Chapitre 8 : Couples de variables aléatoires discrètes

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce chapitre seront des variables aléatoires réelles discrètes.

1 Lois associées à un couple de variables aléatoires

1.1 Loi du couple

Définition 1 (Couple de variables aléatoires)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Le **couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y) est l'application définie par

$$\begin{aligned}(X,Y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)).\end{aligned}$$

Définition 2 (Loi d'un couple)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle **loi du couple** (X, Y) ou **loi conjointe de** X **et** Y la donnée de

$$P\left([X = x] \cap [Y = y]\right) \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega).$$

On notera souvent $P(X = x, Y = y)$ pour désigner $P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$.

Exemple 1

On lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 *à* 6*. On s'intéresse aux résultats possibles. On a donc :*

$$(\Omega, \mathscr{A}, P) =$$

où

1. *On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et* Y *celle donnant la valeur du dé blanc. Comme* X *et* Y *sont deux variable aléatoires discrètes définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*,* (X, Y) *est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :*
   (a) *On a*

   $X(\Omega) =$ *et* $Y(\Omega) =$

   (b) *Pour tout* $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *on a*

   $P(X = i, Y = j) =$

2. *Maintenant ,* X *désigne le plus petit des deux nombres obtenus et* Y *le plus grand. Comme* X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes définies sur* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*,* (X, Y) *est un couple de variables aléatoires discrètes. Déterminons sa loi :*
   (a) *On a*

   $X(\Omega) =$ *et* $Y(\Omega) =$

(b) *Pour tout* $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ *on a :*

On peut récapituler la loi sous-forme d'un tableau :

$x\in X(\Omega)$ \ $y\in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Test 1 (*Voir solution.*)

Une urne contient 3 *boules blanches,* 4 *boules vertes et* 5 *boules bleues indiscernables au touché. On tire simultanément* 3 *boules dans l'urne au hasard.*

1. *Déterminer l'espace probabilisé associé à cette expérience* $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
2. *Sur* $(\Omega,\mathscr{A},P)$*, on considère les variables aléatoires* X *égale au nombre de boules blanches obtenues et* Y *égale au nombre de boules vertes obtenues. Déterminer la loi de* (X,Y).

Exemple 2

*On lance en parallèle deux pièces équilibrées une infinité de fois et on s'intéresse aux résultats obtenus (**on suppose tous les lancers indépendants**). On note* X *le rang où la première pièce tombe sur « Face » pour la première fois et* Y *le rang où la deuxième pièce tombe sur « Face » pour la première fois. Déterminons la loi du couple* (X,Y).

1. *On a*

   $X(\Omega)=$ *et* $Y(\Omega)=$

2. *Pour tout* $(i,j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ *déterminons* $P(X=i, Y=j)$.

Test 2 (*Voir solution.*)

Soit $p \in]0,1[$. *On reprend l'énoncer de l'exemple 2 sauf qu'on ne suppose plus les pièces équilibrées : chacune d'elle donne « Face » avec probabilité* p *et « Pile » avec probabilité* $1-p$. *Déterminer la loi du couple* (X,Y) *dans ce cas.*

Proposition 1

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors, la famille

$$\left([X=x]\cap[Y=y]\right)_{x\in X(\Omega)\ ,\ y\in Y(\Omega)}$$

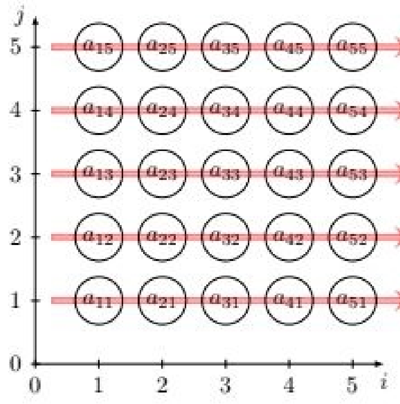
est un système complet d'événements. En particulier,

