ECE2 – Mathématiques

DS1 (136 PTS)

Exercice 1 (d'après Ecricome 2008, 39 pts)

1. On remarque que :

$$\begin{aligned}
E = \{M(a,b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\} &= \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \{aI + bA \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}\\
&= \mathrm{Vect}(I,A)
\end{aligned}$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2 pts (on pouvait aussi utiliser la définition ou la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

2. D'après la question précédente, la famille (I,A) est une famille génératrice de E. Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc un famille libre. Ainsi (I,A) est une base de E. Cela permet de dire que E est de dimension finie et que sa dimension est égale à 2.
3 pts : 1 pour le caractère générateur, 1 pour le caractère libre, 1 pt pour la dimension.

3. (a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.Alors

$$\begin{aligned}
X\in F \iff AX = \iff &\begin{cases} 2x - y - 2z = x \\ 2x - y - 4z = y \\ -x + y + 3z = z\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0\end{cases}\\
\iff & x - y - 2z = 0\\
\iff & x = y + 2z\\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $F = \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel.
3 pts : 1pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour la mise sous forme de sous-espace vectoriel engendré

(b) D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et sa dimension vaut 2.
2 pts : 1 pt pour la base, 1pt pour la dimension.

(c) D'après la question précédente, l'équation $(A-I)X = 0$ admet une infinité de solution : le système n'est pas de Cramer. La matrice $A-I$ n'est donc pas inversible.

1 pt

4. (a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.Alors

$$X \in G \Longleftrightarrow AX = 2X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & 2x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 2y \\ -x & + & y & + & 3z & = & 2z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y+z \\ y & = & -2z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $G = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel. De plus, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de G formée d'un unique vecteur non nuls. Ainsi $\mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G. Donc G est de dimension finie et sa dimension vaut 1.

4 pts : 1pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour la mise sous forme de sous-espace vectoriel engendré, 1pt pour base et dimension

(b) Soit $X \in F \cap G$. Alors $AX = X$ car $X \in F$ et $AX = 2X$ car $X \in G$. Donc $2X = X$, c'est-à-dire, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $F \cap G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Réciproquement, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \cap G$. Ainsi, on a bien $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3 pts : 2pts pour la première inclusion et 1pt pour la deuxième.

(c) D'après les questions précédentes, on a $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or le membre de droite de cette égalité appartient à G et le membre de gauche appartient à F. Par conséquent, $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \cap G$. D'après la question précédente, on a donc

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \lambda_1 = 0.$$

Comme on a $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $\mathscr{B}_1$ est libre, cela entraîne que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a ainsi montré que si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Autrement dit, la famille $\mathscr{B}$ est libre et c'est donc une base d'après ce qui a été dit ci-dessus. De plus, comme $\mathscr{B}$ est de cardinal 3 et que $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, alors c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3 pts : 2pts pour libre et 1pt pour le cardinale égal à la dimension

(d) On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Or

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -3\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & -1 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & & & & & = & -2 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 2 \\ \lambda_2 & = & 5 \\ \lambda_3 & = & -1 \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2
\end{aligned}$$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(2,5,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$.

3pts : 1pt pour les coordonnées du premier vecteur et 2 pts pour les coordonnées du deuxième.

5. (a) P est inversible si et seulement si pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ le système

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

admet une unique solution $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Dans ce cas, l'inverse de P s'obtient en inversant le système.

