

Chapitre 9 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F désigneront des espaces vectoriels et on notera $+$ et \cdot les lois de composition interne et externe associées (cette notation ne fait pas la distinction entre les lois de E et les lois de F).

1 Applications linéaires

1.1 Généralités

Définition 1 (Application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F .

On dit que f est **linéaire** si

- $\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v),$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$

Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme** de E .

Remarque 1

Une application linéaire est donc une application qui respecte la structure d'espace vectoriel.

Notation 1

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Exemple 1

1. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \rightarrow 3x$ est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (c'est un endomorphisme de \mathbb{R}).



2. Soient E et F deux espaces vectoriels, l'application nulle de E dans F définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto 0_F \end{aligned}$$

est linéaire.

3. Soit E un espace vectoriel. L'application identité de E , notée id_E , définie par

$$\begin{aligned} \text{id}_E : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

est un endomorphisme de E .

Contre-exemple 1

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 3x + 1$ n'est pas linéaire. En effet,



Proposition 1 (Caractérisation des applications linéaires)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Alors f est linéaire si et seulement si pour tout $(u, v) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

Méthode 1

1. En pratique, pour montrer qu'une application est linéaire, on utilise souvent cette caractérisation car elle nécessite moins de vérifications que la définition. À cet effet, la première étape est toujours d'écrire ce que vaut $f(u + \lambda \cdot v)$.
2. Pour montrer qu'une application f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , il vaut vérifier deux choses : la linéarité de f et le fait que pour tout $u \in E$, $f(u) \in E$.

Exemple 2

1. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y\end{aligned}$$

est linéaire.

2. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(t) dt\end{aligned}$$

est linéaire.

3. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P'\end{aligned}$$

est linéaire.

Test 1 (Voir solution.)

Dans chaque cas, montrer que l'application considérée est linéaire et préciser s'il s'agit ou non d'un endomorphisme.

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

2. L'application

$$t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto {}^t M.$$

3. L'application

$$\Delta : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \longmapsto P(X + 1).$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$m_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto AM.$$

Test 2 (Voir solution.)

Dans \mathbb{R}^3 , on considère la famille \mathcal{B} formée des vecteurs

$$u = (1, 1, 1) \quad ; \quad v = (0, 2, -1) \quad ; \quad w = (-2, 3, 1).$$

1. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $(3, -5, 2)$ dans cette base.
3. On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(u) = 2 \quad ; \quad f(v) = -1 \quad ; \quad f(w) = 0.$$

Calculer $f((3, -5, 2))$.

Proposition 2

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une **application linéaire** de E dans F . Alors :

1. $f(0_E) = 0_F$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot f(u_k).$

Démonstration :

■

1.2 L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 3 (Structure de $\mathcal{L}(E, F)$)

Soient E et F deux espaces vectoriels. Alors les ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ sont des espaces vectoriels.

En particulier, la somme de deux applications linéaires de E dans F est une application linéaire de E dans F et le produit d'une application linéaire de E dans F par un nombre réel est une application linéaire de E dans F .

Démonstration :

On admet que $\mathcal{F}(E, F)$ (l'ensemble des fonctions de E dans F) muni de ses lois usuelles est un espace vectoriel et on va montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

■

Exemple 3

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P' + 2P(X+1) \end{aligned}$$

est linéaire car c'est une combinaison linéaire des applications linéaires rencontrées à l'exemple 2 et au test 1.

Proposition 4 (Composition)

Soient E , F et G trois espaces vectoriels. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 4

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X+2) \end{aligned}$$

est linéaire car

Définition 2 (Puissance d'un endomorphisme)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit les puissances de f par récurrence par

$$\begin{cases} f^0 = id_E \\ \forall n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Exemple 5

On considère l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x, 2y). \end{aligned}$$

1. Vérifions que f est linéaire :

2. Déterminons f^2 et f^3 .

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer f^n .

Test 3 ([Voir solution.](#))

Pour chaque application linéaire φ ci-dessous, déterminer φ^2 et φ^3 .

1.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X+3). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'. \end{aligned}$$

Test 4 (Voir solution.)

Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent, ie :

$$u \circ v = v \circ u.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v = v \circ u^k$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$.

1.3 Isomorphismes, automorphismes

Rappel(s) 1

Soit f une application de E dans F .

1. On dit que f est **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f .
2. On dit que f est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f .
3. On dit que f est **bijjective** si tout élément de F admet exactement un antécédent par f (autrement dit si f est injective et surjective).

Si f est bijective, on note f^{-1} sa bijection réciproque. On a alors

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_E.$$

Définition 3 (Isomorphisme, automorphisme)

Soient E et F deux espaces vectoriels.

