

Chapitre 14 : Fonctions de deux variables réelles

1 Fonctions de deux variables

Définition 1 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application f définie sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Exemple 1

1. Les fonctions suivantes sont appelées les **fonctions coordonnées** :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x & (x, y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

2. Les fonctions de la forme suivante sont appelées **des fonctions polynomiales** :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

avec $A \subset \mathbb{N}^2$ **fini**.

3. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une fonction numérique de deux variables réelles.
4. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$ est une fonction numérique de deux variables réelles.
5. Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable sont des fonctions numériques de deux variables réelles.
Par exemple :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x e^{-x} \quad \text{ou} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^2 + \ln(y^4 + 2).$$

Exemple 2

1. La fonction $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est définie sur :

2. La fonction $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ est définie sur :

3. La fonction $(x, y) \longmapsto \ln(x + y)$ est définie sur :

4. En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont les fonctions qui à deux variables réelles (la quantité de travail L et le capital investi K) associent la production totale P définie par :

$$P(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha},$$

où α et β sont des réels strictement positifs.

Définition 2 (Applications partielles)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- On appelle première **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}\}$. On la note f_{y_0} .
- On appelle deuxième **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ définie sur l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathcal{D}\}$. On la note f_{x_0} .

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Déterminons les applications partielles en $(x_0, y_0) = (-1, 3)$.

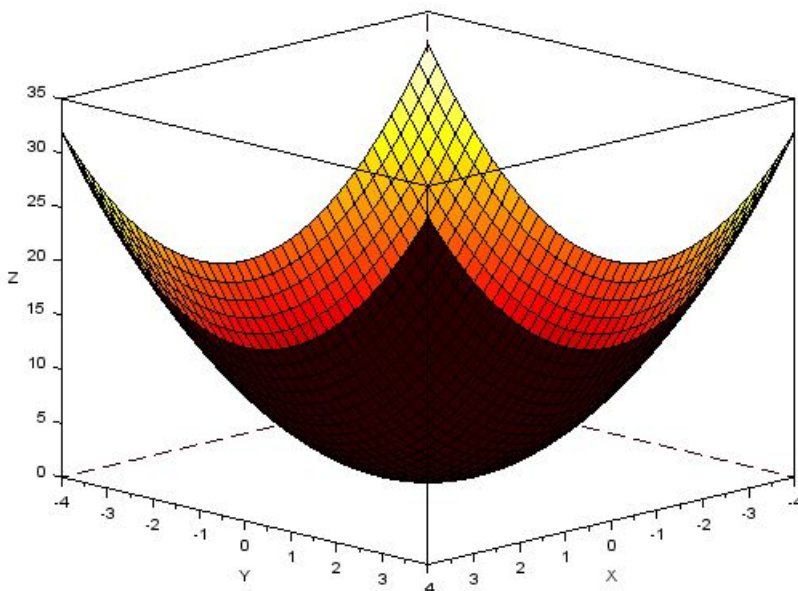
Définition 3 (Représentation graphique)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . On appelle **graphe** de la fonction f le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 suivant :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{D}\}.$$

Exemple 4

Le graphe de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ est représenté ci-dessous.



```
function z=f(x,y)
    z=x^2+y^2
endfunction
```

```
x=-4:0.1:4
y=-4:0.1:4
```

```
fplot3d(x,y,f)
```

Définition 4 (Ligne de niveau)

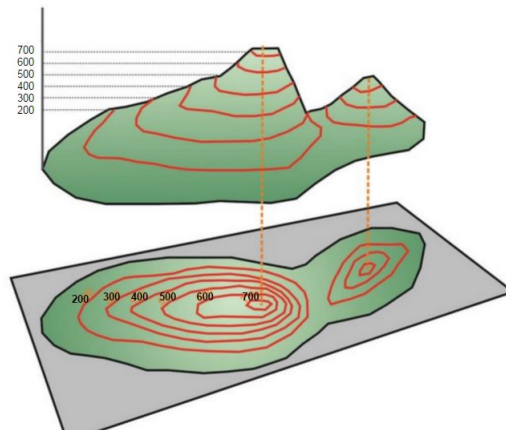
Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 et soit $c \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau c de f** le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 suivant :

$$\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

Remarque 1

Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = c$ et on projette sur le plan (Oxy) pour obtenir la ligne de niveau c de f .

Exemple 5



Exemple 6

On reprend l'exemple de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.

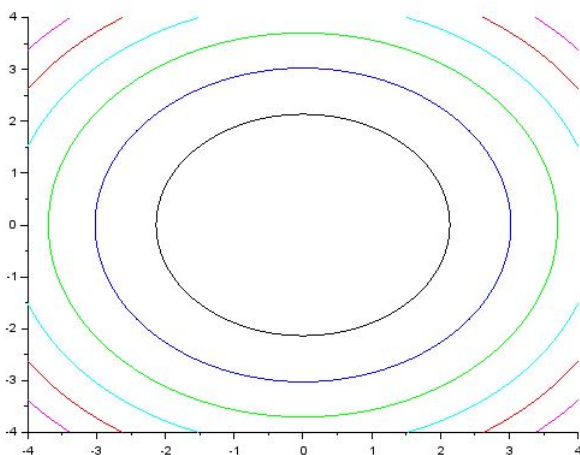
1. Déterminer la ligne de niveau -1 de f .

