TD6-Séries numériques

Exercice 2. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1. La famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée) de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme de plus elle est de cardinale $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Comme $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il existe un unique 4-uplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$X^3 + 2X^2 - 4X + 1 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2).$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 0 on trouve

$$1 = a$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 1 on trouve :

$$0 = a + b$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en 2 on trouve :

$$9 = a + 2b + 2c$$

   - En évaluant le membre de gauche et de droite en -1 on trouve :

$$6 = a - b + 2c - 6d$$

   Finalement, $a = 1$, $b = -1$, $c = 5$ et $d = 1$. Les coordonnées de $X^3 + 2X^2 - 4X + 1$ dans la base de la question précédente sont donc $(1, -1, 5, 1)$.
3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} + \frac{5n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$$

   Or,

   - la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ converge (série exponentielle sans son premier terme) et sa somme vaut $e - 1$;
   - pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$

   - pour tout $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ (et le premier terme est nul) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$

   - pour tout $n \geq 3$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$ (et les deux premiers termes sont nuls) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e.$$

   Ainsi, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une somme de séries convergentes donc est convergente et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = e - 1 - e + 5e + e = 6e - 1.$$

Exercice 3. Pour tout $n \geq 2$:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln n + \ln(n+1) - \ln(n).$$

Donc, pour tout entier naturel $n \geq 2$, par télescopage

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$

Donc la série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. Par équivalents usuels :
$$n^3-n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad 5n^5+3n^4+2n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5n^5$$
donc par quotient
$$\frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n} \equiv \frac{n^3}{5n^5} = \frac{1}{5n^2}.$$
Les séries $\sum_{n\geq1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$ et $\sum_{n\geq1} \frac{1}{5n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{5n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n\geq1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$ converge aussi.

2. La série $\sum_{n\geq1} (-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ est à termes quelconques. Regardons si elle est absolument convergente ou non.
Pour tout $n \geq 1$, $\frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2} \geq 0$ donc
$$\left|(-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}\right| = \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}.$$
Or, par équivalent usuel, $n^3-n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$. De plus, pour tout $n \geq 1$ on a
$$e^n+3n^4+2n^2 = e^n(1+3\frac{n^4}{e^n}+2\frac{n^2}{e^n})$$
et $\lim_{n\to+\infty} 1+3\frac{n^4}{e^n}+2\frac{n^2}{e^n} = 1$ car par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$. Ainsi
$$e^n+3n^4+2n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$$
et par quotient on obtient
$$\frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{e^n}.$$
Les séries $\sum_{n\geq1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ et $\sum_{n\geq1} \frac{n^3}{e^n}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature.
Étudions la nature de $\sum_{n\geq1} \frac{n^3}{e^n}$. Par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{n^3}{e^n} = 0$ donc $\frac{n^3}{e^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Les séries $\sum_{n\geq1} \frac{n^3}{e^n}$ et $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, d'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq1} \frac{n^3}{e^n}$ est convergente.
Les séries $\sum_{n\geq1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ et $\sum_{n\geq1} \frac{n^3}{e^n}$ étant de même nature, $\sum_{n\geq1} \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ est convergente aussi.
Finalement, on vient de montrer que la série $\sum_{n\geq1} (-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

3. Par équivalent usuel
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Or, par croissance de la fonction logarithme, on a
$$\forall n \geq 1 \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0$$
Les séries $\sum_{n\geq1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ sont donc à termes positifs. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ est divergente donc $\sum_{n\geq1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est divergente aussi.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$n^{\frac{1}{n}}-1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$
par équivalent usuel (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$). Les séries $\sum_{n\geq1}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ et $\sum_{n\geq1} \frac{\ln(n)}{n}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge (voir l'exemple 8 du chapitre 6) donc la série $\sum_{n\geq1}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ diverge aussi.

5. La série $\sum_{n\geq1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est à termes quelconques. Regardons si elle est absolument convergente ou non.

Pour tout $n \geq 1$, $\left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et, par équivalent usuel

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

6. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$
Or, par équivalent usuel $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ puis par compatibilité avec le quotient
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et par continuité de l'exponentielle :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$$
Donc la série $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

7. Pour tout $n \geq 1$, $3^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(3)} = n^{\ln(3)}$. La série est donc une série de Riemann convergente car $\ln(3) > 1$.

8. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$n^{\ln(n)} = e^{\ln(n)^2}.$$
Montrons que $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = 0$. En faisant le changement de variable $X = \ln(n)$, on trouve
$$n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = e^{2X}\frac{1}{e^{X^2}} = e^{2X-X^2}$$
donc, puisque $\lim_{X\to+\infty} 2X - X^2 = -\infty$,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = \lim_{X\to+\infty} e^{2X-X^2} = 0.$$
Ainsi, $\frac{1}{n^{\ln(n)}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$ est donc convergente.

9. Par croissance comparée
$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$$
donc $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.
Or les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$ est donc convergente.

10. Soit $n \geq 1$.
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
Or les séries $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont de même nature. Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge.

