TD13-Compléments sur les variables aléatoires réelles

Exercice 1

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ *et posons* $Y = \max(1, X)$.

1. *Déterminer la fonction de répartition de* Y.
2. *La variable* Y *est-elle à densité ?*

Exercice 2

Soit X *une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Montrer que X *est une variable à densité et déterminer une densité de* X.

Exercice 3

On considère la fonction F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1. *Montrer que* F *est la fonction de répartition d'une variable à densité* X.
2. *Déterminer une densité de* X.
3. *Calculer* $P(0.973 < X \leq 1.2)$.

Exercice 4 (*Loi de Laplace*)

Soit $c \in \mathbb{R}$. *on considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. *Déterminer les valeurs de* c *pour lesquelles* f *est une densité d'une variable aléatoire* X.
2. *Pour ces valeurs, déterminer la fonction de répartition de* X.

Exercice 5

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$. *Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de* Y, *vérifier si* Y *est à densité ou non et déterminer une densité le cas échéant.*

1. $Y = \sqrt{X}$.
2. $Y = X^3$.
3. $Y(\omega) = \frac{1}{X(\omega)}$ *si* $X(\omega) \neq 0$ *et* $Y(\omega) = 0$ *sinon. .*

Exercice 6

Pour tout nombre réel x, *on note* $[x]$ *la partie entière de* x, *c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant :* $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
Soit X *la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre* λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$. *La variable* Y *est donc la partie entière de* X *et on a :*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leqslant X < k + 1].$$

1. (a) *Montrer que* Y *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}$.
   (b) *Pour tout* k *de* $\mathbb{N}^*$, *calculer* $P(Y = k - 1)$.
   (c) *En déduire que la variable aléatoire* $Y + 1$ *suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.*
   (d) *Donner l'espérance et la variance de* $Y + 1$. *En déduire l'espérance et la variance de* Y.
2. *On pose* $Z = X - Y$.
   (a) *Déterminer les valeurs prises par* Z.
   (b) *En utilisant le système complet d'évènements* $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$, *montrer que :*

   $$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

   (c) *En déduire une densité* f *de* Z.
   (d) *Déterminer l'espérance* $E(Z)$ *de* Z. *Ce résultat était-il prévisible ?*

Exercice 7

Déterminer si les variables aléatoires de l'exercice 5 possèdent une espérance.

Exercice 8 (*Loi de Laplace*)

Soit X une variables aléatoire suivant une loi de Laplace (voir exercice 4).

1. *Montrer que X possède une espérance et la calculer.*
2. *Montrer que X possède une variance et la calculer.*

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. *Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X dont on donnera la fonction de répartition.*
2. *La variable X possède-t-elle une espérance ? une variance ? si oui, calculer les.*

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité.*
2. *Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f.*
   (a) *Montrer que X possède des moments de tous ordres et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $m_n(X)$.*
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de X.*
3. *Déterminer la fonction de répartition de X.*
4. (a) *Déterminer la loi de $Y = \ln(X)$.*
   (b) *À l'aide de la loi de Y, déterminer si Y possède une espérance, une variance. Les calculer (sous réserve d'existence).*
   (c) *Retrouver les résultats de la question précédente à l'aide du théorème de transfert.*

Exercice 11

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. (a) *Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?*
   (b) *Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).*
   (c) *Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.*
   (d) *Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.*
2. (a) *Montrer que la fonction g est une densité de probabilité. On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.*
   (b) *Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
   (c) *Montrer que pour tout réel x,*

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (d) *Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.*
3. *On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.*
   (a) *Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.*
   (b) *En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.*
   (c) *La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?*

Exercice 12

Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$, et $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$. On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, de loi :

$$P(Z=1) = p \quad \text{et} \quad P(Z=-1) = 1-p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = -1 \end{cases}.$$

On note F_X ,F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V .

1. *Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x .*
2. (a) *Établir, grâce au système complet d'évènements $([Z=1],[Z=-1])$, que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

   (b) *Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :*

$$x < -3 \quad ; \quad -3 \leq x \leq -1 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3.$$

(c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X .

(d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

(a) Vérifier que l'on a : $X = U^{\frac{1+Z}{2}} + V^{\frac{1-Z}{2}}$.

(b) En déduire que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.

(c) En déduire que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

Exercice 13

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.
On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
2. Déterminer $P(Z = 0)$.
3. La variable aléatoire Z est-elle discrète ? à densité ?

Exercice 14

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)\, E(Z_2).$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathrm{P}([U = -1] \cap [X \geq -x]).$$

(b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2. (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.

(b) En déduire que $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

3. (a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

4. (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.

(b) Déterminer $\operatorname{Cov}(X^2, Y^2)$.

(c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

Exercice 15

1. Déterminer la loi du maximum de 2 variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. Soients $X_1,\dots,X_n$ avec $n \geq 2$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 16

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad x \in [-1;1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1] \end{cases}.$$

(a) Calculer $\int_0^1 f(x)\, dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\, dx$.

(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

2. On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant f comme densité.

(a) Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.

(b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3. Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$

4. *On pose* $Y = |X|$ *et on admet que* Y *est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On note* F_Y *sa fonction de répartition.*
   (a) *Donner la valeur de* $F_Y(x)$ *lorsque* x *est strictement négatif.*
   (b) *Pour tout réel* x *positif ou nul, exprimer* $F_Y(x)$ *à l'aide de la fonction* F_X.
   (c) *En déduire qu'une densité de* Y *est la fonction* g *définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (d) *Montrer que* Y *possède une espérance et une variance et les déterminer.*
5. *On considère deux variables aléatoires* U *et* V, *elles aussi définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur* $[0,1]$.
   On pose $I = \inf(U; V)$, *c'est-à-dire que, pour tout* ω *de* Ω, *on a :*

$$I(\omega) = \inf(U(\omega); V(\omega)).$$

   On admet que I *est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *et on rappelle que, pour tout réel* x, *on a*

$$P(I > x) = P((U > x) \cap (V > x)).$$

   Pour finir, on note F_I *la fonction de répartition de* I.
   (a) *Expliciter* $F_I(x)$ *pour tout réel* x.
   (b) *En déduire que* I *suit la même loi que* Y.
6. *On considère plus généralement* n *variables aléatoires* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, *toutes définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *indépendantes et suivant la loi uniforme sur* $[0;1]$.
   On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
   Déterminer la fonction de répartition de I_n.
7. *Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de* Y

```
U=...
V=...
if U<V then
     ...
else ...
end
```