Chapitre 3 : Espaces vectoriels

1 Espace vectoriel réel de dimension finie

1.1 Lois de composition

Exemple 1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- $\mathbb{R}^n =$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est*
- $\mathbb{R}[x]$ *est*
- $\mathbb{R}_n[x]$ *est*

Test 1 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, calculer $u + 3v$.

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, avec $u = (1, -1, 0)$ et $v = (3, -2, 5)$.*
2. *Dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
3. *Dans $\mathbb{R}[x]$ avec $u = 3x^3 - x + 1$ et $v = x^5 - 2x^3 + x^2 + 2$.*

Les ensembles de l'exemple 1, aussi différents les uns des autres soient-ils, possèdent une structure commune : ils peuvent tous être munis d'une « addition » et d'une « multiplication par un nombre réel ». L'objet de ce chapitre est de donner un cadre formel et unifié à l'étude des ensembles ayant une telle structure. Ainsi, les résultats généraux que l'on obtiendra s'appliqueront aussi bien aux vecteurs qu'aux matrices, aux polynômes . . .

Définition 1 (Loi de composition interne, loi de composition externe)

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne sur** E est une application de $E \times E$ dans E.
- Une **loi de composition externe sur** E est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E.

Exemple 2

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. *Dans $\mathbb{R}^n$.*
   - *L'addition de deux n-uplets de réels est une loi de composition interne :*

   - *La multiplication d'un n-uplet de réels par un nombre réel est une loi de composition externe :*

2. *Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*
   - *L'addition de deux matrices est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (A,B) &\longmapsto A+B \end{aligned}$$

   - *La multiplication d'une matrice par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\lambda,A) &\longmapsto \lambda \cdot A \end{aligned}$$

3. *Dans $\mathbb{R}[x]$ (ou $\mathbb{R}_n[x]$ avec $n \in \mathbb{N}$, voir le test 2).*
   - *L'addition de deux polynômes est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ (P,Q) &\longmapsto P+Q \end{aligned}$$

   - *La multiplication d'un polynôme par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ (\lambda,P) &\longmapsto \lambda \cdot P \end{aligned}$$

Test 2 (*Voir la solution.*)

1. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$. Montrer que $P+Q \in \mathbb{R}_n[x]$.*
   (b) *En déduire que l'addition de polynômes est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}_n[x]$.*
2. *Soit E l'ensemble des polynômes de degré **exactement** égal à n. L'addition des polynômes est-elle une loi de composition interne sur E ?*

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 2 (Combinaison linéaire)

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition externe $\cdot$ et d'une loi de composition interne $+$.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ des éléments de E. Un élément x de E est dit **combinaison linéaire** de $x_1, \dots, x_p$ s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p.$$

Exemple 3

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,4,1)$ est combinaison linéaire de $v = (1,0,1)$ et $w = (0,1,0)$ car :*

2. *Dans $\mathbb{R}_3[x]$, $P = 3x^2 + 2x - 1$ est naturellement écrit comme une combinaison linéaire des monômes 1, x et x^2.*
3. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle une combinaison linéaire de B et de I_2 ?*

4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:*

Test 3 (*Voir la solution.*)

1. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Écrire $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.*
2. *Dans $\mathbb{R}[x]$ montrer que le polynôme $x^2 + 1$ est combinaison linéaire des polynômes $(x+1)^2$, $x + 1$ et 1.*
3. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?*

Test 4 (*Voir la solution.*)

1. *On considère les trois polynômes suivants :* $P = x^2 + 2x$, $Q = -x^2 + 1$ *et* $R = 4x^2 + 6x - 1$. *Déterminer tous les triplets de réels* (a, b, c) *tels que* $aP + bQ + cR = 0$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^4$, *on considère les vecteurs* $x = (1, 2, -1, 4)$ *et* $y = (2, 4, -2, 4)$. *Déterminer tous les couples de réels* (a, b) *tels que* $ax + by = 0$.

