

Chapitre 15 : Correction des tests

Test 1 ([Voir solution.](#))

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

1. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X .
2. Pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$, calculer $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est-elle précise?

Test 2 ([Voir solution.](#))

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite, montrer que pour tout réel x strictement positif on a :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Test 3 ([Voir solution.](#))

Soit X une variable aléatoire à densité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = e^{\frac{1}{n}} X$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Test 4 ([Voir solution.](#))

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0, \frac{1}{n}]\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r à déterminer.

Test 5 ([Voir solution.](#))

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de loi certaine égale à 0.

Test 6 ([Voir solution.](#))

Pour tout entier naturel n , on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.

Test 7 ([Voir solution.](#))

On considère un dé équilibré. L'expérience consiste à effectuer une succession de $n = 3600$ lancers. Pour tout $i \in [1, n]$, on note X_i la variable aléatoire réelle égale à 1 si on obtient 1 lors du i -ième lancer et égale à 0 sinon.

On note enfin $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ qui compte le nombre de 1 obtenus au cours de l'expérience.

1. (a) Soit $i \in [1, n]$. Déterminer la loi de X_i .
(b) Déterminer la loi de S_n . Rappeler les valeurs de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
2. Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(a) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|S_n - 600| > \varepsilon) \leq \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

(b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(600 - \varepsilon \leq S_n \leq 600 + \varepsilon) \geq 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

(c) Démontrer : $P(540 \leq S_n \leq 660) \geq \frac{31}{36}$.

3. Avec le TCL.

(a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Expliquer pourquoi on a l'approximation suivante

$$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sigma\sqrt{n}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

où σ et m sont des réels à déterminer et Φ est la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.

(b) En déduire une approximation de $P(540 \leq S_n \leq 660)$. On pourra utiliser $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2,68$.

4. Comparer les résultats des deux méthodes.

1 Correction des tests

Correction du test 1 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $X \mapsto \mathcal{U}([0, 1])$.

1. La variable X possède un moment d'ordre 2 donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{12\epsilon^2}.$$

2. Soit $\epsilon > \frac{1}{2}$. Alors on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) = P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \cup [X - E(X) \leq -\epsilon] = P\left(\left[X \geq \epsilon + \frac{1}{2}\right] \cup \left[X \leq \frac{1}{2} - \epsilon\right]\right).$$

Or, $\epsilon > \frac{1}{2}$ donc :

$$\left[X \geq \epsilon + \frac{1}{2}\right] \cup \left[X \leq \frac{1}{2} - \epsilon\right] \subset [X \geq 1] \cup [X \leq 0].$$

Ainsi on trouve :

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq P([X \geq 1] \cup [X \leq 0]) = 0.$$

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est très mauvaise ici!

Correction du test 2 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. La variable X possède un moment d'ordre 2 donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$ on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Soit $x < 0$. On a :

$$P(|X| \geq x) = P([X \geq x] \cup [X \leq -x]) = P(X \geq x) + P(X \leq -x)$$

car $[X \geq x]$ et $[X \leq -x]$ sont incompatibles. La variable X suivant la loi normale centrée réduite, on en déduit :

$$\begin{aligned} P(|X| \geq x) &= P(X \geq x) + P(X \leq -x) = 1 - P(X < x) + F_X(-x) \\ &= 1 - P(X \leq x) + F_X(-x) \\ &= 1 - F_X(x) + F_X(-x) \\ &= 2 - 2F_X(x). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Finalement on a donc en prenant $\epsilon = x$ dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X| \geq x) = 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) \leq \frac{1}{x^2}$$

c'est-à-dire :

$$1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Correction du test 3 ([Retour à l'énoncé.](#))

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P(e^{\frac{1}{n}} X \leq x) = P(X \leq e^{-\frac{1}{n}} x) = F_X(e^{-\frac{1}{n}} x).$$

- Comme X est à densité, F_X est continue sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} x = x.$$

Par continuité de F_X en x on en déduit donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(e^{-\frac{1}{n}} x) = F_X(x).$$

- Ainsi, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Correction du test 4 ([Retour à l'énoncé.](#))

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{X_n}(x) = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = 0$.
- Si $x > 0$ alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{n} < x.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, $F_{X_n}(x) = 1$ et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = 1$.

On en conclut que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- Soit X suivant la loi certaine de paramètre 0. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x)$ et $F_X(x)$ coïncident en tout point x non nul c'est-à-dire en tout point x où F_X est continue.

Par conséquent :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Correction du test 5 ([Retour à l'énoncé.](#))

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n est à valeurs dans \mathbb{N} de même qu'une variable X de loi certaine de paramètre 0. On va donc utiliser la caractérisation de la convergence en loi pour les variables aléatoires à valeurs entières.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $k < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(X_n = k) = 0$. Donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = 0 = P(X = k).$$

- Si $k = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(X_n = k) = e^{-\frac{1}{n}}$. Donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = 1 = P(X = 0).$$

- Si $k > 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P(X_n = k) = \frac{1}{n^k k!} e^{-\frac{1}{n}}$. Donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = 0 = P(X = k).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Correction du test 6 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

les variables S_n et $\sum_{k=1}^n X_k$ ont la même loi.

Or d'après le théorème central limite, on sait que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

où X suit la loi normale centrée réduite.

Notons F_n la fonction de répartition de $\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}$. Comme 0 est un point de continuité de F_X on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(0) = F_X(0).$$

Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n(0) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \leq 0\right) = P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq np\right) = F_{\sum_{k=1}^n X_k}(np) = F_{S_n}(np).$$

Ainsi on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np) = F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Correction du test 7 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. (a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.
 (b) Vu l'expérience aléatoire, on peut supposer les lancers indépendants et S_n suit donc la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$. En particulier :

$$E(S_n) = \frac{n}{6} = 600 \quad \text{et} \quad V(S_n) = n \frac{1}{6} \frac{5}{6} = 500.$$

2. (a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout $\epsilon > 0$:

$$P(|S_n - 600| > \epsilon) \leq \frac{500}{\epsilon^2}.$$

- (b) En passant au complémentaire, pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$P(600 - \epsilon \leq S_n \leq 600 + \epsilon) = P(|S_n - 600| \leq \epsilon) = 1 - P(|S_n - 600| > \epsilon) \geq 1 - \frac{500}{\epsilon^2}.$$

- (c) En prenant $\epsilon = 60$ dans la question précédente on obtient : $P(540 \leq S_n \leq 660) \geq 1 - \frac{500}{60^2} = \frac{31}{36}$.

3. Avec le TCL.

- (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sqrt{n}) = P\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right).$$

Donc en prenant $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{6} = \sqrt{V(X)}$ et $m = \frac{1}{6} = E(X)$, on sait d'après le corollaire du TCL que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ainsi, pour n grand (par exemple $n = 3600$) on a bien l'approximation demandée :

$$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leq S_n \leq nm + b\sqrt{n}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

- (b) Avec $n = 3600$ on a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'approximation :

$$P(600 + 10a\sqrt{5} \leq S_n \leq 600 + 10b\sqrt{5}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ainsi, en prenant $a = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{6}{\sqrt{5}}$ on obtient l'approximation :

$$P(540 \leq S_n \leq 660) \simeq \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(2.68) - 1.$$

Or $\Phi(2.68) \simeq 0.9963$ donc on obtient :

$$P(540 \leq S_n \leq 660) \simeq 0.9926.$$

En déduire une approximation de $P(540 \leq S_n \leq 660)$. On pourra utiliser $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2,68$.