Chapitre 3 : Correction des tests

Test 1 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, calculer $u+3v$.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *avec* $u=(1,-1,0)$ *et* $v=(3,-2,5)$.
2. *Dans* $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *avec* $u=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ *et* $v=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
3. *Dans* $\mathbb{R}[x]$ *avec* $u=3x^3-x+1$ *et* $v=x^5-2x^3+x^2+2$.

Test 2 (*Voir la solution.*)

1. (a) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et soit* $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathbb{R}_n[x]^2$. *Montrer que* $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) *En déduire que l'addition de polynômes est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}_n[x]$.
2. *Soit* E *l'ensemble des polynômes de degré* **exactement** *égal à* n. *L'addition des polynômes est-elle une loi de composition interne sur* E ?

Test 3 (*Voir la solution.*)

1. *Dans* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, *on pose* $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *et* $e_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. *Écrire les vecteurs* $u=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ *et* $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* e_1, e_2 *et* e_3.
2. *Dans* $\mathbb{R}[x]$, *montrer que le polynôme* x^2+1 *est combinaison linéaire des polynômes* $(x+1)^2$, $x+1$ *et* 1.
3. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *la matrice* $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ *est-elle combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$?

Test 4 (*Voir la solution.*)

1. *On considère les trois polynômes suivants :* $\mathrm{P}=x^2+2x$, $\mathrm{Q}=-x^2+1$ *et* $\mathrm{R}=4x^2+6x-1$. *Déterminer tous les triplets de réels* (a,b,c) *tels que* $a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=0$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^4$, *on considère les vecteurs* $x=(1,2,-1,4)$ *et* $y=(2,4,-2,4)$. *Déterminer tous les couples de réels* (a,b) *tels que* $ax+by=0$.

Test 5 (*Voir la solution.*)

Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace considéré ?

1. $\mathrm{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$,
2. $\mathrm{G}=\{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_5[x] \mid \mathrm{P}'(0)=0\}$.

Test 6 (*Voir la solution.*)

Montrer que $\mathrm{E}=\{\mathrm{M}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{M}=2\mathrm{M}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Test 7 (*Voir la solution.*)

Montrer que $\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

Test 8 (*Voir la solution.*)

Donner une expression la plus simple possible des sous-espaces vectoriels suivants.

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}((1,2),(2,4))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(1+x,x,x-x^2,1+2x+x^2)$.

Test 9 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $\mathrm{F}=\left\{(2a+c,a+3b,2b+c)\in\mathbb{R}^3 \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
2. $\mathrm{F}=\left\{(c-a)x^3+ax^2+(2a-b)x+c\in\mathbb{R}_3[x] \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

Test 10 (***Voir la solution.***)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0 \quad \textit{et} \quad 2x + y - 5z = 0\right\}$.
2. $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$.
3. $\mathrm{H} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \quad \textit{et} \quad y = 3z\right\}$.

Test 11 (***Voir la solution.***)

Décrire les espaces vectoriels suivants à l'aide d'équations.

1. $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}((1,2,-1,2),(1,1,1,1))$.
2. $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(1,4,9))$.
3. $\mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2))$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncé.***)

1. $u+3v=(1,-1,0)+3(3,-2,5)=(10,-7,15)$.
2. $u+3v=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\3&7\end{pmatrix}$.
3. $u+3v=3x^3-x+1+3(x^5-2x^3+x^2+2)=3x^5-3x^3+3x^2-x+7$.

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncé.***)

1. (a) *On a :* $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\leqslant\max(\deg\mathrm{P},\deg\mathrm{Q})\leqslant n$.
   Donc : $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\in\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) *L'addition de polynômes* $+:\mathbb{R}_n[x]\times\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ *est donc bien définie. C'est une loi de composition interne par définition.*
2. *L'addition des polynômes n'est pas une loi de composition interne sur* E *car la somme de deux polynômes de degré exactement* n *n'est pas nécessairement de degré exactement* n*. Par exemple, avec* $n=1$, $\mathrm{P}=x$ *et* $\mathrm{Q}=-x+1$*, on a*
$$\deg\mathrm{P}=\deg\mathrm{Q}=1\quad\textit{mais}\quad\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q})=0\quad\textit{car}\quad\mathrm{P}+\mathrm{Q}=1.$$

