ECG2 – Mathématiques

CONCOURS BLANC 2-MATHÉMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type EM Lyon (pages 2 à 11) ;

— un sujet type EDHEC (pages 12 à 21).

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type EM Lyon

Exercice 1

Dans cet exercice toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_U et f_V, et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty;0[$ et continues sur $[0;+\infty[$.

1. (a) La fonction F_U est une fonction de répartition donc pour tout $t \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant F_U(t) \leqslant 1$. Par ailleurs f_V est une densité donc pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f_V(t) \geqslant 0$. Ainsi par produit,
$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad 0 \leqslant F_U(t) f_v(t) \leqslant f_V(t).$$
(b) La fonction $F_U f_V$ est continue sur $[0,+\infty[$ (comme produit de F_U fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, et de f_V continue sur $[0,+\infty[$ par hypothèse), à valeurs positive sur $[0,+\infty[$ d'après la question précédente. Enfin d'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$
$$F_U(t) f_V(t) \leqslant f_V(t)$$
et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt$ converge car f_V est une densité. Ainsi par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt$ converge.

2. La fonction f_V est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t)\,dt$ converge et vaut 1. Par ailleurs f_V est nulle sur $]-\infty,0[$ par hypothèse donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_V(t)\,dt = 0$. Ainsi $1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt$.
En utilisant cette information on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} P(U > V) &= 1 - P(U \leqslant V) = 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\,dt - \int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(f_V(t) - F_U(t) f_V(t)\big)\,dt = \int_0^{+\infty} f_V(t)\big(1 - F_U(t)\big)\,dt. \end{aligned}$$

3. (a) D'après le cours, pour tout $t \in [0,+\infty[$,
$$F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \text{et} \qquad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}.$$
(b) D'après la question 2 :
$$\begin{aligned} P(U > V) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F_U(t)\big) f_V(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t}\,dt \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt = \lim_{A \to +\infty} \mu \Big[-\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu} \Big]_0^A \\ &= \lim_{A \to +\infty} \mu \Big(-\frac{e^{-(\lambda+\mu)A}}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda+\mu} \Big) \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \end{aligned}$$
car $\lambda + \mu > 0$ donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} e^{-(\lambda+\mu)A} = 0$.

Partie B : Une application

4. (a) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a : $[\mathrm{M}_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{T}_i > t]$, donc par indépendance de $\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n$, puis en utilisant le fait que $\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n$ suivent la même loi $\mathscr{E}(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > t) &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{T}_i > t) = \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{T}_i}(t)\big) = \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{T}_1}(t)\big)^n \\ &= (e^{-\lambda t})^n = e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{M}_n(t)} = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}.$$

Par ailleurs pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{T}_i(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc $\mathrm{M}_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, par conséquent pour tout $t < 0$, $\mathrm{F}_{\mathrm{M}_n}(t) = 0$.
Finalement on a montré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}_{\mathrm{M}_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, donc $\mathrm{M}_n \hookrightarrow \mathscr{E}(n\lambda)$.

5. (a) Par définition de N : $[\mathrm{N} = 1] = [\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0]$.
D'après le résultat admis à la Partie A, puisque T_0 et T_1 sont à densité et admettent une densité nulle sur $]-\infty, 0[$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{N} = 1) &= \mathrm{P}(\mathrm{T}_1 \leqslant \mathrm{T}_0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{T}_1}(t) f_{\mathrm{T}_0}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t})\lambda e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} \big(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big)\, dt = \lambda \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \Big[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \Big]_0^{\mathrm{A}} \\ &= \lambda\Big(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\Big) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

car $\lambda > 0$ donc $\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} e^{-\lambda t} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} e^{-2\lambda t} = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $[\mathrm{N} > n] \cup [\mathrm{N} = 0]$ est l'événement "le plus petit indice $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{T}_k \leqslant \mathrm{T}_0$, s'il existe, est strictement supérieur à n", c'est-à-dire "pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{T}_i > \mathrm{T}_0$", c'est-à-dire $[\mathrm{M}_n > \mathrm{T}_0]$.
On a donc$[\mathrm{N} > n] \cup [\mathrm{N} = 0] = [\mathrm{M}_n > \mathrm{T}_0]$.
Les variables aléatoires M_n et T_0 étant à densité et admettant une densité nulle sur $]-\infty,0[$, on peut appliquer le résultat de la question 2) :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}([\mathrm{N} > n] \cup [\mathrm{N} = 0]) &= \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > \mathrm{T}_0) = \int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{F}_{\mathrm{M}_n}(t)\big) f_{\mathrm{T}_0}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-n\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(n+1)\lambda t}\, dt = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \Big[-\frac{e^{-(n+1)\lambda t}}{n+1} \Big]_0^{\mathrm{A}} \\ &= \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

car $(n+1)\lambda > 0$ donc $\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} e^{-(n+1)\lambda\mathrm{A}} = 0$.

