TD7-Séries numériques

Exercice 1.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \times \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Ainsi on obtient, en effectuant le changement de variable $i = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!} - 1 \right).$$

Or la suite $\left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles d'une série exponentielle donc elle converge vers e^2. Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ converge vers $\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

5. Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\frac{k 2^k}{k!} = 2 \times \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k 2^k}{k!} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{i!}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n 2^n}{n!}$ converge vers $2e^2$.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n 2^n}{n!}$ converge et sa somme vaut $2e^2$.

6. Pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{8} \times \frac{n}{4^{n-1}}.$$

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$ est donc, à un facteur $\frac{1}{8}$ près, la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{4}$. Par conséquent, la série converge et sa somme vaut $\frac{2}{9}$.

Exercice 2. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. La famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée) de $\mathbb{R}_3[x]$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme de plus elle est de cardinal $4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$, c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Comme $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$, il existe un unique 4-uplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2).$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 0 on trouve :

$$1 = a.$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 1 on trouve :

$$0 = a + b.$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 2 on trouve :

$$9 = a + 2b + 2c.$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en -1 on trouve :

$$6 = a - b + 2c - 6d.$$

Finalement, $a = 1$, $b = -1$, $c = 5$ et $d = 1$. Les coordonnées de $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ dans la base de la question précédente sont donc $(1, -1, 5, 1)$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} + \frac{5n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}.$$
Or,
   - la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ converge (série exponentielle sans son premier terme) et sa somme vaut $e-1$;
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$
   - pour tout $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ (et le premier terme est nul) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$
   - pour tout $n \geq 3$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$ (et les deux premiers termes sont nuls) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e.$$

   Ainsi, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une somme de séries convergentes donc est convergente et sa somme est
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = e - 1 - e + 5e + e = 6e - 1.$$

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. On a :
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln n + \ln(n+1) - \ln(n).$$
Donc par télescopage :
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$
Ainsi, la série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 4.

1. Soit $n \geq 2$. Comme $n - \sqrt{n} \leq n$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ alors on a :
$$\frac{1}{n-\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$
   Ainsi : $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n-\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

   Les séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ diverge aussi.

2. Soit $n \geq 1$. On sait que : $n! \geq n$. Ainsi : $\sqrt{n}n! \geq n^{\frac{3}{2}}$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :
$$\frac{1}{\sqrt{n}n!} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
   Ainsi : $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}n!} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

   Les séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}n!}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}n!}$ converge aussi.

Exercice 5.

1. Par croissance comparée on sait que :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0.$$
   Donc $e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les séries $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ converge aussi.

2. L'idée ici est de chercher à comparer notre terme général à celui d'une série de Riemann.
   Par croissance comparée, il est évident qu'on ne pourra pas trouver de $a > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^a \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = 0.$

On va donc plutôt chercher un $a \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = +\infty$. Toujours par croissance comparée, on voit que $a = 1$ convient. Cela signifie que :

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right).$$

De plus, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ sont à termes positifs et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ est donc aussi divergente.

Exercice 6.

1. Par équivalent usuel, on sait que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

   Or les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge aussi.

2. Par équivalent usuel, on sait que :

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Ainsi :

$$1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Or les séries $\sum\limits_{n\geq 1}(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1}(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})$ est divergente aussi.

3. Par équivalent usuel, on sait que :

$$e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k^2+1}{k^4+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}.$$

   Or les séries $\sum\limits_{k\geq 1}(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1)$ et $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^2}$ sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{k\geq 1}(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1)$ est convergente aussi.

Exercice 7.

1. Par équivalents usuels :

$$n^3 - n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad 5n^5 + 3n^4 + 2n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5n^5$$

   donc par quotient

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n} \equiv \frac{n^3}{5n^5} = \frac{1}{5n^2}.$$

   Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{5n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{5n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n}$ converge aussi.

2. La série $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$ est à termes quelconques. Étudions l'absolue convergence.

   Pour tout $n \geq 1$, $\frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2} \geq 0$ donc

$$\left|(-1)^n \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}\right| = \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}.$$

   Or, par équivalent usuel, $n^3 - n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. De plus, pour tout $n \geq 1$ on a :

$$e^n + 3n^4 + 2n^2 = e^n(1 + 3\frac{n^4}{e^n} + 2\frac{n^2}{e^n}).$$

   Par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4}{e^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{e^n} = 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3\dfrac{n^4}{e^n} + 2\dfrac{n^2}{e^n} = 1$. Ainsi on a :

$$e^n + 3n^4 + 2n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$$

   et par quotient on obtient :

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{e^n}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature.

