# 4 Correction des tests

**Correction du test 1** (*Retour à l'énoncer.*)

*D'après la définition de « o », $f(x) = \underset{x \to a}{o}(0)$ si et seulement si il existe un voisinage $V$ de $a$ et une fonction définie sur $V$ telle que*

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = \epsilon(x) \times 0$$

*et $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.*

*Autrement, une fonction $f$ est un petit $o$ de $0$ au voisinage de $a$ si et seulement si $f$ est nulle au voisinage de $a$.*

**Correction du test 2** (*Retour à l'énoncer.*)

*Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *On a*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \sqrt{x} \times f(x)$$

*et $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. Donc $g(x) = \underset{x \to 0}{o}\big(f(x)\big)$.*

2. *D'autre part,*

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times g(x)$$

*et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\big(g(x)\big)$.*

**Correction du test 3** (*Retour à l'énoncer.*)

1.

- *Au voisinage de $-\infty$.*
  *La fonction $f$ ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$ et*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = 0.$$

  *Donc $g(x) = \underset{x \to -\infty}{o}\big(f(x)\big)$.*

- *Au voisinage de $0$.*
  *La fonction $g$ ne s'annule pas au voisinage de $0$ et*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2 + 2x - 1} = 0.$$

  *Donc $f(x) = \underset{x \to 0}{o}\big(g(x)\big)$.*

2. *En effectuant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on trouve*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln(X)}{e^X} = 0.$$

*Ainsi $g(x) = \underset{x \to 0^+}{o}(f(x))$.*

**Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)**

*Soit* $x>0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3^x}}{\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{\ln x}}=\frac{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}\right)}{\frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1\right)}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1}.$$

*Or, par croissance comparée, on a*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}=0$$

*donc*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x}+\frac{\ln(x)}{2^x}+1}=1.$$

*Comme par croissance comparée, on a aussi* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, *on obtient*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

*Ainsi* $f(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$.

**Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)**

1. *On a*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2+1}=0$$
*donc* $x=\underset{x\to+\infty}{o}(x^2+1)$ *et* $x=\underset{x\to+\infty}{o}(-x^2+1)$.
2. *Comme* $x^2+1+(-x^2+1)=2$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty}x\neq 0$, $x\mapsto x$ *n'est pas négligeable devant* $x\mapsto x^2+1+(-x^2+1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

**Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)**

1. *Pour tout* $x>0$, *on a*
$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}}=x^2+1.$$
*Donc*
$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}}=1.$$
*D'après la caractérisation de la relation d'équivalence,* $\frac{x^2+1}{x^5}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^5}$.
2. *Pour tout* $x>0$, *on a*
$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}}=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}.$$
*Donc*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}}=1.$$
*D'après la caractérisation de la relation d'équivalence,* $\frac{x^2+1}{x^5}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^3}$.

**Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)**

1. *Soit* $x>0$.
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+\sqrt{x}}{x+\ln(x)}=\frac{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)}=\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{\ln(x)}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\ln(x)}{x}}.$$
*Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ *alors*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\ln(x)}{x}}=1$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) - x = \ln(x).$$

Par croissance comparée, on a donc

$$g(x) - x = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x) - x).$$

En particulier, $f(x) - x$ n'est pas équivalent à $g(x) - x$ au voisinage de $+\infty$.

**Correction du test 8** (***Retour à l'énoncer.***)

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e$ donc en particulier

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e.$$

Ainsi $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$ ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

**Correction du test 9** (***Retour à l'énoncer.***)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés

1. • Au voisinage de $0$ : par équivalents usuels

$$2x^2 + 1 \underset{x\to0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to0}{\sim} 1.$$

Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc

$$f_1(x) \underset{x\to0}{\sim} 1.$$

• Au voisinage de $-\infty$ : par équivalents usuels

$$2x^2 + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x^2 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to-\infty}{\sim} x.$$

Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc

$$f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x} = 2x.$$

2. • Au voisinage de $0^+$. Commençons par étudier la limite en $0^+$ de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$. Par continuité de la racine carrée, on a

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = 0.$$

Or, par équivalent usuel, on sait que $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. Donc, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$, on trouve par composition des limites :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{u\to0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Ainsi $f_2(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$.

