TD7-Variables aléatoires discrètes (révisions)

Exercice 1.

1. **Loi de** X. On tire deux pièces parmi 10 pièces donc on peut obtenir 0, 1 ou 2 pièces défectueuses. Ainsi $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   - L'événement $[X = 0]$ est réalisé si on a tiré les deux pièces parmi les 7 pièces non défectueuses. Ainsi :
   $$P(X = 0) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}.$$
   - L'événement $[X = 1]$ est réalisé si on a tiré une pièce parmi les 7 pièces non défectueuses et l'autre parmi les trois pièces défectueuses. Ainsi :
   $$P(X = 1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}.$$
   - L'événement $[X = 2]$ est réalisé si on a tiré les deux pièces parmi les 3 pièces non défectueuses. Ainsi :
   $$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}.$$

2. **Espérance de** X. La variable aléatoire X est à support fini donc possède une espérance et :
$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

3. **Variance de** X. La variable aléatoire X est à support fini donc possède une variance. D'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert, on a :
$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) - \frac{9}{25} \\ &= \frac{11}{15} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{28}{75}. \end{aligned}$$

Exercice 2. On suppose que a et b sont strictement positifs.

1. (a) On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à tirer une boule et dont le succès est « tirer une boule blanche ». La probabilité de succès est alors $\dfrac{a}{a+b}$.

   La variable aléatoire X_1 donne le rang du premier succès lors d'une répétition d'une infinité de ces épreuves indépendantes. Ainsi X suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{a}{a+b}$.

   (b) Voir cours.

2. (a) Il est clair que $X_2(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.

   Soit n un entier supérieur ou égale à 2. La famille $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :
   $$P(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X_1=k]}(X_2 = n) P(X_1 = k).$$
   Or, si $k \geq n$ alors $P_{[X_1=k]}(X_2 = n) = 0$ car la deuxième boule blanche est tirée après la première. D'où :
   $$P(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P_{[X_1=k]}(X_2 = n) P(X_1 = k).$$
   De plus, sachant que l'événement $[X_1 = k]$ est réalisé, l'événement $[X_2 = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient des boules noires aux tirages $k+1, k+2, \ldots, n-1$ et une boule blanche au tirage n. Ainsi :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P_{[X_1=k]}(X_2 = n) = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k-1} \frac{a}{a+b}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}P(X_2=n)&=\sum_{k=1}^{n-1}P_{[X_1=k]}(X_2=n)P(X_1=k)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k-1}\frac{a}{a+b}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1}\frac{a}{a+b}\\&=(n-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^{2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

(b) La variable aléatoire X_2 possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}$ est absolument convergente.

Or, il s'agit, à un facteur $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$ près, d'une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{b}{a+b}$. Comme on a supposé $a>0$ alors $\left\|\frac{b}{a+b}\right\|<1$. Ainsi la série est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est aussi absolument convergente.

Donc X_2 possède une espérance et :

$$E(X_2)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\frac{2}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^3}=\frac{2a}{a+b}.$$

Exercice 3.

On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à lancer le dé et à regarder si le résultat est pair (succès) ou impair (échec). La probabilité de succès est $\frac{1}{2}$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manière indépendante.

Ainsi, $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

Pour la variance et l'espérance, voir cours.

Exercice 4.

1. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}P(X>k)=P\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty}[X=i]\right)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}P\left([X=i]\right)&=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p(1-p)^{i-1}\\&=p(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)}\\&=(1-p)^k.\end{aligned}$$

2. Soit $(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On a :

$$P_{[X>l]}(X>k+l)=\frac{P(X>l,X>k+l)}{P(X>l)}.$$

Or $[X>k+l]\subset[X>l]$ donc $[X>l]\cap[X>k+l]=[X>k+l]$. Ainsi :

$$P_{[X>l]}(X>k+l)=\frac{P(X>k+l)}{P(X>l)}=\frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^l}=(1-p)^k=P(X>k).$$

Exercice 5.

