Exercice 1

1. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i-ème lancer donne Pile » et F_i l'événement « le i-ème lancer donne Face ».

   - L'événement $[X=0]$ est égal à l'événement $P_1 \cap P_2$. Donc on trouve :

$$P([X=0]) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) = \frac{4}{9}.$$

   - L'événement $[X=1]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Donc on trouve :

$$\begin{aligned}
P([X=1]) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\
&= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{car } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles} \\
&= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(P_3) + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(P_3) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\
&= \frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

   - L'événement $[X=2]$ est égal à l'événement $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$. Donc on trouve :

$$\begin{aligned}
P([X=2]) &= P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)) \\
&= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \ \text{(événements incompatibles)} \\
&= P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 \cap F_2}(P_3)P_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(P_4) + P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(F_3)P_{F_1 \cap P_2 \cap F_3}(P_4) \\
&+ P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(F_3)P_{P_1 \cap F_2 \cap F_3}(P_4) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{4}{27}.
\end{aligned}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X=n]$ signifie qu'il y a eu $n+2$ tirages (n Faces et 2 Piles), que le dernier tirage est une Pile et que le premier Pile a été obtenu lors d'un des $n+1$ tirages. Ainsi :

$$[X=n] = \bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right).$$

   Comme les événements $\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right)$ pour $i = 1, \dots, n+1$ sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned}
P([X=n]) &= P\left(\bigcup_{i=i}^{n+1} \left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n+1} F_j \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

2. (a) On a $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(U=n) \geqslant P(X=n, U=n) = P_{[X=n]}(U=n)P(X=n) = \frac{1}{n+1}P(X=n) > 0.$$

   Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X = n]$, l'urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n indiscernables. Donc la loi de U sachant $[X = n]$ est une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Ainsi on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ et comme d'après la question précédente, pour tout $n < k$, $P_{[X=n]}(U = k) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(U = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la question 1)b), on trouve :

$$\begin{aligned} P(U = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{9} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

(d) La variable aléatoire U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k)$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Montrons qu'elle est convergente. On a :

$$\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k) = \sum_{k\geqslant 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k\geqslant 0} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{3}$ (donc convergente). Par conséquent, la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} kP(U = k)$ converge. On peut donc conclure que U possède une espérance et :

$$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que U possède une variance, il suffit de montrer que U possède un moment d'ordre 2 c'est-à-dire que $\sum_{k\geqslant 0} k^2 P(U = k)$ converge absolument. Cette série est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 P(U = k) = k^2 \frac{2}{3^{k+1}} &= (k(k-1) + k) \frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{3^3} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0} k^2 P(U = k)$ est combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{3}$ toutes deux convergentes (car $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$). Ainsi la série converge et on a :

$$E(U^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) = \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1.$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens on trouve

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $U+1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

3. (a) On a toujours $0 \leqslant U \leqslant X$ donc $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(V = n) \geqslant P(X = 2n, U = n) = P_{[X=2n]}(U = n)P(X = 2n) > 0.$$

Donc $V(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
P_{[X=n]}(V = k) = P_{[X=n]}(X - U = k) = P_{[X=n]}(n - U = k) &= P_{[X=n]}(U = n - k) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n-k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[X = n]$, V suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

(c) Le même calcul qu'en 2.c) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

4. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
P(U = n, V = k) = P(U = n, X - U = k) &= P(U = n, X = n + k) \\
&= P_{[X=n+k]}(U = n)P(X = n + k) \\
&= \frac{1}{n+k+1} \times \frac{4(n+k+1)}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{4}{3^{n+k+2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après 2.c et 3.c :

$$P(U = n)P(V = k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout $(n, k) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$ on a :

$$P(U = n, V = k) = P(U = n)P(V = k).$$

Les variables aléatoires U et V sont donc indépendantes.

5. D'après la question précédente les variables aléatoires U et V sont indépendantes donc $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on obtient :

$$\mathrm{Cov}(X,U) = \mathrm{Cov}(U+V,U) = \mathrm{Cov}(U,U) + \mathrm{Cov}(V,U) = V(U) + \mathrm{Cov}(U,V) = V(U) = \frac{3}{4}.$$

6. (a)

```
import numpy as np
def simule_X():
        nb_pile=0
        nb_face=0
        while nb_pile<2 :
                if np.rand()<2/3:
                        nb_pile=nb_pile+1
                else:
                        nb_face=nb_face+1
        return nb_face
```

(b) La fonction `mystere` renvoie la fréquence de victoire du joueur A lors de 10 000 parties.

(c) En ordonnée, on lit la probabilité que A gagne : elle est d'environ $\frac{1}{2}$ lorsque que p vaut environ 0,8.

