

**Exercice 1 (EML 2018, 44pts)**

1. (a) Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_i$  l'événement « le  $i$ -ème lancer donne Pile » et  $F_i$  l'événement « le  $i$ -ème lancer donne Face ».

- L'événement  $[X = 0]$  est égal à l'événement  $P_1 \cap P_2$ . Donc

$$P([X = 0]) = P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) = \frac{4}{9}.$$

- L'événement  $[X = 1]$  est égal à l'événement  $(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$ . Donc

$$\begin{aligned} P([X = 1]) &= P((F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \quad \text{car } F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ et } P_1 \cap F_2 \cap P_3 \text{ sont incompatibles} \\ &= P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(P_3) + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(P_3) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

- L'événement  $[X = 2]$  est égal à l'événement  $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$ .  
Donc

$$\begin{aligned} P([X = 2]) &= P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 \cap F_2}(P_3)P_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(P_4) + P(F_1)P_{F_1}(P_2)P_{F_1 \cap P_2}(F_3)P_{F_1 \cap P_2 \cap F_3}(P_4) \\ &\quad + P(P_1)P_{P_1}(F_2)P_{P_1 \cap F_2}(F_3)P_{P_1 \cap F_2 \cap F_3}(P_4) \text{ d'après la formule des probabilités composées} \\ &= \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

**3,5 pts : 0,5 pt pour  $[X = 0]$ , 1,5 pts pour les autres (pour avoir tous points chaque étape du calcul devait être justifiée)**

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'événement  $[X = n]$  signifie qu'il y a eu  $n + 2$  tirages ( $n$  Faces et 2 Piles), que le dernier tirage est une Pile et que le premier Pile a été obtenu lors d'un des  $n + 1$  tirages. Ainsi :

$$[X = n] = \bigcup_{i=1}^{n+1} \left( P_{n+2} \cap P_i \cap \left( \bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right).$$

Comme les événements  $\left( P_{n+2} \cap P_i \cap \left( \bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right)$  pour  $i = 1, \dots, n + 1$  sont deux à deux incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P([X = n]) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \left( P_{n+2} \cap P_i \cap \left( \bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right) \right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P\left(P_{n+2} \cap P_i \cap \left( \bigcap_{j=1, j \neq i}^{n+1} F_j \right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \\ &= (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}} \end{aligned}$$

**3pts : 1pt pour décrire l'événement  $[X = n]$ , 2 pts pour le calcul avec les justifications.**

2. (a) On a  $U(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$P(U = n) \geq P(X = n, U = n) = P_{[X=n]}(U = n)P(X = n) = \frac{1}{n+1}P(X = n) > 0.$$

Donc  $U(\Omega) = \mathbb{N}$ .

**1pt**

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sachant  $[X = n]$ , l'urne contient  $n + 1$  boules numérotées de 0 à  $n$  indiscernables. Donc la loi de  $U$  sachant  $[X = n]$  est une loi uniforme sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**2pts**

- (c) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements  $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ , on a

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P_{[X=n]}(U = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

car, d'après la question précédente, pour tout  $n < k$ ,  $P_{[X=n]}(U = k) = 0$ . Compte tenu de la question 1)b), on trouve :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) \frac{1}{n+1} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{9} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{4}{9} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n} \right) \\ &= \frac{4}{9} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{3^k} \end{aligned}$$

**3pts : 1pt pour la formule des probabilités totales utilisée correctement, 1 pt pour la justifier que la somme comme à l'indice  $k$ , 1pt pour le calcul.**

- (d)  $U$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$  converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Montrons qu'elle est convergente. On a

$$\sum_{k \geq 0} kP(U = k) = \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 0} k \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

et on reconnaît dans le membre de droite une série géométrique dérivée première de raison  $\frac{1}{3}$  (donc convergente). Par conséquent, la série à termes positifs  $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$  converge. On peut donc conclure que  $U$  possède une espérance et :

$$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour montrer que  $U$  possède une variance, il suffit de montrer que  $U$  possède un moment d'ordre 2 c'est-à-dire que  $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$  converge absolument. Cette série est à termes positifs donc il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad k^2 P(U = k) &= k^2 \frac{2}{3^{k+1}} = (k(k-1) + k) \frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{3^3} k(k-1) \left( \frac{1}{3} \right)^{k-2} + \frac{2}{3^2} k \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la série  $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$  est combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison  $\frac{1}{3}$  toutes deux convergentes (car  $0 \leq \frac{1}{3} < 1$ ). Ainsi la série converge et :

$$E(U^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) = \frac{2}{3^3} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1.$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens on trouve

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**Remarque :** on pouvait aussi remarquer que  $U + 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{2}{3}$ .