11. La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$ est à termes quelconques ; on va donc étudier son absolue convergence.
Par équivalent usuel :
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$
donc par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue on en déduit l'équivalent suivant :
$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n\geq 1}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ converge aussi.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

12. Soit $n\geq 1$.

$$\begin{aligned}(n+1)^{\frac14}-(n-1)^{\frac14} &= (n+1)^{\frac14}\left(1-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac14}\right)\\ &= (n+1)^{\frac14}\left(1-\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^{\frac14}\right)\\ &= (n+1)^{\frac14}\left(1-\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac14}\right)\end{aligned}$$

Or, par équivalent usuel,

$$\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac14}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac14\times\frac{-2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit on obtient

$$(n+1)^{\frac14}-(n-1)^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)^{\frac14}\times\frac{1}{2n}.$$

Or, par équivalent usuel, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puis par compatibilité avec le passage aux puissances

$$(n+1)^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac14}.$$

Finalement,

$$(n+1)^{\frac14}-(n-1)^{\frac14} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac14}}{2n}=\frac{1}{2n^{\frac34}}$$

Les séries $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{\frac14}-(n-1)^{\frac14}\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{\frac34}}$ étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^{\frac34}}$ est une série de Riemann divergente donc $\sum_{n\geq 1}\left((n+1)^{\frac14}-(n-1)^{\frac14}\right)$ est divergente aussi.

13. Par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}=+\infty$ donc la série diverge.

14. Soit $n\geq 1$.

$$\sqrt{n^2-n+2}-n=n\sqrt{1-\frac1n+\frac{2}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1-\frac1n+\frac{2}{n^2}}-1\right).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac1n+\frac{2}{n^2}\right)=0$, par équivalent usuel on a

$$\sqrt{1-\frac1n+\frac{2}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac12\left(-\frac1n+\frac{2}{n^2}\right)=\frac{-n+2}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit, on trouve

$$\sqrt{n^2-n+2}-n=n\left(\sqrt{1-\frac1n+\frac{2}{n^2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac12.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n+2}-n=-\frac12.$$

Donc la série diverge.

15. Soit $n\geq 1$. On a

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Or, par équivalent usuel

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc par compatibilité avec le produit

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac1n.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac1n=0$ puis par équivalent usuel, on en déduit donc que

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac1n$$

Par transitivité, on a donc

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac1n.$$

Les séries $\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ sont à termes positifs donc d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, $\sum_{n\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ est divergente aussi. Par conséquent, $\sum_{n\geq 1}\left(1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$ diverge aussi.

16. Par croissance comparée

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^7}{n^{\frac{1}{4}}}=0$$

donc $\frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$.

Or les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$ est donc convergente.

Exercice 8.

1. Soit $x\in[0,1]$. On a donc

$$0\leq x\leq 1$$

et en multipliant membre à membre par x (qui est positif) on obtient

$$0\leq x^2\leq x.$$

2. Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série convergente à termes positifs. Comme la série converge, alors $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. En particulier, il existe un rang $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geq n_0,\quad u_n\leq 1.$$

Comme la série est à termes positifs, on a donc

$$\forall n\geq n_0,\quad u_n\in[0,1].$$

D'après la question, on peut donc conclure que

$$\forall n\geq n_0,\quad u_n^2\leq u_n.$$

Les séries $\sum_{n\geq 0}u_n^2$ et $\sum_{n\geq 0}u_n$ étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, comme $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge, $\sum_{n\geq 0}u_n^2$ converge aussi.

Exercice 9 (Une série convergente mais pas absolument convergente)**.**

1. On a

$$\forall n\geq 1\quad |u_n|=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ est donc une série de Riemann divergente. Ainsi $\sum_{n\geq 1}u_n$ n'est pas absolument convergente.

2. (a)
- Pour tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)}-S_{2n}=S_{2n+2}-S_{2n}&=\frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}}+\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\\&\leq 0\end{aligned}$$

Ainsi $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante.

- Pour tout $n\geq 0$,

$$\begin{aligned}S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}=S_{2n+3}-S_{2n+1}&=\frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}}+\frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}}\\&=\frac{-1}{\sqrt{2n+3}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\\&\geq 0\end{aligned}$$

Ainsi $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.

- Pour tout $n\geq 1$,

$$S_{2n+1}-S_{2n}=\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}=\frac{-1}{\sqrt{2n+1}}$$

donc $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1}-S_{2n})=0$.

Ainsi les suites $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

(b) Les $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite notée ℓ. Montrons que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ. Soit $\epsilon>0$.
Comme $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]$:

$$\forall n\geq n_0,\quad |S_{2n+1}-\ell|\leq\epsilon.$$

Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang impair de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]$
Comme $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle $[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]$:

$$\forall n\geq n_1,\quad |S_{2n}-\ell|\leq\epsilon.$$

Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang pair de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]$
On en déduit donc qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes (de rang impair et de rang pair) de $(S_n)_{n\geq 1}$ sont dans $[\ell-\epsilon,\ell+\epsilon]$:

$$\forall n \geq \max(2n_0+1, 2n_1), |S_n-\ell| \leq \epsilon.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

(c) La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 (Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente)**.**

1. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1+\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n}$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. Ainsi $v_n \sim u_n$ où $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie à l'exercice 9.

