Exercice 10

1) X_1 et X_2 suivent la loi uniforme sur $[0,1]$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soit $Y = \max(X_1, X_2)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\max(X_1,X_2) \leq x)$

Or $[\max(X_1,X_2) \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x])$$
$$= P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \text{ par indépendance}$$
$$= F_{X_1}(x) F_{X_2}(x)$$
$$= F_{X_1}(x)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme F_Y caractérise la loi, cela suffit à déterminer la loi de Y.

<u>Rmq</u> : on peut toutefois remarquer que Y est à densité et que $x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est une densité de Y.

2) $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad F_{X_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

$$P(Z > x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$
$$= P([X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x])$$
$$= P(X_1 > x) P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$$

par indépendance mutuelle

Donc

$$P(Z > x) = (1 - F_{X_1}(x)) \dots (1 - F_{X_n}(x))$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda n x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ie $\quad F_Z(x) = 1 - P(Z > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda n x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

Exercice 12

Une densité de X est $f : x \longmapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$ d'après exercice 6

1) X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente.

Comme $x \mapsto |x f(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étude de $\int_{-\infty}^{0} |xf(x)|dx$ impropre en $-\infty$.

Soit $A \in]-\infty, 0]$.

$$\int_A^0 |xf(x)|dx = \int_A^0 -x \times \frac{1}{2}e^x dx = -\frac{1}{2}\int_A^0 xe^x dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[xe^x\right]_A^0 - \int_A^0 e^x dx\right)$$

par IPP car $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'où

$$\int_A^0 |xf(x)|dx = -\frac{1}{2}\left(-Ae^A - 1 + e^A\right)$$

Donc $\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 |xf(x)|dx = \frac{1}{2}$. Ainsi $\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

- Étude de $\int_0^{+\infty} |xf(x)|dx$ impropre en $+\infty$.

On peut procéder comme ci-dessus ou remarquer que $x \mapsto |xf(x)|dx$ est paire. Donc

$$\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx \overset{y=-x}{=} -\int_{+\infty}^0 |-yf(-y)|dy = \int_0^{+\infty} |yf(y)|dy$$

ce qui montre que $\int_0^{+\infty} |yf(y)|dy$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

- Conclusion : $\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx$ et $\int_0^{+\infty} |xf(x)|dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge. Donc X possède une espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x).dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{+\infty} xf(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^0 |xf(x)|dx + \int_0^{+\infty} |xf(x)|dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

2) Comme X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens, X possède une variance ssi X a un moment d'ordre 2. Dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = m_2(X).$$

Or X possède un moment ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument. Comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive il suffit de montrer qu'elle est convergente.

Comme $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

- Étude de $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)dx$ impropre en $-\infty$.

Soit $A \in]-\infty, A]$

$$\int_A^0 x^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_A^0 x^2 e^x dx = \frac{1}{2}\left(\left[x^2e^x\right]_A^0 - \int_A^0 2xe^x dx\right)$$

par IPP car $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Ainsi

$$\int_A^0 x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}A^2e^A - \int_A^0 xe^x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}A^2e^A - \left([xe^x]_A^0 - \int_A^0 e^x\,dx \right)$$

par IPP car $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$= \frac{1}{2}A^2e^A - Ae^A + 1 - e^A.$$

Comme $\lim_{A\to-\infty} A^2e^A = \lim_{A\to-\infty} Ae^A = \lim_{A\to-\infty} e^A = 0$

on en déduit que $\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 x^2 f(x)\,dx = 1$.

- Étude de $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$: soit on procède comme ci-dessus soit on remarque que $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire et le changement $y = -x$ dans $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)\,dx$ permet de voir que $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

- Conclusion : $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x)\,dx$ et $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et vaut 2.

Ainsi $V(X)$ existe et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2$.

Exercice 13

1) f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

De plus :

- comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ converge et vaut 0
- comme f est continue sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $A \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A \frac{2}{(1+x)^3}\,dx = \left[-\frac{1}{(1+x)^2} \right]_0^A = 1 - \frac{1}{(1+A)^2}$$

on a $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,dx = 1$. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

- Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

f est donc bien une densité. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2) - Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, X possède une espérance ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge absolument.

Or $x \mapsto |xf(x)|$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$|xf(x)| = \frac{2x}{(1+x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ sont de même nature. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ converge,

$\int_1^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ converge aussi. Comme $\int_0^1 |xf(x)|\,dx$ existe ($x \mapsto |xf(x)|$ est continue sur $[0,1]$) alors $\int_0^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ converge. Ainsi X possède une espérance.

Par Koenig-Huygens, X possède une variance ssi X possède un moment d'ordre 2 ssi $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge absolument.

Or

$$|x^2 f(x)| = x^2 f(x) = \frac{2x^2}{(1+x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$$

et le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives permet de conclure que $\int_0^{+\infty} |x^2 f(x)|\,dx$ diverge.

Ainsi X ne possède pas de variance.

Calculons $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)^3}\,dx$$

Soit $A \in [0,+\infty[$

$$\int_0^A \frac{2x}{(1+x)^3}\,dx = \left[-\frac{x}{(1+x)^2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

par IPP car $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\int_0^A \frac{2x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{A}{(1+A)^2} + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A$$

$$= -\frac{A}{(1+A)^2} - \frac{1}{1+A} + 1$$

Ainsi $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xf(x)\,dx = 1$.

Donc $E(X) = 1$.