TD15/16

Exercice 1. Fait en TD

Exercice 2.

1.
   - La fonction F est constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ donc est de classe C^1 (et a fortiori continue) sur ces intervalles.
     Sur $[0,1[$, la fonction $x\mapsto 1-x$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x\mapsto x^{\frac{4}{3}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, F est donc de classe C^1 sur $[0,1[$.
     Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
   - On vient de voir que F est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
     Étude de la continuité en 0. On a :
     $$\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0 = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x).$$
     Ainsi F est continue en 0.
     Étude de la continuité en 1. On a :
     $$\lim_{x\to 1^-} F(x) = 1 = F(1) = \lim_{x\to 0^+} F(x).$$
     Ainsi F est continue en 1.
     Finalement F est continue sur $\mathbb{R}$.
   - On a clairement : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
   - Enfin F est croissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$. De plus, pour tout $x\in]0,1[$ on a :
     $$F'(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \geq 0.$$
     Donc F est croissante sur $[0,1]$.
     Comme F continue, on en déduit qu'elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.
2. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$:
   $$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x\in]0,1[\\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$
   Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x\in]0,1[\\ 0 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$
   est une densité de X.
3. Comme X est à densité, on sait que :
   $$P(0.973 < X \leq 1.2) = \int_{0.973}^{1.2} f(t)dt = F(1.2) - F(0.973) = 0.027^{\frac{4}{3}} = 0.0081.$$

Exercice 3.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est positive si et seulement si c est positif.
   Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Soit $x\in[0,+\infty[$. On a :
     $$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x ce^{-t}dt = \left[-ce^{-t}\right]_0^x = c - ce^{-x}.$$
     Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = c$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est donc convergente et vaut c.
   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$. Soit $x\in]-\infty,0]$. Alors
     $$\int_x^0 f(t)dt = \int_x^0 ce^t dt = \left[ce^t\right]_x^0 = c - ce^x.$$
     Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)dt = c$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est donc convergente et vaut c.

   Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2c.$$
   La fonction f est donc une densité de probabilité si et seulement si c est positif et $2c=1$ donc si et seulement si $c=\frac{1}{2}$.
2. Notons F_X la fonction de répartition de X et soit $x\in\mathbb{R}$. Alors, on a :
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^t dt & \text{si} x<0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^t dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}dt & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$
   $$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x<0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 4. On rappelle que la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. On note F_Y la fonction de répartition de Y et on considère $y \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X < 1], [X \geq 1])$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(\max(1,X) \leq y) &= P([\max(1,X) \leq y] \cap [X < 1]) + P([\max(1,X) \leq y] \cap [X \geq 1]) \\ &= P([1 \leq y] \cap [X < 1]) + P([X \leq y] \cap [X \geq 1]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ P(X < 1) + P(1 \leq X \leq y) & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ F_X(1) + F_X(y) - F_X(1) & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. On en déduit :

$$\lim_{y \to 1^-} F_Y(y) = 0 \neq 1 - e^{-1} = \lim_{y \to 1^+} F_Y(y).$$

Ainsi F_Y n'est pas continue en 1 donc Y n'est pas à densité.

Exercice 5. On rappelle que la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Vu en TD.

2. Vu en TD.

3. Notons F_Y la fonction de répartition de Y et soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= \begin{cases} P\left(\left[\frac{1}{X} \leq y\right]\right) & \text{si } y \leq 0 \\ P([Y \leq y] \cap [X \neq 0]) + P([Y \leq y] \cap [X = 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\left(\left[\frac{1}{y} \leq X < 0\right]\right) & \text{si } y < 0 \\ P(X \leq 0) & \text{si } x = 0 \\ P([Y \leq y] \cap [X \neq 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } P(X=0) = 0 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P\left(\left[\frac{1}{X} \leq y\right] \cap [X \neq 0]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P\left(\left[\frac{1}{y} \leq X\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - P\left(\left[X < \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - P\left(\left[X \leq \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } X \text{ est à densité} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

La fonction F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}^*$.
Étudions la continuité en 0. Par limite usuelle, on a :

$$\lim_{y \to 0^+} F_Y(y) = 0 = F_Y(0) = \lim_{y \to 0^-} F_Y(y).$$

Ainsi F_Y est continue en 0 et finalement F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que Y est à densité. De plus, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

Exercice 6.

