Lycée Jean-Jacques Rousseau- Sarcelles 2022-2023

ECG2 – Mathématiques

DS1

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x) & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. La fonction $x \mapsto 1-x$ est continue sur $]-\infty,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est continue $]-\infty,1[$. Par somme, on en déduit que φ est continue sur $]-\infty,1[$.
   Étudions la continuité en 1. Par composition des limites et croissance comparée, on remarque que :
   $$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{y\to 0^+} y\ln(y) = 0.$$
   Ainsi, par somme on obtient :
   $$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x) = 1 = \varphi(1).$$
   La fonction φ est donc continue en 1.
   Finalement, la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.
2. (a) La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $x \mapsto (1-x)\ln(1-x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ $]-\infty,1[$. Par somme, on en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.
   De plus, pour tout $x \in\,]-\infty,1[$ on a :
   $$\varphi'(x) = 1 - \frac{1-x}{1-x} - \ln(1-x) = -\ln(1-x).$$
   (b) On en déduit (voir question suivante pour la limite en $-\infty$) :

x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

   (c) Soit $x \in]-\infty,1[$. Alors on a :
   $$\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \frac{x+(1-x)\ln(1-x)-1}{x-1} = 1-\ln(1-x).$$
   Ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty$. La fonction φ n'est donc pas dérivable en 1.
3. Pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a :
   $$\varphi(x) = x+(1-x)\ln(1-x) = x\left(1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)\right).$$
   Or :
   $$\lim_{x\to-\infty} 1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x) = -\infty$$
   donc par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty.$$
4.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et appartient à l'intervalle $[0,1[$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 \in [0,1[$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in [0,1[$. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de φ donc u_{n+1} est bien défini. D'après la question 2.(b), on sait aussi que $\varphi([0,1[) \subset [0,1[$ donc :
   $$u_{n+1} = \varphi(u_n) \in \varphi([0,1[) \subset [0,1[.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \quad \text{est bien défini et appartient à l'intervalle } [0,1[.$$

6. Soit g la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par :
$$\forall x < 1, \quad g(x) = \varphi(x) - x.$$
   (a) La fonction g est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x < 1$ on a :
   $$g'(x) = \varphi'(x) - 1 = -\ln(1-x) - 1.$$
   De plus, on a :
   $$\lim_{x\to 1} g(x) = \varphi(1) - 1 = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)\ln(1-x) = +\infty.$$
   Ainsi, on obtient :

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

   (b) On a : $g(0) = 0$. On en déduit :

x	$-\infty$		0		$1-e^{-1}$		1
Signe de $g(x)$		$+$	0		$-$		

   (c) D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1[$ et d'après la question précédente, g est négative sur $[0,1[$. Ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0.$$
   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée d'après les questions 6.c et 5. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite ℓ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1[$ donc $\ell \in [0,1]$. La fonction φ étant continue sur $[0,1]$, on en déduit que ℓ est un point fixe de φ. Étudions les points fixes de φ : soit $x \in]-\infty,1]$.
$$\begin{aligned}\varphi(x) = x \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x + (1-x)\ln(1-x) = x &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad (1-x)\ln(1-x) = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad 1-x = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(1-x) = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 0.\end{aligned}$$
   Ainsi, les deux points fixes de φ sont 0 et 1 donc $\ell \in \{0,1\}$. Enfin comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a :
   $$\ell \leqslant u_0 < 1.$$
   Par conséquent $\ell = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

8. On suppose la valeur de u_0 déjà définie dans une variable u.

```
import numpy as np
def suite(n):
    for k in range(1,n+1):
        u=u+(1-u)*np.ln(1-u)
    return u
```

Partie C : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

9. (a) Soit $t\in[0,x]$. Il s'agit de la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique : comme $t\in[0,1[$ on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}.$$

Ainsi pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}.$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En intégrant membre à membre l'inégalité précédente entre 0 et x, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant on obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, cela donne :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Or :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \quad \text{et } \forall k\in[\![0,n-1]\!] \quad \int_0^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

On obtient finalement l'égalité suivant :

$$-\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Le changement de variable $i=k+1$ dans la somme permet alors de trouver l'identité demandée :

$$-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $t\mapsto \frac{1}{1-t}$ est croissante sur $[0,x]$ (on peut le voir en étudiant le signe de sa dérivée) donc :

$$\forall t\in[0,x], \quad \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi :

$$\forall t\in[0,x], \quad \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.$$

En intégrant membre à membre l'inégalité ci-dessus entre 0 et x, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant on obtient :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \leqslant \frac{1}{(1-x)(n+1)}.$$

La fonction $t\mapsto \frac{t^n}{1-t}$ étant positive sur $[0,x]$, par positivité de l'intégrale on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \frac{1}{(1-x)(n+1)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1-x)(n+1)} = 0$. Par encadrement on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.$$

11. D'après la question 9, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x^k}{k} \;=\; \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Comme la suite $\left(\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 d'après la question précédente, on en déduit que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi. Cela signifie que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge. De plus, sa somme vérifie :

$$-\ln(1-x) - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \;=\; -\ln(1-x).$$

12. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} \;=\; \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}.$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^{k+1}}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{x^k}{k} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + x.\end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, les suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $-\ln(1-x)$. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers :

$$-x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = \varphi(x).$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} \;=\; \varphi(x).$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \;=1=\; \varphi(1).$$

Exercice 2

Partie I : Étude du cas $n = 3$

1. (a) L'évènement $[X_3 = 4]$ est réalisé si et seulement si les nombres des trois premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et 3 et le quatrième nombre tiré est supérieur ou égal au troisième.