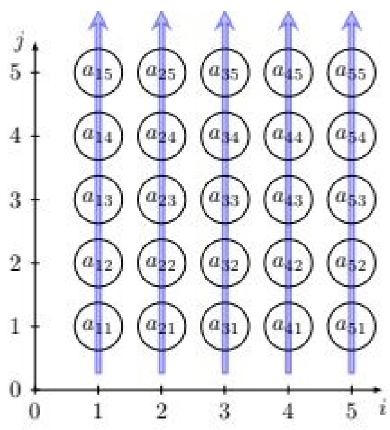
$$\sum_{x\in X(\Omega)\ ,\ y\in Y(\Omega)} P\left([X=x]\cap[Y=y]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} P\left([X=x]\cap[Y=y]\right)\right) = \sum_{y\in Y(\Omega)}\left(\sum_{x\in X(\Omega)} P\left([X=x]\cap[Y=y]\right)\right) = 1.$$

Remarque 1 (*Somme double*)

Soient I, J *deux sous ensembles de* $\mathbb{N}$ *et* $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

1. ***Cas où*** I ***et*** J ***sont finis.*** *On a toujours* $\displaystyle\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$ *et ce nombre est noté* $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$.





2. ***Cas où* I *ou* J *est infini***. *Si pour tout $i \in \mathrm{I}$, la série $\sum_{j\in \mathrm{J}} a_{i,j}$ est absolument convergente et si de plus la série*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}}\left(\sum_{j\in \mathrm{J}}|a_{i,j}|\right)$$

est (absolument) convergente, alors pour tout $j \in \mathrm{J}$ la série $\sum_{i\in \mathrm{I}} a_{i,j}$ converge absolument et la série

$$\sum_{j\in \mathrm{J}}\left(\sum_{i\in \mathrm{I}}|a_{i,j}|\right)$$

*aussi. Dans ce cas, on dit que la série double $\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{i,j}$ est **absolument convergente** et on a*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}}\left(\sum_{j\in \mathrm{J}} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in \mathrm{J}}\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} a_{i,j}\right)$$

Ce nombre est noté $\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} a_{i,j}$ et est appelé somme double de la série double.

Exemple 3

1. ***Cas fini*** : calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} i\,j$

2. ***Cas infini*** : montrer que $\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge absolument et déterminer sa somme.

1.2 Lois conditionnelles

Définition 3 (Lois conditionnelles)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** X **sachant (que l'événement)** $[Y = y]$ **(est réalisé)** la donnée de

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P([Y = y])} \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega).$$

- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de** Y **sachant (que l'événement)** $[X = x]$ **(est réalisé)** la donnée de

$$P_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{P([Y = y] \cap [X = x])}{P([X = x])} \quad \text{pour tout } y \in Y(\Omega).$$

Exemple 4

On reprend les deux cas de l'exemple 1.

1. *Soit $j \in [\![1, 6]\!]$ et déterminons la loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y = j]$.

2. *On rappelle que dans le deuxième cas, la loi de* (X, Y) *est donnée par le tableau suivant.*

$x \in X(\Omega)$ \ $y \in Y(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Déterminons la loi conditionnelle de X *sachant* $[Y = 3]$.

Méthode 1

Pour déterminer la loi conditionnelle de X *sachant* $[Y = y]$ *à partir de la loi du couple* (X, Y) *:*

1. *on commence par déterminer* $P(Y = y)$ *à l'aide de la formule des probabilités totales :*

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

2. *on calcule ensuite* $P_{[Y=y]}([X = x])$ *pour tout* $x \in X(\Omega)$.

Remarquons que, dans le cas où X *et* Y *sont finies et la loi de* (X, Y) *donnée par un tableau :*

1. $P(Y = y)$ *est la somme des probabilités de la colonne correspondant à* $[Y = y]$,

2. *la loi conditionnelle de* X *sachant* $[Y = y]$ *s'obtient en renormalisant la colonne correspond à* $[Y = y]$ *par* $P(Y = y)$

(c'est le même principe pour la loi conditionnelle de Y *sachant* $[X = x]$ *mais avec les lignes).*

Exemple 5

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ *et pour tout* $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

$$P\left([X = i, Y = j]\right) = \frac{e^{-i} i^j}{2^i j!}.$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ *et déterminons la loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X = i]$.