1. (a) C'est immédiat car la fonction partie entière est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition de la partie entière et compte tenu que k et $k-1$ sont positifs on a :

$$\begin{aligned} P(Y = k-1) = P(k-1 \leq X < k) = F_X(k) - F_X(k-1) &= 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}. \end{aligned}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$P(Y+1=k) = P(Y=k-1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda}).$$

Ainsi $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$.

(d) Puisque la variable aléatoire $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$, elle possède une espérance et une variance :

$$E(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \quad ; \quad V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

On en déduit que Y possède une espérance et une variance :

$$E(Y) = E(Y)-1 = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \quad ; \quad V(Y) = V(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

2. (a) La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$ donc $Z = X - \lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$.

(b) Soit $x \in [0,1[$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([Z \leq x] \cap [Y=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X-k \leq x] \cap [k \leq X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X \leq x+k] \cap [k \leq X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X \leq x+k]) \quad \text{car } x \in [0,1[\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(x+k) - F_X(k) \quad \text{car } X \text{ à densité} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}) \\
&= (1-e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} \\
&= \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

(c) En particulier, on déduit des questions précédentes que la fonction de répartition F_Z de Z est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

La fonction F_Z est de classe C^1 (a fortiori continue) sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On vérifie facilement qu'elle est continue en 0 et en 1.
Ainsi Z est bien à densité. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ on a :

$$F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de Z.

(d) Comme X et Y possèdent une espérance alors par linéarité Z aussi et on a :

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda}-1}.$$

Exercice 7.

1. La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$ et la fonction racine carrée est continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable $\sqrt{X}$ possède donc une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
La fonction $x \mapsto \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\frac{\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}}{e^{-\frac{\lambda}{2}x}} = \lambda\sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}\lambda x}.$$

Or, par croissance comparée on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-\frac{1}{2}\lambda x} = 0$. Ainsi :

$$|\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}| = \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x}\right).$$

Comme de plus les fonctions $x \mapsto |\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}|$ et $x \mapsto e^{-\frac{\lambda}{2}x}$ sont positives et que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x}dx$ converge alors par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda\sqrt{x}e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
Ainsi, $\sqrt{X}$ possède une espérance.

2. La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$ et la fonction cube est continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable X^3 possède donc une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.

La fonction $x \mapsto \lambda x^3 e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\frac{\lambda x^3 e^{-\lambda x}}{e^{-\frac{\lambda}{2}x}} = \lambda x^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda x}.$$

Or, par croissance comparée on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-\frac{1}{2}\lambda x} = 0$. Ainsi :

$$|\lambda x^3 e^{-\lambda x}| = \lambda x^3 e^{-\lambda x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x}\right).$$

Comme de plus les fonctions $x \mapsto |\lambda x^3 e^{-\lambda x}|$ et $x \mapsto e^{-\frac{\lambda}{2}x}$ sont positives et que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x}dx$ converge alors par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x}dx$ converge absolument.
Ainsi, X^3 possède une espérance.

Exercice 8. D'après l'exercice 4, une densité de X est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

1. La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
   Or la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a alors :

     $$\int_A^0 |tf(t)|dt = -\frac{1}{2}\int_A^0 te^t dt.$$

     Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on obtient :

     $$\begin{aligned}\int_A^0 |tf(t)|dt &= -\frac{1}{2}\int_A^0 te^t dt\\ &= -\frac{1}{2}\left([te^t]_A^0 - \int_A^0 e^t dt\right)\\ &= \frac{1}{2}(Ae^A + 1 - e^A).\end{aligned}$$

     Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 |tf(t)|dt = \frac{1}{2}$.
     Ainsi $\int_{-\infty}^0 |tf(t)|dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Étude de $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a alors :

     $$\int_0^A |tf(t)|dt = \frac{1}{2}\int_0^A te^{-t}dt.$$

     Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0,A]$ donc par intégration par parties on obtient :

     $$\begin{aligned}\int_0^A |tf(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_0^A te^{-t}dt\\ &= \frac{1}{2}\left([-te^{-t}]_0^A - \int_0^A -e^{-t}dt\right)\\ &= \frac{1}{2}(-Ae^{-A} + 1 - e^{-A}).\end{aligned}$$

     Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A |tf(t)|dt = \frac{1}{2}$.
     Ainsi $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.
   - Les intégrales $\int_{-\infty}^0 |tf(t)|dt$ et $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Ainsi X possède une espérance. De plus on a :

     $$\begin{aligned}E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt &= \int_{-\infty}^0 tf(t)dt + \int_0^{+\infty} tf(t)dt\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 te^t dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Comme la variable aléatoire X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens elle admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument.
   Or la fonction $t \mapsto |t^2 f(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\int_{-\infty}^0 |t^2 f(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a alors :

     $$\int_A^0 |t^2 f(t)|dt = \frac{1}{2}\int_A^0 t^2 e^t dt.$$

     Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^0 |tf(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_A^0 t^2e^t dt\\ &= \frac{1}{2}\left([t^2e^t]_A^0 - \int_A^0 2te^t dt\right)\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^A - \int_A^0 te^t dt\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^A + Ae^A + 1 - e^A \quad \text{d'après les calculs de 1.}\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^0 |t^2f(t)|dt = 1$.

Ainsi $\int_{-\infty}^0 |t^2f(t)|dt$ converge et vaut 1.

- Étude de $\int_0^{+\infty} |tf(t)|dt$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a alors :

$$\int_0^A |t^2f(t)|dt = \frac{1}{2}\int_0^A t^2e^{-t}dt.$$

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, A]$ donc par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A |t^2f(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_0^A t^2e^{-t}dt\\ &= \frac{1}{2}\left([-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A -2te^{-t}dt\right)\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^{-A} + \int_0^A te^{-t}dt\\ &= -\frac{1}{2}A^2e^{-A} - A^{-A} + 1 - e^{-A} \quad \text{d'après les calculs de 1.}\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A |t^2f(t)|dt = 1$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} |t^2f(t)|dt$ converge et vaut 1.

- Les intégrales $\int_{-\infty}^0 |t^2f(t)|dt$ et $\int_0^{+\infty} |t^2f(t)|dt$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2f(t)|dt$ converge. Ainsi X possède un moment d'ordre deux donc une variance. De plus on a :

$$\begin{aligned}E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)dt &= \int_{-\infty}^0 t^2f(t)dt + \int_0^{+\infty} t^2f(t)dt\\ &= 2.\end{aligned}$$

Par la formule de Koenig-Huygens, on a donc :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.$$

Exercice 9.

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}^*$. Étudions $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ impropre en $-\infty$, 0 et $+\infty$.

   - Étude de $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ impropre en $-\infty$ et 0. Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$ alors l'intégrale converge et vaut 0.

   - Étude de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$. La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$. Soit $A \in [0,+\infty[$. On a :

   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+x)^3}dx &= 2\left[\frac{1}{-2(1+x)^2}\right]_0^A\\ &= 1 - \frac{1}{(1+A)^2}.\end{aligned}$$

   Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = 1$.

   L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge donc et vaut 1.

   - Les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et de plus :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$$

   Finalement, f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable de densité f et notons F sa fonction de répartition. Alors, pour tout réel x on a :

   $$\begin{aligned}F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ \int_0^x f(t)dt & \text{si } x \geq 0\end{cases}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 1 - \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0\end{cases}.\end{aligned}$$

2. La fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc d'après le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

   La fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [0,+\infty[$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{-1}{(1+x)^2}$ étant de classe C^1 sur

$[0,A]$ on a par intégration par parties :

$$\int_0^A \frac{2x}{(1+x)^3}dx = \left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-1}{(1+x)^2}dx$$
$$= -\frac{A}{(1+A)^2} + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A$$
$$= -\frac{A}{(1+A)^2} - \frac{1}{1+A} + 1.$$

Ainsi $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |xf(x)|dx = 1$. La variable X possède donc une espérance et :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty}\frac{2x}{(1+x)^3}dx = 1.$$

Comme X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument. Or :

$$|x^2 f(x)| = \frac{2x^2}{(1+x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Les fonctions $x\mapsto |x^2 f(x)|$ et $x\mapsto \frac{2}{x}$ étant continues et positives sur $[c,+\infty[$ pour tout $c>0$, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives on en déduit que pour tout $c>0$ les intégrales $\int_c^{+\infty}|x^2 f(x)|dx$ et $\int_c^{+\infty}\frac{2}{x}dx$ sont de même nature. Ainsi, pour tout $c>0$ $\int_c^{+\infty}|x^2 f(x)|dx$ diverge.

Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty}|x^2 f(x)|dx$ diverge et X ne possède donc pas de variance.

Exercice 10.

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (la continuité en 0 se vérifie facilement). De plus, comme f est nulle en dehors de $[0,1]$ et continue sur $[0,1]$ alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = [t^2]_0^1 = 1.$$

Ainsi f est bien une densité de probabilité.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La variable X admet un moment d'ordre n si et seulement si X^n possède une espérance. Or la fonction f est nulle en dehors de $[0,1]$ et $x\mapsto x^n$ est continue sur $[0,1]$. D'après le théorème de transfert, X^n admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 x^n\times 2xdx$ converge absolument.
Or il s'agit d'une intégrale de fonction continue positive sur un segment donc elle converge (il n'y a pas d'impropreté). Ainsi X possède un moment d'ordre n et on a :

$$E(X^n) = \int_0^1 x^n\times 2xdx = \left[\frac{2x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{2}{n+2}.$$

(b) Par conséquent on a :

$$E(X) = \frac{2}{3} \quad\text{et}\quad E(X^2) = \frac{1}{2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, X possède donc une variance et elle est donnée par :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

3. Notons F_X la fonction de répartition de X et soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$F_X(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ \int_0^x 2tdt & \text{si } x\in]0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0\\ x^2 & \text{si } x\in]0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

4. (a) Notons F_Y la fonction de répartition de Y et soit $y\in\mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ on a :

$$F_Y(y) = P(\ln(X)\leq y) = P(X\leq e^y) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^y\leq 0\\ e^{2y} & \text{si } e^y\in]0,1]\\ 1 & \text{si } e^y>1\end{cases} = \begin{cases} e^{2y} & \text{si } y\leq 0\\ 1 & \text{si } y>0\end{cases}.$$

On remarque que F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$ (seule la continuité en 0 est non triviale et on procède comme d'habitude).
Donc Y est à densité. De plus pour tout y non nul on a :

$$F_Y'(y) = \begin{cases} 2e^{2y} & \text{si } y<0\\ 0 & \text{si } y>0\end{cases}.$$

Ainsi la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(y) = \begin{cases} 2e^{2y} & \text{si } y\leq 0\\ 0 & \text{si } y>0\end{cases}$$

est une densité de Y.

(b) Comme Y a pour densité g et que g est nulle en dehors de $]-\infty,0]$ alors Y possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^0 yg(y)dy$ converge absolument.
La fonction $y\mapsto |yg(y)|$ est continue sur $]-\infty,0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$. Soit $A\in]-\infty,0]$. On a :

$$\int_A^0 |yg(y)|dy = -\int_A^0 yg(y)dy = -\int_A^0 2ye^{2y}dy.$$

Les fonctions $y \mapsto y$ et $y \mapsto e^{2y}$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_A^0 |yg(y)|dy &= -\int_A^0 2ye^{2y}dy = -\left[ye^{2y}\right]_A^0 + \int_A^0 e^{2y}dy \\ &= Ae^{2A} + \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_A^0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(2A+1)e^{2A}}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_0^A |yg(y)|dy = \frac{1}{2}$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 yg(y)dy$ converge absolument et Y possède donc une espérance. De plus, comme $\mapsto yg(y)$ est négative sur $]-\infty,0]$ on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^0 yg(y)dy = -\int_{-\infty}^0 |yg(y)|dy = -\frac{1}{2}.$$

De même, Y possède une variance si et seulement si $\int_{-\infty}^0 y^2g(y)dy$ converge absolument. La fonction $y \mapsto y^2g(y)$ étant positive, il suffit de montrer la convergence. Soit $A \in]-\infty,0]$. Alors :

$$\int_A^0 y^2g(y)dy = \int_A^0 2y^2e^{2y}dy.$$

Les fonctions $y \mapsto y^2$ et $y \mapsto e^{2y}$ sont de classe C^1 sur $[A,0]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}\int_A^0 y^2g(y)dy &= \left[y^2e^{2y}\right]_A^0 - \int_A^0 2ye^{2y}dy \\ &= -A^2e^{2A} + \left(\frac{1}{2} + \frac{(2A+1)e^{2A}}{2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to-\infty}\int_0^A y^2g(y)dy = \frac{1}{2}$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 y^2g(y)dy$ converge absolument et Y possède donc un moment d'ordre 2 donc une variance. De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens on a :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 11.

