Chapitre 1 : Étude de suites

1 Suites définies par une relation de récurrence

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On s'intéresse aux suites définies par la relation de récurrence

$$\left\{\begin{array}{c} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

Dans les sujets de concours, l'étude est toujours guidée et suit à peu près toujours le même plan :

1. **Étudier la fonction** f (faire son tableau de variation).
2. **Vérifier que la suite est bien définie**.

   $\hookrightarrow$ Cela signifie vérifier que tous les termes de la suite peuvent être calculés ou, plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient bien à l'ensemble de définition de f.

Exemple 1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

est-elle bien définie ?

Calculons les premiers termes :

$u_1 = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -1$, $u_2 = 1 + \frac{1}{-1} = 0$. *Par conséquent, u_3 n'est pas défini !*

$\hookrightarrow$ En général, pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, on procède par récurrence.

Remarque 1

(a) *Si J est un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f tel que $f(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$ et $u_0 \in \mathrm{J}$ alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{J}$. Un tel intervalle est appelé un intervalle **stable par** f.*

(b) *En général dans les concours, l'intervalle stable vous est donné et on vous demande de vérifier que tous les termes de la suites sont dedans (par récurrence).*

Exemple 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

(a) *Montrons par récurrence la propriété suivante : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n > 0$ ».*

- ⋆ Initialisation *:*

  on sait que $u_0 = 1 > 0$

  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

- ⋆ Hérédité *: supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.*

  Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et que $u_n > 0$ donc

  $$\frac{1}{u_n} \quad \textit{est bien défini et} \quad \frac{1}{u_n} > 0.$$

  Ainsi

  $$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \quad \textit{est bien défini et} \quad u_{n+1} > 0.$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- ⋆ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \quad \textit{est bien défini et} \quad u_n > 0$$

(b) *Dans l'hérédité, on a utilisé le fait si $u_n > 0$ alors $\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > 0$.*

Plus généralement,

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{x} > 0$$

Cela signifie que $]0, +\infty[$ est un intervalle stable par la fonction $x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

Test 1 (*Voir la solution.*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

(a) *Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par :*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{2-x}$$

est strictement croissante.

(b) *En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 < u_n < 1$.*

(c) *Que peut-on dire de l'intervalle $]0,1[$?*

3. **Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

↪ *Méthode 1* : si f est croissante sur un intervalle J qui contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (un intervalle stable contenant u_0 par exemple), on montre par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : si $u_0 < u_1$ elle est croissante et si $u_1 < u_0$ elle est décroissante.

Exemple 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

On note f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{2-x}.$$

D'après le test 1, f est strictement croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \in]0,1[$.
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Montrons par récurrence la propriété suivante : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ ».

- Initialisation :
  on sait que $u_0 = \frac{1}{2}$ et que $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{3} < u_0$
  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- Hérédité : *supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.*
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_{n+1} < u_n$.
  On veut montrer que $u_{n+2} < u_{n+1}$.
  Comme f est strictement croissante et que $u_{n+1} < u_n$, on a
  $$f(u_{n+1}) < f(u_n).$$
  Or, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc
  $$u_{n+2} < u_{n+1}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : *d'après le principe de récurrence :*
  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

Remarque 2

Quand f est décroissante, la suie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone en général! Cependant on peut montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires (Hors-programme).

↪ *Méthode 2* : étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ permet de trouver la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

Exemple 4

On reprend l'exemple précédent.

(a) *Montrer que*

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) - x < 0.$$

On a pour tout $x \in]0,1[$

$$f(x) - x = \frac{x}{2-x} - x = x\left(\frac{1}{2-x} - 1\right) x\frac{1-(2-x)}{2-x} = x\frac{x-1}{2-x} < 0$$

car $x - 1 < 0$ et $2 - x > 0$.

(b) *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$ donc d'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. **Étudier la convergence**

Définition 1 (Point fixe d'une application)

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application d'un ensemble E dans lui-même et soit $\ell \in \mathrm{E}$. On dit que ℓ est **un point fixe de** f si $f(\ell) = \ell$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs réelles et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathrm{I}$ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.
En particulier, si f est continue sur I et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in \mathrm{I}$, ℓ est nécessairement un point fixe de f.