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ 2x&+&y&&&=&b\\ -x&&&+&z&=&c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &-&y&-&4z&=&b-2a\\ &&y&+&3z&=&a+c\end{array}\right.\qquad\begin{array}{l}\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1\end{array}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &&&-&z&=&b+c-a\\ &&y&+&3z&=&a+c\end{array}\right.\qquad\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&y&+&2z&=&a\\ &&&&z&=&a-b-c\\ &&&&y&=&-2a+3b+4c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&a-b-2c\\ z&=&a-b-c\\ y&=&-2a+3b+4c\end{array}\right.$$

$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Ainsi P est inversible d'inverse $\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

3pts

(b) On trouve

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2 pts : 1pt pour AP **ou** $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}$ **et 1 pt pour le résultat final.**

6. (a) Remarquons que $\mathrm{M}(a,b)=a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$. Par conséquent,

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}(a\mathrm{I}+b\mathrm{A})\mathrm{P}=a\mathrm{P}^{-1}\mathrm{IP}+b\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=a\mathrm{I}+b\mathrm{D}=\begin{pmatrix}a+2b&0&0\\0&a+b&0\\0&0&a+b\end{pmatrix}.$$

2pts : 1 pt pour remarquer $\mathrm{M}(a,b)=a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$ **et 1 pt pour l'expression de** $\mathrm{D}(a,b)$

(b) Supposons que $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible. Alors

$$\mathrm{D}(a,b)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible. Comme $\mathrm{M}(a,b)=\mathrm{PD}(a,b)\mathrm{P}^{-1}$ donc $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
Finalement, $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{D}(a,b)$ l'est.
Or, $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq0$ et $a+b\neq0$. Donc, $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq0$ et $a+b\neq0$.

3 pts : 1 pt par implication dans l'équivalence, 1 pt pour la condition portant sur a **et** b

(c) On rappelle que $\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I} &\iff (\mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1})^2 = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{P}\mathrm{D}(a,b)\mathrm{D}(a,b)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff \mathrm{P}(\mathrm{D}(a,b))^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{-1} \quad \text{en multipliant à gauche par } \mathrm{P}^{-1} \text{ de part et d'autre}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} \quad \text{en multipliant à droite par } \mathrm{P}^{-1} \text{ de part et d'autre}\\
&\iff (\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}
\end{aligned}$$

Or, $(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}$ si et seulement si $(a+2b)^2 = 1$ et $(a+b)^2 = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I} &\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& 1\\ a &+& b &=& 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& 1\\ a &+& b &=& -1\end{array}\right.\\
&\quad \text{ou } \left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& -1\\ a &+& b &=& 1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& -1\\ a &+& b &=& -1\end{array}\right.\\
&\iff (a,b) = (1,0) \text{ ou } (a,b) = (-3,2) \text{ ou } (a,b) = (3,-2) \text{ ou } (a,b) = (-1,0)
\end{aligned}$$

5 pts : 2 pts pour l'équivalence, 1 pt pour l'obtention des 4 systèmes, 2pts pour la résolution des systèmes.

Exercice 2 (13 pts + 3pts bonus)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n'(x) = n + e^x > 0.$$

2 pts : 1 pt pour la dérivabilité, 1pt pour la dérivée

2. D'après la question précédente, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc, par somme, on trouve

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} nx = +\infty \quad \text{car } n > 0.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$ (car $n > 0$) donc par différence :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty.$$

3 pts : 1 pt pour les variations, 1pt par limite

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f_n(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante. D'après la question précédente, $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc, $0 \in f_n(\mathbb{R})$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par f_n, i.e, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution. On note u_n cette solution.

2 pts : 1 pt le théorème de la bijection réciproque ou le corrolaire du TVI parfaitement énoncé, 1pt la conclusion.

4. On a :

$$f_n(0) = -1 < 0 = f_n(u_n) < 1 - e^{-\frac{1}{n}} = f_n(\frac{1}{n}).$$

Par croissance stricte de f_n^{-1}, on a donc :