7. (a) La variable aléatoire Z donne le rang du premier Pile et suit donc une loi géométrique de paramètre p. Ainsi on a :

$$E(Z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(b) On a $Y+1=Z$ donc Y possède une espérance et une variance données par :

$$E(Y)=E(Z-1)=E(Z)-1=\frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad V(Y)=V(Z-1)=V(Z)=\frac{1-p}{p^2}.$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(Y\geqslant n)=P(Z-1\geqslant n)=P(Z\geqslant n+1) &= 1-P(Z<n+1)\\
&= 1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}[Z=i]\right)\\
&= 1-\sum_{i=1}^{n}P(Z=i)\\
&= 1-\sum_{i=1}^{n}p(1-p)^{i-1}\\
&= 1-p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\\
&= (1-p)^n.
\end{aligned}$$

8. (a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on sait que :

$$\begin{aligned}
P(X\leqslant Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,X\leqslant Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,n\leqslant Y)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)P(n\leqslant Y) \quad \text{car les joueurs sont indépendants}
\end{aligned}$$

(b) D'après les questions précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned}
P(X\leqslant Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)P(n\leqslant Y)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\times\frac{4}{3^{n+2}}\times(1-p)^n\\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\times\left(\frac{1-p}{3}\right)^n\\
&= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}n\times\left(\frac{1-p}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\times\left(\frac{1-p}{3}\right)^n\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1-p}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}n\times\left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{1-\frac{1-p}{3}}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1-p}{3}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{3}\right)^2}+\frac{1}{1-\frac{1-p}{3}}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1-p}{3}\times\frac{9}{\left(2+p\right)^2}+\frac{3}{2+p}\right)\\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

(c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité que A gagne vaut $\frac{1}{2}$. Or, la probabilité que A gagne est $P(X\leqslant Y)$. Ainsi, le jeu est équilibré si et seulement si $\frac{4}{(2+p)^2}=\frac{1}{2}$. Or, on a :

$$\frac{4}{(2+p)^2}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow 8=(2+p)^2\Longleftrightarrow p^2+4p-4=0\Longleftrightarrow p=-2+2\sqrt{2} \text{ ou } p=-2-2\sqrt{2}.$$

Comme $p>0$, le jeu est équilibré si et seulement si $p=-2+2\sqrt{2}$ (on remarque que $-2+2\sqrt{2}$ vaut environ $0,8$ donc cohérent avec la question précédente).

Exercice 2

Partie A

1. (a) Soient $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'))\\
&= \left(\frac{-(x+\lambda x')+2(y+\lambda y')+z+\lambda z'}{3}, \frac{-(x+\lambda x')-(y+\lambda y')-2(z+\lambda z')}{3}, \frac{x+\lambda x'+y+\lambda y'+2(z+\lambda z')}{3}\right)\\
&= \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3}\right)+\lambda\left(\frac{-x'+2y'+z'}{3}, \frac{-x'-y'-2z'}{3}, \frac{x'+y'+2z'}{3}\right)\\
&= f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).$$

Ainsi f est linéaire. Il est alors clair que c'est une endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\ker(f) &\iff f((x,y,z))=(0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\\ x &+& y &+& 2z &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ -x &-& y &-& 2z &=& 0\end{array}\right. \qquad \text{car } L_3=-L_2\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x &+& 2y &+& z &=& 0\\ &-& 3y &-& 3z &=& 0\end{array}\right. \qquad L_2\leftarrow L_2-L_1\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z\\ y &=& -z\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(-z,-z,z), z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((-1,-1,1)).$$

Le vecteur $(-1,-1,1)$ est un vecteur générateur de $\ker(f)$ non nul donc c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f))=1$ et f n'est pas injective.

(c) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(E)=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f), \quad \text{càd} \quad 3=1+\mathrm{rg}(f).$$

Ainsi f est de rang 2. Comme $\dim(\mathbb{R}^3)=3$, on a donc $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

(d) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
f^2((x,y,z)) &= \frac{1}{3}f((-x+2y+z,-x-y-2z,x+y+2z))\\
&= \frac{1}{3}((-x+y+z)f((1,0,0))+(-x-y-2z)f((0,1,0))+(x+y+2z)f((0,0,1))) \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{1}{3}((-x+y+z)(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(-x-y-2z)(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})+(x+y+2z)(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}))\\
&= \frac{1}{9}((-x+y+z)(-1,-1,1)+(-x-y-2z)(2,-1,1)+(x+y+2z)(1,-2,2))\\
&= \frac{1}{9}((x-y-z,x-y-z,-x+y+z)+(-2x-2y-5z,x+y+2z,-x-y-2z)\\
&\quad +(x+y+2z,-2x-2y-4z,2x+2y+4z))\\
&= \frac{1}{9}(-3y-3z,-3y-3z,3y+3z)\\
&= \frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z).
\end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{3}(-y-z,-y-z,y+z)=\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\in\ker(f)$, on trouve donc :

$$f^3((x,y,z))=f(f^2((x,y,z)))=f\left(\frac{x+y}{3}(-1,-1,1)\right)=\frac{x+y}{3}f((-1,-1,1))=(0,0,0).$$

Ainsi

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad f^2((x,y,z))=\left(\frac{-y-z}{3}, \frac{-y-z}{3}, \frac{y+z}{3}\right) \quad \text{et} \quad f^3((x,y,z))=(0,0,0).$$

2. Soit g un tel endomorphisme de E. On remarque que

$$g(e_1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_1)\ ;\ g(e_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_2)\ ;\ g(e_3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = f(e_3).$$

Ainsi, f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui coïncident sur la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Donc $f = g$.

