DM 1 : Correction

Exercice 1

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 3a_n + b_n \\ 3b_n + c_n \\ 3c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Pour tout entier naturel n, soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $X_n = A^n X_0$ ». Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation** : $A^0 X_0 = X_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que :
  $$X_n = A^n X_0.$$
  Donc, d'après ce qui précède on a :
  $$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$
  Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence on a montré :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

2. Un calcul montre que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Par suite, pour tout $p \geqslant 3$ on a :
$$N^p = N^3 N^{p-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} N^{p-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

3. Pour tout entier naturel n, soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2$ ». Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation** : $A^0 = I_3$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que :
  $$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
  Donc on a :
  $$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= A(3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2) \\ &= 3^n A + 3^{n-1} nAN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} AN^2. \end{aligned}$$
  Or, $A = 3I_3 + N$ et $N^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ donc :
  $$\begin{aligned} A^{n+1} &= 3^n A + 3^{n-1} nAN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} AN^2 \\ &= 3^n (3I_3 + N) + 3^{n-1} n(3I_3 + N)N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} (3I_3 + N)N^2 \\ &= 3^{n+1} I_3 + 3^n N + 3^n nN + 3^{n-1} nN^2 + 3^{n-1} \frac{n(n-1)}{2} N^2 + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^3 \\ &= 3^{n+1} I_3 + 3^n (n+1)N + 3^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} N^2. \end{aligned}$$
  Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence on a montré :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2..$$

4. D'après les questions précédentes, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} n & 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1} n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + 2n3^{n-1} + 7\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 2 \times 3^n + 7n3^{n-1} \\ 7 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. La variable Z_1 est égale au nombre de numéros distincts obtenus en un tirage. Ainsi Z_1 suit la loi certaine égale à 1. En particulier Z_1 possède une espérance et $E(Z_1) = 1$.
   La variable Z_2 est égale au nombre de numéros distincts obtenus en deux tirages, donc
$$Z_2(\Omega) = \{1, 2\}.$$
   L'événement $[Z_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire deux fois de suite la même boule, d'où :
$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^1 \cap U_i^2$$
   où U_i^j est l'événement « obtenir la boule i au j-ième tirage ».
   Comme les événements $\left(U_i^1 \cap U_i^2\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont disjoints et que les tirages sont indépendants, on obtient :
$$P(Z_2 = 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i^1 \cap U_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(U_i^1 \cap U_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(U_i^1\right) P\left(U_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$
   On en déduit
$$P(Z_2 = 2) = 1 - P(Z_2 = 1) = 1 - \frac{1}{n}.$$
   Enfin, Z_2 étant à support fini, elle possède une espérance et :
$$E(Z_2) = 1 \times P(Z_2 = 1) + 2 \times P(Z_2 = 2) = 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Soit $k \geqslant 1$.
   (a) La variable Z_k est égale au nombre de numéros distincts obtenus en k tirages, donc l'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire k fois de suite la même boule, d'où :
$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^k$$
   où U_i^j est l'événement « obtenir la boule i au j-ième tirage ».
   Comme les événements $\left(U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^k\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont disjoints et que les tirages sont indépendants, on obtient :
$$P(Z_k = 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^k\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(U_i^1 \cap \cdots \cap U_i^k\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(U_i^1\right) \times \cdots \times P\left(U_i^k\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}.$$
   Comme l'urne ne contient que n boules, si $k > n$ alors $P(Z_k = k) = 0$.
   Si $k \leqslant n$, l'événement $[Z_k = k]$ est réalisé si et seulement si on tire k boules différentes : cela fait n possibilités pour la première boule, $n-1$ possibilités pour la deuxième … D'où
$$P(Z_k = k) = \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} = \frac{n!}{n^{k-1}(n-k)!} \quad \text{si } k \leqslant n.$$
   (b) Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. Comme $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, la famille $([Z_k = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :
$$P(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{i=1}^{n} P(Z_k = i) P_{[Z_k = i]}(Z_{k+1} = \ell).$$
   Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, si $i \notin \{\ell, \ell - 1\}$ alors $P_{[Z_k = i]}(Z_{k+1} = \ell) = 0$ donc
$$P(Z_{k+1} = \ell) = P(Z_k = \ell - 1) P_{[Z_k = \ell - 1]}(Z_{k+1} = \ell) + P(Z_k = \ell) P_{[Z_k = \ell]}(Z_{k+1} = \ell).$$
   Enfin :
   — sachant que $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé pour que $[Z_{k+1} = \ell]$ se réalise il faut tirer, au $(k+1)$-ième tirage, l'une des $n - (\ell - 1)$ boules n'ayant pas été tirées au cours des k premiers tirages donc
$$P_{[Z_k = \ell - 1]}(Z_{k+1} = \ell) = \frac{n - \ell + 1}{n};$$

