ECG2 – Mathématiques

DS2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

À tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ définie par :

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $\mathrm{M}(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\mathrm{E} = \left\{\mathrm{M}(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On note I la matrice identité $\mathrm{M}(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
4. (a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = \mathrm{X}\right\}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F et en déduire sa dimension.
   (c) Montrer que $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ n'est pas inversible.
5. (a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{G} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 2\mathrm{X}\right\}$ est un espace vectoriel, déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G et en déduire sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ constituée des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et des vecteurs de $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celle du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
6. On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On notera D cette matrice.
7. Soi $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Prouver que la matrice $\mathrm{D}(a,b) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$ est une matrice diagonale.
   (b) Montrer que $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\mathrm{M}(a,b)$ soit inversible.
   (c) Prouver que $(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I}$ si et seulement si $(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}$
   En déduire l'existence de quatre matrices $\mathrm{M}(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant
   $$(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I}.$$

Exercice 2

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X *prend la valeur* 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n-ième lancer »,
- P_n : « Obtenir Pile au n-ième lancer ».

La suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »,
- $\mathrm{B}_n = \mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) \qquad \text{et} \qquad a_n = \mathrm{P}([\mathrm{X} = n]).$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[\mathrm{X}=2]$, $[\mathrm{X}=3]$ et $[\mathrm{X}=4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
   En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$.
3. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
import numpy.random as rd
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile ........ :
        if rd.random() < 1/2 :
            pile = pile + 1
        else:
            pile = .........
        tirs = .........
    return tirs
```

Partie B

4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $$\mathrm{P}(\mathrm{U}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1}) - \mathrm{P}(\mathrm{U}_n \cap \mathrm{B}_{n+1}).$$
   (b) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :
   $$\mathrm{U}_n \cap \mathrm{B}_{n+1} = (\mathrm{U}_{n-2} \cap \mathrm{F}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n+1}) \cup (\mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n+1}).$$
   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :
   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
6. En déduire :
   $$\mathrm{P}([\mathrm{X} = -1]) = 0.$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} k\,P([X = k]).$$

7. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}\, v_{n-2}.$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P([X = n+1]) = v_n - v_{n+1}.$$

9. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8\,v_{n+2} - n\,v_n.$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée.
11. Montrer que X admet une espérance.
12. (a) Démontrer que la suite $(n\,v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

    (b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
    À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.

    (c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 e^{-x}.$$

On pourra utiliser les encadrements suivants :

$$2.71 < e < 2.72 \quad ; \quad 7.38 < e^2 < 7.39 \quad ; \quad 20.08 < e^3 < 20.09$$

Partie A-Étude d'une fonction

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f.

   (b) Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de f.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en étant particulièrement soigneux sur le tracé au voisinage de 0.
5. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = x(xe^{-\frac{x}{2}} - 1)(xe^{-\frac{x}{2}} + 1)$.

   (b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

   On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

   (c) Justifier que $g(2) < 1$ et en déduire que l'équation $g(x) = 1$ n'admet pas de solution.

   (d) Montrer que l'équation $g(x) = -1$ admet une unique solution que l'on notera α. Justifier que $\alpha \in]-1, 0[$.

   (e) Déterminer les points fixes de f.

Partie B-Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n).$$

6. (a) Justifier que $0 < f(3) < 2$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 2[$.

7. (a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x \leqslant 0$.
   (b) En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad h(x) = x^2 e^{-x}.$$

   (a) Étudier les variations de h.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = h(u_n)$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{4}{e^2}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{4}{e^2}\right)^n u_0.$$

10. Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?

Partie C-Étude d'une intégrale

11. Soit $\mathrm{A} \in [0, +\infty[$.
   (a) Montrer que :

$$\int_0^{\mathrm{A}} f(t)\,dt = -\mathrm{A}^3 e^{-\mathrm{A}} + 3\int_0^{\mathrm{A}} t^2 e^{-t}\,dt.$$

   (b) Montrer que :

$$\int_0^{\mathrm{A}} t^2 e^{-t}\,dt = -\mathrm{A}^2 e^{-\mathrm{A}} + 2\int_0^{\mathrm{A}} t e^{-t}\,dt.$$

   (c) Calculer $\int_0^{\mathrm{A}} t e^{-t}\,dt$.
   (d) En déduire la valeur de $\int_0^{\mathrm{A}} f(t)\,dt$.
   (e) Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$? Le cas échéant, donner sa valeur.
12. Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad u(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

   (a) Montrer que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer u'.
   (b) Montrer que :

$$\forall x > 3, \quad |u(x)| \leqslant f(x).$$

   (c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.