1. *On commence par déterminer* $P([X = i])$ *:*

2. *On en déduit la loi conditionnelle de* Y *sachant* $[X = i]$ *:*

Test 3 (*Voir solution.*)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1. Déterminer la loi conditionnelle de Y *sachant* $[X = 4]$.

Remarque 2

1. *Une loi conditionnelle est une loi de probabilité. En particulier, pour tout* $y \in Y(\Omega)$ *tel que* $P(Y = y) \neq 0$,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P_{[Y=y]}([X = x]) = 1$$

et de même, pour tout $x \in X(\Omega)$ *tel que* $P(X = x) \neq 0$,

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} P_{[X=x]}\left([Y = y]\right) = 1.$$

2. *La connaissance des lois conditionnelles ne permet pas de retrouver la loi du couple.*

1.3 Lois marginales

Définition 4 (Lois marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle

1. **première loi marginale** du couple (X, Y) la loi de X,
2. **deuxième loi marginale** du couple (X, Y) la loi de Y.

Pour le calcul pratique des lois marginales, on utilise la formules des probabitlités totales :

Proposition 2 (Calcul des lois marginales)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

1. On a, pour tout $x\in X(\Omega)$

$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\left([X=x,Y=y]\right) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ |\ P([Y=y])\neq 0} P_{[Y=y]}([X=x])\,P\left([Y=y]\right).$$

2. On a, pour tout $y\in Y(\Omega)$

$$P\left([Y=y]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\left([X=x,Y=y]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)\ |\ P([X=x])\neq 0} P_{[X=x]}\left([Y=y]\right)P([X=x]).$$

Remarque 3

1. *Les égalités du point* 1 *résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $\left([Y=y]\right)_{y\in Y(\Omega)}$ *et les égalités point* 2 *résultent de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$.
2. *La proposition ci-dessus entraîne en particulier la convergence des séries considérées.*
3. *La connaissance de la loi du couple* (X,Y) *permet de déterminer les lois de* X *et de* Y.
4. *La connaissance des lois de* X *et* Y *prises séparément n'apporte aucune information sur leur interaction et donc sur la loi du couple* (X,Y).
5. *En revanche, la connaissance de la loi de* X *et des lois conditionnelles de* Y *sachant* $[X=x]$ *pour tout* $x\in X(\Omega)$ *permet de trouver la loi du couple.*

Méthode 2

1. *Pour trouver les lois marginales à partir de la loi du couple, on utilise les égalités*

$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\left([X=x,Y=y]\right) \quad \textit{ou} \quad P\left([Y=y]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\left([X=x,Y=y]\right)$$

de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.

2. *Pour trouver la loi de* X *connaissant les lois conditionnelles de* X *sachant* $[Y=y]$ *pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *et la loi de* Y *on utilise l'égalité*

$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ |\ P([Y=y])\neq 0} P_{[Y=y]}([X=x])\,P\left([Y=y]\right)$$

de la proposition 2. Il faut savoir les retrouver avec la formule des probabilités totales.

3. *Pour trouver la loi du couple* (X,Y) *connaissant la loi de* X *et les lois conditionnelles de* Y *sachant* $[X=x]$ *pour tout* $x\in X(\Omega)$ *tel que* $P(X=x)\neq 0$, *on utilise l'égalité :*

$$P\left([X=x,Y=y]\right) = P([X=x])\,P_{[X=x]}\left([Y=y]\right)$$

qui provient de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Exemple 6

On reprend le cas 2 *l'exemple 1. Déterminons la loi marginale de* X.

Exemple 7

Soient X, Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose que* $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$ *et que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *la loi de* Y *sachant* $[X = k]$ *est la loi* $\mathscr{B}(k, p)$ *avec* $0 < p < 1$.

