TD10-Applications linéaires

1 Généralités, noyau, image

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par :*

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x,y,z,t)) = \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *L'application* h *définie sur* $\mathbb{R}_2[x]$ *par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x] \quad h(P) = xP(x+1) - (x+1)P(x).$$

3. *L'application* $g : \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad g(M) = M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3} + M_{4,4}.$$

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes.

1. *L'application* f *définie sur* $\mathbb{R}_2[x]$ *par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x] \quad f(P) = x^2P'(x) - 2xP(x).$$

2. *L'application* ψ *définie sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *par*

$$\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \psi(X) = AX - XB$$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Décrire chacun de ces espaces comme le noyau d'une application linéaire.

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\}$.
2. $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \quad \text{et} \quad 2x + z = t\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid P(1) = P'(1)\}$.

Exercice 4

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. *Les applications* f *et* h *de l'exercice 1.*
2. *L'application* f *de l'exercice 2.*
3. *L'application* $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x] \quad f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

Exercice 5

Soit f *l'application définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x,y,z)) = 3x - y + z.$$

1. *Montrer que* f *est linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Im}(f)$. *En déduire* $\dim(\ker(f))$.
3. *Déterminer une base de* $\ker(f)$.

Exercice 6

Soit f *l'application définie par*

$$f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longmapsto (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i).$$

1. *Montrer que* f *est linéaire.*
2. *Sans calcul, justifier que* f *n'est pas injective.*
3. *Déterminer une base de* $\ker(f)$ *et sa dimension.*

4. En déduire que f est surjective.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. Montrer que $\dim(\ker(f)) \geqslant 2$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

2 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Exercice 8

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x-y+z, 3x-z). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer la matrice A représentative de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
3. À l'aide de la matrice A déterminer :
   (a) $f((1,2,1))$;
   (b) $\ker(f)$;
   (c) $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice C de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le noyau de φ à l'aide de la matrice C. En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. (a) Montrer que la famille (x, x^2+1, x^2-1) est une base $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
   (c) Déterminer une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$.

Exercice 11

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. Déterminer le rang de ψ. Est-ce un automorphisme ?
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\psi((x,y,z))$.
3. On note $u = (1,-1,0)$, $v = (0,1,-1)$ et $w = (1,1,1)$.
   (a) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $\psi(u)$, $\psi(v)$ et $\psi(w)$. En déduire la matrice de ψ dans la base (u,v,w).
   (c) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on précisera et donner une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Avec la matrice D, déterminer une base de $\ker(\psi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.

3 Compléments

Exercice 12

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
2. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b,c) de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) = \ker(f)$.

4. *Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que :*

$$g^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad g^3 = 0.$$

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0.$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im}\left(g^2\right) = \ker(g)$.

   (a) *Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.*

   (b) *Montrer que $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.*

   (c) *Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.*

   (d) *Déterminer $\operatorname{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\ker(g)$.*
   Pour finir, déterminer $\operatorname{Im}\left(g^2\right)$ puis conclure.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : E \longrightarrow E \qquad\qquad \theta : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x \qquad\qquad x \longmapsto 0_E$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta \quad , \quad f^2 + i \neq \theta \quad , \quad f \circ (f^2 + i) = \theta.$$

1. *Montrer que f n'est pas bijectif.*
2. *En déduire qu'il existe un vecteur v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.*
3. (a) *Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif.*

   (b) *En déduire qu'il existe v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$.*
4. *On note $v_3 = f(v_2)$.*

   (a) *Montrer : $f(v_3) = -v_2$.*

   (b) *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.*

   (c) *Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.*