ECG2 – Mathématiques

CONCOURS BLANC 1 - MATHÉMATIQUES II

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type Ecricome (pages 2 à 5) ;

— un sujet type ESSEC mathématiques II (pages 6 à 10).

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type Ecricome

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrés d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.
2. L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.
3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de A.
   (c) La matrice A est-elle inversible ?
   (d) Montrer que les ensembles

$$E_0 = \left\{ X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad E_1 = \left\{ X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X \right\}$$

   sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun d'eux.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec a et b des réels.

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{cases}.$$

   (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$.
   Démontrer que la famille (A, B) est une base de F.
6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$.
   Vérifier que :

$$M = \alpha A + \beta B.$$

   (b) Calculer AB et BA.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n A + \beta^n B.$$

7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
   (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.$$

Partie III

Soient $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{T}\mathrm{X}_n + \mathrm{Y}.$$

8. Calculer la matrice $\mathrm{I}_3 - \mathrm{T}$ et exprimer cette matrice en fonction de A et de B.
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{T})^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que :
$$\mathrm{L} = \mathrm{T}\mathrm{L} + \mathrm{Y}.$$
11. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{L} = \mathrm{T}(\mathrm{X}_n - \mathrm{L})$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_n - \mathrm{L} = \mathrm{T}^n(\mathrm{X}_0 - \mathrm{L}).$$
12. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
   (c) Démontrer que : $\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.
   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Démontrer que :
$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\ln(x).$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suire définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$ `u0`.
6. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \frac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$ et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4 ...

