Chapitre 4 : Correction des tests

Test 1 (Voir solution.)

La famille (u, v, w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (1,2,3)\ ,\ v = (0,-1,-2)\ ,\ w = (2,3,8)\ ?$$

Test 2 (Voir solution.)

On admet que la famille $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,2,3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En déduire, à l'aide de la proposition précédente, que $((0,1,0), (2,0,0), (0,0,6))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Test 3 (Voir solution.)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la famille*
$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$
2. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la famille constituée des matrices*
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ E_{1,2} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ ,\ E_{2,1} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ E_{2,2} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
3. *Dans $\mathbb{R}_5[x]$ la famille*
$$(x^2 - x + 1\ ,\ 2x^2 - x + 3\ ,\ -x^2 + x - 1).$$

Test 4 (Voir solution.)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

1. $(x+1, x+2)$,
2. $(x+1, 2x+2)$.

Test 5 (Voir solution.)

1. *Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel et trouver en une base.*
2. *Soient*
$$P_0 = (x-1)(x+1)\ ,\ P_1 = (x+1)(x-2)\ ,\ P_2 = (x-1)(x-2).$$
Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Test 6 (Voir solution.)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base et la dimension.

1. $F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(1,1,1))$,
2. $F = \mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))$,
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$.

Test 7 (Voir solution.)

1. *Montrer que $((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Montrer que $(1 + x + x^2, x + x^2, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.*
3. *La famille $((1,1),(1,2),(2,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?*

Test 8 (Voir solution.)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{B} = ((1,2,-1),(-1,0,2),(1,1,1))$.

1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $(1,2,3)$ dans cette base.*
3. *Soient x, y, z trois réels. Déterminer les coordonnées de (x,y,z) dans cette base.*

Test 9 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[x]$, on considère la famille $\mathcal{B} = (x^2+1, x+1, 1)$.

1. *Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.*
2. *Déterminer les coordonnées de $4x^2+3x+5$ dans cette base.*

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$,
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$,
3. $\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Test 11 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$;
2. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$.

Test 12 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\3&5&-1&2&0\\0&0&1&2&0\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}4&1&11&3\\-2&1&-7&-9\\1&-1&4&7\\1&2&1&-8\end{pmatrix}$.

Test 13 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$.

Test 14 (*Voir solution.*)

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\2&0&7\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&-1&2\end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *On cherche* $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(x,y,z) = \lambda u + \mu v + \gamma w$. *Cela revient à résoudre le système*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & & & + & 2\gamma & = & x \\ 2\lambda & - & \mu & + & 3\gamma & = & y \\ 3\lambda & - & 2\mu & + & 8\gamma & = & z. \end{array} \right.$$

Or :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & & & + & 2\gamma & = & x \\ & - & \mu & - & \gamma & = & y-2x \\ & - & 2\mu & + & 2\gamma & = & z-3x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & & & + & 2\gamma & = & x \\ & & \mu & + & \gamma & = & 2x-y \\ & & & & 4\gamma & = & x-2y+z. \end{array} \right.$$

Donc le système possède des solutions pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Ainsi la famille est génératrice. Plus précisément, pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) = \frac{x+2y-z}{2}u + \frac{7x-2y-z}{4}v + \frac{x-2y+z}{4}w.$$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

On sait que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$. *De plus, le vecteur* $(1,2,3)$ *est combinaison des trois autres car*

$$(1,2,3) = (1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

Par conséquent, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *est encore génératrice. En multipliant le premier vecteur par 2 et le troisième par 6, on en déduit que la famille* $((2,0,0),(0,1,0),(0,0,6))$ *est génératrice. Puis, en changeant l'ordre des vecteurs, on trouve que* $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & + & \mu & + & \gamma & = & 0 \\ \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & 0 \\ \lambda & & & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & 0 \\ -\mu & + & \gamma & = & 0 \\ & & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \\ \gamma & = & 0. \end{array} \right.$$

   La famille est donc libre.

2. *Soit* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$a \cdot E_{1,1} + b \cdot E_{1,2} + c \cdot E_{2,1} + d \cdot E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

   La famille est donc libre.

3. *On peut remarquer que :*

$$1 \cdot (x^2 - x + 1) + 0 \cdot (2x^2 - x + 3) + 1 \cdot (-x^2 + x - 1) = 0.$$

   Donc la famille est liée.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *On a :*

$$a(x+1) + b(x+2) = 0 \Longleftrightarrow (a+b)x + a + 2b = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & + & 2b & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow a = b = 0.$$

La famille $(x+1, x+2)$ est donc libre.

2. On remarque que : $2x+2 = 2(x+1)$. Les vecteurs $x+1$ et $2x+2$ sont colinéaires et la famille $(x+1, 2x+2)$ est donc liée.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. On a

$$\begin{aligned} F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + z\right\} \\ &= \left\{(x, x+z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,1,0) + z(0,1,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)). \end{aligned}$$

La famille $((1,1,0),(0,1,1))$ est donc génératrice de F. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi $((1,1,0),(0,1,1))$ est une base de F.

