TD12-Intégration

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 te^{2t}dt$,
2. $\int_1^e \ln(x)dx$,
3. $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}dx$,
4. $\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy$,
5. $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr$,
6. $\int_0^2 x\sqrt{3x+1}dx$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}$$

et on note $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. *Montrer que pour tout entier naturel n, I_n est bien définie et calculer I_1.*
2. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.*

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt.$$

1. *Justifier que f est bien définie et est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer sa fonction dérivée.*
2. *En déduire $f(x)$ pour tout $x > 0$.*
3. *Retrouver ce résultat à l'aide d'un changement de variable.*

Exercice 4

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$,
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$,
3. $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$,
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt$.

Exercice 5

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$,
2. $\int_1^2 \frac{1}{x\ln(x)}dx$,
3. $\int_0^1 t\ln(t)dt$,
4. $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{3t+1}dt$,
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}dt$.

Exercice 6

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de comparaison.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$,
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(t)}dt$.

Exercice 8

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de négligeabilité.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$,
2. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt$,
4. $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt, k \in \mathbb{N}$,
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}dt$,
6. $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$.

Exercice 9

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème d'équivalence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$,
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$,
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}dt$,
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$.

Exercice 10

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$.

1. *Étudier le signe de h.*
2. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ est convergente et déterminer sa valeur.*
3. *En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente. On note alors $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$.*
4. *Montrer, grâce au changement de variable $u = \frac{1}{x}$ que $\displaystyle\int_0^1 h(u)du$ est convergente et vaut $-K$.*
5. *En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ convergent et déterminer leur valeur.*

Exercice 11

1. (a) *Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-|x|}dx$.*

   (b) *Plus généralement, montrer que si f est une fonction paire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.*

   (a) *Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3e^{x^2}dx$.*

   (b) *Plus généralement, montrer que si f est une fonction impaire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 0.*

Exercice 12

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx$ est convergente.*
2. (a) *Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.*

   En déduire : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

   (b) *Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :*

   $$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

   En déduire : $I_1 = a^2$.
3. (a) *Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$:*

   $$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx = -a^2t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2\int_0^t x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx.$$

   (b) *En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1)a^2I_{n-2}$.*

   (c) *Calculer I_2 et I_3.*

Exercice 13

1. *Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale*

   $$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

   est convergente.
2. (a) *Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.*

   (b) *En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.*