**6pts : 1pt pour rappeler ce que signifie avoir une espérance et 1,5pt pour justifier la convergence et trouver la somme. Pour la variance : 1 pt pour la formule de Koenig-Huygens (donc dire qu'il faut un moment d'ordre 2), 2 pts pour la convergence et la somme de la série  $\sum_{k \geq 0} k^2 P(U = k)$  et 0,5 pt pour le résultat final.**

3. (a) On a toujours  $0 \leq U \leq X$  donc  $V(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$P(V = n) \geq P(X = 2n, U = n) = P_{[X=2n]}(U = n)P(X = 2n) > 0.$$

Donc  $V(\Omega) = \mathbb{N}$ .

**1pt : il fallait mentionner que  $U \leq X$**

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\begin{aligned} P_{[X=n]}(V = k) &= P_{[X=n]}(X - U = k) = P_{[X=n]}(n - U = k) = P_{[X=n]}(U = n - k) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n - k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, sachant  $[X = n]$ ,  $V$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

**2pts : 1pt pour le lien entre  $P_{[X=n]}(V = k)$  et  $P_{[X=n]}(U = n - k)$  et 1pt pour le résultat.**

- (c) Le même calcul qu'en 2.c) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

**1pt**

4. Soit  $(n, k) \in (\mathbb{N})^2$ . Alors

$$\begin{aligned} P(U = n, V = k) &= P(U = n, X - U = k) = P(U = n, X = n + k) \\ &= P_{[X=n+k]}(U = n)P(X = n + k) \\ &= \frac{1}{n + k + 1} \times \frac{4(n + k + 1)}{3^{n+k+2}} \\ &= \frac{4}{3^{n+k+2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 2.c et 3.c :

$$P(U = n)P(V = k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout  $(n, k) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$  on a

$$P(U = n, V = k) = P(U = n)P(V = k).$$

Les variables aléatoires  $U$  et  $V$  sont donc indépendantes.

**2,5pts : 1pt pour  $P(U = n, V = k)$ , 1pt pour  $P(U = n)P(V = k)$  et 0,5pt pour la conclusion**

5. D'après la question précédente,  $\text{Cov}(U, V) = 0$  car la covariance de deux variables aléatoires discrètes indépendantes est toujours nulle. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on a

$$\text{Cov}(X, U) = \text{Cov}(U + V, U) = \text{Cov}(U, U) + \text{Cov}(V, U) = V(U) + \text{Cov}(U, V) = V(U) = \frac{3}{4}.$$

**2pts : 1pt pour  $\text{Cov}(U, V)$ , 1 pour le calcul de  $\text{Cov}(X, U)$  avec justifications.**

6. (a)
- ```
function x=simule_X()
    nb_pile=0
    nb_face=0
    while nb_pile<2
        if rand()<2/3
            nb_pile=nb_pile+1
```

```

else
    nb_face=nb_face+1
end
end
x=nb_face
endfunction

```

**4pts : 1pt pour la structure de fonction, 1 pt pour la boucle while, 1pt pour la structure conditionnelle, 1p pour le reste (initialisation des variables etc)**

(b) La fonction mystere renvoie la fréquence de victoire du joueur A lors de 10 000 parties.

**1pt**

(c) En ordonnée, on lit la probabilité que A gagne : elle est d'environ  $\frac{1}{2}$  lorsque que  $p$  vaut environ 0,8.