1. La variable aléatoire Y est à support fini donc possède une espérance. Par linéarité, on obtient :

$$E(Y)=E(n-X)=n-E(X)=n-np=n(1-p).$$

2. La variable aléatoire Y est à support fini donc possède une espérance. Par le théorème de transfert, on obtient :

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{n}2^kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kp^k(1-p)^{n-k}=(2p+1-p)^n=(p+1)^n.$$

3. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+1}P(X=k)$ est absolument convergente.
Il s'agit d'une série à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}&=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda^i}{i!}\\&==\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\frac{\lambda^i}{i!}-1\right).\end{aligned}$$

On reconnaît à droite la somme partielle d'ordre $n+1$ d'un série exponentielle. Ainsi la série $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k+1}P(X=k)$ est absolument convergente et sa somme est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k+1}P(X=k)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Ainsi Y possède une espérance et :

$$E(Y)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Exercice 6.

1. (a) L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule blanche au premier tirage. Donc :

$$P(X=0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

L'événement $[X = 1]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule noire au premier tirage (événement noté N_1) puis une boule blanche au second tirage (événement noté B_2). Donc :

$$P(X=1) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si le joueur A tire un boule noire au premier tirage (événement noté N_1) et au second tirage (événement noté N_2) puis une boule blanche au troisième tirage (événement noté B_3). Donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

(b) Comme dans cette question $n = b = 2$ alors $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ donc X est à support fini. En particulier X possède bien une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) = \frac{2}{3}$$

et

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=0) + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=1) + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \times P(X=2) \\ &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

(c) La famille $([X = 0], [X = 1], [X = 2])$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} &P(Y=0) = \\ &P_{[X=0]}(Y=0)P(X=0) + P_{[X=1]}(Y=0)P(X=1) + P_{[X=2]}(Y=0)P(X=2) \\ &= \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=0) + \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=0) + \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=0). \end{aligned}$$

Sachant que l'événement $[X = 0]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer contient toujours $n = 2$ boules noires et une seule boule blanche donc :

$$P_{[X=0]}(Y=0) = \frac{1}{3}.$$

Sachant que l'événement $[X = 1]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer contient 1 boule noire et une seule boule blanche donc :

$$P_{[X=1]}(Y=0) = \frac{1}{2}.$$

Sachant que l'événement $[X = 2]$ est réalisé l'urne dans laquelle B va tirer ne contient qu'une boule blanche donc :

$$P_{[X=2]}(Y=0) = 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=0) + \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=0) + \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a

- $P([X=0] \cap [Y=i]) = P(X=0)P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=i)$.
  Sachant que $[X = 0]$ est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne contenant 2 boules noires et 1 boule blanche. Donc, par indépendance de tirages :
  $$P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$
  Ainsi :
  $$P([X=0] \cap [Y=i]) = \frac{1}{2}P_{[X=0]}(Y=i) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$
- $P([X=1] \cap [Y=i]) = P(X=1)P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{3}P_{[X=1]}(Y=i)$.
  Sachant que $[X = 1]$ est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne contenant 1 boule noire et 1 boule blanche. Donc, par indépendance de tirages :
  $$P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$
  Ainsi :
  $$P([X=1] \cap [Y=i]) = \frac{1}{2}P_{[X=1]}(Y=i) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$
- $P([X=2] \cap [Y=i]) = P(X=2)P_{[X=2]}(Y=i) = \frac{1}{6}P_{[X=2]}(Y=i)$.
  Sachant que $[X = 2]$ est réalisé, le joueur B tire avec remise des boules dans une urne ne contenant plus de boule noire. Donc :

$$P_{[X=2]}(Y=i)=0.$$

Ainsi :

$$P([X=2]\cap[Y=i])=0.$$

(e) Il est clair que Y est à support dans $\mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\quad P(Y=i)=\sum_{k=0}^{2}P(X=k,Y=i)=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)^i\right).$$