↪ Si f est continue, pour déterminer les éventuelles limites (finies), on cherche donc les points fixes de f soit en résolvant l'équation $f(x) = x$ par une méthode directe, soit en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$ (on pourra penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection).

↪ À ce stade **on ne sait toujours pas si la suite converge**.

↪ Si on sait que la suite est monotone et majorée/minorée, on peut utiliser le théorème de convergence monotone pour justifier l'existence de la limite. Si f possède plusieurs points fixes, il faut alors identifier lequel est la limite.

↪ Dans certains cas, on peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en montrant que f n'a pas de point fixe ou qu'il est impossible que la suite convergence vers les éventuels points fixes identifiés .

Exemple 5

On reprend toujours le même exemple.

(a) *Déterminer les points fixes de f.*

On peut trouver les points fixes de manière directe : soit $x \in [0,1]$, on a

$$f(x) = x \iff \frac{x}{2-x} = x \iff x = (2-x)x \iff x(1-(2-x)) = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Les points fixes de f sont donc 1 et 0.

(b) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et identifier sa limite.*

On a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Par le théorème de convergence monotone, elle admet donc une limite ℓ et par encadrement on a $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

La fonction f étant continue sur $[0,1]$, ℓ est un point fixe de f donc vaut 0 ou 1. Or, par décroissance, pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$u_n < u_1$$

donc par passage à la limite $\ell \leqslant u_1$. Comme $u_1 < 1$, on en déduit que

$$\ell \leqslant u_1 < 1.$$

Par conséquent, $\ell \neq 1$ et donc $\ell = 0$.

5. **Étudier la convergence à l'aide de l'inégalité des accroissements finis** : on peut parfois obtenir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 2 (Inégalité des accroissements finis v2)

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $\mathrm{I} = [a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Supposons qu'il existe un réel k tel que $\forall u \in]a,b[, |f'(u)| \leqslant k$. Alors

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

$\hookrightarrow$ Si f vérifie les hypothèses de ce théorème sur un intervalle J contenant tous les termes de la suite et que $\ell \in \mathrm{J}$ est un point fixe de f alors :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|.$$

On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|.$$

Si $|k| < 1$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Test 2 (*Voir la solution.*)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [-1,+\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+1}.$$

(a) *Déterminer les points fixes de f. Montrer que f possède un unique point fixe dans $[0,2]$ que l'on notera ℓ.*

(b) *Justifier que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.*

(c) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   i. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0,2]$.*

   ii. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.*

   iii. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et en déduire la convergence de la suite.*

(d) i. *Écrire une fonction Scilab d'en-tête* function u = suite(n) *qui, prenant en argument un entier n, renvoie la valeur de u_n.*

   ii. *Écrire un programme Scilab prenant en argument un réel* epsilon *et renvoyant une valeur approchée de ℓ à* epsilon *près.*

2 Suites définies implicitement

Cette partie n'est pas officiellement au programme mais les suites définies implicitement font souvent l'objet d'un exercice dans les écrits de concours.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite définie implicitement lorsque son terme général n'est pas donné sous forme explicite mais comme solution d'une équation. Dans les énoncés, on rencontre en général deux types de suites définies implicitement.

1. « Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n. »
   - En général, f est strictement monotone (éventuellement en restriction à un sous-intervalle). Pour justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on étudie les variations de f et on utilise le théorème de la bijection.

- La bijection réciproque f^{-1} de f (éventuellement en restriction à un sous-intervalle) est monotone de même sens de monotonie que f. Cela permet d'étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f^{-1}(n+1) \quad \text{et} \quad u_n = f^{-1}(n).$$
- Pour déterminer la limite, lorsqu'elle existe, on passe à la limite dans l'égalité $u_n = f^{-1}(n)$ ou $f(u_n) = n$

Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x + \ln(x).$$

(a) *Dresser le tableau de variations de f en précisant les limite en 0 et en $+\infty$.*

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de ces deux fonctions. De plus
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi

x	0		$+\infty$
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera u_n.*

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de ces deux fonctions. D'après la question précédente, f est strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in]-\infty, +\infty[$ donc admet un unique antécédent par f que l'on note u_n.