— sachant que $[Z_k=\ell]$ est réalisé pour que $[Z_{k+1}=\ell]$ se réalise il faut tirer, au $(k+1)$-ième tirage, l'une des ℓ boules ayant déjà été tirées au cours des k premiers tirages donc

$$P_{[Z_k=\ell]}(Z_{k+1}=\ell)=\frac{\ell}{n}.$$

Ainsi :

$$P(Z_{k+1}=\ell)=\frac{n-\ell+1}{n}P(Z_k=\ell-1)+\frac{\ell}{n}P(Z_k=\ell).$$

(c) La variable aléatoire Z_{k+1} est à support fini donc possède une espérance donnée par

$$E(Z_{k+1})=\sum_{i=1}^{n} iP(Z_{k+1}=i).$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned}
E(Z_{k+1})=\sum_{i=1}^{n} iP(Z_{k+1}=i)&=\sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n-i+1}{n}P(Z_k=i-1)+\frac{i}{n}P(Z_k=i)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i(n-i+1)P(Z_k=i-1)+\sum_{i=1}^{n} i^2P(Z_k=i)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)P(Z_k=j)+\sum_{i=1}^{n} i^2P(Z_k=i)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\underbrace{nP(Z_k=0)}_{=0}+\sum_{j=1}^{n-1}\left((j+1)(n-j)+j^2\right)P(Z_k=j)+n^2P(Z_k=n)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(nj+n-j\right)P(Z_k=j)+n^2P(Z_k=n)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n-1} njP(Z_k=j)+\sum_{j=1}^{n-1} nP(Z_k=j)-\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j)+n^2P(Z_k=n)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} njP(Z_k=j)+\sum_{j=1}^{n-1} nP(Z_k=j)-\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(nE(Z_k)+n(1-P(Z_k=n))-\sum_{j=1}^{n-1} jP(Z_k=j)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(nE(Z_k)+n-\sum_{j=1}^{n} jP(Z_k=j)\right)\\
&=\frac{1}{n}\left(nE(Z_k)+n-E(Z_k)\right)\\
&=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1.
\end{aligned}$$

3. Soit $k\geqslant 1$. Alors on a :

$$u_{k+1}=E(Z_{k+1})-n=\frac{n-1}{n}E(Z_k)+1-n=\frac{n-1}{n}(E(Z_k)-n)=\frac{n-1}{n}u_k.$$

Ainsi : $\forall k\geqslant 1,\ u_{k+1}=\frac{n-1}{n}u_k$.
La suite $(u_k)_{k\geqslant 1}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{n-1}{n}$.

4. D'après la question précédente, on sait que :

$$\forall k\geqslant 1\quad u_k=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}u_1=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}(1-n).$$

Donc, on obtient :

$$\forall k\geqslant 1,\quad E(Z_k)=n+u_k=n+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}(1-n)=n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right).$$

Exercice 3

1. (a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}.$$

   (b) D'après la question précédente, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) On a vu que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f''(x) = -\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}.$$

2. On sait que : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi par composition des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+x^2) = +\infty.$$

   Par différence, on trouve donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

