**À rendre le jour de la rentrée**

# Exercice 1

## Partie A : étude d'une première fonction

On considère la fonction $d$ est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]-1,+\infty[, \quad d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Justifier que $d$ est dérivable et déterminer sa fonction dérivée. En déduire les variations de $d$.
2. Déterminer les limites de $d$ en $-1$ et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > -1 : 0 < d(x) < e$.
4. (a) En Python, quelle bibliothèque doit-on importer pour définir la fonction exponentielle ? Quelle instruction doit-on écrire pour importer cette bibliothèque ?
   (b) Écrire une fonction Python pour définir la fonction $d$.
   (c) Quelle bibliothèque doit-on importer pour tracer des courbes ? Quelle instruction doit-on écrire pour importer cette bibliothèque ?
   (d) Écrire un programme permettant de tracer la courbe de la fonction $d$ sur $[0,10]$.

## Partie B : étude d'une deuxième fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction $f$ est définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]-1,+\infty[, \quad f(x) = x+1-e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On désigne par $f'$ et $f''$ les dérivées première et seconde de $f$.

5. (a) Déterminer $f'$ et $f''$.
   Vérifier que pour tout $x > -1 : f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$.
   (b) Montrer :
   $$\lim_{x \to -1} f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 1.$$
   (c) Dresser le tableau des variations de $f'$.
6. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
   *On notera* $\alpha$ *la solution non nulle.*
7. (a) Étudier les variations de $f$.
   (b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

## Partie C : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in ]0,+\infty[ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} = f(u_n).$$

8. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = 1 - e^{\frac{u_n}{u_n+1}}$.
   En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## Exercice 2

### Partie A

1. On considère l'ensemble E définie par :

$$\mathrm{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 3x \text{ et } x - y + 5z = 3z\right\}.$$

   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Le vecteur $(1, -1, -1)$ appartient-il à E ?

   (c) Déterminer une base de E.

2. (a) La famille $((1, -1, -1), (1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est-elle libre ?

   (b) Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$ ?

   (c) Exprimer le vecteur $(1, 2, 3)$ comme combinaison linéaire de $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

### Partie B

Soient A,B et P les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ données par :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
4. Calculer $\mathrm{D}_1 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{D}_2 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ .

### Partie C

On pose $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel $n$ : $\quad \mathrm{X}_{n+2} = \frac{1}{6}\mathrm{AX}_{n+1} + \frac{1}{6}\mathrm{BX}_n$.

Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Y}_n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_n$.

5. Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Y}_{n+2} = \frac{1}{6}\mathrm{D}_1\mathrm{Y}_{n+1} + \frac{1}{6}\mathrm{D}_2\mathrm{Y}_n$.
6. Pour tout entier naturel $n$, on note $\mathrm{Y}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \frac{1}{2}\, a_{n+1} + \frac{1}{2}\, a_n \\ b_{n+2} & = \frac{1}{2}\, b_{n+1} \\ c_{n+2} & = \frac{2}{3}\, c_{n+1} + \frac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

7. Calculer les matrices $\mathrm{Y}_0$ et $\mathrm{Y}_1$.
8. Pour tout entier naturel $n$, calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.
9. En déduire l'expression de $\mathrm{X}_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$.

   On notera $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.$$

## Exercice 3

Un crabe se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le crabe se situe à l'origine. Puis il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ :

- il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$,
- il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $\mathrm{Y}_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $\mathrm{Y}_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\mathrm{Y}_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note S l'instant auquel le crabe se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du crabe après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a S = 1. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a S = 4.
On admet que S est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(\mathrm{S} = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables $\mathrm{Y}_i$.
   (b) Donner la loi de $\mathrm{Y}_1$.
   (c) En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{S} = k)$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de S.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{Y}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $\left(\mathrm{Y}_{n-1} = k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = 0) = 1 - p$.
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\},\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k-1)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\},\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = p^k\left(1-p\right)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = 1$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{\left(1-p\right)^2}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \dfrac{p\left(1-p^n\right)}{1-p}$.
5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_{n+1}^2\right) = p\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right) + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + 1\right)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right) + (2n-1)\,\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.
   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p\left(1+p\right)}{1-p}$.
   (c) En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_n^2\right)$ en fonction de $p$ et $n$.
   (d) Montrer enfin que : $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n\left(1-p\right) - p^{2n+1}\right)$.