**1pt.**

7. (a)  $Z$  est le rang du premier Pile et suit donc une loi géométrique de paramètre  $p$ . Ainsi

$$E(Z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**2 pts : 1pt pour la loi; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance**

(b) On a  $Y + 1 = Z$  donc  $Y$  possède une espérance et une variance :

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad V(Y) = V(Z - 1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

**2 pts : 1pt pour  $Y + 1 = Z$ ; 0,5pt pour l'espérance et 0,5 pt pour la variance**

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) = P(Z \geq n + 1) = 1 - P(Z < n + 1) \\
 &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n [Z = i]\right) \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^n P(Z = i) \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^n p(1-p)^{i-1} \\
 &= 1 - p \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} \\
 &= (1-p)^n
 \end{aligned}$$

**2 pts : 1pt pour se ramener à un calcul de somme et 1pt pour le résultat.**

8. (a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements  $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ , on a

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, n \leq Y) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(n \leq Y) \quad \text{car les joueurs sont indépendants}
 \end{aligned}$$

**1 pt (il fallait faire appel explicitement à la formule des probabilités totales)**

(b) D'après les questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(n \leq Y) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{4}{3^{n+2}} \times (1-p)^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
 &= \frac{4}{9} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \right) \\
 &= \frac{4}{9} \left( \frac{1-p}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
 &= \frac{4}{9} \left( \frac{1-p}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1-p}{3}} \right) \\
 &= \frac{4}{9} \left( \frac{1-p}{3} \times \frac{9}{(2+p)^2} + \frac{3}{2+p} \right) \\
 &= \frac{4}{(2+p)^2}
 \end{aligned}$$

**2 pts**

(c) Le jeu est équilibré lorsque la probabilité que A gagne vaut  $\frac{1}{2}$ . Or, la probabilité que A gagne est  $P(X \leq Y)$ . Ainsi, le jeu est équilibré si et seulement si  $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$ . Or,

$$\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \iff 8 = (2+p)^2 \iff p^2 + 4p - 4 = 0 \iff p = -2 + 2\sqrt{2} \text{ ou } p = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Comme  $p > 0$ , le jeu est équilibré si et seulement si  $p = -2 + 2\sqrt{2}$  (on remarque que  $-2 + 2\sqrt{2}$  vaut environ 0,8 donc cohérent avec la question précédente).

**2 pts : 1pt pour la mise en équation et 1pt pour la résolution**

## Exercice 2 (d'après ecricome 2019, 32pts+2pts bonus)

### Partie A

1. (a) Soient  $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned}
 f((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) &= f((x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')) \\
 &= \left( \frac{-(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') + z + \lambda z'}{3}, \frac{-(x + \lambda x') - (y + \lambda y') - 2(z + \lambda z')}{3}, \frac{x + \lambda x' + y + \lambda y' + 2(z + \lambda z')}{3} \right) \\
 &= \left( \frac{-x + 2y + z}{3}, \frac{-x - y - 2z}{3}, \frac{x + y + 2z}{3} \right) + \lambda \left( \frac{-x' + 2y' + z'}{3}, \frac{-x' - y' - 2z'}{3}, \frac{x' + y' + 2z'}{3} \right) \\
 &= f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z'))
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $((x, y, z), (x', y', z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$f((x, y, z) + \lambda(x', y', z')) = f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z')).$$

Ainsi  $f$  est linéaire.

**3pts : 1pt pour la caractérisation de la linéarité, 2 pts pour le calcul**

(b) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\iff f((x, y, z)) = (0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_3 = -L_2 \\
&\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ker(f) = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, -1, 1)).$$

Le vecteur  $(-1, -1, 1)$  est un vecteur générateur de  $\ker(f)$  non nul donc c'est une base de  $\ker(f)$ . En particulier,  $\dim(\ker(f)) = 1$  et  $f$  n'est pas injective.

**4pts : 1pt pour la première équivalence, 1 pt pour la résolution du système, 1 pt pour la base et la dim, 1 pt l'injectivité.**

(c) D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f), \quad \text{ie } 3 = 1 + \text{rg}(f).$$

Ainsi  $f$  est de rang 2. Comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ , on a donc  $(\text{Im})(f) \neq \mathbb{R}^3$  donc  $f$  n'est pas surjective.

