La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et (K_1, K_2, K_3, K_4) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$\varphi(M) = JM - MJ.$$

1. Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(M + \lambda N) = J(M + \lambda N) - (M + \lambda N)J = JM - MJ + \lambda(JN - NJ) = \varphi(M) + \lambda\varphi(N).$$

   Ainsi φ est linéaire. De plus, il est clair que φ est définie et à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc c'est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (a) On trouve :

$$\varphi(K_1) = -K_2 + K_3 \quad ; \quad \varphi(K_2) = -K_1 + K_4 \quad ; \quad \varphi(K_3) = K_1 - K_4 \quad ; \quad \varphi(K_4) = K_2 - K_3.$$

   (b) La matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) est la matrice dont la i-ème colonne est formée des coordonnées de $\varphi(K_i)$ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) pour $i \in [\![1, 4]\!]$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) La matrice A est symétrique donc diagonalisable.

3. (a) Les colonnes 1 et 4 sont colinéaires de même que les colonnes 2 et 3. Comme de plus les colonnes 1 et 2 ne sont pas colinéaires, on en déduit que A est de rang 2.
   On en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est de dimension 2. Par ailleurs on sait que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi) &= \mathrm{Vect}(\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(-K_2 + K_3, -K_1 + K_4\right). \end{aligned}$$

   La famille $(-K_2 + K_3, -K_1 + K_4)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et de cardinal 2, égal à la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

   (b) D'après le théorème du rang on sait que :

$$\dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) + \dim\big(\ker(\varphi)\big).$$

   Ainsi, $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = 4 - 2 = 2$.
   Il est clair que $\varphi(J) = 0_2$ et $\varphi(I) = 0_2$. De plus I et J ne sont pas colinéaires donc (I, J) est une famille libre de $\ker(\varphi)$ de cardinal 2, égal à la dimension de $\ker(\varphi)$. C'est donc une base de $\ker(\varphi)$.

4. (a) Un calcul donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4A.$$

   Ainsi on a bien : $A^3 - 4A = 0_4$.

(b) Le polynôme x^3-4x est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc des racines de $x^3-4x=x(x^2-4)$. Ainsi les valeurs propres possibles sont 0, 2 ou -2.

5. D'après Python les matrices $A-2I_4$ et $A+2I_4$ sont de rang 3. En particulier, elles ne sont pas inversibles et donc 2 et -2 sont des valeurs propres de A.
De plus, d'après le théorème du rang, on en déduit que $E_{-2}(A)=\ker(A+2I_4)$ et $E_2(A)=\ker(A-2I_4)$ sont de dimension 1.

6. (a) • D'après 3.(b), on sait que $0\in \mathrm{Sp}(A)$ et que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$.

• Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$. On a :

$$AX=-2X \iff \begin{cases} -y+z=-2x\\ -x+t=-2y\\ x-t=-2z\\ y-z=-2t\end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y+z=0\\ -x+2y+t=0\\ x+2z-t=0\\ y-z+2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+t=0\\ 2x-y+z=0\\ x+2z-t=0\\ y-z+2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+t=0\\ 3y+z+2t=0\\ y+z=0\\ y-z+2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-z\\ y=-z\\ t=z.\end{cases}$$

Ainsi le système possède des solutions non nulles donc -2 est une valeur propre et on a :

$$E_{-2}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

• Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$. On a :

$$AX=2X \iff \begin{cases} -y+z=2x\\ -x+t=2y\\ x-t=2z\\ y-z=2t\end{cases} \iff \begin{cases} -2x-y+z=0\\ -x-2y+t=0\\ x-2z-t=0\\ y-z-2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x-2y+t=0\\ -2x-y+z=0\\ x-2z-t=0\\ y-z-2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x-2y+t=0\\ 3y+z-2t=0\\ y+z=0\\ y-z-2t=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=z\\ y=-z\\ t=-z.\end{cases}$$

Ainsi le système possède des solutions non nulles donc -2 est une valeur propre et on a :

$$E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$.

(b) On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors on a $D = P^{-1}AP$.

(c) On trouve $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d)
- Initialisation : le cas $n = 0$ est évident car $A^0 = I_4$ et $PD^0P^{-1} = I_4$.
- Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $A^n = PD^nP^{-1}$ et on veut montrer qu'alors $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
  On sait d'après 6.(b) que $A = PDP^{-1}$ donc :
  $$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PDI_4D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$
- Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-2)^n & -(-2)^n & (-2)^n & (-2)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^n & -2^n & 2^n & -2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^n + (-2)^n & (-2)^n - 2^n & 2^n - (-2)^n & -2^n - (-2)^n \\ (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n & -(-2)^n - 2^n & -(-2)^n + 2^n \\ -(-2)^n + 2^n & -(-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n \\ -(-2)^n - 2^n & -(-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Compléter le script `Python` suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur pour p.

```
p = float(input('entrez la valeur de p dans ]0,1[:'))
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
X = 0
while X <= n  AND np.rand()<=p :
    X = X + 1
print("le niveau du joueur est :", X)
```