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 3 (Espace vectoriel réel de dimension finie)

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition externe, notée $\cdot$, et d'une loi de composition interne, notée $+$.
On dit que E est un **espace vectoriel réel de dimension** $n \in \mathbb{N}$ s'il existe une bijection f de E dans $\mathbb{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires c'est-à-dire telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la bijection f vérifie :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \quad , \quad f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_p f(x_p).$$

Dans ce cas

- l'élément $f^{-1}((0, \dots, 0))$ de E est appelé **l'élément neutre** de E et noté 0_E.
- pour tout $x \in E$, l'élément $(-1) \cdot x$ est appelé **le symétrique de** x et noté $-x$.
- l'entier n est appelé la dimension de E et noté $\dim(E)$.

Remarque 1 (*Vocabulaire et notation*)

1. *Attention, par abus, on note avec le même symbole* $+$ *l'addition dans E et dans* $\mathbb{R}^n$.
2. *Les éléments de E sont appelés des* **vecteurs** *et sont parfois notés avec une flèche (par exemple,* $\vec{u}$*) et parfois sans. Au concours, il est recommandé de s'aligner sur la notation du sujet !*
3. *Les éléments de* $\mathbb{R}$ *qui interviennent dans la loi externe sont souvent appelés des* **scalaires**.
4. *On écrira souvent* λu *au lieu de* $\lambda \cdot u$.
5. *On place toujours les scalaires devant le vecteur.*

Proposition 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

1. la loi $+$ vérifie les propriétés suivantes :
   i) $\forall (x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$ (*commutativité*)
   ii) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*associativité*)
   iii) $\forall x \in E,\ x + 0_E = x = 0_E + x$
   iv) $\forall x \in E,\ x + (-x) = (-x) + x = 0_E$
2. la loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
   i) $\forall x \in E\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) = \mu \cdot (\lambda \cdot x)$
   ii) $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$
   iii) $\forall (x, y) \in E^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (*distributivité*)
   iv) $\forall x \in E\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Remarque 2

En réalité, la vraie définition d'un espace vectoriel est un ensemble muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe vérifiant les propriétés de la proposition ci-dessus. Cette définition, qui est hors-programme, autorise des espaces vectoriels de dimension infinie.

Proposition 2 (Exemples de référence)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Alors muni des lois $+$ et $\cdot$ définies dans l'exemple 2 :

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel de dimension n.
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel de dimension $n \times p$.
3. $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$.

Démonstration : Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

■

Exemple 4

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Espace vectoriel E	*Neutre*	*Élément*	*Symétrique*
$\mathbb{R}^n$		$(x_1, \dots, x_n)$	
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$		$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$	
$\mathbb{R}_n[x]$		$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$	

Proposition 3 (Règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Alors

1. $\forall x \in E, 0 \cdot x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$.
4. $\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition 4 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque

1. F est non vide,
2. $\forall x \in F\ \forall y \in F,\ x + y \in F$ (*stabilité par addition*),
3. $\forall x \in F\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x \in F$ (*stabilité par multiplication par un scalaire*).

Remarque 3

1. *En combinant les points 2 et 3 avec un raisonnement par récurrence, on voit qu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.*
2. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E contient 0_E. En effet :*

Exemple 5

1. *Quel que soit l'espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. *L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Proposition 4 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. F est non vide,
2. $\forall (x, y) \in F^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda y \in F$.

Démonstration :

■

Méthode 1

1. *Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence à l'aide de la caractérisation ci-dessus car cela demande beaucoup moins de vérifications que la définition d'espace vectoriel.*
2. *Pour montrer que F est non vide, on montre souvent que $0_E \in F$.*

Exemple 6

Montrons que $F = \{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exemple 7

Montrons que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple 8

Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire ***homogène*** *à* n *variables est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *En effet, considérons un système*

$$(E) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{p,1}x_1 & + & \dots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple 9

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $n \leqslant m$. *Alors* $\mathbb{R}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}_m[X]$.

Test 5 (*Voir la solution.*)

Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace considéré ?

1. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_5[x] \mid P'(0) = 0\}$.

Test 6 (*Voir la solution.*)

Montrer que $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = 2M\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 5

Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est un espace vectoriel de dimension finie (pour les lois induites par celles de E). De plus :

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

avec égalité si et seulement si $E = F$.

Méthode 2

Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on peut donc

1. *montrer que* $F \subset E$,
2. *puis que* $\dim(E) = \dim(F)$.

