

TD 5-Dimension

Exercice 1

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant).

1. Soit E un espace vectoriel et $(u, v, w) \in E^3$. La famille (u, v, w) est libre si et seulement si les familles (u, v) , (u, w) et (v, w) sont libres.
2. Soit E un espace vectoriel et $(u, v, w) \in E^3$. Si $w \in \text{Vect}(u, v)$ alors (u, v, w) est liée.
3. La dimension de $\mathbb{R}_5[X]$ est 5.
4. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 tels que $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.
5. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Trouver une base de F et en déduire sa dimension.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
(b) Déterminer les coordonnées de A^n dans la base trouvée précédemment.

Exercice 3 (Ecricome 2008)

A tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a, b, c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels}\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

2. On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$ où la matrice I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(a) Calculer les matrices J^2, J^3 . En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.
(b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?

- (c) En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

Exercice 4

1. Montrer que la famille formée des vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$, $w = (1, 0, -1)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que la famille $(X^2 + X + 1, X - 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ dans cette base.

Exercice 5

Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et on suppose que $\dim H = n - 1$. Montrer que

$$(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \dots, e_1 - e_n)$$

est une base de H .

Exercice 6

Soient $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $F = E$.

Exercice 7

Sans calcul, donner le rang des matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ou non.

$$\begin{array}{lll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. & 3. C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}. & 5. E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \\ 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. & 4. D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. & 6. F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Exercice 11

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Déterminer le rang des familles suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right). \\ 2. (2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2). \end{array}$$

Exercice 9

$$\text{On considère } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de C .
2. Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les lignes de C . Déterminer la dimension de E et trouver une base de E .
3. Compléter cette base en une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 10

Dans \mathbb{R}^3 , on donne

$$u_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad ; \quad u_3 = (3, -4, -3).$$

1. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) .
2. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel F engendré par (u_1, u_2, u_3) et donner en une base.