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *On cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$u=xe_1+ye_2+ze_3.$$
Cela revient à résoudre le système
$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\x&+&2y&-&z&=&-1\\x&+&3y&+&z&=&3\end{array}\right.$$
d'inconnues (x,y,z)*. Or on a pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *:*
$$\begin{aligned}(x,y,z)\text{ solution de }(\mathrm{S})&\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\&&y&-&3z&=&-4\\&&2y&-&z&=&0\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&3\\&&y&-&3z&=&-4\\&&&&5z&=&8\end{array}\right.\\&\iff z=\frac{8}{5},\quad y=\frac{4}{5},\quad x=-1.\end{aligned}$$
Donc
$$u=-e_1+\frac{4}{5}e_2+\frac{8}{5}e_3.$$
De même pour v*, on cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$v=xe_1+ye_2+ze_3.$$
Cela revient à résoudre le système
$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&1\\x&+&2y&-&z&=&-2\\x&+&3y&+&z&=&5\end{array}\right.$$
d'inconnues (x,y,z)*. Or on a pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *:*
$$\begin{aligned}(x,y,z)\text{ solution de }(\mathrm{S})&\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&1\\&&y&-&3z&=&-3\\&&2y&-&z&=&4\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{ccccccc}x&+&y&+&2z&=&1\\&&y&-&3z&=&-3\\&&&&5z&=&10\end{array}\right.\\&\iff z=2,\quad y=3,\quad x=-6.\end{aligned}$$
Donc
$$v=-6e_1+3e_2+2e_3.$$

2. On cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$x^2+1=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c.$$

Par identification, cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & a & = & 1\\ & & 2a & + & b & = & 0\\ a & + & b & + & c & = & 1\end{array}\right.$$

On trouve que l'unique solution de (S) est $(1,-2,2)$ donc :

$$x^2+1=(x+1)^2-2(x+1)+2.$$

3. La matrice $\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe des réels a et b tels que

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\b&a+b\end{pmatrix}.$$

On peut identifier les coefficients des matrices de chaque membre et résoudre le système de quatre équations à deux inconnues comme précédemment. On peut aussi remarquer qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice soit combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est que ses deux coefficients diagonaux soient égaux. Ainsi, $\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=(a-b+4c)x^2+(2a+6c)x+b-c.$$

Donc :

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=0\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 4c & = & 0\\ 2a & & & + & 6c & = & 0\\ & & b & - & c & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -3c\\ b & = & c.\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-3c,c,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$ax+by=0\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0\\ 2a & + & 4b & = & 0\\ -a & - & 2b & = & 0\\ 4a & + & 4b & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0\\ 4a & + & 4b & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 0\\ b & = & 0.\end{array}\right.$$

L'unique solution est $(0,0)$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. On a $(1,0)\in\mathrm{F}$ et $(0,1)\in\mathrm{F}$ mais $(1,0)+(0,1)\notin\mathrm{F}$. Ainsi, F n'est pas stable par addition et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. L'ensemble G est non vide car $0\in\mathrm{G}$. Soient $(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{G}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors par linéarité de la dérivation, on a

$$(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})'(0)=\mathrm{P}'(0)+\lambda\mathrm{Q}'(0)=0.$$

Ainsi $\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}\in\mathrm{G}$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[x]$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

L'ensemble E est inclus dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et non vide car contient la matrice nulle. Soient $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathrm{E}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Par linéarité de la transposition on a

$$^t(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})={}^t\mathrm{M}+\lambda{}^t\mathrm{N}=2\mathrm{M}+\lambda2\mathrm{N}=2(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}).$$

Ainsi $\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}\in\mathrm{E}$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En particulier, E est un espace vectoriel.

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncé.***)

Posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$. *Il est clair que :*

$$\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^2.$$

Par ailleurs, la famille $((1,2),(2,1))$ *est génératrice de* F. *Elle est composée de deux vecteurs non-colinéaires donc elle est libre. Ainsi c'est une base de* F *et* $\dim(\mathrm{F}) = 2$.
Enfin, on a donc : $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\dim(\mathrm{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. *Par conséquent,* $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$.

