Chapitre 4 : Familles de vecteurs

1 Familles génératrices

Définition 1 (Famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est **génératrice** de E si :

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

Cela signifie que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

2. Plus généralement, une famille non vide $\mathscr{F}$ (possiblement infinie) de vecteurs de E est **génératrice** de E si :

$$\forall u \in E,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (u_1, \ldots, u_n) \in \mathscr{F}^n,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Cela signifie que tout élément de E est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{F}$.

Exemple 1

1. *La famille* $((1,0),(0,1))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$*. En effet,*

2. *La famille formée des matrices suivantes :*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$*. En effet,*

3. *La famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}[X]$*. En effet,*

Méthode 1

1. *Pour déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel, on utilisera les méthodes vues au paragraphe 2.2 du chapitre précédent ("Sous-espace engendré").*
2. *Pour vérifier si une famille donnée* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est génératrice de* E*, on considère un vecteur* $u \in E$ *quelconque et on cherche des scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que*

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

La famille est alors génératrice si et seulement si le système linéaire ainsi obtenu a des solutions quel que soit $u \in E$.

Exemple 2

Montrons que la famille $((2,1),(1,1),(0,1))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Test 1 (*Voir solution.*)

La famille (u,v,w) *est-elle génératrice de* $\mathbb{R}^3$*, où*

$$u=(1,2,3)\ ,\ v=(0,-1,-2)\ ,\ w=(2,3,8)\ ?$$

Proposition 1

On ne change pas le caractère générateur d'une famille en

- changeant l'ordre des vecteurs,
- en ajoutant à cette famille des nouveaux vecteurs,
- en multipliant un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
- retirant de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Remarque 1

Comparer avec la proposition 7 du chapitre précédent.

Test 2 (*Voir solution.*)

On admet que la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$. *En déduire, à l'aide de la proposition précédente, que* $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

2 Familles libres

Définition 2 (Famille libre/liée)

Soient E un espace vectoriel et soit $n\in\mathbb{N}^*$

- Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs de E est dite **libre** si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=0_E \Longrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$$

- Plus généralement, une famille non vide $\mathscr{F}$ (possiblement infinie) de vecteurs de E est dite **libre** si toute sous-famille finie (non vide) de $\mathscr{F}$ est libre au sens défini ci-dessus.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque 2

1. *Autrement dit, une famille est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs est la combinaison triviale.*
2. *Si* $(u_1, \dots, u_n)$ *est une famille libre, on dit que les vecteurs* $u_1, \dots, u_n$ *sont* ***linéairement indépendants****.*

Méthode 2

Pour déterminer si une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ *est libre ou liée, on cherche les scalaires* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tels que*

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire homogène d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*. Il y a deux cas possibles :*

1. *le système a pour unique solution* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$*, la famille est alors libre ;*
2. *le système admet une infinité de solutions, la famille est alors liée.*

Exemple 3

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, on considère la famille* $((2,1,4),(6,3,1),(-2,-1,7))$*. Déterminons si cette famille est libre ou liée.*

2. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, montrons que la famille* $((1,2),(2,3))$ *est libre.*

3. *La famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est libre. En effet, pour toute sous-famille finie* $(X^{n_1}, \dots, X^{n_p})$ *on a*

$$\lambda_1 X^{n_1} + \cdots + \lambda_p X^{n_p} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Test 3 (***Voir solution.***)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la famille*

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

2. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la famille constituée des matrices*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. *Dans $\mathbb{R}[X]$ la famille*

$$(X^2 - X + 1, 2X^2 - X + 3, -X^2 + X - 1).$$

Proposition 2

- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
- Si on ajoute un vecteur à une famille liée, elle reste liée.

Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Proposition 3

- Une famille constituée d'un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille constituée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
- On ne change pas le caractère libre d'une famille en changeant l'ordre des vecteurs, en retirant un vecteur à la famille, un multipliant un vecteur par un scalaire **non nul**, en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

Proposition 4

Une famille de polynômes **non nuls** de degrés **distincts** est libre. Une telle famille est appelée une famille **échelonnée** de polynômes.

⚠ Une famille qui n'est pas échelonnée peut-être libre ou liée selon les cas !

Test 4 (***Voir solution.***)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $(X+1, X+2)$,
2. $(X+1, 2X+2)$.

3 Bases

3.1 Définition

Définition 3 (Base)

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice.