(c) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par définition,
$$f(u_{n+1}) = n+1 \quad \text{et} \quad f(u_n) = n$$
ce qui se réécrit, en notant $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la bijection réciproque de f,
$$u_{n+1} = f^{-1}(n+1) \quad \text{et} \quad u_n = f^{-1}(n).$$
Or on sait, d'après le théorème de la bijection , que f^{-1} est strictement croissante (car f l'est) donc, comme $n < n+1$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = u_{n+1}.$$

(d) *Déterminer, si elle existe, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

La fonction f^{-1} est strictement croissant. De plus, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$f^{-1}(f(x)) = x.$$
Elle est donc non majorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit
$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$$
puis
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty.$$

Remarque 3

Dans des situations où la suite est définie par une équation du type $f(x) = n^2$, $f(x) = \frac{1}{n}$, ..., pas de panique, la méthode reste la même! Voir le TD.

2. « Soit I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions toutes définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n. »
   - En général, les fonctions f_n sont strictement monotones (éventuellement en restriction à un sous-intervalle). Pour justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on utilise le théorème de la bijection.
   - Pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on compare $f_n(u_{n+1})$ et $f_n(u_n) = 0$ (c'est-à-dire qu'on étudie le signe de $f_n(u_{n+1})$) et on utilise la monotonie de f_n.

- On peut aussi utiliser les variations des fonctions f_n pour majorée ou minorée la suite. Par exemple, si a est un réel tel que $f_n(a) \geqslant 0 = f(u_n)$ et si f_n est croissante alors $a \geqslant u_n$.
- On peut parfois en déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un théorème d'encadrement, de convergence monotone ou en passant à la limite dans l'égalité $f_n(u_n) = 0$.

Exemple 7

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

(a) *Pour tout $n \geqslant 1$, étudier les variations de f_n.*

Por tout $n \geqslant 1$, f_n est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x) = 5x^4 + n > 0.$$

De plus

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

Ainsi

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(b) *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On notera cette solution u_n.*

D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et strictement croissante. D'après, le théorème de la bijection, pour tout $n \geqslant 1$, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} = f_n(\mathbb{R})$ et comme $0 \in \mathbb{R} = f_n(\mathbb{R})$, il existe un unique réel noté u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

(c) *Montre que pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$f_n(0) = -1 \leqslant f_n(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 \geqslant 0 = f_n(u_n)$$

c'est-à-dire

$$f_n(0) \leqslant f_n(u_n) \leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, d'après le théorème de la bijection, f_n^{-1} est strictement croissante car f_n l'est. On en déduit donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

(d) *En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.*

D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(e) *Étudier le signe de $f_n(u_{n+1})$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

On a, pour tout $n \geqslant 1$

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1.$$

De plus,

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1$$

donc

$$u_{n+1}^2 = -(n+1)u_{n+1} + 1.$$

En injectant cette égalité dans l'expression de $f_n(u_{n+1})$ on trouve

$$f_n(u_{n+1}) = -(n+1)u_{n+1} + 1 + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1} \leqslant 0$$

car $u_{n+1} \geqslant 0$.
Ainsi, $f_n(u_{n+1}) \leqslant 0 = f_n(u_n)$ donc, par croissance de f_n^{-1} on a

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

3 Objectifs

1. Savoir montrer que les termes d'une suite définie par récurrence sont bien définis, appartiennent à un intervalle donné.
2. Savoir exploiter la croissance de f ou le signe de $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence.
3. Connaître la définition d'un point fixe et le théorème 1.
4. Savoir déterminer les points fixes d'une fonction f en résolvant l'équation $f(x) = x$ ou en étudiant $x \mapsto f(x) - x$ (étude de signe, utilisation du théorème de la bijection ...)
5. Savoir étudier la convergence d'une suite définie par récurrence (à l'aide du théorème de convergence monotone, en utilisant les points fixes ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis par exemple)
6. Savoir justifier l'existence d'une suite définie implicitement avec le théorème de la bijection.
7. Savoir exploiter les variations de(s) fonction(s) pour étudier une suite définie implicitement (monotonie, majorant, minorant, éventuellement la limite).

