Chapitre 1 : Correction des tests

Test 1 (***Voir la solution.***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

1. *Montrer que la fonction* f *définie sur* $[0,1]$ *par :*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{2-x}$$

   est strictement croissante.

2. *En déduire que,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est bien défini et* $0 < u_n < 1$.
3. *Que peut-on dire de l'intervalle* $]0,1[$ *?*

Test 2 (***Voir la solution.***)

Soit f *la fonction définie sur* $[-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in [-1,+\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+1}.$$

1. *Déterminer les points fixes de* f*. Montrer que* f *possède un unique point fixe dans* $[0,2]$ *que l'on notera* ℓ.
2. *Justifier que* f *est dérivable sur* $]-1,+\infty[$ *et que* $\forall x \in [0,2]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est bien défini et* $u_n \in [0,2]$.

   (b) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.

   (c) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et en déduire la convergence de la suite.*

4. (a) *Écrire une fonction Python qui, prenant en argument un entier* n*, renvoie la valeur de* u_n.

   (b) *Écrire un programme Python prenant en argument un réel* epsilon *et renvoyant une valeur approchée de* ℓ *à* epsilon *près.*

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in [0,1]$ on a*

$$f'(x) = \frac{2-x-x\times(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « u_n est bien définie et $0 < u_n < 1$ » et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*

   - ⋆ Initialisation *:*
     on sait que $u_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[$
     La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - ⋆ Hérédité *: supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*
     Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et que $0 < u_n < 1$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus, par croissance stricte de f on a :

     $$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

     et comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on obtient donc :

     $$0 < u_{n+1} < 1.$$

     La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - ⋆ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*

     $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \quad \text{est bien défini et } \ 0 < u_n < 1.$$

3. *Dans l'hérédité, on a vu que*

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[$$

Cela signifie que $]0,1[$ est un intervalle stable par la fonction f.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit $x \in [-1,+\infty[$. Alors*
$$f(x) = x \Longleftrightarrow \sqrt{x+1} = x.$$
Procédons par disjonction de cas :
   - *Si $x \in [-1,0[$: l'équation $\sqrt{x+1} = x$ n'a pas de solution dans $[-1,0[$. En effet, on a*
$$0 \leqslant \sqrt{x+1} \quad \text{alors que} \quad x < 0.$$
   - *Si $x \geqslant 0$, on a alors*
$$\sqrt{x+1} = x \Longleftrightarrow x+1 = x^2 \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$
Cette dernière équation a pour discriminant :
$$\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5.$$
et ses solutions sont donc :
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Or, comme $\sqrt{5} \geqslant 2$ donc $1-\sqrt{5} < 0$. Ainsi $x_1 < 0$ et la seule solution positive de l'équation est donc x_2.

   Finalement, f possède un unique point fixe, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et
$$0 \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{1+3}{2} = 2.$$

2. *La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car c'est la composée $h \circ g$ des fonctions :*
   - ⋆ *$g : x \mapsto x+1$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ telle que $g(]-1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$,*
   - ⋆ *$h : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$.*

   De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geqslant 0.$$
Or $x+1 \geqslant 1$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$ puis $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leqslant 1$. Ainsi :
$$|f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

3. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « u_n est bien définie et $u_n \in [0,2]$ » et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*
   - ⋆ Initialisation *: on sait que $u_0 = 0 \in [0,2]$. La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.*
   - ⋆ Hérédité *: supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et que $u_n \in [0,2]$. En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de f donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et, par croissance de f, on a*
$$0 \leqslant f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) = \sqrt{3} \leqslant 2.$$
La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - ⋆ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \quad \text{est bien défini et} \;\; u_n \in [0,2]$$

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, f est continue sur $[0,2]$, dérivable sur $]0,2[$ et pour tout $x \in [0,2]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $u_n \in [0,2]$ et $\ell \in [0,2]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :*
$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

   (c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$ » et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*
   - ⋆ Initialisation *: comme $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.*

* Hérédité *: supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*
  Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

  D'après la question précédente on a donc :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

  La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
* Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Or, comme $u_0 \in [0,2]$ et $\ell \in [0,2]$, on a : $|u_0 - \ell| \leqslant 2$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ alors, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

4. (a)

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=0
    for k in range(n):
        u=np.sqrt(u+1)
    return u
```

(b)

```
epsilon=input("Entrer epsilon")
n=0
u=0
while 1/2^(n-1)>epsilon:
    u=np.sqrt(u+1)
    n=n+1
print(u)
```