(c) Soit $n \geqslant 2$ un entier. On a $[\mathrm{N} = n] = \big([\mathrm{N} > n-1] \cup [\mathrm{N} = 0]\big) \backslash \big([\mathrm{N} > n] \cup [\mathrm{N} = 0]\big)$ donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{N} = n) = \mathrm{P}([\mathrm{N} > n-1] \cup [\mathrm{N} = 0]) - \mathrm{P}([\mathrm{N} > n] \cup [\mathrm{N} = 0]),$$

par conséquent d'après la question précédente (on a bien $n - 1 \in \mathbb{N}^*$) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{N} = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(d) On a $\mathrm{N}(\Omega) = \mathbb{N}$ donc on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N} = n) = 1$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{N} = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N} = n) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{N} = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{N} = n) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big). \end{aligned}$$

Or pour tout entier $\mathrm{M} \geqslant 2$, à l'aide d'un changement d'indice puis en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\mathrm{M}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=2}^{\mathrm{M}}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{\mathrm{M}}\frac{1}{n+1}\\
&= \sum_{n=2}^{\mathrm{M}}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{\mathrm{M}+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{M}+1}\\
&\xrightarrow[\mathrm{M}\to+\infty]{} \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Finalement, $\mathrm{P}(\mathrm{N}=0)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$.

6. La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{N}=n)$ converge absolument, si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n\frac{1}{n(n+1)}$ converge absolument, or pour tout $n\geqslant 2$, $\dfrac{1}{n+1}\geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n+1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi N n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

$$\textit{il existe une matrice } \mathrm{P} \textit{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \textit{ inversible telle que : } \mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, ainsi $\mathrm{Sp(A)} = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.
   Ainsi A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.
   Enfin 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

2. On cherche les sous-espaces propres de A. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E}_{1/2}(\mathrm{A}) &\iff \left(\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\right)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} x/2 - y + z = 0, \\ 0 = 0, \\ 3z/2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y, \\ z = 0. \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{E}_{1/2}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E}_{1}(\mathrm{A}) &\iff \left(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3\right)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} -y + z = 0, \\ -y/2 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{E}_{1}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E}_{2}(\mathrm{A}) &\iff \left(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3\right)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{cases} -x - y + z = 0, \\ -3y/2 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = x, \\ y = 0. \end{cases} \iff \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{E}_{2}(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Finalement on a $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice D est diagonale de coefficients diagonaux tous non-nuls, elle est donc inversible et son inverse est la matrice diagonale constituée des inverses des coefficients diagonaux de D : $\mathrm{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

3. Le calcul donne $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{I}_3$ et $\mathrm{QDQ} = \mathrm{D}^{-1}$.

4. Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.
Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc
$$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}.$$
Enfin $D = P^{-1}AP$ donc
$$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}.$$
Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$
On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère également les vecteurs U_1 et U_2 de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par : $U_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

5. On a : $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
La matrice M est inversible si et seulement si $(L_2 \leftrightarrow L_3)$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ est inversible, ce qui est le cas puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi M est inversible.

6. (a) Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout le système linéaire $(M - I_3)X = 0$:
$$(M-I_3)X = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0, \\ -y - z = 0, \\ y + z = 0. \end{cases} \iff z = -y \iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\-y\end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Ce système possède au moins une solution non-nulle donc 1 est valeur propre de M. De plus $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.
Les vecteurs U_1 et U_2 étant non-colinéaires, ils forment bien une base de $E_1(M)$.

(b) On cherche U_3 sous la forme $U_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned} MU_3 - U_3 = U_2 &\iff (M - I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = 0, \\ -y - z = 1, \\ y + z = -1. \end{cases} \\ &\iff z = -y - 1. \end{aligned}$$
Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ et $U_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ convient.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aU_1 + bU_2 + cU_3 = (0,0,0)$. Alors
$$\begin{cases} a + 0.b + 0.c = 0, \\ 0.a + b + 0.c = 0, \\ 0.a - b - c = 0, \end{cases}$$
d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (U_1, U_2, U_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

7. (a) On a montré précédemment que (U_1, U_2) est une base de $E_1(M)$, donc $MU_1 = U_1$ et $MU_2 = U_2$. Enfin on a choisi U_3 tel que $MU_3 - U_3 = U_2$, c'est-à-dire $MU_3 = U_2 + U_3$. Ainsi la matrice de f dans

la base (u_1, u_2, u_3) est $\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De même $\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Les matrices M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, elles sont donc semblables (en effet si on note T la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ alors $\mathrm{M}_2 = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{M}_1\mathrm{T}$ d'après la formule de changement de base).
Le calcul donne $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \mathrm{I}_3$.

8. On vient de montrer que $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \mathrm{I}_3$, de plus M_1 est une matrice carrée, donc M_1 est inversible et $\mathrm{M}_1^{-1} = \mathrm{M}_2$.
Les matrices M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $\mathrm{M}_1^{-1} = \mathrm{M}_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $\mathrm{N} = \mathrm{T} - \mathrm{I}_3$.

9. La matrice T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc T est inversible.
Montrons par l'absurde que T n'est pas diagonalisable. Supposons T diagonalisable. T étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc 1 est l'unique valeur propre de T. Ainsi puisque T est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{T} = \mathrm{PDP}^{-1}$, où $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$. Ainsi $\mathrm{T} = \mathrm{PI}_3\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}_3$, ce qui contredit la définition de T.
Ainsi T n'est pas diagonalisable.

