DM 3 : Correction

Exercice 6 du TD 7 (27pts)

1. (a) L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule blanche au premier tirage. Donc :

$$P(X=0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

L'événement $[X = 1]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule noire au premier tirage (événement noté N_1) puis une boule blanche au second tirage (événement noté B_2). Donc :

$$P(X=1) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule noire au premier tirage (événement noté N_1) et au second tirage (événement noté N_2) puis une boule blanche au troisième tirage (événement noté B_3). Donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(B_3) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2.5 pts : 0.5 pour le premier et 1 pt chacun pour les deux autres.

(b) Comme dans cette question $n = b = 2$ alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ donc X est à support fini. En particulier X possède bien une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{2}{3}$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=0) + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=1) + \left(2-\frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=2) \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

2 pts

(c) La famille $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P_{[X=0]}(Y=0)P(X=0) + P_{[X=1]}(Y=0)P(X=1) + P_{[X=2]}(Y=0)P(X=2) \\ &= \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=0) + \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=0) + \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=0). \end{aligned}$$

Sachant que l'événement $[X = 0]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer contient toujours $n = 2$ boules noires et une seule boule blanche donc :

$$P_{[X=0]}(Y=0) = \frac{1}{3}.$$

Sachant que l'événement $[X = 1]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer contient 1 boule noire et une seule boule blanche donc :

$$P_{[X=1]}(Y=0) = \frac{1}{2}.$$

Sachant que l'événement $[X = 2]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer ne contient qu'une boule blanche donc :

$$P_{[X=2]}(Y=0) = 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=0) + \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=0) + \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.5 pts : 1pt pour la formule des probabilités totales, 0.5 pt par probabilité conditionnelle.

(d) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a

- $P([X=0]\cap[Y=i]) = P(X=0)P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=i)$.
Sachant que [X = 0] est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 1 boule blanche. Donc, par indépendance de tirages :
$$P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$
Ainsi :
$$P([X=0]\cap[Y=i]) = \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$
- $P([X=1]\cap[Y=i]) = P(X=1)P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=i)$.
Sachant que [X = 1] est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne contenant 1 boule noire et 1 boule blanche. Donc, par indépendance de tirages :
$$P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$
Ainsi :
$$P([X=1]\cap[Y=i]) = \frac{1}{2}P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$
- $P([X=2]\cap[Y=i]) = P(X=2)P_{[X=2]}(Y=i) = \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=i)$.
Sachant que [X = 2] est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne ne contenant plus de boule noire. Donc :
$$P_{[X=2]}(Y=i) = 0.$$
Ainsi :
$$P([X=2]\cap[Y=i]) = 0.$$

3 pts

(e) Il est clair que Y est à support dans $\mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(Y=i) = \sum_{k=0}^{2} P(X=k, Y=i) = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right).$$
D'après la question 1.(c) on sait aussi que $P(Y=0) = \frac{1}{2}$.
La série $\sum_{i\geqslant 1} P(Y=i)$ converge en tant que combinaison linéaire de séries géométriques convergentes. De plus :
$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=i) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$
Comme $P(Y=0) = \frac{1}{2}$ on a bien :
$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=i) = 1.$$
2 pts : 1pt pour la loi et 1 pt pour la somme de la série (avec étude de convergence)

(f) D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{i\geqslant 0} iP(Y=i)$ est absolument convergente.
Or, pour tout $i\geqslant 1$, on a :
$$|iP(Y=i)| = iP(Y=i) = \frac{1}{6}\left(i\left(\frac{2}{3}\right)^i + i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \frac{1}{9}\times i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12}\times i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$
Ainsi, la série $\sum_{i\geqslant 1} |iP(Y=i)|$ est combinaison linéaire de séries géométriques dérivées d'ordre 1 convergentes donc est elle-même convergente. En particulier, Y possède une espérance et :
$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(Y=i) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y=i) \\ &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{9}\times\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{12}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$
2pts : 1pt pour l'existence et 1pt pour le calcul.

2. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![1, n+b]\!]$ on note B_i l'événement « le joueur A tire une boule blanche au i-ième tirage » et N_i l'événement « le joueur A tire une boule noire au i-ième tirage ».
On a alors, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(N_1 \cap \cdots \cap N_k \cap B_{k+1}) \\
&= P(N_1)P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)P_{N_1\cap\cdots\cap N_k}(B_{k+1}) \\
&= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n+b-i}\right) \times \frac{b}{n+b-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(n+b-k)!}{(n+b)!} \times \frac{b}{n+b-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(n+b-k-1)!}{(n+b)!} \times b \\
&= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(n+b-k-1)!}{(n+b)!} \times \frac{b!}{(b-1)!} \\
&= \frac{n!b!}{(n+b)!} \times \frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!} \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \times \binom{n+b-k-1}{b-1}.
\end{aligned}$$

2 pts

(b) Comme il n'y a que n boules noires, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1.$$

Ainsi, en multipliant par $\binom{n+b}{b}$ membre à membre on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

Enfin, en effectuant le changement d'indice $k = n - i$ dans la somme de gauche on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

1.5 pt

(c) On a :

$$\begin{aligned}
k\binom{k+a}{a} = k \times \frac{(k+a)!}{k!a!} = \frac{(k+a)!}{(k-1)!a!} = \frac{a+1}{a+1}\,\frac{(k+a)!}{(k-1)!a!} &= (a+1)\frac{(k+a)}{(k-1)!(a+1)!} \\
&= (a+1)\binom{k+a}{a+1}.
\end{aligned}$$

En sommant cette égalité pour k allant de 1 à N on obtient (le terme de rang 0 de la somme de gauche étant nul) :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=1}^{N}\binom{k+a}{a+1}.$$

Enfin, on effectue le changement d'indice $i = k-1$ dans le membre de droite et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{i=0}^{N-1}\binom{i+1+a}{a+1}.$$

1.5 pt

(d) La variable aléatoire $n - X$ est à support fini donc possède une espérance et par le théorème de transfert on a, en utilisant successivement les formules trouvées en 2.(c) et 2.(b) :

$$
\begin{aligned}
E(n-X) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\
&= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{i=0}^{n} i\binom{i+b-1}{b-1} \\
&= \frac{b}{\binom{n+b}{b}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+b}{b} \\
&= \frac{b}{\binom{n+b}{b}}\binom{n+b}{b+1} \\
&= \frac{nb}{b+1}.
\end{aligned}
$$

Par linéarité on en déduit :

$$E(X) = E(n-(n-X)) = n - E(n-X) = n - \frac{bn}{b+1} = \frac{n}{b+1}.$$

2.5 pts

(e) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$P(X = k, Y = i) = P(X = k)P_{[X=k]}(Y = i) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} P_{[X=k]}(Y = i).$$

Or, sachant que $[X = k]$ est réalisé, l'urne dans laquelle le joueur B effectue ses tirages contient $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches et l'événement $[Y = i]$ est réalisé si le joueur B tire des boules noires les i premières fois et une boule blanche la $(i+1)$-ième fois. Donc, par indépendance des tirages de B on a

$$P_{[X=k]}(Y = i) = \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1}.$$

Finalement :

$$P(X = k, Y = i) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1}.$$

Si $k = 0$, on vérifie que cette formule est aussi vérifiée.

1.5 pts

(f) Soit $k \in X(\Omega)$.

Il s'agit d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\dfrac{n-k}{n-k+b-1}$. Comme $k \leqslant n$ et $b \geqslant 2$, la raison est, en valeur absolue, strictement inférieure à 1. Ainsi, la série est convergente et sa somme vaut :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^2} = \frac{(n-k+b-1)^2}{(b-1)^2}.$$

1 pt

(g) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

La famille $([X = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$
\begin{aligned}
iP(Y = i) = i\sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = i) &= i\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1} \\
&= i\sum_{k=0}^{n} P(X = k)\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2}\, i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi la série $\sum_{i\geqslant 0} iP(Y = i)$ est combinaison linéaire des séries $\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Or, ces séries sont convergentes d'après la question précédente. Ainsi, $\sum_{i\geqslant 0} iP(Y = i)$ est convergente (et même absolument convergente car à termes positifs).

