

# ECE2-Colle 14

03/02/21

## 1 Fonctions numériques de deux variables réelles

**Généralités :** fonctions numériques de deux variables, exemples des fonctions polynomiales. Applications partielles. Représentation graphique, ligne de niveau.

**A partir de maintenant, toutes les fonctions seront définies sur  $\mathbb{R}^2$ .**

**Continuité :** distance euclidienne, propriétés de la distance euclidienne. Continuité en un point, continuité sur  $\mathbb{R}^2$ , opérations sur les fonctions continues, composition avec une fonction continue d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  :** dérivées partielles d'ordre 1 en un point, fonctions dérivées partielles d'ordre 1. Fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , opérations sur les fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , composition avec une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  implique continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Gradient, DL d'ordre 1 au voisinage d'un point.

**Fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  :** dérivées partielles d'ordre 2 en un point, fonctions dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , opérations sur les fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , composition avec une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  implique classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Lemme de Schwarz, Hessienne, DL d'ordre 2 au voisinage d'un point.

## 2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas une espérance à l'aide du théorème de transfert et le cas échéant, la calculer.
2. Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas de variance et le cas échéant, la calculer.
3. Savoir déterminer et représenter des lignes de niveaux sur des exemples simples.
4. Savoir justifier la continuité, le caractère  $C^1$  ou  $C^2$  d'une fonction de deux variables définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
5. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 1, le gradient d'une fonction de deux variables.
6. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 2, la hessienne d'une fonction de deux variables.
7. Savoir déterminer un DL d'ordre 1 ou 2 d'une fonction de deux variables.

## 3 Questions de cours

- Définitions : distance euclidienne, continuité en un point, dérivée partielle d'ordre 1 en un point, fonction de classe  $C^1$ , de classe  $C^2$ , gradient, hessienne.
- Propositions : propriétés de la distance euclidienne, théorème de Schwarz.