La seule possibilité pour obtenir une suite strictement décroissante de trois nombres entre 1 et 3 est d'avoir $[N_1 = 3]$, $[N_2 = 2]$ et $[N_3 = 1]$. Le quatrième tirage sera alors nécessairement un nombre supérieur ou égal au troisième. Ainsi :

$$[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1].$$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 4) &= P(N_1 = 3)P_{[N_1=3]}(N_2 = 2)P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

(b) On a supposé qu'il y a 3 boules dans l'urne : la famille $([N_1 = 1], [N_1 = 2], [N_1 = 3])$ est donc un système complet d'événements formé d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(X_3 = 2) = P_{[N_1=1]}(X_3 = 2)P(N_1 = 1) + P_{[N_1=2]}(X_3 = 2)P(N_1 = 2) + P_{[N_1=3]}(X_3 = 2)P(N_1 = 3).$$

Or :

- sachant qu'on a tiré la boule 1 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé pour n'importe quel deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=1]}(X_3 = 2) = 1;$$
- sachant qu'on a tiré la boule 2 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé ssi on obtient la boule 2 ou 3 deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=2]}(X_3 = 2) = \frac{2}{3};$$
- sachant qu'on a tiré la boule 3 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé ssi on obtient la boule 3 deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=3]}(X_3 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Finalement, comme N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$ on obtient :

$$P(X_3 = 2) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Comme $X_3(\Omega) = [\![2,4]\!]$ alors :

$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = \frac{8}{27}.$$

2. La variable X_3 est à support fini donc possède bien une espérance :

$$E(X_3) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3) + 4P(X_3 = 4) = \frac{64}{27}.$$

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Soit k de $[\![1; n+1]\!]$. La variable N_k suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
4. L'évènement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si les nombres des n premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et n et le $(n+1)$-ème nombre tiré est supérieur ou égal au $n$ème.

   La seule possibilité pour obtenir telle une suite strictement décroissante de n nombres entre 1 et n est d'avoir $[N_1 = n]$, $[N_2 = n-1]$, ..., $[N_n = 1]$. Le $(n+1)$-ème tirage sera alors nécessairement un nombre supérieur ou égal au n-ème. Ainsi :

$$[X_n = n+1] = \bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n-i+1].$$

   Ainsi, les tirages étant indépendants (tirages avec remise) :

$$P(X_n = n+1)P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n-i+1]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(N_i = n-i+1) = \frac{1}{n^n}.$$

5. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Sachant que $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est-à-dire sachant que la boule i a été tirée en premier, $[X_n = 2]$ est réalisé ssi on tire l'une des boules i, $i+1$,..., n. Ainsi :

$$P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}.$$

6. Comme $N_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$, la famille $([N_1 = i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} P_{[N_1=i]}(X_n = 2)P(N_1 = i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j \quad \text{en posant } j = n-i+1 \\
&= \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. L'évènement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si les nombres des k premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et n.
   Donc : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.
   Les issues réalisant l'événement $(N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$ correspondent aux suites strictement décroissantes de k éléments parmi $[\![1, n]\!]$. Une telle suite est entièrement déterminée par le choix de k éléments parmi $[\![1, n]\!]$: il y en a donc $\binom{n}{k}$.
   Comme les variables $N_1, \ldots, N_k$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, chacune de ces issues se réalise avec probabilité $\frac{1}{n^k}$.
   Ainsi : $P(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   On a : $P(X_n > 0) = 1 = P(X_n > 1)$ donc la formule est vraie aussi pour $k = 0$ et $k = 1$.
8. Soit $k \in [\![2; n+1]\!], P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$.
9. Comme X_n est à support fini, elle possède bien une espérance. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (i+1)P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP(X_n > i) + \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + P(X_n > 1) - (n+1)P(X_n > n+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + 1 - 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X_n > i).
\end{aligned}$$

   Avec la question 7, on obtient alors :

$$E(X_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

10. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après les questions 7 et 8, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) &= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n^{k-1}}\left(\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} - \frac{n!}{nk!(n-k)!}\right) \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}} \times \frac{nk - n + k - 1}{n(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}} \times \frac{(n+1)(k-1)}{n(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1)! \times (k-1)}{n^k(n+1-k)!k!} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