2. Déterminer la ligne de niveau 0 de f .

3. Déterminer la ligne de niveau 1 de f .

4. Plus généralement, déterminer la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$.

Les lignes de niveaux de la fonction de l'exemple 6 : il s'agit bien de cercles (mais le repère n'est pas orthonormé).



```
x=-4:0.1:4
```

```
y=x
```

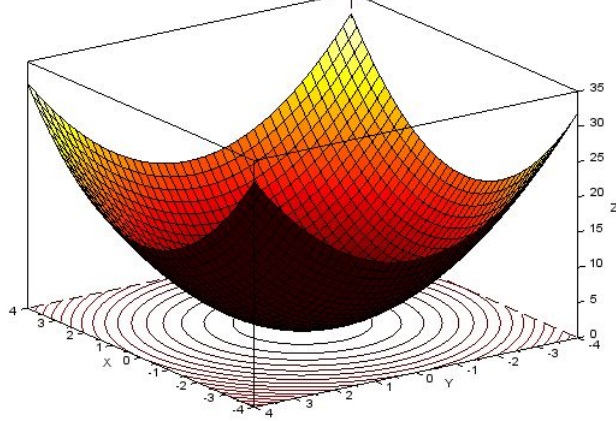
```
z=feval(x,y,f)
```

```
contour(x,y,z,6)
```

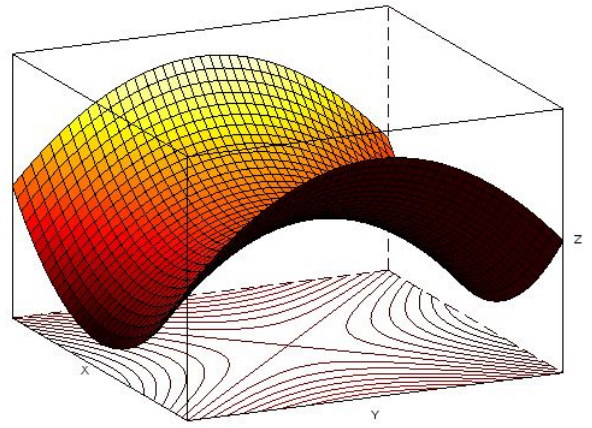
Exemple 7

Graphes et lignes de niveau des fonctions suivantes :

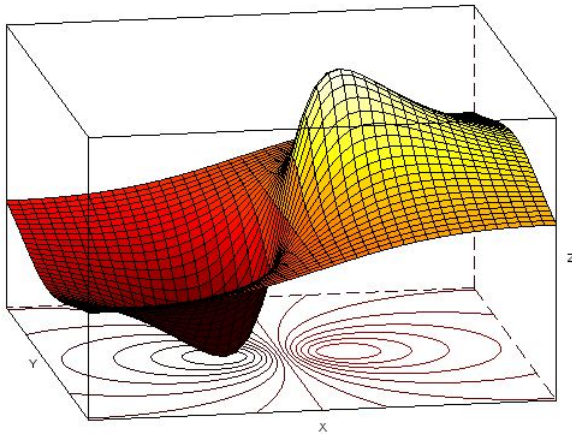
1. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$,



2. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$,



3. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.



Dans les deux prochaines parties du chapitre on ne s'intéressera qu'aux fonctions définies sur \mathbb{R}^2 tout entier.

2 Continuité des fonctions de deux variables

En première année, on définit la continuité des fonctions d'une variable réelle. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si

ou encore

Autrement dit, une fonction d'une variable réelle f est continue en x_0 si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ , toutes les valeurs $f(x)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .

La principale différence lorsque f est une fonction de deux variables réelles est la notion de « suffisamment proche de ».

2.1 Distance euclidienne

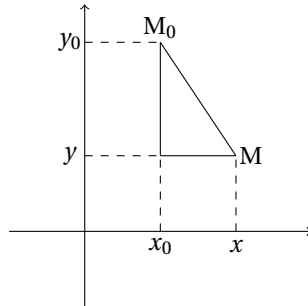
Définition 5 (Distance euclidienne entre deux points)

Soient $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ deux points de \mathbb{R}^2 . On appelle **distance euclidienne entre M_0 et M** le réel noté $d(M_0, M)$ défini par :

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Remarque 2

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore (voir figure ci-dessous).



Exemple 8

Soient $A = (x_A, y_A)$ un point de \mathbb{R}^2 et $r > 0$.

1. Décrire l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) = r\}$.

2. Décrire l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}$

Cet ensemble est appelé **la boule ouverte de centre A et de rayon r**.

3. Décrire l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}$

Cet ensemble est appelé **la boule fermée de centre A et de rayon r**.

Proposition 1 (Propriétés de la distance euclidienne)

La distance euclidienne d vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) \geq 0$;
2. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) = 0 \iff A = B$;
3. $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) = d(B, A)$ (symétrie) ;
4. $\forall (A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (inégalité triangulaire).

2.2 Continuité

Définition 6 (Continuité en un point)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ , toutes les valeurs $f(x, y)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0, y_0)$ pourvu que (x, y) soit suffisamment proche de (x_0, y_0) .

Exemple 9

La fonction $f : (x, y) \mapsto x + y$ est continue en $(0, 0)$.

Définition 7 (Continuité sur \mathbb{R}^2)

Soit f une fonction numérique de deux variables. On dit que f est **continue sur** \mathbb{R}^2 si f est continue en tout point de \mathbb{R}^2 .

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
2. Les fonctions constantes sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 2 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur \mathbb{R}^2 . On suppose que f et g sont continues sur \mathbb{R}^2 . Alors

1. toute combinaison linéaire de f et de g est continue sur \mathbb{R}^2 ;
2. le produit $f \times g$ est continue sur \mathbb{R}^2 ;
3. si g ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 , le quotient $\frac{f}{g}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 10

Montrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Test 1 (Voir solution.)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 3 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles continue sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} . Soit g une fonction continue sur I et à valeurs dans \mathbb{R} . Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 11

1. Montrons que $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Montrons que $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est continue sur \mathbb{R}^2 .

