Chapitre 2 : Comparaison de suites

Toutes les suites considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles.

1 Relation de négligeabilité

Définition 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Remarque 1

1. *Parfois, on omettra le « $n \to +\infty$ » et on écrira seulement $u_n = o(v_n)$.*
2. *⚠La notation « petit o » (appelé notation de Landau) est un abus d'écriture : $o(v_n)$ ne désigne pas une suite particulière mais toute suite possédant la propriété d'être négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ on n'a pas nécessairement $u_n = w_n$!*

Exemple 1

1. *$n = o(n^2)$.*

2. *$\sqrt{n} = o(n^2)$.*

3. *$e^{-n} = o(1)$.*

4. *Plus généralement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors $u_n = o(1)$ si et seulement si :*

Remarque 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite convergeant vers un réel ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \ell) = 0$ donc $u_n - \ell = o(1)$ ou encore $u_n = \ell + o(1)$.
Réciproquement si $u_n = \ell + o(1)$ où $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Test 1 (*Voir la solution.*)

Que signifie « $u_n = o(0)$ » ?

Test 2 (*Voir la solution.*)

Montrer que $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$ alors :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Démonstration :

■

Exemple 2

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. $u_n = n^2$ et $v_n = n^3$.

2. $u_n = \ln(n)$ et $v_n = n^2$

Test 3 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. $u_n = 5^n$ et $v_n = n^3$.
2. $u_n = \ln(n)^7$ et $v_n = n$.
3. $u_n = n^a$ et $v_n = n^b$ avec $0 < a < b$.

Plus généralement, les croissances comparées se traduisent en terme de négligeabilité de la façon suivante :

Proposition 2 (Croissances comparées)

Soient $q > 1$, $a > 0$ et $b > 0$ des réels. On a :

- $\ln(n)^b \underset{n\to+\infty}{=} o(n^a)$,
- $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$,
- $\ln(n)^b \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n)$.

Exemple 3

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n^5 + n + 1 \quad \text{et} \quad v_n = e^n + 3n^2 + 5.$$

Test 4 (***Voir la solution.***)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 2}$ *définies par*

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{e^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\ln n}.$$

Montrer que $u_n = o(v_n)$.

Proposition 3 (Opérations sur les o)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. (*Transitivité*) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.
2. (*Combinaison linéaire*) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.
3. (*Multiplication par un réel **non nul***) Si $\lambda \neq 0$ et $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = o(\lambda v_n)$.
4. (*Produit*) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

Démonstration :

■

Exemple 4

Comparons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = n^2e^n + 3^n \quad \text{et} \quad v_n = 4^n.$$

Remarque 3

1. *En général, on ne garde pas les constantes multiplicatives à l'intérieur du o grâce au troisième point.*
   Par exemple, si $u_n = o(2n)$ alors $u_n = o(\frac{1}{2}2n) = o(n)$.
   De même, si $u_n = o(2)$ alors $u_n = o(1)$.
2. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*

Test 5 (*Voir la solution.*)

En revenant à la définition de la relation de négligeabilité, démontrer les points 3 et 4 de la proposition.

2 Relation d'équivalence

2.1 Généralités

Définition 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ s'il existe un entier n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 tels que

$$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 4

Parfois, on omettra le « $n\to+\infty$ » et on écrira seulement $u_n \sim v_n$.

Exemple 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$.

Réciproquement :

On n'écrira donc jamais cela!

Exemple 6

Montrons que : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Proposition 4 (Caractérisation)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

En pratique, si à partir d'un certain rang $v_n \neq 0$ alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Démonstration : Exercice ■

Exemple 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = e^n + n^2 + 2 - \frac{1}{n}$. *Montrons que :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.

Test 6 (*Voir la solution.*)

On considère la suite définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = e^n + n^2 + n^3$.

1. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$.
2. *Montrer que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n + n^2$.
3. *A-t-on* $u_n - e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ *?*

Proposition 5 (Opérations sur les équivalents)

Soient $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites et soit $k \in \mathbb{N}$.

1. (*Symétrie*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. (*Transitivité*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
3. (*Produit*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $t_n u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$.
4. (*Inverse*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ avec $t_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{u_n}{t_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{w_n}$.
5. (*Puissance*) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$.
6. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

Démonstration :

■

Remarque 5

1. *Un cas particulier du point 3 en prenant $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :*
   si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$.
2. *Les points 3 et 4 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.*
3. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*
4. ***On n'additionne jamais des équivalents.***
5. ***On ne peut pas appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !***

Test 7 (*Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = n + \sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = n + \ln(n).$$

1. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
2. *A-t-on : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n - n$?*

Test 8 (*Incompatibilité avec la composition, voir la solution.*)

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n+1 \quad \text{et} \quad v_n = n.$$

1. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*
2. *A-t-on : $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$?*

2.2 Calculer un équivalent

2.2.1 Les outils

Proposition 6 (Équivalents usuels)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On a les équivalents usuels suivants :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n \ (a \in \mathbb{R}^*).$$

2. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ avec $a_k \neq 0$. Alors

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^k.$$

Exemple 8

On a :

$$n^2+3n^3+n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{} \quad \text{et} \quad n^3+6n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{}$$

donc :

$$\frac{n^2+3n^3+n^4}{n^3+6n^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{}$$

Proposition 7 (Limite et équivalent)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ **non nul** alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Exemple 9

On cherche la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}.$$

2.2.2 Quelques méthodes

- Pour déterminer un équivalent simple, on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le terme prépondérant, multiplication par la quantité conjuguée…).

  Exemple 10

  1. *On considère la suite suivante :*

     $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , u_n = n - \ln(n)^2.$$

  2. *On considère la suite suivante :*

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

Test 9 (*Voir la solution.*)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$.

Test 10 (*Voir la solution.*)

Déterminer un équivalent simple de la suite définie par : $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$.

- On peut aussi parfois déterminer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'un encadrement par deux suites équivalentes entre elles.

Exemple 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n+1 \leqslant \frac{u_n}{2} \leqslant 2n+2.$$

Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{}$.

Test 11 (*Voir la solution.*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n + \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + 2\sqrt{n}.$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

2.3 Les erreurs à ne pas commettre

1. Il ne faut pas sommer (ou soustraire) les équivalents (voir les tests 6 et 7).
2. On ne compose pas les équivalents : on ne passe pas à l'exponentielle, au logarithme dans un équivalent; cela est faux en général ou demande une justification (voir test 8) !
3. On ne passe pas à la « puissance n » dans un équivalent (où n est l'indice de la suite) : dans la proposition 5.5 l'exposant est indépendant de n (voir TD exercice 4) !
4. On n'écrit jamais $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$: lorsqu'on écrit cela, dans 99,99% des cas c'est qu'on a faux (dans le 0,01% de cas où c'est juste, c'est dire de façon inutilement compliquée que $u_n = 0$ à partir d'un certain rang...)
5. On ne supprime pas les constantes multiplicatives dans les équivalents (contrairement à ce qu'on a pu voir sur les o) :

$$u_n = o(2e^n) \iff u_n = o(e^n)$$

mais

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^n \quad \text{n'a rien avoir avec} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n.$$

3 Objectifs

1. Connaître et avoir compris la définition de suite négligeable devant une autre, de suites équivalentes.
2. Savoir montrer que deux suites sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
3. Connaître par coeur les croissances comparées en terme de petits o et les équivalents usuels.
4. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.
5. Savoir déterminer un équivalent par encadrement ou de manière directe.