4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

a) • *Méthode 1 : pour tout* $x \in [0,1]$ *on a*

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = \frac{x-2+2}{x-2} = \frac{x-2}{2-x} + \frac{2}{2-x} = -1 + \frac{2}{2-x}$$

Donc la fonction f *est strictement croissante car la fonction* $x \mapsto \frac{2}{2-x}$ *l'est.*

• *Méthode 2 :* f *est dérivable en tant que quotient de deux fonctions dérivables (dont le dénominateur ne s'annule pas) et, pour tout* $x \in [0,1]$ *on a*

$$f'(x) = \frac{2-x-x\times(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

Donc la fonction f *est strictement croissante.*

b) *Montrons par récurrence la propriété suivante : « pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est bien définie et* $0 < u_n < 1$ *».*

⋆ Initialisation *:*
on sait que $u_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[$
La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

⋆ Hérédité *: supposons la propriété vraie pour un certain rang* $n \in \mathbb{N}$ *et montrons qu'elle est vraie au rang* $n+1$.
Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n *est bien défini et que* $0 < u_n < 1$. *Ainsi par croissance stricte de* f *on a*

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

et comme $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$, *on trouve*

$$0 < u_{n+1} < 1.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

⋆ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \quad \text{est bien défini et } \ 0 < u_n < 1$$

c) *Dans l'hérédité, on a vu que*

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[$$

Cela signifie que $]0,1[$ *est un intervalle stable par la fonction* f.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

a) *Soit* $x \in [-1,+\infty[$. *Alors*

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{x+1} = x.$$

Procédons par disjonction de cas :

• *Si* $x \in [-1,0[$ *: l'équation* $\sqrt{x+1} = x$ *n'a pas de solution dans* $[-1,0[$. *En effet, on a*

$$0 \leqslant \sqrt{x+1} \neq x < 0$$

• *Si* $x \geqslant 0$, *on a alors*

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} = x &\Longleftrightarrow x+1 = x^2\\ &\Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation a pour discriminant $\Delta = 1 - 4\times(-1) = 5$ *et ses solutions sont donc*

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Or, comme $\sqrt{5} \geqslant 2$, $1-\sqrt{5} < 0$. *Ainsi* $x_1 < 0$ *et la seule solution positive de l'équation est donc* x_2.

Finalement, f *possède un unique point fixe,* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et*

$$0 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1+3}{2} = 2.$$

b) *La fonction* f *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *car c'est la composée* $h \circ g$ *des fonctions :*

- $\star$ *$g : x \mapsto x+1$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ telle que $g(]-1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$*
- $\star$ *$h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$.*

De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geqslant 0$$

donc

$$|f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

car $x+1 \geqslant 1$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$ puis $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leqslant 1$.

c) i) *Montrons par récurrence la propriété suivante : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \in [0,2]$. ».*

- $\star$ Initialisation *:*
  on sait que $u_0 = 0 \in [0,2]$
  La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- $\star$ Hérédité *: supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.*
  Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et que $u_n \in [0,2]$. En particulier, u_{n+1} est bien défini et, par croissance de f, on a

  $$0 \leqslant f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) = \sqrt{3} \leqslant 2.$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- $\star$ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*

  $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \quad \text{est bien défini et} \ \ u_n \in [0,2]$$

ii) *Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, f est continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$ et pour tout $x \in [0,2]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $u_n \in [0,2]$ et $\ell \in [0,2]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a*

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

iii) *Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.*

- $\star$ Initialisation *:*
  comme $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- $\star$ Hérédité *: supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.*
  Par hypothèse de récurrence, on sait que

  $$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

  D'après la question précédente on a donc

  $$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- $\star$ Conclusion *: d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$.*

Or, comme $u_0 \in [0,2]$ et $\ell \in [0,2]$, on a : $|u_0 - \ell| \leqslant 2$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ alors, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

d) *i)*

```
function u=suite(n)
u=0
for k=1:n
    u=sqrt(u+1)
end
endfunction
```

ii)

```
epsilon=input("Entrer epsilon")
n=0;
u=0;
while 1/2^(n-1)>epsilon
    u=sqrt(u+1);
    n=n+1;
end
disp(u)
```