Test 2 (Voir solution.)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur \mathbb{R}^2 .

1. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
2. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Méthode 1

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est continue on utilisera souvent les propositions 2 et 3 et les exemples usuels.

3 Calcul différentiel

3.1 Fonctions de classe C^1

Définition 8 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0)** si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0)** si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.

Remarque 3

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- La fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \partial_1(f)(x_0, y_0).$$

- La fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \partial_2(f)(x_0, y_0).$$

Définition 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y). \end{aligned}$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y). \end{aligned}$$

Méthode 2

Pour déterminer la dérivée partielle par rapport à une variable, on considère l'autre variable comme une constante et on utilise les formules de dérivation des fonctions d'une variable.

Exemple 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

1. Montrons que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en $(1, 2)$.

2. Montrons que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point (x, y) .

- (a) On fixe la deuxième variable : soit $y \in \mathbb{R}$.

- (b) On dérive par rapport à la variable x (y est fixé et donc à considérer comme une constante).

- (c) Conclusion :

Test 3 ([Voir solution.](#))

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f de l'exemple ci-dessus.

Exemple 13

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Déterminer les dérivées partielles.

1. Par rapport à la première variable.

2. Par rapport à la deuxième variable.

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur \mathbb{R}^2 .

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$; 2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (1 + xy)(2x - 2y + 1)$.

Définition 10 (Fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de **classe C^1 sur \mathbb{R}^2** si elle admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 et que les dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 14

On reprend la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de l'exemple précédent :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu que g admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Les fonctions constantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 4 (Opérations sur les fonctions de classe C^1)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur \mathbb{R}^2 . On suppose que f et g sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Alors :

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ;
2. le produit $f \times g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ;
3. si g ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 , le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 15

Montrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Test 5 ([Voir solution.](#))

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 1}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 5 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} . Soit g une fonction de classe C^1 sur I et à valeurs dans \mathbb{R} . Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 16

1. Montrons que $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2. Montrons que $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Méthode 3

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^1 on utilisera souvent les propositions 4 et 5 et les exemples usuels.

Test 6 (Voir solution.)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Déterminer les dérivées partielles.

1. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
2. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Proposition 6

Toute fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 est continue sur \mathbb{R}^2 .

Remarque 4

Attention, contrairement à ce qu'il se passe pour les fonctions d'une variable, l'existence des dérivées partielles d'une fonction f en un point (x_0, y_0) n'assure pas que f est continue en (x_0, y_0) : l'existence des dérivées partielles en (x_0, y_0) assure que f « paraît continue » en (x_0, y_0) tant qu'on approche (x_0, y_0) selon une direction verticale ou horizontale mais ne donne aucune information sur ce qu'il se passe lorsqu'on approche ce point par une autre direction !

L'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues permet d'assurer la continuité de f .

Définition 11 (Gradient)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **gradient de f en (x_0, y_0)** le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x_0, y_0)$ (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0, y_0) \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Développement limité d'ordre 1)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \epsilon(h, k)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en (x_0, y_0)** et est unique.

Remarque 5

1. De manière équivalente, le développement limité en (x_0, y_0) s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot \epsilon(x, y)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en (x_0, y_0) telle que $\epsilon(x_0, y_0) = 0$.

2. Il s'agit de l'analogie pour les fonctions de deux variables du développement limité d'ordre 1 pour les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

3. Graphiquement, l'équation $z = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exemple 17

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Justifions que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2. Déterminons le gradient de f en $(0, 1)$.

3. Déterminons le développement limité de f en $(0, 1)$

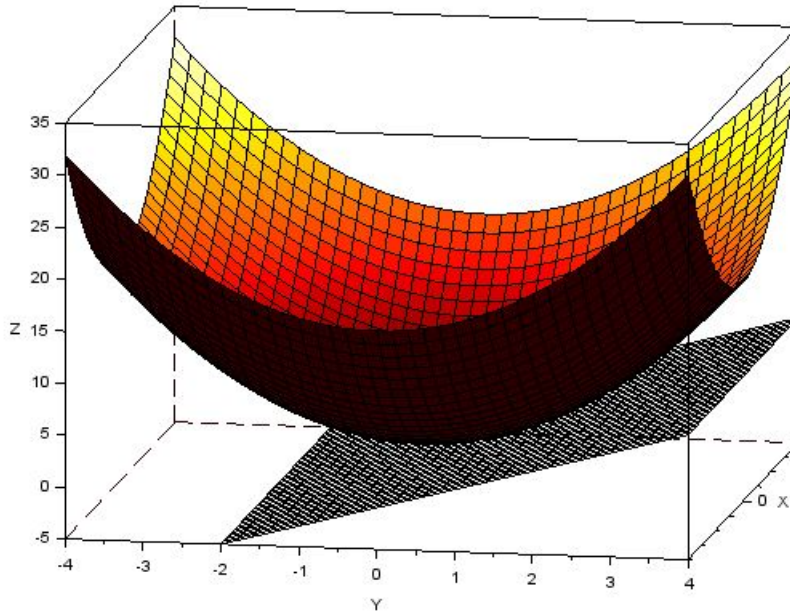


FIGURE 1 – Graphe de la fonction de l'exemple 17 avec le plan tangent en $(0, 1)$

3.2 Fonctions de classe C^2

Définition 12 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur \mathbb{R}^2** si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur \mathbb{R}^2 . On note

$$\partial_{1,1}^2(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable sur \mathbb{R}^2** si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur \mathbb{R}^2 . On note

$$\partial_{2,1}^2(f) = \partial_2(\partial_1(f)).$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable sur \mathbb{R}^2** si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur \mathbb{R}^2 . On note

$$\partial_{1,2}^2(f) = \partial_1(\partial_2(f)).$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable sur \mathbb{R}^2** si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur \mathbb{R}^2 . On note

$$\partial_{2,2}^2(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

Exemple 18

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$.

