h(t))_{\omega} - (\xi|k(t))_{\omega},$$

et les deux derniers termes convergent, quand t tend vers $+\infty$, vers $(\xi|\eta)_{\omega}$ et $(\xi|\eta')_{\omega}$ respectivement. De plus, $(h(t)|k(t))_{\omega}$ tend vers $(\eta|\eta')_{\omega}$ quand t tend vers $+\infty$ (voir [13]). En passant à la limite on obtient donc l'égalité souhaitée. □

On peut voir ce produit de Gromov pointé de manière géométrique comme suit. Soit $\mathcal{H}_{\xi}(\omega)$ l'horosphère centrée en ξ passant par ω et notons ω_{η} et $\omega_{\eta'}$ les points d'intersection de cette horosphère avec les géodésiques (ξ, η) et (ξ, η') respectivement. L'horosphère centrée en η (resp. η') passant par ω_{η} (resp. $\omega_{\eta'}$) rencontre la géodésique (η, η') en un point p_{η} (resp. $p_{\eta'}$). Alors $2(\eta|\eta')_{\xi, \omega}$ est la distance algébrique entre p_{η} et $p_{\eta'}$ (voir la figure 2.1). En effet, on a (voir la figure

1 de [13]) :

$$\begin{aligned}
2(\eta|\eta')_{\xi,\omega} &= 2(\eta|\eta')_{\omega} - 2(\eta|\xi)_{\omega} - 2(\eta'|\xi)_{\omega} \\
&= \beta_{\eta}(\omega, p_{\eta}) + \beta_{\eta'}(\omega, p_{\eta'}) - \beta_{\eta}(\omega, \omega_{\eta}) - \beta_{\xi}(\omega, \omega_{\eta}) - \beta_{\eta'}(\omega, \omega_{\eta'}) - \beta_{\xi}(\omega, \omega_{\eta'}) \\
&= \beta_{\eta}(\omega_{\eta}, p_{\eta}) + \beta_{\eta'}(\omega_{\eta'}, p_{\eta'}) - \beta_{\xi}(\omega, \omega_{\eta}) - \beta_{\xi}(\omega, \omega_{\eta'}) \\
&= \beta_{\eta'}(\omega_{\eta'}, p_{\eta}) \\
&= \beta_{\eta'}(p_{\eta'}, p_{\eta}).
\end{aligned}$$

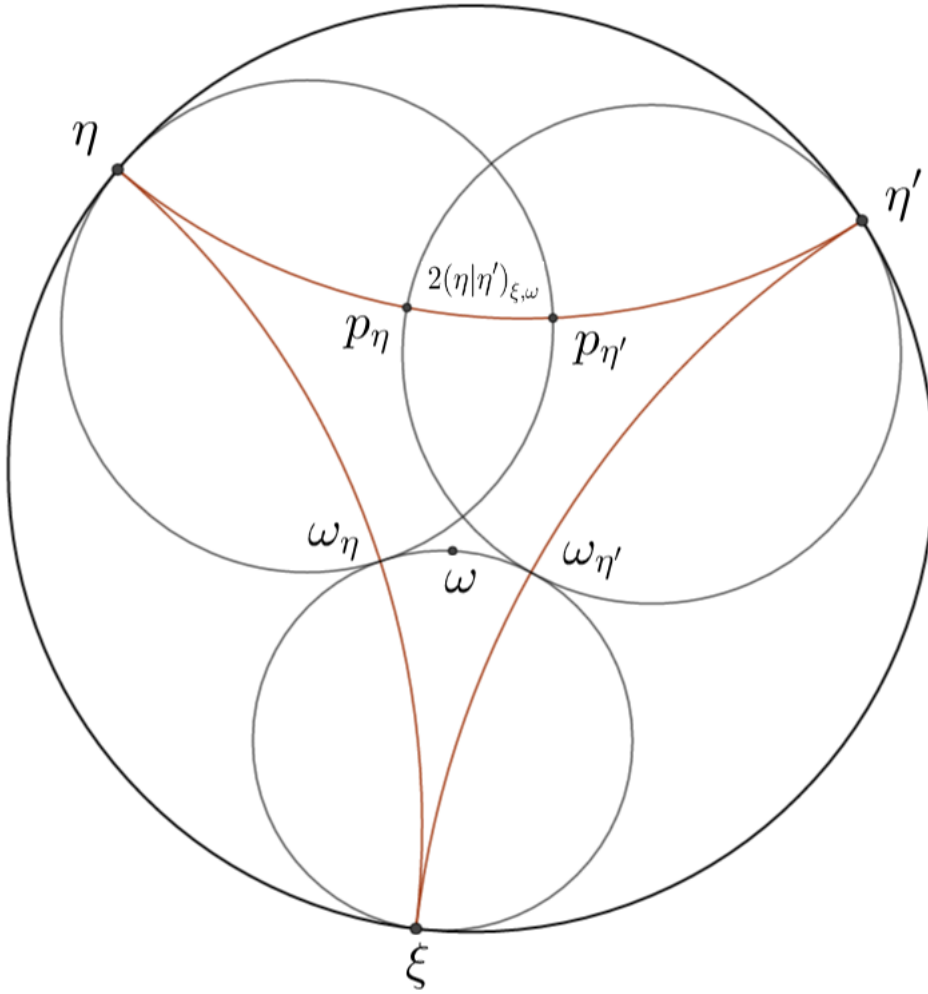


FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique du produit de Gromov pointé.

Proposition 2.2.5. Soient $\xi \in \partial X$, $\omega \in X$ et soit γ le rayon géodésique d'extrémités ω et ξ . Alors, pour tous $\eta, \eta' \in \partial X \setminus \{\xi\}$,

$$(\eta|\eta')_{\xi,\omega} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\eta|\eta')_{\gamma(t)} - t,$$

et la convergence est uniforme en les variables η et η' sur les compacts de $\partial X \setminus \{\xi\}$.

Démonstration. Soit γ le rayon géodésique d'extrémités ω et ξ . On a

$$\begin{aligned} (\eta|\eta')_{\gamma(t)} - t &= (\eta|\eta')_{\omega} - \frac{1}{2}(\beta_{\eta}(\omega, \gamma(t)) + t + \beta_{\eta'}(\omega, \gamma(t)) + t) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (\eta|\eta')_{\omega} - (\xi|\eta)_{\omega} - (\xi|\eta')_{\omega} = (\eta|\eta')_{\xi, \omega}, \end{aligned}$$

en vertu du corollaire 2.2.4.

Maintenant, posons $f_t(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\gamma(t)} - t$. Pour $s < t$, on a :

$$\begin{aligned} f_t(\eta, \eta') - f_s(\eta, \eta') &= (\eta|\eta')_{\gamma(t)} - (\eta|\eta')_{\gamma(s)} + s - t \\ &= \frac{1}{2}(\beta_{\eta}(\gamma(t), \gamma(s)) + \beta_{\eta'}(\gamma(t), \gamma(s))) + s - t \\ &\leq |\gamma(s) - \gamma(t)| + s - t = 0. \end{aligned}$$

Donc (f_t) est une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement. D'après le théorème de Dini, la convergence est uniforme sur les compacts. \square

Plus généralement,

Proposition 2.2.6. Soient $\xi \in \partial X$, $\omega \in X$ et $x_n \in X$ tels que x_n tend vers ξ quand n tend vers $+\infty$. Alors, pour tous $\eta, \eta' \in \partial X \setminus \{\xi\}$,

$$(\eta|\eta')_{\xi, \omega} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\eta|\eta')_{x_n} - |x_n - \omega|.$$

Démonstration. Soit z un point quelconque de la géodésique (η, η') et soient $y \in (\eta, \xi)$, $y' \in (\eta', \xi)$ tels que $\beta_{\xi}(y, \omega) = \beta_{\xi}(y', \omega) = 0$; alors $(\eta, \eta')_{\xi, \omega} = \frac{1}{2}(\beta_{\eta}(y, z) + \beta_{\eta'}(y', z))$. De même, si $y_n \in (\eta, x_n)$ et $y'_n \in (\eta', x_n)$ sont tels que $|y_n - x_n| = |y'_n - x_n| = |\omega - x_n|$, on a $(\eta, \eta')_{x_n, \omega} = \frac{1}{2}(\beta_{\eta}(y_n, z) + \beta_{\eta'}(y'_n, z))$. Or quand $x_n \rightarrow \xi$, les sphères de centre x_n passant par ω tendent vers l'horosphère centrée en ξ passant par ω et les rayons (η, x_n) , (η', x_n) vers (η, ξ) et (η', ξ) respectivement (voir la figure 2.2). Donc $y_n \rightarrow y$ et $y'_n \rightarrow y'$ et par suite $(\eta, \eta')_{x_n, \omega}$ tend vers $(\eta, \eta')_{\xi, \omega}$. \square

De la même manière qu'avec le produit de Gromov classique, on peut définir une famille de distances sur les bords épointés à l'aide du produit de Gromov pointé.

Théorème 2.2.7. Soient $\xi \in \partial X$ et $\omega \in X$. Alors la fonction $d_{\xi, \omega} = e^{-(\cdot|\cdot)_{\xi, \omega}}$ est une distance sur $\partial X \setminus \{\xi\}$. De plus $(\partial X \setminus \{\xi\}, d_{\xi, \omega})$ est complet et sa topologie coïncide avec la topologie induite par ∂X .

Pour montrer que $d_{\xi, \omega}$ est une distance, seule l'inégalité triangulaire est non triviale. Remarquons que d'après les propositions 2.2.5 et 1.2.6, $d_{\xi, \omega}$ est limite simple de distances de Bourdon. En particulier, elle vérifie l'inégalité triangulaire.

On se propose de donner une démonstration plus directe et plus géométrique de l'inégalité triangulaire dans la même veine que l'argument original de [13]. On rappelle que dans [13], Bourdon construit une métrique α_{ω} sur les sphères centrées en ω définie par

$$\alpha_{\omega}(y, y') = \left(\frac{\text{ch}(|y - y'|) - \text{ch}(|y - \omega| - |y' - \omega|)}{2\text{sh}(|y - \omega|)\text{sh}(|y' - \omega|)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et montre ensuite que $\alpha_{\omega}(y, y')$ tend vers $d_{\omega}(\xi, \eta)$ lorsque y et y' tendent vers ξ et η respectivement. En faisant tendre y et y' sur des sphères centrées en ω de rayon de plus en plus grand, l'inégalité triangulaire pour α_{ω} passe à la limite et donne l'inégalité triangulaire pour d_{ω} .

Démonstration. Puisque l'on travaille sur le bord épointé $\partial X \setminus \{\xi\}$, il est naturel de considérer les horosphères centrées en ξ plutôt que des sphères. Plus précisément, la formule suivante définit

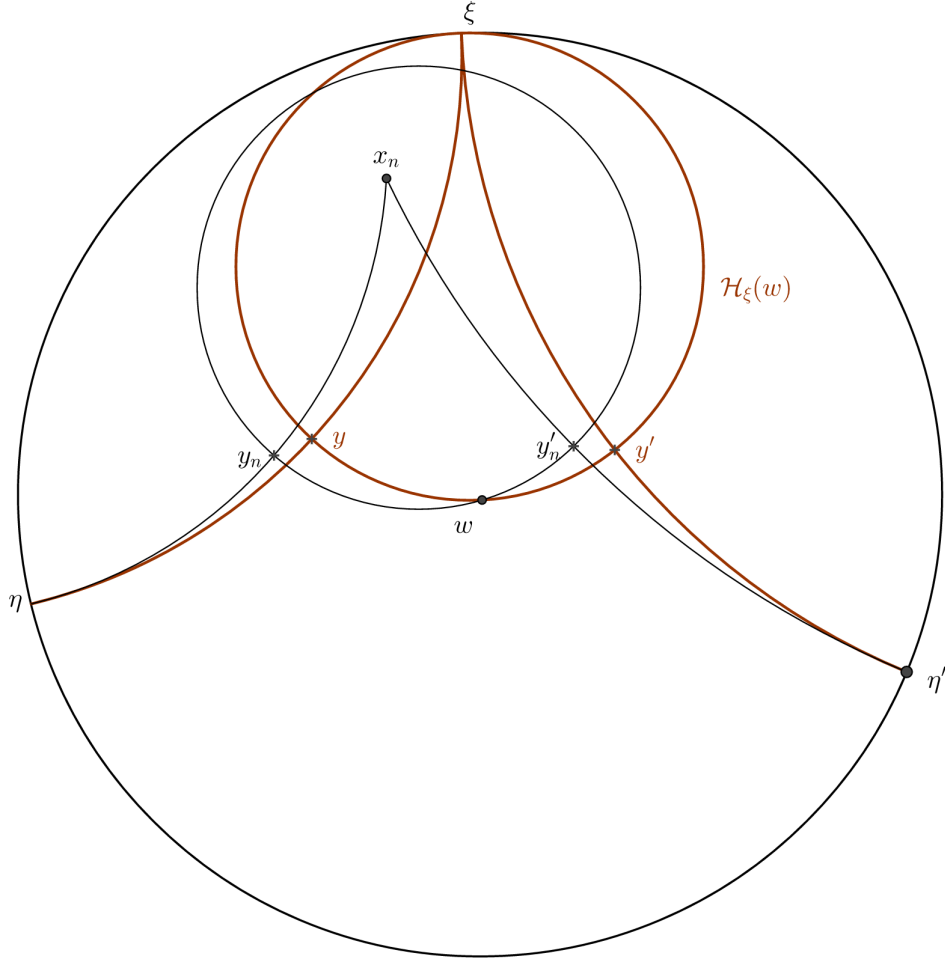


FIGURE 2.2 – Convergence des dilatés de la métrique de Bourdon.

une distance sur les horosphères $\mathcal{H}_t = \{y \in X \mid \beta_{\xi}(y, \omega) = t\}, t > 0$:

$$\alpha_{\xi, \omega}(y, y') = \left(\frac{\text{ch}(|y - y'|) - \text{ch}(\beta_{\xi}(y, \omega) - \beta_{\xi}(y', \omega))}{2\text{sh}(\beta_{\xi}(y, \omega))\text{sh}(\beta_{\xi}(y', \omega))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seule l'inégalité triangulaire est non triviale. Pour la montrer, on considère x, y et z trois points de \mathcal{H}_t . Comme les horosphères sont des limites de sphères pour la distance de Hausdorff, il existe trois suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ convergeant vers x, y et z respectivement et telles que x_n, y_n et z_n soient situés sur une même sphère de centre ω_n et de rayon r_n .

L'inégalité triangulaire pour α_{ω_n} donne, compte tenu des égalités $|x_n - \omega_n| = |y_n - \omega_n| = |z_n - \omega_n| = r_n$,

$$\left(\frac{\text{ch}(|y_n - x_n|) - 1}{2\text{sh}(r_n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{\text{ch}(|y_n - z_n|) - 1}{2\text{sh}(r_n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\text{ch}(|z_n - x_n|) - 1}{2\text{sh}(r_n)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et en simplifiant les dénominateurs,

$$(\operatorname{ch}(|y_n - x_n|) - 1)^{\frac{1}{2}} \leq (\operatorname{ch}(|y_n - z_n|) - 1)^{\frac{1}{2}} + (\operatorname{ch}(|z_n - x_n|) - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant à la limite, on trouve alors

$$(\operatorname{ch}(|y - x|) - 1)^{\frac{1}{2}} \leq (\operatorname{ch}(|y - z|) - 1)^{\frac{1}{2}} + (\operatorname{ch}(|z - x|) - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais comme x, y et z sont sur \mathcal{H}_t , on a $\beta_{\xi}(x, \omega) = \beta_{\xi}(y, \omega) = \beta_{\xi}(z, \omega) = t$. Donc, en divisant cette dernière inégalité par $\sqrt{2}\operatorname{sh}(t)$, on trouve

$$\alpha_{\xi, \omega}(x, y) \leq \alpha_{\xi, \omega}(y, z) + \alpha_{\xi, \omega}(z, x).$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi, \omega}(y, y') &= \left(\frac{\operatorname{ch}(|y - y'|)}{2\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y, \omega))\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y', \omega))} - \frac{\operatorname{ch}(\beta_{\xi}(y, \omega) - \beta_{\xi}(y', \omega))}{2\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y, \omega))\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y', \omega))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\operatorname{ch}(|y - y'|)}{2\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y, \omega))\operatorname{sh}(\beta_{\xi}(y', \omega))} - \frac{1}{2}(\coth(\beta_{\xi}(y, \omega))\coth(\beta_{\xi}(y', \omega)) - 1) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si y et y' tendent vers $\eta, \eta' \in \partial X \setminus \{\xi\}$ respectivement le long d'horosphères centrées en ξ , le deuxième terme tend vers 0 alors que le premier terme est, quant à lui, équivalent à $e^{-2(y, y')_{\xi, \omega}}$, qui tend vers $d_{\xi, \omega}(\eta, \eta')^2$. L'inégalité triangulaire pour $d_{\xi, \omega}$ se déduit alors de celle pour $\alpha_{\xi, \omega}$ par passage à la limite.

Enfin, $d_{\xi, \omega}$ est complète et la topologie associée est la topologie induite par ∂X en vertu du résultat suivant, valable dans le cadre plus général des espaces hyperboliques (voir les propositions 6 et 7 du chapitre 8 de [33]) : pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une métrique complète $d_{\xi, \omega, \epsilon}$ sur $\partial X \setminus \{\xi\}$ dont la topologie est la topologie induite par ∂X et vérifiant l'inégalité

$$\frac{1}{2}d_{\xi, \omega}^{\epsilon} \leq d_{\xi, \omega, \epsilon} \leq d_{\xi, \omega}.$$

□

Remarque(s) 2.2.8. Les distances $d_{\xi, \omega}$ ont été introduites par Hersensky et Paulin dans l'appendice de [45] puis étudiées par Roblin dans [63] (paragraphe 1.G). Le fait que $d_{\xi, \omega}$ définit une distance a aussi été montré par T. Foertsch et V.Schroeder comme conséquence d'une inégalité de Ptolémée satisfaite par la distance de Bourdon (voir [26]).

On s'intéresse maintenant à la dépendance des distances $d_{\xi, \omega}$ par rapport aux paramètres ξ et ω .

Proposition 2.2.9. Soient $(\xi_n)_n$ et $(\omega_n)_n$ deux suites d'éléments de ∂X et X qui convergent vers $\xi \in \partial X$ et $\omega \in X$ respectivement. Soit K un compact de $\partial X \setminus \{\xi\}$. À partir d'un certain rang $\xi_n \notin K$ et d_{ξ_n, ω_n} converge vers $d_{\xi, \omega}$ uniformément sur $K \times K$.

Démonstration. On peut supposer que les ξ_n ne sont pas dans K . Soit V un voisinage relativement compact de ξ . En vertu du corollaire 2.2.4, on a

$$d_{\xi_n, \omega_n}(x, y) = \frac{d_{\omega_n}(x, y)}{d_{\omega_n}(x, \xi_n)d_{\omega_n}(y, \xi_n)},$$

pour tous x et y dans K .

— d_{ω_n} converge vers d_{ω} uniformément sur $K \times K$. En effet, $|(x|y)_{\omega_n} - (x|y)_{\omega}| \leq |\omega - \omega_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ uniformément sur $K \times K$. Soient $m = \min_{x, y \in K} (x|y)_{\omega}$ et $M = \max_{x, y \in K} (x|y)_{\omega}$;

pour n assez grand $(x|y)_{\omega_n} \in [\frac{m}{2}, 2M]$ pour tous $x, y \in K$. La continuité uniforme de $x \mapsto e^{-x}$ sur $[\frac{m}{2}, 2M]$ permet alors de conclure. Plus généralement la convergence est uniforme sur les compacts de $\partial X \times \partial X$.

— $d_{\omega_n}(\xi_n, \cdot)$ converge vers $d_{\omega}(\xi, \cdot)$ uniformément sur K . En effet, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |d_{\omega_n}(\xi_n, x) - d_{\omega}(\xi, x)| &\leq |d_{\omega_n}(\xi_n, x) - d_{\omega}(\xi_n, x)| + |d_{\omega}(\xi_n, x) - d_{\omega}(\xi, x)| \\ &\leq \sup_{\bar{V} \times K} |d_{\omega_n}(y, x) - d_{\omega}(y, x)| + d_{\omega}(\xi_n, \xi). \end{aligned}$$

— On en déduit que $d_{\omega_n}(x, \xi_n)d_{\omega_n}(y, \xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d_{\omega}(\xi, x)d_{\omega}(\xi, y)$ uniformément sur $K \times K$.

Maintenant, comme K est compact et que $\xi \notin K$, il existe $m > 0$ tel que $m < d_{\omega}(\xi, x)d_{\omega}(\xi, y)$ pour tous x et y dans K . Comme précédemment, il existe un rang n_0 à partir duquel, quel que soit z dans K et $n \geq n_0$, on ait $d_{\omega_n}(\xi_n, z) \in [\frac{m}{2}, +\infty[$. La continuité uniforme de la fonction inverse sur $[\frac{m}{2}, +\infty[$ permet de conclure que $\frac{d_{\omega_n}(x, y)}{d_{\omega_n}(x, \xi_n)d_{\omega_n}(y, \xi_n)}$ converge uniformément vers $\frac{d_{\omega}(x, y)}{d_{\omega}(x, \xi)d_{\omega}(y, \xi)}$ sur $K \times K$. □

2.3 Espaces tangents faibles des bords épointés

Dans cette partie, on étudie les espaces tangents faibles du bord d'un espace CAT(-1) muni de la métrique de Bourdon. La notion d'espaces tangents faibles est une généralisation dans le cadre métrique de la notion bien connue d'espace tangent d'une variété différentielle et permet de rendre compte de la géométrie infinitésimale au voisinage d'un point. Intuitivement, regarder un voisinage infinitésimal d'un point revient à zoomer de plus en plus sur ce point, ce qui revient à faire des changements d'échelle de plus en plus grands, *i.e.* à multiplier la distance par un facteur tendant vers $+\infty$. La formalisation de cette idée repose sur la notion de convergence d'espaces métriques au sens de Gromov-Hausdorff.

Définition 2.3.1 (voir [10]). Soient (Z, p) un espace métrique pointé et (Z_k, p_k) une suite d'espaces métriques pointés. On dit que la suite (Z_k, p_k) converge au sens de Gromov-Hausdorff vers (Z, p) si pour tout $R > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble $M = M(\epsilon, R) \subset B_Z(p, R)$, un entier $n = n(\epsilon, R)$ tels que pour tout $k \geq n$ il existe des ensembles $M_k = M_k(\epsilon, R) \subset B_{Z_k}(p_k, R)$ et des bijections $f_k = f_k(\epsilon, R) : M_k \rightarrow M$ tels que

- $p \in M, p_k \in M_k$ et $f_k(p_k) = p$,
- M est ϵ -dense dans $B_Z(p, R)$ et M_k est ϵ -dense dans $B_{Z_k}(p_k, R)$,
- $|d_{Z_k}(x, y) - d_Z(f_k(x), f_k(y))| \leq \epsilon$ pour $x, y \in M_k$.

Autrement dit, les boules de Z sont approximées par des ensembles de plus en plus denses qui ressemblent de plus en plus fidèlement à leurs analogues dans Z_k .

Définition 2.3.2. Soit (Z, d) un espace métrique. Une *espace tangent faible* de (Z, d) est un espace métrique qui peut être obtenu comme limite d'une suite d'espaces $(Z, \lambda_k d, z_k)$ avec $\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$.

Un espace métrique (Z, d) est *doublant* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout point $z \in Z$ et tout rayon $r > 0$ la boule $B(z, r)$ peut être recouverte par au plus C boules de rayon $\frac{r}{2}$. Lorsqu'un espace (Z, d) est doublant et complet, un théorème de compacité assure que toute suite $(Z, \lambda_k d, z_k)$ possède une sous-suite convergente et donc que (Z, d) possède des espaces tangents. C'est en particulier le cas du bord d'un espace hyperbolique muni d'une métrique visuelle.

Dans [10], les auteurs montrent que si un groupe agit géométriquement sur un espace hyperbolique X , tout espace tangent faible de ∂X est quasi-Möbius équivalent à un bord épointé (voir la définition 3.2.4). Le but de cette partie est d'améliorer ce résultat sous l'hypothèse que X est

CAT(-1) : dans ce cas les espaces tangents faibles sont isométriques à un bord épointé muni d'une distance de Bourdon pointée. Ceci avait déjà été remarqué par Bonk et Kleiner dans [11] mais on se propose d'en donner une preuve détaillée.

Avant de poursuivre, remarquons la chose suivante, qui nous sera utile. Pour $x, \omega \in X$, en notant $(\cdot|\cdot)_{x,\omega}$ la fonction définie par $(\cdot|\cdot)_{x,\omega} = (\cdot|\cdot)_x - |x - \omega|$, on obtient pour tout $x \in X$ des distances $d_{x,\omega}(\cdot, \cdot) = e^{-(\cdot|\cdot)_{x,\omega}}$ qui sont simplement des dilatés de la métrique de Bourdon d_x par un facteur $e^{|x-\omega|}$.

Proposition 2.3.3. *Si Γ est un sous-groupe d'isométries de X qui agit géométriquement sur X , alors tout espace tangent faible de ∂X muni d'une métrique de Bourdon est isométrique à un bord épointé muni d'une métrique de la forme $d_{\xi,\omega}$.*

Démonstration. Soit (Z, z_0) un espace tangent faible. Il existe donc une suite $R_n \rightarrow +\infty$, des points $\xi_n \in \partial X$ tel que $(\partial X, R_n d_\omega, \xi_n)$ converge au sens de Hausdorff-Gromov vers (Z, z_0) . Soit $\omega_n \in [\omega, \xi_n]$ tel que $|\omega - \omega_n| = \log R_n$. Alors la distance $R_n d_\omega = e^{|\omega - \omega_n|} d_\omega$ n'est autre que ce que nous avons appelé d_{ω, ω_n} . Comme l'action de Γ est cocompacte, il existe un compact L et des isométries $\gamma_n \in \Gamma$ tels que $\gamma_n(\omega_n) \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$|\gamma_n(\omega_n) - \gamma_n(\omega)| = |\omega - \omega_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par compacité de L , ∂X et \bar{X} respectivement, on peut supposer, quitte à extraire, que

- $\gamma_n(\omega_n)$ converge vers $\omega_0 \in L$,
- $\gamma_n(\omega)$ converge vers un certain $\eta \in \partial X$,
- $\gamma_n(\xi_n)$ converge vers un certain $\xi \in \partial X$.

Comme $\omega_n \in [\omega, \xi_n]$ pour tout entier n , $\gamma_n(\omega_n)$ appartient au rayon $[\gamma_n(\omega), \gamma_n(\xi_n)]$ pour tout entier n . En particulier, ω_0 appartient à la géodésique (ξ, η) et par conséquent, $\xi \neq \eta$.

Enfin, γ_n^{-1} réalise une isométrie entre les espaces $Y_n := (\partial X, d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}, \gamma_n(\xi_n))$ et $(\partial X, R_n d_\omega, \xi_n)$. Il s'ensuit que la suite des espaces métriques Y_n converge aussi vers (Z, z_0) . La proposition résulte alors des deux lemmes suivants.

□

Lemme 2.3.4. *Quitte à extraire une nouvelle fois, on peut supposer que $d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}$ converge vers d_{η, ω_0} uniformément sur les compacts de $\partial X \setminus \{\eta\}$.*

Démonstration. Soient η_n l'extrémité de la géodésique portant $\gamma_n(\omega_n)$ et $\gamma_n(\omega)$ (l'autre extrémité étant $\gamma_n(\xi_n)$) et μ_n le rayon géodésique d'extrémités $\gamma_n(\omega_n)$ et η_n .

D'après la preuve de la proposition 2.2.5, on a :

$$d_{\eta_n, \gamma_n(\omega_n)} \geq d_{\mu_n(t), \gamma_n(\omega_n)} \geq d_{\gamma_n(\omega_n)}, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, comme $\gamma_n(\omega) \in [\gamma_n(\omega_n), \eta_n]$, il existe $t_n \geq 0$ tel que $\mu_n(t_n) = \gamma_n(\omega)$. Comme $\gamma_n(\omega)$ sort de tout compact, t_n tend vers l'infini. Si μ désigne le rayon géodésique d'extrémités ω_0 et η , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $n_k \in \mathbb{N}$ et $s_{n_k} \in [0, t_{n_k}]$ tel que $|\mu(k) - \mu_{n_k}(s_{n_k})| \leq \frac{1}{k}$.

Par conséquent, encore d'après la proposition 2.2.5, on a :

$$d_{\eta_{n_k}, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})} \geq d_{\gamma_{n_k}(\omega), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})} \geq d_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})}.$$

Maintenant, d'après la proposition 2.2.9, le membre de gauche converge vers d_{η, ω_0} uniformément sur les compacts.

D'autre part, pour $u, v \in \partial X$, si on pose $I_k(u, v) = |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})} - (u|v)_{\mu(k), \omega_0}|$, on a

$$\begin{aligned}
I_k(u, v) &\leq |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \omega_0} - (u|v)_{\mu(k), \omega_0}| + |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})} - (u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \omega_0}| \\
&\leq |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \omega_0} - (u|v)_{\mu(k), \omega_0}| + d(\omega_0, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})) \\
&\leq |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k})} - (u|v)_{\mu(k)} + d(\omega_0, \mu(k)) - d(\omega_0, \mu_{n_k}(s_{n_k}))| + d(\omega_0, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})) \\
&\leq d(\mu(k), \mu_{n_k}(s_{n_k})) + |(u|v)_{\mu_{n_k}(s_{n_k})} - (u|v)_{\mu(k)}| + d(\omega_0, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})) \\
&\leq 2d(\mu(k), \mu_{n_k}(s_{n_k})) + d(\omega_0, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})) \\
&\leq \frac{2}{k} + d(\omega_0, \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})) \\
&\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{unif}} 0
\end{aligned}$$

Or d'après la proposition 2.2.5, $d_{\mu(k), \omega_0}$ converge vers d_{η, ω_0} uniformément sur les compacts, il en est donc de même de $d_{\mu_{n_k}(s_{n_k}), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})}$. Par encadrement, on en déduit que $d_{\gamma_{n_k}(\omega), \gamma_{n_k}(\omega_{n_k})}$ converge aussi vers d_{η, ω_0} uniformément sur tout compact. \square

Lemme 2.3.5. *L'espace métrique $Y_\infty = (\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, \omega_0}, \xi)$ est isométrique à Z .*

Démonstration. Par hypothèse, la suite $Y_n = (\partial X, d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}, \gamma_n(\xi_n))$ converge vers (Z, z_0) au sens de Hausdorff-Gromov. Donc pour tous $r > 0$ et $\epsilon > 0$ il existe un rang n_0 , un ensemble $M \subset B_Z(z_0, r)$, des ensembles $M_n \subset B_{Y_n}(\gamma_n(\xi_n), r)$ et des bijections $f_n : M_n \rightarrow M$ tels que pour tout $n > n_0$:

- $\gamma_n(\xi_n) \in M_n, z_0 \in M$ et $f_n(\gamma_n(\xi_n)) = z_0$,
- M et M_n sont ϵ -denses dans $B_Z(z_0, r)$ et $B_{Y_n}(\gamma_n(\xi_n), R)$ respectivement,
- $|d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}(x, y) - d_Z(f_n(x), f_n(y))| \leq \epsilon$ pour tous $x, y \in M_n$, i.e. $\text{dis}(f_n) \leq \epsilon$.

Par le lemme précédent, il existe un compact K et un rang n_1 tel que pour tout $n > n_1$, K contient les boules $B_{Y_n}(\gamma_n(\xi_n), r)$ et $B_{Y_\infty}(\xi, r)$ et $|d_{\eta, \omega_0}(x, y) - d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}(x, y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour tous $x, y \in K$.

En particulier,

$$B_{Y_\infty}(\xi, r) \subset B_{Y_n}(\gamma_n(\xi_n), r + \epsilon) \subset B_{Y_\infty}(\xi, r + 2\epsilon).$$

Donc $f_n : (M_n, d_{\eta, \omega_0}) \rightarrow M$ satisfait les conditions suivantes à partir d'un certain rang :

- $M_n \subset B_{Y_\infty}(\xi, r + 2\epsilon)$ est 2ϵ -dense dans $B_{Y_\infty}(\xi, r)$,
- $|d_{\eta, \omega_0}(x, y) - d_Z(f_n(x), f_n(y))| \leq 2\epsilon$ pour tous $x, y \in M_n$.

Par extraction diagonale, quand $\epsilon \rightarrow 0$ puis $r \rightarrow +\infty$ (les boules fermées sont compactes car les espaces considérés sont tous propres), on obtient une application f définie sur un sous-ensemble dense de Y_∞ , à valeurs dans un sous-ensemble dense de Z et de distorsion nulle. C'est donc un plongement isométrique. Cette application envoie ξ sur z_0 car $\gamma_n(\xi_n) \rightarrow \xi$ et $f_n(\gamma_n(\xi_n)) = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les espaces considérés étant complets, f se prolonge en un plongement isométrique $f : Y_\infty \rightarrow Z$. En procédant de même avec f_n^{-1} , on voit que f est bijective. C'est donc une isométrie. \square

2.4 Courbes rectifiables au bord

On s'intéresse maintenant aux courbes rectifiables sur le bord. Si de telles courbes existent, alors la proposition 2.3.3 nous permet de déduire l'existence de plans hyperboliques isométriquement plongés dans X . On commence par rappeler un résultat dû à Margulis et Mostow qui montre que les courbes rectifiables donnent naissance à des géodésiques dans les espaces tangents.

Une courbe c dans un espace métrique est dite *paramétrisée par la longueur d'arc* si pour tous $t, t' \in I$, $t < t'$, la longueur de $c|_{[t, t']}$ est égale à $t' - t$. Une telle courbe est en particulier 1-lipschitzienne.

Lemme 2.4.1 (lemme 9.1 de [53]). Soient X un espace métrique propre et $c : I \rightarrow X$ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(c(t+h), c(t-h))}{2|h|} = 1.$$

Remarque(s) 2.4.2. Notons qu'il est superflu de demander que X soit un espace de longueur dans le lemme ci-dessus.

Corollaire 2.4.3. Soient $c : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow (\partial X, d_\omega)$ une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc, $h > 0$, telle que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(c(t_0 + s), c(t_0 - s))}{2|s|} = 1.$$

Soit (Z, z_0) un espace tangent faible de $(\partial X, d_\omega, c(t_0))$. Alors z_0 est contenu dans une géodésique bi-infinie de Z ; cette géodésique est une limite de reparamétrages de c .

Démonstration. Par hypothèse, (Z, z_0) est limite d'une suite $(\partial X, R_n d_\omega, c(t_0))$ avec $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Pour tout n , on définit les courbes $c_n(t) = c(t_0 + R_n^{-1}t)$, $t \in [-R_n h, R_n h]$. Comme c est paramétrée par la longueur d'arc pour d_ω , c_n l'est pour la distance $R_n d_\omega$. En conservant les notations de la preuve de la proposition 2.3.3, on en déduit que les courbes $\gamma_n^{-1} \circ c_n$ sont aussi paramétrées par la longueur d'arc pour $d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}$. D'après le théorème d'Ascoli et la proposition 2.3.3, il existe une courbe

$$c_\infty : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (Z, z_0)$$

telle que la suite $\gamma_n^{-1} \circ c_n$ converge vers c_∞ uniformément sur tout compact (quitte à extraire). Montrons que c_∞ est une géodésique de Z . On a, d'une part,

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_\omega(c_n(t), c_n(-t))}{2R_n^{-1}|t|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_{\gamma_n(\omega), \gamma_n(\omega_n)}(\gamma_n^{-1} \circ c_n(t), \gamma_n^{-1} \circ c_n(-t))}{2|t|} \\ &= \frac{d_Z(c_\infty(t), c_\infty(-t))}{2|t|}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme les courbes c_n sont 1-lipschitzienne, il en est de même de c_∞ donc

$$\frac{d_Z(c_\infty(t), c_\infty(-t))}{2|t|} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{d_Z(c_\infty(t), c_\infty(0))}{|t|} + \frac{d_Z(c_\infty(0), c_\infty(-t))}{|t|} \right) \leq 1,$$

ce qui donne $d_Z(c_\infty(0), c_\infty(t)) = |t|$.