2. (a) Il est clair que $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et il s'agit donc de justifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) > 0$. Or, on a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$P(X_n = k) = P\left(R_k \cap \overline{R_{k+1}}\right) = P(R_k)P_{R_k}\left(\overline{R_{k+1}}\right) = (1-p)P(R_k).$$

Or d'après la formule des probabilités composées $P(R_k) = p^k > 0$. Ainsi pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X_n = k) > 0$. De même $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$ sont strictement positifs (voir ci-dessous). Ainsi $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(b) Le joueur possède le niveau 0 si et seulement si il échoue au niveau 1 donc $P(X_n = 0) = 1 - p$.

(c) Le joueur a le niveau n si et seulement si il a réussi le niveau n donc :

$$[X_n = n] = R_n = R_n \cap R_{n-1} \cap \cdots \cap R_1.$$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(R_n \cap R_{n-1} \cap \cdots \cap R_1) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\dots P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= p^n. \end{aligned}$$

(d) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, Le joueur a le niveau k si et seulement si il réussi le niveau k et échoué le niveau $k+1$ donc :

$$[X_n = n] = R_k \cap \overline{R_{k+1}} = \overline{R_{k+1}} \cap R_k \cap R_{n-1} \cap \cdots \cap R_1.$$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P\left(\overline{R_{k+1}} \cap R_k \cap R_{n-1} \cap \cdots \cap R_1\right) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\dots P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)P_{R_k}\left(\overline{R_{k+1}}\right) \\ &= p^k(1-p). \end{aligned}$$

L'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) &= 1 - p + \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) + p^n \\ &= 1 - p + \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)p^k + p^n \\ &= 1 - p + (1-p)p\frac{1-p^{n-1}}{1-p} + p^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. (a) La variable X_n est à support fini donc elle admet une espérance donnée par :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)p^k + np^n.$$

(b) Par croissance comparée ($p \in]0,1[$) on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} np^n = 0.$$

De plus, la série $\sum_{k\geqslant 0} kP(X_n = k)$ converge (c'est à un facteur $p(1-p)$ près, une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison p) et a pour somme $\frac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$.
Ainsi on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{}{1-p}.$$

5. (a) Soit k un entier naturel et n un entier supérieur ou égal à $k+1$. Alors $k \in [\![1, n-1]\!]$ donc d'après 2.(d) on a :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k q.$$
(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k q.$$
Ainsi $p_k = p^k q$.

(c) Soit X la variable aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = p_k.$$
Notons $\mathrm{Y} = \mathrm{X}+1$. Alors $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = k-1) = p^{k-1} q.$$
Ainsi $\mathrm{X}+1$ suit la loi géométrique de paramètre q. En particulier :
$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}-1) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}.$$

Exercice 3

1. Soit $n \geqslant 1$. La fonction f_n est le quotient de deux fonctions dérivables donc le dénominateur de s'annule pas sur $[0,1]$ donc f_n est dérivable sur $[0,1]$. Pour tout réel $x \in [0,1]$ on a :
$$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0.$$
Donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

2. Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente :
$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{x}{x+n} \leqslant \frac{1}{1+n}.$$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit :
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1}{n+1}\,dx = \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. On a :
$$\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$
Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ sont à termes positifs d'après le théorème de comparaison elles sont de même nature. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.
Toujours par comparaison, l'inégalité de la question précédente permet de conclure que la série de terme général u_n est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

(a) La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite des sommes partielles de la série convergente $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Par conséquent elle est convergente. On note γ sa limite.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.
L'inégalité de la question 2 donne pour tout $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$
Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient : $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

(c) Soit $n \geqslant 1$. On a
$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = u_n \geqslant 0.$$
Donc $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

5. (a) Soient deux réels a et b tels que Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{a(x+k)-bk}{k(x+k)} = \frac{ax+(a-b)k}{k(x+k)}.$$

Donc $a = b = 1$ convient. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right) dx = \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1 = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k).$$

Erreur dans le sujet

(b) Soit n un entier naturel non nul, on a par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \gamma \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ainsi $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

(b) Soit n un entier naturel. La fonction logarithme est dérivable sur $]n, n+1[$ et continue sur $[n, n+1]$ et pour tout $x \in]n, n+1[$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln'(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

D'après l'inégalité des accroissement finis on a donc :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$

On en déduit alors :

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0.$$

Ainsi $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(c) Comme $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite γ et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante de limite γ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leqslant \gamma \leqslant T_n.$$

7. (a) Lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}, S_n est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

```
n = 1
s = 1-np.log(2)
while np.log(n+1)-np.log(n) > 10**(-3) :
    n = n+1
    s = s + 1/n+np.log(1+1/(n+1))
print(s)
```

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx.$$

1. (a) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. La fonction $x\mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale $\mathrm{I}(p,q)$ est bien définie.