Remarque 3

Si $(u_1,\dots,u_p)$ *est libre alors c'est une base de l'espace* $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

Exemple 4

1. *D'après l'exemple 1 et le test 3, la famille ci-dessous est une base de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *:*

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

2. *D'après les exemples 1 et 3, la famille* $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
3. *Montrons que la famille* (e_1,e_2,e_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *où*

$$e_1=(1,0,1)\ ,\ e_2=(0,1,1)\ ,\ e_3=(1,1,0).$$

Méthode 3

1. *Pour montrer qu'une famille donnée est une base, on montre qu'elle est génératrice et libre.*
2. *Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on trouve une famille génératrice (voir chapitre précédent) puis on cherche à savoir si cette famille est libre ou liée :*
   - *si elle est libre, c'est donc une base ;*
   - *si elle est liée, un vecteur est combinaison linéaire des autres : d'après la proposition 1 la famille obtenue en retirant ce vecteur est toujours génératrice. Si cette nouvelle famille est libre, on a gagné, sinon on peut encore enlever un vecteur pour trouver une famille génératrice plus petite. Si le processus s'arrête, on tombe sur une famille libre et génératrice.*

Exemple 5

Dans $\mathbb{R}^3$*, on considère*

$$u = (2,1,1)\ ,\ v = (1,-1,3)\ ,\ w = (4,5,-3).$$

Déterminons une base de $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.

Test 5 (*Voir solution.*)

1. *Soit* $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}$*. Montrer que c'est un espace vectoriel et trouver en une base.*
2. *Soient*

$$\mathrm{P}_0 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)\ ,\ \mathrm{P}_1 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)\ ,\ \mathrm{P}_2 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2).$$

Montrer que la famille $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

3.2 Coordonnées dans une base

Remarque 4

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ *et soient* E *un espace vectoriel et* $(u_1,\dots,u_p)$ *une famille de vecteurs de* E.

1. *Si* $(u_1,\dots,u_p)$ *est génératrice alors tout vecteur* $u \in \mathrm{E}$ *s'écrit* ***d'au moins*** *une façon comme combinaison linéaire de* $u_1,\dots,u_p$.
2. *Si* $(u_1,\dots,u_p)$ *est libre alors tout vecteur* $u \in \mathrm{E}$ *s'écrit* ***d'au plus*** *une façon comme combinaison linéaire de* $u_1,\dots,u_p$.

Définition 4 (Proposition/Définition : coordonnées dans une base)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E. Pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe un unique p-uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Remarque 5

Dans l'exemple 4, on a rencontré un exemple de base contenant une infinité d'éléments. Dans ce cas, tout élément s'écrit d'une unique façon comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la base et on peut encore parler de coordonnées.

Méthode 4

Étant donnée une base $(u_1, \dots, u_p)$ et un vecteur u pour trouver les coordonnées de u dans cette base on cherche à trouver l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ de $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$. Cela revient à résoudre un système.

Exemple 6

1. *D'après l'exemple 4, la famille*

$$e_1 = (1,0,1)\ ,\ e_2 = (0,1,1)\ ,\ e_3 = (1,1,0)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \frac{x - y + z}{2} e_1 + \frac{z - x + y}{2} e_2 + \frac{y - z + x}{2} e_3.$$

Les coordonnées de (x, y, z) dans cette base sont donc

2. *Dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, la famille $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ est une base car*

Les coordonnées de $2\mathrm{X}^2 + 1$ dans cette base sont

Test 6 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathscr{B} = ((1,2,-1),(-1,0,2),(1,1,1))$.

1. *Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $(1,2,3)$ dans cette base.*
3. *Soient x, y, z trois réels. Déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans cette base.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on considère la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{X}^2 + 1, \mathrm{X} + 1, 1)$.

1. *Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $4\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 5$ dans cette base.*

3.3 Base canonique

Certains espaces vectoriels possèdent, par leur définition, une base naturelle appelée **base canonique**, dans laquelle les cordonnées sont particulièrement simples à lire.
Soient $n, p \in \mathbb{R}^*$.

1. **Base canonique de** $\mathbb{R}^n$.
   La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille constituée des vecteurs
   $$e_1 = (1,0,\dots,0)\ ,\ e_2 = (0,1,0,\dots,0)\ ,\ \dots\ ,\ e_n = (0,\dots,0,1).$$
   Les coordonnées d'un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique sont

2. **Base canonique de** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1.
   Les coordonnées d'une matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ dans la base canonique sont

   Par exemple, pour $n = p = 2$ la base canonique est la base de l'exemple 4 et les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ sont

3. **Base canonique de** $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   La base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est la famille $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\dots,\mathrm{X}^n)$.
   Les coordonnées d'un polynôme $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \dots + a_n\mathrm{X}^n$ dans la base canonique sont

4. **Base canonique de** $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   La base canonique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est la famille $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2,\dots,\mathrm{X}^n,\dots)$.
   Les coordonnées d'un polynôme $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \dots + a_n\mathrm{X}^n$ dans la base canonique sont

4 Objectifs

1. Savoir montrer qu'une famille est génératrice (voir chapitre précédent).
2. Avoir compris et connaître par coeur les définitions de *famille génératrice, famille libre, base.*
3. Savoir montrer qu'une famille est libre ou liée.
4. Savoir montrer qu'une famille est une base.
5. Savoir exhiber une base d'un espace vectoriel donné.

6. Avoir compris la notion de coordonnées dans une base.
7. Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.