TD12-Intégration

Exercice 1. Toutes les fonctions considérées sont continues sur le segment d'intégration donc les intégrales sont bien définies (il n'y a pas d'impropreté).

1. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,2]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 te^{2t}dt = \int_0^2 u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t)dt \\ = \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2t}}{2}dt \\ = e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} \\ = \frac{3e^4+1}{4}.\end{aligned}$$

2. Voir le test 3 et sa correction.

3. Pour tout $x \in [2,4]$, on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{1-x}dx \\ = \frac{1}{2}[\ln(|1+x|)]_2^4 + \frac{1}{2}[-\ln(|1-x|)]_2^4 \\ = \frac{\ln(5) - 2\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

4. Les fonctions $u : y \mapsto \ln(y)$ et $v : y \mapsto \frac{y^{3/2}}{3/2}$ sont de classe C^1 sur $[1,5]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy = \int_1^5 u(y)v'(y)dy = [u(y)v(y)]_1^5 - \int_1^5 u'(y)v(y)dy \\ = \left[\frac{y^{3/2}\ln(y)}{3/2}\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{y^{3/2}}{3/2}\times\frac{1}{y}dy \\ = \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\int_1^5 \sqrt{y}dy \\ = \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \\ = \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{20\sqrt{5}}{9} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

5. Les fonctions $u : r \mapsto r$ et $v : r \mapsto \sqrt{2r+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr = \int_0^1 u(r)v'(r)dr = [u(r)v(r)]_0^1 - \int_0^1 u'(r)v(r)dr \\ = \left[r\sqrt{2r+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2r+1}dr \\ = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{(2r+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

6. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ sont de classe C^1 sur $[0,2]$. Par intégration par

parties, on a donc :

$$\int_0^2 x\sqrt{3x+1}\,dx = \int_0^2 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^x u'(x)v(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{2}{9}x(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{21\sqrt{7}}{9} - \frac{2}{27}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2$$
$$= \frac{224\sqrt{7}+4}{135}.$$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n est bien définie. De plus, si on note $u : x \mapsto x^2+1$, on a :
$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(|u(x)|)\right]_0^1$$
$$= \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
D'autre part, par positivité de l'intégrale, I_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc possède une primitive F sur cet intervalle. En particulier, f est bien définie et :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$
En tant que primitive d'une fonction continue, F est dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction inverse est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi par composition, $x \mapsto F\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis par somme f l'est. De plus :
$$\forall x > 0, \quad f'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée nulle. Donc f est constante sur $]0,+\infty[$. En particulier :
$$\forall x > 0, \quad f(x) = f(1) = 0.$$

3. Soit $x \in]0,+\infty[$. On effectue le changement de variables $y = \frac{1}{t}$: soit $y : t \mapsto \frac{1}{t}$ de classe C^1 sur $[x, \frac{1}{x}]$. Alors
$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} -\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(y(t))}{1+y(t)^2}y'(t)\,dt$$
$$= \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,dy$$
$$= -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,dy$$
$$= -f(x).$$
Donc, $f(x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$.
Ainsi : $\forall x > 0$, $f(x) = 0$.

Exercice 4.

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est définie et continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [2,+\infty[$. On a :
$$\int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[2\sqrt{t-1}\right]_2^A = 2\sqrt{A-1} - 2.$$
Donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt = +\infty$.
Ainsi l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt$ est divergente.

2. La fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0,+\infty[$. Alors on a :
$$\int_0^A xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(1-e^{-A^2}).$$
Donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$.
Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ est convergente et vaut $\frac{1}{2}$.

3. La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $]-\infty,0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$.
Soit $A \in]-\infty,0]$. Alors on a :
$$\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_A^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+A^2} - 1\right).$$

Donc : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}$.
Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$ est convergente et vaut $-\frac{1}{2}$.

4. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0,+\infty[$.

   - **Méthode 1 :** la fonction $u : t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0, A]$, en effectuant le changement de variable $u = e^t$ on obtient :

$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^A \frac{1}{e^t(1+e^t)}e^t\,dt = \int_0^A \frac{1}{u(t)(1+u(t))}u'(t)\,dt = \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}\,du.$$

   Or, pour tout $u \geq 1$: $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt &= \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}\,du \\ &= \int_1^{e^A}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\ &= [\ln(u) - \ln(u+1)]_1^{e^A} \\ &= A - \ln(1+e^A) + \ln(2) \\ &= \ln(2) - \ln(1+e^{-A}).\end{aligned}$$

   - **Méthode 2 :** on a : $\forall t \geq 0$, $\frac{1}{1+e^t} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$. Donc :

$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^A = \ln(2) - \ln(1+e^{-A}).$$

   - **Conclusion :** $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_0^A \frac{1}{1+e^t}\,dt = \ln(2)$.
   Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\,dt$ est convergente et vaut $\ln(2)$.