Étudions la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$. Par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{n^3}{e^n} = 0$ donc

$$\frac{n^3}{e^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, d'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ est convergente.

Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ étant de même nature, $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ est convergente aussi.

Finalement, on vient de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

3. Par équivalent usuel

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, par croissance de la fonction logarithme, on a :

$$\forall n \geq 1 \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sont donc à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente aussi.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

par équivalent usuel (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$). Les séries $\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge (voir l'exemple 8 du chapitre 7) donc la série $\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$ diverge aussi.

5. La série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est à termes quelconques. Étudions l'absolue convergence.

Pour tout $n \geq 1$, $\left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et par équivalent usuel :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

6. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or par équivalent usuel :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

puis par compatibilité avec le quotient

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge grossièrement.

7. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$3^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(3)} = n^{\ln(3)}.$$

La série est donc une série de Riemann convergente car $\ln(3) > 1$.

8. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$n^{\ln(n)} = e^{\ln(n)^2}.$$
Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{1}{e^{\ln(n)^2}} = 0$. En faisant le changement de variable $X = \ln(n)$, on trouve
$$n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = e^{2X}\frac{1}{e^{X^2}} = e^{2X-X^2}.$$
Or $\lim\limits_{X\to+\infty} 2X - X^2 = -\infty$ donc :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = \lim_{X\to+\infty} e^{2X-X^2} = 0.$$
Ainsi : $\frac{1}{n^{\ln(n)}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Or les séries $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^{\ln n}}$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^{\ln n}}$ est donc convergente.

9. Par croissance comparée on a :
$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(n)}{n^2} = 0.$$
Donc : $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
Or les séries $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\ln n}{n^2}$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\ln n}{n^2}$ est donc convergente.

10. Soit $n \geq 1$.
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
Or les séries $\sum\limits_{n\geq1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ sont à termes positifs et la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum\limits_{n\geq1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ sont de même nature. Par conséquent, $\sum\limits_{n\geq1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge.

11. La série $\sum\limits_{n\geq1}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$ est à termes quelconques ; on va donc étudier son absolue convergence.
Par équivalent usuel :
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$
Par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue on en déduit l'équivalent suivant :
$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$
Les séries $\sum\limits_{n\geq1}\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ et $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq1}\left|\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ converge aussi.
Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq1}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

12. Soit $n \geq 1$.
$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} &= (n+1)^{\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)\\ &= (n+1)^{\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)\\ &= (n+1)^{\frac{1}{4}}\left(1-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right).\end{aligned}$$
Or, par équivalent usuel, on a :
$$\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\times\frac{-2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}.$$
Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit on obtient
$$(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)^{\frac{1}{4}}\times\frac{1}{2n}.$$
Or, par équivalent usuel, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puis par compatibilité avec le passage aux puissances :
$$(n+1)^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}.$$

Finalement, on obtient :

$$(n+1)^{\frac{1}{4}}-(n-1)^{\frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2n}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{\frac{1}{4}}-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}$ étant à termes positifs, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}$ est une série de Riemann divergente donc $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{\frac{1}{4}}-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)$ est divergente aussi.

13. Par croissance comparée on sait que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}=+\infty$. Donc la série diverge grossièrement.

14. Soit $n\geq 1$.

$$\sqrt{n^2-n+2}-n=n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=0$, par équivalent usuel on a :

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=\frac{-n+2}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit, on trouve

$$\sqrt{n^2-n+2}-n=n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n+2}-n=-\frac{1}{2}.$$

Donc la série diverge grossièrement.

15. Soit $n\geq 1$. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Par équivalent usuel on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par compatibilité avec le produit on en déduit :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ puis par équivalent usuel, on trouve :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par transitivité, on a donc

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ sont à termes positifs donc d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, $\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ est divergente aussi.

16. Par croissance comparée

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^7}{n^{\frac{1}{4}}}=0.$$

Donc $\frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.

Or les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$ est donc convergente.

Exercice 8.

1. Soit $x\in[0,1]$. On a donc

$$0\leq x\leq 1$$

et en multipliant membre à membre par x (qui est positif) on obtient

$$0\leq x^2\leq x.$$

2. Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série convergente à termes positifs. Comme la série converge, alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. En particulier, il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq n_0,\quad u_n\leq 1.$$

Comme la série est à termes positifs, on a donc

$$\forall n\geq n_0,\quad u_n\in[0,1].$$

D'après la question précédente, on peut donc conclure que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n^2 \leq u_n.$$

Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, comme $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^2$ converge aussi.