Cherchons maintenant un équivalent simple de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$ au voisinage de $0$. Pour tout $x \geqslant 0$ on a, en multipliant par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1} - (\sqrt{x} + 1) &= \frac{x + 1 - (\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1}.\end{aligned}$$

*Or* $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1=2$ *donc* $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1\underset{x\to 0^+}{\sim}2$ *et par compatibilité avec le quotient on obtient :*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{-2\sqrt{x}}{2}=-\sqrt{x}.$$

*Finalement, par transitivité de la relation d'équivalence :*

$$f_2(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\sqrt{x}.$$

- *Au voisinage de* $1$. *Commençons par étudier la limite en* $1$ *de* $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1$. *Par continuité de la racine carrée, on a*

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1=\sqrt{2}-2.$$

*Donc par continuité de la fonction exponentielle, on a*

$$\lim_{x\to 1}f_2(x)=e^{\sqrt{2}-2}-1.$$

*Comme* $e^{\sqrt{2}-2}-1\neq 0$, $f_2(x)\underset{x\to 1}{\sim}e^{\sqrt{2}-2}-1$.

**Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)**

1. *Il s'agit d'un DL usuel (* $(1+x)^{-1}$*) donc*

$$g(x)=1-x+\frac{-1(-1-1)}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)=1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

*On peut aussi retrouver le résultat avec la formule de Taylor-Young. La fonction* $g$ *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *au voisinage de* $0$. *D'après la formule de Taylor-Young,* $g$ *possède donc un DL à l'ordre* $2$ *au voisinage de* $0$ *et plus précisément :*

$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

*On a*

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad g'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\quad \text{et}\quad g''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

*donc en particulier,* $g'(0)=-1$ *et* $g''(0)=2$. *Finalement*

$$g(x)=1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. *Remarquons que* $h(x)=e^x\times g(x)$. *On sait que* $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *donc avec la question précédente on obtient :*

$$\begin{aligned}h(x)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\times(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))\\&=1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)).\end{aligned}$$

*Or,* $\underset{x\to 0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *(si vous n'êtes pas convaincu, montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2). Ainsi*

$$\begin{aligned}h(x)&=1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\&=1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x-x^2+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\&=1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\\&=1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

*(si vous n'êtes pas convaincu que* $\underset{x\to 0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\underset{x\to 0}{o}(x^2)=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$, *montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2).*

*Par unicité des coefficients du DL d'ordre 2, on en conclut que le DL d'ordre 2 de $h$ au voisinage de 0 est*

$$h(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

*On pouvait aussi utiliser la formule de Taylor-Young!*

**Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)**

*On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Il s'agit de montrer que $\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}$ possède une limite finie quand $x$ tend vers 0. Or, pour tout $x \neq 0$, comme*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

*on a*

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x-1)} &= \frac{x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + 1}{x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \quad \text{d'après les règles de la méthode 2} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad \text{d'après la caractérisation de la relation d'équivalence} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*Donc*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

*Ainsi, $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.*

2. *Par opérations sur les fonctions dérivables $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc avec, la question précédente, on conclut que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*Pour montrer que $f'$ est continue en 0, il s'agit de montrer que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

*En utilisant le DL de l'exponentielle à l'ordre 2 en 0, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1\right)^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2}
\end{aligned}$$

*Or* $x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *donc*

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2\left(1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)}{\left(1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2}\end{aligned}$$

*Comme*

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) = -\frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 = 1$$

*on en déduit que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)}{\left(1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

*Ainsi,* $f'$ *est continue en* $0$*.*