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : « après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justfier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
   (c) Justifier que $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
   (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ et $[Z_n = 0]$.
   (e) En déduire que : $P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
2. On note V l'événement : « au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».
   Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n puis démontrer que $P(V) = 0$.
3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.
   (a) On suppose la bibliothèque `numpy` importée sous le nom `np` et on rappelle que la commande `np.random.randint(a,b+1)` renvoie un nombre choisi uniformément dans $[\![a, b]\!]$.
   Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    liste = [X,Y,Z]
    while _________ :
        i = np.random.randint(0,3)
        liste(i) = _________
        n = n+1
    return _________
```

   (b) Écrire un programme Python qui simule 1000 fois la variable T et qui renvoie la valeur moyenne prise par T.
4. Déterminer $T(\Omega)$.
5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega)$, $P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance et la calculer.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) Donner la loi du couple (X_2, W_2).
   (b) En déduire la loi de W_2 et calculer son espérance.
   (c) Calculer la covariance de X_2 et W_2.
   (d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.
9. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons et qui vaut 0 sinon.
   (a) Montrer que : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $E(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) Exprimer W_n en fonction des variables $W_{n,1}$, $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

(c) Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n.

10. Démontrer que : $P([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
    Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, quelle est la valeur de $P([X_n = k] \cap [W_n = 2])$?

11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2\binom{n}{k}}{3^n}$.
    Que vaut $P([X_n = n] \cap [W_n = 1])$?

12. Démontrer que :

$$E(X_n W_n) = 2nP([X_n = n] \cap [W_n = 2]) + \sum_{k=1}^{n-1} kP([X_n = k] \cap [W_n = 1]).$$

13. Montrer alors que $E(X_n W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis calculer la covariance de X_n et W_n.

14. Interpréter le résultat de la question précédente.

•Fin du sujet 1 •

Sujet 2 – Type ESSEC Mathématiques 2

Une des situations les plus fréquentes dans l'entretien d'un site concerne la gestion des équipements et, notamment, le fait de prévoir le remplacement d'éléments défaillants. Imaginons par exemple qu'un local soit éclairé par une ampoule. Celle-ci a une durée de vie aléatoire; quand elle tombe en panne, elle est immédiatement remplacée par une nouvelle ampoule et ainsi de suite... Une bonne gestion nécessite donc d'avoir connaissance du comportement des pannes successives, et notamment de ce comportement en moyenne, pour pouvoir prévoir un stock d'ampoules de rechange. Une telle situation s'appelle un processus de renouvellement et le but du problème est l'étude d'un modèle probabiliste le décrivant. Dans la première partie, on examine le comportement asymptotique des temps de panne. Dans la deuxième, on regarde quelques propriétés de base du processus. Enfin la troisième est consacrée à la détermination du comportement asymptotique du nombre de pannes moyen.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont **discrètes et définies sur un espace probabilisé** $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera E(Y) son espérance et V(Y) sa variance quand elles existent. On admettra en outre la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires positives telles que $Y \leqslant Z$ et E(Z) existe, alors Y admet une espérance et $E(Y) \leqslant E(Z)$.

Pour tout le problème, on se donne une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geqslant 1}$ **positives, mutuellement indépendantes et de même loi**. On notera, pour tout réel t, $F(t) = P(X_1 \leqslant t)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. On suppose $F(0) = P(X_1 = 0) < 1$. De plus, on suppose que X_1 admet un moment d'ordre 4, $E(X_1^4)$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1 Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. (a) Soit r un entier naturel tel que $1 \leqslant r \leqslant 4$. Montrer que $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.
   (b) Montrer que pour tout $r \in \{1,2,3,4\}$, X_1^r admet une espérance.
   On notera tout au long du problème $\mu = E(X_1)$**.**
   (c) Montrer que $\mu > 0$.
   (d) Montrer que la variable aléatoire $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.
2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements telle que la série de terme général $P(A_n)$ converge. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ B_n \supset B_{n+1}$. On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.
   (b) Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
      ($\star$) $\omega \in B$;
      ($\star\star$) ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k.
   (c) Soit $(F_n)_n$ une suite croissante d'événements c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$.
      i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = F_n \backslash F_{n-1}$ et $E_0 = F_0$. Montrer que les événements E_n, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints et que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n$.
      ii. On rappelle que d'après la question précédente,
      $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n).$$
      En déduire que $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n)$.
   (d) Montrer que $P(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$.
   (e) Montrer que si C et D sont deux évènements, on a : $P(C \cup D) \leqslant P(C) + P(D)$.

(f) Montrer que $P(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(g) En déduire que $P(B) = 0$.

3. Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées (c'est-à-dire d'espérance nulle) et de même loi. On suppose que Y_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $V(Y_1) = E(Y_1^2) = \sigma^2$ et $E(Y_1^4) = \rho^4$. On pose enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$.

   i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\Sigma_n^2 > n^2\varepsilon^2\right)$.

   ii. Soit U_n la variable aléatoire définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma_n^2(\omega) > n^2\varepsilon^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Reconnaître la loi de U_n.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(n\varepsilon)^2 P\left(\Sigma_n^2 > n^2\varepsilon^2\right) \leqslant E(U_n\Sigma_n^2) \leqslant n\sigma^2.$$

   iii. En déduire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ donné, on a : $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$.

   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   i. Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4 > \varepsilon^4\right)$.

   ii. Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right)$.
   (*On pourra adapter le raisonnement de la question 3.(a)*)

   iii. Montrer que

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq k}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k W_k,$$

   où W_k désigne une variable aléatoire fonction de $Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_{k+1}, \ldots, Y_n$ (on ne cherchera pas à expliciter cette variable aléatoire).

   iv. Montrer que $E((\Sigma_n)^4) = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4$.

   v. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier naturel n strictement positif :

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

   vi. Montrer que $P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right) \leqslant \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$.

4. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'évènement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right]$.

   (a) Montrer que la série de terme général $P(A_n)$ est convergente.

   (b) En déduire que la probabilité pour que A_n se produise pour une infinité de valeurs de n est nulle.

   (c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

   (d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

5. (a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est croissante.
   On considère la fonction S_∞ définie sur Ω par $S_\infty(\omega) = \lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ avec $S_\infty(\omega) = +\infty$ si $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ diverge.

   (b) Montrer que si $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

   (c) En déduire que $P(S_\infty = +\infty) = 1$.

2 Deuxième partie : Le processus de renouvellement

On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire

$$N_t = \max\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leqslant t\}.$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

6. (a) Soient deux réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Montrer que $N_s \leqslant N_t$.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'égalité des événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.

   (c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, montrer que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega)$ existe (elle est éventuellement infinie). On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.

   (d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose $N_\infty(\omega) = K$.

      i. Montrer qu'il existe $T_\omega > 0$ tel que : $\forall t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$.

      ii. Montrer qu'alors $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$ et $S_{K+1}(\omega) > t$ pour tout $t \geqslant T_\omega$.

      iii. En déduire que si $N_\infty(\omega) = K$ alors nécessairement $X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout t réel positif, ce qui est absurde.

      iv. Conclure que $P(N_\infty = +\infty) = 1$.

7. On souhaite écrire une fonction Python qui simule informatiquement la variable N_t. On suppose que la fonction `X` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X. Compléter la fonction suivante, qui prend en argument un nombre réel t, et renvoie une réalisation de N_t :