Exercice 5.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$ donc l'intégrale est impropre en 1.
Soit $A \in [0,1[$. On a :

$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^A = -2\sqrt{1-A} + 2.$$

Donc : $\lim\limits_{A\to1}\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = 2$.
Ainsi l'intégrale converge et vaut 2.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur $]1,2]$ donc l'intégrale est impropre en 1.
Soit $A \in]1,2]$. On a :

$$\int_A^2 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_A^2 \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = [\ln(|\ln(x)|)]_A^2 = \ln(\ln(2)) - \ln(\ln(A)).$$

Donc : $\lim\limits_{A\to1}\int_A^2 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = +\infty$.
Ainsi l'intégrale diverge.

3. La fonction $f : t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$ donc l'intégrale est impropre en 0.
Soit $A \in]0,1]$. Les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^2}{2}$ sont de classe C^1 sur $[A,1]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_A^1 t\ln(t)\,dt = \int_A^1 u(t)v'(t)\,dt &= [u(t)v(t)]_A^1 - \int_A^1 u'(1)v(1)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t^2\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}A^2\ln(A) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{2}A^2\ln(A) - \frac{1}{4} + \frac{A^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, par croissance comparée : $\lim\limits_{A\to0}\int_A^1 t\ln(t)\,dt = -\frac{1}{4}$.
Donc l'intégrale converge [1] et vaut $-\frac{1}{4}$.

4. La fonction $t \mapsto \frac{1}{3t+1}$ est continue sur $]-\frac{1}{3},0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\frac{1}{3}$.
Soit $A \in]-\frac{1}{3},0]$. On a :

$$\int_A^0 \frac{1}{3t+1}\,dt = \left[\frac{\ln(|3t+1|)}{3}\right]_A^0 = -\frac{\ln(1+3A)}{3}.$$

Donc : $\lim\limits_{A\to-\frac{1}{3}}\int_A^0 \frac{1}{3t+1}\,dt = +\infty$.
Ainsi l'intégrale diverge.

5. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [2,+\infty[$. On a :

$$\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}\,dt = \int_2^A \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^A = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}.$$

Donc : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}\,dt = \frac{1}{\ln(2)}$.
Ainsi l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{\ln(2)}$.

1. On pouvait aussi remarquer que, par croissance comparée, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 pour conclure à la convergence.

Exercice 6.

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2(1+|x|)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$ impropre en $-\infty$.
     Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a :
     $$\int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = \int_A^0 \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\right]_A^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-A)}.$$
     Ainsi : $\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.
     L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$ impropre en $+\infty$.
     Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :
     $$\int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = \int_0^A \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+A)}.$$
     Ainsi : $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.
     L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Conclusion : comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx$ converge et :
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,dx = 1.$$
2. Voir l'exemple 9.2 du cours.
3. La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ impropre en $-\infty$.
     Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a :
     $$\int_A^0 xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_A^0 = -\frac{1}{2}(1-e^{-A^2}).$$
     Ainsi : $\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}$.
     L'intégrale converge donc et vaut $-\frac{1}{2}$.
   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ impropre en $+\infty$.
     Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :
     $$\int_0^A xe^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = -\frac{1}{2}(e^{-A^2}-1).$$
     Ainsi : $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$.
     L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Conclusion : comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ converge et :
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = 0.$$

Exercice 7.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   - Si $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a
     $$1 + t + t^n \geq t^n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$
     Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $n > 1$. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ converge aussi.
   - Si $n = 1$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a
     $$1 + t + t^n = 1 + 2t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
     Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \frac{1}{3t}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3t}\,dt$ est, à un facteur non nul près, une intégrale de Riemann divergente donc divergence elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ diverge aussi.
   - Si $n = 0$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a
     $$1 + t + t^n = 2 + t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
     Et on conclut comme précédemment que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$ diverge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq e$ on a
   $$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ est une intégrale de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3 \ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $t \geq 2$ on a
$$\frac{1}{t^3 \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(2)\, t^3}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^3 \ln(t)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3 \ln(2)}$ sont continues, positives sur $[2,+\infty[$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(2)} dt$ est, à un facteur près, une intégrale de Riemann convergente donc converge elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$ converge aussi.

Exercice 8.