2.
   - Montrons qu'elle est libre : soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \cdot P_0 + b \cdot P_1 + c \cdot P_2 = 0$. On peut, comme on l'a fait dans les exemples précédents, identifier les coefficients de $a \cdot P_0 + b \cdot P_1 + c \cdot P_2$ pour obtenir un système vérifié par (a,b,c). Cependant, cette méthode est un peu longue et on va plutôt exploiter le fait qu'on connaît les racines des polynômes P_0, P_1 et P_2.
     En évaluant en 1 on a
     $$0 = a \cdot P_0(1) + b \cdot P_1(1) + c \cdot P_2(1) = a \cdot 0 + b \cdot (-2) + c \cdot 0 = -2b \quad \text{donc} \quad b = 0.$$
     En évaluant en 2 on a
     $$0 = a \cdot P_0(2) + 0 \cdot P_1(2) + c \cdot P_2(2) = a \cdot 3 + 0 + c \cdot 0 = 3a \quad \text{donc} \quad a = 0.$$
     En évaluant en 0 on a
     $$0 = 0 \cdot P_0(0) + 0 \cdot P_1(0) + c \cdot P_2(0) = 0 + 0 + c \cdot 2 = 2c \quad \text{donc} \quad c = 0.$$
     Ainsi,
     $$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad a \cdot P_0 + b \cdot P_1 + c \cdot P_2 = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0.$$
     La famille est donc libre.
   - Montrons qu'elle est génératrice. On va adopter la même méthode que ci-dessus.
     Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ et cherchons des réels a, b, c tels que
     $$P = a \cdot P_0 + b \cdot P_1 + c \cdot P_2.$$
     En évaluant en 1, on trouve
     $$P(1) = -2b \quad \text{donc} \quad b = -\frac{1}{2}P(1).$$
     En évaluant en -1, on trouve
     $$P(-1) = 2c \quad \text{donc} \quad c = -\frac{1}{2}P(-1).$$
     En évaluant en 2, on trouve
     $$P(2) = 3a \quad \text{donc} \quad a = \frac{1}{3}P(2).$$
     Les calculs précédents montrent que le polynôme
     $$P - \left(\frac{1}{3}P(2)P_0 - \frac{1}{2}P(1)P_1 - \frac{1}{2}P(-1)P_2\right)$$
     possède trois racines distinctes : 1, -1 et 2. Or il est de degré inférieur ou égal à 2, c'est donc le polynôme nul. Ainsi,
     $$P = \frac{1}{3}P(2)P_0 - \frac{1}{2}P(1)P_1 - \frac{1}{2}P(-1)P_2.$$
     Cela montre que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ est combinaison linéaire de P_0, P_1, P_2. La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$.
   - La famille (P_0, P_1, P_2) est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$ c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *La famille* $((1,2,0),(1,1,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F*. En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(F)=2$.
2. *Comme* $(-2,-4)=-2(1,2)$ *alors :*
$$F=\mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))=\mathrm{Vect}((1,2)).$$
Ainsi, $((1,2))$ *est une base de* F *et* $\dim(F)=1$.
3. *On a*
$$F=\left\{(x,x+3z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,1,0)+z(0,3,1)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,3,1)).$$
Donc $((1,1,0),(0,3,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F*. En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(F)=2$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $\mathcal{F}=((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$*. Soit* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$.
$$\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(1,1,1,0)+\lambda_3(1,1,0,3)+\lambda_4(1,0,3,3)\iff\left\{\begin{array}{ccccccccc}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&+&\lambda_4&=&0\\\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&&&=&0\\\lambda_1&+&\lambda_2&&&+&3\lambda_4&=&0\\\lambda_1&&&+&3\lambda_3&+&3\lambda_4&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ccccccccc}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&+&\lambda_4&=&0\\&&&&&&-\lambda_4&=&0\\&&&&-\lambda_3&+&2\lambda_4&=&0\\\lambda_1&&&+&3\lambda_3&+&3\lambda_4&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_4&=&0\\\lambda_3&=&0\\\lambda_1&=&0\\\lambda_2&=&0\end{array}\right.$$
Ainsi, la famille est libre et comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=4=\dim(\mathbb{R}^4)$*, c'est donc une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Soit* $\mathcal{F}=(1+x+x^2,x+x^2,x^2)$*. On a*
$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(1+x+x^2,x+x^2,x^2)&=\mathrm{Vect}(1+x+x^2-(x+x^2),x+x^2,x^2)\\&=\mathrm{Vect}(1,x+x^2-x^2,x^2)\\&=\mathrm{Vect}(1,x,x^2)=\mathbb{R}_2[x].\end{aligned}$$
La famille $\mathcal{F}$ *est donc génératrice de* $\mathbb{R}_2[x]$ *et comme* $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=3=\dim(\mathbb{R}_2[x])$*, c'est donc une base de* $\mathbb{R}_2[x]$.
3. *Comme* $\dim(\mathbb{R}^2)=2$*, toute base de* $\mathbb{R}^2$ *est constituée de deux vecteurs. Donc la famille* $((1,1),(1,2),(2,1))$ *n'est pas une base de* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Montrons que* $\mathcal{B}$ *est une famille libre et génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille est génératrice. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = \lambda(1,2,-1) + \mu(-1,0,2) + \gamma(1,1,1) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ -\lambda & + & 2\mu & + & \gamma & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ \lambda & & & + & 3\gamma & = & z+2x \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ -5\lambda & & & & & = & z+2x-3y \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & \frac{-3x+2y+z}{5} \\ \gamma & = & \frac{4x-y+2z}{5} \\ \lambda & = & \frac{3y-2x-z}{5}. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

  Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Donc la famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille est libre : en prenant $(x,y,z) = (0,0,0)$, le calcul précédent montre que la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est la combinaison triviale. La famille est donc libre.
- La famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, le calcul précédent montre que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont

$$\left(\frac{3y-2x-z}{5}, \frac{-3x+2y+z}{5}, \frac{4x-y+2z}{5}\right).$$

2. En particulier, les coordonnées de $(1,2,3)$ dans cette base sont

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

3. Voir ci-dessus.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

1. La famille est échelonnée donc libre. De plus,

$$\mathrm{Vect}(1, x+1, x^2+1) = \mathrm{Vect}(1, x+1-1, x^2+1-1) = \mathrm{Vect}(1,x,x^2) = \mathbb{R}_2[x].$$

   La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. On cherche les réels a, b et c tels que

$$4x^2+3x+5 = a(x^2+1) + b(x+1) + c.$$

   Or

$$
\begin{aligned}
4x^2+3x+5 = a(x^2+1)+b(x+1)+c &\iff 4x^2+3x+5 = ax^2+bx+a+b+c \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 4 \\ b & = & 3 \\ a+b+c & = & 5 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 4 \\ b & = & 3 \\ c & = & -2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

   Donc les coordonnées de $4x^2+3x+5$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(4,3,-2)$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

1. La famille $\mathcal{F}_1$ est libre, c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$. Donc

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)) = 3.$$

2. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre (formée de deux vecteurs non

colinéaires), c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)$. *Ainsi*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2)) = 2.$$

3. $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *car* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. *Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)$. *Ainsi*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)) = 2$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans chaque étape, on appelle v_1, v_2, v_3 et v_4 les vecteurs de la famille (de gauche à droite).

1. *Par invariance du rang par opérations élémentaires, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) =& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-8\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ccc} v_2 & \leftarrow & v_2+v_1 \\ v_3 & \leftarrow & v_3-4v_1 \\ v_4 & \leftarrow & v_3-v_1 \\ v_5 & \leftarrow & v_5-5v_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && v_5 \leftarrow \tfrac{-1}{8}v_5 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ccc} v_1 & \leftarrow & v_1-2v_5 \\ v_2 & \leftarrow & v_2-2v_5 \\ v_3 & \leftarrow & v_3+4v_5 \\ v_4 & \leftarrow & v_4+2v_5 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{ccc} v_2 & \leftarrow & v_2-3v_4 \\ v_3 & \leftarrow & -v_3 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 4.
\end{aligned}$$

2. *De même*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_4=-v_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_3=-v_2 \\
&= 2 \quad \textit{car les deux matrices ne sont pas colinéaires}
\end{aligned}$$

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncer.*)

On procède par un pivot de Gauss.

1. *On a*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&5&-1&-1&0\\0&0&1&2&0\end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2-3L_1$$

   Il y a trois pivots non nuls (en rouge) donc le rang est 3.

2. *On a*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(B) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & -2 & -7 & -9 \\ -1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \\ 0 & -7 & -21 & -14 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 2L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 & \leftarrow & \frac{1}{5}L_3 \\ L_4 & \leftarrow & -\frac{1}{7}L_4 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - L_2 \end{array} \\
&= 2
\end{aligned}$$

car il y a deux pivots non nuls (en rouge).

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Toutes les colonnes de A sont identiques donc* $\operatorname{rg}(A) = 1$. *Avec plus de détails :*

$$\operatorname{rg}(A) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

2. *La troisième ligne de B est combinaison linéaire des deux autres : $L_3 = L_1 + L_2$. Par conséquent :*

$$\operatorname{rg}(B) = \dim(\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3)) = \dim(\operatorname{Vect}(L_1, L_2)) = 2$$

car L_1 et L_2 sont linéairement indépendantes (non colinéaires).

3. $$\operatorname{rg}(C) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

Correction du test 14 (*Retour à l'énoncer.*)

On va déterminer si les matrices sont inversibles ou non en calculant leur rang. On notera C_1, C_2 et C_3 les colonnes des matrices et L_1, L_2, L_3 les lignes.

1. *Comme C_2 est nulle et que C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires,* $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\operatorname{rg}(A) = 2 < 3$ *et A n'est donc pas inversible.*
2. *Comme L_1 et L_2 sont colinéaires et que L_1 et L_3 ne le sont pas,* $\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \operatorname{Vect}(L_1, L_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\operatorname{rg}(B) = 2 < 3$ *et B n'est donc pas inversible.*
3. *On a*

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_1 \end{array}$$

Donc C est de rang 3 *donc inversible.*