   (b) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Soient u et v les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x\in[0,1],\quad u(x)=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\quad\text{et}\quad v(x)=(1-x)^q.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(p,q)=\int_0^1 u'(x)v(x)dx&=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)dx\\&=\int_0^1\frac{q}{p+1}x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx\\&=\frac{q}{p+1}\mathrm{I}(p+1,q-1).\end{aligned}$$

On **admet** que l'on peut en déduire par récurrence l'égalité :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad \mathrm{I}(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\mathrm{I}(p+q,0).$$

2. (a) Soit (p,q) un couple d'entiers naturels. On a

$$\mathrm{I}(p+q,0)=\int_0^1 x^{p+q}dx=\left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1=\frac{1}{p+q+1}.$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathrm{I}(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\mathrm{I}(p+q,0)=\frac{p!q!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

déterminer $\mathrm{I}(p+q,0)$ puis exprimer $\mathrm{I}(p,q)$ en fonction de p et de q.

   (b) Montrer enfin que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad\int_0^1 x^p(1-x)^p dx=\mathrm{I}(p,p)=\frac{(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Erreur dans le sujet

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\alpha_n\int_0^x t^n(1-t)^n dt$$

où $\alpha_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$f_0(x)=\alpha_0\int_0^x 1dt=x.$$

4. (a) On a d'après 2.(b) : Donner la valeur de

$$f_n(1)=\alpha_n\mathrm{I}(n,n)=1.$$

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $u:t\mapsto 1-t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1-x]$ (ou $[1-x,0]$ selon le signe de $1-x$) et on a :

$$\begin{aligned}f_n(1-x)=\alpha_n\int_0^{1-x}t^n(1-t)^n&=-\alpha_n\int_0^{1-x}(1-u(t))^n u(t)^n u'(t)dt\\&=-\alpha_n\int_1^x(1-u)^n u^n du\\&=\alpha_n\int_x^1 u^n(1-u)^n du.\end{aligned}$$

Ainsi par la relation de Chasles :

$$f_n(x)+f_n(1-x)=\alpha_n\int_0^x t^n(1-t)^n dt+\alpha_n\int_x^1 t^n(1-t)^n dt=\alpha_n\int_0^1 t^n(1-t)^n dt=1.$$

(c) En particulier, on en déduit :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right)+f_n\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

Donc $f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

5. (a) La fonction $t\mapsto t^n(1-t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. En particulier, F est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\alpha_n\left(\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(0)\right).$$

Ainsi f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f_n'(x)=\alpha_n\mathrm{F}'(x)=\alpha_n x^n(1-x)^n.$$

(b) • Si n est pair alors pour tout réel x, $f_n'(x)$ est positif. On a donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

• Si n est impair alors :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de x^n		$-$	0		$+$		
Signe de $(1-x)^n$			$+$		0	$-$	
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

6. (a) On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $t\in[0,x]$ on a :

$$t^n(1-t)^n=t^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{n+k}.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et x on obtient par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\alpha_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^x t^{n+k}dt\\&=\alpha_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left[\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^x\\&=\alpha_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}.\end{aligned}$$

Ainsi f_n est une fonction polynomiale dont le terme dominant est $\alpha_n\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. On en déduit :

• si n est pair :

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\alpha_n\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=-\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\alpha_n\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=+\infty;$$

• si n est impair :

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\alpha_n\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\alpha_n\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=-\infty;$$

(b) D'après 5.(b) :

• si n est pair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f_n	$-\infty$	↗	0	↗		↗	$+\infty$

- si n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_n	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

7. Dans cette question n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   (a) D'après 6.(a), f_n est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$$
$$f_n''(x) = \alpha_n \left(nx^{n-1}(1-x)^n - n(1-x)^{n-1}x^n\right) = n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x).$$

   (b) - Si n est impair alors $n-1$ est pair donc le signe de $f_n''(x)$ est du signe de $(1-2x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f_n''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

La dérivée seconde change de signe en $\frac{1}{2}$ uniquement donc (C_n) possède comme unique point d'inflexion son point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

- Si n est pair alors $n-1$ est impair donc le signe de $f_n''(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $x^{n-1}(1-x)^{n-1}$		$-$	0		$+$		0	$-$	
Signe de $1-2x$			$+$		0		$-$		
Signe de $f_n''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La dérivée seconde change de signe en 0, 1 et $\frac{1}{2}$ uniquement donc (C_n) possède trois points d'inflexion : ses points d'abscisse 0, 1 et $\frac{1}{2}$.

   (c) Tracer, selon la parité de n, l'allure de (C_n).