10. (a) Le calcul donne $\mathrm{N}^3 = 0_3$. Ainsi,

$$(\mathrm{I}_3 + \mathrm{N})(\mathrm{I}_3 - \mathrm{N} + \mathrm{N}^2) = \mathrm{I}_3 - \mathrm{N} + \mathrm{N}^2 + \mathrm{N} - \mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^3 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{N}^3 = \mathrm{I}_3.$$

(b) On vient de montrer que $(\mathrm{I}_3+\mathrm{N})(\mathrm{I}_3-\mathrm{N}+\mathrm{N}^2) = \mathrm{I}_3$, de plus $\mathrm{I}_3+\mathrm{N}$ est une matrice carrée, donc $\mathrm{I}_3+\mathrm{N} = \mathrm{T}$ est inversible et$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{N} + \mathrm{N}^2$.

11. (a) On vérifie par le calcul que $\mathrm{N}^2 \neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$. En revanche $\mathrm{N}^3 = 0_3$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $g^3(u) = 0$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u) + bg(u) + cu = 0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2, on obtient :

$$ag^4(u) + bg^3(u) + cg^2(u) = g^2(0) = 0,$$

autrement dit puisque $g^3(u) = g^4(u) = 0$:

$$cg^2(u) = 0.$$

Or $g^2(u) \neq 0$ donc $c = 0$.
L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u) + bg(u) = 0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors :

$$ag^3(u) + bg^2(u) = 0,$$

c'est-à-dire $bg^2(u) = 0$, or $g^2(u) \neq 0$, donc $b = 0$.
Finalement il reste $ag^2(u) = 0$, d'où $a = 0$. On a donc montré que $a = b = c = 0$, et donc la famille $\mathscr{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\mathscr{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0$, $g\big(g(u)\big) = g^2(u)$, et $g(u) = g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_3$ est :
$\mathrm{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Le calcul donne $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_3$.

Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi $\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}$ et N sont semblables.

12. D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N = U^{-1}(N^2 - N)U$. En remarquant que $I_3 = U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T = I_3 + N = U^{-1}U + U^{-1}(N^2 - N)U = U^{-1}(I_3 + N^2 - N)U.$$

Or d'après une question précédente, $T^{-1} = I_3 + N^2 - N$, donc $T = U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \iff t^2 > 1 \iff t > 1$$

car $t > 0$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
On a $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

2. D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big) = \big[f(1), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\big[= [2,+\infty[$.

3. (a) La fonction g possède les mêmes variations que f, donc g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
   (b) La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur $[1,+\infty[$, donc g est dérivable sur $[2,+\infty[$.
   (c) Soient $y \in [2,+\infty[$ et $t \in]0,+\infty[$.

$$y = f(t) \iff y = t + \frac{1}{t} \iff ty = t^2 + 1 \iff t^2 - ty + 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation polyomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geqslant 0$ car $y \geqslant 2$. Ainsi

$$y = f(t) \iff t = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Les deux solutions obtenues sont bien strictement positives et $g(y)$ est égal à l'unique solution $t \geqslant 1$ de $y = f(t)$, or

$$\frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2} \geqslant \frac{y}{2} \geqslant 1,$$

ainsi :

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. On utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
\partial_1 h(x,y) &= \Big(-\frac{1}{x^2}(1+x) + \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big).1\Big)(1+y)\\
&= \Big(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)(1+y)\\
&= \Big(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}\Big)(1+y).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\partial_2 h(x,y) &= (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}(1+y)+\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big).1\Big)\\ &= (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\Big).\end{aligned}$$

5. Soit $(x,y)\in \mathrm{U}$. Alors (x,y) est un point critique de h si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 h(x,y)=0\,,\\ \partial_2 h(x,y)=0\,,\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\Big(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\Big)(1+y)=0\,,\\ (1+x)\Big(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\Big)=0\,,\end{array}\right. \underset{(1+x\neq 0,\ 1+y\neq 0)}{\iff} \left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}=0\,,\\ -\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}=0\,,\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=x^2\,,\\ x=y^2\,.\end{array}\right.$$

6. On a

$$\left\{\begin{array}{l}y=x^2\,,\\ x=y^2\,.\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}y=y^4\,,\\ x=y^2\,.\end{array}\right. \underset{y\neq 0}{\iff} \left\{\begin{array}{l}y=1\,,\\ x=1\,.\end{array}\right.$$

Ainsi h admet pour unique point critique le point $(1,1)$.

7. (a) Pour tout $(x,y)\in \mathrm{U}$,

$$\begin{aligned}h(x,y) &= \Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big)(1+x+y+xy)=\frac{1}{x}+1+\frac{y}{x}+y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+1+x\\ &= 2+x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\\ &= 2+f(x)+f(y)+f\Big(\frac{x}{y}\Big).\end{aligned}$$

(b) On a $h(1,1)=2\times 2\times 2=8$, donc d'après l'identité de la question précédente, pour tout $(x,y)\in \mathrm{U}$,

$$h(x,y)-h(1,1)=f(x)+f(y)+f\Big(\frac{x}{y}\Big)-6.$$

Or on a montré dans la Partie A que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, ainsi f admet un minimum global en 1, c'est-à-dire que pour tout $t>0$, $f(t)\geqslant f(1)=2$. Ainsi,

$$h(x,y)-h(1,1)\geqslant 2+2+2-6=0.$$

On a donc montré que pour tout $(x,y)\in \mathrm{U}$, $h(x,y)\geqslant h(1,1)$.
Autrement dit h admet un minimum global sur U en $(1,1)$.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^2u_n}=\frac{1}{n}f(nu_n).$$

8. On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$:
   - pour $n=1$, u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1=1\geqslant 1$.

