# TD13-Réduction

**Exercice 1**

1. *Soient* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $f$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x - z, y, 3x - 2z).$$

   (a) *Déterminer la matrice* $A$ *de* $f$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

   (b) *Montrer que* $u$ *est une vecteur propre et préciser la valeur propre associée.*

2. *Vérifier que le vecteur* $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   *Préciser la valeur propre associée.*

**Exercice 2**

*Déterminer le spectre des matrices suivantes :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
2. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;
4. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;
5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3**

*Soit* $\psi$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi((x,y,z)) = (x + y + z, 2y + 2z, 3z).$$

1. *Déterminer la matrice* $A$ *de* $\psi$ *dans la base canonique.*
2. *Trouver le spectre de* $A$.
3. *Trouver une base de chaque sous-espace propre.*

**Exercice 4**

*Montrer que le polynôme* $P = X^2 + X - 6$ *est un polynôme annulateur de la matrice* $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *En déduire les valeurs propres de* $H$. *La matrice* $H$ *est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.*

**Exercice 5**

*Soient* $a, b, c$ *trois réels tous non nuls et*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $M^2 = 3M$ *et en déduire les valeurs propres possibles de* $M$.
2. *Déterminer le spectre de* $M$ *et, pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre associé.*
3. *La matrice* $M$ *est-elle diagonalisable ?*

**Exercice 6**

*Soient* $a, b, c$ *trois réels et* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs de* $a, b, c$ *pour lesquels la matrice* $A$ *est diagonalisable.*

**Exercice 7**

*Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :*

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (X+1)P'(X) + P(X)$$

1. *Déterminer la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de $A$ et une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $D = P^{-1}AP$.*

**Exercice 8**

*Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les valeurs propres de $A$ et ses sous-espaces propres.*
2. *En déduire que $A$ est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $D = P^{-1}AP$.*

**Exercice 9**

***Partie A** : pour tout couple de réels $(x,y)$, on définit la matrice $M(x,y)$ par :*

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

*On appelle $E$ l'ensemble des matrices $M(x,y)$ où $x$ et $y$ décrivent $\mathbb{R}$ :*

$$E = \left\{M(x,y); \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

*On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$.*

1. *Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.*
2. *Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de $A$ et déterminer les espaces propres associés. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?*
3. *Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1,-2,1)$ et telle que :*

$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. *Déterminer $P^{-1}$.*
5. *En notant $X_1$, $X_2$ et $X_3$ les trois vecteurs colonnes formant la matrice $P$, calculer $BX_1$, $BX_2$ et $BX_3$.*
*En déduire l'existence d'une matrice diagonale $D_B$ que l'on explicitera telle que :*

$$B = PD_BP^{-1}.$$

6. *En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :*

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

7. *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(x,y)$ pour que $M(x,y)$ soit inversible.*
8. *Montrer que $B^2$ est un élément de $E$. La matrice $A^2$ est-elle aussi un élément de $E$ ?*

***Partie B** : on souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.*

1. *Que vaut $X_0$ ?*
2. *Déterminer une matrice $C$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$X_{n+1} = CX_n.$$

*Déterminer ensuite deux réels $x$ et $y$ tels que $C = M(x,y)$.*

3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.*
4. *À l'aide des résultats de la partie A, exprimer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.*

**Exercice 10**

*On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*

1. *Est-ce que $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ?*
2. *Déterminer les valeurs propres de $A$ et, pour chaque valeur propre de $A$, déterminer une base du sous-espace propre associé.*
3. *En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer $P^{-1}$.*

*On appelle commutant de $A$, et on note $C_A$, l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que*

$$AM = MA.$$

*On appelle commutant de $D$, et on note $C_D$, l'ensemble des matrices $N$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que*

$$DN = ND.$$

4. *Montrer que $C_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*
5. *Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :*

$$M \in C_A \iff N \in C_D.$$

6. *Déterminer $C_D$, en utilisant les coefficients des matrices.*
7. *En déduire :*

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. *Déterminer une base de $C_A$ et la dimension de $C_A$.*