Chapitre 4 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

La famille (u, v, w) *est-elle génératrice de* $\mathbb{R}^3$*, où*

$$u = (1,2,3)\ ,\ v = (0,-1,-2)\ ,\ w = (2,3,8)\ ?$$

Test 2 (*Voir solution.*)

On admet que la famille $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,2,3)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$*. En déduire, à l'aide de la proposition précédente, que* $((0,1,0), (2,0,0), (0,0,6))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. *Dans* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*, la famille*
$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$
2. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *la famille constituée des matrices*
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\ ,\ E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\ ,\ E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$
3. *Dans* $\mathbb{R}[X]$ *la famille*
$$(X^2 - X + 1\ ,\ 2X^2 - X + 3\ ,\ -X^2 + X - 1).$$

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $(X+1, X+2)$,
2. $(X+1, 2X+2)$.

Test 5 (*Voir solution.*)

1. *Soit* $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}$*. Montrer que c'est un espace vectoriel et trouver en une base.*
2. *Soient*
$$P_0 = (X-1)(X+1)\ ,\ P_1 = (X+1)(X-2)\ ,\ P_2 = (X-1)(X-2).$$
Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}^3$*, on considère la famille* $\mathscr{B} = ((1,2,-1), (-1,0,2), (1,1,1))$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer les coordonnées de* $(1,2,3)$ *dans cette base.*
3. *Soient* x, y, z *trois réels. Déterminer les coordonnées de* (x, y, z) *dans cette base.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$*, on considère la famille* $\mathscr{B} = (X^2+1, X+1, 1)$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Déterminer les coordonnées de* $4X^2 + 3X + 5$ *dans cette base.*

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y,z)=\lambda u+\mu v+\gamma w$. Cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ 2\lambda & - & \mu & + & 3\gamma & = & y\\ 3\lambda & - & 2\mu & + & 8\gamma & = & z.\end{array}\right.$$

Or :

$$(\mathrm{S})\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ & - & \mu & - & \gamma & = & y-2x\\ & - & 2\mu & + & 2\gamma & = & z-3x\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ & & \mu & + & \gamma & = & 2x-y\\ & & & & 4\gamma & = & x-2y+z.\end{array}\right.$$

Donc le système possède des solutions pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi la famille est génératrice. Plus précisément, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=\frac{x+2y-z}{2}u+\frac{7x-2y-z}{4}v+\frac{x-2y+z}{4}w.$$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

On sait que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus, le vecteur $(1,2,3)$ est combinaison des trois autres car

$$(1,2,3)=(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1).$$

Par conséquent, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est encore génératrice. En multipliant le premier vecteur par 2 et le troisième par 6, on en déduit que la famille $((2,0,0),(0,1,0),(0,0,6))$ est génératrice. Puis, en changeant l'ordre des vecteurs, on trouve que $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.*

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & 0\\ \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & 0\\ \lambda & & & & & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda & & & = & 0\\ -\mu & + & \gamma & = & 0\\ & & 2\gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda & = & 0\\ \mu & = & 0\\ \gamma & = & 0.\end{array}\right.$$

   La famille est donc libre.

2. *Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.*

$$a\cdot\mathrm{E}_{1,1}+b\cdot\mathrm{E}_{1,2}+c\cdot\mathrm{E}_{2,1}+d\cdot\mathrm{E}_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff a=b=c=d=0.$$

   La famille est donc libre.

3. *On peut remarquer que :*

$$1\cdot(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1)+0\cdot(2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+3)+1\cdot(-\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-1)=0.$$

   Donc la famille est liée.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :*

$$a(\mathrm{X}+1)+b(\mathrm{X}+2)=0\iff(a+b)\mathrm{X}+a+2b=0\iff\left\{\begin{array}{rcrcl}a & + & b & = & 0\\ a & + & 2b & = & 0\end{array}\right.\iff a=b=0.$$

   La famille $(\mathrm{X}+1,\mathrm{X}+2)$ est donc libre.

2. *On remarque que :* $2X+2=2(X+1)$. *Les vecteurs* $X+1$ *et* $2X+2$ *sont colinéaires et la famille* $(X+1, 2X+2)$ *est donc liée.*

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On a*

$$\begin{aligned} F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x+z\} \\ &= \{(x,x+z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,1,0)+z(0,1,1),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)). \end{aligned}$$

La famille $((1,1,0),(0,1,1))$ *est donc génératrice de* F. *De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi* $((1,1,0),(0,1,1))$ *est une base de* F.