```
def Renouvellement (t) :
    N = 0
    S = 0
    while _______ :
         _________
         _________
    return N
```

8. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$P(N_t = n) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1).$$

   (b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on note $F_n(t) = P(S_n \leqslant t)$.

      i. Déterminer F_0 et F_1.

      ii. Montrer que $P(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$.

9. Soient U, V, U', V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $P(U = k) \neq 0$, on a

$$P_{[U=k]}(V = j) = P_{[U'=k]}(V' = j).$$

   Montrer que V et V' suivent la même loi.

10. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
    On note $W = \min\{k \geqslant 1,\ Z_k = 1\}$.

   (a) Montrer que pour tout $i \geqslant 1$, $P(W = i) = p(1-p)^{i-1}$.

   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $W_n = \min\left\{k \geqslant 1,\ \sum_{l=1}^{k} Z_l = n\right\}$.

      i. Montrer que pour tout $k \geqslant n$, on a :

$$P(W_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

      ii. Montrer que pour tout $k \geqslant n$ et $j \geqslant k+1$, on a

$$P_{[W_n=k]}(W_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

   (c) On suppose que pour tout entier $i \geqslant 1$, $P(X_1 = i) = p(1-p)^{i-1}$.

      i. Montrer que pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$, on a

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1} = j) = p(1-p)^{j-k-1}.$$

ii. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, S_n a même loi que W_n.

(d) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier naturel n non nul, on a

$$P(N_t = n) = \sum_{k=n}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t \rfloor} \binom{k-1}{n} p^{n+1} (1-p)^{k-n-1},$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier naturel inférieur ou égal à t (par convention $\sum_{k=r}^{s} = 0$ si $r > s$).

3 Troisième partie : Théorème du renouvellement

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11. (a) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, $S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}$.

(b) En déduire que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout réel $t \geqslant T_\omega$,

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.$$

(c) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(d) Montrer que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1.

(e) En déduire que l'événement $\left[\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

On va maintenant chercher à montrer que le résultat précédent s'étend en moyenne, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \to +\infty} E\left(\frac{N_t}{t}\right) = \frac{1}{\mu}.$$

12. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_J = \sum_{k=1}^{J} X_k$.

(a) Montrer que $S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ où $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \notin A, \\ 1 & \text{si } \omega \in A. \end{cases}$

On suppose désormais que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]}$ est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$. On **admettra** que si $(W_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires positives, l'écriture formelle $\sum_{n=1}^{+\infty} E(W_n) = E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} W_n\right)$ est toujours valide sous réserve d'existence.

(b) Montrer que les variables aléatoires X_k et $\mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ sont indépendantes.

(c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i. Montrer que $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U \geqslant n]}$.

ii. Montrer que $E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geqslant n)$.

(d) Montrer que $E(S_J) = E(X_1)E(J) = \mu E(J)$.

13. (a) Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = N_t + 1$. Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[J \leqslant n]}$ est indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$.

(b) En déduire que $E(S_{N_t+1}) = \mu(E(N_t) + 1)$ puis que $E(N_t) = \frac{E(S_{N_t+1})}{\mu} - 1$.

14. Montrer que pour tout $t > 0$, $\frac{E(N_t)}{t} \geqslant \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$.

15. Soit $b > 0$. On pose $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

(a) Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes, positives et de même loi.

(b) On pose $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\tilde{\mu}_b = E(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$.

i. Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $\tilde{S}_n \leqslant S_n$.

ii. Montrer que ; $\forall t \geqslant 0$, $\tilde{N}_t \geqslant N_t$.

iii. Montrer que : $\forall t \geqslant 0$, $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t+b$.

(c) i. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t}$.

ii. En déduire que pour tout réel $b > 0$,

$$\frac{E(N_t)}{t} \leqslant \frac{E(\tilde{N}_t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

(d) On choisit $b = \sqrt{t}$.

i. Montrer que

$$\frac{E(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{tE(\min(\sqrt{t}, X_1))}.$$

ii. Montrer que $0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}$.

iii. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} E(\min(\sqrt{t}, X_1)) = \mu$.

iv. Conclure que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{E(N_t)}{t} = \dfrac{1}{\mu}$.

•Fin du sujet 2 •