ECG2 – Mathématiques

DM1

- ⋆ **À rendre le lundi 17 octobre au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- ⋆ **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

Exercice 1

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de E.
   (b) Déterminer une base de E et en déduire sa dimension.
   (c) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ dans la base trouvée à la question précédente.
2. (a) Calculer A^2.
   (b) En déduire que A est une matrice inversible et donner A^{-1} en fonction de A.
3. On considère le sous-ensemble F de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{BX} = 2\mathrm{X} \right\}.$$

   (a) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

   (b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une famille génératrice de F.
   (c) Trouver une base de F et sa dimension.

Exercice 2

Le but de l'exercice est d'étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$. De même, montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. On s'intéresse à la continuité de f en 0.
   (a) Rappeler la définition de « f est continue en 0 ».
   (b) Déterminer la limite à gauche de f quand x tend vers 0.
   (c) Déterminer la limite à droite de f quand x tend vers 0. Une rédaction soignée et détaillée est attendue.
   (d) Conclure que f est continue en 0.

Exercice 3

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa fonction dérivée.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bords de son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, u_n est bien définie et $2 \leqslant u_n$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. .
   (c) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Le but de cette question est de déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+1}^a - u_n^a = u_n^a\left(\left(1+\frac{1}{u_n^2}\right)^a - 1\right).$$
   (b) En déduire : $u_{n+1}^a - u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n^{a-2}$.
   (c) Dans cette question, on prend $a = 2$ et on admet le théorème suivant :

   > **Théorème**
   >
   > Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel ℓ. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

   Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = 2$.

   (d) En simplifiant la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$, en déduire l'équivalent suivant :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}.$$