1. (a) La fonction g est dérivable sur $]-\infty,0[$ (fonction constante) et sur $]0,+\infty[$ (produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$). On a

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x\to0^-} g(x).$$

Ainsi g est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0^-} 0 = 0.$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

(b) Cependant, g est dérivable sur $[0,+\infty[$ (elle est dérivable sur $]0,+\infty[$ et dérivable à droite en 0 d'après les questions précédentes) et pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$g'(x) = e^{-x}(1-x).$$

Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variation de g	0	↗	e^{-1}	↘	0

Pour la limite en 0, il s'agit d'une croissance comparée.

(c) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$g''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Par conséquent,

$$g''(x) \geq 0 \iff x \geq 2.$$

La fonction g est donc convexe sur $[2,+\infty[$ et concave sur $]0,2]$.

2. (a) La fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, si X est une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(1)$, on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = E(X) = 1.$$

Donc g est une densité de probabilité.

(b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:

$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = 0$$

car $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

- Si $x \geq 0$:
$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt.$$
En faisant une intégration par parties, on trouve :
$$G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1+x).$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(d) La fonction g étant nulle en dehors de $[0, +\infty[$ la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ convergence absolument. Soit $A > 0$. Par intégration par parties, on a :
$$\int_0^A |tg(t)|dt = \int_0^A t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A 2t \times (-e^{-t})dt = -A^2e^{-A} + 2\int_0^A g(t)dt.$$
Or on sait que :
$$\lim_{A \to +\infty} -A^2e^{-A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A \to +\infty} \int_0^A g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$$
Donc :
$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A |tg(t)|dt = 2.$$
Ainsi, Y possède une espérance et comme $t \mapsto tg(t)$ est positive on a :
$$E(Y) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} |tg(t)|dt = 2.$$

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :
$$[Z \leq t] = [e^Y \leq t] = \begin{cases} [Y \leq \ln(t)] & \text{si } t > 0 \\ \emptyset & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$
On obtient alors :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} G(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t}(1 + \ln(t)) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

(b) La fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Étudions la continuité en 1. Par opérations sur les limites on a :
$$\lim_{t \to 1^+} H(t) = 0 = H(1) = \lim_{t \to 1^-} H(t).$$
Ainsi H est continue en 1 et finalement sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Z est à densité. De plus, pour tout $t \neq 1$ on a :
$$H'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}.$$
Au final, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$
est une densité de Z.

Exercice 12.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme U et V suivent la loi $\mathscr{U}([-3,1])$ et $\mathscr{U}([-1,3])$ respectivement on a :
$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } x \in [-1,3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le support de Z est $\{-1,1\}$, la famille $([Z=-1],[Z=1])$ est bien un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :
$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= P([X \leq x] \cap [Z=1]) + P([X \leq x] \cap [Z=-1]) \\ &= P([U \leq x] \cap [Z=1]) + P([V \leq x] \cap [Z=-1]). \end{aligned}$$
Or U et Z sont indépendantes et V et Z aussi donc :
$$F_X(x) = P([U \leq x])P([Z=1]) + P([V \leq x])P([Z=-1]) \quad = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

(b) Comme $U(\Omega) = [-3,1]$ et $V(\Omega) = [-1,3]$ alors $X(\Omega) = [-3,3]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $x < -3$ alors $F_U(x) = F_V(x) = 0$ donc $F_X(x) = 0$.
- Si $-3 \leq x \leq -1$ alors $F_V(x) = 0$ donc $F_X(x) = pF_U(x) = p \times \frac{x+3}{4}$.
- Si $-1 \leq x \leq 1$ alors $F_X(x) = p \times \frac{x+3}{4} + (1-p) \times \frac{x+1}{4} = \frac{x+2p+1}{4}$.
- Si $1 \leq x \leq 3$ alors $F_U(x) = 1$ donc $F_X(x) = p + (1-p) \times \frac{x+1}{4}$.
- Si $x > 3$ alors $F_U(x) = F_V(x) = 1$ donc $F_X(x) = 1$.