En particulier, Y possède une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\mathrm{P}(\mathrm{Y}=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathrm{P}(\mathrm{Y}=i) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2}\frac{(n-k+b-1)^2}{(b-1)^2} \\
&= \frac{1}{b-1}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \\
&= \frac{1}{b-1}\mathrm{E}(n-\mathrm{X}) \\
&= \frac{bn}{(b-1)(b+1)} \\
&= \frac{bn}{b^2-1}.
\end{aligned}$$

3 pts : 1.5 pt pour l'existence et 1.5 pt pour le calcul.

Exercice 7 du TD 6 questions 10, 13 et 14 (10 pts)

10. Soit $n \geqslant 1$.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Or les séries $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont de même nature. Par conséquent, $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ diverge.

4 pts : 2 pts pour l'équivalent correctement justifié et 2 pts pour l'application du critère.

13. Par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n} = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

2 pts

14. Soit $n \geqslant 1$.

$$\sqrt{n^2-n+2}-n = n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = 0$, par équivalent usuel on a

$$\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \frac{-n+2}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit, on trouve

$$\sqrt{n^2-n+2}-n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n+2}-n = -\frac{1}{2}.$$

Donc la série diverge grossièrement.

4 pts : 3pts pour obtenir l'équivalent et 1 pt pour la nature.

Exercice 3 (16 pts)

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(T = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ le mobile a avancé à l'instant i puis est retourné en 0 à l'instant k. Ainsi $(T = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $(X_i = i)$ et $(X_k = 0)$ sont réalisés. Donc
$$(T = k) = (X_k = 0) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i).$$
1 pt si les explications sont présentes.

   (b) La variable aléatoire X_1 prend la valeur 0 avec probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec probabilité p. Ainsi, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
1 pt

   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées (les événements par lesquels on conditionne étant bien de probabilités non nulles), on a :
$$\begin{aligned}P(T = k) &= P(X_1 = 1) \times P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) \times \cdots \times P_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1} = k-1) P_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k = 0)\\ &= p \times p \times \cdots \times p \times (1-p)\\ &= p^{k-1}(1-p).\end{aligned}$$
Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(T = k) = p^{k-1}(1-p)$.
2 pts
On reconnaît que T suit la loi géométrique de paramètre $(1-p)$.
0.5 pt

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : d'après l'énoncé, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, il est évident que $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![0, n+1]\!]$ car le mobile ne peut pas avancer de plus de $n+1$ en $n+1$ instants.
     Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$ et montrons que $P(X_{n+1} = k) > 0$.
     - Si $k = 0$ alors on a :
     $$P(X_{n+1} = 0) \geqslant P(X_{n+1} = 0, X_n = 0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) P(X_n = 0) = (1-p) P(X_n = 0) > 0$$
     d'après l'hypothèse de récurrence.
     - Si $k \geqslant 1$ alors on a :
     $$P(X_{n+1} = k) \geqslant P(X_{n+1} = k, X_n = k-1) = P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) P(X_n = k-1) = p P(X_n = k) > 0$$
     d'après l'hypothèse de récurrence.

     Ainsi : $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $P(X_{n+1} = k) > 0$.
     Par conséquent, $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
     Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].$$

   3 pts

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, la famille $\big((X_{n-1} = k)\big)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales on obtient alors :
$$\begin{aligned}P(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) P(X_{n-1} = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p) P(X_{n-1} = k)\\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)\\ &= 1-p.\end{aligned}$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0) = 1-p$.
2 pts

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. Toujours d'après la formule des probabilités totales on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n = i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i).$$

Or, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n = i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = \begin{cases} p & \text{si } i = k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_{(\mathrm{X}_n = i)}(\mathrm{X}_{n+1} = k)\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i) \\ &= p\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1).$$

2.5 pts

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k(1-p)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après la question 1.(b), $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait :

$$\forall \ell \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = \ell) = p^{\ell}(1-p).$$

  Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

  - Si $k \geqslant 1$ alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence avec $\ell = k-1 \in [\![0, n-1]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k-1) = p \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p).$$

  - Si $k = 0$, on a déjà vu en 2.(b) que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 0) = 1 - p = p^0(1-p).$$

    Ainsi, on a montré :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = k) = p^k(1-p).$$

  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = p^k(1-p).$$

2.5 pts

Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel non nul n on a $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ alors, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) = 1 - (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} = p^n.$$

1 pt

(c) Découle de la question précédente.

0.5 pt