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

2 pts : 1pt pour les calculs et 1 pt pour en déduire l'inégalité stricte

5. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après la question précédente, on peut conclure par encadrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est 0.
Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$0 = f_n(u_n) = nu_n - e^{-u_n}$$
donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, par composition continuité de l'exponentielle en zéro, on a $\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n} = 1$.
En particulier, $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit
$$\frac{e^{-u_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4 pts : 1 pt pour la limite, 1 pt pour la relation, 1 pt pour l'équivalent de e^{-u_n} et un point pour l'équivalent de u_n
6. On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. L'idée ici est alors de chercher un équivalent de $u_n - \frac{1}{n}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n}.$$
Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc, par équivalent usuel, on a $e^{-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$ et par transitivité, $e^{-u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$. Par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit
$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{e^{-u_n} - 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$
Enfin, on utilise la caractérisation de l'équivalence pour conclure que
$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi,
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Bonus (3 pts) : 2pts pour l'équivalent de $u_n - \frac{1}{n}$, 1 pt pour la caractérisation de l'équivalence

Exercice 3(EDHEC 2011, 25 pts)

1. (a) L'événement $(X_i = 1)$ est réalisé si et seulement si l'urne i contient toujours n boules au bout des n épreuves si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'urne i n'est pas choisie à la $k^{\text{ième}}$ épreuves. Ainsi
$$(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k}.$$
Le choix des urnes étant indépendant, les événements $\left(\overline{U}_{i,k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. Donc :
$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U}_{i,k}\right)\end{aligned}$$
Or, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a
$$P\left(\overline{U}_{i,k}\right) = 1 - P\left(U_{i,k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$
car les urnes sont équiprobables. Par conséquent,
$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
4 pts : 2 pt pour l'expression avec les $U_{i,k}$ (avec justification), 1 pt pour l'utilisation de l'indépendance, 1pt pour le calcul de $P(U_{i,k})$ et le résultat final

(b) Soient i et j deux entiers distincts, éléments de $\{1,2,\dots,n\}$,. L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ les urnes i et j ne sont pas choisies à l'étape k. Ainsi,

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}.$$

Le choix des urnes étant indépendant, les événements $\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants. Donc :

$$\begin{aligned} P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U}_{j,k}\right) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$, on a

$$P\left(\overline{U}_{i,k} \cap \overline{U_{j,k}}\right) = 1 - P\left(U_{i,k} \cup U_{j,k}\right) = 1 - P\left(U_{i,k}\right) - P\left(U_{j,k}\right) = 1 - \frac{2}{n}$$

car les urnes sont équiprobables et les événements $U_{i,k}$ et $U_{j,k}$ sont disjoints. Par conséquent,

$$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

5 pts : 2 pt pour l'expression avec les $U_{i,k}$ (avec justification), 1 pt pour l'utilisation de l'indépendance, 2pt pour le calcul et le résultat final

(c) On a

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 1 - \frac{2}{n} \geqslant 0 \quad \text{car} \quad n \geqslant 2.$$

Par croissance stricte de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

Soient i et j deux entiers distincts, éléments de $\{1,2,\dots,n\}$, alors les évènements. Alors

$$P([X_i = 1])P([X_j = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} > \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]).$$

En particulier, $P([X_i = 1])P([X_j = 1]) \neq P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ ce qui signifie que les événements $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ ne sont pas indépendants.

2pts : 1pt pour la comparaison, 1 pt pour en déduire la non indépendance

2. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable X_i est une variable de Bernoulli donc possède une espérance et

$$E(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

D'après le résultat rappelé au début de l'exercice, Y_n possède donc une espérance et

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

3pts : 1pt l'espérance des X_i, 1 pt pour utiliser le résultat rappeler au début de l'exercice, 1 pt pour le calcul correct

(b) Par conséquent, pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Or, d'après les équivalents usuels,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

donc, par compatibilité des équivalents avec le produit,

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-1$ puis, par continuité de l'exponentielle en -1 :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)}{n}=e^{-1}.$$

Comme $e^{-1}\neq 0$, cela signifie que $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{-1}$. Par compatibilité des équivalents avec le produit, on en déduit que

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}ne^{-1}.$$

4pts pour la limite : 1pt pour la mise sous forme exponentielle, 1 pt l'équivalent usuel, 1 pt pour la compatibilité avec le produit et 1 pt pour la continuité de l'exponentielle

2pts pour l'équivalent : 1pt l'équivalent de $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)}{n}$, 1 pt pour l'équivalent de $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$.