D'après la question 1.(c) on sait aussi que $P(Y=0)=\frac{1}{2}$.
La série $\sum_{i\geq 1}P(Y=i)$ converge en tant que combinaison linéaire de séries géométriques convergentes. De plus :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

Comme $P(Y=0)=\frac{1}{2}$ on a bien :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}P(Y=i)=1.$$

(f) D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{i\geq 0}iP(Y=i)$ est absolument convergente.
Or, pour tout $i\geq 1$, on a :

$$|iP(Y=i)|=iP(Y=i)=\frac{1}{6}\left(i\left(\frac{2}{3}\right)^i+i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right)=\frac{1}{9}\times i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{12}\times i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

Ainsi, la série $\sum_{i\geq 1}|iP(Y=i)|$ est combinaison linéaire de séries géométriques dérivées d'ordre 1 convergentes donc est elle-même convergente. En particulier, Y possède une espérance et :

$$\begin{aligned}E(Y)=\sum_{i=0}^{+\infty}iP(Y=i)&=\sum_{i=1}^{+\infty}iP(Y=i)\\&=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}+\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\\&=\frac{1}{9}\times\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. (a) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Pour tout $i\in[\![1,n+b]\!]$ on note B_i l'événement ≪ le joueur A tire une boule blanche au i-ième tirage ≫ et N_i l'événement ≪ le joueur A tire une boule noire au i-ième tirage ≫.
On a alors, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(N_1\cap\cdots\cap N_k\cap B_{k+1})\\&=P(N_1)P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)P_{N_1\cap\cdots\cap N_k}(B_{k+1})\\&=\left(\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{n+b-i}\right)\times\frac{b}{n+b-k}\\&=\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(n+b-k)!}{(n+b)!}\times\frac{b}{n+b-k}\\&=\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(n+b-k-1)!}{(n+b)!}\times b\\&=\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(n+b-k-1)!}{(n+b)!}\times\frac{b!}{(b-1)!}\\&=\frac{n!b!}{(n+b)!}\times\frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!}\\&=\frac{1}{\binom{n+b}{b}}\times\binom{n+b-k-1}{b-1}.\end{aligned}$$

(b) Comme il n'y a que n boules noires, $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{n}P(X=i)=1.$$

Ainsi, en multipliant par $\binom{n+b}{b}$ membre à membre on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}.$$

Enfin, en effectuant le changement d'indice $k=n-i$ dans la somme de gauche on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}k\binom{k+a}{a}=k\times\frac{(k+a)!}{k!a!}=\frac{(k+a)!}{(k-1)!a!}=\frac{a+1}{a+1}\frac{(k+a)!}{(k-1)!a!}&=(a+1)\frac{(k+a)}{(k-1)!(a+1)!}\\&=(a+1)\binom{k+a}{a+1}.\end{aligned}$$

En sommant cette égalité pour k allant de 1 à N on obtient (le terme de rang 0 de la somme de gauche étant nul) :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=1}^{N}\binom{k+a}{a+1}.$$

Enfin, on effectue le changement d'indice $i = k-1$ dans le membre de droite et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{i=0}^{N-1}\binom{i+1+a}{a+1}.$$

(d) La variable aléatoire $n-X$ est à support fini donc possède une espérance et par le théorème de transfert on a, en utilisant successivement les formules trouvées en 2.(c) et 2.(b) :

$$\begin{aligned} E(n-X) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\ &= \frac{1}{\binom{n+b}{b}}\sum_{i=0}^{n} i\binom{i+b-1}{b-1} \\ &= \frac{b}{\binom{n+b}{b}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+b}{b} \\ &= \frac{b}{\binom{n+b}{b}}\binom{n+b}{b+1} \\ &= \frac{nb}{b+1}. \end{aligned}$$

