Aix–Marseille Université 2018-2019

Mathématiques – L2 – MPCI

DS : Espaces préhilbetiens et euclidiens

Exercice 1 *1. Les matrices suivantes sont-elles des matrices associées à un produit scalaire euclidien ?*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) *Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\phi(X, Y) =^t XAY,$$

   est un produit scalaire.

   (b) *Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer l'adjoint de l'application $u_a : (x, y) \mapsto (2x+ay, 0)$ pour le produit scalaire ϕ. Pour quelle(s) valeur(s) de a u_a est-elle symétrique ?*

Exercice 2 *On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A, B\rangle = tr(^tAB)$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.*

1. *Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux*
   (Indication : on pourra utiliser le fait que $tr(AB) = tr(BA)$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$).
2. *Soit p la projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $p(M) = \frac{1}{2}(M +^t M)$.*
3. *Calculer la distance de*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   à $S_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 *Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel F d'équations*

$$\begin{cases} x + y - 2z - t &= 0 \\ x + y + t + z &= 0 \end{cases}$$

1. *Déterminer une base orthonormée de F.*
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.*
3. *Calculer la distance de $(1, 0, 0, 0)$ à F.*

Exercice 4 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et soit*

$$\begin{aligned} \phi : & E \longrightarrow E \\ & f \mapsto f - f(0). \end{aligned}$$

Le but de l'exercice est de montrer que ϕ ne possède pas d'adjoint.

1. *Soit $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $H^{\perp} = \{0\}$.*
   (Indication : pour $f \in E$, on pourra considérer la fonction $t \mapsto tf(t)$).
2. *Supposons par l'absurde que ϕ possède un adjoint ϕ^*.*
   - *(a) Vérifier que $\phi(h) = h$ pour $h \in H$. Montrer que ϕ^* est l'identité de E.*
   - *(b) Conclure (on pourra considérer la fonction $t \mapsto t + 1$).*

Exercice 5 *Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

On justifiera soigneusement toute les étapes du raisonnement.