3. Pour tout i de $\{1,2,\dots,n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   (a) La variable aléatoire N_i compte le nombre de succès d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{n}$. Donc $\mathrm{N}_i\hookrightarrow\mathscr{B}(n,\frac{1}{n})$. Ainsi

   $$\mathrm{E}(\mathrm{N}_i)=n\times\frac{1}{n}=1$$

   2 pts : 1pt pour reconnaître une loi de Bernoulli (avec les bons paramètres et justification), 1 pt pour l'espérance.

   (b) Si $\mathrm{N}_i\neq 0$ alors c'est que l'urne i a été choisie au moins une fois. Dans ce cas $\mathrm{X}_i=0$ et par conséquent $\mathrm{N}_i\mathrm{X}_i=0$.
   Si $\mathrm{N}_i=0$ alors $\mathrm{N}_i\mathrm{X}_i=0$.
   Par conséquent, $\mathrm{N}_i\mathrm{X}_i=0$.
   3 pts : 2 pts pour le premier cas de la disjonction, 1 pt pour le second.

Exercice 4 (59 pts+11pts bonus)

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) La fonction f est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Ainsi, f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
   Étudions la continuité en 0. La fonction exponentielle est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut 1. Par définition du nombre dérivée, on a donc

   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

   Par passage à l'inverse, on en déduit que

   $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1.$$

   En d'autres termes,

   $$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0).$$

   Ainsi f est continue en 0.
   Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
   3 pts : 1 pt pour la continuité sur $\mathbb{R}^*$, 1 pt pour le calcul de limite et 1 pt pour la définition de continuité en 0

   (b) La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur de s'annule pas sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. Ainsi, f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
   De plus, pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$:

   $$f'(x)=\frac{e^x-xe^x-1}{(e^x-1)^2}$$

   2 pts : 1pt pour le caractère C^1 et 1 pt pour la dérivée

(c) On sait que pour tout $x \neq 0$, on a
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x-1)^2}.$$
Comme $\lim_{x\to 0} e^x = 1$, on est face à une forme indéterminée. Cependant, on connaît le comportement de exp au voisinage de zéro de façon plus précise : notons $h(x) = \frac{e^x-1}{x} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On a vu à la question précédente que
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$
donc
$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$
Or,
$$e^x = 1 + x + xh(x).$$
Ainsi, on obtient le développement limité à l'ordre 1 de exp en 0 :
$$e^x = 1 + x + xh(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$
Si on remplace e^x par cette expression dans l'expression de $f'(x)$ on trouve :
$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1+x+xh(x)-1-x(1+x+xh(x))}{(x+xh(x))^2} = \frac{xh(x)-x^2-x^2h(x)}{x^2(1+h(x))^2} &= \frac{h(x)-x-xh(x)}{x(1+h(x))^2} \\ &= \frac{h(x)}{x(1+h(x))^2} - \frac{1}{1+h(x)} \\ &= \frac{h(x)}{x}\frac{1}{(1+h(x))^2} - \frac{1}{1+h(x)} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+h(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+h(x))^2} = 1$ mais $\frac{h(x)}{x}$ donne une forme indéterminée.
Soit $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$ et étudions $\frac{h(x)}{x}$. D'après la définition de h, on a
$$\frac{h(x)}{x} = \frac{e^x-1-x}{x^2}$$

- Méthode 1 : on sait que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 - x = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!} &= \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{x^2}{2} + x^2 \sum_{k=3}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!} \end{aligned}$$