Par linéarité on en déduit :

$$E(X) = E(n-(n-X)) = n - E(n-X) = n - \frac{bn}{b+1} = \frac{n}{b+1}.$$

(e) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$P(X=k, Y=i) = P(X=k)P_{[X=k]}(Y=i) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} P_{[X=k]}(Y=i).$$

Or, sachant que $[X=k]$ est réalisé, l'urne dans laquelle le joueur B effectue ses tirages contient $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches et l'événement $[Y=i]$ est réalisé si le joueur B tire des boules noires les i premières fois et une boule blanche la $(i+1)$-ième fois. Donc, par indépendance des tirages de B on a

$$P_{[X=k]}(Y=i) = \left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1}.$$

Finalement :

$$P(X=k, Y=i) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1}.$$

Si $k=0$, on vérifie que cette formule est aussi vérifiée.

(f) Soit $k \in X(\Omega)$.

Il s'agit d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\dfrac{n-k}{n-k+b-1}$. Comme $k \leq n$ et $b \geq 2$, la raison est, en valeur absolue, strictement inférieure à 1. Ainsi, la série est convergente et sa somme vaut :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^2} = \frac{(n-k+b-1)^2}{(b-1)^2}.$$

(g) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

La famille $([X=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} iP(Y=i) = i\sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=i) &= i\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1} \\ &= i\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{n-k+b-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{i\geq 0} iP(Y=i)$ est combinaison linéaire des séries $\sum_{i\geq 1} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}$ pour $k=0,\dots,n$. Or, ces séries sont convergentes d'après la question précédente. Ainsi, $\sum_{i\geq 0} iP(Y=i)$ est convergente (et même absolument convergente car à termes positifs).

En particulier, Y possède une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(Y=i) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y=i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{n-k}{n-k+b-1} \right)^{i-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \frac{(b-1)(n-k)}{(n-k+b-1)^2} \frac{(n-k+b-1)^2}{(b-1)^2} \\
&= \frac{1}{b-1} \sum_{k=0}^{n} (n-k)P(X=k) \\
&= \frac{1}{b-1} E(n-X) \\
&= \frac{bn}{(b-1)(b+1)} \\
&= \frac{bn}{b^2-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(T=k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ le mobile a avancé à l'instant i puis est retourné en 0 à l'instant k. Ainsi $(T=k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $(X_i = i)$ et $(X_k = 0)$ sont réalisés. Donc

$$(T=k) = (X_k = 0) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = i).$$

(b) La variable aléatoire X_1 prend la valeur 0 avec probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec probabilité p. Ainsi, X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées (les événements par lesquels on conditionne étant bien de probabilités non nulles), on a :

$$\begin{aligned}
P(T=k) = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2=2)\dots P_{(X_1=1)\cap\dots\cap(X_{k-2}=k-2)}(X_{k-1}=k-1) \\
\times P_{(X_1=1)\cap\dots\cap(X_{k-1}=k-1)}(X_k=0) \\
= p \times p \times \dots \times p \times (1-p) \\
= p^{k-1}(1-p).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(T=k) = p^{k-1}(1-p)$.
On reconnaît que T suit la loi géométrique de paramètre $(1-p)$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après l'énoncé, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, il est évident que $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![0, n+1]\!]$ car le mobile ne peut pas avancer de plus de $n+1$ en $n+1$ instants.
  Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$ et montrons que $P(X_{n+1} = k) > 0$.
  - Si $k = 0$ alors on a :
    $$P(X_{n+1}=0) \geq P(X_{n+1}=0, X_n=0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)P(X_n=0) = (1-p)$$
    d'après l'hypothèse de récurrence.
  - Si $k \geq 1$ alors on a :
    $$P(X_{n+1}=k) \geq P(X_{n+1}=k, X_n=k-1) = P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k)P(X_n=k-1)$$
    d'après l'hypothèse de récurrence.