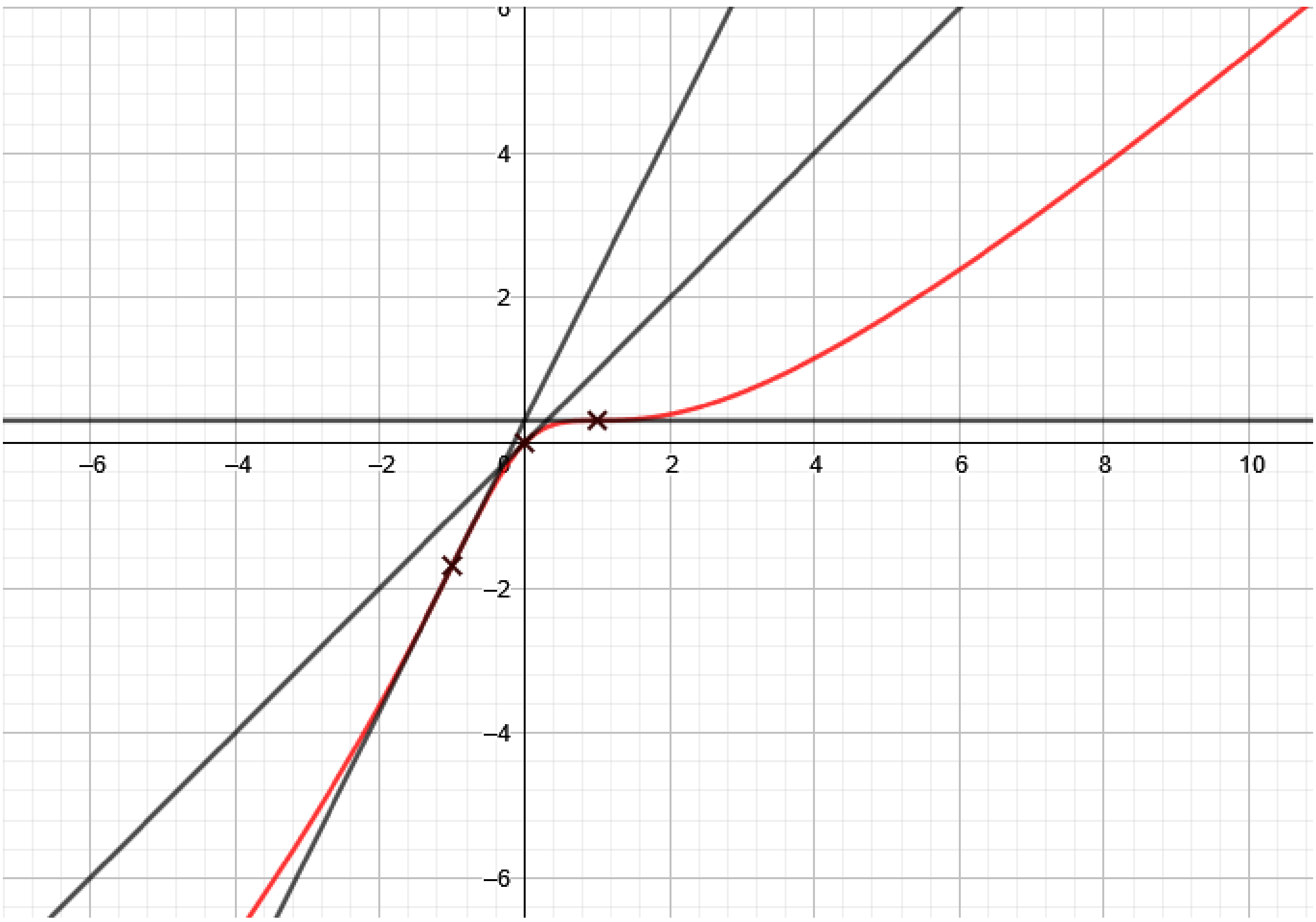
   Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = x\left(1 - \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x}\right) = x\underbrace{\left(1 - \frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}.$$

   Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. La courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion au point d'abscisse x si et seulement si f'' change de signe en x. D'après la question 1.c, la courbe possède donc deux points d'inflexion : en -1 et en 1.

4. On obtient :



5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\ln(1+u_n^2) \leqslant 0.$$

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

(b) La suite étant décroissante, si on montre qu'elle est minorée alors elle convergera d'après le théorème de la limite monotone.

Pour tout entier naturel n, soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n \geqslant 0$ ». Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que :
  $$u_n \geqslant 0.$$
  Donc, par croissance de f on a :
  $$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(0) = 0.$$
  Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence on a montré :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ. De plus, f étant continue sur $\mathbb{R}$, on sait que ℓ est un point fixe de f.