Maintenant, soient s et t deux réels avec $|s| \geq |t|$.

— Si $st > 0$, alors

$$|s - t| = ||s| - |t|| = |d_Z(c_\infty(0), c_\infty(s)) - d_Z(c_\infty(0), c_\infty(t))| \leq d_Z(c_\infty(t), c_\infty(s)) \leq |t - s|.$$

— Si $st < 0$, alors $|s - t| = |s| + |t|$ et $|s + t| = |s| - |t|$ donc

$$|s - t| = 2|s| - (|s| - |t|) = d_Z(c_\infty(-s), c_\infty(s)) - d_Z(c_\infty(t), c_\infty(-s)) \leq d_Z(c_\infty(t), c_\infty(s)) \leq |s - t|.$$

Dans tous les cas, $d_Z(c_\infty(t), c_\infty(s)) = |s - t|$. Ainsi, c_∞ est une géodésique de Z . \square

On rappelle que dans un espace métrique (Z, d) le *birapport* de quatre points deux à deux

distincts $x, y, z, t \in Z$ est la quantité

$$[x, y, z, t]_d = \frac{d(x, z)d(y, t)}{d(x, t)d(y, z)}.$$

Un homéomorphisme de Z préservant le birapport est appelé un *homéomorphisme Möbius*. La proposition suivante illustre l'intérêt de trouver des courbes rectifiables au bord.

Proposition 2.4.4. *Soit $c : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, \omega}, \xi)$ une géodésique. Alors c se prolonge en un homéomorphisme Möbius (voir la définition 3.2.4)*

$$\bar{c} : \mathbb{S}^1 \rightarrow (c(\mathbb{R}) \cup \{\eta\}, d_\omega).$$

En particulier, $c(\mathbb{R}) \cup \{\eta\}$ est le bord d'un plan hyperbolique isométriquement plongé dans X .

Démonstration. On considère le plongement isométrique

$$c : (\mathbb{R}, |\cdot|, 0) \longrightarrow (\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, \omega}, \xi).$$

Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, le bord époinché $(\partial \mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}, d_{i, \infty}, 0)$ est naturellement isométrique à $(\mathbb{R}, |\cdot|, 0)$; on obtient donc le plongement isométrique suivant, que l'on note encore c par abus :

$$c : (\partial \mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}, d_{i, \infty}, 0) \longrightarrow (\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, \omega}, \xi).$$

En particulier, c est une application Möbius, i.e qui préserve les birapports : pour tout quadruplet admissible (r, s, t, u) d'éléments de $\partial \mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}$ on a

$$[r, s, t, u]_{d_{i, \infty}} = [c(r), c(s), c(t), c(u)]_{d_{\eta, \omega}},$$

où $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]_d$ désigne le birapport associé à la distance d . Or, pour tout espace CAT(-1) et toute métrique de Bourdon, on a l'égalité $[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]_{d_\omega} = [\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]_{d_{\eta, \omega}}$. En effet, pour (x, y, z, t) un quadruplet admissible de $(\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, \omega})$, on a

$$\begin{aligned} [x, y, z, t]_{d_{\eta, \omega}} &= \frac{d_{\eta, \omega}(x, z)d_{\eta, \omega}(y, t)}{d_{\eta, \omega}(x, t)d_{\eta, \omega}(y, z)} \\ &= \frac{d_\omega(x, z)d_\omega(y, t)}{d_\omega(\eta, x)d_\omega(\eta, z)d_\omega(\eta, y)d_\omega(\eta, t)} \frac{d_\omega(\eta, x)d_\omega(\eta, t)d_\omega(\eta, y)d_\omega(\eta, z)}{d_\omega(x, t)d_\omega(y, z)} \\ &= \frac{d_\omega(x, z)d_\omega(y, t)}{d_\omega(x, t)d_\omega(y, z)} \\ &= [x, y, z, t]_{d_\omega}. \end{aligned}$$

On a donc une application Möbius $c : (\partial \mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}, d_i, 0) \longrightarrow (\partial X, d_\omega, \xi)$. De plus, pour $s \in \partial \mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}$, comme $d_{\infty, i}(s, 0) = d_{\eta, \omega}(c(s), c(0))$, on a

$$\begin{aligned} d_\omega(c(s), \eta) &= \frac{d_i(\infty, s)d_i(\infty, 0)d_\omega(c(s), c(0))}{d_i(s, 0)d_\omega(c(0), \eta)} \\ &\leq Cd_i(s, \infty). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que c se prolonge en une application continue $\bar{c} : (\partial \mathbb{H}^2, d_i, 0) \rightarrow (\partial X, d_\omega, \xi)$ en posant $\bar{c}(\infty) = \eta$. Il reste à montrer que \bar{c} préserve les birapports de quadruplets admissibles contenant ∞ . Soit (s, t, u, ∞) un tel quadruplet et considérons une suite $(v_n)_n$ tendant vers ∞ . À partir d'un certain rang les quadruplets (s, t, u, v_n) sont admissibles et

$$[s, t, u, v_n]_{d_i} = [c(s), c(t), c(u), c(v_n)]_{d_\omega}.$$

Par continuité, on obtient :

$$[s, t, u, \infty]_{d_i} = [c(s), c(t), c(u), \eta]_{d_\omega}.$$

On peut faire de même si s, t ou u est égal à ∞ , ce qui montre que \bar{c} est Möbius.

D'après le résultat principal de [14], tout plongement de Möbius du bord d'un espace symétrique de rang 1 S dans un espace CAT(-1) X s'étend en un plongement isométrique de S dans X . En particulier, \bar{c} est le bord d'un plongement isométrique de \mathbb{H}^2 dans X . \square

En particulier, en présence de suffisamment de courbes rectifiables, on peut obtenir beaucoup de cercles au bord donc beaucoup de \mathbb{H}^2 dans notre espace X . La notion de *module* d'une famille de courbes permet de quantifier l'abondance de courbes rectifiables.

Définition 2.4.5. Soit (Y, d, μ) un espace métrique mesuré et soit $Q \geq 1$. Le Q -module d'une famille de courbes \mathcal{F} est le nombre défini par

$$\text{Mod}_Q(\mathcal{F}) = \inf_{\rho} \int_Y \rho^Q d\mu,$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des fonctions ρ \mathcal{F} -admissibles, i.e., les fonctions mesurables $\rho : Y \rightarrow [0, \infty]$ telles que $\int_c \rho ds \geq 1$ pour toute courbe $c \in \mathcal{F}$ localement rectifiable.

Il est facile de voir que Mod_Q définit une mesure extérieure sur l'ensemble des courbes rectifiables (voir la proposition 4.1.6. de [51]).

Lemme 2.4.6. Soient (Y, d) un espace métrique et \mathcal{F} l'ensemble de toutes les courbes localement rectifiables de Y . Si $\text{Mod}_Q(\mathcal{F}) > 0$ pour un réel $Q \geq 1$ par rapport à une mesure borélienne μ , alors pour tout borélien A de mesure pleine, il existe une famille de courbes $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$ de Q -module positif telle que pour toute courbe $c \in \mathcal{F}_A$, $c(t)$ appartient à A pour presque tout temps t .

Démonstration. Supposons que $\text{Mod}_Q(\mathcal{F}) > 0$ pour un réel $Q \geq 1$ et une mesure borélienne μ , et soit A un borélien de mesure pleine. On définit les familles de courbes suivantes :

$$\mathcal{F}_{A^c} = \left\{ c \in \mathcal{F} \mid \int_c \mathbb{1}_{A^c} > 0 \right\} \text{ et } \mathcal{F}_A = \left\{ c \in \mathcal{F} \mid \int_c \mathbb{1}_{A^c} = 0 \right\}.$$

Montrons dans un premier temps que $\text{Mod}_Q(\mathcal{F}_{A^c}) = 0$. Pour $n \geq 1$, notons \mathcal{F}_n le sous-ensemble de \mathcal{F}_{A^c} constitué des courbes passant dans A^c pendant un temps total au moins égal à $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_n = \left\{ c \in \mathcal{F}_{A^c} \mid \int_c \mathbb{1}_{A^c} \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Il est facile de voir que la fonction $n\mathbb{1}_{A^c}$ est \mathcal{F}_n -admissible donc

$$\text{Mod}_Q(\mathcal{F}_n) \leq \int_Y n^Q \mathbb{1}_{A^c} d\mu = 0.$$

En remarquant que $\mathcal{F}_{A^c} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$, on obtient que $\text{Mod}_Q(\mathcal{F}_{A^c}) = 0$ par σ -sous-additivité du module.

D'autre part, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_{A^c}$ et la sous-additivité donne :

$$0 < \text{Mod}_Q(\mathcal{F}) \leq \text{Mod}_Q(\mathcal{F}_A) + \text{Mod}_Q(\mathcal{F}_{A^c}) = \text{Mod}_Q(\mathcal{F}_A).$$

Par définition, si c est une courbe de \mathcal{F}_A , $\int_c \mathbb{1}_{A^c} = 0$ donc pour presque tout t , $c(t) \in A$. \square

On obtient alors :

Proposition 2.4.7. Soit $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ une action géométrique d'un groupe discret sur un espace CAT(-1). Supposons que ∂X contient une famille de courbes rectifiables de Q -module positif, $Q \geq 1$, pour la mesure de Hausdorff associée à une distance visuelle. Alors toute géodésique bi-infinie de X est contenue dans l'image d'un plan hyperbolique isométriquement plongé dans X .

Remarque(s) 2.4.8. Le réel $Q \geq 1$ de l'énoncé ci-dessus est, *a priori*, indépendant de la dimension conforme de ∂X .

Avant de démontrer la proposition 2.4.7, rappelons la définition de *point de Myrberg*.

Définition 2.4.9. Soit $\Gamma \curvearrowright (X, d)$ une action proprement discontinue par isométries sur un espace CAT(-1) et soit $x \in X$. Un point $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ est appelé un *point de Myrberg* si pour toute paire de points distincts $\eta, \eta' \in \Lambda(\Gamma)$ il existe une suite d'isométries $(\gamma_n) \subset \Gamma$ telle que $\gamma_n x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta$ et $\gamma_n \xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta'$.

Si Γ est de type divergent (c'est en particulier le cas si l'action est convexe-cocompacte), les points de Myrberg forment un borélien de mesure pleine pour la mesure de Patterson-Sullivan sur $\Lambda(\Gamma)$ (voir [63]).

Démonstration de la proposition 2.4.7. Le lemme 2.4.6 appliqué à l'ensemble A des points de Myrberg et le lemme 2.4.1 entraînent l'existence d'une courbe rectifiable $c : (-\tau, \tau) \rightarrow (\partial X, d_x)$ (paramétrée par la longueur d'arc) telle que $\xi := c(0)$ est un point de Myrberg et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_x(c(h), c(-h))}{2|h|} = 1.$$

Soient $\eta, \eta' \in \partial X$ et $(\gamma_n) \in \Gamma$ tels que

$$\gamma_n x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta \text{ et } \gamma_n \xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta'.$$

Fixons un point $x' \in (\eta, \eta')$. Les rayons géodésiques $r_n := \gamma_n[x, \xi]$ convergent vers la géodésique (η, η') donc on peut choisir un point x'_n sur chaque rayon r_n de sorte que la distance $d(x'_n, x')$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. Soit alors $x_n = \gamma_n^{-1}x'_n$ et $R_n = e^{|x-x_n|}$ (remarquons que $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$). Alors

$$(\partial X, R_n d_x, \xi) = (\partial X, d_{x, x_n}, \xi) \xrightarrow[\text{iso}]{\gamma_n} (\partial X, d_{\gamma_n(x), x'_n}, \gamma_n \xi),$$

et d'après la proposition 2.3.3 et les lemmes 2.3.4 et 2.3.5, le membre de droite converge au sens de Gromov-Hausdorff vers $(\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, x'}, \eta')$.

D'autre part, d'après le corollaire 2.4.3, η' est contenue dans une géodésique bi-infinie de $(\partial X \setminus \{\eta\}, d_{\eta, x'})$. Enfin, d'après la Propriété 2.4.4, la réunion de cette géodésique avec η est le bord d'un plan hyperbolique H isométriquement plongé dans X . En particulier, (η, η') est contenue dans H par convexité. \square

Rappelons le théorème de rigidité de Hamenstädt [43] :

Théorème 2.4.10. Soit M une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Soit $-a^2 < 0$ la courbure maximale et supposons que pour tout vecteur unitaire tangent v il existe un champ de vecteurs E parallèle le long de la géodésique γ_v définie par $\gamma'_v(0) = v$ tel que

1. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est orthogonal à $\gamma_v(t)$,
2. pour tout $t \in \mathbb{R}$, le plan engendré par $E(t)$ et $\gamma'_v(t)$ est de courbure égale à $-a^2$.

Alors M est localement symétrique de rang 1.

La mesure de Hausdorff au bord associée à une distance visuelle est égale, à une constante multiplicative près, à la mesure de Patterson-Sullivan. Combiné à la proposition 2.4.7 ce théorème nous permet de retrouver un résultat dû à Connell.

Théorème 2.4.11 (théorème 4.3 de [22] pour la mesure de Patterson-Sullivan). *Soit X une variété simplement connexe cocompacte de courbure majorée par -1 . Si ∂X possède une famille de courbes rectifiables de Q -module positif pour la mesure de Patterson-Sullivan, $Q \geq 1$, alors X est une variété symétrique de rang 1.*

L'approche de Connell consiste à utiliser l'hypothèse de positivité du module pour montrer que presque tout vecteur tangent est d'exposant de Lyapunov minimal ; en étudiant la croissance des champs de Jacobi, il en déduit que les hypothèses du théorème d'Hamenstädt sont vérifiées. Notre approche consiste aussi à se ramener aux hypothèses du théorème d'Hamenstädt. Cependant, pour cela on applique les outils développés dans cette partie, qui sont purement métriques et ne nécessitent aucune structure différentiable.

Démonstration. Comme les courbures sectionnelles de X sont majorées par -1 , X est CAT(-1). D'après la proposition 2.4.7, toute géodésique de X est contenue dans une copie isométriquement plongée du plan hyperbolique. En particulier, le rang hyperbolique de X est strictement positif et le théorème 2.4.10 implique donc que X est symétrique de rang 1. \square

2.5 Annexe : Métriques de Bourdon pointées vs métriques de Hamenstädt

Comme on vient de le voir, le théorème 2.4.11 est une conséquence du théorème de rigidité du rang de Hamenstädt. La preuve de ce théorème passe par l'étude d'une famille de métriques sur les bords épointés, les *distances de Hamenstädt* (voir la définition 2.5.2). L'objectif de cette annexe est de mettre en lumière les liens existant entre les distances de Hamenstädt et les distances de Bourdon pointées.

Dans toute cette partie, M désigne une variété riemannienne compacte dont les courbures sectionnelles sont majorées par -1 et on note X son revêtement universel.

Notation 2.5.1. Pour $v \in T^1X$, on notera :

- γ_v la géodésique définie par v ,
- β_v la fonction de Busemann en $\xi = \gamma_v(-\infty)$ normalisée de sorte que $\beta_v(\gamma_v(t)) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $d_{v,t}$ la distance sur l'horosphère $\mathcal{H}_\xi(\gamma_v(t))$ induite par la métrique riemannienne,
- pour $\eta \in \partial X \setminus \{\xi\}$, $t \mapsto \pi_{v,t}(\eta)$ la géodésique reliant ξ à η paramétrée de sorte que $\pi_{v,t}(\eta) \in \mathcal{H}_\xi(\gamma_v(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 2.5.2 ([42]). Soient $v \in T^1X$ et $R > 0$. La fonction définie par

$$D_{v,R} : (\eta, \eta') \in \partial X \setminus \{\xi\} \longmapsto e^{-\sup\{t \in \mathbb{R} \mid d_{v,t}(\pi_{v,t}(x), \pi_{v,t}(y)) \leq R\}}$$

est une distance sur $\partial X \setminus \{\xi\}$. De plus, si $0 < r < R$ alors

$$D_{v,R} \leq D_{v,r} \leq \frac{R}{r} D_{v,R}.$$

Pour $v \in T^1X$, on notera d_v pour désigner la métrique de Bourdon pointée $d_{\gamma_v(-\infty), \gamma_v(0)}$.

Les distances de Bourdon pointées et les distances de Hamenstädt partagent de nombreuses propriétés :

Proposition 2.5.3. *Soit $v \in T^1X$. Pour $\rho_v = d_v$ ou $D_{v,R}$, on a*

- $\rho_w = \rho_v$ pour tout $w \in W^{su}(v)$,

- $\rho_{g^t v} = e^t \rho_v$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $\rho_{d\gamma.v} = \rho_v \circ \gamma^{-1}$ pour toute isométrie γ .

De même, le résultat suivant est à rapprocher du corollaire 1.4 de [43].

Proposition 2.5.4. *Soit $x \in \partial \tilde{M} \setminus \{\xi, \eta\}$ et posons $s = \beta_x(z_\eta, z_\xi)$ où $\{z_\xi\} = (x, \xi) \cap \mathcal{H}_\xi(\omega)$ et $\{z_\eta\} = (x, \eta) \cap \mathcal{H}_\eta(\omega')$. Alors*

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{d_{\xi, \omega}(x, y)}{d_{\eta, \omega'}(x, y)} = e^s.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d_{\xi, \omega}(x, y)}{d_{\eta, \omega'}(x, y)} &= e^{\beta_\xi(\omega, \omega')} \frac{d_{\xi, \omega'}(x, y)}{d_{\eta, \omega'}(x, y)} \\ &= e^{\beta_\xi(\omega, \omega')} \frac{d_{\omega'}(x, \eta) d_{\omega'}(y, \eta)}{d_{\omega'}(x, \xi) d_{\omega'}(y, \xi)} \\ &\xrightarrow{y \rightarrow x} e^{\beta_\xi(\omega, \omega')} \frac{d_{\omega'}(x, \eta)^2}{d_{\omega'}(x, \xi)^2} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} e^{\beta_\xi(\omega, \omega')} \frac{d_{\omega'}(x, \eta)^2}{d_{\omega'}(x, \xi)^2} &= e^{\beta_x(\omega', z_\xi) + \beta_a(\omega', z_\xi) - \beta_x(\omega', z_\eta) - \beta_\eta(\omega', z_\eta) + \beta_\xi(\omega, \omega')} \\ &= e^{\beta_x(z_\eta, z_\xi)}. \end{aligned}$$

□

À partir de maintenant, on notera $D_v := D_{v,1}$. Remarquons que la boule $B_{D_v}(\eta, \epsilon)$ de centre η et de rayon ϵ pour la distance D_v est la projection de la boule de centre $\pi_{v, \log(\frac{1}{\epsilon})}(\eta)$ et de rayon 1 de $(\beta_v^{-1}(\log \frac{1}{\epsilon}), d_{v, \log \frac{1}{\epsilon}})$.

Lemme 2.5.5. *Soit $v \in T^1 X$. On a $d_v \leq e^{\frac{1}{2}} D_v$.*

Démonstration. Soient $x, y \in \partial X \setminus \{\gamma_v(-\infty)\}$ et $r = D_v(x, y)$. Par définition de D_v , on a

$$1 = d_{v, \ln(1/r)}(\pi_{v, \ln(1/r)}(x), \pi_{v, \ln(1/r)}(y)).$$

D'autre part, en posant $\xi = \gamma_v(-\infty)$ et $\omega = \gamma_v(0)$, on a

$$\begin{aligned} (\pi_{v,t}(x) | \pi_{v,t}(y))_{\xi, \omega} &= \frac{1}{2}(\beta_v(\pi_{v,t}(x)) + \beta_v(\pi_{v,t}(y)) - d(\pi_{v,t}(x), \pi_{v,t}(y))) \\ &= \frac{1}{2}(2t - d(\pi_{v,t}(x), \pi_{v,t}(y))). \end{aligned}$$

De plus, pour $t > \ln(1/r)$, on a

$$\begin{aligned} d(\pi_{v,t}(x), \pi_{v,t}(y)) &\leq d(\pi_{v,t}(x), \pi_{v, \ln(1/r)}(x)) + d(\pi_{v, \ln(1/r)}(x), \pi_{v, \ln(1/r)}(y)) + d(\pi_{v, \ln(1/r)}(y), \pi_{v,t}(y)) \\ &\leq 2(t - \ln(1/r)) + 1. \end{aligned}$$

Par suite,

$$(\pi_{v,t}(x) | \pi_{v,t}(y))_{\xi, \omega} \geq \frac{1}{2} \left(2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right),$$

et en faisant tendre t vers $+\infty$:

$$(x|y)_{\xi,\omega} \geq \ln\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{2}.$$

Finalement, $d_v(x, y) = d_{\xi,\omega}(x, y) \leq e^{\frac{1}{2}}r$. \square

Lemme 2.5.6. Soit $v \in T^1X$. Il existe une constante $\mu > 0$ indépendante de v telle que $\mu D_v \leq d_v$.

Pour démontrer ce lemme, il est commode d'introduire la fonction suivante : pour $x, y \in \partial X \setminus \{\gamma_v(-\infty)\}$, on définit $\rho_v(x, y) = e^{-\sup\{t \in \mathbb{R} \mid d(\pi_{v,t}(x), \pi_{v,t}(y)) \leq 1\}}$. Notons que ρ_v n'est pas une distance. Toutefois, d'après le lemme 4 de [42], il existe une constante $\nu > 0$ indépendante de v telle que $\nu\eta_v \leq \rho_v$.

Démonstration. Soient $x, y \in \partial X \setminus \{\gamma_v(-\infty)\}$, $r = \rho_v(x, y)$ et $t_0 = \ln(1/r)$. Par définition de ρ_v , la distance $d(\pi_{v,t_0}(x), \pi_{v,t_0}(y))$ est égale à 1.

On note $\xi = \gamma_v(-\infty)$ et $\omega = \gamma_v(0)$. Soit $(\xi_n)_n$ une suite d'éléments de $(\pi_{v,t_0}(x), \xi)$ telle que $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi$. On pose $x_t = \pi_{v,t+t_0}(x)$, $y_t = \pi_{v,t+t_0}(y)$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un triangle de comparaison $\Delta_n(\bar{x}_t^n, \bar{y}_t^n, \bar{\xi}_n)$ dans le modèle du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 pour le triangle $\Delta(x_t, y_t, \xi_n)$ avec $\bar{x}_t^n = ie^{-(t+t_0)}$ et $[\bar{x}_t, \bar{\xi}_n] \subset i\mathbb{R}$. Alors, $\bar{x}_0^n = e^{-it_0}$ et, quand n tend vers $+\infty$, $\bar{\xi}_n$ tend vers ∞ . Par ailleurs, \bar{y}_t^n reste dans la boule de centre $ie^{-(t+t_0)}$ de rayon $d(x_t, y_t)$ qui est compacte. Donc, quitte à extraire, on peut supposer que \bar{y}_t^n converge vers un certain $\bar{y}_t^\infty \in \mathbb{H}^2$.

Si \bar{u}_n désigne le point de $[\bar{\xi}_n, \bar{y}_t^n]$ situé sur la sphère de centre $\bar{\xi}_n$ passant par \bar{x}_0 , alors \bar{u}_n converge vers le point u_∞ appartenant à l'horosphère centrée en ∞ passant par \bar{x}_0 et satisfaisant $d_{\mathbb{H}^2}(\bar{y}_t^\infty, u_\infty) = t$ (car la suite des points $u_n \in [\bar{\xi}_n, y_t] \cap S(\xi_n, d(x_0, \xi_n))$ correspondant dans X tend vers y_0). Par conséquent on a

$$\begin{aligned} d(x_t, y_t) &= d_{\mathbb{H}^2}(\bar{x}_t^n, \bar{y}_t^n) = 2 \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{2} \frac{|\bar{x}_t^n - \bar{y}_t^n|}{2(\operatorname{Im}(\bar{x}_t^n)\operatorname{Im}(\bar{y}_t^n))^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{2} \frac{|\operatorname{Re}(\bar{x}_0 - u_\infty)|}{2e^{-(t+t_0)}} \right). \end{aligned}$$

Or $d_{\mathbb{H}^2}(\bar{x}_0, u_\infty) = 2 \operatorname{argsh} \left(\frac{1}{2} \frac{|\operatorname{Re}(\bar{x}_0 - u_\infty)|}{2e^{-t_0}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\mathbb{H}^2}(\bar{x}_0, \bar{u}_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_0, u_n) = d(x_0, y_0) = 1$, où u_n est le point de $[\xi_n, y_t]$ situé sur la sphère de centre ξ_n passant par x_0 (et qui tend donc vers y_0).

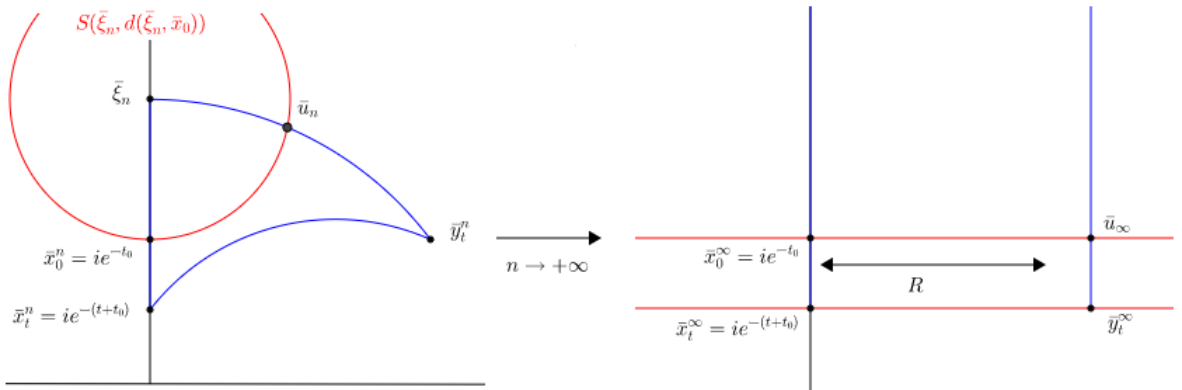


FIGURE 2.3 – Comparaison avec \mathbb{H}^2 .

Posons $R = |\operatorname{Re}(\bar{x}_0 - u_\infty)|$. D'après ce qui précède on a :

— $\operatorname{sh}(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}Re^{t_0}$,

— $d(x_t, y_t) = 2\operatorname{argsh}(\frac{1}{2}\frac{R}{2e^{-(t+t_0)}}) = 2\ln(\frac{1}{2}Re^{t+t_0} + \sqrt{(\frac{1}{2}Re^{t+t_0})^2 + 1})$.

Donc

$$\begin{aligned} d(x_t, y_t) &\geq 2\ln(\operatorname{sh}(1/2)e^t + \sqrt{(\frac{1}{2}Re^{t+t_0})^2 + 1}) \\ &\geq 2(t + \ln \operatorname{sh}(1/2)). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (\pi_{v,t+t_0}(x)|\pi_{v,t+t_0}(y))_{\xi,\omega} &= \frac{1}{2}(\beta_v(\pi_{v,t+t_0}(x)) + \beta_v(\pi_{v,t+t_0}(y)) - d(\pi_{v,t+t_0}(x), \pi_{v,t+t_0}(y))) \\ &= \frac{1}{2}(2t + 2t_0 - d(\pi_{v,t+t_0}(x), \pi_{v,t+t_0}(y))) \\ &\leq \frac{1}{2}(2t + 2t_0 - 2t - 2\ln \operatorname{sh}(1/2)) \\ &= t_0 - \ln \operatorname{sh}(1/2). \end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite quand t tend vers $+\infty$, on trouve $(x|y)_{\xi,\omega} \leq t_0 - \ln \operatorname{sh}(1/2)$ donc,

$$d_v(x, y) = d_{\xi,\omega}(x, y) \geq e^{-t_0}\operatorname{sh}(1/2) = \rho_v(x, y)\operatorname{sh}(1/2).$$

Par conséquent, $\mu = v\operatorname{sh}(1/2)$ convient. \square

Corollaire 2.5.7. Pour tout $v \in T^1X$, les distances D_v et d_v sont bi-Lipschitz équivalentes, les constantes étant indépendantes de v .

Dans le cas du plan hyperbolique, ces deux familles de distances sont en fait les mêmes.

Exemple 2.5.8. On se place dans le modèle du demi-plan de Poincaré. Comme le groupe d'isométries de \mathbb{H}^2 agit transitivement, il suffit de montrer que d_v et D_v sont égales pour $v = (i, (0, 1))$.

Soient $x, y \in \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}^2 \setminus \{\infty\}$. Alors,

$$\pi_{v,t}(x) = x + ie^{-s} \text{ et } \pi_{v,t}(y) = y + ie^{-s}.$$

Pour $z = \frac{x+y}{2} + i\frac{|x-y|}{2} \in (x, y)$, l'expression de la distance hyperbolique donne

$$\begin{aligned} \beta_x(z, i) &= \beta_x(z, x + i) = \lim_{s \rightarrow +\infty} d(z, \pi_{v,s}(x)) - s \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} 2\ln \left(X(s) + \sqrt{X(s)^2 - 1} \right) - s, \end{aligned}$$

où

$$X(s) = \frac{|z - (x + ie^{-s})|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)e^{-s}}}.$$

En particulier,

$$\beta_x(z, i) = 2\ln|z - x| - \ln|u - v| + \ln 2.$$

On en déduit que,

$$d_{\infty,i}(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(\beta_x(i,z) + \beta_y(i,z))} = 2\frac{|x-z||y-z|}{|x-y|} = |x-y|.$$

D'autre part, la définition de la métrique hyperbolique dans le demi-plan implique que la distance $d_{v,t}$ est égale à $e^t|\cdot|$ où $|\cdot|$ est la distance euclidienne. Il en découle facilement que D_v est

aussi égale à la distance euclidienne sur \mathbb{R} .

FLOT SINGULIER ET DIMENSION DE HAUSDORFF AU BORD DE CERTAINES VARIÉTÉS DE GROMOV-THURSTON

3.1 Introduction

Dans [39], Gromov et Thurston construisent des familles de variétés riemanniennes en toute dimension plus grande que 4 dont les courbures sont arbitrairement proches de -1 et ne portant pas de métrique de courbure constante. Plus précisément :

Théorème 3.1.1 ([39]). *Soient $n \geq 4$ et $\epsilon > 0$. Il existe une variété riemannienne compacte, orientable V_ϵ de dimension n dont les courbures sectionnelles sont comprises entre $-(1 + \epsilon)$ et -1 . De plus, V_ϵ n'a pas le type d'homotopie d'une variété hyperbolique.*

En particulier, cela fournit des exemples de variétés qui ne sont pas localement symétriques (voir la section 3.2.2). Ces variétés, que nous appellerons *variétés de Gromov-Thurston*, sont obtenues en prenant des revêtements de variétés hyperboliques compactes ramifiés au dessus d'une sous-variété totalement géodésique de codimension 2 bordant une sous-variété de codimension 1. Le tiré en arrière de la métrique hyperbolique par ce revêtement est une métrique riemannienne *singulière* de courbure constante : elle n'est pas lisse au voisinage du lieu de ramification. Les métriques de courbure strictement négative construites par Gromov et Thurston s'obtiennent alors en lissant cette métrique singulière. De plus, la courbure sera d'autant plus pincée que le rayon d'injectivité de la variété hyperbolique est grand : en ramifiant au dessus de revêtements finis (classiques) successifs, on peut ainsi obtenir des variétés de courbure arbitrairement proche de -1 .

En dépit du théorème 3.1.1, ces variétés restent assez mal comprises. Notamment, les raisons profondes pour lesquelles ces variétés diffèrent des variétés hyperboliques sont encore, à notre connaissance, méconnues. Plus précisément, une question qui nous intéresse et ayant motivé le présent travail est

Question 3.1.2. Parmi les invariants de quasi-isométries connus, y en a-t-il qui permettent de distinguer les variétés de Gromov-Thurston des variétés hyperboliques ?

Afin de répondre à cette question, il serait intéressant de calculer (ou au moins d'estimer) des invariants de quasi-isométries de ces espaces. Par exemple, ces variétés peuvent être munies de

plusieurs distances quasi-isométriques (des métriques lisses comme celle décrite dans le théorème 3.1.1 ou des métriques singulières comme celle définie dans [34]). Ces distances induisent des métriques visuelles au bord du revêtement universel qui appartiennent toutes à la même classe de quasi-symétrie (voir la définition 3.2.4). La dimension conforme du bord du revêtement universel, définie comme l'infimum des dimensions de Hausdorff des distances dans cette classe, est alors un invariant de quasi-isométries.

Dans cette direction, la proposition 3.2.9 justifie que l'on s'intéresse à des distances sur les variétés V_ϵ qui ne sont pas issues de métriques riemanniennes (lisses). L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'une d'entre elles (la plus naturelle à nos yeux), à savoir la distance de longueur associée à la métrique (non lisse) tirée en arrière de la métrique hyperbolique. Nous appellerons cette métrique la *métrique singulière* ou *métrique CAT(-1)* (cette dernière terminologie sera justifiée plus tard). On étudie le flot géodésique pour cette métrique et on montre que presque toute géodésique passe "très fréquemment" par le lieu singulier (voir les propositions 3.3.22 et 3.3.25 ci-dessous). Cela nous permet d'obtenir une minoration de la dimension de Hausdorff du bord du revêtement universel pour une distance visuelle associée à la métrique CAT(-1) en fonction de la géométrie de V et de son revêtement ramifié V^2 de degré 2 :

Théorème 3.1.3 (propositions 3.3.40 et 3.3.25). *Soit V^{2m} , $m > 1$, une variété de Gromov-Thurston obtenue comme revêtement ramifié cyclique de degré $2m$ d'une variété hyperbolique compacte V de dimension $n \geq 2$. Alors la dimension de Hausdorff δ_{2m} du bord visuel de son revêtement universel (pour toute métrique de Bourdon associée à la métrique CAT(-1)) vérifie*

$$\delta_{2m} \geq n - 1 + \frac{1}{3C_2^2 |m_{\Gamma_2}|} \left(\frac{e^{-2R_0}}{8} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(\frac{r_{\text{inj}}}{8})} \right)^2 \right)^{\delta_2} \ln(m),$$

où $|m_{\Gamma_2}|$ est la masse de la mesure de Bowen-Margulis de V^2 , C_2 est la constante d'Ahlfors régularité de la mesure de Patterson-Sullivan de ∂V^2 et R_0 est une constante universelle qui peut être prise égale à $5 \ln(1 + \sqrt{2})$.

En particulier, la dimension du bord croît avec le degré du revêtement $\ln(m)$ (pour les degrés pairs).

Afin de mieux comprendre le théorème 3.1.3 et sa preuve, nous allons étudier un cas très simplifié du problème qui nous intéresse.