1. La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x^2+x}} = 0$.
Donc $e^{-\sqrt{x^2+x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Les fonctions $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$ converge aussi.
Enfin, $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$ est bien définie car $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ est continue sur $[0,1]$. Donc finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$ converge.
⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).
2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$ (et négative !). L'intégrale est donc impropre en 0.
De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{4}} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
Donc $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$ et aussi $-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$.
Les fonctions $x \mapsto -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$ sont continues, positives sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ converge aussi.
3. La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en 0 et en $+\infty$.
   - Étude au voisinage de 0. Par limite usuelle on sait que
   $$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1.$$
   La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est donc prolongeable par continuité en 0. D'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^t-1} dt$ est donc convergente.
   - Étude au voisinage de $+\infty$. Par croissance comparée :
   $$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^t-1} = 0$$
   donc $\frac{t}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   Les fonctions $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$ converge aussi.
   - Conclusion : les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^t-1} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$ sont convergentes donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$ converge.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^k e^{-t^2} = 0$.
Donc $t^k e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge aussi.
Comme de plus, $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k e^{-t^2} dt$ existe.
Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge donc.
⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).
5. La fonction $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} = 0$.
Donc $\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Les fonctions $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} dt$ converge aussi.

6. Exactement comme la question 4.

Exercice 9.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
$$\frac{t^2+2t}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ sont de même nature. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente., $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ converge aussi.
Comme de plus, $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ existe.
Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ converge donc.
⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2-x+1>0$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$.
   Par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
   $$\frac{1}{x^2-x+1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
   Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $]-\infty,-1]$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ sont de même nature. Comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente., $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge aussi.
   Comme de plus, $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $[-1,0]$ l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ existe.
   Finalement $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge donc.
   - On montre de la même façon que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.
   - Comme $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ convergent alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. L'intégrale est impropre en -1 et en 1.
   - Étude de $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$.
   On a :
   $$\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to-1^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}$ sont continues et positives sur $]-1,0]$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ sont de même nature.
   Soit $A \in]-1,0]$. On a
   $$\int_A^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+t}\right]_A^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+A}}{\sqrt{2}}.$$
   Ainsi $\lim_{A\to-1^+} \int_A^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En particulier, $\int_{-1}^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ converge et donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge aussi.
   - On montre de même que $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
   - Comme $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ convergent, $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
4. La fonction $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en 0 et $+\infty$.
   - Soit $c \in]0,+\infty[$. On a $e^{\frac{1}{t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} 1$.
   Les fonctions $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ et $t \mapsto 1$ sont continues, positives sur $[c,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ et $\int_c^{+\infty} 1dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge aussi.
   - Ainsi, pour tout $c \in]0,+\infty[$, $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge. Donc $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge.
5. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, on vérifie à l'aide de la caractérisation que l'on a :
$$\sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ sont continues, positives sur $[c, +\infty[$ pour tout $c > 0$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ diverge aussi pour tout $c > 0$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ diverge.

6. La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus par équivalent usuel, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ converge aussi.

Exercice 10.

1. La fonction h est le quotient de deux fonctions dont le dénominateur est strictement positif. Ainsi $h(x)$ est du signe de $\ln(x)$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [1, +\infty[$.
Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x} \times \frac{1}{x}dx\\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^A\\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{-1}{A} + 1.\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx = 1$.
Donc l'intégrale converge et vaut 1.

3. Par équivalent usuel et compatibilité avec le quotient on a :

$$h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Comme de plus les fonctions h et $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$ alors d'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ sont de même nature. D'après la question précédente, on conclut donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge.

4. La fonction h est continue sur $]0, 1]$. Soit $A \in]0, 1]$. On effectue le changement de variables $u = \frac{1}{x}$: soit $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ de classe C^1 sur $[A, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_A^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \int_A^1 -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)}dx &= \int_A^1 \frac{\ln(u(x))}{1+u(x)^2}u'(x)dx\\ &= \int_{\frac{1}{A}}^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2}du\\ &= -\int_1^{\frac{1}{A}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du.\end{aligned}$$

Donc : $\displaystyle\lim_{A\to0^+} \int_A^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = \lim_{A\to0^+} -\int_1^{\frac{1}{A}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}du = -K.$
Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 h(u)du$ converge et vaut $-K$.

5. Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ convergent alors $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} h(x)dx = \int_0^1 h(x)dx + \int_1^{+\infty} h(x)dx = K - K = 0.$$

De même, d'après la question 1, on a :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \begin{cases} -h(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ h(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc les intégrales $\displaystyle\int_0^1 |h(x)|dx$ et $\int_1^{+\infty} |h(x)|dx$ convergent. Par conséquent, $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} |h(x)|dx = \int_0^1 |h(x)|dx + \int_1^{+\infty} |h(x)|dx = 2K.$$

Exercice 11. Dans les questions 1.(b) et 2.(b), il faut ajouter l'hypothèse « f est continue » pour que les intégrales est un sens.

