

# TD10-Indications

## Exercice 1

## Exercice 2

## Exercice 3

Montrer que  $\frac{x \ln(x)}{\sqrt{x+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x} \ln(x)$  et que  $\sqrt{x+2} \ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x} \ln(x)$ . En déduire que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x} \ln(x)$ .

## Exercice 4

## Exercice 5

1. Utiliser le DL de  $\ln(1+x)$  en 0 à l'ordre 2.
2. Utiliser le DL de  $e^x$  en 0 à l'ordre 2 et justifier que  $\frac{o(x^2)}{x} = o(x)$ .
3. Utiliser le DL de  $e^x$  et de  $\sqrt{1+x}$  en 0 à l'ordre 2.
4.
  - Méthode 1 (DL usuel et manipulation sur les petits  $o$ ) : utiliser le DL de  $\sqrt{1+x}$  en 0 à l'ordre 2. Développer puis justifier que

$$-\frac{1}{8}x^3 + x \times o_{x \rightarrow 0}(x^2) = o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

- Méthode (DL usuel) : remarquer que  $(1+x)\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{3}{2}}$ .

## Exercice 6

1. Utiliser le DL de  $e^x$  et de  $\ln(1+x)$  en 0 à l'ordre 2 pour montrer que

$$e^x - 1 - \ln(1+x) = x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

(on peut aussi utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir ce DL)

En déduire un équivalent de  $e^x - 1 - \ln(1+x)$  puis de  $f$  au voisinage de 0.

2. Pas besoin de DL!

## Exercice 7

1. Montrer que  $f$  est continue en 1 : la limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$  est une limite usuelle! C'est la limite d'un taux d'accroissement.
2. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

Dans l'expression de  $\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ , effectuer le changement de variable  $u = x-1$  pour montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u+3)u - 3(u+1) \ln(u+1)}{u(u+1) \ln(u+1)}.$$

On note  $g$  la fonction définie au voisinage de 0 par

$$g(u) = (u+3)u - 3(u+1) \ln(u+1).$$

En utilisant la formule de Taylor-Young ou le fait que  $\ln(u+1) = u - \frac{u^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(u^2)$ , montrer que  $g(u) = -\frac{1}{2}u + o_{u \rightarrow 0}(u)$  et en déduire un équivalent en 0 de

$$\frac{(u+3)u - 3(u+1) \ln(u+1)}{u(u+1) \ln(u+1)}$$

## Exercice 8

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{x}.$$

En utilisant le DL d'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{1+u}$  déterminer un DL d'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{1+2x}$  et de  $\sqrt{1-4x}$ . En déduire un DL d'ordre 1 de  $g$  en 0. Cela permet

1. de montrer que  $g$  possède une limite finie en 0
2. que la fonction  $g$  prolongée en 0 est dérivable en 0 (car elle possède un DL d'ordre

1 en 0).

### Exercice 9

Utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer un DL d'ordre 2 de  $f$  au voisinage de 0.