TD12-Intégration

Exercice 7

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   - *Si* $n \geq 2$. *Pour tout* $t \in [1,+\infty[$ *on a*
   $$1+t+t^n \geq t^n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ *est une intégrale de Riemann convergente car* $n > 1$. *D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ *converge aussi.*
   - *Si* $n = 1$. *Pour tout* $t \in [1,+\infty[$ *on a*
   $$1+t+t^n = 1+2t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{3t}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3t}dt$ *est, à un facteur non nul près, une intégrale de Riemann divergente donc divergence elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ *diverge aussi.*
   - *Si* $n = 0$. *Pour tout* $t \in [1,+\infty[$ *on a*
   $$1+t+t^n = 2+t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
   Et on conclut comme précédemment que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ *diverge.*
2. *La fonction* $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq e$ *on a*
   $$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ *est une intégrale de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ *diverge.*
3. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(t)}$ *est continue sur* $[2,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq 2$ *on a*
   $$\frac{1}{t^3\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(2)t^3}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(t)}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(2)}$ *sont continues, positives sur* $[2,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(2)}dt$ *est, à un facteur près, une intégrale de Riemann convergente donc converge elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(t)}dt$ *converge aussi.*

Exercice 8

1. *La fonction* $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$. *L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$.
   De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-\sqrt{x^2+x}} = 0$.
   Donc $e^{-\sqrt{x^2+x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Les fonctions $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que*

$\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ *converge aussi.*

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ *est bien définie car* $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ *est continue sur* $[0,1]$*. Donc finalement,* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ *converge.*

Attention ! On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ *car la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *n'est pas continue sur* $[0,+\infty[$ *(elle n'est pas définie en* 0 *!).*

2. *La fonction* $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *est continue sur* $]0,1]$ *(et négative !). L'intégrale est donc impropre en* 0*.*

   De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{4}}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$*.*

   Donc $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$ *et aussi* $-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$*.*

   Les fonctions $x \mapsto -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$ *sont continues, positives sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}dx$ *est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ *converge puis* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ *converge aussi.*

3. *La fonction* $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* 0 *et en* $+\infty$*.*
   - *Étude au voisinage de* 0*. Par limite usuelle on sait que*
   $$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1.$$
   La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ *est donc prolongeable par continuité en* 0*. D'après le cours,* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}dt$ *est donc convergente.*
   - *Étude au voisinage de* $+\infty$*. Par croissance comparée :*
   $$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t-1} = 0$$
   donc $\frac{t}{e^t-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$*.*
   Les fonctions $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ *converge aussi.*
   - *Conclusion : les intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^t-1}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ *sont convergentes donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$ *converge.*

4. *Soit* $k \in \mathbb{N}$*. La fonction* $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*.*

   De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^k e^{-t^2} = 0$*.*

   Donc $t^k e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$*.*

   Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ *converge aussi.*

   Comme de plus, $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ *est continue sur* $[0,1]$ *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 t^k e^{-t^2}dt$ *existe.*

   Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ *converge donc.*

   Attention ! On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ *car la fonction* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *n'est pas continue sur* $[0,+\infty[$ *(elle n'est pas définie en* 0 *!).*

5. *La fonction* $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*.*

   De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} = 0$*.*

   Donc $\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$*.*

   Les fonctions $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues, positives sur* $[1,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}dt$ *converge aussi.*

6. *Exactement comme la question 4.*

Exercice 9

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*. De plus, par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :*

$$\frac{t^2+2t}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ sont de même nature. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente., $\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ converge aussi.

Comme de plus, $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ existe.

Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ converge donc.

Attention ! On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2-x+1>0$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Étude de $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$.
  Par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :

$$\frac{1}{x^2-x+1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

  Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $]-\infty,-1]$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ sont de même nature. Comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente., $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge aussi.
  Comme de plus, $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $[-1,0]$ l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ existe.
  Finalement $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge donc.
- On montre de la même façon que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.
- Comme $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ convergent alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. L'intégrale est impropre en -1 et en 1.

- Étude de $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$.

$$\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{x\to-1^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}.$$

  Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}$ sont continues et positives sur $]-1,0]$.
  D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ sont de même nature.
  Soit $A \in]-1,0]$. On a

$$\int_A^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+t}\right]_A^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+A}}{\sqrt{2}}.$$

  Ainsi $\lim\limits_{A\to-1^+} \int_A^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En particulier, $\int_{-1}^0 \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ converge et donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge aussi.
- On montre de même que $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
- Comme $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ convergent, $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

4. La fonction $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en 0 et $+\infty$.

- Soit $c \in]0,+\infty[$. On a $e^{\frac{1}{t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.
  Les fonctions $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ et $t \mapsto 1$ sont continues, positives sur $[c,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ et $\int_c^{+\infty} 1dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge aussi.
- Ainsi, pour tout $c \in]0,+\infty[$, $\int_c^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge. Donc $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge.

5. *La fonction* $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*. De plus*

$$\sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ *sont continues, positives sur* $[c, +\infty[$ *pour tout* $c > 0$*. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que et* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}dt$ *et* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2t}}dt$ *sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente,* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}dt$ *diverge aussi pour tout* $c > 0$*. Donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}dt$ *diverge.*

6. *La fonction* $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ *est continue sur* $[1, +\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*. De plus par équivalent usuel*

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *sont continues, positives sur* $[1, +\infty[$*. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale convergente,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt$ *converge aussi.*