1. *Déterminons la loi de* Y.
   (a) *On sait que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *pour tout* $i \in \mathbb{N}$

   $$P([X = k]) = \qquad \textit{et} \qquad P_{[X=k]}([Y = i]) = \qquad .$$

   (b) *De plus,*

   (c) *Donc* Y *suit la loi*
2. *Déterminons la loi du couple* (X, Y). *Pour tout* $(k, i) \in \mathbb{N}^2$ *on a*

   $$P([X = k, Y = i]) =$$

Test 4 (*Voir solution.*)

1. *On reprend l'exemple 4 (cas 2).*
   (a) *Avec la loi du couple* (X, Y), *déterminer la loi de* X.
   (b) *Trouver la loi de* Y *de deux façons :*
      i. *à partir de la loi de* Y *sachant* $[X = i]$ *pour tout* $i \in X(\Omega)$ *(voir exemple 4) et de la loi de* X ;
      ii. *à partir de la loi de* (X, Y).

2. *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par* $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ *et pour tout* $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$

$$P(X=i,Y=j)=\frac{e^{-2}2^{j-i}}{j!}.$$

Déterminer les lois marginales.

2 Indépendance

2.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 5 (Indépendance de deux variables aléatoires discrètes)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** (pour la probabilité P) si

$$\forall x\in X(\Omega)\ \forall y\in Y(\Omega)\ ,P\left([X=x]\cap[Y=y]\right)=P\left([X=x]\right)P\left([Y=y]\right).$$

Remarque 4

1. *Autrement dit les variables* X *et* Y *sont indépendantes si pour tout* $x\in X(\Omega)$ *et tout* $y\in Y(\Omega)$*, les événements* $[X=x]$ *et* $[Y=y]$ *sont indépendants.*
2. *En cas d'indépendance de* X *et* Y*, les lois marginales permettent donc de retrouver la loi du couples.*
3. *Si* X *et* Y *sont indépendantes alors pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *tel que* $P\left([Y=y]\right)\neq 0$ *on a :*

La loi de X *sachant* $[Y=y]$ *est donc la loi de* X*.*

Méthode 3

1. *Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes* X *et* Y *sont indépendantes il faut montrer que* $P\left([X=x]\cap[Y=y]\right)=P\left([X=x]\right)P\left([Y=y]\right)$ ***pour tout*** $x\in X(\Omega)$ ***et*** $y\in Y(\Omega)$.
2. *Pour montrer que deux variables aléatoires discrètes* X *et* Y *ne sont pas indépendantes il suffit de montrer que* $P\left([X=x]\cap[Y=y]\right)\neq P\left([X=x]\right)P\left([Y=y]\right)$ ***pour (au moins) un*** $x\in X(\Omega)$ ***et un*** $y\in Y(\Omega)$.

Exemple 8

On reprend l'exemple 1 : on lance deux dés équilibrés (l'un bleu, l'autre blanc) dont les six faces sont numérotées de 1 *à* 6*. On a*

$$(\Omega,\mathscr{A},P)=\left([\![1,6]\!]^2,\mathscr{P}\left([\![1,6]\!]^2\right),P_{\text{unif.}}\right)$$

où $P_{\text{unif.}}$ *est la probabilité uniforme sur* Ω.

1. *On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et* Y *celle donnant la valeur du dé blanc. D'après l'exemple 1, pour tout* $(i,j)\in[\![1,6]\!]^2$ *on a :*

   $$P\left([X=i]\right)=\qquad;\quad P\left([Y=j]\right)=\qquad;\quad P\left([X=i,Y=j]\right)=\qquad.$$

2. X *désigne le plus petit des deux nombres obtenus et* Y *le plus grand. On a*

   $$P\left([X=2,Y=1]\right)=$$

   Or

Test 5 (*Voir solution.*)

On tire successivement deux jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note X la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et Y au deuxième. Dans les deux cas suivants dire si les variables X et Y sont indépendantes.

1. *Tirage avec remise.*
2. *Tirage sans remise.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On suppose que pour tout $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$ tel que $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right) \neq 0$ on a :

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=y]}([\mathrm{X}=x]) = \mathrm{P}([\mathrm{X}=x]).$$

Montrer que X et Y sont indépendantes.