   - supposons u_n bien défini et $u_n\geqslant 1$ pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$.
     On a $n\geqslant 1$ et $u_n\geqslant 1$ donc $nu_n\geqslant 1$ et f est bien défini sur $[1,+\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par conséquent $u_{n+1}=\frac{1}{n}f(nu_n)$ est bien défini.
     Par ailleurs $\frac{1}{n^2u_n}\geqslant 0$ donc
     $$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^2u_n}\geqslant u_n\geqslant 1$$
     par hypothèse de récurrence. La propriété est donc démontrée au rang $n+1$.

   - Finalement on a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n\geqslant 1$.

```python
def suite(n) :
    u  = 1
    for k in range(2,n+1) :
        u = u +  1/((k-1)^2*u)
    return u
```

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \geqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, $u_n \geqslant 1$ d'après la question 1), donc $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Finalement on a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \geqslant 0$ et $v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

(c) Soit $n \geqslant 2$ un entier.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1 = u_n - 1,\end{aligned}$$
où l'on a effectué un changement d'indice et reconnu une somme télescopique.
On a ainsi $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ.

11. (a) Soit $k \geqslant 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1,k]$, donc pour tout $t \in [k-1,k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale,
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2}\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leqslant p < n$. A l'aide d'un changement d'indice et en reconnaissant une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= u_n - u_p.\end{aligned}$$
D'autre part en combinant les inégalités des questions précédentes, pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$0 \leqslant v_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt.$$
En sommant ces encadrements pour $k \in [\![p, n-1]\!]$:
$$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\,dt,$$
autrement dit
$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt,$$
où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(c) En particulier pour $p = 2$ et $n \geqslant 3$, l'encadrement précédent donne :
$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leqslant 1,$$

ainsi
$$u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2\,.$$
Par définition on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{u_1} = 2$, donc on a $u_n \in [2,3]$, ceci pour tout $n \geqslant 3$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\ell \in [2,3]$.

(d) Soit $p \geqslant 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 11.(b) :
$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt\,.$$
On a par ailleurs
$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leqslant \frac{1}{p-1}\,,$$
ainsi
$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}\,.$$
Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient
$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}\,.$$

(e) Si on choisit p tel que $\dfrac{1}{p-1} \leqslant 10^{-4}$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leqslant \ell - u_p \leqslant 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.
Ainsi la fonction suivante convient :

```
def approx() :
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001 :
        u = u + 1/(p^2*u)
        p = p+1
    return u
```

•Fin du sujet 1 •

Sujet 2 – Type EDHEC

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$$

Partie A

1. La fonction f est une fonction polynomiale en x et y , donc elle de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) On a $\partial_1 f(x,y)=3x^2-3y$ et $\partial_2 f(x,y)=3y^2-3x$. Le gradient est : $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2-3y\\3y^2-3x\end{pmatrix}$.

   (b) Les points critiques de f sont les couples (x,y) qui annulent le gradient :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x^4-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x(x^3-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x^2\\ x=0 \text{ ou } x=1\end{array}\right. .$$

   Donc f admet deux points critiques : $(0,0)$ et $(1,1)$.
3. (a) On a $\partial^2_{1,1}f(x,y)=6x$, $\partial^2_{2,2}f(x,y)=6y$ et $\partial^2_{1,2}f(x,y)=\partial^2_{2,1}f(x,y)=-3$.

   La matrice Hessienne en (x,y) vaut donc : $\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}6x&-3\\-3&6y\end{pmatrix}$.

   (b) Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $\mathrm{H}-\lambda\mathrm{I}$ est non inversible.

   - Au point $(0,0)$:

$$\nabla^2 f(0,0)-\lambda\mathrm{I}=\begin{pmatrix}0&3\\3&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&-3\\-3&-\lambda\end{pmatrix}.$$

     Ainsi, λ est valeur propre de $\nabla^2 f(0,0)$ ssi

$$\det(\nabla^2 f(0,0)-\lambda\mathrm{I})=\lambda^2-9=0\Leftrightarrow\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3.$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(0,0)$ sont 3 et -3 qui sont de signe opposés et donc f n'a pas d'extremum au point $(0;0)$.
   - Au point $(1,1)$:

$$\nabla^2 f(1,1)=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$$

     dont les valeurs propres sont les racines du polynôme :

$$\det\left(\nabla^2 f(1,1)-\lambda\mathrm{I}_2\right)=\det\left(\begin{pmatrix}6-\lambda&-3\\-3&6-\lambda\end{pmatrix}\right)=(6-\lambda)^2-3^2=(6-\lambda-3).(6-\lambda+3)=(3-\lambda)(9-\lambda).$$

     Les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(1,1)$ sont 3 et 9 et sont strictement positives donc f admet un minimum local en $(1,1)$ qui vaut $f(1,1)=-1$.
4. On vérifie que $f(1,1)=-1$ n'est pas un minimum global puisque $f(0,-2)=-8<f(1,1)$.

