Exercice 4

Il s'agit de montrer que la fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

* Montrons que F_X est continue sur $\mathbb{R}$

- F_X est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[1,+\infty[$ car constante sur ces intervalles et continue sur $[0,1]$ car polynomiale sur cet intervalle

- Étudions la continuité en 0 :

$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x)$ par opérations sur les limites

Ainsi F_X est continue en 0

- Étudions la continuité en 1 :

$\lim_{x\to 1^-} F_X(x) = 1 = F_X(1) = \lim_{x\to 1^+} F_X(x)$ par opérations sur les limites

Ainsi F_X est continue sur $\mathbb{R}$

* Montrons que F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

- F_X est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ car polynomiale sur ces intervalles.

Ainsi F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.

Ainsi X est à densité.

De plus, pour tout réel x différent de 0 et 1 on a

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

La fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ (en complétant en 0 et 1 avec une valeur positive) :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x^2 & \text{si } x\in[0,1] \\ 0 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

est une densité de X.

Exercice 5. Fait en TD

Exercice 6 :

1). f est positive si et seulement si $c \geq 0$.

. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Étudions la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

Etude de $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ (impropre en $-\infty$)

Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a

$$\int_A^0 f(x)dx = c\int_A^0 e^x dx = c(1-e^A) \quad \text{car : } \forall x \leq 0 \quad |x| = -x.$$

Donc $\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 f(x)dx = c.$

Ainsi $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ converge et vaut c.

Etude de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ (impropre en $+\infty$)

Soit $A \in [0, +\infty[$. On a

$$\int_0^A f(x)dx = c\int_0^A e^{-x}dx = c(1-e^{-A}) \quad \text{car : } \forall x \geq 0 \quad |x| = x.$$

Donc $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)dx = c$. Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)dx = c$.

BILAN : Ainsi, comme $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ convergent $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 2c$$

Donc f est une densité de probabilité si et seulement si $2c = 1$ si et seulement si $c = \frac{1}{2}$.

2) Soit F_X la fonction de répartition de X.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^x dx & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^x dx + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-x}dx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(1-e^x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(1-e^x) & \text{si } x > 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 7

Rappel : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Soit F_Y la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(X \leq x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$.

Donc :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x^2) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

* F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opération sur les fonctions usuelles.

* $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x)$

donc F_Y est continue en 0.

Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

* F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opération sur les fonctions usuelles.

Finalement Y est donc à densité

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x\lambda e^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donc la fonction f_Y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x\lambda e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant \sqrt[3]{x})$$

où $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque sur $\mathbb{R}$ de la fonction cube.

donc

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt[3]{x} < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{x}} & \text{si } \sqrt[3]{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On vérifie que

* F_Y est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles

$\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x)$

Donc F_Y est continue en 0.

Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

* F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opération sur les fonctions usuelles.

Donc Y est à densité.

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ F_Y'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda}{3} x^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donc la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{\lambda}{3} x^{-2/3} e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ est une

densité de Y.

3) Fait en TD

Exercice 8

1) Fait en TD

2) a) et b) Fait en TD

c) D'après les questions 2)a et 2)b on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

définie une densité de Z

d) Z possède une espérance si et seulement si

$\int_0^1 f_Z(x)dx$ converge absolument (car f_Z est nulle en dehors de $[0,1[$)

Or $x \mapsto \dfrac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} x e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 |x f_Z(x)| dx = \int_0^1 x f_Z(x) dx = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 x e^{-\lambda x} dx \quad \text{converge}$$

Ainsi Z possède une espérance et

$$E(Z) = \int_0^1 x f_Z(x) dx = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \left(\left[\frac{-x e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{-\lambda x} dx \right)$$

par IPP

$$= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \left(\frac{-e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^1 \right)$$

$$= -\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \frac{1}{\lambda}$$

On a vu que $E(Y) = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

donc par linéarité de l'espérance, le résultat était prévisible car

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y)$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Exercice 11

Une densité de X est : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) f_X est nulle en dehors de $]0,+\infty[$ et la fonction racine carrée est continue sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de transfert, $\sqrt{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx$

converge absolument.

La fonction $x\mapsto \lambda\sqrt{x}\,e^{-\lambda x}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Or $|\sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}| = \sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc d'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty}|\sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}|dx$ converge puisque $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge. Comme de plus $\int_0^1|\sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}|dx$ existe, on en déduit que $\int_0^{+\infty}|\sqrt{x}\,\lambda e^{-\lambda x}|dx$ converge. Ainsi $\sqrt{X}$ possède une espérance.

2) De même, X^3 possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^3\lambda e^{-\lambda x}\,dx$ converge absolument.

Or, $x\mapsto x^3\lambda e^{-\lambda x}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$.

et $|x^3\lambda e^{-\lambda x}| = x^3\lambda e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

D'après le critère de négligeabilité, comme $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge alors $\int_1^{+\infty}|x^3\lambda e^{-\lambda x}|dx$ converge aussi.

De plus, $\int_0^1|x^3\lambda e^{-\lambda x}|dx$ existe donc $\int_0^{+\infty}|x^3\lambda e^{-\lambda x}|dx$ converge.

Ainsi X^3 possède une espérance

3) De même $\frac{1}{X}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$ converge absolument

Or la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}\lambda e^{-\lambda x}$ est continue sur $]0,+\infty$ et positive. De plus

$$\frac{1}{x}\lambda e^{-\lambda x}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{\lambda}{x}.$$

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda x} dx$ et $\int_0^1 \frac{\lambda}{x} dx$ sont de même nature.

Comme $\int_0^1 \frac{\lambda}{x} dx$ est divergente, $\int_0^1 \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda x} dx$ aussi.

Ainsi l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda x} dx$ est divergente.

Donc $\frac{1}{X}$ ne possède pas d'espérance.