  Cela entraîne que, pour tout $x \neq 0$, la série $\sum_{k\geqslant 3} \frac{x^{k-2}}{k!}$ converge car le membre de gauche converge (pour $x = 0$ la série converge aussi car tous les termes valent 0). On note $\mathrm{S}(x)$ sa somme. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité, on trouve :
$$\forall x \in]-1,1[, \ e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + x^2\mathrm{S}(x).$$
  ce qui donne, pour $x \neq 0$
$$\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{2} + \mathrm{S}(x)$$
  Montrons que $\lim_{x\to 0} \mathrm{S}(x) = 0$. Pour $k \geqslant 3$, on a $k! \geqslant 1$ donc $\frac{1}{k!} \leqslant 1$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=3}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!} \right| &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \left| \frac{x^{k-2}}{k!} \right| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \left| x^{k-2} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-2} |x|^k \\ &\leqslant |x| \frac{1-|x|^{n-2}}{1-|x|} \end{aligned}$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient, par continuité de la fonction valeur absolue et compte tenu de $|x|<1$:

$$|S(x)| \leqslant |x| \frac{1}{1-|x|}.$$

Cela permet de conclure que $\lim_{x\to 0} S(x) = 0$.
Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + S(x) = \frac{1}{2}.$$

- Méthode 2 : on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$e^x = 1 + x + xh(x).$$

Comme $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + x + xh(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, en intégrant cette inégalité entre 0 et x on trouve :

$$\int_0^x e^t dt = \int_0^x (1 + t + th(t))dt$$

c'est-à-dire

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x th(t)dt.$$

Notons $R(x) = \int_0^x th(t)dt$ (la fonction $x \mapsto R(x)$ est la primitive de la fonction continue $x \mapsto xh(x)$ qui s'annule en 0). Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{R(x)}{x^2}.$$

Montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^2} = 0$. Soit $\epsilon > 0$.
Comme $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]-x_0, x_0[$, $|h(x)| \leqslant \epsilon$. Alors, pour tout $x \in]-x_0, x_0[$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R(x)}{x^2}\right| &\leqslant \int_0^x |th(t)|dt \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{|x|^2} \int_0^x |t| \cdot |h(t)|dt \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{|x|^2} \int_0^x |t|dt \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{2} \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

car $\int_0^x |t|dt = \frac{|x|^2}{2}$ (procéder par disjonction de cas, selon que $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$).
On a ainsi montré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]-x_0, x_0[$, $x \neq 0$ on a

$$\left|\frac{R(x)}{x^2}\right| \leqslant \epsilon$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{R(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} \frac{1}{(1+h(x))^2} - \frac{1}{1+h(x)} = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Question très dure (sauf pour les redoublants), Bonus (4pts) : 1 pt pour repérer la forme indéterminée, 3 pts pour trouver la limite

(d) Il suffit de montrer que f est de classe C^1 en 0 d'après la question 1.a . Pour cela, on doit

i. montrer que f est dérivable en 0.

ii. montrer que $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Soit $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}$$

A la question précédente, on a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \mathrm{S}(x).$$

avec $\lim_{x\to 0} \mathrm{S}(x) = 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1+x-e^x}{x(e^x-1)}\\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} - x^2\mathrm{S}(x)}{x(x+\frac{x^2}{2}+x^2\mathrm{S}(x))^2}\\ &= \frac{x^2(-\frac{1}{2}-\mathrm{S}(x))}{x^2(1+\frac{x}{2}+x\mathrm{S}(x))^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}-\mathrm{S}(x)}{(1+\frac{x}{2}+x\mathrm{S}(x))^2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$. Cela signifie que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
D'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

donc f' est continue en 0. D'après les questions précédentes, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Question très dure (sauf pour les redoublants), Bonus (4pts) : 1 pt pour remarquer que l'objectif est de montrer que $f'(0) = -\frac{1}{2}$ en revenant à la définition, 3 pts pour calculer $f'(0)$