- On appelle **isomorphisme** de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F . L'ensemble des isomorphismes de E dans F est noté $\text{GL}(E, F)$.
- On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme bijectif de E . L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{GL}(E)$.

S'il existe un isomorphisme entre E et F , on dit que E et F sont **isomorphes**.

Exemple 6

Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ (a, b) &\longmapsto aX + b. \end{aligned}$$

1. Vérifions que φ est linéaire.

2. Montrons que φ est un isomorphisme.

Proposition 5

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in GL(E, F)$. Alors f^{-1} est linéaire. En particulier, $f^{-1} \in GL(F, E)$.

Exemple 7

L'application ψ définie par :

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}_1[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2 \\ P &\longmapsto (P'(0), P(0))\end{aligned}$$

est linéaire car il s'agit de la bijection réciproque de l'application φ de l'exemple 6.

2 Noyau et image d'une application linéaire

2.1 Noyau

Définition 4 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau** de f et on note $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

Remarque 2

D'après la proposition 2, on a toujours $0_E \in \ker(f)$.

Proposition 6

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E .

Méthode 2

1. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f , il faut résoudre l'équation $f(u) = 0_F$ qui se traduit par un système linéaire.
2. La proposition précédente fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un (sous)-espace vectoriel : en montrant que c'est le noyau d'une application linéaire.

Exemple 8

On reprend les applications linéaires de l'exemple 2.

1. Déterminons le noyau de

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y.\end{aligned}$$

2. Déterminons le noyau de

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P' .\end{aligned}$$

Exemple 9

1. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 car

2. L'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ car

Test 5 (Voir solution.)

Dans chaque cas, déterminer le noyau de l'application linéaire (base du noyau et dimension).

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

2. L'application

$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto {}^t M. \end{aligned}$$

3. L'application

$$\begin{aligned} m_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM \end{aligned}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Noyau et injectivité)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

Remarque 3

En général, pour montrer qu'une application f de E dans F est injective, il faut vérifier que pour tout $v \in F$ l'équation $f(u) = v$ possède **au plus** une solution. La proposition précédente assure que, lorsque f est **linéaire**, il suffit de le vérifier pour $v = 0_F$ (on a toujours $0_E \in \ker(f)$ d'après la proposition 2).

Démonstration :

Exemple 10

Parmi les applications linéaires de l'exemple 8, aucune n'est injective.

Test 6 (Voir solution.)

Parmi les applications linéaires du test 5, lesquelles sont injectives?

2.2 Image

Définition 5 (Image d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **image** de f et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{f(u), u \in E\}.$$

Proposition 8

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, l'image de f est un sous-espace vectoriel de F .

Remarque 4

Une autre façon de décrire l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est

$$\text{Im}(f) = \{v \in F \mid \exists u \in E \ f(u) = v\}.$$

Exemple 11

1. Déterminons l'image de

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - 3y.\end{aligned}$$

2. Déterminons l'image de

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M - {}^t M.\end{aligned}$$

Test 7 ([Voir solution.](#))

Déterminer l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

Proposition 9 (Image et surjectivité)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Test 8 ([Voir solution.](#))

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \mapsto (2x - y, 2y - 3x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. L'application f est-elle injective? Surjective?

3 Applications linéaires en dimension finie

3.1 Rang d'une application linéaire

Définition 6 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$.

Remarque 5

Comme $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et que F est de dimension finie, $\text{Im}(f)$ est bien de dimension finie et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

Proposition 10

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

En particulier, $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.

Méthode 3

Ainsi pour déterminer le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ il suffit de déterminer le rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ où (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Exemple 12

Déterminer le rang de l'application linéaire f définie par

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

Exemple 13

Déterminons le rang de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

Test 9 ([Voir solution.](#))

Soit φ l'application linéaire définie par

$$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$M \longmapsto M + {}^t M.$$

Déterminer son rang.

Théorème 1 (Théorème du rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f).$$

Autrement dit

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Exemple 14

Soit φ l'application définie par

$$\varphi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto P'.$$

Déterminons son rang.

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit φ l'application définie par

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\longmapsto (P(1), P(2)).\end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et en déduire le rang de φ .
3. En déduire la dimension de $\ker(\varphi)$.
4. L'application φ est-elle injective? surjective? bijective?

Conséquence(s) 1

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $\dim(E) < \dim(F)$ alors f n'est pas surjective.
2. Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors f n'est pas injective.

En particulier, si $\dim(E) \neq \dim(F)$, il n'existe pas d'isomorphisme entre E et F .