(c) Il est clairement que F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{-3,-1,1,3\}$.
De plus pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,-1,1,3\}$ on a :
$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{p}{4} & \text{si } x \in]-3,-1[\\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in]-1,1[\\ \frac{1-p}{4} & \text{si } x \in]1,3[\\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-3 \\ \frac{p}{4} & \text{si } x\in[-3,-1[\\ \frac{1}{4} & \text{si } x\in[-1,1[\\ \frac{1-p}{4} & \text{si } x\in[1,3[\\ 0 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

est une densité de X.

Exercice 13. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$.
On pose $Z=XY$.

1. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événement $([Y=-1],[Y=0],[Y=1])$ on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F_Z(t)=P(Z\leq t)&=P(Z\leq t,Y=-1)+P(Z\leq t,Y=0)+P(Z\leq t,Y=1)\\ &=P(-X\leq t,Y=-1)+P(0\leq t,Y=0)+P(X\leq t,Y=1)\\ &=P(-X\leq t)P(Y=-1)+P(0\leq t)P(Y=0)+P(X\leq t)P(Y=1)\quad\text{(indépendance)}\\ &=\frac{1}{3}\left(P(X\geq -t)+P(0\leq t)+P(X\leq t)\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(1-P(X<-t)+P(0\leq t)+P(X\leq t)\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(1-P(X\leq -t)+P(0\leq t)+P(X\leq t)\right)\quad\text{car } X \text{ est à densité}\\ &=\frac{1}{3}\times\begin{cases}1+1+1-e^{-\lambda t} & \text{si } t\geq 0\\ 1-(1-e^{\lambda t})+0 & \text{si } t<0\end{cases}\\ &=\frac{1}{3}\times\begin{cases}3-e^{-\lambda t} & \text{si } t\geq 0\\ e^{\lambda t} & \text{si } t<0\end{cases}\end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événement $([Y=-1],[Y=0],[Y=1])$ on a :

$$\begin{aligned}P(Z=0)&=P(Z=0,Y=-1)+P(Z=0,Y=0)+P(Z=0,Y=1)\\ &=P(-X=0,Y=-1)+P(Y=0)+P(X=0,Y=1)\\ &=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. La variable aléatoire Z n'est pas à densité car F_Z n'est pas continue en 0. Elle n'est pas discrète car F_Z n'est pas constante par morceaux.

Exercice 14. 1. (a) $((U=-1),(U=1))$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\leq x)&=\mathrm{P}([Y\leq x]\cap[U=-1])+\mathrm{P}([Y\leq x]\cap[U=1])\\ &=\mathrm{P}([UX\leq x]\cap[U=-1])+\mathrm{P}([UX\leq x]\cap[U=1])\\ &=\mathrm{P}([X\geq -x]\cap[U=-1])+\mathrm{P}([X\leq x]\cap[U=1]).\end{aligned}$$

(b) Comme U et X sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\leq x)&=\mathrm{P}(X\geq -x)\mathrm{P}(U=-1)+\mathrm{P}(X\leq x)\mathrm{P}(U=1)\\ &=\frac{1}{2}(1-\Phi(-x))+\frac{1}{2}\Phi(x)\\ &=\frac{1}{2}\Phi(x)+\frac{1}{2}\Phi(x)\\ &=\Phi(x)\end{aligned}$$

avec Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi Y suit la même loi que X.

2. (a) On a : $E(U)=-1\mathrm{P}(U=-1)+1\mathrm{P}(U=1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

(b) On a $XY=X^2U$ donc $E(XY)=E\left(X^2U\right)$ et comme U et X^2 sont indépendantes :

$$E\left(X^2U\right)=E\left(X^2\right)E(U)=0.$$

(X^2 a une espérance car X a une variance!)
Ainsi $E(XY)=0$.

(c) On a donc $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ (espérance nulle pour $\mathcal{N}(0,1)$).

3. (a) On a $E\left(X^2\right)=V(X)+E(X)^2=1$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}=1$ et par parité $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}=\frac{1}{2}$.
Donc $\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2/2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

(b) Dans $\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx$ on pose

$$u(x)=-e^{-x^2/2}\quad;\quad v(x)=x^3.$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx&=\left[-x^3e^{-x^2/2}\right]_0^A-\int_0^A -e^{-x^2/2}3x^2dx\\ &=-A^3e^{-A^2/2}+3\int_0^A x^2e^{-x^2/2}dx.\end{aligned}$$

(c) Quand A tend vers $+\infty$, $A^3e^{-A^2/2}$ tend donc vers 0 par croissance comparée.
D'autre part :

$$\int_0^A x^2e^{-x^2/2}dx\to\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2/2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx=\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Par conséquent $\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^2/2}dx$ converge et vaut $\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$.

