TD8-Rappels sur les variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Un lot contient 10 pièces dont 3 défectueuses. On tire simultanément et au hasard 2 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise.

1. *Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.*
   (a) *Reconnaître la loi de X_1.*
   (b) *En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.*
2. *Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.*
   (a) *Déterminer la loi de X_2.*
   (b) *Calculer $E(X_2)$.*

Exercice 3

Un joueur lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Il gagne 1 euro s'il tombe sur un nombre pair et rien sinon. On note X la variable aléatoire qui compte les gains du joueur. Reconnaître la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

Soit $X \to \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. *Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k) = (1-p)^k$.*
2. *En déduire que $\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\quad P_{[X>l]}(X > k+l) = P(X > k)$.*

Exercice 5

Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.

1. $Y = n - X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
2. $Y = 2^X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
3. $Y = \frac{1}{X+1}$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 6 (*Ecricome 2013*)

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule ***sans remise*** *dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule* ***avec remise*** *dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.*
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné : ≪ noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche ≫ alors :

- *A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;*
- *l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;*
- *B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;*
- *X vaut 1 et Y vaut 4.*

1. *Dans cette question, on suppose que $b = n = 2$. On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.*
   (a) *Donner les probabilités des évènements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.*
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de X.*
   (c) *Montrer que la probabilité de l'évènement $[Y = 0]$ est donnée par :*
   $$P([Y=0]) = \frac{1}{2}.$$
   (d) *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer les probabilités suivantes :*
   $$P([X=0] \cap [Y=i]) \quad ; \quad P([X=1] \cap [Y=i]) \quad ; \quad P([X=2] \cap [Y=i]).$$
   (e) *En déduire la loi de Y.*
   Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y=i])$ en fonction de i, vérifier que : $\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i]) = 1$.

(f) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

2. On se place maintenant dans le cas général.

(a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité $P([X = k])$ puis vérifier que :

$$P([X = k]) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

(b) Utiliser la question qui précède pour justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.

Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathcal{S}) \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}.$$

(c) Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{N} k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$

.

(d) À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n - X$ est donnée par :

$$E(n - X) = \frac{nb}{b+1}.$$

En déduire l'espérance $E(X)$ de X .

(e) Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante : $P([X = k] \cap [Y = i])$.

(f) Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1} \right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

(g) Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E(Y) = \dfrac{bn}{b^2 - 1}$.

Exercice 7 (*EML 2009*)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$; $\quad 0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a) Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

(b) En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.On note
   - X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul i, on note :
   - B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
   - N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

(a) i. Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.

ii. Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.

iii. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

(b) i. Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1))$.
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$)

ii. En déduire : $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

iii. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

(c) Donner la loi de Z et son espérance.

(d) Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.

(e) Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\operatorname{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.