   Ainsi : $\forall k \in [\![2; n+1]\!], P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \frac{k-1}{n^k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{k-1}{n^k k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n+1-i) \\
&= \frac{k-1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n+1-i}{n}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-i+1}{n} = 1$. Donc par produit on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

12. La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ est la différence des séries $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{(k-1)!}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k!}$ toutes les deux convergentes. Donc elle converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

13. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k)$ converge absolument. Cette série étant à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est convergente.
Or $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k) = \sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k(k-1)}{k!} = \sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{(k-2)!}$ est une série exponentielle qui converge vers e. Ainsi Z possède une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = e$.
D'après la question 9, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.
Par continuité de la fonction exponentielle on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = e = \mathrm{E}(\mathrm{Z}).$$

Exercice 3

Soit U la matrice

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie A : Étude d'un système

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = y_0 = 1\ ;\ z_0 = t_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_{n+1} & = & & & y_n & + & z_n & + & t_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & & & z_n & + & t_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & & & t_n \\ t_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & z_n & & \end{array}\right. .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un calcul matriciel donne :

$$\mathrm{UX}_n = \begin{pmatrix} y_n + z_n + t_n \\ x_n + z_n + t_n \\ x_n + y_n + t_n \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \mathrm{X}_{n+1}.$$

2. On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Alors :

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & t & = & a \\ x & & & & & + & t & = & b \\ x & & & + & z & & & = & c \\ x & + & y & & & & & = & d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & t & = & a \\ & & y & + & z & + & 2t & = & b-a \\ & & y & + & 2z & + & t & = & c-a \\ & & 2y & + & z & + & t & = & d-a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & t & = & a \\ & & y & + & z & + & 2t & = & b-a \\ & & & & z & - & t & = & c-b \\ & & & - & z & - & 3t & = & d+a-2b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & - & z & - & t & = & a \\ & & y & + & z & + & 2t & = & b-a \\ & & & & z & - & t & = & c-b \\ & & & & & - & 4t & = & d+a-3b+c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{a+b+c+d}{4} \\ y & = & \frac{-a-b-c+3d}{4} \\ z & = & \frac{-a-b+3c-d}{4} \\ t & = & \frac{-a+3b-c-d}{4} \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

   Ainsi P est inversible et $\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) On obtient $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{UX}_n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{UPY}_n = \mathrm{DY}_n.$$

   (b) On trouve $\mathrm{Y}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) D'après la question 3.b, un récurrence immédiate donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{D}^n\mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\mathrm{Y}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ (-1)^n \\ (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \mathrm{X}_n = \mathrm{PY}_n = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Partie B : Calcul de puissance

5. Un calcul donne : $U^2 = 3I_4 + 2U$.
6. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$a_0 = 1 \quad , \quad b_0 = 0 \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{k+1} &= 3b_k \\ b_{k+1} &= a_k + 2b_k \end{cases}.$$

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition « $U^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & b_k & a_k \end{pmatrix}$ » et montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $U^0 = I_4$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour un certain entier naturel k et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$U^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & b_k & a_k \end{pmatrix} = a_k I_4 + b_k U.$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned} U^{k+1} = U^k U = (a_k I_4 + b_k U)U = a_k U + b_k U^2 &= a_k U + b_k(3I_4 + 2U) \\ &= (a_k + 2b_k)U + 3b_k I_4 \\ &= b_{k+1}U + a_{k+1}I_4 \\ &= \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} & b_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & b_{k+1} & a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & b_{k+1} & b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & b_k & a_k \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{k+2} = a_{k+1} + 2b_{k+1} = 3b_k + 2b_{k+1}.$$

(c) La suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

On vérifie facilement que cette équation possède deux solutions : -1 et 3.
Ainsi, il existe deux réels u et v tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad b_k = u3^k + v(-1)^k.$$

Comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, on a :

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ 3u - v = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u + v = 0 \\ 4u = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} v = -\frac{1}{4} \\ u = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$b_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4} \quad \text{puis} \quad a_k = 3b_{k-1} = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}.$$

7. D'après les questions précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$U^k = \begin{pmatrix} \frac{3^k+3(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} \\ \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k+3(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} \\ \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k+3(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} \\ \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k-(-1)^k}{4} & \frac{3^k+3(-1)^k}{4} \end{pmatrix}$$

8. (a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{U}\mathrm{X}_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\mathrm{X}_n = \mathrm{U}^n\mathrm{X}_0$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $\mathrm{U}^0\mathrm{X}_0 = \mathrm{I}_4\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que

  $$\mathrm{X}_n = \mathrm{U}^n\mathrm{X}_0$$

  On obtient alors :

  $$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{U}\mathrm{X}_n = \mathrm{U}\mathrm{U}^n\mathrm{X}_0 = \mathrm{U}^{n+1}\mathrm{X}_0$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{U}^n\mathrm{X}_0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix} = \mathrm{X}_n = \mathrm{U}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$