Conséquence(s) 2

Soient E, F deux espaces vectoriels de **même** dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarque 6

En particulier, si f est un **endomorphisme** d'un espace vectoriel E de dimension finie on a donc

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Exemple 15

1. L'application linéaire

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P'\end{aligned}$$

est-elle injective?

2. L'application linéaire

$$\begin{aligned}f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto (a+b, a-b, c+d, c-d)\end{aligned}$$

est-elle un isomorphisme?

Test 11 ([Voir solution.](#))

Soit f l'application définie par

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Conséquence(s) 3

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme de E dans F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

On s'intéresse à la réciproque : deux espaces vectoriels de même dimension finie sont-ils isomorphes?

Proposition 11

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Cela signifie que pour toute famille $(u_1, \dots, u_n) \in F^n$ il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = u_i.$$

Remarque 7

En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que l'on a deux applications linéaires f et g de E dans F telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = g(e_i)$$

alors $f = g$.

Exemple 16

1. Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \quad ; \quad f(e_2) = e_1 \quad ; \quad f(e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

Déterminons l'expression de f .

(a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On commence par déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3) :

(b) On détermine $f((x, y, z))$ par linéarité :

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de **même** dimension finie n . On va montrer que E et F sont isomorphes.

Test 12 (Voir solution.)

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que

$$f(e_1) = 1 \quad ; \quad f(e_2) = X - 2 \quad ; \quad f(e_3) = X^2 + X - 1.$$

1. Déterminer l'expression de f .
2. Déterminer le rang de f .
3. Est-ce un isomorphisme?

3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 7 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit \mathcal{B} une base de E .

1. Soit $u \in E$ et notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de u dans la base \mathcal{B} . On appelle **matrice de u**

dans la base \mathcal{B} et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

2. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E . On appelle **matrice de (u_1, \dots, u_p) dans la base \mathcal{B}** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j -ième colonne est la $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Remarque 8

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{B} une base de E , on peut montrer que l'application

$$E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

est un isomorphisme.

Exemple 17

Dans \mathbb{R}^3 soit $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

1. La famille \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 :

2. Soient $u = (0, 6, -1)$ et $v = (2, 2, 0)$. Déterminons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v)$.

Exemple 18

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la base canonique \mathcal{B}_{can} et le polynôme $P = 2(X - 1)^2 - 3(X - 1) - 4$.

1. Trouver la matrice de P dans la base canonique.

2. On considère la famille $\mathcal{B}_1 = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$.

- (a) La famille \mathcal{B}_1 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$:

- (b) Déterminons $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(P)$.

Test 13 (Voir solution.)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la famille $\mathcal{B} = (1, X + 1, X^2 + 1)$ et les polynômes $P = 3X^2$, $Q = 2 + X - X^2$.

1. Justifier que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q)$.

Définition 8 (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E et $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de F et on considère $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Il s'agit d'une matrice de taille $n \times p$.

Notation 2

Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ on notera $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ pour désigner $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f)$.

Méthode 4

Pour déterminer la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ d'une application linéaire :

1. on commence par calculer l'image par f de chaque élément de la base \mathcal{B}_E ;
2. on détermine les coordonnées dans la base \mathcal{B}_F des vecteurs images déterminés à l'étape précédente ;
3. la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans \mathcal{B}_F des images par f des éléments de \mathcal{B}_E .

Exemple 19

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x, y)) = (2x - 2y, 2x + 4y, -y).$$

1. Déterminons la matrice de f dans les bases \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 où \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 sont les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement.

2. Déterminons la matrice de f dans les bases $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

Exemple 20

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad f(P) = P'.$$

Déterminons la matrice de f dans les bases \mathcal{B}_3 et \mathcal{B}_2 où \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 sont les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ respectivement.

Test 14 (Voir solution.)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la base canonique \mathcal{B} et l'endomorphisme φ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = {}^t M.$$

Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Proposition 12 (Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E et $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de F et on considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Remarque 9

En particulier, une fois les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F fixées :

1. toute application linéaire possède une unique représentation matricielle dans ces bases,
2. toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est l'unique représentation matricielle dans ces bases d'une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
3. pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

Exemple 21

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminons f .

Test 15 (Voir solution.)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer f .

Conséquence(s) 4

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F) \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2.$$

3.3 Lien entre applications linéaires et matrices associées

Proposition 13

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$ et $v \in F$. Alors :

$$v = f(u) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u)) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

Conséquence(s) 5 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Si les coordonnées de u dans la base \mathcal{B}_E sont (x_1, \dots, x_p) alors les coordonnées de $f(u)$ dans la base \mathcal{B}_F

sont données par le vecteur colonne $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Conséquence(s) 6

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

Alors $u \in \ker(f)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 22

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminons l'image de $X^2 + 1$ par f .