Partie B

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=f(x,1).$$

5. La fonction g étant un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, ses variations sont données par le signe de sa dérivée :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=3x^2-3.$$

   D'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que :

- $\forall x \leqslant -1$, $g(x) \leqslant 3$ et donc que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution dans $]-\infty, 1]$;
- g réalise une bijection (car continue et strictement croissante sur cet intervalle) de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. Comme tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 appartient à $]-1, +\infty[$,l'équation $g(x) = n$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
   (a) La fonction h réalise une bijection , continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, sa bijection réciproque h^{-1} est elle aussi strictement croissante sur $]-1, +\infty[$, d'où son tableau de variation :

x	-1		$+\infty$
$h^{-1}(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Comme $u_n \in]1, +\infty[$, on a $g(u_n) = h(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = h^{-1}(n)$, part conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty.$$

   (c) La définition de u_n donne : $n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1 = u_n^3\left(1 - \dfrac{3}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^3$.
   Par conséquent : $u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et, puisque l'équivalence est compatible avec les puissances : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$
   Le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha}$ est donc $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2

1. (a) Soit $A > a > 0$. On a

$$\int_a^A \frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \left[\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^A = \exp\left(-\frac{1}{A^2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{a^2}\right) \underset{\substack{a\to 0\\ A\to+\infty}}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1.$$

   (b) On vérifie les 3 conditions pour que f soit une fonction de densité :
   - La fonction f est continue sur $]-\infty; 0]$ car elle y est nulle, et elle est continue sur $]0; +\infty[$ par produits, quotients et composée de fonctions continues (les dénominateurs x^3 et x^2 ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exp est continue sur $\mathbb{R}$) .
     Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
   - Elle est positive sur $\mathbb{R}$ car elle est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$ (comme produit de $\dfrac{2}{x^3} > 0$ par une exponentielle).
   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.
     Comme f est nulle sur $\mathbb{R}^-$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$.
     Cette intégrale converge et vaut 1 d'après la question précédente. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est donc bien convergente est égale à 1.

Finalement, f peut donc être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

(c) On note F la fonction de répartition de Y. Par définition $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- Si $x \leqslant 0$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$.
- Si $x>0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} \frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\lim_{a\to 0}\int_{a}^{x}\frac{2}{t^3}\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\quad \text{(question 1.(a))}.$$

En conclusion : $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0\end{cases}$

2. (a) On vérifie les 3 conditions pour que f soit une fonction de densité :
   - La fonction g est continue sur $]-\infty;1[$ car elle y est nulle, et elle est continue sur $[1;+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue (x^3 ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$) .
     Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
   - Elle est positive sur $\mathbb{R}$ car elle est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$ (puisque $\dfrac{2}{x^3}>0$).
   - Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$. Comme g est nulle sur $]-\infty;1[$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt=\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=\int_{1}^{+\infty}\frac{2}{t^3}\,dt.$$

     On a ici affaire à une intégrale impropre en $+\infty$ car la fonction à intégrer est continue sur $[1;+\infty[$. Soit donc un réel $A>1$:

$$\int_{1}^{A}\frac{2}{t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^A=-\frac{1}{A^2}-(-1)\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

     L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ est donc bien convergente est égale à .

   Finalement, g peut donc être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X .

   (b) On note G la fonction de répartition de X. Par définition $G(x)=\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$.
   - Si $x<1$: $G(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$.
   - Si $x\geqslant 1$:

$$G(x)=\int_{-\infty}^{1} g(t)\,dt+\int_{1}^{x} g(t)dt=\int_{1}^{x}\frac{2}{t^3}\,dt=\left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^x=1-\frac{1}{x^2}.$$

   En conclusion : $G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$.

3. On pose $M_n=max(X_1,\dots,X_n)$ et on note G_n sa fonction de répartition .

   (a) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}, G_n(x)&=P(M_n\leqslant x)=P(max(X_1,\dots,X_n)\leqslant x)\\&=P([X_1\leqslant x]\cap\dots\cap[X_n\leqslant x])\\&=P(X_1\leqslant x)\times\dots\times P(X_n\leqslant x)\qquad\text{car les } X_i \text{ sont indépendantes}\\&=G(x)\times\dots\times G(x)=(G(x))^n\qquad\text{car les } X_i \text{ suivent la loi de X}\end{aligned}$$

   Par conséquent : $G_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$.

   (b) On pose $Y_n=\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. La fonction de répartition F_n de Y_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F_n(x)=P(Y_n\leqslant x)=P(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\leqslant x)=P(M_n\leqslant\sqrt{n}x)=G_n(\sqrt{n}.x)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{n}.x \geqslant 1 \quad$ si, et seulement si, $\quad x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc si $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$F_n(x) = G_n(\sqrt{n}.x) = 0,$$

et si $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$F_n(x) = G_n(\sqrt{n}.x) = \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}.x)^2}\right)^n.$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$.

4. Pour tout réel x négatif ou nul, on a $x < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

5. (a) Soit x un réel strictement positif.
On aura $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$ dès que $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ c'est-à-dire dès que $n \geqslant \dfrac{1}{x^2}$.
Comme $n \in \mathbb{N}$, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on aura $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

(b) L' équivalent est usuel : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

Pour tout réel x strictement positif, si n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$ alors :

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right).$$

Or, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{nx^2} = 0$, donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}.$$

. On en conclut : $n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -n\dfrac{1}{nx^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

6. D'après ce qui précède :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$, où F est la fonction de répartition de Y.

On peut en conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 3

1. (a) La matrice M_a est triangulaire donc ses valeurs propres ont sur sa diagonale. Ainsi 1 et a sont donc les valeurs propres de M_a (on rappelle que $a \neq 1$).