On a vu dans l'exemple 12 que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1(f)(x, y) = -2y^2 + 6y^2x.$$

Montrons que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivantes : $\partial_{2,1}^2(f)$ et $\partial_{1,1}^2(f)$.

1. Justifions l'existence de $\partial_{2,1}^2(f)$ et $\partial_{1,1}^2(f)$.

2. Calculons $\partial_{1,1}^2(f)$.

3. Calculons $\partial_{2,1}^2(f)$.

Test 7 ([Voir solution.](#))

Déterminer les dérivées partielles $\partial_{1,2}^2(f)$ et $\partial_{2,2}^2(f)$ de la fonction f de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le [test 3](#).

Définition 13 (Fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^2)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

On dit que f est de **classe C^2 sur \mathbb{R}^2** si

- elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur \mathbb{R}^2 ;
- ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 19

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu dans l'exemple [14](#) que g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 8

Toute fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. Les fonctions constantes sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 9 (Opérations sur les fonctions de classe C^2)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur \mathbb{R}^2 . On suppose que f et g sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Alors :

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ;
2. le produit $f \times g$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ;
3. si g ne s'annule pas sur \mathbb{R}^2 , le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

En conséquence :

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 20

Montrons que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 10 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} . Soit g une fonction de classe C^2 sur I et à valeurs dans \mathbb{R} . Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 21

1. Montrons que $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

2. Montrons que $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Méthode 4

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^2 on utilisera souvent les propositions 9 et 10 et les exemples usuels.

Test 8 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Déterminer les dérivées partielles secondes.

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 + xy)(2x - 2y + 1)$
4. $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Exemple 22

1. On considère la fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

Déterminer $\partial_{1,2}^2(f)$ et $\partial_{2,1}^2(f)$.

2. On considère la fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Déterminer $\partial_{1,2}^2(f)$ et $\partial_{2,1}^2(f)$.

3. Que remarque-t-on?

Théorème 1 (de Schwarz)

Soit f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a l'égalité suivante :

$$\partial_{2,1}^2(f)(x, y) = \partial_{1,2}^2(f)(x, y).$$

Définition 14 (Matrice hessienne)

Soient f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle matrice hessienne de f en (x, y) la matrice de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix}.$$

Remarque 6

Si f est une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 , la matrice hessienne de f en tout point est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Exemple 23

Déterminons la matrice hessienne en $(1, 2)$ de la fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Proposition 11 (Développement limité d'ordre 2)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a l'égalité suivante :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t \nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2)\epsilon(h, k)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0, 0)$ telle que $\epsilon(0, 0) = 0$.

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 2 de f en (x_0, y_0)** et est unique.

Remarque 7

1. De manière équivalente, le développement limité en (x_0, y_0) s'écrit aussi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \nabla^2(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \epsilon(x, y)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en (x_0, y_0) telle que $\epsilon(x_0, y_0) = 0$.

2. Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variables de la formule de Taylor à d'ordre 2 vue au chapitre 10.

Exemple 24

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Justifions que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

2. On a vu à l'exemple 17 que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x, y) = 2x$ et $\partial_2(f)(x, y) = 2y$.

Déterminons la hessienne de f en $(0, 1)$.

3. Déterminons le développement limité de f en $(0, 1)$ à l'ordre 2.

4 Extension aux fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^2

Pour le moment, nous n'avons étudié que des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 tout entier. Cependant, il est fréquent de rencontrer des fonctions qui ne sont définies que sur une partie de \mathbb{R}^2 (comme dans l'exemple 2).

Le but de cette partie est d'étendre les notions rencontrées dans les parties 2 et 3 aux fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^2 .

4.1 Topologie de \mathbb{R}^2

Définition 15 (Boules ouvertes, boules fermées)

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte de centre A et de rayon r** et on note $B(A, r)$ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par :

$$B(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée de centre A et de rayon r** et on note $B_f(A, r)$ le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par :

$$B_f(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\}.$$

Définition 16 (Ouverts, fermés)

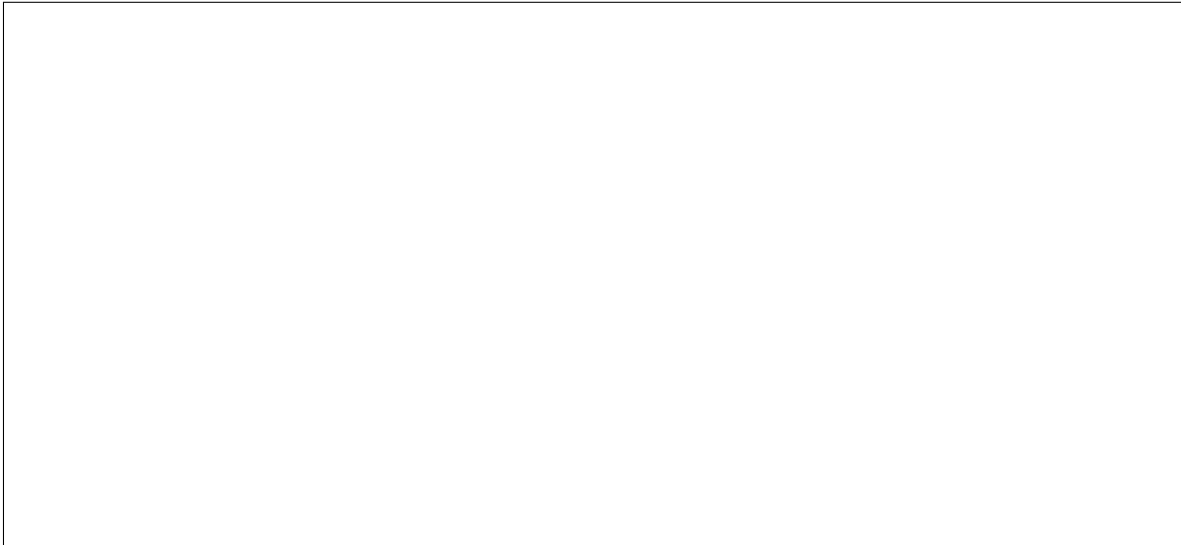
- On dit qu'une partie D de \mathbb{R}^2 est un **ouvert** si $D = \emptyset$ ou si pour tout point $M \in D$ il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D$.
- On dit qu'une partie D de \mathbb{R}^2 est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