2. Soient \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, X + 1, X^2 + X + 1)$. On considère g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est B .

Déterminons $g(X^2 + 1)$.

Test 16 (Voir solution.)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Proposition 14 (Composition et représentation matricielle)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère \mathcal{B}_E une base de E , \mathcal{B}_F une base de F et \mathcal{B}_G une base de G . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

Conséquence(s) 7

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f^k) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) \right)^k.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est bijective si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \right)^{-1}.$$

Méthode 5

Pour montrer qu'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels de dimension finie est bijective, on peut donc montrer qu'une matrice représentative de f est inversible (en calculant son rang par exemple).

Exemple 23

Déterminons la matrice de l'application h suivante dans la base canonique :

$$h : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto P'(X+1).$$

Exemple 24

Montrons que l'application f suivante est bijective et déterminons sa bijection réciproque.

$$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \mapsto P(X+1).$$

Test 17 (Voir solution.)

On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto (3x + y, 2x, 3y)$$

1. On note A et B les matrices de f et de g dans les bases canoniques. Déterminer A et B .
2. Déterminer l'expression de $g \circ f$ et en déduire la matrice C de $g \circ f$ dans les bases canoniques.
3. Vérifier qu'on a bien $C = BA$.

Proposition 15 (Rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

On a :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)).$$

3.4 Changement de base**Définition 9 (Matrice de passage)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'** et on note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de la famille \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} .

Ainsi, si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ on a :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n).$$

Remarque 10

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice de id_E dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E).$$

⚠ Attention à l'ordre des bases !

Exemple 25

1. Si \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = ((1, 2, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 2))$ alors

2. Si \mathcal{B} est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, (X - 1), (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ alors

Proposition 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .
La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$:

$$(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Exemple 26

On reprend l'exemple précédent où \mathcal{B} est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$. Déterminons les coordonnées de X^3 dans la base \mathcal{B}' .

Proposition 17 (Formules de changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}'' trois bases de E .

1. On a : $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$.
2. Soit $u \in E$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u).$$

Autrement dit, la multiplication à gauche par la matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ permet de déterminer les coordonnées de u dans "l'ancienne" base \mathcal{B} à partir de ses coordonnées dans la "nouvelle" base \mathcal{B}' .

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Remarque 11

En se souvenant que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$, la proposition ci-dessus est une conséquence des propositions 13 et 14 :

1. la composition $(E, \mathcal{B}'') \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}') \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B})$ donne le premier point grâce à la proposition 14 ;
2. le deuxième point est une conséquence directe de la proposition 13 ;
3. la composition $(E, \mathcal{B}') \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}) \xrightarrow{f} (E, \mathcal{B}) \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}')$ donne le dernier point grâce à la proposition 14.

Exemple 27

On reprend l'exemple précédent où \mathcal{B} est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$.
Déterminons les coordonnées de $P = 2X^3 - 3X^2 + 7X - 5$ dans la base \mathcal{B}' .

Exemple 28

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice B de f dans la base canonique.

Test 18 (Voir solution.)

Soient $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (5, -2, 2)$ et $v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. On note $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$.
 - (a) Montrer que \mathcal{B}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Donner la matrice de passage P de la base canonique à \mathcal{B}_1 .
 - (c) Donner la matrice de passage de la base \mathcal{B}_1 à la base canonique.
2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer la matrice B de f dans la base \mathcal{B}_1 .
- (b) Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ et retrouver l'expression de B .

Définition 10 (Matrices semblables)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Proposition 18

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme (dans des bases éventuellement différentes).

4 Objectifs et erreurs à éviter

4.1 Objectifs

1. Savoir déterminer si une application est linéaire, est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire et en déduire si elle est injective ou surjective.
3. Savoir calculer le rang d'une application linéaire (avec la définition ou à partir d'une représentation matricielle).
4. Savoir et savoir utiliser le théorème du rang et ses conséquences.
5. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
6. Savoir, à partir de la matrice d'une application linéaire, déterminer son noyau, son image, son rang.
7. Savoir déterminer une matrice de changement de bases.
8. Savoir utiliser les formules de changement de bases.

4.2 Erreurs à éviter

1. Il ne faut pas confondre la caractérisation des sous-espaces vectoriels et la caractérisation des applications linéaires. En particulier, si φ est une application linéaire, les assertions du type « φ est non vide » ou « φ est stable par combinaison linéaire » n'ont pas de sens!
2. Si φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel, φ^n désigne une composition et non une multiplication!
3. Le noyau $\ker(f)$ d'une application linéaire est un ensemble. En particulier, écrire $\ker(f) = 0_E$ n'a pas de sens!