**2 pts : 1 pt pour le théorème du rang, 1 pt pour le rang et la non surjectivité**

(d) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned}
f^2((x, y, z)) &= \frac{1}{3} f((-x + 2y + z, -x - y - 2z, x + y + 2z)) \\
&= \frac{1}{3} ((-x + y + z) f((1, 0, 0)) + (-x - y - 2z) f((0, 1, 0)) + (x + y + 2z) f((0, 0, 1))) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{3} ((-x + y + z) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (-x - y - 2z) \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + (x + y + 2z) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)) \\
&= \frac{1}{9} ((-x + y + z)(-1, -1, 1) + (-x - y - 2z)(2, -1, 1) + (x + y + 2z)(1, -2, 2)) \\
&= \frac{1}{9} ((x - y - z, x - y - z, -x + y + z) + (-2x - 2y - 5z, x + y + 2z, -x - y - 2z) \\
&\quad + (x + y + 2z, -2x - 2y - 4z, 2x + 2y + 4z)) \\
&= \frac{1}{9} (-3y - 3z, -3y - 3z, 3y + 3z) \\
&= \frac{1}{3} (-y - z, -y - z, y + z)
\end{aligned}$$

et, en remarquant que  $\frac{1}{3}(-y - z, -y - z, y + z) = \frac{x+y}{3}(-1, -1, 1) \in \ker(f)$ , on trouve

$$f^3((x, y, z)) = f(f^2((x, y, z))) = f\left(\frac{x+y}{3}(-1, -1, 1)\right) = \frac{x+y}{3} f((-1, -1, 1)) = (0, 0, 0).$$

Ainsi

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^2((x, y, z)) = \left(\frac{-y-z}{3}, \frac{-y-z}{3}, \frac{y+z}{3}\right) \quad \text{et} \quad f^3((x, y, z)) = (0, 0, 0).$$

**4pts : 2pts pour le calcul de  $f^2$  et 2pts pour le calcul de  $f^3$**

2. Soit  $g$  un tel endomorphisme de  $E$ . On remarque que

$$g(e_1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_1); \quad g(e_2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f(e_2); \quad g(e_3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = f(e_3).$$

Ainsi,  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  qui coïncident sur la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Donc  $f = g$ .

**2pts**

3. (a) Montrons que  $\mathcal{B}'$  est une famille libre. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \text{ et } L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille  $\mathcal{B}'$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ . Comme son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^3$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**3pts : 2pts pour le système et 1pt pour l'argument de cardinal.**

- (b) On trouve :

$$f(e'_1) = (0, 0, 0) \quad ; \quad f(e'_2) = e'_1 \quad ; \quad f(e'_3) = e'_2.$$

**1 pt**

- (c)

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}'}((0, 0, 0), e'_1, e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**2 pts**

## Partie B

1. Comme par hypothèse  $g \circ g = f$  alors

$$g \circ f = g \circ g \circ g = f \circ g^2 = f \circ g.$$

**1pt**

2. (a) Calculons  $f(g(e'_1))$  :

$$f(g(e'_1)) = (f \circ g)(e'_1) = (g \circ f)(e'_1) = g(f(e'_1)) = g((0, 0, 0)) = (0, 0, 0).$$

Donc  $g(e'_1)$  appartient au noyau de  $f$ . Or, d'après la question 1.a de la partie A, on sait que  $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$ . Ainsi,  $g(e'_1)$  appartient  $\text{Vect}(e'_1)$  : il existe donc  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $g(e'_1) = ae'_1$ .