(b) • Notons $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 / M_a X = X\}$, l'espace propre associé à la valeur propre 1.

$$M_a X = X \Leftrightarrow (M_a - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ (1-a)x + (a-1)y + 0z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (a-1)z = 0 \end{cases} \underset{a\neq 1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0 = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y = z$$

Donc le sous-espace propre associé à 1 est

$$\mathrm{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Notons de même $\mathrm{E}_a = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^3 / \mathrm{M}_a\mathrm{X} = a\mathrm{X}\}$, l'espace propre associé à la valeur propre 1 .

$$\mathrm{M}_a\mathrm{X} = a\mathrm{X} \Leftrightarrow (\mathrm{M}_a - a\mathrm{I})\mathrm{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)x + 0y + 0z = 0 \\ (1-a)x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + (1-a)y + 0z = 0 \end{cases} \underset{a\neq 1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc le sous-espace propre associé à a est

$$\mathrm{E}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Comme M_a admet 2 valeurs propres distinctes et que $\dim(\mathrm{E}_1) + \dim(\mathrm{E}_a) = 1 + 1 \neq 3$,alors M_a n'est pas diagonalisable.

2. On note $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}, \mathrm{M}_a, \mathrm{M}_a^2\right)$.

(a) La dimension de E est le rang de la famille $\left(\mathrm{I}, \mathrm{M}_a, \mathrm{M}_a^2\right)$. Cette famille est-elle libre ?

On a $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M}_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$.

On peut tout écrire mais aussi ne considérer que la première colonne des matrices :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ , } x\mathrm{I} + y\mathrm{M}_a + z\mathrm{M}_a^2 = 0_3 \underset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0x + (1-a)y + (1-a^2)z = 0 \\ 0x + 0y + (1-a)^2 z = 0 \end{cases}$$

(*) : Comme on n'a pris que la première colonne , on n'a pas l'équivalence mais l'implication nous suffit .

Ce système étant triangulaire avec 3 pivots non nuls (car $a \neq 1$), sa seule solution est $x = y = z = 0$.

Ce qui montre que la famille $\left(\mathrm{I}, \mathrm{M}_a, \mathrm{M}_a^2\right)$ est libre. On en déduit que c'est une base de E. Comme elle est constituée de 3 éléments, on a $\dim(\mathrm{E}) = 3$.

(b) Si $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{K}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{JK}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer $(\mathrm{M}_a - \mathrm{I})(\mathrm{M}_a - a\mathrm{I})^2$, on remarque que $\mathrm{M}_a - \mathrm{I} = (1-a)\mathrm{J}$ et $\mathrm{M}_a - a\mathrm{I} = (1-a)\mathrm{K}$.

Ce qui donne alors $(\mathrm{M}_a - \mathrm{I})(\mathrm{M}_a - a\mathrm{I})^2 = (1-a)\mathrm{J}(1-a)^2\mathrm{K}^2 = (1-a)^3\mathrm{JK}^2 = 0$.

(c) On a

$$\begin{aligned} 0 = (\mathrm{M}_a - \mathrm{I})(\mathrm{M}_a - a\mathrm{I})^2 &= (\mathrm{M}_a - \mathrm{I})(\mathrm{M}_a^2 - 2a\mathrm{M}_a + a^2\mathrm{I}) \\ &= \mathrm{M}_a^3 - 2a\mathrm{M}_a^2 + a^2\mathrm{M}_a - \mathrm{M}_a^2 + 2a\mathrm{M}_a - a^2\mathrm{I} \\ &= \mathrm{M}_a^3 - (2a+1)\mathrm{M}_a^2 + (a^2 + 2a)\mathrm{M}_a - a^2\mathrm{I} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{M}_a^3 = (2a+1)\mathrm{M}_a^2 - a(a+2)\mathrm{M}_a + a^2\mathrm{I}$. Et M_a^3 appartient bien à E .

3. (a) Raisonnons par récurrence.

- Pour $n = 0$, On a $\mathrm{M}_a^0 = \mathrm{I} = 0\mathrm{M}_a^2 + 0\mathrm{M}_a + 0\mathrm{I}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie avec $(u_0, v_0, w_0) = (0,0,1)$.
(On vérifierait aisément aussi que $(u_1, v_1, w_1) = (0,1,0)$ et $(u_2, v_2, w_2) = (1,0,0)$.)

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_a^{n+1} = \mathrm{M}_a.\mathrm{M}_a^n &= \mathrm{M}_a(u_n\mathrm{M}_a^2 + v_n\mathrm{M}_a + w_n\mathrm{I}) \quad (\text{car} \mathscr{P}(n) \text{ est vraie }) \\ &= u_n\mathrm{M}_a^3 + v_n\mathrm{M}_a^2 + w_n\mathrm{M}_a \\ &= u_n\left((2a+1)\mathrm{M}_a^2 - a(a+2)\mathrm{M}_a + a^2\mathrm{I}\right) + v_n\mathrm{M}_a^2 + w_n\mathrm{M}_a \\ &= ((2a+1)u_n + v_n)\mathrm{M}_a^2 + (-a(a+2)u_n + w_n)\mathrm{M}_a + a^2u_n\mathrm{I} \\ &= u_{n+1}\mathrm{M}_a^2 + v_{n+1}\mathrm{M}_a + w_{n+1}\mathrm{I} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, en posant $\begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2u_n \end{cases}$

- Ainsi la propriété est bien vérifiée pour tout $n\in\mathbb{N}$ par le principe de récurrence.