2.2 Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Définition 6 (Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes)

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.
Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

- On dit que $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{X}_1(\Omega) \times \cdots \times \mathrm{X}_n(\Omega),\ \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}([\mathrm{X}_k = x_k]).$$

- Plus généralement, si $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes définies $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On dit que les variables $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 9

On lance deux fois successives une pièce équilibrée. On note X (resp. Y) la variable aléatoire valant 1 si le premier lancer (resp. deuxième lancer) donne Pile et 0 sinon; et Z la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu exactement un Pile et 0 sinon.

1. *D'une part*

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}=1, \mathrm{Y}=1, \mathrm{Z}=1]) =$$

2. *D'autre part*

3. *Conclusion :*

Remarque 5

⚠ *La notion d'indépendance mutuellement est plus contraignante que l'indépendance deux à deux. Dans l'exemple précédent, X, Y sont indépendantes; Y, Z aussi et X, Z aussi. Mais X,Y,Z ne sont pas mutuellement indépendantes!*

Proposition 3 (Lemme des coalitions)

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors toute variable aléatoire fonction de $X_1, \dots, X_k$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $X_{k+1}, \dots, X_n$.

Exemple 10

Si $X_1, \dots, X_5$ *sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors* $X_1 + 2X_3^2$ *est indépendante de* $X_2 + e^{X_4+X_5}$.

Compléments sur l'indépendance

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et **mutuellement indépendantes**. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit $A_i \subset X_i(\Omega)$. Alors

$$P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n).$$

Exemple 11

Si X *et* Y *sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes alors pour tout* $x \in X(\Omega)$ *et pour tout* $y \in Y(\Omega)$ *on a :*

- $P\left([X \geqslant x] \cap [Y \geqslant y]\right) = P\left([X \geqslant x]\right) P\left([Y \geqslant y]\right)$,
- $P\left([X < x] \cap [Y \geqslant y]\right) = P\left([X < x]\right) P\left([Y \geqslant y]\right)$,
- $\dots$

3 Variable aléatoire fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes : $Z = g(X, Y)$

3.1 Cas général

Définition 7 (Loi de $g(X, Y)$)

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $Z = g(X, Y)$ l'application

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto g(X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

Alors

1. Z est une variable aléatoire discrète.
2. L'ensemble des valeurs prises par Z est donné par

$$Z(\Omega) = \left\{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\right\} \subset \left\{g(x, y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\right\}.$$

3. La loi de Z est donnée par

$$\forall z \in Z(\Omega),\ P\left([Z = z]\right) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid z = g(x,y)} P\left([X = x] \cap [Y = y]\right).$$

Théorème 1 (Théorème de transfert)

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$. On note $Z = g(X, Y)$.
Si la somme double $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)\ ,\ y \in Y(\Omega)} g(x, y) P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$ est absolument convergente alors Z possède une espérance. Dans ce cas,

$$E(Z) = \sum_{x \in X(\Omega)\ ,\ y \in Y(\Omega)} g(x, y) P\left([X = x] \cap [Y = y]\right).$$

Remarque 6

1. *Dans le cas où* X *et* Y *sont à support **fini**, la somme double est finie donc converge absolument ; dans ce cas* Z *admet toujours une espérance.*
2. *Dans le cas où* X *ou* Y *est infinie, voir la remarque 1 concernant la convergence absolue des sommes doubles.*

Exemple 12

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les trois faces sont numérotées de 1 *à* 3 *; il gagne* 2 *fois la valeur du premier dé et perd* 2 *fois la valeur du second dé. On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,* Y *celle donnant la valeur du second dé et* Z *celle donnant les gains (algébriques) du joueur.*

1. *La variable aléatoire* Z *est fonction de* X *et* Y *:*
2. *Les valeurs prises par* Z *sont :*
3. *La loi de* Z *est donnée par :*
4. *Comme les variables* X *et* Y *sont finies,* Z *possède une espérance et*

Exemple 13

Soit (X, Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *dont la loi conjointe est définie par*

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P\left([X = i, Y = j]\right) = \frac{i+j}{e2^{i+j}\, i!\, j!}.$$

Montrons que $Z = 2^{X+Y}$ *possède une espérance et calculons la.*

1. *Montrons que pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *la série* $\sum_{j \geqslant 0} 2^{i+j} P\left([X = i, Y = j]\right)$ *est absolument convergente.*