  Ainsi : $\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, $P(X_{n+1}=k) > 0$.
  Par conséquent, $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, la famille $((X_{n-1}=k))_{0 \leq k \leq n-1}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales on obtient alors :

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{(X_{n-1}=k)}(X_n=0)P(X_{n-1}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)P(X_{n-1}=k) \\
&= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1}=k) \\
&= 1-p.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0) = 1-p$.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. Toujours d'après la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(X_{n+1}=k) = \sum_{i=0}^{n} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k)P(X_n=i).$$

Or, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k) = \begin{cases} p & \text{si } i=k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=k) &= \sum_{i=0}^{n} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=k)P(X_n=i) \\ &= pP(X_n=k-1). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1,2,\dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k) = p\,\mathrm{P}(X_n=k-1).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ P(X_n=k) = p^k(1-p)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après la question 1.(b), $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on sait :

  $$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!],\ P(X_n=\ell) = p^\ell(1-p).$$

  Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
  - Si $k \geq 1$ alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence avec $\ell = k-1 \in [\![0,n-1]\!]$ on a :

    $$P(X_{n+1}=k) = pP(X_n=k-1) = p \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p).$$

  - Si $k=0$, on a déjà vu en 2.(b) que

    $$P(X_{n+1}=0) = 1-p = p^0(1-p).$$

    Ainsi, on a montré :

    $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_{n+1}=k) = p^k(1-p).$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0,n-1]\!],\ P(X_n=k) = p^k(1-p).$$

Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel non nul n on a $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ alors, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X_n=n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n=k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) = 1-(1-p)\frac{1-p^n}{1-p} = p^n.$$

(c) Découle de la question précédente.

4. (a) Soit $n \geq 2$. On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}.$$

D'autre part, on sait que pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Donc en dérivant, on trouve :

$$\forall x \in [0,1[,\quad f'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0,1[,\quad \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}.$$

(b) Soit $n \geq 2$. Le support de X_n est fini (on a vu que c'est $[\![0,n]\!]$). Donc X_n possède une espérance et :

$$\begin{aligned} E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n=k) &= \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + nP(X_n=n) \\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \\ &= p(1-p)\frac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{(1-p)^2} + np^n \\ &= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n(1-p)}{1-p} \\ &= \frac{p-p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p(1-p^n)}{1-p}. \end{aligned}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire X_{n+1} est à support fini donc X_{n+1}^2 possède une espérance et d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p P(X_n = k-1) \quad \text{d'après 3.}(a), \\
&= p \sum_{i=0}^{n} (i+1)^2 P(X_n = i) \quad \text{en posant } i = k-1, \\
&= p \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 P(X_n = i) + 2 \sum_{i=0}^{n} i P(X_n = i) + \sum_{i=0}^{n} P(X_n = i) \right) \\
&= p \left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1 \right).
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p \left(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1 \right) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p(u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2E(X_n) + 1) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n - (2n-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} + 2pE(X_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} + p + 2pE(X_n).
\end{aligned}$$

Or $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$ d'après 4.(b) donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= pu_n + \frac{2p^{n+2} + 2p^2(1-p^n) + p(1-p)}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p^2 + p}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.
\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = p\frac{1+p-2p^n}{(1-p)^2}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_n^2) = p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X_n est à support fini, elle possède une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n^2) - E(X_n)^2 \\
&= p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p\left(1-(2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)}{(1-p)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 8.

1. (a) La variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre q.
   La suite est du cours.

   (b) Comme on s'arrête dès qu'on obtient une boule noire, les variables U et T sont reliées par la relation :
   $$U = T - 1.$$
   Or T possède une espérance et une variance donc U aussi et :
   $$E(U) = E(T-1) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q}$$
   et
   $$V(U) = V(T-1) = V(T) = \frac{p}{q^2}.$$

2. (a) i. Soit $k \geq 2$. L'événement $[X = K]$ peut être réalisé de deux façons incompatibles entre elles :

   - soit on tire des boules blanches lors des $(k-1)$ premiers tirages puis une boule noire au k-ième ;
   - soit on tire des boules noires lors des $(k-1)$ premiers tirages puis une boule blanche au k-ième.

