

# TD11-Réduction

## Exercice 1

1. Vérifier que le vecteur  $u = (1, 0, 3)$  est un vecteur propre de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x - z, y, 3x - 2z).$$

Préciser la valeur propre associée.

2. Vérifier que le vecteur  $X^3$  est un vecteur propre de l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_4[X]$  défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad \varphi(P) = XP'(X).$$

Préciser la valeur propre associée.

3. Vérifier que le vecteur  $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Préciser la valeur propre associée.

## Exercice 2

Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$
2.  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$
3.  $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$
4.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$
5.  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$
6.  $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

## Exercice 3

Soit  $\psi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi((x, y, z)) = (x + y + z, 2y + 2z, 3z).$$

1. Déterminer la matrice de  $\psi$  dans la base canonique.
2. En déduire le spectre de  $\psi$ .
3. Reprendre les questions précédentes avec les applications  $f$  et  $\varphi$  de l'exercice 1.

## Exercice 4

1. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme  $\psi$  de l'exercice 3.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de la matrice  $A$  de l'exercice 2

## Exercice 5

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$f^3 - 7f + 6 \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

Déterminer les valeurs propres possibles de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il inversible? Si oui, déterminer son inverse en fonction de  $f$ .

2. Montrer que le polynôme  $P = X^2 + X - 6$  est un polynôme annulateur de la matrice  $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . En déduire les valeurs propres de  $H$ . La matrice  $H$  est-elle inversible? Si oui, déterminer son inverse.

## Exercice 6

Soient  $a, b, c$  trois réels tous non nuls et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $M^2 = 3M$  et en déduire les valeurs propres possibles de  $M$ .
2. Déterminer le spectre de  $M$  et, pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre associé.
3. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

#### Exercice 7

Soient  $a, b, c$  trois réels et  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ . Déterminer les valeurs de  $a, b, c$  pour lesquels la matrice  $A$  est diagonalisable.

#### Exercice 8

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (X+1)P'(X) + P(X) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  et une base de chaque espace propre.
3. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

#### Exercice 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$  et ses sous-espaces propres.
2. En déduire que  $A$  est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .

#### Exercice 10 (Ecricome 2016)

**Partie A :** pour tout couple de réels  $(x, y)$ , on définit la matrice  $M(x, y)$  par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle  $E$  l'ensemble des matrices  $M(x, y)$  où  $x$  et  $y$  décrivent  $\mathbb{R}$  :

$$E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note  $A = M(1, 0)$  et  $B = M(0, 1)$ .

1. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de  $A$  et déterminer les espaces propres associés. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont la première ligne est  $(1, -2, 1)$  et telle que :

$$A = PD_A P^{-1} \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer  $P^{-1}$ .
5. En notant  $X_1, X_2$  et  $X_3$  les trois vecteurs colonnes formant la matrice  $P$ , calculer  $BX_1, BX_2$  et  $BX_3$ .  
En déduire l'existence d'une matrice diagonale  $D_B$  que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_B P^{-1}.$$

6. En déduire que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe une matrice diagonale  $D(x, y)$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $(x, y)$  pour que  $M(x, y)$  soit inversible.
8. Montrer que  $B^2$  est un élément de  $E$ . La matrice  $A^2$  est-elle aussi un élément de  $E$  ?

**Partie B :** on souhaite dans cette partie étudier les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par les conditions initiales  $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$  et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1. Que vaut  $X_0$  ?
2. Déterminer une matrice  $C$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Déterminer ensuite deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $C = M(x, y)$ .

3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = C^n X_0$ .
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer  $a_n, b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 11 (EML 2013)**

On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

1. Est-ce que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  ?
2. Déterminer les valeurs propres de  $A$  et, pour chaque valeur propre de  $A$ , déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une matrice  $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ , à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que  $A = PDP^{-1}$ , et calculer  $P^{-1}$ .

On appelle commutant de  $A$ , et on note  $C_A$ , l'ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telles que

$$AM = MA.$$

On appelle commutant de  $D$ , et on note  $C_D$ , l'ensemble des matrices  $N$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telles que

$$DN = ND.$$

4. Montrer que  $C_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .
5. Soit  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}MP$ . Montrer :

$$M \in C_A \iff N \in C_D.$$

6. Déterminer  $C_D$ , en utilisant les coefficients des matrices.
7. En déduire :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. Déterminer une base de  $C_A$  et la dimension de  $C_A$ .

**Exercice 12 (EDHEC 2017)**

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille  $(e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , les fonctions  $e_0, e_1, e_2$  étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $P$  de  $E$ , associe la fonction, notée  $\varphi(P)$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

1. (a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.  
(b) Déterminer  $(\varphi(e_0))(x)$ ,  $(\varphi(e_1))(x)$  et  $(\varphi(e_2))(x)$  en fonction de  $x$ , puis écrire  $\varphi(e_0)$ ,  $\varphi(e_1)$  et  $\varphi(e_2)$  comme combinaison linéaire de  $e_0, e_1$  et  $e_2$ .  
(c) Déduire des questions précédentes que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. (a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(e_0, e_1, e_2)$ . On vérifiera que la première ligne de  $A$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- (b) Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$ .  
(c) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes Scilab suivantes pour que soit affichée la matrice  $A^n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[.....]
disp(.....)
```

4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$  tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner  $u_0$  et établir que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$ .

- (b) En déduire, par sommation, l'expression de  $u_n$  pour tout entier  $n$ .  
(c) En déduire  $A^n$ .