2. Supposons que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge. On a vu à l'exercice précédent que $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Donc, comme pour tout $n\geq 1$, on a
$$\frac{1}{n} = v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ converge en tant que différence de séries convergentes : absurde ! Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge.

Exercice 11.

1. On procède par récurrence en utilisant le fait que pour tout $x \in]0,1[$, $x-x^2 \in]0,1[$.

2. Pour tout $n\geq 0$, on a
$$u_{n+1}-u_n = u_n-(u_n-u_n^2) = -u_n^2 < 0.$$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. D'après la question précédente elle est aussi minorée par zéro donc par convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ. Comme la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x-x^2$ est continue sur $[0,1]$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ alors ℓ est un point fixe de f. Soit $x\in[0,1]$.
$$f(x)=x \iff x-x^2=x \iff x^2=0 \iff x=0.$$
Ainsi l'unique point fixe de f est 0 donc $\ell=0$. Finalement la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.

3. La formule de récurrence donne :
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n^2 = u_n-u_{n+1}.$$
Donc pour tout entier naturel n on obtient par télescopage
$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k-u_{k+1} = u_0-u_{n+1}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0-u_{n+1}=u_0$, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n u_k^2\right)_{n\geq 0}$ converge vers u_0. Ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge et sa somme vaut u_0.

4. On utilise encore un télescopage :
$$\forall n\geq 0 \quad \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1})-\ln(u_k) = \ln(u_{n+1})-\ln(u_0)$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_{n+1})=-\infty$. Ainsi la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right)_{n\geq 0}$ diverge donc la série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

5. On a
$$\forall n\geq 1 \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n-u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n).$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, par équivalent usuel on obtient :
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$
d'où
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$ donc $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geq 0$. Ainsi les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont à termes positifs. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, les $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont de même nature. Or d'après la question précédente, $\sum_{n\geq 0}-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge car $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente aussi.

Exercice 12.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que polynôme et
$$\forall x\in\mathbb{R}_+, \quad f_n'(x)=3x^2+n.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) > 0$ et $f_n'(0) \geq 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et y est continue (car dérivable). D'après le théorème de la bijection monotone, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$. En particulier, comme $0 \in f_n(\mathbb{R})$, 0 possède un unique antécédent par f_n, ie l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
Ceci étant valable quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a ainsi montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$f_n(0) = -1 \leq 0 = f_n(u_n) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^3 = f_n\left(\frac{1}{n}\right).$$
Or, d'après le théorème de la bijection monotone, la bijection réciproque f_n^{-1} de f_n est strictement croissante. On en déduit donc que
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. Par encadrement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_n(u_n) = 0$ par définition, on a
$$u_n^3 + nu_n - 1 = 0$$
c'est-à-dire
$$nu_n = 1 - u_n^3.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nu_n = 1 - u_n^3$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^3 = 0$. Finalement, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
5. D'après la question précédente, $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et par compatibilité des équivalents avec le quotient, on trouve
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ étant à termes positifs (voir question 2), d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs elles sont de même nature. Comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ est divergente, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente aussi.

Exercice 13. Voir DM2

Exercice 14.

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus
$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2} < 0.$$
Ainsi, f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.
2. Soit un entier k tel que $k \geq 3$. Comme f est décroissante sur $[k-1, k]$ alors
$$\forall x \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(x) \leq f(k-1).$$
En intégrant cette inégalité entre $k-1$ et k, on obtient, par croissance de l'intégrale :
$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$$
ie
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 3 à n, on obtient
$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1).$$
Cela ce ré-écrit, en faisant un changement de variable dans le membre de droite :
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$
Ainsi,
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
Or, par la relation de Chasles, $\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_2^n f(x)dx$ donc
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculons $\int_2^n f(x)dx$. On remarque que pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$: f est de la forme $\frac{u'}{u}$ où $u = \ln$. Une primitive de f est donc $\ln(u)$. Ainsi
$$\int_2^n f(x)dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$
D'après la question précédente, on a donc
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \text{ et } \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
Ainsi
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) En divisant membre à membre par $\ln(\ln(n))$ dans l'inégalité précédente on trouve que pour tout $n \geq 2$

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right)$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right) = 1$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$. Ainsi $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

(a) • pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &\geq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+2 \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

• pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \\ &\leq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+1 \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

• pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx \end{aligned}$$

Ainsi, par la question 2 (avec $k = n+1$), on a

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

(b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et a pour limite ℓ alors

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \leq \ell.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \quad v_n - \ell \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

où la dernière inégalité a été prouvée à la question précédente. De plus, $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et a pour limite ℓ donc

$$\forall n \geq 2, \quad \ell \leq v_n.$$

Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

(c) On en déduit que $0 \leq v_{100} - \ell \leq \frac{1}{10^2\ln(10^2)} \leq \frac{1}{10^2}$. Ainsi v_{100} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.