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Comme* $(2,4)$ *est combinaison linéaire de* $(1,2)$ *alors* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2),(2,4)) = \mathrm{Vect}((1,2))$.
2. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \mathrm{Vect}(1+x\,,\ x\,,\ x-x^2\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1+x\,,\ -x\,,\ x-x^2\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1+x-x\,,\ -x\,,\ x-x^2\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1\,,\ -x\,,\ x-x^2-x\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1\,,\ -x\,,\ -x^2\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1\,,\ -x\,,\ -x^2\,,\ 1+2x+x^2)\\
&= \mathrm{Vect}(1\,,\ -x\,,\ -x^2)
\end{aligned}$$

car $1+2x+x^2$ *est combinaison linéaire de* 1, $-x$ *et* $-x^2$. *Finalement,*

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1\,,\ -x\,,\ -x^2) = \mathrm{Vect}(1\,,\ x\,,\ x^2) = \mathbb{R}_2[x].$$

Correction du test 9 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} = \left\{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} &= \left\{(2a,a,0)+(0,3b,2b)+(c,0,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{a(2,1,0)+b(0,3,2)+c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,3,2),(1,0,1)).
\end{aligned}$$

En particulier, F *est un espace vectoriel et* $((2,1,0),(0,3,2),(1,0,1))$ *est une famille génératrice de* F.

2. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} = \left\{(c-a)x^3+ax^2+(2a-b)x+c \in \mathbb{R}_3[x] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} &= \left\{-ax^3+ax^2+2ax-bx+cx^3+c \in \mathbb{R}_3[x] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \left\{a(-x^3+x^2+2x)-bx+c(x^3+1)) \in \mathbb{R}_3[x] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}\\
&= \mathrm{Vect}(-x^3+x^2+2x, -x, x^3+1).
\end{aligned}$$

En particulier, F *est un espace vectoriel et* $(-x^3+x^2+2x, -x, x^3+1)$ *est une famille génératrice de* F.

Correction du test 10 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{F} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0\\ 2x & + & y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & z & = & 0\\ & & -y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+z\\ y & = & -3z \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4z\\ y & = & -3z \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{F} = \left\{(4z,-3z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((4,-3,1)).$$

2. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z = 0\right\} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y-2z\right\}\\
&= \left\{(y-2z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}\\
&= \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1)).
\end{aligned}$$

3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$(x,y,z)\in \mathrm{H} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & y \\ y & = & 3z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & 3z \\ y & = & 3z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{3}{2}z \\ y & = & 3z \end{array}\right. .$$

Donc

$$\mathrm{H}=\left\{\left(\frac{3}{2}z,3z,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathrm{Vect}\left(\left(\frac{3}{2},3,1\right)\right).$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. *Alors*

$$(x,y,z,t)\in \mathrm{F}_1 \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (x,y,z,t)=\lambda(1,2,-1,2)+\mu(1,1,1,1) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & = & y \\ -\lambda & + & \mu & = & z \\ 2\lambda & + & \mu & = & t \end{array}\right.$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & x \\ \lambda & & & = & y-x \\ -2\lambda & & & = & z-x \\ \lambda & & & = & t-x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & x \\ \lambda & & & = & y-x \\ -2(y-x) & & & = & z-x \\ y-x & & & = & t-x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda+\mu & = & x \\ \lambda & = & y-x \\ 3x-2y-z & = & 0 \\ y-t & = & 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $y-t=0$ *et* $3x-2y-z=0$. *Ainsi*

$$\mathrm{F}_1=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y-t=0 \quad \textit{et} \quad 3x-2y-z=0\right\}.$$

2. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Alors*

$$(x,y,z)\in \mathrm{F}_2 \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad (x,y,z)=\lambda(1,1,1)+\mu(1,2,3)+\gamma(1,4,9) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad (\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & 2\mu & + & 4\gamma & = & y \\ \lambda & + & 3\mu & + & 9\gamma & = & z \end{array}\right.$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ & & \mu & + & 3\gamma & = & y-x \\ & & 2\mu & + & 8\gamma & = & z-x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ & & \mu & + & 3\gamma & = & y-x \\ & & & & 2\gamma & = & x+z-2y \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Ainsi*

$$\mathrm{F}_2=\mathbb{R}^3.$$

3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *Alors*

$$(x,y,z)\in \mathrm{F}_3 \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (x,y,z)=\lambda(2,1,-3)+\mu(1,1,-2) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & + & \mu & = & x \\ \lambda & + & \mu & = & y \\ -3\lambda & - & 2\mu & = & z \end{array}\right.$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & + & \mu & = & x \\ -\lambda & & & = & y-x \\ \lambda & & & = & z+2x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & + & \mu & = & x \\ & & \lambda & = & x-y \\ & & x-y & = & z+2x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2\lambda & + & \mu & = & x \\ & & \lambda & = & x-y \\ & & x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $x+y+z=0$. *Ainsi*

$$\mathrm{F}_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}.$$