Déterminons les points fixes de f. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \ln(1+x^2) = 0 \Longleftrightarrow 1 + x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Ainsi 0 est l'unique point fixe de f.

Donc $\ell = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c)
```
u = 1
n = 0
while u > 10^(-3)
    u = u - log(1+u^2)
    n = n + 1
end
disp(n)
```

(d) i. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) - x + \frac{1}{2}x^2.$$

En tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,1]$ la fonction g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$g'(x) = f'(x) - 1 + x = -\frac{2x}{1+x^2} + x = \frac{x(x^2-1)}{1+x^2} \leqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[0,1]$ et donc :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) \leqslant g(0) = 0.$$

Donc

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait d'après 5.b que : $u_n \geqslant 0$. De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 = 1$ donc : $u_n \leqslant 1$. Ainsi, par la question précédente on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n - \frac{u_n^2}{2}.$$

Donc : $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$. On a ainsi montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1}).$$

iii. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. En sommant l'inégalité précédente pour n allant de 0 à N on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n^2 \leqslant 2\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (u_n - u_{n+1}) = 2(u_0 - u_{\mathrm{N}}) \leqslant 2u_0.$$

La suite $\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n^2\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ étant croissante (pourquoi?) et majorée elle converge.

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Problème (Cube)

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

1. On a : $(X \geqslant 1) = \overline{(X = 0)}$, donc :
$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p = q.$$
Par hypothèse, on sait que : $q = P(X \geqslant 1) > 0$. De plus, $p > 0$ donc $q < 1$. Ainsi
$$0 < q < 1.$$

2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Comme $(X \geqslant m) \cap (X \geqslant m + n) = (X \geqslant m + n)$ alors
$$P(X \geqslant m + n) = P\left((X \geqslant m) \cap (X \geqslant m + n)\right) = P_{(X=m)}(X \geqslant m + n)P(X \geqslant m) = P(X \geqslant n)P(X \geqslant m)$$
car $P_{(X=m)}(X \geqslant m + n) = P(X \geqslant n)$ par hypothèse. Ainsi :
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P(X \geqslant m + n) = P(X \geqslant n)P(X \geqslant m).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après la question précédente :
$$u_{n+1} = P(X \geqslant n + 1) = P(X \geqslant 1)P(X \geqslant n) = P(X \geqslant 1)u_n = qu_n.$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = qu_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison q.

   (b) D'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0 = q^n.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$(X \geqslant n) = (X = n) \bigcup (X \geqslant n + 1)$$
avec $(X = n) \cap (X \geqslant n + 1) = \varnothing$. Par conséquent :
$$P(X \geqslant n) = P\left((X = n) \bigcup (X \geqslant n + 1)\right) = P(X = n) + P(X \geqslant n + 1).$$
D'où :
$$P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1).$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1)$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions 3.a et 3.b on a :
$$P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n + 1) = q^n - q^{n+1} = q^n(1 - q) = q^n p.$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}\ P(X = n) = q^n p$.

4. (a) Le support de $X + 1$ est $\mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = q^{k-1} p.$$
Ainsi, $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

   (b) Cours.

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $P(Y \geqslant n) > 0$ et que $P(Y \geqslant n, Y = n) = P(Y = n)$ on a :
$$\lambda_n = P_{(Y\geqslant n)}(Y = n) = \frac{P(Y \geqslant n, Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)}.$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :
$$1 - \lambda_n = 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \frac{P(Y \geqslant n) - P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)} = \frac{P(Y \geqslant n + 1)}{P(Y \geqslant n)} \quad \text{d'après 3.c.}$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n + 1)}{P(Y \geqslant n)}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on sait que $\lambda_n \geqslant 0$.
On sait aussi que $P(Y \geqslant n) > 0$ et $P(Y \geqslant n+1) > 0$ donc d'après la question précédente : $1 - \lambda_n > 0$. Ainsi :

$$0 \leqslant \lambda_n < 1.$$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \lambda_n < 1$.