2. *Montrons que la série* $\sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j} P\left([X = i, Y = j]\right) \right)$ *est absolument convergente.*

3. *Conclusion :*

3.2 Loi de la somme

Loi de la somme de variables aléatoires discrètes

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
La variable aléatoire $X+Y$ est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (X+Y)(\Omega),\ P([X+Y=z]) = \sum_{x\in X(\Omega)\ |\ z-x\in Y(\Omega)} P([X=x, Y=z-x])\,.$$

Démonstration : A savoir refaire dans les exercices!

■

Méthode 4

On retiendra que pour déterminer la loi de la somme à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$. Il est important de remarquer que

$$[X=x, X+Y=z] = [X=x, x+Y=z] = [X=x, Y=z-x]\,.$$

Remarque 7

On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$. On obtient alors

$$P([X+Y=z]) = \sum_{y\in Y(\Omega)\ |\ z-y\in X(\Omega)} P\big([X=z-y, Y=y]\big)\,.$$

Exemple 14

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,6 \rrbracket)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,4 \rrbracket)$. *On suppose que* X *et* Y *sont indépendantes.*

1. $(X+Y)(\Omega) =$
2. *Soit* $k \in (X+Y)(\Omega)$.

Test 7 (*Voir solution.*)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé suivant une loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$,

$$P([X+Y=n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

Proposition 4 (Stabilité des lois binomiales)

Soient $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p).$$

Démonstration : On admet la formule de Vandermonde : pour tout $(n,m,z) \in \mathbb{N}^3$

$$\sum_{i=\max(0,z-m)}^{\min(n,z)} \binom{n}{i}\binom{m}{z-i} = \binom{m+n}{z}.$$

■

Proposition 5 (Stabilité des lois de Poisson)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$ deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu).$$

Test 8 (*Voir solution.*)

Prouver la proposition 5.

Remarque 8 (*Voir TD*)

*Plus généralement, si $X_1, \dots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes** alors*

1. *si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p), \dots, X_r \hookrightarrow \mathscr{B}(n_r, p)$ alors $X_1 + \cdots + X_r \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + \cdots + n_r, p)$;*
2. *si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1), \dots, X_r \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_r)$ alors $X_1 + \cdots + X_r \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)$.*

Proposition 6 (Linéarité de l'espérance)

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors

1. $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ possède une espérance,
2. $E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 E(X_1) + \cdots + \lambda_n E(X_n)$.

Exemple 15

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre

p.

- *D'après la remarque 8, $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.*
- *D'après la proposition ci-dessus*

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np.$$

On retrouve la formule de l'espérance d'une loi binomiale.

Méthode 5

***Sous réserve d'existence**, il y a trois façons de calculer $E(X+Y)$.*

1. *Si on connaît la loi de X et de Y, on utilise la linéarité : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.*
2. *Si on connaît la loi de $X+Y$, on utilise la définition de l'espérance.*
3. *Si on connaît la loi du couple (X, Y) on utilise le théorème de transfert : $E(X+Y) = \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} (x+y) P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$.*

3.3 Loi du produit

Loi du produit de variables aléatoires discrètes

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
La variable aléatoire XY est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall z \in (XY)(\Omega),\ P([XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x, xY = z]).$$

Démonstration : A savoir refaire dans les exercices !

■

Méthode 6

On retiendra que pour déterminer la loi du produit à partir de la loi conjointe, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$. Il est important de remarquer que

$$[X = x, XY = z] = [X = x, xY = z].$$

Remarque 9

On peut très bien utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left([Y = y]\right)_{y \in Y(\Omega)}$. On obtient alors

$$P([XY = z]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\left([yX = z, Y = y]\right).$$

Exemple 16

Un joueur lance successivement deux dés équilibrés dont les trois faces sont numérotées de 1 *à* 3 *; il gagne alors un montant égal au produit des deux nombres obtenus. On note* X *la variable aléatoire donnant la valeur du premier dé,* Y *celle donnant la valeur du second dé et* Z *celle donnant les gains du joueur.*

1. *La variable aléatoire* Z *est fonction de* X *et* Y *:*

2. *Calculons* $P([Z=6])$.