Exemple 3.1.4. Soit S_n un bouquet de n cercles muni de la distance de longueur donnant la longueur 1 à chaque cercle. Le revêtement ramifié cyclique S_{nk} de degré k de S_n au dessus du sommet est alors un bouquet de nk cercles de longueur 1. Le revêtement universel de S_n est l'arbre régulier T_n de valence $2n$. De même, le revêtement universel de S_{nk} est l'arbre régulier T_{nk} de valence $2nk$ et le revêtement ramifié $S_{kn} \rightarrow S_n$ induit un revêtement $T_{kn} \rightarrow T_n$ ramifié au dessus des sommets. Dans ce cas, il est facile de calculer la dimension de Hausdorff ou de manière équivalente, l'entropie volumique des arbres (i.e. le taux de croissance exponentiel du nombre de sommets dans une boule de rayon tendant vers l'infini). On trouve

$$\delta_n = \ln(2n - 1) \text{ et } \delta_{nk} = \ln(2kn - 1).$$

Cependant, il est intéressant de comprendre comment on peut estimer l'entropie du revêtement ramifié à partir de l'entropie de la base. Dans T_n , choisissons un sommet v_0 , qui sera notre point de base, et un sommet v à distance $s \in \mathbb{N}$ de v_0 . Soit w_0 un antécédent de v_0 dans T_{nk} . Le segment géodésique reliant v_0 à v contient exactement $s + 1$ sommets. Or la projection p du revêtement ramifié induit, en restriction à la composante connexe C de $p^{-1}([v_0, v])$ contenant w_0 , un revêtement $C \rightarrow [v_0, v]$ ramifié au dessus des s sommets distincts de v . Par conséquent, il y a au moins k^s segments $[w_0, w_j]$, $1 \leq j \leq k^s$ dans T_{nk} qui sont envoyés sur $[v_0, v]$. Puisqu'il y a $2n(2n - 1)^s$ sommets de T_n à distance s de v_0 , on obtient la minoration suivante du nombre

$N_{nk}(s)$ de sommets dans une boule de rayon s dans T_{nk} :

$$N_{nk}(s) \geq 2kn \frac{k^s(2n-1)^s - 1}{k(2n-1) - 1}.$$

Cela donne l'inégalité suivante, à rapprocher de l'inégalité du théorème 3.1.3

$$\delta_{nk} \geq \ln(k(2n-1)) = \delta_n + \ln(k). \quad (3.1)$$

Remarquons que le second comptage est plus grossier : on oublie certains sommets, à savoir les sommets contenus dans des segments géodésiques de T_{nk} issus de w_0 qui ne se projettent pas sur des segments géodésiques de T_n .

L'inégalité obtenue en (3.1) repose de manière centrale sur le fait qu'une géodésique de T_n de longueur N passe par le lieu de ramification approximativement N fois. Dans le cas de revêtements ramifiés de variétés hyperboliques, cela n'est plus le cas puisque la base du revêtement est l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n et le lieu de ramification est la réunion d'un nombre fini d'orbites discrètes de copies de $\mathbb{H}^{n-2} \subset \mathbb{H}^n$. Cependant, on montre que si l'on ramifie au dessus d'un espace qui est déjà un revêtement ramifié, cette propriété cruciale est partiellement vérifiée pour presque toute géodésique. En remarquant qu'un revêtement ramifié cyclique de degré pair se factorise à travers un revêtement ramifié de degré 2, on peut effectuer un comptage similaire à celui présenté dans l'exemple ci-dessus.

Plus généralement, le corollaire suivant, qui se déduit aisément de la preuve du théorème 3.1.3, peut être vu comme un analogue en dimension supérieure de l'inégalité (3.1) sur la croissance de la dimension de Hausdorff par revêtement ramifié :

Corollaire 3.1.5. *Soit V^{lm} , $l, m > 1$, une variété de Gromov-Thurston obtenue comme revêtement ramifié cyclique de degré lm d'une variété hyperbolique compacte V de dimension $n \geq 2$. Alors, la dimension de Hausdorff δ_{lm} du bord visuel de son revêtement universel (pour toute métrique de Bourdon associée à la métrique CAT(-1)) vérifie*

$$\delta_{lm} \geq \delta_l + \frac{1}{3C_l^2 |m_{\Gamma_l}|} \left(\frac{e^{-2R_0}}{8} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(\frac{r_{\text{inj}}}{8})} \right)^2 \right)^{\delta_l} \ln(m),$$

où $|m_{\Gamma_l}|$ est la masse de la mesure de Bowen-Margulis de V^l , C_l est la constante d'Ahlfors régularité de la mesure de Patterson-Sullivan de ∂V^l et R_0 est une constante universelle qui peut être prise égale à $5 \ln(1 + \sqrt{2})$.

3.2 Variétés de Gromov-Thurston

Dans cette section, on rappelle la construction des variétés de Gromov-Thurston et on s'intéresse à leurs métriques riemanniennes lisses de courbure pincée. Nous renvoyons à [39] et [61] pour plus de détails.

3.2.1 Construction des variétés

Soit $V = \mathbb{H}^n / \Gamma$ une variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 2$ et soient H_1, H_2 deux sous-variétés totalement géodésiques qui s'intersectent transversalement et qui séparent V . Il est possible de construire une telle variété en construisant le réseau Γ de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$ correspondant par des méthodes arithmétiques (voir [61]). De plus, on peut faire en sorte que le rayon d'injectivité r_{inj} de V et le rayon d'injectivité normal r_{\perp} de $H_1 \cap H_2$ dans V vérifient :

$$2r_{\perp} \geq r_{\text{inj}}.$$

Ici, le rayon d'injectivité de V est la moitié de la longueur de la plus courte géodésique fermée de V et le rayon d'injectivité normal de $H_1 \cap H_2$ est le double de la longueur du plus court segment géodésique dont les extrémités reposent sur $H_1 \cap H_2$ orthogonalement. Par ailleurs, quitte à passer à des revêtements d'indice fini de V , on peut choisir r_{inj} aussi grand que souhaité.

Posons maintenant $W = H_1 \cap H_2$ et notons H_1^+ une composante connexe de $H_1 \setminus W$.

Définition 3.2.1. Le revêtement ramifié cyclique V^k de degré k de V ramifié au dessus de W est la variété topologique obtenue en coupant V le long de $H_1^+ \cup W$ et en recollant cycliquement k copies de la variété ainsi obtenue le long des copies de $H_1^+ \cup W$, en respectant l'orientation.

La figure 3.1 illustre la construction d'un revêtement ramifié cyclique.

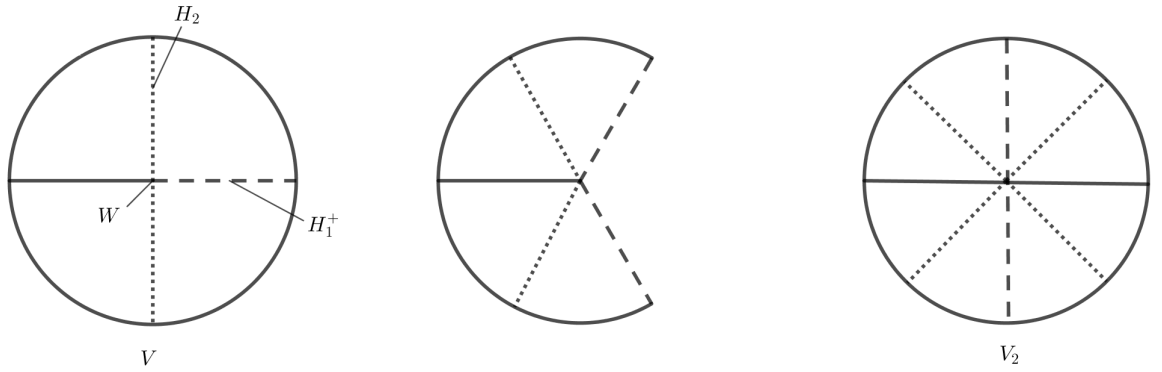


FIGURE 3.1 – Revêtement ramifié cyclique de degré 2

Notation 3.2.2. On notera Γ_k le groupe fondamental de V^k .

Par construction, la projection naturelle $r_k : V^k \rightarrow V$ est un revêtement de degré k en restriction à $V^k \setminus W$ et l'identité en restriction à W . Soit \tilde{W} l'image réciproque de W par la projection du revêtement universel de V $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow V$ et soit $\pi_k : X^k \rightarrow V^k$ le revêtement universel de V^k . D'après le lemme 2.1.8 de [34], il existe un revêtement $R_k : X^k \rightarrow \mathbb{H}^n$ ramifié au dessus de \tilde{W} rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X^k & \xrightarrow{R_k} & \mathbb{H}^n \\ \pi_k \downarrow & & \downarrow \pi \\ V^k & \xrightarrow{r_k} & V \end{array}$$

Notons que V^k hérite d'une structure de variété lisse.

3.2.2 Métriques riemanniennes à courbure strictement négative

Maintenant que nous avons construit V^k et X^k en tant que variétés C^∞ , on peut en faire des variétés riemanniennes en les munissant d'une métrique.

Le tiré en arrière par R_k de la métrique hyperbolique donne une métrique sur X^k de courbure constante mais qui possède des singularités en \tilde{W} . Cependant, il est possible de perturber cette métrique singulière sur les r_\perp -voisinages tubulaires de chaque composante connexe de \tilde{W} afin d'obtenir une métrique riemannienne dont on contrôle la courbure. Plus précisément :

Théorème 3.2.3 ([39],[61]). *Il existe une métrique riemannienne $g_{r_\perp, k}$ sur V^k qui coïncide avec le tiré en arrière par R_k de la métrique hyperbolique en dehors du r_\perp -voisinage tubulaire du lieu de ramification*

et dont la courbure sectionnelle K vérifie :

$$-1 - \left(\frac{10 \ln(2k)}{r_\perp} \right)^2 \leq K \leq -1.$$

De plus, si $n \geq 4$ alors pour $k \geq 2$, $(V^k, g_{r_\perp, k})$ ne peut pas avoir le même type d'homotopie qu'une variété hyperbolique.

Étant donnés $\epsilon > 0$ et $k \geq 2$, considérons un revêtement fini \tilde{V} de V de sorte qu'une composante de \tilde{W} dans \tilde{V} ait un rayon d'injectivité normal r_\perp suffisamment grand pour que $\left(\frac{10 \ln(2k)}{r_\perp} \right)^2 < \epsilon$. Alors le revêtement cyclique de degré k de \tilde{V} ramifié au dessus de cette composante, noté \tilde{V}^k , est un exemple de variété satisfaisant les conditions du théorème 3.1.1.

On définit maintenant un invariant de quasi-isométrie de \tilde{V}_ϵ , la dimension conforme. Cet invariant a été introduit par Pansu dans [62] pour étudier les espaces symétriques de rang 1.

Définition 3.2.4. Soit $f : (Z_1, d_1) \rightarrow (Z_2, d_2)$ une application entre deux espaces métriques (Z_i, d_i) , $i = 1, 2$.

- On dit que f est un homéomorphisme *quasi-symétrique* ou une *quasi-symétrie* s'il existe un homéomorphisme η de \mathbb{R}^+ tel que, pour tous $z_1, z_2, z_3 \in Z_1$, $z_1 \neq z_3$,

$$\frac{d_2(f(z_1), f(z_2))}{d_2(f(z_1), f(z_3))} \leq \eta \left(\frac{d_1(z_1, z_2)}{d_1(z_1, z_3)} \right).$$

- On dit que f est un homéomorphisme *quasi-Möbius* s'il existe un homéomorphisme η de \mathbb{R}^+ tel que, pour tous $z_1, z_2, z_3, z_4 \in Z_1$ deux à deux distincts,

$$\frac{d_2(f(z_1), f(z_3))d_2(f(z_2), f(z_4))}{d_2(f(z_1), f(z_4))d_2(f(z_2), f(z_3))} \leq \eta \left(\frac{d_1(z_1, z_3)d_1(z_2, z_4)}{d_1(z_1, z_4)d_1(z_2, z_3)} \right).$$

Lorsque η est l'identité de \mathbb{R}^+ et que l'inégalité ci-dessus est une égalité, on dit que f est un homéomorphisme *Möbius*.

Définition 3.2.5. La *dimension conforme* $\text{ConfDim}(X, d)$ d'un espace métrique (X, d) est l'infimum des dimensions de Hausdorff des espaces métriques quasi-symétriques à (X, d) .

Comme une quasi-isométrie d'un espace Gromov-hyperbolique induit une quasi-symétrie de son bord visuel, la dimension conforme de $(\partial \tilde{V}_\epsilon, d)$ où d est une métrique de Bourdon est un invariant de quasi-isométries de \tilde{V}_ϵ (ou de manière équivalente, de $\pi_1(V_\epsilon)$).

Proposition 3.2.6. Pour $\epsilon > 0$, on a l'encadrement suivant

$$n - 1 \leq \text{ConfDim}(\partial \tilde{V}_\epsilon) \leq \sqrt{1 + \epsilon}(n - 1).$$

Cette proposition est un corollaire immédiat du lemme suivant, dû à Pansu.

Lemme 3.2.7 ([62] théorème 5.5). Soit M une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle majorée par -1 . Alors

$$\text{ConfDim}(\partial \tilde{M}) \leq h(M),$$

où $h(M)$ est l'entropie volumique de M , c'est-à-dire le nombre

$$h(M) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{\ln \text{Vol}(B_{\tilde{M}}(o, R))}{R}.$$

Démonstration de la proposition 3.2.6. Fixons un point de base $o \in \tilde{V}_\epsilon$. Puisque $\partial \tilde{V}_\epsilon$ est homéomorphe à $T_o^1 \tilde{V}_\epsilon$, c'est une sphère topologique de dimension $n - 1$. Comme la dimension conforme

est toujours supérieure à la dimension topologique (voir [57] chapitre 1 et 4 pour tout ce qui concerne la dimension topologique), on obtient la première inégalité.

D'autre part, d'après le théorème de comparaison de Bishop-Gunther, on a

$$h(V_\epsilon) \leq \sqrt{1 + \epsilon}(n - 1).$$

Le lemme de Pansu permet alors d'obtenir l'inégalité restante. \square

Corollaire 3.2.8. *Pour $n \geq 4$, il existe $\epsilon_n > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon_n$, $\partial\tilde{V}_\epsilon$ muni de la distance de Bourdon n'est quasi-symétrique au bord visuel d'aucun espace symétrique de rang 1.*

Démonstration. On rappelle que les espaces symétriques de rang 1 sont divisés en quatre familles : $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^m$, $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^m$ pour un $m \geq 2$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{O}}^2$.

1- Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, \mathbb{Q} ou \mathbb{O} .

Si on note k la dimension réelle de \mathbb{K} , d'après le théorème 5.5 de [62] on a

$$\text{ConfDim}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^m) = mk + k - 2 = n - 1 + k - 1,$$

où $n = mk$ est la dimension réelle de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^m$. En particulier,

$$\text{ConfDim}(\partial\tilde{V}_\epsilon) \leq \sqrt{1 + \epsilon}(n - 1) < \text{ConfDim}(\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^m),$$

dès que $\epsilon < (1 + \frac{k-1}{n-1})^2 - 1$.

2- Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Supposons qu'il existe un homéomorphisme quasi-symétrique $f : \partial\tilde{V}_\epsilon \rightarrow S^{n-1}$ où $\partial\tilde{V}_\epsilon$ est muni d'une métrique de Bourdon et S^{n-1} de sa métrique canonique. Alors, l'action de $\Gamma_\epsilon := \pi_1(V_\epsilon)$ sur $\partial\tilde{V}_\epsilon$ par transformations de Möbius se transporte par f en une action sur S^{n-1} par homéomorphismes uniformément quasi-Möbius. Ainsi, d'après le théorème de Tukia [64], Γ_ϵ est conjugué à un réseau uniforme de \mathbb{H}^n . Or, par construction V_ϵ ne peut pas avoir le type d'homotopie d'une variété hyperbolique d'après le théorème 3.2.3, d'où une contradiction.

Par conséquent, $\epsilon_n = (1 + \frac{1}{n-1})^2 - 1$ convient. \square

Proposition 3.2.9. *Pour $\epsilon \leq \epsilon_n$, la dimension conforme de $\partial\tilde{V}_\epsilon$ n'est atteinte par aucune métrique visuelle associée à une métrique riemannienne sur V_ϵ de courbure strictement négative.*

Démonstration. Supposons que la dimension conforme est atteinte par une métrique visuelle d de $\partial\tilde{V}_\epsilon$ associée à une métrique riemannienne sur V_ϵ de courbure strictement négative. Alors, d'après le théorème 1.3 de [12], $(\partial\tilde{V}_\epsilon, d)$ est Q -Loewner où Q est la dimension de Hausdorff de $(\partial\tilde{V}_\epsilon, d)$. La condition de Loewner signifie qu'il existe un homéomorphisme $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tel que pour toute paire de compacts connexes disjoints A, B de $\partial\tilde{V}_\epsilon$, le Q -module de l'ensemble $\Gamma(A, B)$ des courbes reliant A à B est minoré par

$$\phi \left(\frac{\text{dist}(A, B)}{\min(\text{diam}A, \text{diam}B)} \right).$$

En particulier, la famille \mathcal{F} de toutes les courbes rectifiables de \tilde{V}_ϵ est de Q -module positif. D'après le théorème 4.3 de [22] (voir aussi le théorème 2.4.11), cela implique que V_ϵ est localement symétrique de rang 1, ce qui est impossible. \square

3.3 Variétés de Gromov-Thurston en tant qu'espaces singuliers

Dans l'optique de répondre à la question 3.1.2, les métriques lisses de courbure strictement négative ne nous intéressent pas puisqu'elles ne peuvent pas donner lieu à des métriques au

bord du revêtement universel qui réalisent la dimension conforme (voir la proposition 3.2.9). Pour cette raison, nous nous intéressons désormais à la métrique singulière obtenue en tirant en arrière la métrique hyperbolique.

3.3.1 Métrique CAT(-1) singulière

L'essentiel de cette partie est tiré de [34] auquel on renvoie pour une exposition plus exhaustive. Comme dans la partie précédente, V désigne une variété hyperbolique compacte, orientable de dimension $n \geq 2$ et $W \subset V$ est une sous-variété totalement géodésique de codimension 2 contenue dans une sous-variété totalement géodésique H_1 de codimension 1 séparante. Par la suite, on oubliera la seconde sous-variété de codimension 1 H_2 qui n'est utile qu'à la construction du revêtement ramifié et on notera donc $H := H_1$ et $H^+ := H_1^+$. On désigne toujours par V^k le revêtement cyclique de degré k de V ramifié en W , par X^k son revêtement universel et Γ_k désignera son groupe fondamental. On rappelle que R_k désigne la projection du revêtement $X^k \rightarrow \mathbb{H}^n$ de degré k ramifié au dessus de \tilde{W} .

Pour tout $x \in X^k \setminus \tilde{W}$, il existe une boule ouverte B_x centrée en x telle qu'en restriction à cette boule, la projection R_k du revêtement réalise un homéomorphisme sur son image.

Pour tout $x \in \tilde{W}$, soit $W(x)$ (respectivement $H(x)$) la composante connexe de \tilde{W} (respectivement de \tilde{H}) contenant x , et soit y l'image de x par la projection du revêtement. Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un ϵ -voisinage $N_\epsilon(W(x))$ de $W(x)$ qui peut être divisé en *quartiers* $Q_1(x), \dots, Q_k(x), D_1(x), \dots, D_k(x)$ c'est-à-dire, en fermés homéomorphes à l'adhérence d'une des composantes connexes Q ou D de $(N_\epsilon(W(y)) \cap \mathbb{H}^n) \setminus H(x)$.

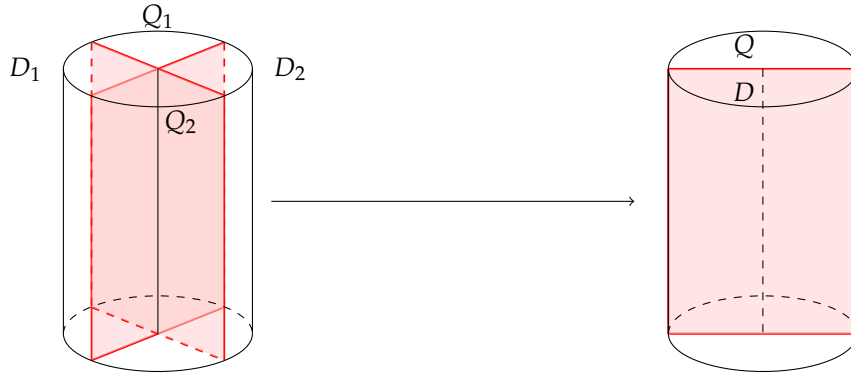


FIGURE 3.2 – Quartiers au voisinage de \tilde{W} .

Définition 3.3.1. Les boules B_x pour $x \in X^k \setminus \tilde{W}$ et les quartiers $Q_i(x), D_i(x)$ pour $x \in \tilde{W}$ sont appelés les *voisinages fondamentaux* de X^k .

Par construction, chaque voisinage fondamental de X^k est homéomorphe à un sous-ensemble convexe de \mathbb{H}^n . On peut donc tirer en arrière la métrique hyperbolique sur chacun de ces voisinages.

Définition 3.3.2 (définition 2.2.1 de [34]). Soient $x, y \in X^k$.

- Une *ligne brisée* dans X^k entre x et y est une suite finie de points $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on peut trouver un voisinage fondamental contenant x_i et x_{i+1} .
- La *longueur* d'une ligne brisée x_1, \dots, x_n est alors la somme des longueurs des segments géodésiques $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ par rapport à la métrique tirée en arrière dans un voisinage fondamental contenant x_i et x_{i+1} .

— La pseudo-distance d entre x et y est alors :

$$d(x, y) = \inf\{\text{Long}(\gamma) \mid \gamma \text{ ligne brise de } x \text{ à } y\}.$$

Remarquons que la pseudo-distance d n'est rien d'autre que la pseudo-distance de longueur associée à la métrique singulière $R_k^*g_{\mathbb{H}^n}$.

Proposition 3.3.3 (voir les sections 2.2.1 et 2.2.2 de [34]). *La pseudo-distance d est indépendante du choix des voisinages fondamentaux. De plus, (X^k, d) est un espace métrique géodésique localement compact, complet et CAT(-1).*

En particulier, d'après le théorème de Hopf-Rinow (théorème 3.7 de [15]), (X^k, d) est propre.

Définition 3.3.4. Un *arbre-mur* est une composante connexe de $R_k^{-1}(\tilde{H})$.

Pour $x \in R_k^{-1}(\tilde{H})$, on désignera par $T(x)$ l'arbre-mur contenant x . Les arbres-murs vont jouer un rôle essentiel dans l'étude du flot géodésique. Nous ferons usage, à de multiples reprises, de la propriété fondamentale suivante :

Proposition 3.3.5 (corollaire 4.3.3 de [34]). *Les arbres-murs sont convexes pour la distance d .*

Enfin, la proposition suivante, qui résulte de la construction de V^k , sera aussi utile par la suite (voir la figure 3.2).

Proposition 3.3.6. *Soient T un arbre-mur et W_0 une composante connexe de \tilde{W} contenue dans T . Alors, $X^k \setminus T$ a (au moins) $2k$ composantes connexes non bornées dont l'adhérence contient W_0 . De même, W_0 sépare T en $2k$ composantes connexes non bornées.*

3.3.2 Flot géodésique singulier

3.3.2.1 Géodésiques pour la métrique singulière

On commence par établir quelques propriétés élémentaires sur les géodésiques de X^k . Remarquons que, par définition de la distance d , la projection du revêtement ramifié est 1-lipschitzienne (voir la remarque 2.2.2 de [34]) et préserve la longueur des courbes.

Lemme 3.3.7. *Soit $c : [a, b] \rightarrow X^k$ une courbe de X^k dont la projection sur \mathbb{H}^n est une géodésique. Alors c est une géodésique.*

Démonstration. Posons $x = c(a)$, $y = c(b)$ et supposons qu'il existe une courbe c' reliant x à y dont la longueur est strictement plus petite que la longueur de c . Alors,

$$d(x, y) \leq \text{Long}(c') < \text{Long}(c) = \text{Long}(R_k \circ c) = d(R_k(x), R_k(y)) \leq d(x, y).$$

D'où une contradiction. □

Lemme 3.3.8. *Toute géodésique de X^k qui n'est pas contenue dans le lieu de ramification rencontre chacune de ses composantes connexes en au plus un point.*

Démonstration. Soient W_0 une composante connexe du lieu singulier et $N_\delta(W_0)$ un voisinage tubulaire. Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow X^k$ un segment géodésique qui n'est pas contenu dans W_0 et supposons que c rencontre W_0 en deux points, disons aux instants $t_1 < t_2$. Par convexité de W_0 , le segment $c([t_1, t_2])$ est entièrement contenu dans W_0 . On peut supposer, sans perte de généralités, que $[t_1, t_2]$ est l'intervalle maximal sur lequel c est contenue dans W_0 , i.e. c ne rencontre pas W_0 en dehors de $[t_1, t_2]$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $c_{[t_1-\epsilon, t_2+\epsilon]}$ soit dans $N_\delta(W_0)$.

Rappelons qu'un segment géodésique de \mathbb{H}^n qui n'est pas inclus dans une sous-variété totalement géodésique donnée, intersecte cette sous-variété en au plus un point. Par définition de la distance, l'image de $c_{[t_1-\epsilon, t_2+\epsilon]}$ dans \mathbb{H}^n est la concaténation de trois segments géodésiques

$c_1([t_1 - \epsilon, t_1])$, $c_2([t_1, t_2])$, $c_3([t_2, t_2 + \epsilon])$, et $c_2([t_1, t_2])$ est entièrement contenu dans une sous-variété totalement géodésique de codimension 2 qui ne contient ni $c_1(t_1 - \epsilon)$ ni $c_3(t_2 + \epsilon)$. Il s'ensuit que le chemin $[c_1(t_1 - \epsilon), c_2(\frac{t_1+t_2}{2})] \cup [c_2(\frac{t_1+t_2}{2}), c_3(t_2 + \epsilon)]$ est strictement plus court que l'image de c . En relevant ce chemin, on obtient un chemin reliant $c(t_1 - \epsilon)$ à $c(t_2 + \epsilon)$ strictement plus court que c , d'où une contradiction. \square

Lemme 3.3.9. *L'espace X^k est géodésiquement complet, i.e. tout segment géodésique s'étend en une géodésique bi-infinie.*

Démonstration. Soit $c : [a, b] \rightarrow X^k$ une géodésique. Si $c(b)$ n'est pas un point de ramification, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $B(c(b), \epsilon)$ soit un voisinage élémentaire isométrique à une boule de \mathbb{H}^n . Dans ce cas, c peut se prolonger en un segment $\tilde{c} : [a, b + \epsilon] \rightarrow X^k$. Si $c(b)$ est contenu dans une composante W_0 du lieu de ramification, il existe un $\epsilon > 0$ tel que la boule de rayon $B(c(b), \epsilon)$ soit contenue dans une union de quartiers fondamentaux. Par convexité des arbres-murs, quitte à réduire ϵ , $c|_{[b-\epsilon, b]}$ est contenue dans un quartier Q . La courbe $c_k = R_k \circ c|_{[b-\epsilon, b]}$ est donc une géodésique de \mathbb{H}^n , que l'on peut prolonger à $[b - \epsilon, b + \epsilon]$ en une géodésique encore notée c_k . Soit c_ϵ un relevé de $c_k|_{[b, b+\epsilon]}$ tel que $c_\epsilon(0) = c(b)$. Alors, d'après le lemme 3.3.7, la concaténation de c et c_ϵ est une géodésique.

Par conséquent, l'ensemble $A = \{t \geq 0 \mid c \text{ est prolongeable sur } [a - t, b + t]\}$ est un ensemble ouvert et non vide. Puisque X^k est un espace de longueur complet et localement compact, il est propre et le théorème d'Ascoli assure que A est aussi fermé. Par connexité, A est égal à \mathbb{R}^+ , ce qui permet de conclure. \square

Lemme 3.3.10. *Soit W_0 une composante connexe de \tilde{W} dans \mathbb{H}^n et soit $H_0 \subset \mathbb{H}^n$ une composante connexe de \tilde{H} contenant W_0 , de sorte que W_0 sépare H_0 en deux composantes connexes H^+ et H^- . Soient W_1 un relevé de W_0 à X^k et H, H' des relevés de H^+ contenant W_1 . Tout segment géodésique $c : [0, \epsilon] \rightarrow H$, $c(0) \in W_1$, qui n'est pas contenu dans W_1 admet un prolongement $\tilde{c} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow H \cup H'$ tel que $c|_{[-\epsilon, 0]} \subset H'$.*

Démonstration. Soit $c : [0, \epsilon] \rightarrow H$ un segment géodésique qui n'est pas contenu dans W_1 et tel que $c(0) \in W_1$. Quitte à réduire ϵ , on peut supposer que $c([0, \epsilon]) \cap W_1 = \{c(0)\}$. Par conséquent, $\tilde{c} = R_k \circ c$ est un segment géodésique de \mathbb{H}^n contenu dans H^+ . Il se prolonge donc en un segment géodésique $\tilde{c} : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow H_0$ tel que $\tilde{c}([-\epsilon, 0]) \subset H^-$. Soit $g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ la rotation d'angle π autour de W_0 ; elle envoie H^+ sur H^- . On note y le relevé de $g(\tilde{c}(-\epsilon))$ à X^k contenu dans $B(c(0), \epsilon) \cap H'$ et c' le relevé de $g \circ \tilde{c}|_{[-\epsilon, 0]}$ dans H' tel que $c'(0) = c(0)$. On va montrer que $c \cup c'$ est le segment géodésique reliant $x = c(\epsilon)$ à y . Soit γ une courbe reliant x à y . Comme W_0 sépare H et H' , il existe un t_0 tel que $\gamma(t_0) \in W_0$. On a déjà vu qu'une géodésique ne peut rencontrer W_0 qu'au plus une fois, donc on peut supposer que γ rencontre W_0 uniquement en t_0 . Alors, $R_k \circ \gamma$ est la réunion de deux segments géodésiques $[\tilde{c}(\epsilon), z]$ et $[z, g(\tilde{c}(-\epsilon))]$ où $z \in W_0$. Supposons que γ soit de longueur strictement plus petite que $c \cup c'$. Alors,

$$\begin{aligned} d(\tilde{c}(\epsilon), \tilde{c}(-\epsilon)) &= \text{Long}(\tilde{c}|_{[-\epsilon, 0]}) + \text{Long}(\tilde{c}|_{[0, \epsilon]}) = \text{Long}(g \circ \tilde{c}|_{[-\epsilon, 0]}) + \text{Long}(\tilde{c}|_{[0, \epsilon]}) \\ &= \text{Long}(c) + \text{Long}(c') \\ &> \text{Long}(\gamma) = \text{Long}([\tilde{c}(\epsilon), z]) + \text{Long}([z, g(\tilde{c}(-\epsilon))]). \end{aligned}$$

En particulier, la concaténation des segments $[\tilde{c}(\epsilon), z]$ et $g([z, g(\tilde{c}(-\epsilon))]) = [z, \tilde{c}(-\epsilon)]$ est un chemin de longueur strictement inférieure à $d(\tilde{c}(\epsilon), \tilde{c}(-\epsilon))$ ce qui est une contradiction. \square

Dans toute la suite, R_0 désignera la constante donnée par le lemme 1.2.7.

Pour un point de ramification $x \in X^k$, on notera $W(x)$ la composante connexe du lieu de ramification contenant x et $T(x)$ l'arbre-mur contenant x . De plus, $\partial T(x)$ (resp. $\partial W(x)$) désignera le bord à l'infini de $T(x)$ (resp. $W(x)$) c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des rayons géodésiques contenus dans $T(x)$ (resp. $W(x)$). Enfin on adoptera la terminologie introduite dans [34] : une *portion ouverte* de X^k (resp. \mathbb{H}^n) est une composante connexe de $X^k \setminus \tilde{H}$ (resp. $\mathbb{H}^n \setminus \tilde{H}$) et

une *portion fermée* est l'adhérence d'une portion ouverte. Les portions (ouvertes ou fermées) sont des convexes et l'image d'une portion de X^k par R_k est une portion de \mathbb{H}^n de même nature qui lui est isométrique (voir la partie 4.2 de [34]).

Lemme 3.3.11. Soient $x \in X^k$ un point de ramification, $\xi \in \partial X^k \setminus \partial W(x)$ et $\epsilon > 0$.

1. Si $\xi \notin \partial T(x)$, il existe un ouvert non vide U_ξ de ∂X disjoint de $\{\xi\}$ et un ouvert V_ξ contenant ξ tels que pour tout $\eta \in U_\xi$ et tout $\xi' \in V_\xi$

$$(\eta, \xi') \cap B(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset;$$

2. Si $\xi \in T(x)$ il existe un ouvert non vide U_ξ de ∂X disjoint de $\{\xi\}$ et tels que pour tout $\eta \in U_\xi$

$$(\eta, \xi) \cap B(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Soit $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow X^k$ le rayon géodésique reliant x à ξ . L'arbre-mur $T(x)$ contenant x sépare X^k en $2k$ composantes connexes contenant $W(x)$ dans leur adhérence. On note P_1, \dots, P_{2k} ces composantes et on les ordonne cycliquement autour de $W(x)$ (l'ordre cyclique choisi est arbitraire).