**2pts : 1pt pour le calcul et 1pt pour l'existence du  $a$**

- (b) Calculons  $f(g(e'_2) - ae'_2)$  :

$$\begin{aligned} f(g(e'_2) - ae'_2) &= f(g(e'_2)) - af(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e'_2)) - ae'_1 \quad \text{car } f \circ g = g \circ f \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= g(e'_1) - ae'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } g(e'_1) = ae'_1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $g(e'_2) - ae'_2$  appartient à  $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$ . Donc, il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$ , c'est-à-dire

$$g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

**3pts : 2pt pour le calcul (avec justification) et 1pt pour l'existence du  $b$**

- (c) Comme  $f \circ g = g \circ f$ , on a

$$f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = g(e'_2) = ae'_2 + be'_1.$$

Calculons  $f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2)$  :

$$\begin{aligned} f(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2) &= f(g(e'_3)) - af(e'_3) - bf(e'_2) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= g(f(e'_3)) - ae'_2 - be'_1 \quad \text{car } f \circ g = g \circ f, \quad f(e'_3) = e'_2 \quad \text{et } f(e'_2) = e'_1 \\ &= g(e'_2) - ae'_2 - be'_1 \\ &= 0 \quad \text{car } g(e'_2) = ae'_2 + be'_1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$  appartient à  $\ker(f) = \text{Vect}(e'_1)$ .

**1pt**

(d) Donc, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$ , c'est-à-dire

$$g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.$$

**1pt**

3. Par linéarité de  $g$ , on trouve

$$g^2(e'_1) = g(g(e'_1)) = g(ae'_1) = ag(e'_1) = a^2e'_1 \quad ; \quad g^2(e'_2) = g(be'_1 + ae'_2) = bg(e'_1) + ag(e'_2) = 2abe'_1 + a^2be'_2$$

et

$$g^2(e'_3) = g(ae'_3 + be'_2 + ce'_1) = ag(e'_3) + bg(e'_2) + cg(e'_1) = (b^2 + 2ac)e'_1 + 2abe'_2 + a^2e'_3.$$

Comme on a supposé que  $g \circ g = f$  (c'est-à-dire  $g^2 = f$ ), on a donc

$$a^2e'_1 = g^2(e'_1) = f(e'_1) = (0, 0, 0) \quad ; \quad 2abe'_1 + a^2be'_2 = g^2(e'_2) = f(e'_2) = e'_1$$

donc, puisque  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est libre, on en déduit que

$$a = 0 \quad \text{puis} \quad e'_1 = 2abe'_1 + a^2be'_2 = (0, 0, 0).$$

Ceci est une contradiction. Ainsi, il n'existe pas d'endomorphisme  $g$  de  $E$  vérifiant  $g \circ g = f$ .

**5pts : 3pts pour les images par  $g^2$ , 2pts pour la conclusion**

## Exercice 3 (ecricome 2015, 47pts)

### I - Une loi exponentielle et une suite (26,5pts)

1. (a) Voir cours de première année.

**2pts : 1pt pour la densité et 1pt pour espérance et variance**

(b) Soit  $f$  la densité définie à la question précédente. Alors, pour tout réel  $x$  on a :

$$\begin{aligned} F(x) = P([X \leq x]) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 dt & \text{si } x < 0, \\ \int_0^x e^{-t} dt & \text{si } x \geq 0. \end{cases} & \text{car } \forall t < 0, f(t) = 0 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**2,5 pts : 1pt pour faire apparaître la définition de  $F$ , 0,5pt pour  $F(x)$ ,  $x < 0$  et 1pt pour  $F(x)$  avec  $x \geq 0$**

2. (a) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^x - x - 1.$$

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = e^x - 1.$$

- Pour tout  $x \in ]-\infty, 0]$ ,  $\varphi' \leq 0$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$  donc  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 0]$ .
- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $\varphi' \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $x = 0$  donc  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$$

avec égalité si et seulement si  $x = 0$ . De manière équivalente, pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \geq x + 1$$

avec égalité si et seulement si  $x = 0$ .

**4pts : 1pt pour penser à étudier la fonction, 1 pt pour la dérivabilité et le calcul de  $\varphi'$ , 1 pt pour les variations, 1pt pour la conclusion (le cas d'égalité devait être rédigé soigneusement)**

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $u_n > 0$ .

- Initialisation :  $u_1 = 1 > 0$  donc la propriété est vraie au rang 1.



- Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang rang  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . Par hypothèse de récurrence,  $u_n > 0$  donc, par croissance stricte de la fonction exponentielle, on a  $e^{-u_n} < 1$  puis  $1 - e^{-u_n} > 0$ . Ainsi

$$u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n} > 0.$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n > 0$ .