Proposition 7

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance. Alors XY a une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Méthode 7

Sous réserve d'existence*, il y a trois façons de calculer* $E(XY)$.

1. *Si on connaît la loi de* X *et de* Y *et que* X *et* Y *sont* ***indépendantes****, on utilise* $E(XY) = E(X)E(Y)$.
2. *Si on connaît la loi de* XY*, on utilise la définition de l'espérance.*
3. *Si on connaît la loi du couple* (X, Y) *on utilise le théorème de transfert :* $E(XY) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega), y\in Y(\Omega)} xyP\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Soit $p \in]0,1[$*. On considère* $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$ *deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de* XY *et son espérance.*

3.4 Loi du min, max

Méthode 8

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à* ***valeurs entières*** *définies sur un même espace probabilisé et* ***indépendantes*** *et soit* $U = \max(X, Y)$.
Pour déterminer la loi de U *:*

1. *on justifie que pour tout* $k \in U(\Omega)$ *on a* $[U \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$ *;*
2. *par indépendance, on en déduit la fonction de répartition* F_U *de* U *;*
3. *on utilise* $P([U=k]) = F_U(k) - F_U(k-1)$.

Exemple 17

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant n *boules numérotées de* 1 *à* n*. On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *celle égale au deuxième numéro tiré.*

On note $U = \max(X, Y)$*. On a* $U(\Omega) = [\![1, n]\!]$*.*

1. *Justifions que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $[U \leqslant k] = [X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]$.
2. *Déterminons* F_U.
3. *Déterminons la loi de* U.

Méthode 9

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires à* ***valeurs entières*** *définies sur un même espace probabilisé et* ***indépendantes*** *et soit* $V = \min(X, Y)$*.*
Pour déterminer la loi de V *:*

1. *on justifie que pour tout* $k \in V(\Omega)$ *on a* $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$ *;*
2. *par indépendance, on en déduit* $1 - F_V$ *;*
3. *on utilise* $P([V = k]) = F_V(k) - F_V(k-1)$.

Remarque 10

Parfois on peut déterminer la loi du minimum et du maximum directement comme on l'a fait dans le cas 2 de l'exemple 1.

Exemple 18

On tire au hasard deux boules, avec remise, dans une urne contenant n *boules numérotées de* 1 *à* n*. On note* X *la variable aléatoire égale au premier numéro tiré et* Y *celle égale au deuxième numéro tiré.*

On note $V = \min(X, Y)$*. On a* $V(\Omega) = [\![1, n]\!]$*.*

1. *Justifions que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.
2. *Déterminons* $1 - F_V$.

3. *Déterminons la loi de* V.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$.

1. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, calculer* $P([\min(X,Y) > k])$.
2. *En déduire la loi de* $\min(X,Y)$.
3. *Expliquer ce résultat à l'aide d'une expérience.*

4 Variance et covariance

4.1 Covariance

Définition 8 (Covariance)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possèdent un moment d'ordre 2. Alors l'espérance suivante existe :

$$E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

On l'appelle la **covariance de** X **et** Y et on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Remarque 11

En particulier, si X *a un moment d'ordre deux alors le couple* (X,X) *possède une covariance et :* $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.

Proposition 8 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possèdent un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, **si** X **et** Y **sont indépendantes** alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

Remarque 12

⚠ *Le fait que* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ***n'implique pas*** *que* X *et* Y *sont indépendantes (voir exemple ci-dessous).*

Exemple 19

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![-1,1]\!])$ *et* $Y = X^2$.

- *Les variables* X *et* Y *ne sont pas indépendantes :*

- *La covariance de* X *et* Y *existe car*

Test 11 (*Voir solution.*)

On reprend le cas 2 de l'exemple 1.Déterminer la covariance de X *et* Y.

Proposition 9

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre deux. Alors

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$ (symétrie) ;
2. $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X_2, Y)$ (linéarité à gauche) ;
3. $\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \mathrm{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X, Y_2)$ (linéarité à droite) ;
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = \mathrm{Cov}(a, X) = 0$.