1. Comme $\xi \notin \partial T(x)$ et T est convexe, il existe $t_0 \geq 0$ tel que $r(t) \in T(x)$ pour tout $t \in [0, t_0]$ et $r(t) \notin T(x)$ pour tout $t > t_0$.
 - a) Si $t_0 = 0$, alors $r((0, +\infty))$ est dans $T(x)^c$. On peut supposer, sans perte de généralités, que $r|_{(0, +\infty)} \subset P_1$. Pour $\epsilon > 0$ petit, l'image de $r|_{[0, \epsilon]}$ dans \mathbb{H}^n est un segment géodésique que l'on peut étendre en un segment géodésique défini sur $[-\epsilon, \epsilon]$. En relevant le segment défini sur $[-\epsilon, 0]$ à P_{k+1} , on obtient une extension géodésique $\bar{r} : [-\epsilon, +\infty) \rightarrow X^k$ de r d'après le lemme 3.3.7. De plus, par le lemme 3.3.9, \bar{r} peut s'étendre en une géodésique bi-infinie que nous appellerons aussi \bar{r} . Par convexité de $T(x)$, $\bar{r}([-\infty, 0))$ reste dans P_{k+1} . Pour t suffisamment grand, la boule $B(\bar{r}(-t), R_0)$ est donc contenue dans P_{k+1} (sinon \bar{r} serait asymptotique à une géodésique de $T(x)$ donc contenu dans $T(x)$ par convexité). En appliquant le lemme 1.2.7, on trouve une boule $U_\xi = B_{d_x}(\bar{r}(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \subset \mathcal{O}_x(\bar{r}(-t), R_0)$. De même, il existe un voisinage $V_\xi \subset \mathcal{O}_x(\bar{r}(t), R_0)$ de ξ avec $B(\bar{r}(t), R_0) \subset P_1$. Soit alors $\eta \in U_\xi$. La géodésique (η, ξ) intersecte les composantes P_{k+1} et P_1 et passe donc par $W(x)$ puisque $T(x)$ sépare P_1 et P_{k+1} et est convexe. De plus, quitte à agrandir t , le point d'intersection est dans $B(x, \epsilon)$.
 - b) Si $t_0 > 0$, alors $r([0, t_0])$ est contenu dans $T(x)$. Sans perte de généralités, on peut supposer $r([0, t_0]) \subset \bar{P}_1 \cap \bar{P}_{2k}$. D'après le lemme précédent, r admet un prolongement $\bar{r} : [-\epsilon, +\infty) \rightarrow X^k$ tel que $\bar{r}([-\epsilon, 0]) \subset \bar{P}_k \cap \bar{P}_{k+1}$ et comme X^k est géodésiquement complet, \bar{r} peut encore s'étendre en une géodésique bi-infinie. Supposons que $r|_{(0, t_0)}$ ne passe par aucune composante du lieu de ramification. Alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $r|_{[0, t_0 + \epsilon]}$ est inclus dans une portion fermée, disons \bar{P}_1 . Or d'après, [34] lemme 4.2.4, \bar{P}_1 est isométrique via R_k à une composante connexe de $\mathbb{H} \setminus \tilde{H}_1$. En particulier, $R_k \circ \bar{r}|_{[0, t_0 + \epsilon]}$ est une géodésique de \mathbb{H}^n contenue dans \tilde{H}_1 sur l'intervalle $[0, t_0]$ qui n'est ni incluse dans \tilde{H}_1 ni transverse; ce qui est impossible. Par conséquent, il existe une composante W_1 de \tilde{W} incluse dans $T(x)$ et distincte de $W(x)$ par laquelle \bar{r} passe en $t_1 \in [0, t_0]$ et le même argument montre que pour $t > t_1$, $r(t)$ n'appartient ni à P_1 ni à P_{2k} . Soient C_1 (resp. C_{2k-1}) la composante connexe de $T(x) \setminus W(x)$ contenant $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2$ (resp. $\bar{P}_{2k-1} \cap \bar{P}_{2k}$) et C_0 la réunion des composantes de $T(x) \setminus W_1$ ne contenant pas $r|_{[0, t_1]}$ (voir la figure 3.3). Pour $t > t_0$ suffisamment grand, en construisant les ouverts U_ξ et V_ξ comme ci-dessus, toute géodésique reliant un point de U_ξ à un point de V_ξ doit rencontrer $C_1 \cup C_{2k-1}$ et C_0 donc doit passer par $W(x)$. Quitte à réduire les ouverts, on peut supposer que l'intersection est dans $B(x, \epsilon)$.
2. Si $\xi \in T(x)$, on peut supposer que $r([0, \epsilon])$ est dans $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_{2k}$. D'après le lemme précédent, r admet un prolongement $\bar{r} : [-\epsilon, +\infty) \rightarrow X^k$ tel que $\bar{r}([-\epsilon, 0]) \subset \bar{P}_k \cap \bar{P}_{k+1}$ et comme X^k est

géodésiquement complet, \bar{r} peut encore s'étendre en une géodésique bi-infinie. Soit C_1 (resp. C_{2k-1}) la composante connexe de $T(x) \setminus W(x)$ contenant $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2$ (resp. $\bar{P}_{2k-1} \cap \bar{P}_{2k}$). Pour t suffisamment grand, $B(\bar{r}(-t), R_0)$ est disjointe de $C_1 \cup C_{2k-1}$. En effet, \bar{r} n'est asymptotique en $-\infty$ à aucune géodésique de $C_1 \cup C_{2k-1}$ puisque sinon $\bar{r}|_{(-\infty, \epsilon]}$ serait totalement incluse dans $C_1 \cup C_{2k-1} \cup W(x) \cup (\bar{P}_1 \cap \bar{P}_{2k})$ par convexité de cet ensemble et cela contredirait le fait que $\bar{r}([-\epsilon, 0]) \subset \bar{P}_k \cap \bar{P}_{k+1}$. Il existe un ouvert $U_\xi \subset \mathcal{O}_x(\bar{r}(-t), R_0)$. Quitte à réduire U_ξ , pour $\eta \in U_\xi$, la géodésique (η, ξ) passe dans le $\frac{\epsilon}{2}$ voisinage de $r(\epsilon)$; en particulier elle traverse $C_1 \cup C_{2k-1}$ en un point p puisque $C_1 \cup C_{2k-1}$ sépare $\bar{r}(\mathbb{R}^-)$ et $\bar{r}(\mathbb{R}^+)$. Par hypothèse, si C_0 désigne la composante connexe de $T(x) \setminus W(x)$ contenant $\bar{P}_1 \cap \bar{P}_{2k}$ alors $\eta \in \partial C_0$ (voir la figure 3.4). Par convexité, le rayon $[p, \eta)$ doit donc passer par $W(x)$. Ainsi, U_ξ convient.

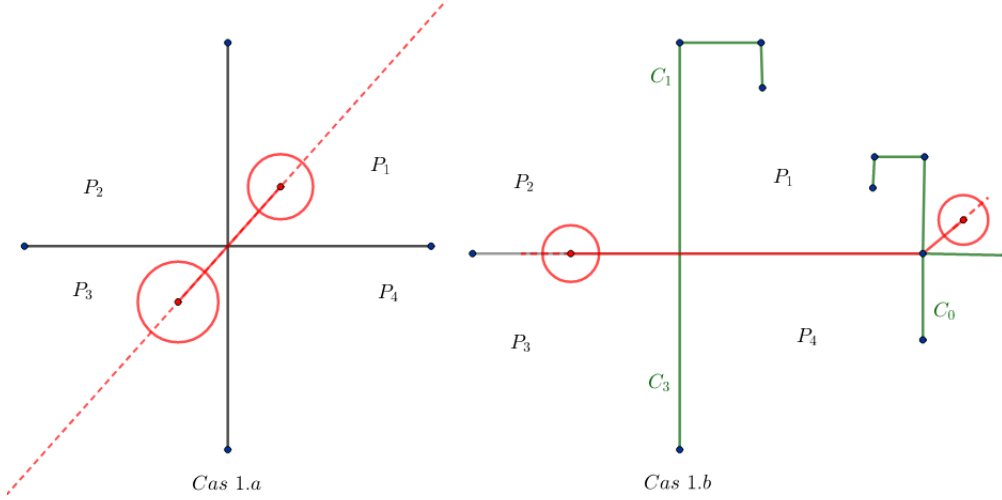


FIGURE 3.3 – En rouge, le prolongement de r ainsi que les boules définissant les ombres.

□

Remarque(s) 3.3.12. Comme $W(x)$ est isométrique à \mathbb{H}^{n-2} , $(\partial W(x), d_x)$ est de dimension de Hausdorff $n - 3$. En particulier, comme μ_x est la δ_{Γ_k} -mesure de Hausdorff de ∂X^k où $\delta_{\Gamma_k} \geq n - 1$, l'ensemble $\partial W(x)$ est de μ_x -mesure nulle. En particulier, pour presque tout $\xi \in \partial X^k$, il existe un ouvert U_ξ tel que pour $\eta \in U_\xi$

$$(\eta, \xi) \cap B(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset.$$

Une conséquence directe du résultat précédent est la suivante : le borélien $A \times \mathbb{R} \subset \partial^2 X^k \times \mathbb{R}$ constitué des géodésiques (ξ^-, ξ^+, t) qui passent par le lieu singulier contient un ensemble de mesure strictement positive (et même un ouvert non vide, voir le point 1 du lemme 3.3.11). Comme cet ensemble est, par ailleurs, Γ_k - et (g^s) -invariant, l'ergodicité de la mesure de Bowen-Margulis implique que la mesure de A^c est nulle. Par conséquent :

Corollaire 3.3.13. *Presque toute géodésique pour la mesure \tilde{m}_{Γ_k} sur $\mathcal{G}X^k$ (resp. m_{Γ_k} sur $\mathcal{G}X^k/\Gamma_k$) passe par le lieu de ramification.*

Remarque(s) 3.3.14. Si on considère une triangulation de V de sorte que W est un sous-complexe, on peut la relever en une triangulation de V^k . L'espace V^k est ainsi naturellement muni d'une structure de complexe polyédral hyperbolique dont le $(n - 2)$ -squelette contient le lieu de ramification. Notons que la métrique singulière est aussi la métrique hyperbolique par morceaux sur ce complexe polyédral. En suivant [3] section 3, on peut construire une mesure sur $\mathcal{G}X^k$ invariante par le flot géodésique qui est l'analogue de la mesure de Liouville. Cette mesure donne

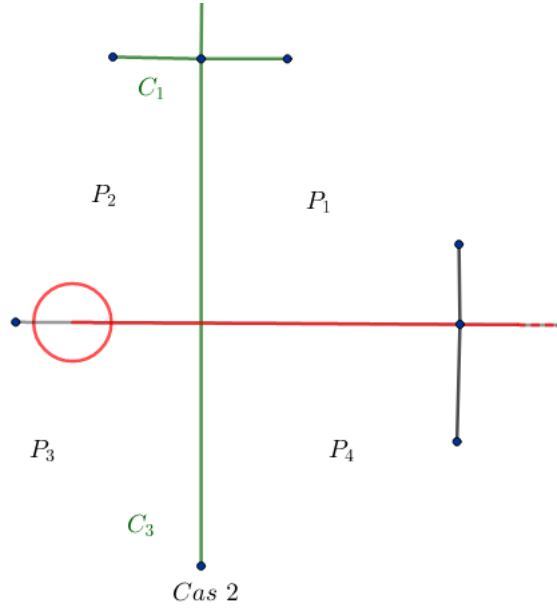


FIGURE 3.4 – En rouge, le prolongement de r ainsi que la boule définissant l'ombre.

mesure pleine à l'ensemble des géodésiques qui évitent le $(n - 2)$ -squelette. En particulier, à l'opposé de ce qui se passe pour les espaces symétriques de rang 1, la mesure de Bowen-Margulis et la mesure de Liouville sont étrangères.

3.3.2.2 Fonctions de comptage

On introduit maintenant des fonctions de comptage qui vont nous permettre d'estimer la fréquence de passage par le lieu de ramification. Rappelons que $\pi_k : X^k \rightarrow V^k$ est le revêtement universel de V^k .

Définition 3.3.15. Pour tout $t > 0$, on définit sur $\mathcal{G}X^k$ la fonction de comptage \tilde{f}_t par

$$\tilde{f}_t : \gamma \in \mathcal{G}X^k \mapsto \text{Card}\{s \in [0, t) \mid \pi_k(\gamma(s)) \in W\} \in \mathbb{N},$$

avec pour convention que $\tilde{f}_t(\gamma) = 0$ si γ est contenue dans le lieu de branchement (cela représente un ensemble de mesure nulle).

Comme \tilde{f}_t est constante sur les Γ_k -orbites, elle passe au quotient en une fonction f_t sur $\mathcal{G}X^k / \Gamma_k$:

$$f_t([\gamma]) = \tilde{f}_t(\gamma).$$

Rappelons que $\frac{1}{2}r_\perp > 0$ est la distance minimale entre deux composantes distinctes de \tilde{W} . On en déduit facilement le

Lemme 3.3.16. Pour tout $t > 0$, on a

$$0 \leq \tilde{f}_t \leq \frac{2t}{r_\perp} + 1.$$

Afin d'utiliser des outils de théorie ergodique, il est nécessaire de s'assurer que nos fonctions de comptage sont bien mesurables. Pour cela, on montre qu'elles sont limites de fonctions semi-continues (donc mesurables).

Lemme 3.3.17. Pour $n \geq 1$, la fonction définie par

$$\tilde{f}_t^n : \gamma \longmapsto \text{Card}\{s \in [0, t - \frac{1}{n}] \mid \pi_k(\gamma(s)) \in W\}$$

est semi-continue supérieurement. En particulier, elle est mesurable.

Démonstration. Soit $a \geq 0$ et montrons que $E_a = \{\gamma \in \mathcal{G}X^k \mid \tilde{f}_t^n(\gamma) \geq a\}$ est fermé. Si $a = 0$, c'est trivialement vrai puisqu'alors $E_0 = \mathcal{G}X^k$. On peut donc supposer $a > 0$. De plus, comme \tilde{f}_t^n est à valeurs dans \mathbb{N} , les ensembles E_a et E_m , pour $m = a$ si $a \in \mathbb{N}$ et $m = \lceil a \rceil$ sinon, sont égaux, où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure. Enfin, notons que si $\gamma \in E_a$ alors $\tilde{f}_t^n(\gamma) > 0$ et par conséquent, γ n'est pas contenue dans le lieu singulier.

Soit $(\gamma_k)_k$ une suite d'éléments de E_m qui converge vers une géodésique γ . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des temps $t_1^k < \dots < t_m^k \in [0, t - \frac{1}{n}]$ tels que $\gamma_k(t_i^k) \in \tilde{W}$. De plus, pour $i \neq j$ la composante $W(\gamma_k(t_i^k))$ est disjointe de la composante $W(\gamma_k(t_j^k))$ en vertu du lemme 3.3.8. En particulier $|t_i^k - t_j^k| \geq \frac{1}{2}r_\perp$ pour tous $i \neq j$. Par compacité de $[0, t - \frac{1}{n}]$, quitte à extraire, on peut supposer que pour tout i , les suites $(t_i^k)_k$ convergent vers des réels $t_i \in [0, t - \frac{1}{n}]$ tels que $|t_i - t_j| \geq \frac{1}{2}r_\perp$ pour $i \neq j$. Comme γ_k converge vers γ uniformément sur les compacts, on obtient

$$\forall i = 1, \dots, k, \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k(t_i^k) = \gamma(t_i).$$

Les composantes connexes du lieu de ramification étant fermées, on en déduit que $\gamma \in E_m = E_a$. \square

Proposition 3.3.18. Pour tout $t > 0$, \tilde{f}_t et f_t sont mesurables. De plus, f_t définit un élément de l'espace $L^p(m_{\Gamma_k})$ pour tout $p > 0$.

Démonstration. Soit $\gamma \in \mathcal{G}X^k$ et posons $l = \tilde{f}_t(\gamma)$. Il existe des temps $s_1, \dots, s_l \in [0, t)$ tels que $\pi_k(\gamma(s_i)) \in W$. Choisissons n_0 suffisamment grand de sorte que $s_i \in [0, t - \frac{1}{n_0}]$ pour tout $i = 1, \dots, l$. Alors $\tilde{f}_t(\gamma) = \tilde{f}_t^n(\gamma)$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier, \tilde{f}_t est la limite simple des fonctions \tilde{f}_t^n . Une limite simple de fonctions mesurables étant mesurable, cela établit la mesurabilité de \tilde{f}_t . On montre de même que f_t est mesurable.

Par ailleurs, f_t est positive et majorée par $\frac{2t}{r_\perp} + 1$. Puisque la mesure m_{Γ_k} est finie, cela suffit à montrer que f_t^p est m_{Γ_k} -intégrable pour tout $p > 0$. \square

Lemme 3.3.19. Le processus $(\tilde{f}_t)_{t>0}$ est additif, i.e. pour tout $s, t > 0$

$$\tilde{f}_{t+s} = \tilde{f}_t + \tilde{f}_s \circ g^t.$$

Il en est de même pour le processus (f_t) .

Démonstration. La preuve est immédiate. En effet, si $\gamma \in \mathcal{G}X$ alors

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{t+s}(\gamma) &= \text{Card}\{u \in [0, t+s] \mid \gamma(u) \in \tilde{W}\} \\ &= \text{Card}\{u \in [0, t] \mid \gamma(u) \in \tilde{W}\} + \text{Card}\{u \in [t, t+s] \mid \gamma(u) \in \tilde{W}\} \\ &= \tilde{f}_t(\gamma) + \tilde{f}_s(g^t \gamma). \end{aligned}$$

\square

Puisque m_Γ est invariante par le flot géodésique, il est facile de voir, en intégrant l'égalité du lemme 3.3.19, que la fonction mesurable $h : t \mapsto \int_{\mathcal{G}X^k/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma)$ est additive i.e.

$$h(t+s) = h(t) + h(s), \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

D'après le lemme de Fekete, on a la convergence en moyenne

$$\frac{1}{t} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma).$$

On va montrer dans la suite que cette convergence est en fait presque sûre.

Définition 3.3.20. On pose $\lambda_k = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \int f_t \frac{dm_{\Gamma_k}}{|m_{\Gamma_k}|}$.

Lemme 3.3.21. Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{t} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma) = \lambda_k |m_{\Gamma_k}|.$$

Démonstration. Comme expliqué plus haut, le lemme de Fekete donne la convergence

$$\frac{1}{t} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \lambda_k |m_{\Gamma_k}|.$$

Or, par additivité, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_{nt}(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma) = n \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma),$$

donc,

$$\frac{1}{nt} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_{nt}(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma) = \frac{1}{t} \int_{\mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k} f_t(\gamma) dm_{\Gamma_k}(\gamma).$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche tend vers $\lambda_k |m_{\Gamma_k}|$. □

Proposition 3.3.22. Soit $(f_t : \mathcal{G}^{X^k}/\Gamma_k \rightarrow \mathbb{R})_{t>0}$. Alors

$$\frac{f_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} \lambda_k.$$

Démonstration. Pour un entier n , l'additivité de $(f_t)_{t>0}$ entraîne que

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_1 \circ g^k.$$

Par conséquent, le théorème ergodique de Birkhoff permet de conclure à l'existence d'une fonction intégrable u g^1 -invariante telle que

$$\frac{f_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} u.$$

Or d'après le théorème 1.3.8, le flot géodésique est mélangeant par rapport à m_{Γ_k} ; c'est donc aussi le cas de l'homéomorphisme g^1 . En particulier, g^1 est ergodique par rapport à m_{Γ_k} . On en déduit que u est constante presque partout.

Fait 3.3.23. On a $\frac{f_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{p.p.}} u$.

Démonstration du fait. Soit Ω un borélien de mesure pleine sur lequel $\frac{f_n}{n}$ converge vers u . Soient $\gamma \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. Par choix de Ω , il existe un entier n_0 à partir duquel

$$\left| \frac{f_n(\gamma)}{n} - u(\gamma) \right| \leq \epsilon.$$

Or, par additivité, on a

$$\frac{f_t(\gamma)}{t} = \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} \frac{[t]}{t} + \frac{f_{\{t\}} \circ g^{[t]}(\gamma)}{t},$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t et $\{t\}$ sa partie fractionnaire. Rappelons que pour $t > 0$, $f_t \leq 2r_{\perp}^{-1}t + 1$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_t(\gamma)}{t} - u(\gamma) \right| &\leq \left| \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} \frac{[t]}{t} - \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} \right| + \left| \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} - u(\gamma) \right| + \frac{1}{t} \left| \frac{2\{t\}}{r_{\perp}} + 1 \right| \\ &\leq \left| \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} \frac{[t]}{t} - \frac{f_{[t]}(\gamma)}{[t]} \right| + 2\epsilon \\ &\leq \left(2r_{\perp}^{-1} + \frac{1}{[t]} \right) \left| \frac{[t]}{t} - 1 \right| + 2\epsilon, \end{aligned}$$

pour $t > n_0 + \epsilon^{-1}(1 + 2r_{\perp}^{-1})$. Ainsi, pour t suffisamment grand,

$$\left| \frac{f_t(\gamma)}{t} - u(\gamma) \right| \leq 3\epsilon.$$

Cela montre que $\frac{f_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} u$ sur Ω . □

Finalement, puisque u est constante presque partout, on obtient

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int f_n \frac{dm_{\Gamma_k}}{|m_{\Gamma_k}|} = \lambda_k.$$

□

Rappelons que notre objectif est de montrer que les géodésiques passent fréquemment par le lieu de ramification ; il convient donc de montrer que la constante λ_k est strictement positive. Pour cela on va la minorer par une constante ne dépendant que de la géométrie de V^k .

Soit $c_0 : I \rightarrow V$ un segment géodésique de V de longueur $\frac{1}{2}r_{\perp}$ reposant orthogonalement sur W : un tel segment existe par définition du rayon d'injectivité normal et par compacité de V . Notons c_+ et c_- ses extrémités. Soit c_1 et c_2 dans V^k deux copies de c_0 dans deux copies distinctes de $V \setminus H^+$ recollées en c_+ et c_- (voir la figure 3.5). Comme expliqué dans [61] paragraphes 2.2 et 2.3, il est possible, en utilisant les symétries de V de construire c_0 de sorte que $c_1|_{(0,\epsilon]}$ et $c_2|_{(0,\epsilon]}$ (respectivement $c_1|_{[\frac{1}{2}r_{\perp}-\epsilon, \frac{1}{2}r_{\perp})}$ et $c_2|_{[\frac{1}{2}r_{\perp}-\epsilon, \frac{1}{2}r_{\perp})}$) soient à l'intérieur de deux quartiers non-adjacents pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit (voir la section 3.3.1). La réunion c' des courbes c_1 et c_2 est alors une courbe fermée et on considère maintenant une courbe $c : \mathbb{R} \rightarrow X^k$ relevée à X^k de la courbe c' , telle que $c(0)$ relève c_- .

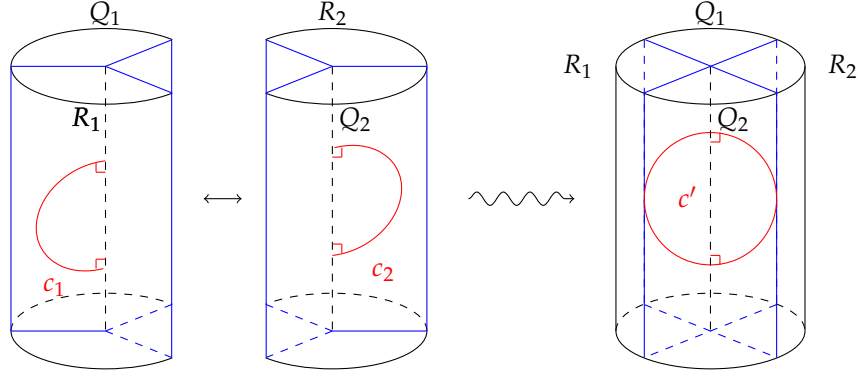


FIGURE 3.5 – Construction de c' .

Proposition 3.3.24. *La courbe c est une géodésique. De plus, $\tilde{f}_{n\frac{1}{2}r_{\perp}}(c) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Comme l'espace (X^k, d) est CAT(-1), il suffit de montrer que c est une géodésique locale en chaque point. Puisque $R_k : X^k \rightarrow \mathbb{H}^n$ est une isométrie locale en tout point de $X^k \setminus \tilde{W}$, par construction, c est une géodésique locale au voisinage de chacun de ses points contenus dans $X^k \setminus R_k^{-1}(\{c_+, c_-\})$.

Par conséquent, il suffit de montrer que c est une géodésique au voisinage de chaque relevé de c_+ et c_- , et puisque c est le relevé de la courbe fermée c' , cela se réduit à montrer la propriété en $c(0)$ et $c(\frac{1}{2}r_{\perp})$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que la boule $B(\tilde{c}_-, \epsilon)$ de \mathbb{H}^n centrée en un relevé \tilde{c}_- de c_- ne contienne pas d'autre relevé de c_- . Par choix de c_0 et construction de c , $c(0)$ est la projection sur $W(c(0))$ de $c(\epsilon)$ et $c(-\epsilon)$. De plus, le choix de ϵ entraîne que $R_k(c(\epsilon)) = R_k(c(-\epsilon))$. En effet, puisque c' est le recollement de deux copies de c_0 on a

$$\pi \circ R_k(c(\epsilon)) = r_k \circ \pi_k(c(\epsilon)) = c_0(\epsilon) = r_k \circ \pi_k(c(-\epsilon)) = \pi \circ R_k(c(-\epsilon)).$$

Le lemme 4.1.4 de [34] permet alors de conclure que c est la géodésique reliant $c(-\epsilon)$ à $c(\epsilon)$ si ϵ est suffisamment petit. On montre de la même manière que c est une géodésique locale en $c(\frac{1}{2}r_{\perp})$. Par conséquent, c est une géodésique.

Maintenant, c' est une géodésique locale fermée de longueur r_{\perp} telle que $c'(0) = c_-$ et $c'(\frac{1}{2}r_{\perp}) = c_+$ sont dans W . Comme c est un relevé de c' avec $c(0)$ un relevé de $c'(0)$, alors pour tout $n \geq 0$, les points $c(k\frac{1}{2}r_{\perp})$, $k = 0, \dots, n$ sont dans \tilde{W} . Ainsi,

$$\tilde{f}_{n\frac{1}{2}r_{\perp}}(c) \geq n.$$

□

Puisque $\frac{1}{2}r_{\perp}$ est la distance minimale entre deux composantes du relevé du lieu singulier, la fréquence de passage de la géodésique c par le lieu de ramification est optimale. En étudiant les fonctions de comptage à son voisinage on obtient :

Proposition 3.3.25. *La constante λ_k de la définition 3.3.20 satisfait l'inégalité suivante :*

$$\lambda_k \geq \frac{1}{3C_k^2 |m_{\Gamma_k}|} \left(\frac{e^{-2R_0}}{8} \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(\frac{r_{\text{inj}}}{8})} \right)^2 \right)^{\delta_k},$$

où R_0 est la constante du lemme 1.2.7 qui peut être prise égale à $5 \ln(1 + \sqrt{2})$, $|m_{\Gamma_k}|$ est la masse de la mesure de Bowen-Margulis et C_k est la constante d'Ahlfors régularité de la mesure de Patterson-Sullivan

de ∂V^k . En particulier, $\lambda_k > 0$.

Démonstration. Posons $x = c(0)$ et $\epsilon = \frac{1}{8}r_{\text{inj}}$ et rappelons que d'après le lemme 3.3.21

$$\lambda_k |m_{\Gamma_k}| = \int_{\mathcal{G}X^k/\Gamma_k} \frac{f_{3\epsilon}}{3\epsilon} dm_{\Gamma_k}.$$

Soit D un domaine fondamental compact tel que $B(x, 4\epsilon) \subset D$ (cela est possible par choix de ϵ) et identifions $\mathcal{G}X^k$ avec $\partial^2 X^k \times \mathbb{R}$ via le paramétrage de Hopf avec point de base x . Par construction de c , les ombres $\mathcal{O}_x(c(t), R_0)$ et $\mathcal{O}_x(c(-t), R_0)$ sont contenues dans des composantes non-adjacentes de $\bar{X}^k \setminus \bar{T}(x)$ et, d'après le lemme 1.2.7, chacune d'elles contient une boule $B_{d_x}(c(\pm\infty), C^{-1}e^{-t})$ pour $t \geq R_0$.

Comme les ombres $\mathcal{O}_x(c(t), R_0)$ et $\mathcal{O}_x(c(-t), R_0)$ pour $t \geq R_0$ sont dans deux composantes non-adjacentes de $\bar{X}^k \setminus \bar{T}(x)$, pour tout $(\eta^-, \eta^+) \in B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t})$ la géodésique (η^-, η^+) rencontre $W(x)$ en un point y . De plus, c étant orthogonale à $W(x)$ en x et $W(x)$ étant convexe, la projection de y sur c est x . Par conséquent, le corollaire 1.2.14 implique

$$d(x, y) \leq \operatorname{argch} \left(\frac{1}{1 - 2\sqrt{2}C^{-1}e^{-t}} \right). \quad (3.2)$$

Donc, pour t assez grand, $d(x, y) \leq \epsilon$.

Fait 3.3.26. $B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t}) \times (-2\epsilon, -\epsilon] \subset \mathcal{G}D \cap \{\tilde{f}_{3\epsilon} \geq 1\}$.

Démonstration du fait. Au vu de notre identification, l'ensemble $B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t}) \times \{0\}$ est constitué des géodésiques γ telles que

- $\gamma(-\infty) \in B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t})$,
- $\gamma(+\infty) \in B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t})$,
- $\beta_{\gamma(-\infty)}(\gamma(0), x) = 0$.

Ainsi, si γ est dans $B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t}) \times (-2\epsilon, -\epsilon]$ il existe un $u \in (-2\epsilon, -\epsilon]$ et $\gamma_0 \in B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t}) \times \{0\}$ tels que $\gamma = g^u \gamma_0$. D'autre part, γ_0 passe par $B(x, \epsilon) \cap W(x)$ en un temps $s \in \mathbb{R}$ d'après (3.2). Par suite, on a

$$0 = \beta_{\gamma_0(-\infty)}(\gamma_0(0), x) = \beta_{\gamma_0(-\infty)}(\gamma_0(0), \gamma_0(s)) + \beta_{\gamma_0(-\infty)}(\gamma_0(s), x),$$

ce qui implique

$$|s| = |\beta_{\gamma_0(-\infty)}(\gamma_0(0), \gamma_0(s))| = |\beta_{\gamma_0(-\infty)}(\gamma_0(s), x)| \leq \epsilon.$$

On en déduit que γ passe par $W(x) \cap B(x, \epsilon)$ au temps $s - u \in [0, 3\epsilon]$ i.e. $\tilde{f}_{3\epsilon}(\gamma) \geq 1$. De plus

$$\begin{aligned} d(x, \gamma(0)) &\leq d(x, \gamma_0(s)) + d(\gamma_0(s), \gamma(0)) \\ &< \epsilon + |s - u| \\ &< 4\epsilon, \end{aligned}$$

donc $\gamma(0) \in B(x, 4\epsilon) \subset D$ ce qui signifie que γ est dans le domaine $\mathcal{G}D$. □

Puisque $d_x(\xi, \eta) \leq 1$ pour tous $\xi, \eta \in \partial X$, on obtient la minoration

$$\begin{aligned} \lambda_k |m_{\Gamma_k}| &= \int_{\mathcal{G}X^k/\Gamma_k} \frac{f_{3\epsilon}}{3\epsilon} dm_{\Gamma_k} \geq \frac{1}{3\epsilon} \tilde{m}_{\Gamma_k}(B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t}) \times B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t}) \times (-2\epsilon, -\epsilon]) \\ &\geq \frac{1}{3} \mu_x(B_{d_x}(c(-\infty), C^{-1}e^{-t})) \mu_x(B_{d_x}(c(+\infty), C^{-1}e^{-t})) \\ &\geq \frac{1}{3} C_k^{-2} (C^{-2}e^{-2t})^{\delta_k}. \end{aligned}$$

En prenant $s > 0$ tel que $\operatorname{argch} \left(\frac{1}{1-2\sqrt{2}C^{-1}e^{-s}} \right) = \epsilon$ et $t = s + R_0$, on obtient :

$$\lambda_k \geq \frac{C_k^{-2}}{3|m_{\Gamma_k}|} \left(\frac{e^{-2R_0}}{8} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(\epsilon)} \right)^2 \right)^{\delta_k}.$$

□

Nos fonctions de comptage sont définies sur l'espace du flot. Puisque nous voulons compter des points d'une orbite, il sera plus commode d'avoir des fonctions de comptage définies sur ∂X et qui comptent le nombre de composantes du lieu de ramification "près" d'un rayon géodésique issu d'un point de base x (voir le lemme 3.3.35 ci-dessous). Le reste de cette section est consacré à la construction de ces nouvelles fonctions de comptages.

Pour $\zeta \in \partial X$, on définit l'ensemble F_ζ^x par

$$F_\zeta^x = \{\eta \in \partial X^k \mid (\eta, \zeta) \cap \bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset\}.$$

Lemme 3.3.27. *Pour tout $\zeta \in \partial X^k$, F_ζ^x est un ensemble fermé. De plus, si (ζ_n) est une suite d'éléments de ∂X^k qui converge vers un point $\zeta \in \partial X^k$ alors l'ensemble*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\zeta_n}^x$$

est contenu dans F_ζ^x .

Dans l'énoncé du lemme précédent, la notation \limsup doit être comprise au sens ensembliste, c'est-à-dire que pour une suite d'ensembles mesurables A_n , $n \geq 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

En particulier, on a l'égalité presque sûre suivante

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n}. \quad (3.3)$$

En effet, si $\omega \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ alors pour tout $n \geq 0$, il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. En particulier, $\sup_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$, donc les deux membres de 3.3 sont égaux à 1. De même, si $\omega \in (\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n)^c$, on montre que les deux membres sont nuls.

Démonstration. Soit $(\eta_n)_n$ une suite convergente d'éléments de F_ζ^x et notons η sa limite. Alors, pour tout $n \geq 0$, il existe un point $y_n \in \bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x)$ et une géodésique $r_n : \mathbb{R} \rightarrow X$ tels que $r_n(0) = y_n$, $r_n(-\infty) = \eta_n$ et $r_n(+\infty) = \zeta$. Comme l'ensemble $\bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x)$ est compact, le théorème d'Arzelà-Ascoli implique que la suite $(r_n)_n$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une géodésique $r : \mathbb{R} \rightarrow X$ telle que $r(-\infty) = \eta$, $r(+\infty) = \zeta$ et $r(0) \in \bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x)$. Par conséquent, $\eta \in F_\zeta^x$, ce qui montre la première assertion du lemme.

Pour la seconde assertion, soit (ζ_n) une suite d'éléments de ∂X^k qui converge vers un élément $\zeta \in \partial X^k$. Pour tout $\eta \in \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\zeta_n}^x$, il existe une suite d'entiers l_n tendant vers l'infini telle que $\eta \in F_{\zeta_{l_n}}^x$ pour tout $n \geq 0$. Par suite, pour tout $n \geq 0$, on a

$$(\eta, \zeta_{l_n}) \cap \bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset.$$

Par compacité de $\bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x)$ on en déduit que

$$(\eta, \xi) \cap \bar{B}(x, \epsilon) \cap W(x) \neq \emptyset,$$

puisque $\xi_{l_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi$. Cela montre la seconde assertion. \square

Lemme 3.3.28. *La fonction $\xi \in \partial X^k \mapsto \mu_x(F_\xi^x)$ est mesurable et $\mu_x(F_\xi^x) > 0$ pour presque tout ξ .*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'en vertu du lemme 3.3.11, F_ξ^x contient un ouvert non vide pour presque tout ξ . Par conséquent, $\mu_x(F_\xi^x) > 0$ pour presque tout ξ .

Fixons maintenant $a \geq 0$ et montrons que l'ensemble $\{\xi \in \partial X^k \mid \mu_x(F_\xi^x) \geq a\}$ est fermé ; cela impliquera en particulier qu'il est mesurable. Soit (ξ_n) une suite convergente d'éléments de ∂X^k telle pour tout $n \geq 0$, $\mu_x(F_{\xi_n}^x) \geq a$. Notons $\xi \in \partial X^k$ sa limite.

Puisque la mesure μ_x est finie et que les fonctions $\mathbb{1}_{F_{\xi_n}^x}$ sont bornées uniformément, elle sont intégrables, i.e. dans $L^1(\partial X^k, \mu_x)$ pour tout $n \geq 0$. Le lemme précédent et le lemme de Fatou impliquent alors

$$\begin{aligned} \mu_x(F_\xi^x) &\geq \mu_x(\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\xi_n}^x) = \int \mathbb{1}_{\limsup_{n \rightarrow +\infty} F_{\xi_n}^x} d\mu_x = \int \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{F_{\xi_n}^x} d\mu_x \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_x(F_{\xi_n}^x) \\ &\geq a. \end{aligned}$$

Ainsi, $\{\xi \in \partial X^k \mid \mu_x(F_\xi^x) \geq a\}$ est fermé. \square

Lemme 3.3.29. *Pour tout $t > 0$ et $n \geq 1$, la fonction*

$$\xi \in \partial X^k \mapsto \int_{F_\xi^x} \tilde{f}_t^n(\eta, \xi, 0) d\mu_x(\eta)$$

est semi-continue supérieurement donc mesurable.

On rappelle que les fonctions \tilde{f}_t^n ont été introduites dans le lemme 3.3.17.