2.
   - *Montrons qu'elle est libre : soit* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $a\cdot P_0+b\cdot P_1+c\cdot P_2=0$. *On peut, comme on l'a fait dans les exemples précédents, identifier les coefficients de* $a\cdot P_0+b\cdot P_1+c\cdot P_2$ *pour obtenir un système vérifié par* (a,b,c). *Cependant, cette méthode est un peu longue et on va plutôt exploiter le fait qu'on connaît les racines des polynômes* P_0, P_1 *et* P_2.
   En évaluant en 1 *on a*
   $$0=a\cdot P_0(1)+b\cdot P_1(1)+c\cdot P_2(1)=a\cdot 0+b\cdot(-2)+c\cdot 0=-2b \quad \textit{donc} \quad b=0.$$
   En évaluant en 2 *on a*
   $$0=a\cdot P_0(2)+0\cdot P_1(2)+c\cdot P_2(2)=a\cdot 3+0+c\cdot 0=3a \quad \textit{donc} \quad a=0.$$
   En évaluant en 0 *on a*
   $$0=0\cdot P_0(0)+0\cdot P_1(0)+c\cdot P_2(0)=0+0+c\cdot 2=2c \quad \textit{donc} \quad c=0.$$
   Ainsi,
   $$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \quad a\cdot P_0+b\cdot P_1+c\cdot P_2=0 \Longrightarrow a=b=c=0.$$
   La famille est donc libre.
   - *Montrons qu'elle est génératrice. On va adopter la même méthode que ci-dessus.*
   Soit $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$ *et cherchons des réels* x, y, z *tels que*
   $$P=x\cdot P_0+y\cdot P_1+z\cdot P_2.$$
   En évaluant en 1, *on trouve*
   $$P(1)=-2y \quad \textit{donc} \quad y=-\frac{1}{2}P(1).$$
   En évaluant en -1, *on trouve*
   $$P(-1)=2z \quad \textit{donc} \quad z=-\frac{1}{2}P(-1).$$
   En évaluant en 2, *on trouve*
   $$P(2)=3x \quad \textit{donc} \quad x=\frac{1}{3}P(2).$$
   Les calculs précédents montrent que le polynôme
   $$P-\left(\frac{1}{3}P(2)P_0-\frac{1}{2}P(1)P_1-\frac{1}{2}P(-1)P_2\right)$$
   possède trois racines distinctes : 1, -1 *et* 2. *Or il est de degré inférieur ou égal à* 2, *c'est donc le polynôme nul. Ainsi,*
   $$P=\frac{1}{3}P(2)P_0-\frac{1}{2}P(1)P_1-\frac{1}{2}P(-1)P_2.$$
   Cela montre que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ *est combinaison linéaire de* P_0, P_1, P_2. *La famille est donc génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$.
   - *La famille* (P_0,P_1,P_2) *est une famille libre et génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$ *c'est donc une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est une famille libre et génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

- *Montrons que la famille est génératrice. Soient* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *et* $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)=\lambda(1,2,-1)+\mu(-1,0,2)+\gamma(1,1,1)\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda&-&\mu&+&\gamma&=&x\\2\lambda&&&+&\gamma&=&y\\-\lambda&+&2\mu&+&\gamma&=&z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda&-&\mu&+&\gamma&=&x\\2\lambda&&&+&\gamma&=&y\\\lambda&&&+&3\gamma&=&z+2x\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda&-&\mu&+&\gamma&=&x\\2\lambda&&&+&\gamma&=&y\\-5\lambda&&&&&=&z+2x-3y\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\mu&=&\frac{-3x+2y+z}{5}\\\gamma&=&\frac{4x-y+2z}{5}\\\lambda&=&\frac{3y-2x-z}{5}.\end{array}\right.$$

Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^3$ *s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de* $\mathscr{B}$. *Donc la famille est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

- *Montrons que la famille est libre : en prenant* $(x,y,z)=(0,0,0)$, *le calcul précédent montre que la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est la combinaison triviale. La famille est donc libre.*
- *La famille est libre et génératrice de* $\mathbb{R}^3$, *c'est donc une base de* $\mathbb{R}^3$. *De plus, le calcul précédent montre que les coordonnées d'un vecteur* (x,y,z) *dans cette base sont*

$$\left(\frac{3y-2x-z}{5},\frac{-3x+2y+z}{5},\frac{4x-y+2z}{5}\right).$$

2. *En particulier, les coordonnées de* $(1,2,3)$ *dans cette base sont*

$$\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right).$$

3. *Voir ci-dessus.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La famille est échelonnée donc libre. De plus,*

$$\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X}+1,\mathrm{X}^2+1)=\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X}+1-1,\mathrm{X}^2+1-1)=\mathrm{Vect}(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)=\mathbb{R}_2[\mathrm{X}].$$

La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. *Ainsi* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

2. *On cherche les réels* a, b *et* c *tels que*

$$4\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+5=a(\mathrm{X}^2+1)+b(\mathrm{X}+1)+c.$$

Or

$$4\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+5=a(\mathrm{X}^2+1)+b(\mathrm{X}+1)+c\iff4\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+5=a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+a+b+c$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}a&=&4\\b&=&3\\a+b+c&=&5\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}a&=&4\\b&=&3\\c&=&-2\end{array}\right.$$

Donc les coordonnées de $4\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}+5$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *sont* $(4,3,-2)$.