**2pts**

(c) D'après la définition de la suite :

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
    U(n+1) = 1 - exp(-U(n))
end
plot(U, "+")
```

**1 pt**

(d) On peut conjecturer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et converge vers 0.

**1pt**

(e) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n < 0$$

d'après l'inégalité de la question 2)a) appliquée avec  $x = -u_n$ . Cela montre que la suite est décroissante.

**1pt**

(f) D'après les questions 2)b) et 2)e), la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, on peut conclure que cette suite converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Comme la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\ell$  est un point fixe de  $F$ . Remarquons que pour tout  $x < 0$ ,  $F(x) = 0$  donc  $x$  n'est pas un point fixe de  $F$ . De plus, pour tout  $x \geq 0$ ,

$$F(x) = x \iff 1 - e^{-x} = x \iff 1 - x = e^{-x} \iff -x = 0$$

d'après la question 2)a). Ainsi, l'unique point fixe de  $F$  est 0 et par conséquent  $\ell = 0$ .

**2pts : 1pt pour le théorème de convergence monotone, 1pt pour trouver la limite (il fallait faire appel à la continuité de  $F$  où de  $\exp$ )**

(g) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'inégalité de la question 2(a) appliquée avec  $x = u_n$ , on a

$$e^{u_n} \geq 1 + u_n$$

puis en passant à l'inverse

$$e^{-u_n} \leq \frac{1}{1 + u_n}.$$

Ainsi

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} \geq 1 - \frac{1}{1 + u_n} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

En passant à l'inverse dans cette inégalité on trouve

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} = \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Remarquons que tous les passages à l'inverse sont licites car les quantités manipulées sont strictement positives d'après la question 2)b).

**3pts : 2pts pour la première inégalité, 1pt pour la deuxième**

(h) • Initialisation :  $u_1 = 1$  donc la propriété est vraie au rang 1.  
 • Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang rang  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ . Par hypothèse de récurrence,  $u_n \geq \frac{1}{n}$  donc, par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a  $\frac{1}{u_n} \leq n$ . D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + n$$

puis en repassant à l'inverse

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Ici encore tous les passages à l'inverse sont rendus licites par la question 2)b). La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n \geq \frac{1}{n}$ .

**3pts.**

- (i) Le vecteur-ligne  $S$  contient les 100 premiers termes de la suite des sommes partielles de la série de terme général  $u_n$ . La courbe en trait plein est la courbe représentative de la fonction logarithme, on peut donc conjecturer que la série de terme général  $u_n$  diverge.

**2pts**

- (j) Les séries  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann divergente. D'après la question 2)h) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge aussi.

**3pts : 1pt pour dire que les séries sont à termes positifs, 1pt pour la divergence de la série de Riemann, 1pt pour conclure par comparaison.**

## II - Une fonction et une variable aléatoire à densité (20,5pts)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

### 1. Étude de la fonction $g$ .

- (a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  (fonction constante) et sur  $]0, +\infty[$  (produit de fonctions dérivables sur  $]0, +\infty[$ ). On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x).$$

Ainsi  $g$  est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

Donc  $g$  n'est pas dérivable en 0.

**2,5pts : 0,5pt pour la dérivabilité sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ , 1pt pour la continuité en 0, 1 pt pour le reste**

- (b) Cependant,  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  (elle est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et dérivable à droite en 0 d'après les questions précédentes) et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  on a

$$g'(x) = e^{-x}(1 - x).$$

Ainsi :

| $x$              | 0 | 1        | $+\infty$ |
|------------------|---|----------|-----------|
| Signe de $g'(x)$ | + | 0        | -         |
| Variation de $g$ | 0 | $e^{-1}$ | 0         |

Pour la limite en 0, il s'agit d'une croissance comparée.