Démonstration. Encore une fois, nous montrons plus qu'annoncé, à savoir, que l'ensemble

$$E_a = \left\{ \xi \in \partial X^k \mid \int_{F_\xi^x} \tilde{f}_t^n(\eta, \xi, 0) d\mu_x(\eta) \geq a \right\}$$

est fermé pour tout $a \geq 0$. Soit $(\xi_l)_l$ une suite convergente d'éléments de E_a et notons $\xi \in \partial X^k$ sa limite. Alors

$$a \leq \limsup_{l \rightarrow +\infty} \int \mathbb{1}_{F_{\xi_l}^x}(\eta) \tilde{f}_t^n(\eta, \xi_l, 0) d\mu_x(\eta) \quad (3.4)$$

$$\leq \int \limsup_{l \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{1}_{F_{\xi_l}^x}(\eta) \tilde{f}_t^n(\eta, \xi_l, 0) \right) d\mu_x(\eta) \quad (3.5)$$

$$\leq \int \left(\limsup_{l \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{F_{\xi_l}^x}(\eta) \right) \left(\limsup_{l \rightarrow +\infty} \tilde{f}_t^n(\eta, \xi_l, 0) \right) d\mu_x(\eta) \quad (3.6)$$

$$\leq \int \mathbb{1}_{F_\xi^x}(\eta) \tilde{f}_t^n(\eta, \xi, 0) d\mu_x(\eta). \quad (3.7)$$

L'inégalité (3.5) est une conséquence du lemme de Fatou car on a l'encadrement suivant, indépendamment de $l \geq 0$:

$$0 \leq 1_{F_{\xi_l}^x}(\cdot) \tilde{f}_t^n(\cdot, \xi_l, 0) \leq 2r_{\perp}^{-1}t + 1 \in L^1(\partial X^k, \mu_x).$$

L'inégalité (3.7) résulte de la semi-continuité supérieure des fonctions \tilde{f}_t^n (voir le lemme 3.3.17) et du lemme 3.3.27. Ainsi E_a est fermé donc mesurable. \square

En combinant les lemmes 3.3.28 et 3.3.29, on obtient :

Corollaire 3.3.30. *Pour tous $t > 0$ et $n \geq 1$, la fonction F_t^n sur ∂X^k définie presque partout par*

$$\xi \longmapsto \frac{1}{\mu_x(F_{\xi}^x)} \int_{F_{\xi}^x} \tilde{f}_t^n(\eta, \xi, 0) d\mu_x(\eta),$$

est mesurable.

Comme précédemment, on en déduit :

Proposition 3.3.31. *Pour tout $t > 0$, la fonction F_t^x sur ∂X^k définie presque partout par*

$$\xi \longmapsto \frac{1}{\mu_x(F_{\xi}^x)} \int_{F_{\xi}^x} \tilde{f}_t(\eta, \xi, 0) d\mu_x(\eta),$$

est mesurable.

Remarquons que F_t^x est bien définie par la formule de la proposition 3.3.31 pour tout $\xi \in \partial X \setminus \partial W(x)$ (voir le lemme 3.3.11). Par convention, on considérera son représentant valant zéro sur $\partial W(x)$.

Démonstration. Comme sous-produit de la preuve de la proposition 3.3.18, on sait que \tilde{f}_t est la limite simple de la suite croissante des fonctions $(\tilde{f}_t^n)_{n \geq 1}$. Par le théorème de convergence monotone, on en déduit que F_t^x est limite simple des fonctions mesurables F_t^n . En particulier, F_t^x est mesurable. \square

De plus, le comportement asymptotique des fonctions F_t^x quand t tend vers $+\infty$ est le même que celui des fonctions f_t .

Proposition 3.3.32. *Pour μ_x -presque tout $\xi \in \partial X^k$, on a la convergence suivante :*

$$\frac{F_t^x(\xi)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \lambda_k.$$

Démonstration. Remarquons que pour $(\eta, \xi, s) \in \mathcal{G}X^k$, la valeur de la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}_t(\eta, \xi, s)}{t}$ est indépendante de s . La proposition 3.3.22 et le théorème de Fubini impliquent donc que pour $d\mu_x \otimes d\mu_x$ -presque tout (η, ξ)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}_t(\eta, \xi, 0)}{t} = \lambda_k.$$

Soit A l'ensemble des $\xi \in \partial X$ pour lesquels il existe un ensemble A_{ξ} de mesure strictement positive tel que $\frac{\tilde{f}_t(\eta, \xi, 0)}{t}$ ne converge pas vers λ_k pour tout $\eta \in A_{\xi}$ et supposons que $\mu_x(A) > 0$. Alors, d'après ce qui précède, l'ensemble

$$B = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in A \text{ et } \eta \in A_{\xi}\}$$

est de $d\mu_x \otimes d\mu_x$ mesure nulle. En particulier,

$$\int_A \mu_x(A_{\xi}) d\mu_x(\xi) = 0,$$

ce qui implique que $\mu_x(A_{\xi}) = 0$ pour presque tout $\xi \in A$. Ceci contredisant la définition de A , on en déduit que A est de mesure nulle, *i.e.* pour μ_x -presque tout ξ , $\frac{\tilde{f}_t(\cdot, \xi, 0)}{t}$ converge vers λ_k presque partout quand t tend vers $+\infty$.

Pour $t \geq 1$, la fonction $\frac{1}{t\mu_x(F_{\xi}^x)} \mathbb{1}_{F_{\xi}^x}(\cdot) \tilde{f}_t(\cdot, \xi, 0)$ est dominée par la fonction constante $\frac{1}{\mu_x(F_{\xi}^x)} \left(\frac{2}{r_{\perp}} + 1 \right)$ qui est μ_x -intégrable puisque μ_x est finie et le théorème de convergence dominée entraîne alors

$$\frac{F_t^x(\xi)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \lambda_k,$$

pour tout tel ξ , *i.e.* sur un ensemble de mesure pleine. \square

Remarque(s) 3.3.33. Tout comme les fonctions $\frac{f_t}{t}$, les fonctions $\frac{F_t^x}{t}$, $t > 0$, sont dominées par les fonctions constantes $2r_{\perp}^{-1} + \frac{1}{t}$. En particulier, puisque μ_y est finie ces fonctions sont dans $L^p(\partial X, \mu_y)$ pour tout $p > 0$. De plus, pour tout $t > t_0 > 0$ la majoration est uniforme.

3.3.3 Entropie volumique

D'après la proposition 1.2.10 la dimension de Hausdorff du bord de \tilde{V}^k est égale à l'exposant critique du groupe fondamental Γ_k de V_k défini par

$$\delta_k = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \ln \text{Card}(\Gamma_k \cdot x \cap B(x, R)).$$

Remarquons qu'on peut remplacer les boules $B(x, R)$ par des anneaux $B(x, R + \Delta) \setminus B(x, R - \Delta)$ où $\Delta > 0$ dans la définition de δ_k (voir le corollaire 2 du théorème 4.1.1 de [63]). Pour montrer le théorème 3.1.1, on va donc compter le nombre de points d'une orbite dans des anneaux dont le rayon tend vers $+\infty$.

Rappelons que la constante R_0 est la constante donnée par le lemme 1.2.7 et pour laquelle les ombres de boules de rayon R_0 ressemblent à des boules pour la distance de Bourdon au bord. Comme tous les espaces qui nous intéressent sont CAT(-1), R_0 peut être choisie égale à $6 \ln(1 + \sqrt{2})$.

À partir de maintenant, on se restreint aux revêtements ramifiés de degré pair. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et posons $k = 2m$. Le revêtement de degré k se factorise à travers le revêtement de degré 2 et on obtient la tour :

$$(V^k, W) \xrightarrow{r_m} (V^2, W) \xrightarrow{r_2} (V, W).$$

En passant aux revêtements universels, on obtient

$$(X^k, \tilde{W}) \xrightarrow{R_m} (X^2, \tilde{W}) \xrightarrow{R_2} (\mathbb{H}^n, \tilde{W}).$$

On fixe un point de base $y \in X^2$ contenu dans le lieu de ramification, un relevé $x \in X^k$ de y et des constantes $\epsilon < \frac{R_0}{3}$ et $\Delta > 0$ qui seront ajustées plus tard.

Notation 3.3.34. On notera $\pi_i : X^i \rightarrow V^i$, $i = 2, 2m$, la projection du revêtement universel. De plus, pour $R > 0$ on notera :

- $N_k(x, \Delta, R)$ le cardinal de $A_k(x, \Delta, R) = (\tilde{B}(x, R + \Delta) \setminus \tilde{B}(x, R - \Delta)) \cap \Gamma_k \cdot x$,
- $N_2^*(y, \Delta, R)$ le cardinal de l'ensemble $A_2^*(y, \Delta, R)$ constitué des points de $(\tilde{B}(y, R + \Delta) \setminus \tilde{B}(y, R - \Delta)) \cap \Gamma_2 \cdot y$ qui ne sont pas contenus dans $W_2(y)$.

Ici W_i désigne le lieu de ramification de X^i et, pour $z \in W_i$, $W_i(z)$ est la composante connexe contenant z pour $i = 2, k$.

Pour simplifier les notations, dans toute la suite de ce chapitre F_t désignera la fonction F_t^y sur X^2 définie à la proposition 3.3.31 et pour $\xi \in \partial X^2$, F_ξ désignera l'ensemble F_ξ^y défini avant le lemme 3.3.27.

Lemme 3.3.35. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de R telle que tout $p \in A_2^*(y, \Delta, R)$ possède au moins $Cm^{\sup\{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi) \mid \xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)\}}$ relevés par R_m dans $A_k(x, R, \Delta + 4R_0)$.*

Démonstration. On fixe $p \in A_2^*(y, \Delta, R)$. Soient $\xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)$ et $\eta \in F_\xi$. On considère le rayon géodésique r de y à ξ et la géodésique r' de η à ξ telle que $u := r'(0) \in \tilde{B}(y, \epsilon) \cap W_2(y)$. Le rayon géodésique $r'_{|[0, +\infty]}$ est asymptote à r donc on peut trouver un $0 \leq s \leq d(u, y)$ tel que la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto d(r'(t+s), r(t))$ soit convexe, décroissante et ait 0 pour limite quand t tend vers $+\infty$. Comme $\xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)$, il existe un temps $t_1 \geq 0$ tel que $d(r(t_1), p) \leq R_0$. On a alors

$$\begin{aligned} d(r'(s+t_1), p) &\leq d(r'(s+t_1), r(t_1)) + d(r(t_1), p) \\ &\leq d(r'(s), y) + R_0 \\ &\leq d(r'(s), r'(0)) + d(r'(0), y) + R_0 \\ &\leq 2\epsilon + R_0 \leq 2R_0. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $t = t_1 + s \geq 0$, on a $z = r'(t) \in B(p, 2R_0)$. Le rayon $r'_{|[0, +\infty]}$ passe $n = \tilde{f}_{R-2R_0-\Delta}(r')$ fois par le lieu de ramification W_2 entre les temps 0 et $R - 2R_0 - \Delta$. Soient z_1, \dots, z_n ces points d'intersection où on note $u = z_1$. Remarquons que

$$\begin{aligned} t = d(r'(0), r'(t)) &\geq d(r'(0), p) - d(r'(t), p) \\ &\geq d(y, p) - d(r'(0), y) - 2\epsilon - R_0 \\ &> R - 2R_0 - \Delta. \end{aligned}$$

En particulier, en restriction à la composante connexe de $R_m^{-1}(r'([0, t]))$ contenant x , R_m est un revêtement cyclique de degré m ramifié en z_2, \dots, z_n . Par conséquent, il y a m^{n-1} relevés de z dans cette composante, que nous appellerons z^l , $l = 1, \dots, m^{n-1}$. De plus, chaque relevé de $r'([0, t])$ reliant x à z^l est un segment géodésique d'après le lemme 3.3.7. Par ailleurs, pour tout $l = 1, \dots, m^{n-1}$, on peut relever le segment $[z, p]$ en un segment de z^l à un relevé p^l de p . On obtient ainsi une famille $p^1, \dots, p^{m^{n-1}}$ de relevés de p . Les p^i ainsi construits ne sont pas nécessairement deux à deux distincts, cependant, comme

$$d(z^i, z^j) \leq d(p^i, p^j) + 4R_0,$$

s'il existe $i \neq j$ avec $p^i = p^j$ alors

$$d(z^i, z^j) \leq 4R_0.$$

Soit N_0 le nombre maximal de points d'une Γ_{2m} -orbite dans une boule de rayon $4R_0$ dans X^{2m} . Chaque z^l se projette sur $\pi_2(z) \in V^2$ via $\pi_2 \circ R_m = r_m \circ \pi_{2m}$; les points $\pi_{2m}(z^l)$, $l = 1, \dots, m^{n-1}$ sont donc contenus dans $r_m^{-1}(\pi_2(z))$ qui est une réunion d'au plus m points. Il s'ensuit que les z^l sont dans au plus m Γ_{2m} -orbites distinctes. Le nombre de tels points dans une boule de rayon $4R_0$ est donc majoré par mN_0 . On en déduit

$$\text{Card}\{p^1, \dots, p^{m^{n-1}}\} \geq \frac{1}{m^2 N_0} m^n.$$

De plus, un calcul direct montre que

$$d(p^i, x) \leq d(p^i, z^i) + d(z^i, x) \leq 2R_0 + 2R_0 + R + \Delta$$

et

$$d(p^i, x) \geq d(z^i, x) - d(p^i, z^i) \geq R - \Delta - 2R_0 - R_0.$$

Jusqu'à maintenant, on a montré qu'étant donnés $\xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)$ et $\eta \in F_\xi$

$$\text{Card}\{\tilde{p} \in A_k(x, R, \Delta + 4R_0) \mid R_m(\tilde{p}) = p\} \geq \frac{1}{m^2 N_0} m^{\tilde{f}_{R-2R_0-\Delta}(\eta, \xi, s)}$$

pour $|s| \leq \epsilon$. On a donc

$$\text{Card}\{\tilde{p} \in A_k(x, R, \Delta + 4R_0) \mid R_m(\tilde{p}) = p\} \gtrsim m^{\tilde{f}_{R-2R_0-\Delta}(\eta, \xi, 0)}.$$

En passant au logarithme et en prenant la moyenne sur F_ξ on obtient :

$$\ln(\text{Card}\{\tilde{p} \in A_k(x, R, \Delta + 4R_0) \mid R_m(\tilde{p}) = p\}) \geq F_{R-2R_0-\Delta}(\xi) \ln(m) + \ln(C),$$

pour une constante C indépendante de R et ξ . Ceci étant valable quel que soit $\xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)$, le lemme s'en déduit en prenant le supremum. \square

Cette inégalité nous permet d'obtenir une première minoration de $N_k(x, \Delta + 4R_0, R)$ en fonction de $N_2^*(y, \Delta, R)$:

$$\begin{aligned} N_k(x, \Delta + 4R_0, R) &\gtrsim \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} m^{\sup\{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi) \mid \xi \in \mathcal{O}_y(p, R_0)\}} \\ &\gtrsim \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} m^{\frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \int_{\mathcal{O}_y(p, R_0)} F_{R-2R_0-\Delta}(\xi) d\mu_y(\xi)}. \end{aligned}$$

En passant au logarithme et en divisant par R on obtient, grâce à la concavité du logarithme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \ln N_k(x, 4R_0 + \Delta, R) &\geq \frac{1}{R} \left(\ln N_2^*(y, \Delta, R) + C + \ln \left(\sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{m^{\frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \int_{\mathcal{O}_y(p, R_0)} F_{R-2R_0-\Delta}(\xi) d\mu_y(\xi)}}{N_2^*(y, \Delta, R)} \right) \right) \\ &\geq \frac{1}{R} \ln N_2^*(y, \Delta, R) + \frac{C}{R} + \left(\int_{\partial X^2} \frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} g_R(\xi) d\mu_y(\xi) \right) \ln(m) \end{aligned}$$

où

$$g_R = \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_y(p, R_0)}.$$

Finalement, en prenant la limite supérieure quand R tend vers $+\infty$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\delta_k \geq \delta_2 + \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\partial X^2} \frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} g_R(\xi) d\mu_y(\xi) \right) \ln(m), \quad (3.8)$$

où $\delta_2 \geq n - 1$.

Il ne reste désormais qu'à étudier la limite de l'intégrale $\int_{\partial X^2} \frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} g_R(\xi) d\mu_y(\xi)$ quand R tend vers $+\infty$. Intuitivement, comme $\frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R}$ tend vers λ_2 presque-sûrement (d'après la proposition 3.3.32) et que g_R a pour moyenne 1, on aimerait dire que cette intégrale tend vers λ_2 . La fin de cette section va rendre cet argument rigoureux.

On commence par énoncer un lemme technique tiré d'un exercice de [44]. Nous en donnerons une preuve dans l'annexe 3.4.

Lemme 3.3.36. Soit $\mathcal{B} = (B_i)_i$ une famille dénombrable de boules dans un espace mesuré Ahlfors régulier (X, μ) et soit $(a_i)_i$ une suite de réels strictement positifs. Alors, pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $\lambda > 1$, il

existe une constante $C = C(\lambda, p, \mu)$ telle que

$$\left\| \sum_i a_i \mathbb{1}_{\lambda B_i} \right\|_p \leq C \left\| \sum_i a_i \mathbb{1}_{B_i} \right\|_p.$$

On rappelle que d'après le lemme de l'ombre 1.2.7, il existe des constantes universelles $C, C' > 0$ telles que pour tout $p \in A_2^*(y, \Delta, R)$, si $[y, \xi_p)$ est le rayon géodésique contenant $[y, p]$ alors

$$B(\xi_p, C^{-1}e^{-d(p,y)}) \subset \mathcal{O}_y(p, R_0) \subset B(\xi_p, Ce^{-d(p,y)}) \subset B(\xi_p, C'e^{-R}).$$

Lemme 3.3.37. *Il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout $R > 0$ et tout $\Delta < \frac{r_{\text{inj}}}{6}$, les boules $(\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}))_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)}$ soient deux à deux disjointes.*

Démonstration. Soient $\epsilon > 0$, $p \in A_2^*(y, \Delta, R)$ et $\eta \in B(\xi_p, \epsilon)$. On considère le rayon géodésique r_1 (respectivement r_2) de y à ξ_p (respectivement de y à η). Dans un triangle de comparaison $\Delta(\bar{y}, \bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t))$ de \mathbb{H}^2 pour le triangle $\Delta(y, r_1(t), r_2(t))$, on considère, pour t assez grand, la projection \bar{u}_t de \bar{p} sur $[\bar{y}, \bar{r}_2(t)]$. Le triangle $\bar{y}, \bar{p}, \bar{u}_t$ a un angle de $\frac{\pi}{2}$ en \bar{u}_t donc :

$$\text{sh}(d(\bar{p}, \bar{u}_t)) = \sin \angle_y^{(-1)}(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)) \text{sh}(d(\bar{p}, \bar{y})).$$

L'inégalité CAT(-1) permet de déduire :

$$\text{sh}(d(p, u_t)) \leq 2 \sin \frac{\angle_y^{(-1)}(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t))}{2} \text{sh}(R + \Delta).$$

Ainsi, quitte à extraire, on peut supposer que u_t converge vers un point $u \in r_2([0, +\infty[)$ et puisque $d_y(\xi_p, \eta) = \sin \frac{\angle_y^{(-1)}(\xi_p, \eta)}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} \text{sh}(d(p, u)) &\leq 2 \sin \frac{\angle_y^{(-1)}(\xi_p, \eta)}{2} \text{sh}(R + \Delta) \\ &\leq 2\epsilon \text{sh}(R + \Delta). \end{aligned}$$

Prenons $\epsilon_R = \frac{\text{sh}(\frac{r_{\text{inj}}}{6})}{2\text{sh}(R + \Delta)}$. Les considérations ci-dessus montre que $B(\xi_p, \epsilon_R) \subset \mathcal{O}_y(p, \frac{r_{\text{inj}}}{6})$. De plus, comme la fonction

$$\frac{e^{-R}}{\epsilon_R} = \frac{2\text{sh}(R + \Delta)e^{-R}}{\text{sh}(\frac{r_{\text{inj}}}{6})}$$

est bornée pour $R \geq 0$, on peut trouver $\lambda > \max\{1, C' \frac{e^{-R}}{\epsilon_R}, R > 0\}$. Pour un tel choix de λ , on a

$$\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}) \subset B(\xi_p, \epsilon_R) \subset \mathcal{O}_y(p, \frac{r_{\text{inj}}}{6}),$$

pour tout $R > 0$ et tout $p \in A_2^*(y, \Delta, R)$.

Montrons que si $\Delta < \frac{r_{\text{inj}}}{6}$, les boules $(\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}))_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)}$ sont deux à deux disjointes. Soient p et p' deux points de $A_2^*(y, \Delta, R)$ distincts et supposons que

$$\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}) \cap \lambda^{-1}B(\xi_{p'}, C'e^{-R}) \neq \emptyset.$$

En particulier, on a

$$\mathcal{O}_y(p, \frac{r_{\text{inj}}}{6}) \cap \mathcal{O}_y(p', \frac{r_{\text{inj}}}{6}) \neq \emptyset.$$

Par suite, on peut trouver un rayon géodésique issu de y passant par $B(p, \frac{r_{\text{inj}}}{6})$ et $B(p', \frac{r_{\text{inj}}}{6})$. Soient

z et z' des points où ce rayon intersecte $B(p, \frac{r_{\text{inj}}}{6})$ et $B(p', \frac{r_{\text{inj}}}{6})$ respectivement. On peut supposer que $d(y, z) \leq d(y, z')$, et l'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$\begin{aligned}
d(p, p') &\leq 2\frac{r_{\text{inj}}}{6} + d(z, z') \\
&\leq 2\frac{r_{\text{inj}}}{6} + d(z', y) - d(z, y) \\
&\leq 2\frac{r_{\text{inj}}}{6} + d(z', p') + d(p', y) - (d(p, y) - d(p, z)) \\
&\leq 2\frac{r_{\text{inj}}}{6} + \frac{r_{\text{inj}}}{6} + R + \Delta - (R - \Delta - \frac{r_{\text{inj}}}{6}) \\
&\leq 4\frac{r_{\text{inj}}}{6} + 2\Delta \\
&< r_{\text{inj}}.
\end{aligned}$$

Cela contredit la définition de r_{inj} . □

On fixe désormais $\Delta < \frac{r_{\text{inj}}}{6}$ et on étudie la suite des fonctions g_R que nous avons définies plus haut par :

$$g_R = \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_y(p, R_0)}.$$

Proposition 3.3.38. *Les fonctions g_R satisfont les propriétés suivantes :*

1. $\int_{\partial X^2} g_R d\mu_y = 1,$
2. $(g_R)_R$ est bornée dans $L^2(\partial X^2, \mu_y).$

Démonstration. La première assertion est évidente vue la définition de g_R . Pour la seconde assertion, on définit

$$g_R^- = \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \mathbb{1}_{\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R})},$$

et

$$g_R^+ = \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{1}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))} \mathbb{1}_{B(\xi_p, C'e^{-R})}.$$

D'après le lemme 3.3.36 appliqué aux boules $(\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}))_p$, il existe une constante $C(\lambda)$ telle que

$$\|g_R^+\|_2 \leq C(\lambda) \|g_R^-\|_2.$$

Par ailleurs, comme $\mathcal{O}_y(p, R_0) \subset B(\xi_p, C'e^{-R})$, on a

$$\|g_R\|_2 \leq \|g_R^+\|_2 \leq C(\lambda) \|g_R^-\|_2$$

et il suffit donc de montrer que $(g_R^-)_R$ est bornée. Or, d'après le lemme 3.3.37, les boules $(\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R}))_p$ sont disjointes donc les fonctions $(\mathbb{1}_{\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R})})_p$ sont orthogonales pour le produit scalaire usuel de $L^2(\mu_y)$. On en déduit

$$\langle g_R^-, g_R^- \rangle_{L^2(\mu_y)} = \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)^2} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{\langle \mathbb{1}_{\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R})}, \mathbb{1}_{\lambda^{-1}B(\xi_p, C'e^{-R})} \rangle_{L^2(\mu_y)}}{\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0))^2} \quad (3.9)$$

$$\lesssim \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)^2} \sum_{p \in A_2^*(y, \Delta, R)} \frac{\mu_y(B(\xi_p, C'e^{-R}))}{(\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0)))^2} \quad (3.10)$$

$$\lesssim \frac{1}{N_2^*(y, \Delta, R)} e^{\delta_2 R} \quad (3.11)$$

$$\lesssim 1. \quad (3.12)$$

Justifions les inégalités ci-dessus. L'inégalité (3.11) provient de la δ_2 -Ahlfors régularité de μ_y et du lemme 1.2.7. En effet, ces propriétés impliquent

$$\mu_y(\mathcal{O}_y(p, R_0)) \gtrsim e^{-\delta_2 d(y, p)} \gtrsim e^{-\delta_2 R} \text{ et } \mu_y(B(\xi_p, C'e^{-R})) \lesssim e^{-\delta_2 R}.$$

Pour l'inégalité (3.12), posons $A = (\bar{B}(y, R + \Delta) \setminus \bar{B}(y, R - \Delta)) \cap \Gamma_2 y$. Puisque $W_2(y)$ est isométrique à \mathbb{H}^{n-2} , alors $\text{Card}(A \cap W_2(y)) \asymp e^{(n-3)R}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} N_2^*(y, \Delta, R) &= \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap W_2(y)) \\ &\geq C e^{\delta_2 R} - C' e^{(n-3)R} \\ &\geq e^{\delta_2 R} (C - C' e^{R(n-3-\delta_2)}) \\ &\gtrsim e^{\delta_2 R}, \end{aligned}$$

puisque $\delta_2 \geq n - 1$. Cela conclut la preuve de la proposition. \square

On en déduit

$$\textbf{Corollaire 3.3.39.} \quad \int_{\partial X^2} \frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} g_R(\xi) d\mu_y(\xi) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \lambda_2.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial X^2} \frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} g_R(\xi) d\mu_y(\xi) - \lambda_2 \right| &= \left| \int_{\partial X^2} \left(\frac{F_{R-2R_0-\Delta}(\xi)}{R} - \lambda_2 \right) g_R(\xi) d\mu_y(\xi) \right| \\ &\leq \left\| \frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R} - \lambda_2 \right\|_2 \cdot \|g_R\|_2 \\ &\lesssim \left\| \frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R} - \lambda_2 \right\|_2 \end{aligned}$$

De plus, $\left| \frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R} - \lambda_2 \right|^2 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$ et pour $R \geq 1$, $\left| \frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R} - \lambda_2 \right|^2$ est dominée par la fonction μ_y -intégrable $(2r_{\perp}^{-1} + \lambda_2 + 1)^2$. Ainsi, le théorème de convergence dominée implique que

$$\left\| \frac{F_{R-2R_0-\Delta}}{R} - \lambda_2 \right\|_2 \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

\square

En combinant le corollaire 3.3.39 et l'inégalité (3.8) on obtient

Proposition 3.3.40. Soit $\lambda_2 > 0$ la constante de la définition 3.3.20. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_{2m} \geq n - 1 + \lambda_2 \ln(m).$$

Le théorème 3.1.3 résulte alors de la proposition 3.3.40 et de l'estimation de λ_2 donnée à la proposition 3.3.25.

3.4 Annexe : preuve du lemme 3.3.36

La preuve est tirée de [9].

Lemme 3.4.1. Soit $\mathcal{B} = (B_i)_i$ une famille dénombrable de boules dans un espace mesuré Ahlfors régulier (X, μ) et soit $(a_i)_i$ une suite de réels strictement positifs. Alors, pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $\lambda > 1$, il existe une constante $C = C(\lambda, p, \mu)$ telle que

$$\left\| \sum_i a_i \mathbf{1}_{\lambda B_i} \right\|_p \leq C \left\| \sum_i a_i \mathbf{1}_{B_i} \right\|_p.$$

On rappelle que pour toute fonction localement intégrable g d'un espace mesuré Q -Ahlfors régulier (X, μ) , la fonction maximale $M(g)$ est la fonction définie par

$$M(g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} g d\mu.$$

Pour tout $q > 1$ et pour toute fonction $g \in L^q(\mu)$ positive, $M(g)$ vérifie une *inégalité maximale*, à savoir

$$\|M(g)\|_q \lesssim \|g\|_q.$$

Enfin, remarquons que pour tout $\lambda > 1$ et pour tout x dans un boule $B = B(y, r)$ la boule $B(x, (\lambda + 1)r)$ contient λB . En particulier,

$$\begin{aligned} M(g)(x) &\geq \frac{1}{\mu(B(x, (\lambda + 1)r))} \int_{B(x, (\lambda + 1)r)} g d\mu \\ &\geq \frac{1}{\mu(B(x, (\lambda + 1)r))} \int_{\lambda B} g d\mu \\ &\gtrsim \frac{1}{r^Q} \int_{\lambda B} g d\mu. \end{aligned}$$

Si l'on intègre cette inégalité sur B on trouve

$$\int_B M(g) d\mu \gtrsim \frac{\mu(B)}{r^Q} \int_{\lambda B} g d\mu \gtrsim \int_{\lambda B} g d\mu.$$

Fort de ces remarques, nous pouvons démontrer le lemme 3.3.36.

Démonstration. Notons $B_i = B(x_i, r_i)$ et $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\lambda B_i}$. Par dualité, la norme L^p de f est égale à sa norme d'opérateur comme opérateur sur L^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Plus précisément

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \left| \int f g d\mu \right|.$$

Soit $g \in L^q(\mu)$ de norme 1. D'après les considérations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int fg d\mu \right| &\leq \sum_i a_i \int_{\lambda B_i} |g| d\mu \\
&\lesssim \sum_i a_i \int_{B_i} M(|g|) d\mu \\
&\lesssim \int \left(\sum_i a_i \mathbb{1}_{B_i} \right) M(|g|) d\mu \\
&\lesssim \left\| \sum_i a_i \mathbb{1}_{B_i} \right\|_p \|M(|g|)\|_q \\
&\lesssim \left\| \sum_i a_i \mathbb{1}_{B_i} \right\|_p.
\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve du lemme. □

GROUPES ET ESPACES PARTIELLEMENT CAT(-1)

4.1 Introduction

La notion de courbure est fondamentale en théorie géométrique des groupes : il est fréquent que la présence de comportements typiques de la courbure négative dans la géométrie d'un groupe permette d'extraire des informations intéressantes sur les propriétés algébriques de ce groupe. Le premier exemple de cette interaction entre géométrie et propriétés algébriques en théorie des groupes est apparu avec la théorie de la *petite simplification* (voir [50] ou [54] pour une approche plus géométrique), plus tard généralisée par Gromov dans son travail fondateur sur les *groupes hyperboliques* [37]. Dans ce travail, Gromov suggère déjà la notion de *groupe relativement hyperbolique*, autorisant de la non-hyperbolicité concentrée dans des sous-espaces contrôlés par une collection de sous-groupes. Nous renvoyons à l'article de survol [46] et aux références qui y sont citées pour plus d'informations sur les groupes relativement hyperboliques et leur développement. Plus récemment, Osin a introduit une nouvelle forme d'hyperbolicité, l'*hyperbolicité acylindrique* [59], plus faible que l'hyperbolicité relative, dans le but d'unifier plusieurs classes de groupes considérés comme "de courbure strictement négative".

Bien que l'acylindricité hyperbolique généralise strictement la notion d'hyperbolicité relative, certains arguments utilisés dans le contexte des groupes relativement hyperboliques sont encore valables dans le contexte des groupes acylindriquement hyperboliques [23].

L'exemple le plus frappant de propriété algébrique héritée de l'hyperbolicité acylindrique est la SQ-universalité : tout groupe dénombrable peut être plongé dans un quotient de n'importe quel groupe acylindriquement hyperbolique. Les premiers exemples de tels groupes, ayant motivés l'introduction de la notion d'acylindricité, ont été les groupes modulaires de surfaces [5] (*mapping class groups* en anglais) et les groupes d'automorphismes extérieurs des groupes libres [7]. Par la suite, de nombreux auteurs se sont penchés sur la question de l'hyperbolicité acylindrique de grandes familles de groupes. Ainsi, les produits graphés [55], les groupes de 3-variétés [55], les groupes de Cremona [49], les groupes à petites simplifications [40, 1, 28], les groupes de déficience au moins deux [58], les groupes d'Artin [17, 21], les groupes de diagrammes [29] et certains groupes de tresses [30] sont acylindriquement hyperboliques. À notre connaissance, l'hyperbolicité acylindrique est actuellement la notion la plus générale et la plus satisfaisante de groupes admettant un comportement de courbure strictement négative.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des groupes de courbure négative : les groupes CAT(0), c'est-à-dire les groupes agissant géométriquement sur des espaces CAT(0), et les groupes fondamentaux de variétés riemanniennes compactes sans point focal (la définition sera donnée à la partie 4.4).

Dans les deux cas, ces groupes agissent sur des espaces qui généralisent, en un certain sens, les variétés de Hadamard (*i.e.* les variétés riemanniennes complètes simplement connexes de courbure sectionnelle négative). En effet, d'une part les espaces $CAT(0)$ sont le pendant métrique des variétés de Hadamard et, d'autre part, les variétés sans point focal partagent avec les variétés de Hadamard de nombreux points communs (voir par exemple [36], [60] ou [65]) et peuvent être vues comme des variétés satisfaisant une condition plus faible de courbure négative.

De manière grossière, nous montrons qu'un tel groupe est acylindriquement hyperbolique dès lors qu'il contient un peu de courbure strictement négative. Plus précisément, le résultat principal de ce chapitre est :

Théorème 4.1.1. *Soit G un groupe agissant géométriquement sur un espace métrique X possédant un ouvert $CAT(-1)$. Supposons qu'on soit dans l'un des deux cas suivant*

1. *X est un espace $CAT(0)$ propre, géodésiquement complet,*
2. *X est une variété riemannienne simplement connexe sans point focal et G agit librement.*

Alors G est virtuellement cyclique ou acylindriquement hyperbolique.

L'existence d'une isométrie contractante est suffisante pour garantir l'hyperbolicité acylindrique du groupe G (voir le théorème 4.2.4). Dans un espace $CAT(0)$, l'existence d'une géodésique contractante entraîne l'existence d'une telle isométrie (voir le théorème 6.40 de [31] par exemple). Notre stratégie pour prouver le théorème 4.1.1 est la suivante. Dans un premier temps, nous construisons une géodésique dans notre espace X passant périodiquement par un voisinage $CAT(-1)$ (voir les propositions 4.3.2 et 4.4.9 ci-dessous). Dans le cas des variétés sans point focal, on peut faire en sorte que cette géodésique soit l'axe d'une isométrie. Dans un second temps, nous montrons qu'une telle géodésique est nécessairement contractante.

Plus précisément, le théorème principal résulte des deux critères suivants :

Proposition 4.1.2 (voir la proposition 4.3.7 ci-dessous). *Soient X un espace $CAT(0)$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ une géodésique bi-infinie passant par une infinité de voisinages $CAT(-1)$ de sorte que la distance entre deux tels voisinages soit uniformément majorée et minorée par des constantes strictement positives, et que le rayon des voisinages $CAT(-1)$ soit uniformément minoré par une constante strictement positive. Alors γ est une géodésique contractante.*

Proposition 4.1.3 (voir la proposition 4.4.11). *Soient X une variété riemannienne sans point focal simplement connexe, cocompacte et l une géodésique dans X passant par un point $CAT(-1)$. Si l est l'axe d'une isométrie g alors l est contractante.*

Notons qu'il est essentiel dans les énoncés ci-dessus que la géodésique passe *régulièrement* par les points $CAT(-1)$ et pas seulement une infinité de fois (voir l'exemple de la section 4.6.2).