   Ainsi :
   $$[X = 1] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k \cup N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k.$$
   D'où :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\ &= P(B_1) \times \cdots \times P(B_{k-1}) P(N_k) + P(N_1) \times \cdots \times P(N_{k-1}) P(B_k) \end{aligned}$$

par indépendance des tirages (il y a remise).
Finalement, on a bien :

$$P(X=k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p.$$

ii. La série $\sum_{k\geq 2} P(X=k)$ est combinaison linéaire de séries géométriques convergentes donc est convergente. De plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) &= q\sum_{k=2}^{+\infty} p^{k-1} + p\sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} \\ &= \frac{pq(1-q)+pq(1-p)}{(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{pq(2-p-q)}{qp} \\ &= 2-p-q \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $p+q=1$.

iii. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ est absolument convergente. Comme c'est une série à termes positif, il suffit de montrer la convergence.
Or la série $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées d'ordre 1 suivantes

$$\sum_{k\geq 2} kp^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 2} kq^{k-1}$$

qui convergent car $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$.
Par conséquent, $\sum_{k\geq 2} kP(X=k)$ est absolument convergente. Ainsi, X possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X=k) &= q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) \\ &= q\left(\frac{1}{q^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{p^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - (p+q) \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1. \end{aligned}$$

(b) i. Soit $k \geq 3$. On a :

$$[X=k] \cap [Y=1] = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k.$$

Ainsi, par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P([X=k]\cap[Y=1]) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) &= P(N_1) \times \cdots \times P(N_{k-1})P(B_k) \\ &= q^{k-1}p. \end{aligned}$$

De plus,

$$[X=2] \cap [Y=1] = N_1 \cap B_2 \cup B_1 \cap N_2.$$

Ainsi, par indépendance des tirages :

$$P([X=2]\cap[Y=1]) = P(N_1)P(B_2) + P(B_1)P(N_2) = 2pq.$$

ii. La famille $([X=k])_{k\geq 2}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=1]) \\ &= 2pq + p\sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= 2pq + pq^2\frac{1}{1-q} \\ &= 2pq + q^2 \\ &= q(2p+q) \\ &= q(p+1). \end{aligned}$$

iii. La variable Y a pour support $\mathbb{N}^*$. On a déjà calculer $P(Y = 1)$. Soit k un entier supérieur ou égale à 2. L'événement $[Y = k]$ est réalisé si et seulement si on a tiré k boules blanches et une boule noire en dernier. Donc :

$$P(Y = k) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap N_{k+1}) = p^k q.$$

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

(c) Les variables Y et Z ont un rôle symétrique. En raisonnant comme pour Y on obtient donc que le support de Z est $\mathbb{N}^*$ et que :

$$P(Z = 1) = p(1 + q) \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2,\ P(Z = k) = q^k p.$$

De plus, on a $Z = X - Y$. Comme X et Y possèdent une espérance alors Z aussi et :

$$\begin{aligned}
E(Z) = E(X) - E(Y) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{q}(1 - p + p^2) \\
&= \frac{1}{p} - 1 + \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q} \\
&= \frac{1}{p} - 1 + \frac{p(1-p)}{q} \\
&= \frac{1}{p} - 1 + p \\
&= \frac{1}{p}(1 - p + p^2) \\
&= \frac{1}{p}(1 - q + q^2).
\end{aligned}$$

(d) Comme on s'arrête dès qu'on a obtenue une boule de chaque couleur, pour tout $\omega \in \Omega$ on a $Y(\omega) = 1$ ou $Z(\omega) = 1$ selon que la dernière boule tirée est blanche ou noire. Dans tous les cas ,$Y(\omega)Z(\omega)$ est donc égal au nombre de tirages effectués avant le dernier tirage soit $X(\omega) - 1$. Ainsi :

$$YZ = X - 1.$$

(e) Voir le chapitre 8.