(d) Pour tout entier naturel non nul n, soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$ ». Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation** : $\prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k) = 1 - \lambda_0 = \frac{P(Y\geqslant 1)}{P(Y\geqslant 0)} = P(Y \geqslant 1)$. Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité** : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

Or on a vu en 1.b que

$$P(Y \geqslant n+1) = (1-\lambda_n)P(Y \geqslant n).$$

Ainsi

$$P(Y \geqslant n+1) = (1-\lambda_n)P(Y \geqslant n) = (1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) = \prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k).$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k).$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1 - P(Y \geqslant n) = P(Y < n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(Y = k)\right).$$

Or les événements $(Y = k)$, $k = 0, \dots, n-1$ sont deux à deux disjoints donc :

$$1 - P(Y \geqslant n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}(Y = k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k).$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.

(b) Comme le support de Y est inclus dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(Y = k)$ converge et sa somme vaut 1. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - P(Y \geqslant n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y \geqslant n) = 0.$$

(c) Par hypothèse, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1.d on a :

$$\ln(P(Y \geqslant n)) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = -\ln(P(Y \geqslant n)).$$

Or, d'après la question précédente et par composition des limites, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(P(Y \geqslant n)) = \lim_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty.$$

Ainsi : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$.

(d) On distingue deux cas.

- Soit la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 ; dans ce cas la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ diverge grossièrement.
- Soit la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ; dans ce cas par équivalent usuel on a :

$$-\ln(1-\lambda_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda_n.$$

Les séries $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -\ln(1-\lambda_n)$ étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} -\ln(1-\lambda_n)$ sont de même nature.

Or, d'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 0} -\ln(1-\lambda_n)$ est divergente donc $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ est divergente aussi.

Dans tous les cas, la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ diverge.

3. (a) Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle renvoie $n!$:

```
function z=factorielle(n)
    z = 1
    if n == 0 then
        z = 1
    else
        z = n*factorielle(n-1)
    end
endfunction
```

(b) Le programme retourne la valeur de a^n.

(c)

```
  n = input('entrer en entier n:')
  a = input('entrer un reel a:')
  somme = 1
  for k = 1:(n-1)
    somme = somme + g(k+1)/factorielle(k)
  end
  disp(exp(-a)*somme)
```

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1. D'après les questions 3.b et 3.d de la partie 1 on a, pour tout entier naturel n :

$$P(X\geqslant n) = q^n \quad \text{et} \quad P(X=n) = q^n p.$$

D'après la question 1.a de la partie 2 on en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda_n = \frac{P(Y=n)}{P(Y\geqslant n)} = p.$$

2. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, P(Z\geqslant n)>0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}, \lambda_n=\lambda$.

(a) D'après la question 1.c de la partie 2, on sait que

$$0\leqslant\lambda<1.$$

De plus, si $\lambda=0$ alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(Z=n)=0$ d'après la question 1.a de la partie 2. Comme Z est à support dans $\mathbb{N}$ cela est impossible. Donc finalement :

$$0<\lambda<1.$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$P(Z\geqslant n+1) = P(Z\geqslant n) - P(Z=n).$$

Or, $P(Z=n)=\lambda P(Z\geqslant n)$ donc :

$$P(Z\geqslant n+1) = P(Z\geqslant n) - P(Z=n) = P(Z\geqslant n) - \lambda P(Z\geqslant n) = (1-\lambda)P(Z\geqslant n).$$

Ceci étant valable pour tout $n\in\mathbb{N}$, on en déduit que la suite $(P(Z\geqslant n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1-\lambda$. Par conséquent :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P(Z\geqslant n) = (1-\lambda)^n P(Z\geqslant 0) = (1-\lambda)^n.$$

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telle que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$. Il s'agit de montrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(Z \geqslant m)}(Z \geqslant n+m) = P(Z \geqslant n).$$

Soit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} P_{(Z \geqslant m)}(Z \geqslant n+m) &= \frac{P(Z \geqslant m, Z \geqslant m+n)}{P(Z \geqslant m)} \\ &= \frac{P(Z \geqslant m+n)}{P(Z \geqslant m)} \quad \text{car } (Z \geqslant m) \cap (Z \geqslant m+n) = (Z \geqslant m+n) \\ &= \frac{(1-\lambda)^{m+n}}{(1-\lambda)^m} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= (1-\lambda)^n \\ &= P(Z \geqslant n) \quad \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(Z \geqslant m)}(Z \geqslant n+m) = P(Z \geqslant n).$$