Comme conséquence immédiate de notre théorème, on obtient, quitte à renormaliser la métrique :

Corollaire 4.1.4. *Le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte sans point focal dont la courbure est strictement négative en au moins un point est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.*

En fait, cet énoncé fait écho à une remarque de Gromov dans son article *Asymptotic invariants of infinite groups* [38], qui a motivée le travail présenté dans ce chapitre :

“In fact, the fundamental groups Γ of manifolds V with $K \leq 0$, such that $K < 0$ at some point $v \in V$ generalize in a certain way the hyperbolic groups”. ([38], page 147.)

Remarquons que, puisque notre stratégie consiste à construire une isométrie de rang un, le théorème 4.1.1 est relié à la célèbre

Conjecture de rigidité du rang [2]. *Soit X un espace $CAT(0)$ géodésiquement complet et propre et soit G un groupe infini agissant géométriquement sur X . Si X est irréductible, alors X est soit un espace*

symétrique de rang supérieur, soit un immeuble euclidien de dimension au moins 2, soit G contient une isométrie de rang un.

Il est clair que cette conjecture implique notre résultat. Cependant, dans l'autre sens, nous espérons que notre théorème pourrait être utilisé pour vérifier la conjecture dans certains cas particuliers. Cependant, nous ne connaissons pas d'exemple où notre critère s'applique et où la conjecture reste ouverte.

Enfin, on dispose aussi d'une version combinatoire du théorème 4.1.1 où la notion de courbure strictement négative se traduit par l'existence d'un sommet ayant un "gros" link.

Proposition 4.1.5 (voir le corollaire 4.5.8). *Un groupe agissant géométriquement et essentiellement sur un complexe cubique $CAT(0)$ contenant un sommet dont le link ne possède pas de cycle de longueur quatre est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.*

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 4.2, on rappelle brièvement la notion d'hyperbolicité acylindrique ainsi que les critères la caractérisant et qui nous seront utiles par la suite. Les sections 4.3 et 4.4 sont consacrées à la preuve du théorème 4.1.1. Dans la section 4.5 on montre la proposition 4.1.5 et on discute d'une possible généralisation au cas des complexes polyédraux. On conclut ce chapitre par quelques exemples. On donne notamment un exemple de groupe $CAT(0)$ partiellement $CAT(-1)$ qui n'est pas relativement hyperbolique, montrant ainsi que le théorème 4.1.1 ne peut pas être amélioré dans ce sens.

Les résultats des sections 4.3, 4.5 et 4.6 sont issus d'un travail en collaboration avec Anthony Genevois [32].

4.2 Groupes acylindriquement hyperboliques

Dans cette section, on rappelle la notion d'hyperbolicité acylindrique et on introduit le matériel nécessaire aux preuves du théorème 4.1.1. Pour plus d'informations, nous renvoyons à [59] et aux références qui y sont citées.

L'action d'un groupe G sur un espace métrique (X, d) est dite *acylindrique* si G agit par isométries et que pour tout $d \geq 0$ il existe $R, N \geq 0$ tels que pour tous $x, y \in X$ avec $d(x, y) \geq R$, il y a au plus N éléments $g \in G$ satisfaisant

$$d(x, gx) \leq d \text{ et } d(y, gy) \leq d.$$

Définition 4.2.1. Un groupe G est acylindriquement hyperbolique s'il admet une action acylindrique non élémentaire sur une espace hyperbolique.

Comme évoqué dans l'introduction, l'hyperbolicité acylindrique est liée à l'existence d'isométries ayant une caractère hyperbolique : les isométries contractantes.

Définition 4.2.2. Soit G un groupe agissant par isométries sur un espace géodésique X . Un élément $g \in G$ est

- *hyperbolique* si l'orbite de tout point est une quasi-géodésique,
- *WPD* (pour *Weak Proper Discontinuous*) si pour tout $d \geq 0$ et pour tout $x \in X$, il existe une constante $N \geq 0$ telle que l'ensemble

$$\left\{ h \in G \mid d(x, hx), d(g^N x, hg^N x) \leq d \right\}$$

est fini.

Remarquons que si l'action de G est proprement discontinue, tout élément $g \in G$ est WPD.

Définition 4.2.3. Une quasi-géodésique l d'un espace métrique X est dite *contractante* s'il existe une constante $B > 0$ telle que la projection sur l par point le plus proche (qui est une application multivaluée en général) de toute boule disjointe de l a un diamètre d'au plus B .

Théorème 4.2.4 (Théorèmes H et I de [6]). Soient G un groupe agissant sur un espace métrique X et $g \in G$ une isométrie hyperbolique WPD possédant un axe contractant. Alors G est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.

Dans le cas particulier où X est un espace CAT(0), la projection sur un convexe C est une application bien définie $\pi_C : X \rightarrow C$. En combinant les résultats de [20, 2] (voir aussi le théorème 6.40 de [31] pour plus de détails) et le théorème 4.2.4, on obtient la caractérisation suivante :

Théorème 4.2.5. Soit G un groupe non virtuellement cyclique agissant géométriquement sur un espace CAT(0) X . Alors G est acylindriquement hyperbolique si et seulement si X contient un rayon géodésique contractant.

Pour une géodésique, être contractante est un caractère typique de la courbure strictement négative.

Exemple 4.2.6. Dans le plan hyperbolique \mathbb{H}^2 les géodésiques sont $\ln(3 + 2\sqrt{2})$ -contractantes. En effet, soient γ une géodésique et B une boule disjointe de γ . Par homogénéité, il suffit de considérer le cas où la géodésique γ est le demi-cercle de rayon 1 centré en l'origine et B est centrée en un point de l'axe $(0, \infty)$. Dans ce cas, B est contenue dans l'horoboule H centrée en ∞ et passant par i . Or, il est facile de voir que la projection de H sur γ est la portion de cercle $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ dont la longueur vaut $\ln(3 + 2\sqrt{2})$ (voir la figure 4.1).

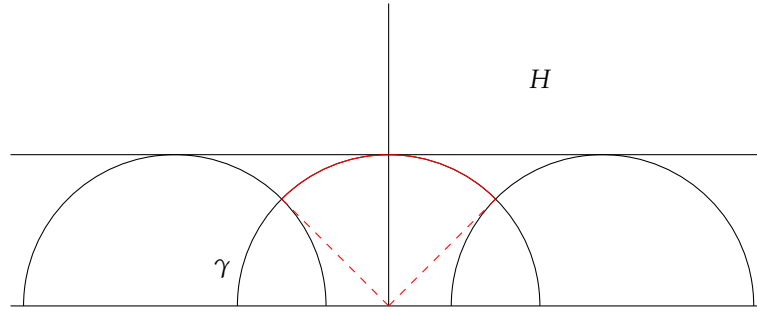


FIGURE 4.1 – L'horoboule H se projette sur l'arc rouge.

Plus généralement, les axes d'isométries loxodromiques d'espaces hyperboliques sont contractantes. Cela justifie le fait de chercher à construire une géodésique ayant beaucoup de courbure strictement négative, c'est-à-dire passant régulièrement par des points CAT(-1) (voir la proposition 4.3.7).

Toutefois il n'est pas suffisant qu'une géodésique passe une infinité de fois par des points CAT(-1) pour assurer qu'elle soit contractante : il suffit cependant que les points CAT(-1) soient uniformément distribués le long de la géodésique (voir la section 4.6.2).

4.3 Espaces CAT(0) partiellement CAT(-1)

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant, qui constitue la première partie du théorème 4.1.1 :

Théorème 4.3.1. Soit G un groupe agissant géométriquement sur un espace CAT(0) géodésiquement complet et propre X . Supposons que X contient au moins un point possédant un voisinage CAT(-1). Alors X est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.

Désormais, un point d'un espace X possédant un voisinage $\text{CAT}(-1)$ sera appelé un *point CAT(-1)*. Le théorème 4.3.1 est une conséquence des propositions 4.3.2 et 4.3.7 ci-après. La première proposition montre que X contient une géodésique bi-infinie passant régulièrement par des points $\text{CAT}(-1)$ (c'est-à-dire passant une infinité de fois par des points $\text{CAT}(-1)$ espacés par une distance uniformément bornée). La seconde proposition montre qu'une telle géodésique est nécessairement contractante. Le théorème 4.2.5 permettra alors de conclure. Chacune des deux sous-sections suivantes est consacrée à la preuve de ces propositions.

4.3.1 Construction de la géodésique

Proposition 4.3.2. *Soit X un espace $\text{CAT}(0)$ propre géodésiquement complet et cocompact contenant un point $\text{CAT}(-1)$. Alors il existe un rayon géodésique $r : [0, +\infty) \rightarrow X$ et une suite croissante (t_n) de réels positifs tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $n \geq 0$, $r(t_n)$ possède un voisinage $\text{CAT}(-1)$ de rayon minoré par une constante strictement positive indépendante de n et telle que la suite $(t_{n+1} - t_n)$ est bornée.*

La proposition découle des deux lemmes suivants :

Lemme 4.3.3. *Soit X un espace $\text{CAT}(0)$ et soient $R, \delta, \epsilon > 0$ des constantes fixées. Posons $k = \frac{\delta}{\epsilon} + 1$. Alors, pour tout rayon géodésique r , pour tous $t \in [0, \delta]$ et $x \in B(r(t + kR), R)$, le segment $[r(0), x]$ intersecte la boule $B(r(t), \epsilon)$.*

Démonstration. Notons $o = r(0)$, $z = r(t)$, $y = r(t + kR)$. Pour $x \in B(y, R)$, considérons un triangle de comparaison $\Delta(\bar{o}, \bar{y}, \bar{x})$ dans \mathbb{E}^2 pour le triangle géodésique $\Delta(o, y, x)$. Soit $\bar{\omega}$ le point d'intersection entre le segment $[\bar{o}, \bar{x}]$ et la droite parallèle à (\bar{y}, \bar{x}) passant par \bar{z} et soit ω le point correspondant sur $[0, x]$. D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité suivante,

$$\frac{d(\bar{o}, \bar{z})}{d(\bar{o}, \bar{y})} = \frac{d(\bar{\omega}, \bar{z})}{d(\bar{x}, \bar{y})},$$

qui, avec l'inégalité $\text{CAT}(0)$, donne :

$$d(\omega, z) \leq d(\bar{\omega}, \bar{z}) = \frac{d(\bar{o}, \bar{z})}{d(\bar{o}, \bar{y})} d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{\delta R}{t + kR} < \epsilon.$$

□

En fait, lorsque $r(t)$ est un point $\text{CAT}(-1)$, on va voir que l'on peut choisir k indépendant de t (ou de δ). Ce fait important permettra de borner la suite $(t_{n+1} - t_n)$ dans la preuve de la proposition 4.3.2.

Lemme 4.3.4. *Soit X un espace $\text{CAT}(0)$ propre géodésiquement complet et cocompact contenant un point $\text{CAT}(-1)$ et soient R, ϵ, c des constantes positives fixées. Alors il existe $k = k(R, \epsilon, c)$ tel que, si $o, z, y, x \in X$ sont quatre points satisfaisant :*

1. z appartient au segment $[o, y]$;
2. $d(x, y) \leq R$ et $d(z, y) \geq k$;
3. $B(z, c)$ est $\text{CAT}(-1)$;

alors le segment $[o, x]$ intersecte la boule $B(z, \epsilon)$.

Avant de prouver le lemme, rappelons l'énoncé du théorème de la bande plate.

Théorème 4.3.5 (Theorem II.2.13 de [15]). *Soient X un espace $\text{CAT}(0)$, c et c' deux géodésiques bi-infinies distinctes de X . Si c et c' sont asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$ alors l'enveloppe convexe de $c(\mathbb{R}) \cup c'(\mathbb{R})$ est isométrique à une bande plate $\mathbb{R} \times [0, D] \subset \mathbb{R}^2$.*

Démonstration du lemme 4.3.4. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $o_n, x_n, y_n, z_n \in X$ tels que :

- z_n appartient au segment $[o_n, y_n]$;
- $d(x_n, y_n) \leq R$ et $d(z_n, y_n) \geq n$;
- $B(z_n, c)$ est un voisinage CAT(-1) de z_n ;
- $[o_n, x_n] \cap B(z_n, \epsilon) = \emptyset$.

D'après le lemme précédent, cette dernière hypothèse implique l'inégalité

$$n \leq d(z_n, y_n) \leq \left(\frac{d(o_n, z_n)}{\epsilon} + 1 \right) \cdot R$$

En particulier, $d(o_n, z_n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Puisque X est cocompact, quitte à translater par une isométrie on peut supposer que la suite (z_n) reste dans un compact fixé $K \subset X$, et, puisque $d(o_n, z_n)$ et $d(z_n, y_n)$ tendent vers $+\infty$, il découle du théorème d'Arzelà-Ascoli que, quitte à extraire une sous-suite, les segments $[o_n, y_n]$ convergent vers une géodésique l . De même, quitte à extraire une sous-suite, les segments $[o_n, x_n]$ convergent vers une géodésique l' parallèle à l . En effet, par convexité de la distance, $[o_n, x_n]$ est inclus dans le R -voisinage de $[o_n, y_n]$. D'autre part, ces géodésiques sont distinctes car $d(z_n, [o_n, x_n]) \geq \epsilon$ pour tout n .

Le théorème de la bande plate et le fait suivant, énonçant que la limite de points CAT(-1) est encore un point CAT(-1), mènent à une contradiction.

Fait 4.3.6. Soit (z_n) une suite de points convergeant vers un point $z \in X$ et tels que $B(z_n, c)$ est un voisinage CAT(-1) pour tout n . Alors $B(z, \frac{c}{2})$ est un voisinage CAT(-1) de z .

En effet, pour n suffisamment grand, la boule $B(z, \frac{c}{2})$ est incluse dans $B(z_n, c)$. Par convexité des boules, $B(z, \frac{c}{2})$ est donc CAT(-1). \square

On peut désormais démontrer la proposition 4.3.2. Pour $o, z \in X$ et $R > 0$ on définit l'ombre $\mathcal{O}_o(z, R)$ de la boule $B(z, R)$ vue depuis le point o comme l'ensemble des points $y \in X$ tels que le segment $[o, y]$ rencontre la boule $B(z, R)$.

Démonstration de la proposition 4.3.2. Soit $Y = X/G$ un quotient compact de X où G est un sous-groupe de $\text{Isom}(X)$ et soit $z \in X$ un point tel que la boule $B(z, 2\epsilon)$ soit un voisinage CAT(-1) pour un certain $\epsilon > 0$. Choisissons de plus $R \geq 2\epsilon + \text{diam}(Y)$ et $K \geq \max(R + 2\epsilon, k(R, \epsilon, 2\epsilon))$ où $k(R, \epsilon, 2\epsilon)$ est la constante donnée par le lemme 4.3.4. Enfin, fixons un point de base $o \in X$.

Nous allons désormais construire par récurrence une suite de points (z_n) dans la G -orbite de z telle que pour tout entier $n \geq 1$:

1. $\mathcal{O}_o(z_n, \epsilon) \subset \dots \subset \mathcal{O}_o(z_1, \epsilon)$;
2. il existe $z_n^1, \dots, z_n^n \in [o, z_n]$ tels que $z_n^k \in B(z_k, \epsilon)$, $\epsilon \leq d(z_n^k, z_n^{k+1}) \leq K + R + \epsilon$ et $z_n^n = z_n$.

Étape $n = 1$. Il suffit simplement de prendre $z = z_1$.

Passage de l'étape n à l'étape $n + 1$. Supposons que les points z_1, \dots, z_n ont été construits. Puisque X est géodésiquement complet, on peut prolonger le segment $[o, z_n]$ en un rayon géodésique r_n et considérer le point y_n de r_n à distance K de z_n . Le choix de K et le lemme 4.3.4 impliquent que

$$\mathcal{O}_o(y_n, R) \subset \mathcal{O}_o(z_n, \epsilon).$$

De plus, comme la G -orbite de z est $\text{diam}(Y)$ -dense dans X , par choix de R , il existe $z_{n+1} \in G \cdot z$ tel que $B(z_{n+1}, \epsilon) \subset B(y_n, R)$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{O}_o(z_{n+1}, \epsilon) \subset \mathcal{O}_o(y_n, R) \subset \mathcal{O}_o(z_n, \epsilon),$$

et donc, $[o, z_{n+1}]$ intersecte chaque boule $B(z_k, \epsilon)$ pour $k = 1, \dots, n$ (voir la figure 4.2). Finalement, si on fixe un point $z_{n+1}^k \in B(z_k, \epsilon) \cap [o, z_{n+1}]$, alors, pour tout $k \leq n - 1$ on a

$$d(z_{n+1}^k, z_{n+1}^{k+1}) \leq d(z_{n+1}^k, z_k) + d(z_k, y_k) + d(y_k, z_{n+1}^{k+1}) \leq \epsilon + K + R,$$

et

$$d(z_{n+1}^k, z_{n+1}^{k+1}) \geq d(z_k, y_k) - d(z_{n+1}^k, z_k) - d(y_k, z_{n+1}^{k+1}) \geq K - R - \epsilon \geq \epsilon.$$

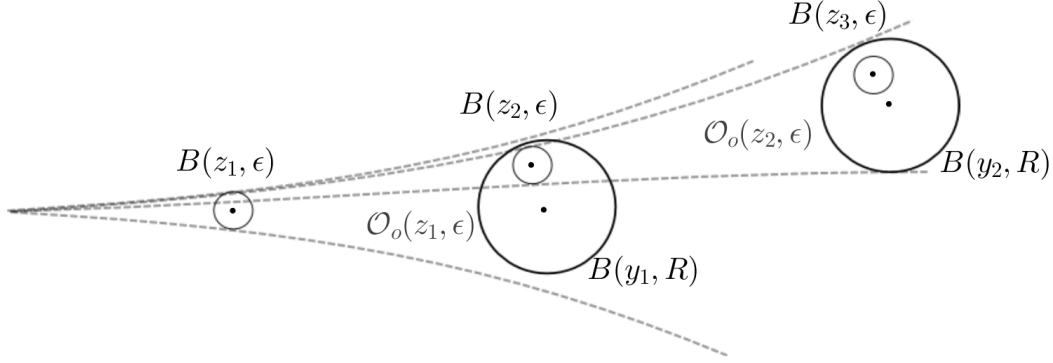


FIGURE 4.2 – Les trois premières étapes de la construction.

Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, quitte à extraire une sous-suite, la suite de segments $[z_1, z_n]$ converge vers un rayon géodésique r uniformément sur tout compact. Par construction, r rencontre chaque boule fermée $\bar{B}(z_n, \epsilon)$ en au moins un point $r(t_n)$ tel que $\epsilon \leq t_{n+1} - t_n \leq R + K + \epsilon$ et $B(r(t_n), \epsilon) \subset B(z_n, 2\epsilon)$ est un voisinage CAT(-1) (voir le fait 4.3.6). \square

4.3.2 Preuve de la proposition 4.1.2

Maintenant que notre géodésique passant régulièrement par des points CAT(-1) est (presque) construite, nous devons montrer qu'elle est contractante. C'est l'objet de la proposition suivante, dont la preuve occupe la majeure partie de cette sous-section.

Proposition 4.3.7. *Soit X un espace CAT(0) et soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ une géodésique bi-infinie passant par une infinité de points CAT(-1) de sorte que la distance entre deux tels points consécutifs soit uniformément majorée et minorée par des constantes strictement positives, et que le rayon des voisinages CAT(-1) soit minoré par une constante strictement positive indépendante de n . Alors γ est une géodésique contractante.*

Inspirée de [47], notre preuve est basée sur une version combinatoire de la formule de Gauss-Bonnet. Nous commençons par introduire le matériel nécessaire à la preuve.

Définition 4.3.8. Un *complexe polygonal* est un CW-complexe de dimension 2 vérifiant les conditions suivantes :

- les applications de recollement sont des homéomorphismes,
- deux cellules sont soit disjointes soit s'intersectent exactement en une cellule fermée.

Le *link* d'un sommet x d'un complexe polygonal est le graphe dont les sommets sont les arêtes adjacentes à x et dont les arêtes sont les polygones (*i.e* les 2-cellules fermées) adjacents à x .

En voyant les arêtes d'un complexe polygonal X comme des segments de longueurs 1, le link d'un sommet x s'identifie à l'ensemble $\{y \in X \mid d(x, y) = \frac{1}{2}\}$.

Définition 4.3.9. Soit X un complexe polygonal. Un *coin* (v, C) est un couple formé d'un sommet $v \in X$ et d'un polygone $C \subset X$ contenant v . Étant donné un sommet $v \in X$ (resp. un polygone $R \subset X$), on note $\text{coin}(v)$ (resp. $\text{coin}(R)$) l'ensemble des coins de X basés en v (resp. l'ensemble des coins supportés par R).

Définition 4.3.10. Un *complexe polygonal à angles* (X, \angle) est un complexe polygonal X muni d'une application $\angle : \{\text{coins de } X\} \rightarrow \mathbb{R}$.

La courbure d'un sommet $v \in X$ est définie comme le réel

$$\kappa(v) = 2\pi - \pi \cdot \chi(\text{link}(v)) - \sum_{c \in \text{coin}(v)} \angle(v),$$

et la courbure du polygone $R \subset X$ comme le réel

$$\kappa(R) = \sum_{c \in \text{coin}(R)} \angle(c) - \pi \cdot |\partial R| + 2\pi,$$

où $|\partial R|$ désigne le nombre de 1-cellules de ∂R .

Remarquons que si R est un triangle, sa courbure est égale à la somme de ses angles moins π . En particulier, la courbure d'un triangle euclidien est nulle, celle d'un triangle hyperbolique est strictement négative et celle d'un triangle sphérique est strictement positive.

Ce formalisme permet de retrouver une version combinatoire de la célèbre formule de Gauss-Bonnet reliant courbure et caractéristique d'Euler (voir le théorème 4.6 de [54] pour la preuve).

Proposition 4.3.11 (Formule de Gauss-Bonnet combinatoire). *Soit (X, \angle) un complexe polygonal à angles. Alors*

$$\sum_{v \text{ sommet}} \kappa(v) + \sum_{R \text{ polygone}} \kappa(R) = 2\pi \cdot \chi(X).$$

Nous avons maintenant tous les outils en main pour démontrer la proposition 4.3.7.

Démonstration de la proposition 4.3.7. Soient $x \notin \gamma$ et y deux points tels que $d(x, y) < d(x, \gamma)$, et notons $z, w \in \gamma$ les projections de x et y sur γ respectivement. On fixe des constantes $\epsilon, L, R > 0$ de sorte que la boule de rayon ϵ centrée en un point CAT(-1) soit un voisinage CAT(-1) et que la distance entre deux points CAT(-1) consécutifs sur γ soit comprise entre R et L . Sans perte de généralités, on peut supposer que $R > 2\epsilon$.

Supposons qu'il existe N points CAT(-1) consécutifs $x_1, \dots, x_N \in \gamma$ entre z et w tels que $B(x_i, \epsilon) \cap [x, y] = \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Pour tout $1 \leq i \leq N$, fixons un point $y_i \in [x, z] \cup [x, y] \cup [y, w]$ dont la projection sur γ est x_i . Comme la projection de $[x, z]$ sur γ est réduite au singleton $\{z\}$ et celle de $[w, y]$ au singleton $\{w\}$, nécessairement $y_i \in [x, y]$. Enfin, pour tout $1 \leq i \leq N$, soit a_i (resp. b_i et c_i) l'unique point de $[x_{i-1}, x_i]$ (resp. $[x_i, y_i]$ et $[x_i, x_{i+1}]$) à distance ϵ de x_i (par convention, on note $x_0 = z$ et $x_{N+1} = w$). La configuration est résumée sur la figure 4.3.

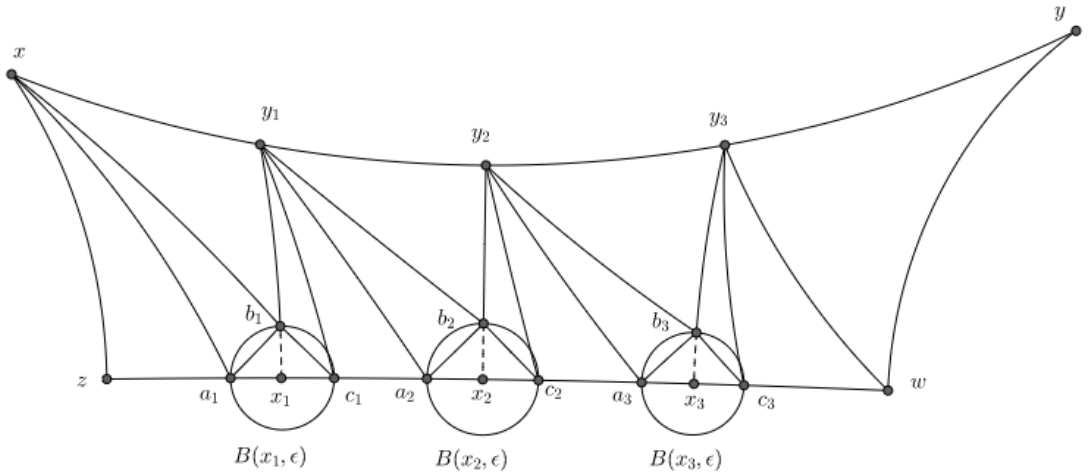


FIGURE 4.3 – Le complexe triangulaire Δ .

Notons Δ la réunion des segments géodésiques suivants :

- $[x, y], [y, w], [w, z]$ et $[z, x]$;
- $[y_i, b_i]$ pour tout $1 \leq i \leq N$;
- $[b_i, a_i]$ et $[b_i, c_i]$ pour tout $1 \leq i \leq N$;
- $[y_i, c_i], [y_i, a_{i+1}]$ et $[y_i, b_{i+1}]$ pour tout $0 \leq i \leq N-1$ (où on a noté $y_0 = x$ et $x_0 = z$).

En d'autres termes, Δ est une triangulation du quadrilatère géodésique $Q(x, y, w, z)$. On considère maintenant un quadrilatère de comparaison $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z})$ de $Q(x, y, w, z)$ dans \mathbb{E}^2 . Pour tout $1 \leq i \leq N$, on note $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{a}_i, \bar{c}_i$ les antécédents respectifs de x_i, y_i, a_i, c_i par l'application de comparaison $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z}) \rightarrow Q(x, y, w, z)$. Cette application a une extension naturelle

$$\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z}) \cup \bigcup_{i=1}^N [\bar{y}_i, \bar{x}_i] \rightarrow Q(x, y, w, z) \cup \bigcup_{i=1}^N [y_i, x_i],$$

envoyant chaque segment $[\bar{y}_i, \bar{x}_i]$ sur un segment géodésique $[y_i, x_i]$ par une transformation affine. On appelle \bar{b}_i l'antécédent de b_i par cette application, pour tout $1 \leq i \leq N$. En triangulant $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z})$ de la même façon que $Q(x, y, w, z)$, on obtient un complexe triangulaire planaire $\bar{\Delta}$, et une application $f : \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ étendant l'application de comparaison $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \bar{z}) \rightarrow Q(x, y, w, z)$.

À partir de maintenant, les triangles $(\bar{c}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i)$ pour $1 \leq i \leq N$, et leurs images par f , seront appelés des triangles CAT(-1). Remarquons qu'un triangle CAT(-1) dans Δ est contenu dans une boule de rayon ϵ centrée en un point CAT(-1) et est donc contenu dans un sous-espace CAT(-1). Pour chaque triangle δ de $\bar{\Delta}$, on va assigner un angle à ses coins de la façon suivante, afin d'obtenir un complexe à angles :

- pour un triangle CAT(-1) $(\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i)$, on assigne au sommet \bar{a}_i (respectivement \bar{c}_i) l'angle correspondant dans un triangle de comparaison de \mathbb{H}^2 pour le triangle (a_i, b_i, x_i) (respectivement pour le triangle (c_i, b_i, x_i)) et au sommet \bar{b}_i l'angle correspondant dans un triangle de comparaison de \mathbb{H}^2 pour le triangle (a_i, b_i, c_i) ;
- pour les autres triangles, on assigne à chaque angle la valeur de l'angle correspondant dans un triangle de comparaison dans \mathbb{E}^2 .

Par la suite, on notera $\angle_{\bar{c}_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$, par exemple, l'angle défini ci-dessus, qu'il ne faut pas confondre avec l'angle d'Alexandrov ni avec l'angle correspondant dans le complexe euclidien $\bar{\Delta}$.

L'idée est d'appliquer la formule de Gauss-Bonnet pour borner le nombre N . Pour cela, il est nécessaire d'étudier les courbures des sommets et des triangles de $\bar{\Delta}$.

Fait 4.3.12. *La courbure d'un sommet de $\bar{\Delta}$, différent de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ou de \bar{b}_i pour $1 \leq i \leq N$, est négative.*

Fixons $1 \leq i \leq N$ et étudions la courbure en \bar{c}_i . Remarquons que d'après l'inégalité CAT(0) (ou CAT(-1) selon le triangle), la somme

$$\angle_{\bar{c}_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i) + \angle_{\bar{c}_i}(\bar{b}_i, \bar{y}_i) + \angle_{\bar{c}_i}(\bar{y}_i, \bar{a}_{i+1})$$

est minorée par

$$\angle_{c_i}(a_i, b_i) + \angle_{c_i}(b_i, y_i) + \angle_{c_i}(y_i, a_{i+1}) \geq \angle_{c_i}(a_i, a_{i+1}) = \pi.$$

Par conséquent, $\kappa(\bar{c}_i) \leq 0$. Le même argument montre que les courbures $\kappa(\bar{y}_i)$ et $\kappa(\bar{a}_i)$ sont négatives. Cela conclut la preuve du fait.

Soient (a'_i, b'_i, x'_i) et (c''_i, b''_i, x''_i) des triangles de comparaison dans \mathbb{H}^2 pour les triangles (a_i, b_i, x_i) et (c_i, b_i, x_i) respectivement. Ces triangles sont isocèles en x'_i et x''_i respectivement avec un angle d'au moins $\frac{\pi}{2}$. En particulier, par définition des angles du complexe $\bar{\Delta}$,

$$\angle_{\bar{a}_i}(\bar{b}_i, \bar{c}_i) = \angle_{a'_i}(b'_i, x'_i) = \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i),$$

$$\angle_{\bar{c}_i}(\bar{b}_i, \bar{a}_i) = \angle_{c''_i}(b''_i, x''_i) = \angle_{b''_i}(c''_i, x''_i),$$

où $\angle_{a'_i}(b'_i, x'_i), \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i), \angle_{c''_i}(b''_i, x''_i), \angle_{b''_i}(c''_i, x''_i)$ sont les angles mesurés dans \mathbb{H}^2 .

Fait 4.3.13. Pour $1 \leq i \leq N$, on a $\kappa(\bar{b}_i) \leq \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{b''_i}(x''_i, c''_i) - \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i)$.

Fixons $1 \leq i \leq N$. Le même argument que précédemment montre que la somme

$$u := \angle_{\bar{b}_i}(\bar{y}_i, \bar{y}_{i-1}) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{y}_{i-1}, \bar{a}_i) + \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{y}_i, \bar{c}_i) + \angle_{b''_i}(c''_i, x''_i)$$

est minorée par 2π . Puisque

$$\kappa(\bar{b}_i) = 2\pi - (u - \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) - \angle_{b''_i}(x''_i, c''_i) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i)),$$

le fait est démontré.

Remarquons maintenant que la courbure d'un triangle de $\bar{\Delta}$ qui n'est pas CAT(-1) est nulle, puisque ses angles sont les angles d'un triangle euclidien. Par conséquent,

$$\sum_{\delta \text{ triangle}} \kappa(\delta) = \sum_{\delta \text{ CAT}(-1)} \kappa(\delta).$$

Notons δ_i le triangle $(\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i)$ de $\bar{\Delta}$. On rappelle que la courbure de δ_i est égale à la somme de ses angles moins π :

$$\begin{aligned} -\kappa(\delta_i) &= \pi - (\angle_{\bar{a}_i}(\bar{b}_i, \bar{c}_i) + \angle_{\bar{c}_i}(\bar{a}_i, \bar{b}_i) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i)) \\ &= \pi - (\angle_{a'_i}(b'_i, x'_i) + \angle_{c''_i}(b''_i, x''_i) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i)) \\ &= \pi - (\angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{b''_i}(c''_i, x''_i) + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i)). \end{aligned}$$

Fait 4.3.14. $\sum_{i=1}^N (\kappa(\bar{b}_i) + \kappa(\delta_i)) \leq -N \left(\pi - 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon) + 1}} \right) \right).$

Nous aurons besoin du résultat de trigonométrie hyperbolique suivant :

Lemme 4.3.15 (théorème 2.2.1 (ii) de [16]). Soit Δ un triangle géodésique de \mathbb{H}^2 dont les côtés sont de longueur a, b, c et les angles opposés respectifs de mesure α, β, γ . Alors

$$\cos(\gamma) = \sin(\alpha) \sin(\beta) \text{ch}(c) - \cos(\alpha) \cos(\beta).$$

Le fait 4.3.13 implique que

$$\begin{aligned} \kappa(\bar{b}_i) + \kappa(\delta_i) &\leq \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{b''_i}(x''_i, c''_i) - \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i) + \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{b''_i}(c''_i, x''_i) \\ &\quad + \angle_{\bar{b}_i}(\bar{a}_i, \bar{c}_i) - \pi \\ &\leq 2(\angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) + \angle_{b''_i}(x''_i, c''_i)) - \pi. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4.3.15 au triangle (a'_i, b'_i, x'_i) , on en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \cos \angle_{x'_i}(a'_i, b'_i) \\ &\geq \sin \angle_{a'_i}(b'_i, x'_i) \sin \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \text{ch}(d(a'_i, b'_i)) - \cos \angle_{a'_i}(b'_i, x'_i) \cos \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \\ &\geq \left(1 - \cos^2 \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \right) \text{ch}(d(a_i, b_i)) - \cos^2 \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \end{aligned}$$

Puisque $\angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient que

$$\cos \angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \geq \sqrt{\frac{\text{ch}(d(a_i, b_i))}{1 + \text{ch}(d(a_i, b_i))}}.$$

Remarquons que la distance $d(a_i, b_i)$ est supérieure à ϵ puisque le triangle (a'_i, b'_i, x'_i) est isocèle en x'_i avec un angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et que $d(x'_i, a'_i) = \epsilon$. De plus la fonction $x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)+1}$ est croissante. Par conséquent, la décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$, permet de conclure que

$$\angle_{b'_i}(a'_i, x'_i) \leq \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{1 + \text{ch}(\epsilon)}} \right).$$

De la même façon, on obtient

$$\angle_{b'_i}(c''_i, x''_i) \leq \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{1 + \text{ch}(\epsilon)}} \right).$$

Finalement,

$$\kappa(\bar{b}_i) + \kappa(\delta_i) \leq 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{1 + \text{ch}(\epsilon)}} \right) - \pi,$$

ce qui conclut la preuve du fait.