(b) Ce qui cloche c'est que, aux lignes 8 et 9 , pour calculer les nouvelles valeurs de `v` et `w` , on utilise la valeur de `u` qui a déjà été changée à la ligne 7 .
Et donc au lieu de calculer $v_{n+1}=-a(a+2)u_n+w_n$ et $w_{n+1}=a^2u_n$,
on calcule $v_{n+1}=-a(a+2)u_{\mathbf{n+1}}+w_n$ et$w_{n+1}=a^2u_{n+1}$!!!

(c) Il aurait fallu sauvegarder la valeur de u qui sert à calculer .

```
for k in range(1,n+1):
    sauv=u
    u=(2*a+1)*u+v
    v=-a*(a+2)*sauv +w
    w=a*a*sauv
```

4.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\text{ on a : } u_{n+3}&=(2a+1)u_{n+2}+v_{n+2}\\&=(2a+1)u_{n+2}-a(a+2)u_{n+1}+w_{n+1}\\&=(2a+1)u_{n+2}-a(a+2)u_{n+1}+a^2u_n.\end{aligned}$$

On admet que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n=\frac{(n-1)a^n-na^{n+1}+1}{(a-1)^2}$$

5. (a) On a admis : $u_n=\dfrac{(n-1)a^n-na^{n+1}+1}{(a-1)^2}$, donc pour déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, il nous faut déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)a^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}na^{n+1}$.
Par croissance comparée, ces limites sont nulles.
Ainsi, il vient

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)a^n-na^{n+1}+1}{(a-1)^2}=\frac{1}{(a-1)^2}.$$

Ensuite, $w_{n+1}=a^2u_n$ donne

$$\lim_{n\to\infty}w_n=\frac{a^2}{(a-1)^2},$$

et enfin : $v_{n+1}=-a(a+2)u_n+w_n$ donne

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{-2a}{(a-1)^2}.$$

(b) On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_a=\lim_{n\to\infty}\mathrm{M}_a^n&=\left(\lim_{n\to\infty}u_n\right)\mathrm{M}_a^2+\left(\lim_{n\to\infty}v_n\right)\mathrm{M}_a+\left(\lim_{n\to\infty}w_n\right)\mathrm{I}\\&=\frac{1}{(a-1)^2}\mathrm{M}_a^2+\frac{-2a}{(a-1)^2}\mathrm{M}_a+\frac{a^2}{(a-1)^2}\mathrm{I}\\&=\frac{1}{(a-1)^2}\left(\mathrm{M}_a^2-2a\mathrm{M}_a+a^2\mathrm{I}\right)\\&=\frac{1}{(a-1)^2}\left(\mathrm{M}_a-a\mathrm{I}\right)^2.\end{aligned}$$

(c) Calcul de L_a^2 : on se souvient que $\mathrm{M}_a-a\mathrm{I}=(1-a)\mathrm{K}$, donc

$$\mathrm{L}_a=\frac{1}{(a-1)^2}\left(\mathrm{M}_a-a\mathrm{I}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{M}_a-a\mathrm{I}}{a-1}\right)^2=\mathrm{K}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne alors

$$\mathrm{L}_a^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{L}_a.$$

6. (a) « $\forall x\in\mathrm{Ker}\left(f_a-\mathrm{Id}\right),\varphi_a(x)=x$ » signifie : « $\forall \mathrm{X}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),(\mathrm{M}_a-\mathrm{I})\mathrm{X}=0\Rightarrow \mathrm{L}_a\mathrm{X}=\mathrm{X}$ ».

Soit donc un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_aX = X$. On a alors :

$$\begin{aligned}
L_aX &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2I\right)X = \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2X - 2aM_aX + a^2X\right)X \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}\left(X - 2aX + a^2X\right) = \frac{1}{(a-1)^2}\left(1 - 2a + a^2\right)X \\
&= \frac{1}{(a-1)^2}(1-a)^2X = X.
\end{aligned}$$

(b) « $\forall x \in \mathrm{Im}\left(f_a - \mathrm{I}d\right), \varphi_a(x) = 0$ » signifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \text{« il existe } Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } (M_a - I)Y = X \text{ »} \Longrightarrow \text{« } L_aX = 0 \text{ »}$$

Soit donc un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel qu' il existe $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $(M_a - I)Y = X$.
En se souvenant que $M_a - I = (1-a)J$, on obtient $X = (M_a - I)Y = (1-a)JY$ et donc

$$L_aX = L_a.(1-a)JY = K^2.(1-a)JY = (1-a)K^2JY = 0$$

(car on vérifie aisément que K^2J est aussi égale à0) .

Problème

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1-p$.

Partie 1 : un jeu naïf

1. Étude de la première manche.

(a) Les variables aléatoires X_1 et Y_1 correspondent au rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques.

Ainsi X_1 et Y_1 suivent donc la loi géométrique de paramètre p :

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

La première manche dure éternellement si, et seulement si, A et B n'obtiennent jamais pile . Donc

$$P(\text{« première manche éternelle »}) = P\left(\text{« A jamais pile »}) \cap \text{« B jamais pile »}\right).$$

Or $P\left(\text{« A n'a jamais pile »}\right) = 0$.
En effet :

$$\begin{aligned}
P\left(\text{« A n'a jamais pile »}\right) &= 1 - P\left(\text{« A obtient un pile »}\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p \\
&= 1 - p\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= 1 - p\frac{1}{1-q} = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$P(\text{« première manche éternelle »}) = 0.$$

(b) L'événement E_1 est réalisé si, et seulement si , X_1 et Y_1 prennent la même valeur, donc $E_1 = [X_1 = Y_1]$.