2. (a) Les fonctions $x \mapsto 1-x$ et $x \mapsto e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto (1-x)e^x$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction constante égale à 1 étant dérivable sur $\mathbb{R}$, par différence, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x on a

$$u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x.$$

Ainsi

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de u		↗	0	↘	

4pts : 1pt pour la justification de la dérivabilité, 1 pt pour la dérivée, 1pt pour le signe et 1 pt pour les variations

(b) D'après la question 1, pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x-1)^2} = \frac{u(x)}{(e^x-1)^2}.$$

D'après le tableau de variation de la question précédente, u possède un unique maximum global en 0 et $u(0) = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x)$ est négatif strictement. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.
De plus, $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$$

3 pts : 1 pt pour le lien entre u et f', 1pt pour le signe de u puis de f' et 1 pt pour le cas $x = 0$.

(c) On sait que $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to -\infty} e^x - 1 = -1$. Ainsi

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Soit $x > 0$.

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\frac{1}{1-e^{-x}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-x})=1$. Par quotient puis produit, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

Pour tout réel x, $f'(x)<0$; la fonction f est strictement décroissante :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Variation de f	$+\infty$ $\searrow$ 0

3 pts : 1 pt par limite et 1pt pour le tableau

(d) On cherche des réels a et b tels que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0.$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$f(x)-(ax+b)=\frac{x-axe^x-be^x+ax+b}{1-e^x}=\frac{(a+1)x-axe^x-be^x+b}{1-e^x}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $f(x)-(ax+b)$ admet une limite finie en $-\infty$ si et seulement si $a+1=0$ et dans ce cas

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=b.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=0.$$

La droite d'équation $y=-x$ est donc asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.
Bonus (3pts)

(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2 pts dont 1 pt pour la pente en 0 correcte

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Comme $f(0)=1$, 0 n'est pas un point fixe de f. Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

$$f(x)=x\iff\frac{x}{e^x-1}=x\iff 1=e^x-1\iff e^x=2\iff x=\ln(2)$$

Ainsi $\ln(2)$ est l'unique point fixe de f.
3pts : 1pt pour le cas $x=0$, 2 pts pour le reste

2. (a) Étudions la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x\in[0;+\infty[,\ h(x)=e^{2x}-2x\,e^x-1$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \ h'(x)=2e^{2x}-2xe^x-2e^x=2e^x(e^x-x-1).$$

Or, la fonction exp est convexe donc elle est située au dessus de sa tangente en 0. Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ e^x\geqslant 1+x.$$

Par conséquent, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $h'(x)\geqslant 0$ et la fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on obtient

$$e^{2x}-2xe^x-1=h(x)\geqslant h(0)=0.$$

4pts : 1 pt pour la dérivabilité de h, 1 pt pour h', 1pt pour le signe de h' et 1 pt pour les variations de h et la conclusion

(b) Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} f'(x)+\frac{1}{2} &= \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x-2xe^x-2+(e^x-1)^2}{2(e^x-1)^2} \\ &= \frac{2e^x-2xe^x-2+(e^x)^2-2e^x+1}{2(e^x-1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2(e^x-1)^2} \end{aligned}$$

2 pts

(c) D'après les deux questions précédentes :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x)+\frac{1}{2} = \frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2(e^x-1)^2} \geqslant 0.$$

Donc

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Cette inégalité est aussi vraie en $x=0$ car $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
D'autre part, d'après la question 2b, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Ainsi :
$\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$

3 pts : 1 pt pour par inégalité et 1 pt pour penser à distinguer le cas $x=0$

(d) On va utiliser l'inégalité des accroissements finies.