On peut maintenant appliquer la formule de Gauss-Bonnet à $\bar{\Delta}$, qui nous donne

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sum_{v \text{ vertex}} \kappa(v) + \sum_{\delta \text{ triangle}} \kappa(\delta) \\ &\leq 4\pi + \sum_{i=1}^N (\kappa(\bar{b}_i) + \kappa(\delta_i)) \\ &\leq 4\pi - N \left(\pi - 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon) + 1}} \right) \right), \end{aligned}$$

puis

$$N \left(\pi - 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon) + 1}} \right) \right) \leq 2\pi.$$

Or $\pi - 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon)+1}} \right)$ est strictement positif (ou de manière équivalente, $\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon)+1}$ est strictement plus grand que $\frac{1}{2}$) car la fonction $x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)+1}$ est strictement croissante et vaut $\frac{1}{2}$ en zéro. Ainsi,

$$N \leq \eta(\epsilon) := \frac{2\pi}{\pi - 4 \arccos \left(\sqrt{\frac{\text{ch}(\epsilon)}{\text{ch}(\epsilon)+1}} \right)}.$$

Jusqu'à maintenant, on a démontré qu'étant donnés deux points $x \notin \gamma$ et y tels que $d(x, y) < d(x, \gamma)$, il existe au plus $\eta(\epsilon)$ points CAT(-1) consécutifs sur γ séparant la projection w de y et la projection z de x sur γ et tels que les boules de rayon ϵ centrées en ces points soient toutes disjointes de $[x, y]$. Ainsi, soit $[z, w]$ contient au plus $\eta(\epsilon)$ points CAT(-1) consécutifs auquel cas

$$d(z, w) \leq (\eta(\epsilon) + 1) \cdot L,$$

soit il y a plus de $\eta(\epsilon)$ points CAT(-1) consécutifs sur $[z, w]$. Dans ce cas, la boule de rayon ϵ

centrée en l'un des $(\eta(\epsilon) + 1)$ -èmes premiers (partant de z) doit intersecter $[x, y]$. Sans perte de généralités, on peut supposer qu'il s'agit du $(\eta(\epsilon) + 1)$ -ème point CAT(-1) (partant de z) que l'on note c . On note aussi c' un point d'intersection de $B(c, \epsilon)$ avec $[x, y]$. On obtient alors

$$d(x, c') + d(c', y) = d(x, y) < d(x, z) \leq d(x, c') + d(c', c) + d(c, z),$$

où la première inégalité vient du fait que $d(x, z) = d(x, \gamma)$. Donc

$$\begin{aligned} d(c', y) &\leq d(c', c) + d(c, z) \\ &\leq \epsilon + (\eta(\epsilon) + 2) \cdot L. \end{aligned}$$

Enfin, si c'' désigne la projection de c' sur γ , comme la projection sur γ est 1-lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} d(z, w) &\leq d(z, c) + d(c, c'') + d(c'', w) \\ &\leq (\eta(\epsilon) + 2) \cdot L + d(c, c'') + d(c', y) \\ &\leq 2(\eta(\epsilon) + 2) \cdot L + 3\epsilon. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient que pour tout $x \notin \gamma$, pour tout y tel que $d(x, y) < d(x, \gamma)$

$$d(\pi_\gamma(x), \pi_\gamma(y)) \leq 2(\eta(\epsilon) + 2) \cdot L + 3\epsilon.$$

En conséquence, le diamètre de $\pi_\gamma(B(x, d(x, \gamma)))$ est majoré par $4(\eta(\epsilon) + 2) \cdot L + 6\epsilon$. Cela signifie que γ est B -contractante où $B = 4(\eta(\epsilon) + 2) \cdot L + 6\epsilon$. \square

Remarque(s) 4.3.16. Comme Alexander Lytchak nous l'a signalé, une preuve plus géométrique de la proposition 4.3.7 est possible. En effet, suivant la même idée, on peut remplacer la formule de Gauss-Bonnet combinatoire par un analogue géométrique prouvé par Alexandrov. On renvoie au chapitre V.3 de [48] pour plus d'informations à ce sujet. Dans la sous-section 4.5.2, on propose une autre preuve basée sur la notion de divergence.

On peut désormais démontrer le résultat principal.

Démonstration du théorème 4.3.1. D'après la proposition 4.3.2, il existe un rayon géodésique r et une suite croissante (t_n) de réels positifs tendant vers $+\infty$ tels que $r(t_n)$ possède un voisinage CAT(-1) de rayon minoré par une constante indépendante de n et tels que la suite $(t_{n+1} - t_n)$ est bornée. Pour tout $n \geq 0$, soit $g_n \in G$ une isométrie envoyant $r(t_n)$ dans un domaine fondamental compact fixé. Comme X est propre, on déduit du théorème d'Arzelà-Ascoli que la suite $(g_n \cdot r_n)$ possède une sous-suite convergeant vers une géodésique bi-infinie γ . De plus, comme la limite de points CAT(-1) dont le voisinage CAT(-1) est de rayon uniformément minoré est encore un point CAT(-1) d'après le fait 4.3.6, la géodésique γ passe par une infinité de points CAT(-1) espacés de manière uniforme. D'après la proposition 4.3.7, cette géodésique est contractante et la conclusion découle du théorème 4.2.5. \square

On conclut cette partie par une question ouverte. Définissons les *groupes partiellement CAT(-1)* comme les groupes agissant géométriquement sur un espace CAT(0) propre, géodésiquement complet et contenant un point CAT(-1). Il serait intéressant de déterminer si les groupes partiellement CAT(-1) satisfont des propriétés d'hyperbolicité plus fortes que la simple hyperbolicité acylindrique. Remarquons que, dans la section 4.6, nous donnons un exemple de groupe partiellement CAT(-1) qui n'est pas relativement hyperbolique. Une question naïve serait :

Question 4.3.17. Un groupe CAT(0) acylindriquement hyperbolique est-il nécessairement partiellement CAT(-1)? Par exemple, quels groupes d'Artin à angles droits sont partiellement CAT(-1)?

4.4 Variétés sans point focal partiellement CAT(-1)

L'objet de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4.1. *Soit M une variété riemannienne compacte sans point focal et possédant un point CAT(-1). Alors $\Gamma = \pi_1(M)$ est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.*

4.4.1 Variétés riemanniennes sans point focal

Soit M une variété riemannienne complète. Une sous-variété N de M possède un *point focal* en $q \in M$ s'il existe une variation géodésique $\gamma_s : [0, a] \rightarrow M$ telle que $\gamma_s(0) \in N$, $\gamma'_s(0) \perp N$ pour tout s , $\gamma_0(a) = q$ et $\partial_s \gamma_0(a) = 0$. Remarquons que dans le cas où N est réduit à un point, un point focal est simplement un point conjugué de N le long d'une géodésique.

Définition 4.4.2. Une variété riemannienne M est dite

- *sans point conjugué* si pour tout $p \in M$, $\{p\}$ ne possède pas de point focal,
- *sans point focal* si pour toute sous-variété totalement géodésique N de M , N ne possède pas de point focal.

En particulier :

Proposition 4.4.3. *Une variété sans point focal est sans point conjugué. En particulier, dans une variété sans point focal simplement connexe deux points sont toujours reliés par une unique géodésique minimisante au sens riemannien.*

Une variété sans point focal simplement connexe est donc uniquement géodésique.

De même si l est une géodésique d'une variété sans point focal simplement connexe et $x \notin l$, comme x n'est pas un point focal de l il existe une unique géodésique passant par x et orthogonale à l (voir [60]). Le point d'intersection de cette géodésique avec l est par définition le *projeté de x sur l* , noté $\pi_l(x)$.

Remarque(s) 4.4.4. Dans [41], Gulliver construit des exemples de variétés riemanniennes compactes sans point conjugué mais possédant des points focaux en toute dimension ≥ 2 . Il construit aussi des exemples de variétés sans point focal possédant un ouvert où la courbure est strictement positive. Ainsi, il existe des variétés sans point focal qui ne sont pas CAT(0).

Comme nous l'avons brièvement signalé au chapitre 1 (voir la remarque 1.2.3), une variété riemannienne X simplement connexe sans point focal possède un bord à l'infini ∂X défini comme l'ensemble des classes d'équivalences de rayons géodésiques asymptotes (voir la définition 1.2.1). Pour tout $x \in X$, ce bord à l'infini est en bijection avec la sphère unité $T_x^1 X$ et la topologie \mathcal{T}_x induite par cette bijection est indépendante de $x \in X$ (voir le lemme 2.7 de [66]). Pour $v \in T^1 X$ et $\epsilon > 0$ on définit $C(v, \epsilon)$ comme l'ensemble des points x de $\bar{X} = X \cup \partial X$ pour lesquels la géodésique reliant $\pi(v)$ à x fait un angle inférieur à ϵ avec v (ici $\pi : T^1 X \rightarrow X$ désigne la projection canonique). Ces ensembles $(C(v, \epsilon))_{v, \epsilon}$ forment avec les ouverts de X une prébase d'une topologie sur \bar{X} appelée *la topologie des cônes*.

Théorème 4.4.5 ([35]). *La topologie des cônes est l'unique topologie sur \bar{X} ayant la propriété que pour tout $x \in X$, l'exponentielle $T_x X \rightarrow X$ s'étend en un homéomorphisme de $\bar{T}_x X$ sur \bar{X} où $\bar{T}_x X$ est muni de sa topologie des cônes.*

Pour de plus amples détails concernant le bord à l'infini des variétés sans point focal, on renvoie aux parties 3.2 et 3.3 de [66] et aux références qui y sont citées.

On rappelle quelques lemmes utiles concernant les variétés sans point focal, qui généralisent les travaux de Ballmann et Brin en courbure négative. Ces résultats sont contenus dans [66] et nécessitent que X ait la propriété de dualité, c'est-à-dire que les vecteurs Γ -récurrent sont denses dans $T^1 X$ (voir la partie suivante). Sous ces conditions on a :

Lemme 4.4.6 (lemme 6.4 de [66]). Soient $p \in X$, $(p_n)_n \subset X$ tels que $p_n \rightarrow p$ et $\xi \in \bar{X}$, $(x_n)_n \subset \bar{X}$ tels que $x_n \rightarrow \xi$. Si $c_{p_n x_n}$ (resp. $c_{p \xi}$) désigne le segment géodésique reliant p_n à x_n (resp. le rayon géodésique issue de p et asymptote à ξ) alors

$$c'_{p_n x_n}(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c'_{p \xi}(0).$$

Lemme 4.4.7 (lemme 6.6 de [66]). Soit l une géodésique ne bordant pas de bande plate et soit $c > 0$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que si $x \in C(-l'(0), \epsilon)$ et $y \in C(l'(0), \epsilon)$ alors il existe une géodésique σ reliant x à y . De plus σ ne borde pas de demi-plan plat et $d(l(0), \sigma) \leq c$.

Proposition 4.4.8 (théorème 6.11 et proposition 6.12 de [66]). 1. Soit g une isométrie dont l'axe l ne borde pas de demi-plan euclidien. Alors pour tout voisinage U de $l(-\infty)$ dans \bar{X} et tout voisinage V de $l(+\infty)$ dans \bar{X} il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$g^n(\bar{X} \setminus U) \subset V \text{ et } g^{-n}(\bar{X} \setminus V) \subset U.$$

2. Si l est une géodésique ne bordant pas de bande plate. Alors pour tout voisinage U de $l(-\infty)$ dans \bar{X} et tout voisinage V de $l(+\infty)$ dans \bar{X} il existe une isométrie g d'axe σ tel que $\sigma(-\infty) \in U$ et $\sigma(+\infty) \in V$.

4.4.2 Preuve du théorème 4.4.1

Soient M une variété riemannienne compacte sans point focal, X son revêtement universel et Γ son groupe fondamental.

La preuve du théorème 4.4.1 suit le schéma annoncé : on exhibe une géodésique passant régulièrement par les ouverts CAT(-1) puis on montre qu'elle est contractante. Ici le cadre riemannien permet d'obtenir la géodésique souhaitée plus aisément. En effet, on dispose d'une mesure invariante par le flot géodésique, la mesure de Liouville, qui charge l'ouvert des géodésiques passant par un ouvert CAT(-1); on peut donc mettre en oeuvre des techniques dynamiques.

On note m_{Liou} la mesure de Liouville normalisée sur $T^1 M$; il s'agit d'une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique.

Proposition 4.4.9. Si M possède un point de courbure sectionnelle strictement négative alors il existe une géodésique fermée passant par un point dont les courbures sectionnelles sont strictement négatives.

Lemme 4.4.10. Pour la mesure de Liouville, presque toute géodésique est Γ -récurrente, c'est-à-dire qu'il existe un borélien Ω de $T^1 X$ de mesure pleine tel que pour tout $v \in \Omega$ il existe $(\gamma_n)_n \subset \Gamma^{\mathbb{N}}$ et $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ tels que :

$$\gamma_n(g^{t_n} v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v.$$

Démonstration. Comme $T^1 M$ est compact, il existe une famille dénombrable $B_{k,n} = B(v_k, \frac{1}{n})$ de boules ouvertes formant une base de voisinages de $T^1 M$. On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$A_{k,n} = \{v \in B_{k,n} \mid \exists T \forall t > T, g^t v \notin B_{k,n}\}.$$

D'après le théorème de récurrence de Poincaré, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, $m_{Liou}(A_{k,n}) = 0$. Il s'ensuit que $m_{Liou}(\Omega_0) = 1$ où $\Omega_0 = \cap_{k,n} A_{k,n}^c$.

Soient $v \in \Omega_0$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $v \in B_{k,n} \subset B(v, \epsilon)$. En particulier, v appartient à $B_{k,n} \cap A_{k,n}^c$ donc pour tout $T > 0$, il existe $t > T$ tel que $g^t v \in B_{k,n} \subset B(v, \epsilon)$. On peut donc trouver une suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que

$$g^{t_n} v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v.$$

Enfin, si $p : X \rightarrow M$ désigne la projection du revêtement, on pose $\Omega = (dp)^{-1}(\Omega_0)$. Par définition de m_{LioU} sur T^1X et comme Γ est dénombrable, on en déduit que Ω^c est de mesure nulle. De plus, si $v \in \Omega$ alors il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers $+\infty$ telle que $g^{t_n}dp(v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} dp(v)$. Comme le flot géodésique commute avec dp on a

$$g^{t_n}dp(v) = dp(g^{t_n}v).$$

Il existe donc $\gamma_n \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_n(g^{t_n}v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v.$$

□

En particulier, le groupe Γ vérifie la propriété de dualité : l'ensemble des vecteurs Γ -récurrents de T^1X est dense dans T^1X .

Démonstration de la proposition 4.4.9. Soient $x \in M$ un point CAT(-1) et $\tilde{x} \in X$ un relevé de x . Il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule $B(\tilde{x}, \epsilon)$ est un voisinage CAT(-1) de \tilde{x} . Comme les vecteurs Γ -récurrents sont denses dans T^1X , il existe un point $y \in B(x, \frac{\epsilon}{3})$ et un vecteur Γ -récurrent $v \in T_y^1X$. La géodésique c_v telle que $c'_v(0) = v$ ne borde pas de bande plate car $c_v(0) = y$ est dans un voisinage CAT(-1).

D'après le lemme 4.4.7, il existe un $\tau > 0$ tel que pour tout $p \in C(-v, \tau)$ et $q \in C(v, \tau)$, $d(y, c_{pq}) \leq \frac{\epsilon}{6}$. La proposition 4.4.8 assure l'existence d'une isométrie g dont l'axe l vérifie $l(-\infty) \in C(-v, \tau)$ et $l(+\infty) \in C(v, \tau)$. En particulier, $d(y, l) \leq \frac{\epsilon}{6}$ donc l passe par un point CAT(-1). Par construction, la projection de l sur M est une géodésique fermée passant par un point CAT(-1). □

On montre maintenant que la géodésique de la proposition 4.4.9 est contractante.

Proposition 4.4.11. *Soit l une géodésique dans X passant par un point CAT(-1). Si l est l'axe d'une isométrie g alors l est contractante.*

Lemme 4.4.12. *Soit l un axe d'une isométrie g ne bordant pas de bande plate. Soit (x_n) une suite d'éléments de X tel que $(\pi_l(x_n))$ sort de tout compact. Alors les points d'accumulation de (x_n) sont contenus dans l'ensemble des extrémités de l .*

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe alors des voisinages U de $l(-\infty)$ et V de $l(+\infty)$ tels qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in \overline{X} \setminus (U \cup V)$. Pour tout $\epsilon > 0$ on pose $U_\epsilon = C(-l'(0), \epsilon) \cap U$ et $V_\epsilon = C(l'(0), \epsilon) \cap V$.

Comme $\pi_l(x_n)$ sort de tout compact, quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe une suite $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \rightarrow +\infty$ et $a > 0$ telle que $g^{-k_n}(\pi_l(x_n)) \in [c(0), c(a)]$. De plus, d'après la proposition 4.4.8, il existe un rang $N(\epsilon)$ à partir duquel $g^{-k_n}(x_n) \in U_\epsilon$. Comme g et π_l commutent, en posant $y_n = g^{-k_n}(x_n)$ et quitte à extraire de nouveau, on obtient une suite d'éléments de X telle que

- $\forall n, \pi_l(y_n) \in [c(0), c(a)]$,
- $\forall n \geq N(\epsilon), y_n \in U_\epsilon$,
- $\pi_l(y_n)$ converge vers $l(s)$ pour un $s \in [0, a]$.

D'après le lemme 4.4.6, $c'_{\pi_l(y_n)y_n}(0)$ converge vers $-l'(s)$. Or $c'_{\pi_l(y_n)y_n}(0)$ est orthogonal à l par définition de π_l , d'où une contradiction. □

Preuve de la proposition 4.4.11. Supposons que l n'est pas contractante. Comme l passe périodiquement par des points CAT(-1), elle ne borde pas de bande plate. Il existe donc une suite de boules $B_n = B(z_n, r_n)$ dans $X \setminus l$ dont les projections sur l sont de plus en plus larges. Quitte à translater par une puissance de g , on peut supposer que la suite $(\pi_l(z_n))$ reste dans un segment I de l fixe. Considérons une suite (x_n) telle que $x_n \in B_n$ et $\pi_l(x_n)$ sort de tout compact. D'après le lemme 4.4.12, quitte à extraire et à changer l'orientation de l , on peut supposer que x_n tend vers $l(+\infty)$.

Soit c_n le segment géodésique reliant x_n à $\pi_l(z_n)$ et fixons $C > 0$.

Fait 4.4.13. Pour tout n , on note y_n le premier point de c_n à distance inférieure à C de l ou $y_n = x_n$ si $d(x_n, l) \leq C$. Alors la projection $\pi_l(y_n)$ sort de tout compact et $d(y_n, z_n) \leq d(z_n, \pi_l(z_n))$.

Supposons que la projection $\pi_l(y_n)$ reste dans un compact. Comme $\pi_l(x_n)$ sort de tout compact, on a $x_n \neq y_n$ donc $d(y_n, \pi_l(y_n)) = C$. Par conséquent, y_n reste dans le C -voisinage d'un segment fixé de l contenant $\pi_l(z_n)$. Si j est une valeur d'adhérence de $(\pi_l(z_n))_n$, par continuité on en déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,

$$\angle_j(l(+\infty), x_n) = \angle_j(l(+\infty), y_n) \geq \epsilon.$$

Cela contredit le fait que $(x_n)_n$ converge vers $l(+\infty)$. D'autre part, la fonction $f : t \mapsto d(z_n, c_n(t))$ est convexe, $f(0) = d(x_n, z_n) \leq d(z_n, l)$ et $f(1) = d(z_n, l)$ donc, $f(t) \leq d(z_n, l)$ pour tout t .

En particulier, quitte à remplacer x_n par y_n , on peut supposer que la suite (x_n) reste dans une C -voisinage de l pour une constante C fixée.

Quitte à extraire à nouveau, on peut aussi supposer que z_n tend vers $\bar{z} \in \bar{X}$ quand n tend vers $+\infty$.

D'après le théorème 3.6 de [67], la suite de fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_n : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto d(z_n, y) - d(z_n, \pi_l(z_n)) \end{aligned}$$

converge uniformément sur tout compact vers la fonction de Busemann b associée à un rayon $[j, \bar{z}]$ où $j \in I$ est une valeur d'adhérence de la suite $\pi_l(z_n)$.

Fait 4.4.14. L'horoboule $b^{-1}((-\infty, 0])$ est convexe et contient le rayon $l^+ = [j, l(+\infty)) \subset l$.

En effet, chaque fonction f_n est convexe, négative sur le segment $[\pi_l(z_n), x_n]$ d'après le fait 4.4.13. Or, la suite de rayons $[\pi_l(z_n), x_n]$ converge vers l^+ puisque x_n reste dans le C -voisinage de l . Il s'ensuit que b est convexe et négative sur l^+ .

Par ailleurs, pour tout $z \in l$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(z) = d(z_n, z) - d(z_n, l) \geq 0,$$

donc $b \geq 0$ sur l . Par conséquent, $b = 0$ sur l^+ .

D'après la proposition 3.1 de [67], la fonction b est C^1 et, pour tout $z \in l^+$, le rayon r_z de vitesse initiale $\nabla_z b$ est asymptotique à \bar{z} et $b_{r_z} = b$. En particulier, r_z est orthogonal à l en z .

D'après la proposition 4 de [60], pour tous $z, z' \in l^+$, la fonction $t \mapsto d(r_z(t), r_{z'}(t))$ est décroissante.

Considérons maintenant un voisinage CAT(-1) contenant un point de l^+ et $z, z' \in l^+$ dans ce voisinage. Pour ϵ suffisamment petit, $l_z([0, \epsilon])$ et $l_{z'}([0, \epsilon])$ sont contenus dans le voisinage CAT(-1) et intersectent l orthogonalement. Par conséquent, $t \mapsto d(l_z(t), l_{z'}(t))$ est strictement croissante sur $[0, \epsilon]$, d'où une contradiction. \square

On peut maintenant démontrer le résultat principal de cette partie :

Démonstration du théorème 4.4.1. D'après les propositions 4.4.9 et 4.4.11 il existe une isométrie hyperbolique g dont l'axe est contractant. Puisque l'action de Γ est proprement discontinue, g est WPD. D'après le théorème 4.2.4, Γ est virtuellement cyclique ou acylindriquement hyperbolique. \square

4.5 Complexes polyédraux partiellement CAT(-1)

L'idée principale derrière les résultats des parties précédentes est qu'un groupe de courbure négative devrait être acylindriquement hyperbolique (ou virtuellement cyclique) dès lors qu'il

présente un minimum de courbure strictement négative. Nous pensons que des résultats similaires devraient exister dans d'autres contextes à condition d'exprimer la notion de courbure strictement négative de manière adaptée. Ce paradigme sera illustré par le cas des complexes cubiques $CAT(0)$ dans la première partie de cette section. Nous donnerons ensuite des résultats partiels concernant des complexes polyédraux plus généraux.

4.5.1 Cas des complexes cubiques $CAT(0)$

On s'intéresse dans cette partie aux complexes cubiques $CAT(0)$. Ces espaces, obtenus en collant des cubes euclidiens par isométries le long de faces, ne rentrent pas dans le cadre du théorème 4.3.1. En effet, pour la métrique $CAT(0)$ chaque cube est isométrique à un cube euclidien et ne possède donc pas de point $CAT(-1)$. Une approche naïve pour obtenir plus de courbure strictement négative serait d'identifier chacun des cubes constituant le complexe avec un cube hyperbolique. Cependant, en procédant ainsi, le complexe obtenu n'est en général pas $CAT(0)$.

Définition 4.5.1. Soient X un complexe cubique $CAT(0)$ et v un sommet de X . Le *link* de v est le complexe simplicial obtenu en prenant l'intersection de X avec la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en v .

Dans la section 4.2.C de [37], Gromov montre que le complexe cubique obtenu à partir de cube hyperbolique est $CAT(-1)$ dès lors qu'aucun link de sommet ne contient de cycle de longueur quatre. Suivant cette observation, on introduit la terminologie suivante :

Définition 4.5.2. Soit X un complexe cubique (localement) $CAT(0)$ et soit v un sommet de X . On dit que v est un *sommet $CAT(-1)$* si le link de v dans X ne contient pas de cycle de longueur quatre.

Rappelons quelques définitions.

Définition 4.5.3. Soit X un complexe cubique $CAT(0)$. On définit une relation d'équivalence \square sur les arêtes orientées de la façon suivante : $e \square e'$ si et seulement si il existe des arêtes $e_0 = e, \dots, e_n = e'$ telles que pour tout i , e_i, e_{i+1} bordent un carré dans le 2-squelette de X , sont parallèles et de même orientation. Une classe d'équivalence pour la relation \square est appelé un *hyperplan combinatoire*.

Un hyperplan combinatoire possède une réalisation géométrique. Étant donné un cube Q de dimension n , un *cube médian* de Q est un $n - 1$ cube passant par le barycentre de Q et parallèle à une face de Q .

Définition 4.5.4. Soit $[e]$ un hyperplan combinatoire d'un complexe cubique $CAT(0)$. L'*hyperplan dual* à $[e]$ est l'ensemble des cubes médians qui intersectent les arêtes de $[e]$.

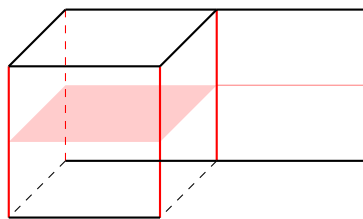


FIGURE 4.4 – Un hyperplan combinatoire et son hyperplan dual.

Théorème 4.5.5. Soit X un complexe cubique $CAT(0)$ et H un hyperplan. Alors H sépare X en deux composantes connexes exactement. Ces composantes sont appelées des *demi-espaces*.

- Si X est un complexe cubique $\text{CAT}(0)$, l'action est dite *essentielle* si, pour tout demi-espace $D \subset X$ et pour tout sommet $x \in X$, l'orbite $G \cdot x$ de x n'est contenue dans aucun voisinage de D .
- L'action est dite *non-uniformément faiblement acylindrique* s'il existe une constante $L \geq 0$ telle que, pour toute paire de points $x, y \in X$ distants d'au moins L , l'intersection $\text{stab}(x) \cap \text{stab}(y)$ est finie.

On obtient alors un analogue du théorème 4.1.1 :

- G ne fixe pas de point de $X \cup \partial_\infty X$ ou
- X est localement fini et G agit cocompactement sur X .

Démonstration de la proposition 4.5.7. Supposons que X contient un sommet CAT(-1); il ne peut alors se scinder en un produit cartésien de deux complexes cubiques. En effet, supposons que X se scinde en un produit $X_1 \times X_2$ et notons $V(X)$ (resp. $E(X)$) l'ensemble des sommets de X (resp. arêtes). S'il existe un sommet $v_1 \in X_1$ dont le link est réduit à un point alors v_1 est sommet initial d'une unique arête $e = v_1 \rightarrow v_2$ avec $v_1 \neq v_2$. Dans ce cas, l'ensemble

$$\{(v_1, w) \rightarrow (v_2, w) \in E(X) \mid w \in V(X_2)\}$$

est un hyperplan combinatoire de X . Notons D_i le demi-espace contenant les sommets $(v_i, w) \in V(X)$, $w \in X_2$ pour $i = 1, 2$. Comme l'unique arête issue de v_1 est e , $D_1 = \{(v_1, w) \in V(X) \mid w \in V(X_2)\}$ et donc D_1 est contenu dans le 1-voisinage de D_2 . En particulier, $X \subset N_1(D_2)$, ce qui contredit que l'action est essentielle. Donc le link de tout sommet de X_1 contient au moins deux points et la même propriété est vraie pour X_2 par symétrie. Mais alors, le link de tout sommet $(v, w) \in X$ contient un cycle de longueur 4. En effet, v appartient à au moins deux arêtes distinctes notées $v \rightarrow v_1$ et $v \rightarrow v_2$ et de même w appartient à deux arêtes distinctes $w \rightarrow w_1$ et $w \rightarrow w_2$. Donc, X contient le motif de la figure 4.5.

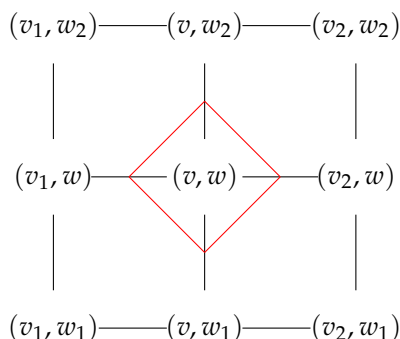


FIGURE 4.5 – En rouge, un cycle de longueur 4 dans le link de (v, w) .

Puisque ceci est vrai pour tout sommet de X cela contredit l'existence d'un sommet CAT(-1). Par conséquent, X ne se scinde pas.

Ainsi, le théorème de rigidité du rang pour les complexes cubiques (le théorème 6.3 de [18]) implique que G contient une isométrie contractante, notée g . Comme l'action de G sur X est non-uniformément faiblement acylindrique, les théorèmes 3.13 de [29] et 17 de [27] impliquent qu'une telle isométrie est nécessairement WPD. Enfin, le théorème 4.2.4 permet de conclure que G est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique. \square

Comme cas particulier du résultat précédent, on obtient :

Corollaire 4.5.8. *Un groupe agissant géométriquement et essentiellement sur un complexe cubique CAT(0) contenant un sommet CAT(-1) est soit virtuellement cyclique soit acylindriquement hyperbolique.*

4.5.2 Cas général : état de l'art et perspectives

Plus généralement, il est naturel de se demander si les résultats de la section précédente possèdent des analogues dans le cadre des complexes polyédraux. Comme dans le cas des complexes cubiques, on espère obtenir de l'hyperbolicité comme conséquence de l'existence d'un sommet avec un "gros" link (voir aussi [56]). Plus particulièrement, les questions suivantes nous semblent intéressantes :

Question 4.5.9. Soit G un groupe agissant géométriquement sur un complexe polyédral CAT(0) géodésiquement complet et possédant un sommet dont le link est de diamètre strictement supérieur à π . Peut-on en conclure que G est virtuellement cyclique ou acylindriquement hyperbolique ?

Dans [19], les auteurs caractérisent les immeubles euclidiens parmi les complexes euclidiens CAT(0) par une propriété d'extension des géodésiques : la propriété *d'extension discrète des géodésiques*. Un espace possède la propriété d'extension discrète des géodésiques si pour toute géodésique, l'ensemble des directions dans lesquelles elle peut être prolongée est non vide et discret.

Question 4.5.10. Soit G un groupe agissant géométriquement sur un complexe euclidien par morceaux CAT(0) géodésiquement complet et possédant un sommet n'ayant pas la propriété d'extension discrète des géodésiques. Peut-on en conclure que G est virtuellement cyclique ou acylindriquement hyperbolique ?

Une réponse affirmative à cette dernière question permettrait de démontrer le théorème de rigidité du rang pour les complexes euclidiens en toute dimension.

Notons que des résultats en dimension deux sont présents dans [4]. Notamment, les résultats de la section 7 apportent une réponse complète à la question 4.5.9. En dimension quelconque, on dispose du résultat partiel suivant, en ce qui concerne la question 4.5.9 :

Proposition 4.5.11. *Soient G un groupe agissant géométriquement sur un complexe polyédral CAT(0) X et $\delta, c, C > 0$ des constantes fixées. Supposons qu'il existe une géodésique γ et une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$) telle que $c < |t_n - t_{n+1}| < C$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que la distance dans $\text{link}(\gamma(t_n))$ entre $\gamma'_d(t_n)$ et $\gamma'_g(t_n)$ soit supérieure à $\pi + \delta$. Alors γ est contractante.*

Remarquons que contrairement aux énoncés de [4], la géodésique considérée ici n'est pas nécessairement un axe d'isométrie.

La preuve de la proposition 4.5.11 repose sur le théorème 2.14 de [20] qui énonce que dans un espace CAT(0) une géodésique est contractante si et seulement si elle est de divergence au moins quadratique. La notion de divergence d'une géodésique est définie ci-dessous.

Définition 4.5.12. Soit γ une géodésique. Pour tout $t > r > 0$, soit $\rho_\gamma(r, t)$ l'infimum des longueurs des chemins reliant $\gamma(t-r)$ à $\gamma(t+r)$ et restant à l'extérieur de la boule ouverte de rayon r centrée en $\gamma(t)$. La divergence de γ est le taux de croissance de la fonction suivante :

$$\text{ldiv}_\gamma(r) = \inf_{t>r} \rho_\gamma(r, t).$$

Démonstration de la proposition 4.5.11. Supposons que γ a une divergence sous quadratique. Alors, il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers zéro quand r tend vers l'infini telle que

$$\text{ldiv}_\gamma(r) \leq \epsilon(r)r^2.$$

Pour $r > 0$, considérons α_r un chemin de $\gamma(t_r - r)$ à $\gamma(t_r + r)$ disjoint de la boule ouverte de rayon r centrée en $\gamma(t_r)$, pour un certain $t_r > r$, tel que

$$\text{length}(\alpha_r) \leq 2r^2\epsilon(r).$$

Fixons maintenant un réel $h > 2C$, de sorte que tout segment de γ de longueur h contienne un $\gamma(t_n)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

Fait 4.5.13. Pour r suffisamment grand, il existe un segment $[a_1(r), a_2(r)] \subset \gamma([t_r - \frac{r}{2}, t_r + \frac{r}{2}])$ de longueur h tel que la longueur de la portion de α_r se projetant sur $[a_1(r), a_2(r)]$ soit inférieure ou égale à $4h\epsilon(r)r$.

Supposons le contraire. Il existe alors $\lfloor \frac{r}{h} \rfloor$ portions disjointes de α_r , chacune de longueur supérieure à $4h\epsilon(r)r$. Par conséquent

$$\text{Long}(\alpha_r) > 4r(r-h)\epsilon(r),$$

ce qui contredit la définition de α_r pour $r \geq 2h$.

Considérons alors des points $b_i(r)$ de α_r dont les projections sur γ sont $a_i(r)$ et soit $c_i^r : [0, L_i] \rightarrow X$ le segment géodésique reliant $a_i(r)$ à $b_i(r)$, $i = 1, 2$. Comme

$$d(a_i(r), b_i(r)) \geq d(b_i(r), \gamma(t_r)) - d(\gamma(t_r), a_i(r)) \geq \frac{r}{2},$$

alors $L_i \geq \frac{r}{2}$. Il s'ensuit que la fonction $\psi_r : t \mapsto d(c_1^r(t), c_2^r(t))$ est convexe, croissante, définie au moins sur l'intervalle $[0, \frac{r}{2}]$ et vérifie

$$\psi_r(0) = h, \quad \psi_r\left(\frac{r}{2}\right) \leq 4h\epsilon(r)r.$$

Par convexité et monotonie, pour tout $r \geq 2h$, on a

$$h \leq \psi_r(h) \leq h(1 + 8\epsilon(r)h). \quad (4.1)$$

Ainsi, on obtient une famille de quadrilatères $(Q_r)_r$ dont les sommets sont $a_1(r), a_2(r), c_2^r(h), c_1^r(h)$, possédant trois côtés de longueur h , un côté de longueur $\psi_r(h)$ et dont les angles aux sommets $a_1(r), a_2(r)$ sont d'au moins $\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, par choix de h , le côté $[a_1(r), a_2(r)]$ de Q_r contient un certain $\gamma(t_{n(r)})$.

Grâce à l'action cocompacte de G , on peut translater ces quadrilatères dans un compact fixé. Puis, quitte à extraire, la suite $(Q_r)_r$ converge, quand r tend vers $+\infty$, vers un quadrilatère Q de côté h . Notons a_1, a_2, c_1, c_2 les sommets de Q limites de $a_1(r), a_2(r), c_1^r(h), c_2^r(h)$ respectivement. Soit $\gamma_i : [0, h] \rightarrow Q$ la géodésique paramétrant le côté $[a_i, c_i]$ de Q telle que $\gamma_i(0) = a_i$.

Lemme 4.5.14. Le quadrilatère Q est plat.

Démonstration. Les angles en a_i du quadrilatère Q sont obtus car c'est le cas pour les quadrilatères Q_r .