**3pts : 2pts pour l'étude de fonction, 1pt pour la limite**

- (c) La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ . De plus, pour tout  $x \in \mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ , on a

$$g''(x) = e^{-x}(x - 2).$$

Par conséquent,

$$g''(x) \geq 0 \iff x \geq 2.$$

La fonction  $g$  est donc convexe sur  $[2, +\infty[$  et concave sur  $]0, 2]$ .

**2pts : 1pt pour la caractérisation des fonctions convexes de classe  $\mathcal{C}^2$ , 1pt pour l'étude du signe de  $g''$  et la conclusion**

(d) **2pts pour le graphique**

2. (a) La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  positive et  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = E(X) = 1$ . Donc  $g$  est une densité de probabilité.

**1 pt**

- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$  :

$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = 0$$

car  $g(t) = 0$  pour tout  $t < 0$ .

- Si  $x \geq 0$  :

$$G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt = \int_0^x te^{-t}dt.$$

En faisant une intégration par partie, on trouve

$$G(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1+x).$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**2,5pts : 1pt pour écrire**  $G(x) = P(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$ , **0,5pt pour le calcul pour**  $x < 0$ , **1pt pour l'IPP**

- (c)  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et sur  $] -\infty, 0[$ . De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de  $G$  en 0. Comme  $G(0) = 0$  on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}(1+x)}{x} = 0$$

car  $x \mapsto 1 - e^{-x}(1+x)$  est dérivable en 0 et sa dérivée en zéro vaut 0. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{G(x) - G(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x} = 0$$

donc  $G$  est dérivable en 0 et  $G'(0) = 0$ . Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G'(x) = 0 = G'(0)$$

donc  $G'$  est continue en 0. Finalement,  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**3,5pts : 0,5pt pour l'étude sur**  $\mathbb{R}^*$ , **2pts pour la dérivabilité en 0**, **1 pt pour la continuité en 0 de**  $G'$

- (d) Soit  $A > 0$ . Par intégration par partie, on a

$$\int_0^A tg(t)dt = \int_0^A t^2 e^{-t}dt = [-t^2 e^{-t}]_0^A - \int_0^A 2t \times (-e^{-t})dt = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A g(t)dt.$$

**1pt**

- (e) La variable aléatoire  $Y$  admet une espérance si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$  converge absolument. Comme  $g(t) = 0$  pour tout  $t < 0$ ,  $Y$  possède une espérance si  $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$  converge absolument. Or, pour tout  $t \geq 0$ ,  $tg(t) \geq 0$  donc il suffit de montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} tg(t)dt$  converge. Par croissance comparée et d'après la question 2)a)

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -A^2 e^{-A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$$

Donc, d'après la question précédente

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A tg(t)dt = 2.$$

Ainsi,  $Y$  possède une espérance et  $E(Y) = 2$ .

**3pts : 1pt pour mentionner l'absolue convergence**, **1pt pour étudier l'absolue convergence**, **1pt pour le calcul d'espérance**.

## Problème (40pts)

1. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , les fonctions  $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$  et  $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$  sont continues sur  $[0, 1]$  donc les intégrales  $I_n$  et  $J_n$  existent.

**1pt**

2.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[ \frac{-1}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - I_0 \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 - \frac{1}{2} \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**3pts : 1pt pour  $I_0$  et 2pts pour  $I_1$**

3. (a) Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 x^n \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \quad \text{car } x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

**2pts**

- (b) La relation précédente avec  $n = 0$  donne

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{1}{1+0} = 1$$

donc

$$I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - \frac{1}{2} - 2\ln(2) = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

**1pt**

- (c) Compte tenu de la relation de récurrence obtenue en 3)a) :