(d) La variable X a un moment d'ordre 4 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge, donc par parité $\int_{-\infty}^0 x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge également et vaut la même chose.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{3\sqrt{2\pi}}{2} = 3$.

Finalement, X a un moment d'ordre 4 et $E\left(X^4\right) = 3$.

4. (a) On a $X^2Y^2 = X^4U^2$ avec $U^2 = 1$ donc $X^2Y^2 = X^4$ et :

$$E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^4\right) = 3.$$

(b) Comme X^2, Y^2 et X^2Y^2 ont une espérance alors $\left(X^2, Y^2\right)$ a une covariancet :

$$\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) = E\left(X^2Y^2\right) - E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) = 3 - 1 = 2.$$

(c) Si X^2 et Y^2 sont indépendantes alors $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) = 0$ donc (contraposée) comme $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) \neq 0$ alors X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.

Et si X et Y sont indépendantes alors une fonction de X est indépendante d'une fonction de Y. Ici avec la fonction carré, comme X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes alors X et Y ne le sont pas.

Exercice 15.

1. Notons $Y = \max(X_1, X_2)$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = P(Y \leq t) &= P([X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t]) \\
&= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \quad \text{par indépendance} \\
&= F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Notons $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = 1 - P(Y > t) &= 1 - P([X_1 > t] \cap \cdots \cap [X_n > t]) \\
&= 1 - P(X_1 > t) \times \cdots \times P(X_n > t) \quad \text{par indépendance mutuelle} \\
&= 1 - P(X_1 > t)^n \quad \text{car elles suivent toutes la même loi que } X_1 \\
&= 1 - \left(1 - F_{X_1}(t)\right)^n \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi Y suit la loi $\mathscr{E}(n\lambda)$.

Exercice 16. 1. (a) Pour tout $x \in [0;1]$, on a $|x| = x$. D'où :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}$$

C'est-à-dire : $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Pour l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x)dx$, on a, en faisant le changement de variable affine $u = -x$:

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_1^0 f(-u)(-du) = \int_0^1 f(-u)du$$

Or, $f(u) = 1 - |-u| = 1 - |u| = f(u)$. D'où

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2}.$$

(b) On vérifie les hypothèses d'une densité de probabilité :

- La fonction f est continue sur $]-1;1[$ comme somme de fonctions continues. Elle est également continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ (car elle y est nulle). Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $|x| \leqslant 1$, et donc $f(x) \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 0$ également (car $f(x) = 0$). Donc finalement, on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont évidemment convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). De plus, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{(question précédente)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par relation de Chasles toujours, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx \\
&= 0 + 1 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

On déduit des 3 points ci-dessus que f est une densité de probabilité.

2. (a) Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} xf(x)dx$ sont évidemment absolument convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). Quant à l'intégrale $\int_{-1}^{-1} xf(x)dx$, elle est (absolument) convergente également car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment (ce n'est même pas une intégrale impropre).

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente et que donc$X$ admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx &= \int_{-1}^{1} xf(x)dx \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]1;+\infty[\\
&= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)dx\\
&= \int_{-1}^{0} x(1-|x|)dx + \int_{0}^{1} x(1-|x|)dx\\
&= \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx\\
&= \int_{-1}^{0} (x+x^2)dx + \int_{0}^{1} (x-x^2)dx\\
&= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\\
&= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne $E(X)=0$.

(b) De la même manière que pour l'espérance à la question précédente, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est absolument convergente. Donc X admet un moment d'ordre 2, ce qui implique que X admet une variance. De plus :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{(formule de König-Huygens)}\\
&= E(X^2) \quad (\text{car } E(X)=0)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \quad \text{(théorème du transfert)}\\
&= \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \quad (\text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]1;+\infty[)\\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)dx\\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1-|x|)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-|x|)dx\\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx\\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)dx + \int_{0}^{1} (x^2-x^3)dx\\
&= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}\\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. On calcule cette intégrale en différenciant les cas :
   - Si $x < -1$, alors l'intervalle $]-\infty;x]$ est inclus dans $]-\infty;-1[$ sur lequel f est nulle. Donc $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
   - Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt\\
&= 0 + \int_{-1}^{x} (1-|t|)dt\\
&= \int_{-1}^{x} (1+t)dt \quad \text{car } t \leqslant 0 \text{ pour tout } t \in [-1;x]\\
&= \left[t+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}\\
&= \left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(-1+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $F_X(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}$.