Exemple 25

1. Les boules ouvertes sont des ouverts. Il est conseillé de faire un dessin!



2. Les boules fermées sont des fermés. Il est conseillé de faire un dessin!



3. L'ensemble \mathbb{R}^2 est ouvert, son complémentaire \emptyset est donc fermé.
L'ensemble vide \emptyset est ouvert, son complémentaire \mathbb{R}^2 est donc fermé.
Ainsi \mathbb{R}^2 et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.
4. Les ensembles de la forme $]a, b[\times]c, d[$ sont ouverts.
5. Les ensembles de la forme $[a, b] \times [c, d]$ sont fermés.
6. L'ensemble $[0, 1[\times [0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.
7. Les ensembles $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$ sont des ouverts (voir exemple 2).

Définition 17 (Ensemble borné)

On dit qu'une partie D de \mathbb{R}^2 est **bornée** si elle est incluse dans une boule centrée en $(0, 0)$:

$$\exists r > 0 \quad D \subset B((0, 0), r) \quad \text{ou encore} \quad \exists r > 0 \quad \forall M \in D \quad d((0, 0), M) < r.$$

Exemple 26

1. Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée. Il est conseillé de faire un dessin!

2. L'ensemble $[0, 1] \times [0, 1]$ est borné.

3. L'ensemble $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ est non borné.

Test 9 (Voir solution.)

Représenter chaque sous-ensemble de \mathbb{R}^2 suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).

1. $U_1 = [0, 1] \times \mathbb{R}$,
2. $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$,
3. $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$,
4. $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } 0 \leq x \leq 2\}$.

4.2 Fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^2

Définition 18 (Continuité)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur une partie D de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in D$.

- On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \exists r > 0 \forall (x, y) \in D, d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

- On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D .

Tous les résultats vus dans la partie 2 s'étendent aux fonctions continues sur une partie D de \mathbb{R}^2 .

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in D$. Comme D est un ouvert

- l'application partielle f_{y_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 ,
- l'application partielle f_{x_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant y_0 .

Définition 19 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de \mathbb{R}^2 .

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en** $(x_0, y_0) \in D$ si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point de D , on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y). \end{aligned}$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en** $(x_0, y_0) \in D$ si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0 . Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point de D , on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y). \end{aligned}$$

Définition 20 (Fonctions de classe C^1 sur un ouvert)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de \mathbb{R}^2 .

On dit que f est de **classe C^1 sur** D si elle admet des dérivées partielles sur D et que les dérivées partielles sont continues sur D .

Définition 21 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un ouvert D de \mathbb{R}^2 et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur D .

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur** D si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur D . On note

$$\partial_{1,1}^2(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On définit de même, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2 $\partial_{2,1}^2(f)$, $\partial_{1,2}^2(f)$, $\partial_{2,2}^2(f)$ sur D .

Définition 22 (Fonctions de classe C^2 sur un ouvert)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de \mathbb{R}^2 .

On dit que f est de **classe** C^2 **sur** D si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D et que les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur D .

Tous les résultats vus dans la partie 3 s'étendent aux fonctions de classe C^1 et C^2 sur un ouvert D de \mathbb{R}^2 .

Exemple 27

On considère la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln(x + y)$ définie sur l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

1. Montrons que g est de classe C^2 sur D .

2. Déterminons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

3. Déterminons le développement limité de g au voisinage de $(1, 0)$.

Exemple 28

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Est-elle continue en $(0, 0)$?

3. Montrons que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0, 0)$.

Remarque 8

Cela montre que l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité ! Il faut l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues (voir la remarque 4).

5 Extrema des fonctions de deux variables

Définition 23 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de \mathbb{R}^2 .

- On dit que f admet un **minimum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \cap D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

- On dit que f admet un **maximum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), r) \cap D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

Remarque 9

1. Un minimum/ maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.
2. Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).
3. Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement unique.

Exemple 29

Soit f la fonction définie sur U par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

où U est une partie de \mathbb{R}^2 .

1. On prend $U = \mathbb{R}^2$.

2. On prend $U = B_f((0, 0), 1)$.

Proposition 12

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 est bornée et atteint ses bornes sur cette partie (elle possède un maximum et un minimum sur cette partie).

Proposition 13 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un **ouvert** U de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in U$.

Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 10

Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy.$$

Définition 24 (Point critique)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in U$.

On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f si $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 11

Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

Méthode 5 (Déterminer les points critiques)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U de \mathbb{R}^2 , pour déterminer ses points critiques on procède de la façon suivante :

1. on s'assure que U est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe C^1 sur U ;
2. on résout le système de deux inconnues à deux équations $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Attention, ce système n'est en général pas linéaire ! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum !

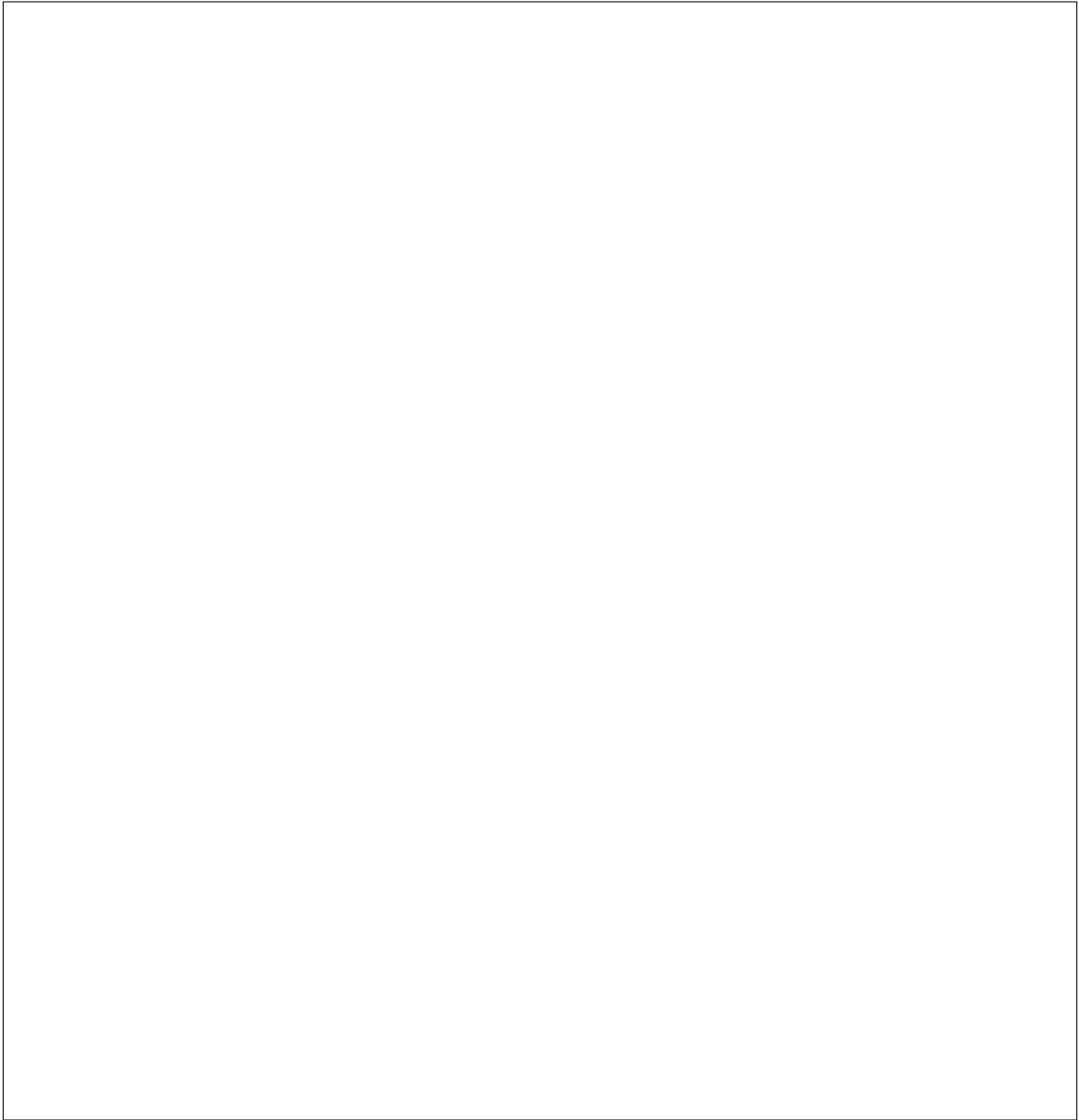
Exemple 30

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

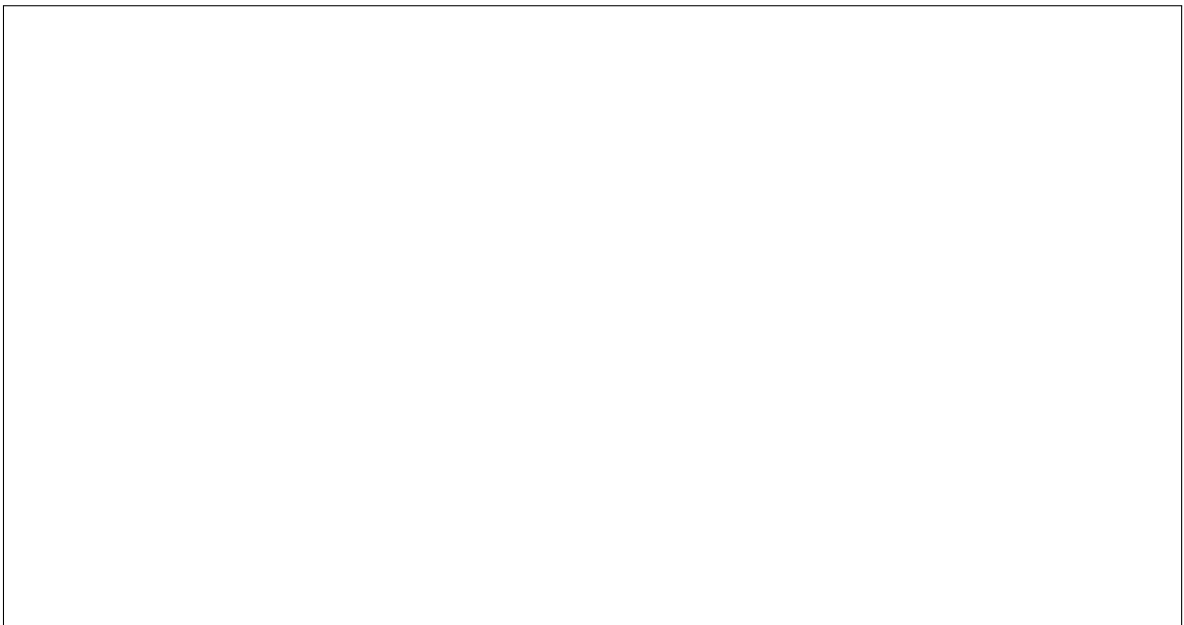
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Cherchons les extrema de f .