(c) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, :

$$P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_1 \cap [Y_1 = i] = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = Y_1] \cap [Y_1 = i] = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [Y_1 = i] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i).$$

La dernière égalité étant obtenue par indépendance de X_1 et Y_1 .

On en déduit :

$$P(E_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i)P(Y_1 = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{k-1} p = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \frac{1}{1-q^2}$$
$$= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

(d) Les joueurs A et B ont les mêmes pièces et les lancent dans les mêmes conditions , donc les probabilités que A ou B gagnent sont les mêmes .

On a donc $P(G_1) = P(H_1)$ et G_1 et H_1 sont équiprobables.

Soit A ou B gagne soit il y a égalité et ces trois alternatives s'excluent mutuellement, donc les événements G_1,H_1 et E_1 forment un système complets d'événements .
On en déduit

$$1 = P(G_1) + P(H_1) + P(E_1) = 2P(G_1) + P(E_1).$$

Et par conséquent :

$$P(G_1) = \frac{1}{2}(1 - P(E_1)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{1+q-p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{2q}{1+q}) = \frac{q}{1+q}.$$

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

(a) L'événement G_n est réalisé si, et seulement si, les $n-1$ premières manches ont donné égalité et si A obtient pile avant B à la n-ième manche, donc :

$$G_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n).$$

(b) Pour entier $k \geqslant 2$,

$$P_{E_1 \ldots E_{k-1}}(E_k) = P(\text{« égalité à la k-ième manche »}) = P(E_1) = \frac{p}{1+q}.$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \quad P(G_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n)) \\ &= P(E_1)P_{E_1}(E_2) \ldots P_{E_1 \ldots E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1 \ldots E_{n-1}}(X_n \leqslant Y_n) \\ &= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q}\frac{q}{1+q} \\ &= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.\end{aligned}$$

(c) Pour $n = 1$, on a bien $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} = P(G_1)$.

(d) Le joueur A gagne lorsque qu'il gagne une manche numéro n, pour un n dans $\mathbb{N}^*$, on a donc $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$.

Les événements $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles (car A ne peut pas gagner à deux manche différentes) , on a donc

$$P(G) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1 - \frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} = \frac{q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \frac{1}{2}.$$

(e) Par symétrie (A et B ont autant de chance de gagner l'un que l'autre) , on obtient la probabilisé de l'événement H :

$$P(H) = P(\text{« B gagne à ce jeu »}) = P(\text{« A gagne à ce jeu »}) = P(G) = \frac{1}{2}.$$

et donc :

$$P(\text{ ce jeu a une fin }) = P(\text{A ou B gagne }) = P(G) + P(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

puis finalement :

$$P(E) = P(\text{ ce jeu s'éternise }) = 0.$$

Partie 2 : un autre jeu

3. (a) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = X_1+1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = X_1+1]\cap[X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = i+1]\cap[X_1 = i])\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i+1)P(X_1 = i) \quad \text{par indépendance de} X_1 \text{ et } Y_1\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^i p q^{i-1} p = p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} = p^2 q \frac{1}{1-q^2}\\
&= \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

   (b) La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est :

$$u = P(Y_1 = X_1+1) + P(X_1 = Y_1+1).$$

   Donc, toujours par symétrie :

$$u = P(Y_1 = X_1+1) + P(X_1 = Y_1+1) = \frac{pq}{1+q} + \frac{pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}.$$

4. (a) On a $K_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap [(X_n = Y_n+1)\ \cup (Y_n = X_n+1)]$.

   (b) Donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(K_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap ([(X_n = Y_n+1)\ \cup (Y_n = X_n+1)])\\
&= P(E_1)P_{E_1}(E_2)\ldots P_{E_1\ldots E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1\ldots E_{n-1}}([(X_n = Y_n+1)\ \cup (Y_n = X_n+1)])\\
&= \frac{p}{1+q}\cdots\frac{p}{1+q}\frac{2pq}{1+q}\\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{2pq}{1+q}.
\end{aligned}$$

5. Le joueur A gagne ce pari s'il le gagne à une manche numéro n, pour un des n de $\mathbb{N}^*$. On a donc $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$.

   Les événements $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles , donc :

$$\begin{aligned}
P(K) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{2pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\\
&= \frac{2pq}{1+q}\frac{1}{1-\dfrac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q}\frac{1}{\dfrac{1+q-p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = p.
\end{aligned}$$

Partie 3 : informatique

Dans cette partie, on suppose définie une fonction Python `geom` qui prend en argument un nombre $p \in]0,1[$ et simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = input('Entrez une valeur pour p:')
c = 1
X = geom(p)
Y = geom(p)
while X == Y :
    X= geom(p)
    Y= geom(p)
    c= c+1
if X<Y :
    print("A gagne")
else :
    print("B gagne")
print(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur ?

```
if np.abs(X-Y)==1 :
    print("A gagne le deuxieme jeu")
else :
    print("B gagne le deuxieme jeu")
```

•Fin du sujet 2 •