```
n=input('donnez une valeur pour n: ')
a=1/2
b=log(2) - 1/2
for k=2: n
    aux = a
    a=b
    b=1/(k-1) - 2*a - aux
end
disp(b)
```

**2pts**

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $(1+x)^2 \geq 1$  donc

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

**2pts**

- (b) On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc par encadrement, on déduit de la question précédente que la suite  $(I_n)$  converge vers 0.

**1pt**

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx = \left[ x^n \frac{-1}{x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \frac{-1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

**1pt**

6. (a) On a

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n \cdot \frac{1+x}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

**2pts**

- (b) En utilisant la relation ci-dessus pour  $n = 0$ , on trouve :

$$J_0 + J_1 = 1 \quad \text{donc} \quad J_1 = 1 - \ln(2).$$

**1pt**

7. En utilisant les questions 5) et 6), on trouve

```
n=input('donnez une valeur pour n: ')
J=log(2)
for k=1: n-1
    J=1/k-J
end
I=n*J-1/2
disp(I)
```

**2pts**

8. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = (-1)^n \left( \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = J_n$ .

- Initialisation :  $v_1 = (-1)^1 \left( \ln(2) - \frac{(-1)^0}{1} \right) = 1 - \ln(2) = J_1$  et la propriété est donc vraie au rang 1.

- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ . Remarquons que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} + v_n &= (-1)^{n+1} \left( \ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + (-1)^n \left( \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= (-1)^n \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= (-1)^n \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, d'après la question 6)a), on a

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1} = J_n + J_{n+1}$$

et comme par hypothèse de récurrence  $u_n = J_n$ , on en déduit que  $J_{n+1} = u_{n+1}$ . Ainsi la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = v_n = (-1)^n \left( \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

**3pts : 1pt pour les étapes de la récurrence, 2pts pour le calcul dans l'hérédité**

9. (a) D'après la question 5), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \frac{1}{n+1} \left( I_{n+1} + \frac{1}{2} \right).$$

D'après la question 4),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  donc on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

**1pt**

- (b) Par continuité de la valeur absolue en 0 et la question précédente, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

Cela montre que la série de terme général  $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$  converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

**1pt**

- (c) D'après la question 5), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = \frac{1}{n+1} \left( I_{n+1} + \frac{1}{2} \right).$$

Soit  $\alpha > 0$ . Alors  $J_n$  est équivalent à  $\frac{1}{\alpha n}$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n J_n = 1.$$

Or

$$\alpha n J_n = \frac{\alpha n}{n+1} \left( I_{n+1} + \frac{1}{2} \right)$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n J_n = \frac{\alpha}{2}$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n J_n = 1$  si et seulement si  $\alpha = 2$ . Donc  $J_n$  est équivalent à  $\frac{1}{2n}$  en  $+\infty$ .

**2pts**

10. (a) On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = (-1)^n J_n$  donc par compatibilité des équivalents par produit, on trouve

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

**1pt**

(b) On a  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  donc est convergente d'après la question 9)b). est convergente.

Comme les séries  $\sum_{n \geq 1} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n}$  ne sont pas à termes positifs (ni de signe constant), on ne peut rien conclure sur la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

**2pts**

11. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k &= (k+1) \left( \ln 2 - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \right) - k \left( \ln 2 - \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} \right) + (-1)^k \\ &= \ln(2) + k \left( \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \right) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} + (-1)^k \\ &= \ln(2) - k \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} + (-1)^k \\ &= \ln(2) - k \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{i-1}}{i} - \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^k \\ &= u_k - k \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^k \\ &= u_k \end{aligned}$$

**2pts**

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k) \\ &= \sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \quad \text{par télescopage} \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 + (-1) \times \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \\ &= (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2} (1 - (-1)^n)$$

**2pts**

(c) De la question précédente, on déduit que

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2} (1 - (-1)^{2n}) = (2n+1)u_{2n+1} - u_1.$$

Or d'après la question 10)a), on a

$$u_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} = -\frac{1}{2(2n+1)}$$

donc par compatibilité des équivalents avec le produit

$$(2n+1)u_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = -\frac{1}{2}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - u_1 = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2} \left( 1 - (-1)^{2n+1} \right) = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - 1.$$

Or d'après la question 10)a), on a

$$u_{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)} = \frac{1}{2(2n+2)}$$

donc par compatibilité des équivalents avec le produit

$$(2n+2)u_{2n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

En particulier,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+2)u_{2n+2} = \frac{1}{2}$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - u_1 - 1 = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

D'après le résultat admis dans l'énoncé, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

**5pts : 2 pts pour la limite de  $(S_{2n})$ , 2pts pour la limite de  $(S_{2n+1})$  et 1pt pour la conclusion**

12. On a montré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} \right) = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Or, en 9)a) on a montré que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \ln(2).$$

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\ln 2 - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Au final, on a prouvé

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

**3pts**