3. (a) Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0,0,0) &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \text{ et } \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On trouve :

$$f(e'_1) = (0,0,0) \quad ; \quad f(e'_2) = e'_1 \quad ; \quad f(e'_3) = e'_2.$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}((0,0,0), e'_1, e'_2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. On note A la matrice de f dans la base canonique :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) On a : $\mathrm{M} = -\mathrm{A} + \mathrm{I}_3$.

(b) D'après la question précédente :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f).$$

Ainsi : $h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f$. On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(h) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - f) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après la question précédente $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(h)$ est inversible car triangulaire à coefficient diagonaux non nuls. Donc h est bijective et ainsi M est inversible.

(d) D'après la question 4.(a), $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)^3 = (-\mathrm{A})^3 = -\mathrm{A}^3$. Or f^3 est l'endomorphisme nul d'après 1.d. Donc :

$$0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^3) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^3 = \mathrm{A}^3.$$

Ainsi :

$$(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)^3 = (-\mathrm{A})^3 = -\mathrm{A}^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

D'autre part, avec la formule du binôme de Newton (M et I_3 commutent) :

$$(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)^3 = \mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M}^2 + 3\mathrm{M} - \mathrm{I}_3.$$

On en déduit donc :

$$\mathrm{I}_3 = \mathrm{M}^3 - 3\mathrm{M}^2 + 3\mathrm{M} = \mathrm{M}(\mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M} + 3\mathrm{I}_3).$$

Par conséquent :

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^2 - 3\mathrm{M} + 3\mathrm{I}_3.$$

(e) On sait que :

$$\mathrm{M} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{A}.$$

Or on a vu dans la question précédente que $\mathrm{A}^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. En particulier :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathrm{A}^n = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

D'après la formule du binôme de Newton (A et I_3 commutent) :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^n = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathrm{A})^k \mathrm{I}_3^{n-k} \\ &= \mathrm{I}_3 - n\mathrm{A} + \frac{n(n-1)}{2}\mathrm{A}^2.\end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^{-1} &= (\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})^2 - 3(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) + 3\mathrm{I}_3 \\ &= \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2\end{aligned}$$

La formule donnée est donc valide pour $n = -1$.

Partie B

1. Comme par hypothèse $g \circ g = f$ alors

$$g \circ f = g \circ g \circ g = f \circ g^2 = f \circ g.$$

2. (a) Calculons $f(g(e_1'))$:

$$f(g(e_1')) = (f \circ g)(e_1') = (g \circ f)(e_1') = g(f(e_1')) = g((0,0,0)) = (0,0,0).$$

Donc $g(e_1')$ appartient au noyau de f. Or, d'après la question 1.a de la partie A, on sait que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$. Ainsi, $g(e_1')$ appartient $\mathrm{Vect}(e_1')$: il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_1') = ae_1'$.

(b) Calculons $f(g(e_2') - ae_2')$:

$$\begin{aligned}f(g(e_2') - ae_2') &= f(g(e_2')) - af(e_2') \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e_2')) - ae_1' \quad \text{car } f \circ g = g \circ f \quad \text{et } f(e_2') = e_1' \\ &= g(e_1') - ae_1' \\ &= 0 \quad \text{car } g(e_1') = ae_1'.\end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_2') - ae_2'$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$. Donc, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$, c'est-à-dire

$$g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$

(c) Comme $f \circ g = g \circ f$, on a :

$$f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = ae_2' + be_1'.$$

Calculons $f(g(e_3') - ae_3' - be_2')$:

$$\begin{aligned}f(g(e_3') - ae_3' - be_2') &= f(g(e_3')) - af(e_3') - bf(e_2') \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e_3')) - ae_2' - be_1' \quad \text{car } f \circ g = g \circ f, \quad f(e_3') = e_2' \quad \text{et } f(e_2') = e_1' \\ &= g(e_2') - ae_2' - be_1' \\ &= 0 \quad \text{car } g(e_2') = ae_2' + be_1'.\end{aligned}$$

Ainsi, $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ appartient à $\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1')$.

(d) Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1'$, c'est-à-dire

$$g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'.$$

(e) On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g(e_1'), g(e_2'), g(e_3')) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

De plus :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g)^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

(f) On a supposé que $g^2 = g \circ g = f$ donc on doit avoir :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g^2) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier : $a^2 = 0$ et $2ab = 1$ c'est-à-dire $a = 0$ et $0 = 1$. Absurde.
Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

3. (a) Par linéarité de g, on trouve :

$$g^2(e_1') = g(g(e_1')) = g(ae_1') = ag(e_1') = a^2 e_1' \quad ; \quad g^2(e_2') = g(be_1'+ae_2') = bg(e_1')+ag(e_2') = 2abe_1'+a^2be_2'$$

et
$$g^2(e_3') = g(ae_3' + be_2' + ce_1') = ag(e_3') + bg(e_2') + cg(e_1') = (b^2+2ac)e_1' + 2abe_2' + a^2 e_3'.$$

(b) On retrouve bien la même matrice qu'en 2.e.