1. (a) La fonction $x \mapsto x^2 e^{-|x|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$, impropre en $+\infty$.
Par croissance comparée, on sait que :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times x^2 e^{-|x|} = \lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x} = 0.$$
Ainsi : $x^2 e^{-|x|} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto x^2 e^{-|x|}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ converge aussi.
De plus, $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-|x|} dx$ converge (elle n'a pas d'impropreté) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ converge.
- Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2 e^{-|x|} dx$, impropre en $-\infty$.
On pourrait procéder de la même façon que pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ mais on va plutôt exploiter la parité de $x \mapsto x^2 e^{-|x|}$.
Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient :
$$\int_A^0 x^2 e^{-|x|} dx = \int_{-A}^0 -y^2 e^{-|y|} dy = \int_0^{-A} y^2 e^{-|y|} dy.$$
D'après ce qui précède on en déduit donc :
$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 x^2 e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-|y|} dy.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^2 e^{-|x|} dx$ converge et est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$.
- Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx$.

(b) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge. Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient par parité :
$$\int_A^0 f(x) dx = \int_{-A}^0 -f(-y) dy = \int_0^{-A} f(y) dy.$$
On en déduit donc :
$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(y) dy.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge et est égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$.
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et est égale à $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

2. (a) La fonction $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$, impropre en $+\infty$.
Par croissance comparée, on sait que :
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times x^3 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-x^2} = 0.$$
Ainsi : $x^3 e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge alors $\int_1^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ converge aussi.
De plus, $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$ converge (elle n'a pas d'impropreté) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ converge.
- Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^3 e^{-x^2} dx$, impropre en $-\infty$.
On pourrait procéder de la même façon que pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^3} dx$ mais on va plutôt exploiter l'imparité de $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$.
Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient :
$$\int_A^0 x^3 e^{-x^2} dx = \int_{-A}^0 y^3 e^{-y^2} dy = -\int_0^{-A} y^3 e^{-y^2} dy.$$
D'après ce qui précède on en déduit donc :
$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 x^3 e^{-x^2} dx = -\int_0^{+\infty} y^3 e^{-y^2} dy.$$
Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x^3 e^{-x^2} dx$ converge et est égale à $-\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.
- Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ converge et vaut 0.

(b) On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors, en effectuant le changement de variable $y = -x$ on obtient par imparité :

$$\int_A^0 f(x)dx = \int_{-A}^0 -f(-y)(-1)dy = -\int_0^{-A} f(y)dy.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 f(x)dx = -\int_0^{+\infty} f(y)dy.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et est égale à $-\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et est égale à 0.

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = 0.$$

Ainsi : $x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge alors $\int_1^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge aussi.

De plus, $\int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$ converge (elle n'a pas d'impropreté) donc l'intégrale I_n converge.

2. (a) D'après le cours une densité est donnée par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

(b) En particulier, si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, a^2)$ on a par parité de f :

$$\frac{1}{2} = 1 - F_X(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} I_0.$$

Ainsi on obtient :

$$I_0 = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(c) La fonction φ est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{2a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = -\frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Soit $A > 0$. On déduit de ce qui précède :

$$\int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \left[-a^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^A = -a^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + a^2.$$

On en déduit donc :

$$I_1 = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A x e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = a^2.$$

3. (a) Soient $n \geq 2$ et $t \in [0, +\infty[$. Les fonctions $u : x \mapsto x^{n-1}$ et φ sont de classe C^1 sur $[0, t]$. Donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx &= -a^2 \int_0^t u(x)\varphi'(x)dx \\
&= -a^2 \left([u(x)\varphi(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)\varphi(x)dx \right) \\
&= -a^2 \left(t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} - \int_0^t (n-1)x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \right) \\
&= -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 2$. D'après la première question et comme $\lim_{t\to+\infty} t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$, en passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}.$$

(c) D'après la question précédente, on a :

$$I_2 = a^2 I_0 = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_3 = 2a^2 I_1 = 2a^4.$$

Exercice 13.

1. Soit $x > 0$. la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, on sait que :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{e^{-t}}{t} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0.$$

Ainsi : $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues et positives sur $[x, +\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge alors $J(x)$ converge aussi.

2. (a) Soit $A \in [x, +\infty[$. On a :

$$\forall t \in [x, +\infty[, \quad \frac{e^{-t}}{t^2} \leq e^{-t} \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt &\leq \frac{1}{x^2}\int_x^A e^{-t}\,dt\\ &\leq \frac{1}{x^2}(e^{-x}-e^{-A})\\ &\leq \frac{1}{x^2}e^{-x}.\end{aligned}$$

En particulier, la fonction $A \mapsto \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ est croissante et majorée donc possède une limite en $+\infty$. On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge et vérifie :

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{x^2}e^{-x}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$0 \leq \frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}} \leq \frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}} = 0.$$

Cela signifie : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

(b) Soient $x>0$ et $A>x$. Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x, A]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt &= \int_x^A u(t)v'(t)\,dt\\ &= [u(t)v(t)]_x^A - \int_x^A u'(t)v(t)\,dt\\ &= -\frac{e^{-A}}{A}+\frac{e^{-x}}{x}-\int_x^A\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et avec la question précédente on obtient donc :

$$J(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a bien :

$$J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$