1. Recherche des points critiques.



2. *Étude des points critiques.*



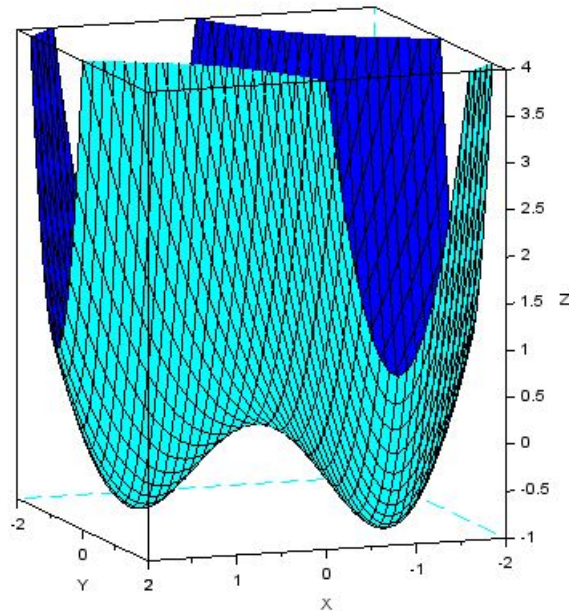


FIGURE 2 – Graphe de la fonction de l'exemple 30

Proposition 14 (Condition suffisante d'existence d'un extremum)

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et soit $(x_0, y_0) \in U$ un point critique de f .

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives alors (x_0, y_0) est un maximum local de f .
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives alors (x_0, y_0) est un minimum local de f .
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés alors (x_0, y_0) n'est pas un extremum de f . On dit que (x_0, y_0) est un **point selle** ou **point col** de f .
- Si l'une des valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure.

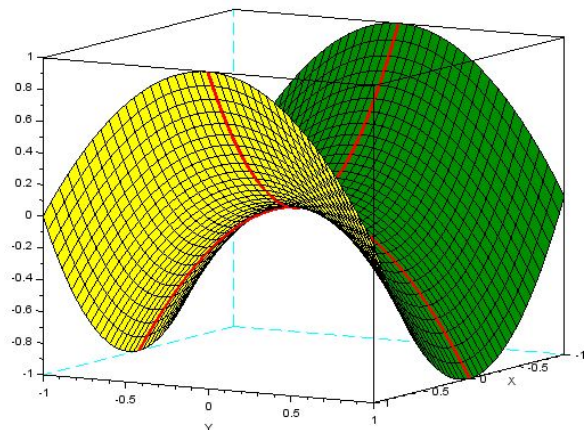
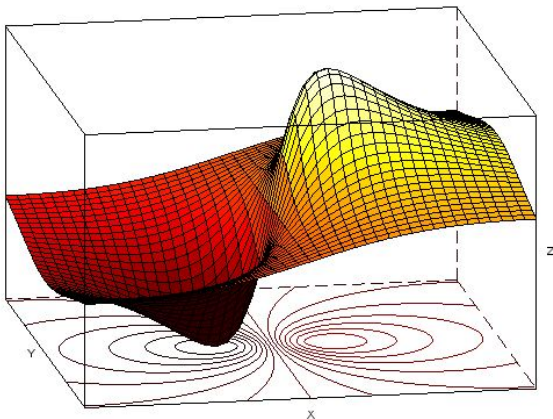


FIGURE 3 – Un minimum (à gauche) et un maximum (à droite)

FIGURE 4 – Un point selle

Méthode 6 (Étudier les extrema)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U de \mathbb{R}^2 , pour déterminer ses extrema locaux on procède de la façon suivante :

1. on s'assure que U est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe C^2 sur U ;
2. on détermine les points critiques de f sur U ;
3. on calcule la hessienne de f en chaque point critique et on détermine ses valeurs propres ;

4. on utilise la proposition 14.

Exemple 31

On reprend la fonction de l'exemple précédent. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$. Déterminons les extrema de f .

1. Calcul de la hessienne.

2. Étude en $(0, 0)$.

3. Étude en $(1, -1)$.

4. Étude en $(-1, 1)$.

