TD 6-Séries

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$.
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$.

Exercice 2

On considère la série de terme général donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}.$$

1. *Montrer que la famille* $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer les coordonnées de* X^3+2X^2-4X+1 *dans cette base.*
3. *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 3

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 4

Avec le critère de comparaison des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$;
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n!}$.

Exercice 5

Avec le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$;
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

Exercice 6

Avec le critère d'équivalence des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}}-1\right)$.

Exercice 7

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}}-1)$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{\ln n}}$.
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$.
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
11. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$.
12. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left((n+1)^{\frac{1}{4}}-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)$
13. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n}{\ln n}$.
14. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$.
15. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$.
16. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^7}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 8

1. *Soit* $x \in [0,1]$. *Montrer que* $0 \leq x^2 \leq x$.
2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série convergente à termes positifs. Montrer que* $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ *converge.*

Exercice 9 (*Une série convergente mais pas absolument convergente*)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$*, on note* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. *Montrer que la série* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *n'est pas absolument convergente.*
2. (a) *Montrer que les suites* $(S_{2n})_{n\geq 1}$ *et* $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ *sont adjacentes.*
   (b) *En déduire que la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge.*
   (c) *En déduire que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 10 (*Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente*)

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

1. *Montrer que* $v_n \sim u_n$ *où* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est la suite définie à l'exercice 9.*
2. *Montrer que la série* $\sum v_n$ *diverge (on pourra utiliser le fait que* $\sum u_n$ *converge).*

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et déterminer sa limite.*
3. *Étudier la convergence de la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ *et déterminer sa somme si elle existe.*
4. *Prouver que la série* $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *diverge.*
5. *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 12

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = x^3 + nx - 1.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'équation* $f_n(x) = 0$ *possède une unique solution dans* $\mathbb{R}_+$*. On notera* u_n *cette solution.*
2. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et préciser sa limite.*
4. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
5. *En déduire la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 13 (*EML, 1992*)

On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$*, on note* $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$.

1. *Étudier les variations de* f *et tracer sa courbe représentative.*
2. *Montrer, pour tout entier* k *tel que* $k \geq 3$ *:*
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$
3. (a) *Montrer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$ *:*
$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (b) *En déduire, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$ *:*
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$
   (c) *Établir :* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$*, on note*
$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))\,.$$
   (a) *En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites* $(u_n)_{n\geq 2}$ *et* $(v_n)_{n\geq 2}$ *sont adjacentes. On note* ℓ *leur limite commune.*
   (b) *Montrer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$ *:*
$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$
   (c) *En déduire une valeur approchée de* ℓ *à* 10^{-2} *près.*