Méthode 10

En pratique, pour déterminer la covariance de deux variables aléatoires, on a deux méthodes :

1. *utiliser la formule de Koenig-Huygens ;*
2. *utiliser les propriétés de linéarité de la covariance.*

Exemple 20

Soit X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre deux. On note* $U = X - Y$ *et* $V = X + Y$. *Alors :*

Proposition 10 (Lien avec la variance)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y ont un moment d'ordre deux. Alors

1. $X + Y$ possède une variance et
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y);$$
2. si de plus X et Y sont **indépendantes** alors
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes possédant un moment d'ordre 2 (donc une variance) et **mutuellement indépendantes** alors $X_1 + \cdots + X_n$ possède une variance donnée par

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

Méthode 11

1. *Pour calculer la variance d'une somme on peut :*
   (a) *utiliser la formule de Koenig-Huygens (voir chapitre précédent) si l'on connaît la loi de la somme ;*
   (b) *utiliser la formule* $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
2. *Parfois, on peut être amené à utiliser la formule* $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ *pour déterminer la covariance.*

4.2 Corrélation linéaire

Définition 9 (Coefficient de corrélation linéaire)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**.
On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et de Y le réel noté $\rho(X,Y)$ et défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition 11

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes chacune ayant une variance **non nulle**. Alors

$$\left|\rho(X,Y)\right| \leqslant 1.$$

De plus,
- $\rho(X,Y) = 1$ si et seulement si il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $P([Y = aX+b]) = 1$;
- $\rho(X,Y) = -1$ si et seulement si il existe $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $P([Y = aX+b]) = 1$.

Méthode 12

On peut calculer le coefficient de corrélation linéaire de X *et* Y *de plusieurs façons selon le contexte :*
1. *à l'aide de la définition si l'on connaît la covariance et les variances ;*
2. *si les variables aléatoires sont indépendantes alors* $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ *donc* $\rho(X,Y) = 0$;
3. *si* $Y = aX + b$ *avec* $a \neq 0$*, alors le coefficient de corrélation linéaire vaut* ± 1.

Exemple 21

On lance n fois ($n \geqslant 2$) une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $1-p$. On note X *la variable comptant le nombre de Piles et* Y *celle comptant le nombre de Faces. Déterminons* $\rho(X,Y)$.

5 Objectifs et erreurs à éviter

5.1 Objectifs

1. Savoir déterminer la loi d'un couple à partir de l'expérience aléatoire, à partir de la loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
2. Savoir trouver les lois conditionnelles à partir de la loi du couple.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver la loi marginale de X en connaissant la loi de Y et les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.
5. Connaître la définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle.

6. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de XY, $X+Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$.
8. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X,Y)$.
9. Connaître les résultats de stabilité par somme des variables indépendantes Binomiales et de Poisson.
10. Savoir justifier l'existence et déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $V(X+Y)$, $\rho(X,Y)$.

5.2 Erreurs à éviter

1. Il ne faut jamais écrire $P\left([X=x,Y=y]\right) = P\left([X=x]\right)P\left([Y=y]\right)$ si les variables X et Y ne sont pas indépendantes ou si vous n'avez pas justifié qu'elles le sont !
2. Il ne faut pas confondre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux (voir la remarque 5).
3. Ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance dans la stabilité par somme des lois binomiales et de Poisson.
4. Ne pas oublier que le paramètre p doit être le même pour les deux variables aléatoires dans la stabilité par somme des lois binomiales.
5. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ mais **la réciproque est fausse** !
6. Ne pas croire que même loi signifie égale !

   Exemple 22

   Si on lance une pièce équilibrée et qu'on note X *la variable valant* 1 *si on fait Pile et* 0 *sinon et* Y *la variable valant* 1 *si on fait Face et* 0 *sinon. Alors* X *et* Y *suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$ *mais elles ne sont pas égales :quand l'une vaut* 1 *l'autre vaut* 0 *!*

7. N'oubliez pas la formule des probabilités totales !