Exercice 9 (Une série convergente mais pas absolument convergente)**.**

1. On a
$$\forall n \geq 1 \quad |u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
La série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est donc une série de Riemann divergente. Ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. (a) • Soit $n \geq 1$. On a :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$
Ainsi : $\forall n \geq 1,\ S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$.
La suie $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

• Soit $n \geq 0$. On a :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \geq S_{2n}$.
La suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est donc croissante.

• Soit $n \geq 1$. Alors :
$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}}.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Ainsi les suites $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

(b) Les suites $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite notée ℓ. Montrons que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon > 0$.
Comme $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$:
$$\forall n \geq n_0, \quad |S_{2n+1} - \ell| \leq \epsilon.$$
Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang impair de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$.
Comme $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$:
$$\forall n \geq n_1, \quad |S_{2n} - \ell| \leq \epsilon.$$
Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang pair de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$.
On en déduit donc qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes (de rang impair et de rang pair) de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$:
$$\forall n \geq \max(2n_0 + 1, 2n_1), |S_n - \ell| \leq \epsilon.$$
Donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

(c) La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 (Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente)**.**

1. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n}.$$
Or :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 0$$
donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$
Ainsi $v_n \sim u_n$ où $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie à l'exercice 9.

2. Supposons que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge. On a vu à l'exercice précédent que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Or pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{1}{n} = v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge donc en tant que différence de séries convergentes : absurde ! Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge.

Exercice 11.

1. On procède par récurrence en utilisant :

$$\forall x \in]0,1], \quad x - x^2 \in]0,1].$$

2. Soit $n \geq 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n - (u_n - u_n^2) = -u_n^2 < 0.$$

Ainsi : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'après la question précédente elle est aussi minorée par zéro donc par convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.
D'après la question 1, on a $\ell \in [0,1]$.
Comme la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x - x^2$ est continue sur $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ alors ℓ est un point fixe de f. Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) = x \iff x - x^2 = x \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Ainsi l'unique point fixe de f est 0 donc $\ell = 0$. Finalement la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.

3. La formule de récurrence donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 = u_n - u_{n+1}.$$

Donc pour tout entier naturel n on obtient par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k^2\right)_{n\geq 0}$ converge vers u_0. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge et sa somme vaut u_0.

4. On utilise encore un télescopage :

$$\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty.$$

Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right)_{n\geq 0}$ diverge donc la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

5. On a :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, par équivalent usuel on obtient :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$

d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors pour tout entier naturel n on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est à termes positifs. Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont à termes positifs, donc avec l'équivalent ci-dessus et d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on déduit qu'elles sont de même nature. Or d'après la question précédente, $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente aussi.

Exercice 12.

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $]1,+\infty[$. De plus

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2} < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

2. Soit un entier k tel que $k \geq 3$. Comme f est décroissante sur $[k-1,k]$ alors :

$$\forall x \in [k-1,k], \quad f(k) \leq f(x) \leq f(k-1).$$

En intégrant cette inégalité entre $k-1$ et k, on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$$

c'est-à-dire :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 3 à n, on obtient

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1).$$

Cela ce ré-écrit, en faisant un changement de variable dans le membre de droite :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

Ainsi :

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Or, par la relation de Chasles, on a : $\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{2}^{n} f(x)dx$. Donc

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculons $\int_2^n f(x)dx$. On remarque que f est de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u = \ln$. Une primitive de f est donc $\ln(u)$. Ainsi

$$\int_2^n f(x)dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

D'après la question précédente, on a donc

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \text{ et } \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Ainsi :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

(c) En divisant membre à membre par $\ln(\ln(n))$ dans l'inégalité précédente on trouve que pour tout $n \geq 2$:

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right)$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right) = 1.$$

Par encadrement, on en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$. Ainsi $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

(a)
- Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &\geq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+2. \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

- Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx \\ &\leq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+1. \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

- Soit $n \geq 2$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx. \end{aligned}$$

Ainsi, par la question 2 (avec $k = n+1$), on a

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n).$$

Par encadrement on obtient : $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

(b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et a pour limite ℓ alors

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \leq \ell.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2, \quad v_n - \ell \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

où la dernière inégalité a été prouvée à la question précédente. De plus, $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et a pour limite ℓ donc

$$\forall n \geq 2, \quad \ell \leq v_n.$$

Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

(c) On en déduit que $0 \leq v_{100} - \ell \leq \frac{1}{10^2 \ln(10^2)} \leq \frac{1}{10^2}$. Ainsi v_{100} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.