Test 7 (*Voir solution.*)

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

2.3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_n$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. On le note

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n).$$

On dit que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une **famille génératrice** de $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Remarque 4

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u_1, \ldots, u_n$ *des vecteurs de* E.

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exemple 10

1. *L'ensemble* $\mathrm{Vect}(1, x, x^2)$ *est égal à :*

   Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(1, x, \ldots, x^n)$ *est égal à :*
2. *Soit* E *un espace vectoriel et* $x \in E$. *Alors :*

   $\mathrm{Vect}(x) =$.

3. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, représenter* $\mathrm{Vect}((2,1))$.

4. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, représenter* $\mathrm{Vect}((1,0,0),(1,2,0))$.

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.

- Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Tout sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$ contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

Démonstration :

$\blacksquare$

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Si un vecteur u est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, u).$$

2. On a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \neq i,\ \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_n).$$

3. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires **tous non nuls** alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n).$$

Remarque 5

1. *En particulier :* $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n, 0_E)$.
2. *En combinant les points 2 et 3, on voit que si on ajoute un multiple d'un vecteur de la famille à un autre vecteur de la famille, la nouvelle famille obtenue engendre le même sous-espace vectoriel :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \neq i,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i + \lambda u_j, \ldots, u_n).$$

Exemple 11

1. *Dans* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*, simplifions* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

2. *Dans* $\mathbb{R}_3[x]$*, déterminons* $F = \text{Vect}(x^2+1, x+2, 1)$*. On a :*

Test 8 (*Voir la solution.*)

Donner une expression la plus simple possible des sous-espaces vectoriels suivants.

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$*,* $F = \text{Vect}((1,2),(2,4))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}_2[x]$*,* $F = \text{Vect}(1+x, x, x-x^2, 1+2x+x^2)$.

Méthode 3

Pour montrer qu'un ensemble F *est un (sous-)espace vectoriel, on peut aussi montrer que c'est l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.*

- Lorsque l'ensemble est donné sous forme paramétrique.

Exemple 12

Dans chaque cas, montrons que F *est un espace vectoriel et donnons une famille génératrice de* F.

1. $F = \left\{(x, y, -3x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

2. $F = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+\mu \\ \lambda-\mu & 2\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Test 9 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de F.

1. $F = \{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
2. $F = \{(c-a)x^3 + ax^2 + (2a-b)x + c \in \mathbb{R}_3[x] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

- Lorsque l'ensemble est décrit à l'aide d'équations.

Exemple 13

On considère $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad x+2y-3z=0\}$.

1. *Écrire les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.*
2. *Obtenir un système triangulaire équivalent.*
3. *Exprimer les inconnues principales en fonctions des autres.*
4. *Faire apparaître la famille génératrice et conclure.*

Test 10 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de F.

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y-5z=0\}$.
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$.
3. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x=y \quad \text{et} \quad y=3z\}$.

Méthode 4

Inversement, étant donné un espace vectoriel sous forme de « Vect » vous devez savoir en déterminer des équations qui le décrivent.

Exemple 14

Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de $F = \mathrm{Vect}((1,2,1),(-1,1,0))$.

1. *Écrire la condition pour qu'un vecteur appartienne à* F *sous forme d'un système (non-homogène).*
2. *Mettre le système sous forme triangulaire.*
3. *Faire apparaître les équations et conclure.*

Test 11 (*Voir la solution.*)

Décrire les espaces vectoriels suivants à l'aide d'équations.

1. $F_1 = \text{Vect}((1,2,-1,2),(1,1,1,1))$.
2. $F_2 = \text{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(1,4,9))$.
3. $F_3 = \text{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2))$.

3 Objectifs

1. Avoir compris les notions d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel.
2. Connaître les exemples de référence, leur dimension.
3. Connaître par coeur les définitions de *combinaison linéaire*, *sous-espace vectoriel*, *sous-espace engendré par une famille*.
4. Savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel avec la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
5. Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel en en déterminant une famille génératrice.
6. Savoir décrire un sous-espace vectoriel engendré par une famille à l'aide d'équations.
7. Savoir manipuler la notation Vect.