On considère des triangles de comparaison $\bar{\Delta}(\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(0), \tilde{\gamma}_2(h))$ et $\bar{\Delta}'(\tilde{\gamma}_2(h), \tilde{\gamma}_1(h), \tilde{\gamma}_1(0))$ pour les triangles $\Delta(\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_2(h))$ et $\Delta'(\gamma_2(h), \gamma_1(h), \gamma_1(0))$ respectivement et partageant le côté $[\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(h)]$ en commun. La réunion \bar{Q} de $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}'$ est donc un quadrilatère du plan euclidien dont tous les côtés sont de longueur h : c'est donc un losange. Par ailleurs, on a

$$\angle_{\tilde{\gamma}_2(0)}(\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(h)) \geq \angle_{\gamma_2(0)}(\gamma_1(0), \gamma_2(h)) \geq \frac{\pi}{2}$$

et

$$\begin{aligned} \angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(0), \tilde{\gamma}_1(h)) &= \angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(0), \tilde{\gamma}_2(h)) + \angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(h), \tilde{\gamma}_1(h)) \\ &\geq \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(0), \gamma_2(h)) + \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(h), \gamma_1(h)) \\ &\geq \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(0), \gamma_1(h)) \\ &\geq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, \bar{Q} est un losange dont deux angles consécutifs sont obtus. Cela n'est possible que si \bar{Q} est un carré. En particulier, la première inégalité ci-dessus est une égalité :

$$\angle_{\tilde{\gamma}_2(0)}(\tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\gamma}_2(h)) = \angle_{\gamma_2(0)}(\gamma_1(0), \gamma_2(h)) = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la proposition 2.9 du chapitre II de [15], l'enveloppe convexe de $\Delta(\gamma_1(0), \gamma_2(0), \gamma_2(h))$ est donc isométrique à $\bar{\Delta}$. En particulier,

$$\angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(0), \gamma_2(h)) = \angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(0), \tilde{\gamma}_2(h)).$$

De même, la seconde inégalité est une égalité, donc

$$\angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(0), \tilde{\gamma}_2(h)) + \angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(h), \tilde{\gamma}_1(h)) = \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(0), \gamma_2(h)) + \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(h), \gamma_1(h)),$$

ce qui implique que $\angle_{\tilde{\gamma}_1(0)}(\tilde{\gamma}_2(h), \tilde{\gamma}_1(h)) = \angle_{\gamma_1(0)}(\gamma_2(h), \gamma_1(h))$ puis que l'enveloppe convexe de $\Delta'(\gamma_2(h), \gamma_1(h), \gamma_1(0))$ est isométrique à $\bar{\Delta}'$ d'après la proposition 2.9 du chapitre II de [15]. En particulier, l'angle de Q en $\gamma_1(h)$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

En raisonnant de manière analogue en inversant les rôles de γ_1 et γ_2 , on trouve que l'angle en $\gamma_2(h)$ de Q vaut $\frac{\pi}{2}$. Ainsi la somme des angles du quadrilatère Q est supérieure à 2π donc Q est isométrique à un carré euclidien d'après le théorème 2.11 du chapitre II de [15]. \square

D'autre part, quitte à extraire une autre fois, on peut supposer que les points $\gamma(t_{n(r)})$ convergent vers un point x intérieur à un côté c de Q de sorte que la distance dans le link entre la direction entrante ξ_e et la direction sortante ξ_s de ce côté en x soit supérieure à $\pi + \delta$. Or, comme c est un segment géodésique bordant Q , qui est euclidien, il existe un segment de longueur π dans le link de x reliant ξ_e et ξ_s . Contradiction. \square

4.6 Exemples et contre-exemples

On conclut ce chapitre par une série d'exemples illustrant la nécessité de nos hypothèses. On montre aussi qu'on ne peut pas espérer une conclusion plus forte en donnant un exemple de groupe satisfaisant les hypothèses du théorème 4.3.1 et qui n'est pas relativement hyperbolique (voir la section 4.6).

Pour construire ces exemples, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui assure que le recollement de deux espaces localement CAT(0) reste localement CAT(0) à condition de recoller

par une isométrie.

Proposition 4.6.1. [15, proposition II.11.6]

1. Soit X un espace métrique de courbure $\leq \kappa$. Soient A_1 et A_2 deux fermés disjoints de X localement convexes et complets. Si $i : A_1 \rightarrow A_2$ est une isométrie locale bijective alors le quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par $[a_1 \sim i(a_1) \forall a_1 \in A_1]$ est de courbure $\leq \kappa$.
2. Soient X_1 et X_2 deux espaces métriques de courbure $\leq \kappa$. Soient A_1 et A_2 deux fermés localement convexes et complets de X_1 et X_2 respectivement. Si $i : A_1 \rightarrow A_2$ est une isométrie locale bijective alors le quotient de $X_1 \sqcup X_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $[a_1 \sim i(a_1) \forall a_1 \in A_1]$ est de courbure $\leq \kappa$.

4.6.1 Sur la nécessité de l'hypothèse de complétude géodésique

On commence par un exemple illustrant la nécessité de l'hypothèse de complétude géodésique. Considérons l'espace X_1 obtenu en collant un segment c à un tore sur un point (voir la figure 4.6). D'après la proposition 4.6.1, X_1 est localement CAT(0). Le segment étant localement isométriquement plongé, n'importe quel point intérieur au segment est un point CAT(-1).

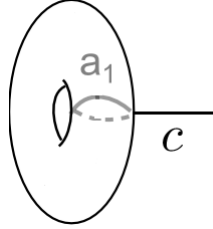


FIGURE 4.6 – L'espace obtenu en recollant un tore et un segment.

D'autre part, le revêtement universel \tilde{X}_1 de X_1 est un plan euclidien "chevelu" (voir la figure 4.7) : c'est un plan euclidien auquel est attaché un segment sur chaque point de \mathbb{Z}^2 . Il n'est pas géodésiquement complet. En effet, n'importe quel relevé \tilde{c} de c est un segment géodésique qui ne peut pas être prolongé en une géodésique bi-infinie.

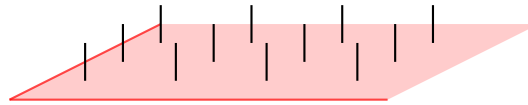


FIGURE 4.7 – Le revêtement universel de X_1

Il s'ensuit que $\pi_1(X_1)$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 4.1.1 à l'exception de la complétude géodésique. Or $\pi_1(X_1) = \mathbb{Z}^2$ n'est pas acylindriquement hyperbolique.

4.6.2 Une géodésique non contractante passant par une infinité de points CAT(-1)

Soit X_2 l'espace obtenu en collant un tore à chaque extrémité d'un segment. D'après la proposition 4.6.1, X_2 est localement CAT(0). Le segment étant localement isométriquement plongé, n'importe quel point intérieur au segment est un point CAT(-1). Par ailleurs, le revêtement universel \tilde{X}_2 de X_2 est géodésiquement complet en tant qu'union de plans euclidiens et de

droites (convexes dans \tilde{X}_2). En particulier, le groupe fondamental de X_2 vérifie les hypothèses du théorème 4.1.1 et est donc acylindriquement hyperbolique. Dans ce cas, il est très facile de construire à la main une géodésique satisfaisant les hypothèses de la proposition 4.3.7. Cependant, comme le montre l'exemple ci-dessous, il est essentiel que les points CAT(-1) soient uniformément répartis sur la géodésique pour que celle-ci soit contractante.

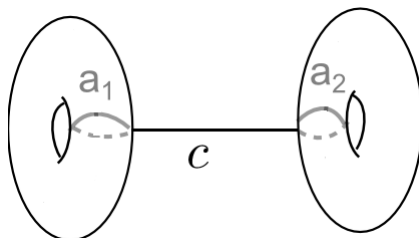


FIGURE 4.8 – L'espace X_2 obtenu en recollant deux tores par un segment.

Considérons la géodésique locale définie par (voir la figure 4.8) :

$$\gamma := \prod_{n \geq 0} c a_1^{2n+1} c^{-1} a_2^{2n+2},$$

et soit $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ dans \tilde{X} .

Fait 4.6.2. *La géodésique $\tilde{\gamma}$ passe par une infinité de points CAT(-1) mais n'est pas contractante.*

Il est clair que $\tilde{\gamma}$ passe par une infinité de points CAT(-1). Par ailleurs, $\tilde{\gamma}$ fait des excursions de plus en plus longues dans des plats : pour tout $n \geq 0$, le sous-segment \tilde{a}_1^{2n+1} de $\tilde{\gamma}$ est un segment de longueur $2n + 1$ inclus dans une copie E du plan euclidien. En particulier, il existe une boule disjointe de ce segment, incluse dans E dont la projection est de diamètre $\geq 2n$ (voir la figure 4.9). Ainsi, $\tilde{\gamma}$ n'est pas contractante.

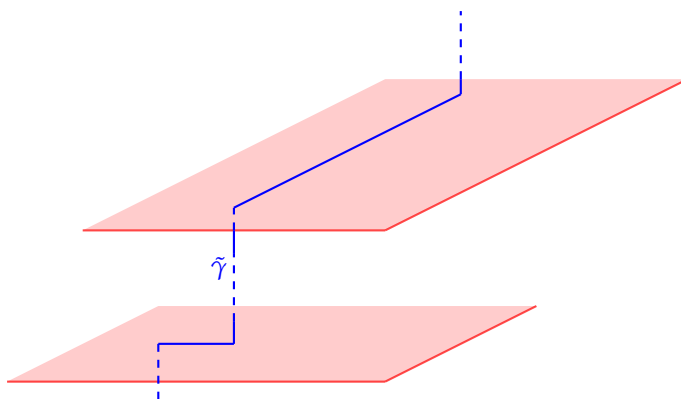


FIGURE 4.9 – Excursions de $\tilde{\gamma}$ dans les plats de \tilde{X}_2

4.6.3 Un groupe partiellement CAT(-1) qui n'est pas relativement hyperbolique

Nous donnons maintenant un exemple de groupe partiellement CAT(-1) qui n'est pas relativement hyperbolique. Cela montre que l'on ne peut espérer améliorer notre théorème et obtenir

une forme plus forte d'hyperbolicité. Cet exemple est obtenu en recollant plusieurs surfaces. Soit Σ_g une surface compacte orientable de genre $g \geq 2$. Une telle surface peut être obtenue en identifiant les paires de côtés opposés d'un $4g$ -gone à angles droits du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . Chaque côté de ce polygone définit un lacet dans Σ_g , que nous appellerons un *lacet canonique*. De la même manière, on considère un tore Σ_1 obtenu à partir d'un carré euclidien en identifiant les côtés opposés et on appelle aussi *lacet canonique* l'image dans Σ_1 d'un côté du carré. Quitte à renormaliser la métrique, on peut supposer que les lacets canoniques des surfaces considérées ci-dessus sont d'une longueur fixée.

Soit X_3 le graphe d'espaces donné par la figure 4.10. Plus précisément, on considère une copie de Σ_2 et des copies $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{1,2}, T_{2,3}, T_{3,4}$ du tore Σ_1 . On appelle a_1, a_2, a_3, a_4 les lacets canoniques de Σ_2 (ordonnés en tournant dans le sens direct sur le bord du polygone définissant Σ_2); a_i^i, b_i^i les lacets canoniques des tores T_i ; et b_i^{i+1}, b_{i+1}^{i+1} les lacets canoniques des tores $T_{i,i+1}$. L'espace X_3 est obtenu en recollant ces huit surfaces de la façon suivante : on colle chaque T_i à Σ_2 en identifiant a_i et a_i^i par une isométrie, et on colle chaque $T_{i,i+1}$ à T_i et T_{i+1} en identifiant b_i^{i+1} et b_{i+1}^{i+1} avec b_i^i et b_{i+1}^i respectivement.

D'après la proposition 4.6.1, l'espace X_3 est localement CAT(0). De plus, chaque sous-surface est localement isométriquement plongée dans X_3 ; en particulier, n'importe quel point de Σ_2 qui n'appartient à aucun tore possède un voisinage CAT(-1). Remarquons aussi que le revêtement universel \tilde{X}_3 de X_3 est géodésiquement complet comme réunion de plans hyperboliques et euclidiens convexes dans \tilde{X}_3 . On peut donc appliquer le théorème 4.1.1 au groupe fondamental G de X_3 pour conclure qu'il est acylindriquement hyperbolique.

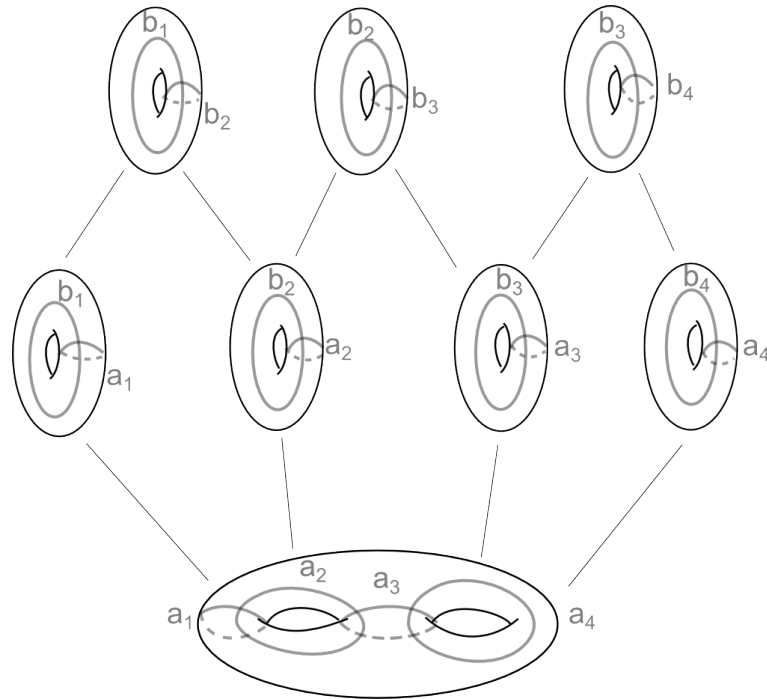


FIGURE 4.10 – Le graphe d'espace X_3 .

En utilisant le théorème de Van Kampen, il est facile de voir que G admet la présentation suivante :

$$\left\langle \begin{array}{c} a_1, a_2, a_3, a_4 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \end{array} \mid \begin{array}{l} [a_1, a_2][a_3, a_4] = [b_1, b_2] = [b_2, b_3] = [b_3, b_4] = 1 \\ [a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [a_3, b_3] = [a_4, b_4] = 1 \end{array} \right\rangle$$

On va montrer :

Proposition 4.6.3. *Le groupe G n'est pas relativement hyperbolique.*

On rappelle la définition et quelques propriétés fondamentales de l'hyperbolicité relative.

Définition 4.6.4. Un groupe G est *hyperbolique relativement à une collection finie \mathcal{H} de sous-groupes propres de type fini* s'il agit sur un graphe connexe K hyperbolique tel que

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, chaque arête est contenue dans un nombre fini de cycles de longueur n ,
2. il y a un nombre fini de G -orbites d'arêtes et les stabilisateurs d'arêtes sont finis,
3. les éléments de \mathcal{H} sont les stabilisateurs infinis de sommets et sont appelés les *groupes périphériques*.

Les prototypes de groupes relativement hyperboliques sont les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques complètes de volume fini, les groupes périphériques étant, dans ce cas, les groupes de cusps.

Définition 4.6.5. Une famille $\{H_i\}_i$ de sous-groupes d'un groupe G est *malnormale* si :

- pour tous $g_1, g_2 \in G$, si $i \neq j$ alors $H_i^{g_1} \cap H_j^{g_2}$ est fini,
- pour tout i , pour tout $g \notin H_i$, $H_i^g \cap H_i$ est fini.

Théorème 4.6.6 (Bowditch, 1999). *Si G est hyperbolique relativement à une collection $\{H_i\}_i$ de sous-groupes alors :*

- la famille $\{H_i\}_i$ est malnormale,
- tout groupe abélien libre non cyclique est contenu dans un conjugué d'un groupe périphérique.

Démonstration de la proposition 4.6.3. Supposons que le groupe G est hyperbolique relativement à une famille de sous-groupes. Comme pour tout $1 \leq i \leq 4$ (resp. $1 \leq j \leq 3$), a_i et b_i (resp. b_j et b_{j+1}) engendrent un groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 , le théorème ci-dessus implique qu'il existe un groupe périphérique H_i (resp. K_j) contenant a_i et b_i (resp. b_j et b_{j+1}). Il s'ensuit que

$$b_i \in H_i \cap K_i \text{ et } b_{i+1} \in H_{i+1} \cap K_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 3,$$

et

$$b_{i+1} \in K_i \cap K_{i+1} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 2.$$

Comme pour tout $1 \leq i \leq 4$, b_i engendre un groupe infini cyclique et que la famille formée par les groupes H_i et K_j , $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 3$ est malnormale, il s'ensuit que

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = K_1 = K_2 = K_3.$$

En particulier, H_1 contient tous les générateurs de G donc $G = H$. Cela contredit le fait qu'un groupe périphérique est propre. \square

Plus généralement, l'espace obtenu en collant des surfaces compactes orientables par isométries le long de lacets canoniques est un complexe polygonal qui est CAT(0) dès lors que le graphe d'espaces sous-jacent ne contient pas de triangle. Par le théorème 4.1.1, le groupe fondamental d'un tel espace est acylindriquement hyperbolique pourvu qu'il y ait au moins une surface de genre supérieur à 2 parmi les surfaces recollées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. ARZHANTSEVA et M. HAGEN. « Acylindrical hyperbolicity of cubical small-cancellation groups ». In : *arXiv :1603.05725* (2016) (cf. p. 69).
- [2] W. BALLMANN et S. BUYALO. « Periodic rank one geodesics in Hadamard spaces ». In : *Geometric and probabilistic structures in dynamics* 469 (2008), p. 19–27 (cf. p. 70, 72).
- [3] Werner BALLMANN et Michael BRIN. « Orbihedra of nonpositive curvature ». In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 82 (1995), 169–209 (1996). ISSN : 0073-8301. URL : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1995__82__169_0 (cf. p. 51).
- [4] Werner BALLMANN et Michael BRIN. « Orbihedra of nonpositive curvature ». en. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 82 (1995), p. 169–209. URL : http://http://www.numdam.org/item/PMIHES_1995__82__169_0 (cf. p. 87).
- [5] M. BESTVINA et K. FUJIWARA. « Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups ». In : *Geometry and Topology* 6 (2002), p. 69–89. ISSN : 1465-3060 (cf. p. 69).
- [6] Mladen BESTVINA, Ken BROMBERG et Koji FUJIWARA. « Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups ». In : *Publications mathématiques de l’IHÉS* 122.1 (2015), p. 1–64 (cf. p. 72).
- [7] Mladen BESTVINA et Mark FEIGN. « A hyperbolic $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ -complex ». In : *Groups, Geometry, and Dynamics* 4.1 (2010), p. 31–58. ISSN : 1661-7207. DOI : 10.4172/GGD/74 (cf. p. 69).
- [8] Kinghook BISWAS. « On Moebius and conformal maps between boundaries of $\text{CAT}(-1)$ -spaces ». In : (). URL : <https://arxiv.org/abs/1203.6212> (cf. p. 14, 15, 18).
- [9] B. BOJARSKI. « Remarks on Sobolev imbedding inequalities ». In : *Complex analysis, Joensuu 1987*. T. 1351. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1988, p. 52–68. DOI : 10.1007/BFb0081242. URL : <https://doi.org/10.1007/BFb0081242> (cf. p. 67).
- [10] Mario BONK et Bruce KLEINER. « Rigidity for quasi-Möbius group actions ». In : *J. Differential Geom.* 61.1 (2002), p. 81–106. ISSN : 0022-040X. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090351321> (cf. p. 3, 29).
- [11] Mario BONK et Bruce KLEINER. « Rigidity for quasi-Fuchsian actions on negatively curved spaces ». In : *Int. Math. Res. Not.* 61 (2004), p. 3309–3316. ISSN : 1073-7928. URL : <https://doi.org/10.1155/S1073792804141998> (cf. p. 3, 30).
- [12] Mario BONK et Bruce KLEINER. « Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary ». In : *Geom. Topol.* 9 (2005), p. 219–246. ISSN : 1465-3060. URL : <https://doi.org/10.2140/gt.2005.9.219> (cf. p. 46).
- [13] Marc BOURDON. « Structure conforme au bord et flot géodésique d’un $\text{CAT}(-1)$ -espace ». In : *Enseign. Math.* (2) 41.1-2 (1995), p. 63–102. ISSN : 0013-8584 (cf. p. 14–16, 19, 21, 24–26).

Bibliographie

- [14] Marc BOURDON. « Sur le birapport au bord des $CAT(-1)$ -espaces ». In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 83 (1996), p. 95–104. ISSN : 0073-8301. URL : http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1996__83__95_0 (cf. p. 34).
- [15] Martin R. BRIDSON et André HAEFLIGER. *Metric spaces of non-positive curvature*. T. 319. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999, p. xxii+643. ISBN : 3-540-64324-9. DOI : [10.1007/978-3-662-12494-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9> (cf. p. 13–15, 48, 73, 89, 90).
- [16] Peter BUSER. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Springer Science & Business Media, 2010 (cf. p. 78).
- [17] M. CALVEZ et B. WIEST. « Acylindrical hyperbolicity and Artin-Tits groups of spherical type ». In : *arXiv :1606.07778* (2016) (cf. p. 69).
- [18] Pierre-Emmanuel CAPRACE et Michah SAGEEV. « Rank rigidity for $CAT(0)$ cube complexes ». In : *Geom. Funct. Anal.* 21.4 (2011), p. 851–891. ISSN : 1016-443X. DOI : [10.1007/s00039-011-0126-7](https://doi.org/10.1007/s00039-011-0126-7). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00039-011-0126-7> (cf. p. 86, 87).
- [19] Ruth CHARNEY et Alexander LYCHAK. « Metric characterizations of spherical and Euclidean buildings ». In : *Geom. Topol.* 5.2 (2001), p. 521–550. DOI : [10.2140/gt.2001.5.521](https://doi.org/10.2140/gt.2001.5.521). URL : <https://doi.org/10.2140/gt.2001.5.521> (cf. p. 87).
- [20] Ruth CHARNEY et Harold SULTAN. « Contracting boundaries of $CAT(0)$ spaces ». In : *J. Topol.* 8.1 (2015), p. 93–117. ISSN : 1753-8416. URL : <http://doi.org/10.1112/jtopol/jtu017> (cf. p. 72, 87).
- [21] I. CHATTERJI et A. MARTIN. « A note on the acylindrical hyperbolicity of groups acting on $CAT(0)$ cube complexes ». In : *arXiv :1610.06864* (2016) (cf. p. 69).
- [22] Chris CONNELL. « Minimal Lyapunov exponents, quasiconformal structures, and rigidity of non-positively curved manifolds ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 23.2 (2003), p. 429–446. ISSN : 0143-3857. DOI : [10.1017/S0143385702001189](https://doi.org/10.1017/S0143385702001189). URL : <https://doi.org/10.1017/S0143385702001189> (cf. p. 3, 36, 46).
- [23] François DAHMANI, Vincent GUIRADEL et Denis OSIN. *Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces*. T. 245. 1156. American Mathematical Society, 2017 (cf. p. 69).
- [24] Françoise DAL’BO. « Remarques sur le spectre des longueurs d’une surface et comptages ». In : *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 30.2 (1999), p. 199–221. ISSN : 0100-3569. DOI : [10.1007/BF01235869](https://doi.org/10.1007/BF01235869). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01235869> (cf. p. 21).
- [25] P. EBERLEIN et B. O’NEILL. « Visibility manifolds. » In : *Pacific J. Math.* 46.1 (1973), p. 45–109. URL : <https://projecteuclid.org:443/euclid.pjm/1102946601> (cf. p. 15).
- [26] Thomas FOERTSCH et Viktor SCHROEDER. « Hyperbolicity, $CAT(-1)$ -spaces and the Ptolemy inequality ». In : *Math. Ann.* 350.2 (2011), p. 339–356. ISSN : 0025-5831. URL : <https://doi.org/10.1007/s00208-010-0560-0> (cf. p. 28).
- [27] A. GENEVOIS. « Acylindrical action on the hyperplanes of a $CAT(0)$ cube complex ». In : *arXiv :1610.08759* (2016) (cf. p. 87).
- [28] A. GENEVOIS. « Coning-off $CAT(0)$ cube complexes ». In : *arXiv :1603.06513* (2016) (cf. p. 69).
- [29] A. GENEVOIS. « Contracting isometries of $CAT(0)$ cube complexes and acylindrically hyperbolicity of diagram groups ». In : *arXiv :1610.07791* (2016) (cf. p. 69, 87).
- [30] A. GENEVOIS. « Algebraic characterisations of negatively-curved special groups and applications to graph braid groups ». In : *arXiv :1709.01258* (2017) (cf. p. 69).

- [31] A. GENEVOIS. « Hyperbolicities in CAT(0) cube complexes ». In : *arXiv :1709.08843* (2017) (cf. p. 70, 72).
- [32] Anthony GENEVOIS et Arnaud STOCKER. « Partially CAT(-1) groups are acylindrically hyperbolic ». In : *Bulletin de la SMF* (À paraître) (cf. p. 5, 71).
- [33] E. GHYS et P. de la HARPE. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 1990 (cf. p. 24, 28).
- [34] Anne GIRALT. « Groups acting on a CAT(0) cube complex and ramified coverings ». Theses. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, mai 2017. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01646938> (cf. p. 42, 44, 47–50, 56).
- [35] M. S. GOTO. « The cone topology on a manifold without focal points ». In : *J. Differential Geom.* 14.4 (1979), p. 595–598. DOI : [10.4310/jdg/1214435239](https://doi.org/10.4310/jdg/1214435239). URL : <https://doi.org/10.4310/jdg/1214435239> (cf. p. 81).
- [36] Midori S. GOTO. « Manifolds without focal points ». In : *J. Differential Geom.* 13.3 (1978), p. 341–359. DOI : [10.4310/jdg/1214434603](https://doi.org/10.4310/jdg/1214434603). URL : <https://doi.org/10.4310/jdg/1214434603> (cf. p. 70).
- [37] M. GROMOV. « Hyperbolic groups ». In : *Essays in group theory* 8.75–263 (1987), p. 2 (cf. p. 2, 69, 85).
- [38] M. GROMOV. « Asymptotic invariants of infinite groups ». In : *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. T. 182. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1–295 (cf. p. 70).
- [39] M. GROMOV et W. THURSTON. « Pinching constants for hyperbolic manifolds ». In : *Invent. Math.* 89.1 (1987), p. 1–12. ISSN : 0020-9910. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01404671> (cf. p. 3, 41, 43, 44).
- [40] D. GRUBER et A. SISTO. « Infinitely presented graphical small cancellation groups are acylindrically hyperbolic ». In : *arXiv :1408.4488* (2014) (cf. p. 69).
- [41] Robert GULLIVER. « On the Variety of Manifolds without Conjugate Points ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 210 (1975), p. 185–201. ISSN : 00029947. URL : <http://www.jstor.org/stable/1997131> (cf. p. 81).
- [42] Ursula HAMENSTÄDT. « A new description of the Bowen-Margulis measure ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9.3 (1989), p. 455–464. ISSN : 0143-3857. URL : <https://doi.org/10.1017/S0143385700005095> (cf. p. 36, 38).
- [43] Ursula HAMENSTÄDT. « A geometric characterization of negatively curved locally symmetric spaces ». In : *J. Differential Geom.* 34.1 (1991), p. 193–221. ISSN : 0022-040X. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214446998> (cf. p. 3, 35, 37).
- [44] Juha HEINONEN. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001, p. x+140. ISBN : 0-387-95104-0. URL : <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0131-8> (cf. p. 63).
- [45] Sa'ar HERSONSKY et Frédéric PAULIN. « On the rigidity of discrete isometry groups of negatively curved spaces ». In : *Comment. Math. Helv.* 72.3 (1997), p. 349–388. ISSN : 0010-2571. DOI : [10.1007/s000140050022](https://doi.org/10.1007/s000140050022). URL : <https://doi.org/10.1007/s000140050022> (cf. p. 28).
- [46] G Christopher HRUSKA. « Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups ». In : *Algebraic & Geometric Topology* 10.3 (2010), p. 1807–1856 (cf. p. 69).
- [47] M. KAPOVICH et B. LEEB. « On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds ». In : *Geometric and Functional Analysis* 5.3 (1995), p. 582–603 (cf. p. 75).
- [48] S. KUTATELADZE. *A.D. Alexandrov, Selected Works Part II : Intrinsic Geometry of Convex Surfaces*. CRC Press, 2005 (cf. p. 80).

Bibliographie

- [49] A. LONJOU. « Non simplicité du groupe de Cremona sur tout corps ». In : *arXiv :1503.03731* (2015) (cf. p. 69).
- [50] C. LYNDON et P. E. SCHUPP. *Combinatorial group theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89. Springer, Berlin, 1977 (cf. p. 69).
- [51] John M. MACKAY et Jeremy T. TYSON. *Conformal dimension*. T. 54. University Lecture Series. Theory and application. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, p. xiv+143. ISBN : 978-0-8218-5229-3. URL : <https://doi.org/10.1090/ulect/054> (cf. p. 34).
- [52] G. A. MARGULIS. « Certain measures that are connected with U-flows on compact manifolds ». In : *Funkcional. Anal. i Priložen.* 4.1 (1970), p. 62–76. ISSN : 0374-1990 (cf. p. 21).
- [53] G. A. MARGULIS et G. D. MOSTOW. « The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space ». In : *Geom. Funct. Anal.* 5.2 (1995), p. 402–433. ISSN : 1016-443X. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01895673> (cf. p. 32).
- [54] J. MCCAMMOND et D. WISE. « Fans and ladders in small cancellation theory ». In : *Proc. London Math. Soc.* 84.3 (2002), p. 599–644 (cf. p. 69, 76).
- [55] Ashot MINASYAN et Denis OSIN. « Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees ». In : *Mathematische Annalen* 362.3 (2015), p. 1055–1105. ISSN : 1432-1807. DOI : [10.1007/s00208-014-1138-z](https://doi.org/10.1007/s00208-014-1138-z). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00208-014-1138-z> (cf. p. 69).
- [56] Gabor MOUSSONG. « Hyperbolic Coxeter Groups ». PhD Thesis. The Ohio State University, 1988 (cf. p. 87).
- [57] Jun-iti NAGATA. *Modern dimension theory*. Revised. T. 2. Sigma Series in Pure Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1983, p. ix+284. ISBN : 3-88538-002-1 (cf. p. 46).
- [58] D. OSIN. « On acylindrical hyperbolicity of groups with positive first ℓ^2 -Betti number ». In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 47.5 (2015), p. 725. DOI : [10.1112/blms/bdv047](https://doi.org/10.1112/blms/bdv047). eprint : http://oup/backfile/content_public/journal/blms/47/5/10.1112/blms/bdv047/2/bdv047.pdf. URL : <http://dx.doi.org/10.1112/blms/bdv047> (cf. p. 69).
- [59] D. OSIN. « Acylindrically hyperbolic groups ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 368 (2016), p. 851–888 (cf. p. 69, 71).
- [60] John J. O’SULLIVAN. « Riemannian manifolds without focal points ». In : *J. Differential Geom.* 11.3 (1976), p. 321–333. DOI : [10.4310/jdg/1214433590](https://doi.org/10.4310/jdg/1214433590). URL : <https://doi.org/10.4310/jdg/1214433590> (cf. p. 70, 81, 84).
- [61] Pierre PANSU. « Pincement des variétés à courbure négative d’après M. Gromov et W. Thurston ». In : *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 4, Année 1985–1986*. Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d’Hères, 1986, p. 101–113 (cf. p. 43, 44, 55).
- [62] Pierre PANSU. « Dimension conforme et sphère à l’infini des variétés à courbure négative ». In : *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 14.2 (1989), p. 177–212. ISSN : 0066-1953. DOI : [10.5186/aasfm.1989.1424](https://doi.org/10.5186/aasfm.1989.1424). URL : <https://doi.org/10.5186/aasfm.1989.1424> (cf. p. 45, 46).
- [63] Thomas ROBLIN. « Ergodicité et équidistribution en courbure négative ». In : *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* 95 (2003), p. vi+96. ISSN : 0249-633X (cf. p. 19, 21, 28, 35, 61).
- [64] Pekka TUKIA. « On quasiconformal groups ». In : *J. Analyse Math.* 46 (1986), p. 318–346. ISSN : 0021-7670. DOI : [10.1007/BF02796595](https://doi.org/10.1007/BF02796595). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02796595> (cf. p. 46).
- [65] Jordan WATKINS. « The Higher Rank Rigidity Theorem for Manifolds With No Focal Points ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1111.5428 (nov. 2011), arXiv :1111.5428. arXiv : [1111.5428](https://arxiv.org/abs/1111.5428) [math.DG] (cf. p. 70).
- [66] Jordan WATKINS. « The higher rank rigidity theorem for manifolds with no focal points ». In : *Geometriae Dedicata* 164.1 (juin 2013), p. 319–349. ISSN : 1572-9168. DOI : [10.1007/s10711-012-9776-3](https://doi.org/10.1007/s10711-012-9776-3). URL : <https://doi.org/10.1007/s10711-012-9776-3> (cf. p. 81, 82).

- [67] Jin-Whan YIM. « Complete open manifolds and horofunctions ». In : *J. Korean Math. Soc.* 32.2 (1995), p. 351–361. ISSN : 0304-9914 (cf. p. [84](#)).

Géométrie de certains espaces de courbure négative

Résumé

Dans cette thèse, on étudie certains espaces de courbure négative et les groupes agissant géométriquement dessus. La première famille d'exemples que nous étudions est due à Gromov et Thurston et s'obtient par revêtements ramifiés de variétés hyperboliques. Ces espaces sont munis d'une métrique de courbure constante égale à -1 et possèdent une singularité conique d'angle $2k\pi$ le long d'une sous-variété de codimension 2 où k est le degré de ramification. En étudiant le flot géodésique, on montre que l'entropie volumique (ou, de manière équivalente, l'exposant critique du groupe fondamental) croît comme le logarithme du degré de ramification. Les seconds exemples qui nous intéressent sont des espaces de courbure négative possédant un ouvert de courbure strictement négative. Il s'avère que cette contrainte locale a des conséquences sur la géométrie globale du groupe fondamental de ces espaces. En effet, on montre que les groupes fondamentaux de tels espaces possèdent une forme faible d'hyperbolicité, l'hyperbolicité acylindrique.

Mots-clés : géométrie CAT(-1), flot géodésique, groupes acylindriquement hyperboliques, géométrie riemannienne.

Abstract

In this thesis, we investigate the geometry of some examples of nonpositively curved spaces together with their fundamental groups. The first family of examples we study is due to Gromov and Thurston and is obtained by taking ramified covers of hyperbolic manifolds. These spaces can be endowed with a metric of constant negative curvature with conical singularities of angle $2k\pi$ along a codimension 2 submanifold, where k is the branching degree. By studying the geodesic flow, we prove that the volume entropy (or equivalently, the critical exponent of the fundamental group) of these spaces grows as the logarithm of the branching degree. The second family of examples we are interested in are nonpositively curved spaces admitting an open set of negative curvature. It turns out that this local constraint has consequences on the global geometry of its fundamental group since it implies that it is acylindrically hyperbolic —a weak form of negative curvature.

Keywords : CAT(-1) geometry, geodesic flow, acylindrically hyperbolic groups, Riemannian geometry.