- La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$ donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
- $\alpha \in [0,+\infty[$ car $\alpha = \ln(2)$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,+\infty[$.
  i. Initialisation : $u_0 = 1 \in [0,+\infty[$.
  ii. Hérédité : supposons que $u_n \in [0,+\infty[$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} \in [0,+\infty[$. D'après le tableau de variation de f est strictement positive donc $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
  iii. Conclusion; : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,+\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qu'on vient de voir, on peut appliquer l'inégalité des accroissement finis à la fonction f entre les points α et u_n. On obtient alors

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc on trouve

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

Ainsi $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

7pts : 1pt pour l'hypothèse f dérivable, 1pt pour la majoration de f', 1 pt pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, 2 pts pour la récurrence, 1 pt pour la conclusion de l'IAF, 1 pt pour la conclusion

3. Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$

- Initialisation : $|u_0-\alpha| = |1-\alpha|$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-\alpha|.$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

Donc

$$\begin{aligned} |u_{n+1}-\alpha| &\leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}|1-\alpha| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

- D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$.
  4pts : 1 pt initialisation, 2 pts pour l'hérédité, 1 pt pour la conclusion.

4. D'après la question précédente, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   1 pt

5.

```
u=1
n=0
while abs(u-log(2))>=10^(-9)
    u= u/(exp(u)-1)
    n=n+1
end
disp(n)
```

   4 pts : 1pt pour l'initialisation des variables, 1pt pour l'usage d'une boucle `while`, 1 pt pour le calcul de `u` et `n`, 1 pt pour l'affichage final

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et possède donc une primitive F qui est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$G(x) = F(2x) - F(x).$$
   Ainsi G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$
   Donc
   - si $x = 0$, $G'(x) = 2f(0) - f(0) = 1$;
   - si $x \neq 0$, $G'(x) = 2\dfrac{2x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{4x}{e^{2x}-1} - \dfrac{x(e^x+1)}{e^{2x}-1} = \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}$

   Ainsi
$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   5 pts : 1 pt pour l'existence de la primitive F, 1 pt pour le lien entre G et F, 1pt pour le caractère C^1 de G, 2 pt pour la dérivée

2. (a) On sait par ce qui précède que f est strictement décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi,
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall t \in [x,2x],\ f(x) \geqslant f(t) \geqslant f(2x) \geqslant 0.$$
   Par croissance de l'intégrale (pour tout $x \geqslant 0$ on a $x \leqslant 2x$) on obtient
$$\forall x \in [0,+\infty[, (2x-x)f(x) \geqslant \int_x^{2x} f(t)dt \geqslant (2x-x)\cdot 0$$
   ie :
$$\forall x \in [0,+\infty[, 0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$$
   Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ donc par encadrement
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$
   3pts : 1 pt pour les inégalités résultant de la décroissance et de la positivité, 1 pt pour la croissance de l'intégrale, 1 pt pour la limite

   (b) On sait par ce qui précède que f est strictement décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi,
$$\forall x \in]-\infty,0],\ \forall t \in [2x,x],\ f(2x) \geqslant f(t) \geqslant f(x).$$
   Par croissance de l'intégrale (pour tout $x \leqslant 0$ on a $2x \leqslant x$) on obtient
$$\forall x \in]-\infty,0], (x-2x)f(2x) \geqslant \int_{2x}^{x} f(t)dt \geqslant (x-2x)f(x)$$
   donc :
$$\forall x \in]-\infty,0], -G(x) \geqslant -xf(x)$$

Ainsi

$$\forall x \in]-\infty, 0], \mathrm{G}(x) \leqslant x f(x)$$

Or, $\lim_{x\to-\infty} x f(x) = -\infty$ donc par encadrement

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{G}(x) = -\infty.$$

3pts : 1 pt pour les inégalités résultant de la décroissance et de la positivité, 1 pt pour la croissance de l'intégrale, 1 pt pour la limite

3. On trouve :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de x		$-$	0		$+$		
Signe de $3-e^x$			$+$		0	$-$	
Signe de $e^{2x}-1$		$-$	0		$+$		
Signe de $\mathrm{G}'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
Variation de G	$-\infty$	$\nearrow$			$\mathrm{G}(\ln(3))$	$\searrow$	0

3 pts : 2pts pour le signe de $\mathrm{G}'(x)$, 1 pt pour les variations