- Si $0 < x \leqslant 1$, alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \int_0^x (1-|t|)dt \quad \text{(voir question 1.(a))} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x (1-t)dt \quad \text{car } t \geqslant 0 \text{ pour tout } t \in [0;x] \\ &= \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $F_X(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$.

- Enfin, si $x > 1$, alors, toujours par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \quad \text{(voir question 1.(a))}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $F_X(x) = 1$.

Conclusion : on a bien $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4. (a) Si $x < 0$, alors $0 \leqslant P(Y \leqslant x) \leqslant P(Y < 0)$. Or, $P(Y < 0) = 0$ (car $Y = |X|$ et une valeur absolue n'est jamais strictement négative). Donc $P(Y \leqslant x) = 0$, c'est-à-dire $F_Y(x) = 0$.

(b) Soit $x \geqslant 0$. Alors :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P(|X| \leqslant x) \\ &= P(-x \leqslant X \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X < -x) \\ &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) \quad \text{car } X \text{ est une variable aléatoire à densité} \\ &= F_X(x) - F_X(-x).\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On calcule $F_Y(x)$ en différenciant les cas :

- Si $x < 0$, alors $F_Y(x) = 0$ (question 4.(a)).
- Si $x = 0$, alors $F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)$ d'après la question précédente, i.e $F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$.
- Si $x \in]0;1]$, alors :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)} \\ &= \left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2}\right) \quad \text{car } 0 < x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant -x \leqslant 0 \\ &= 2x - x^2.\end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors :

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)} \\ &= 1 - 0 \quad \text{car } x > 1 \text{ et } -x < -1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

En résumé : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

On constate alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $F'_Y(x)$ coïncide avec $g(x)$ (où g est la fonction donnée dans l'énoncé).

Ainsi Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(d) De même qu'aux questions 2.(a) et 2.(b), étant donné que g est nulle en dehors de $[0;1]$, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx$ sont absolument convergentes. Donc Y admet une espérance et une variance. De plus :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx \quad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1] \\ &= \int_0^1 2x(1-x)dx \\ &= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx \\ &= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)dx \quad \text{(théorème du transfert)} \\ &= \int_0^1 x^2 g(x)dx \quad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1] \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)dx \\ &= \int_0^1 (2x^2-2x^3)dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

5. (a) On suit l'indication (ou plutôt le rappel) de l'énoncé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_I(x) &= P(I \leqslant x) \\ &= 1 - P(I > x) \\ &= 1 - P\Big([U > x] \cap [V > x]\Big) \\ &= 1 - P(U > x)P(V > x) \quad \text{par indépendance de } U \text{ et } V \end{aligned}$$

En notant F_U (respectivement F_V) la fonction de répartition de U (resp. V), ceci devient :

$$\begin{aligned} F_I(x) &= 1 - (1 - F_U(x))(1 - F_V(x)) \\ &= 1 - (1 - F_U(x))^2 \quad \text{car } U \text{ et } V \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

Or (d'après le cours), $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Par conséquent, en remplaçant ci-dessus :

$$F_I(x) = \begin{cases} 1-(1-0)^2 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1-(1-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

(b) On constate que $F_I(x) = F_Y(x)$ pour tout x réel. Autrement dit, les variables aléatoires I et Y suivent la même loi.

6. Notons F_{I_n} la fonction de répartition de I_n. De même qu'à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{I_n}(x) &= P(I_n \leqslant x) \\ &= 1 - P(I_n > x) \\ &= 1 - P\Big([X_1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\Big) \\ &= 1 - P(X_1 > x) \times \ldots \times P(X_n > x) \quad \text{par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= 1 - (1 - F_U(x))^n \quad \text{car } X_1, \ldots, X_n \text{ suivent la même loi que } U \end{aligned}$$

Et donc, en remplaçant F_U comme à la question précédente, on obtient, cette fois :

$$F_{I_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

7. On simule Y en simulant I (puisque I et Y suivent la même loi) :

```
def Y():
    U = np.random()
    V = np.random()
    if U < V :
        return U
    else :
        return V
```