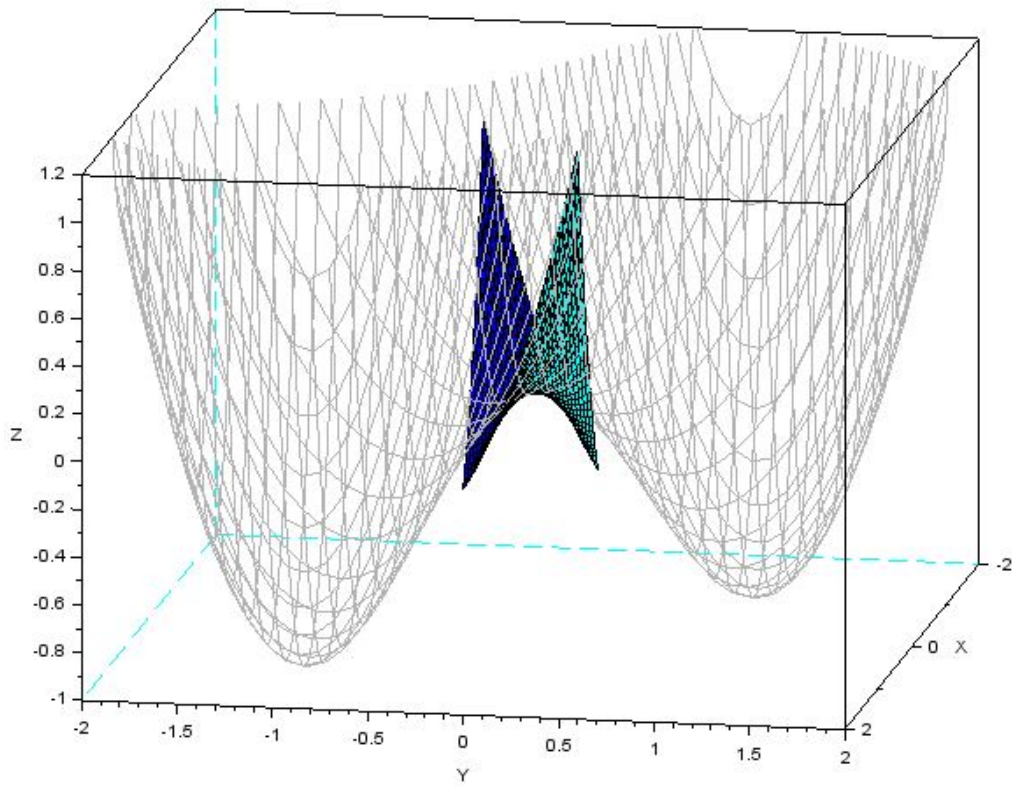


FIGURE 5 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$

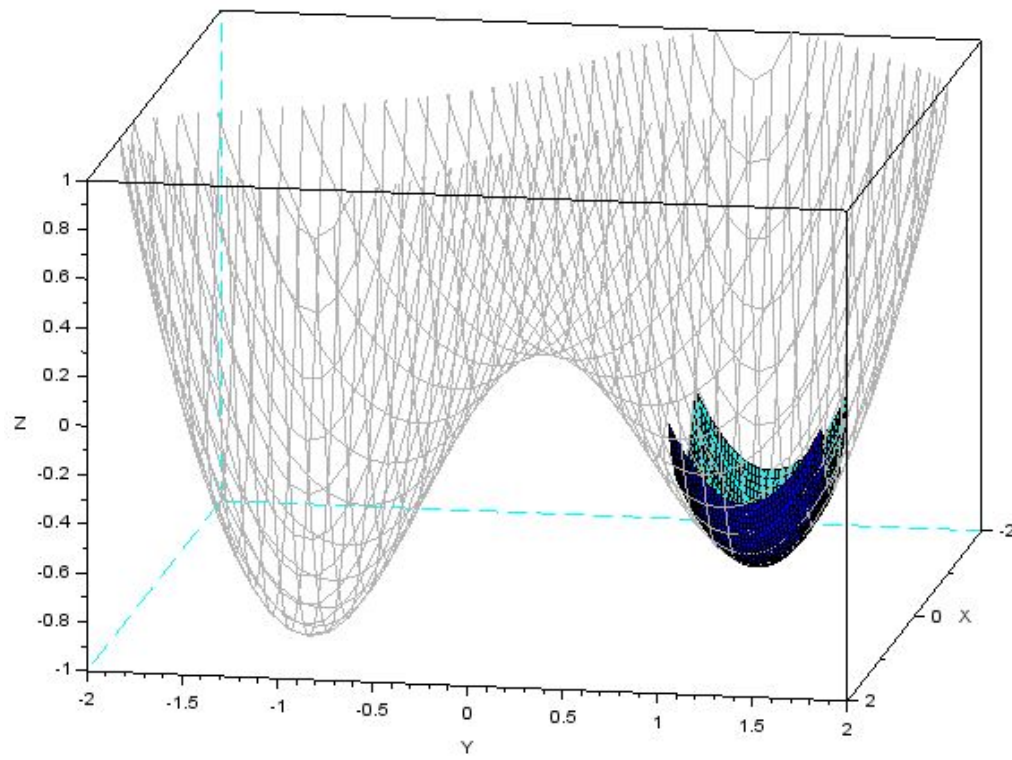


FIGURE 6 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(-1,1)$

Méthode 7 (Déterminer si un extremum est global)

On considère une fonction f définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 .

- Pour montrer que f possède un maximum global (resp. minimum global) en $(x_0, y_0) \in U$, il faut montrer que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) pour tout $(x, y) \in U$ (voir l'exemple 30).
- Pour montrer que f n'a pas d'extremum global, l'énoncé suggère parfois de considérer deux fonctions g et h d'une variable telles que $t \mapsto f(g(t), h(t))$ possède une limite infinie ($-\infty$ pour contredire un minimum et $+\infty$ pour contredire un maximum).

Exemple 32

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$.

Montrons que f ne possède pas d'extremum global en considérant $y \mapsto f(1, y)$.

1. Supposons par l'absurde que f possède un maximum global en un point (x_0, y_0) .

2. Supposons par l'absurde que f possède un minimum global en un point (x_0, y_0) .

Test 10 (Voir solution.)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.
4. Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux?

6 Objectifs

1. Savoir justifier la continuité, le caractère C^1 ou C^2 d'une fonction de deux variables définie sur \mathbb{R}^2 .
2. Savoir calculer les dérivées partielles, le gradient d'une fonction de deux variables.
3. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 2, la hessienne.
4. Savoir déterminer un DL d'ordre 1 ou 2 d'une fonction de deux variables.
5. Savoir déterminer les points critiques.
6. Savoir déterminer la nature des points critiques.