Chapitre 9 : Correction des tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Dans chaque cas, montrer que l'application considérée est linéaire et préciser s'il s'agit ou non d'un endomorphisme.

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$
2. *L'application*
$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto {}^t\mathrm{M}. \end{aligned}$$
3. *L'application*
$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1). \end{aligned}$$
4. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *L'application*
$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{AM}. \end{aligned}$$

Test 2 (***Voir solution.***)

Dans $\mathbb{R}^3$, *on considère la famille* $\mathscr{B}$ *formée des vecteurs*
$$u = (1, 1, 1) \quad ; \quad v = (0, 2, -1) \quad ; \quad w = (-2, 3, 1).$$

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $(3, -5, 2)$ *dans cette base.*
3. *On considère une application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *telle que*
$$f(u) = 2 \quad ; \quad f(v) = -1 \quad ; \quad f(w) = 0.$$
Calculer $f((3, -5, 2))$.

Test 3 (***Voir solution.***)

Pour chaque application linéaire φ *ci-dessous, déterminer* φ^2 *et* φ^3.

1. $$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} &\longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+3). \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty([0,1], \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'. \end{aligned}$$

Test 4 (***Voir solution.***)

Soient E *un espace vectoriel et* u, v *deux endomorphismes de* E *qui commutent, ie :*
$$u \circ v = v \circ u.$$

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v = v \circ u^k$.
2. *Montrer que pour tout entier naturel* n *:* $(u+v)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$.

Test 5 (***Voir solution.***)

Dans chaque cas, déterminer le noyau de l'application linéaire (base du noyau et dimension).

1. *L'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

2. *L'application*

$$\begin{aligned} t : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto {}^t\mathrm{M}. \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{AM} \end{aligned}$$

où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Test 6 (***Voir solution.***)

Parmi les applications linéaires du test 5, lesquelles sont injectives ?

Test 7 (***Voir solution.***)

Déterminer l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (x - z, x + y).$$

Test 8 (***Voir solution.***)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f : (x, y) \mapsto (2x - y, 2y - 3x)$.

1. *Montrer que* f *est une application linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de* f.
3. *L'application* f *est-elle injective ? Surjective ?*

Test 9 (***Voir solution.***)

Soit φ *l'application linéaire définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}. \end{aligned}$$

Déterminer son rang.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit φ *l'application définie par*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{P} &\longmapsto (\mathrm{P}(1), \mathrm{P}(2)). \end{aligned}$$

1. *Montrer que* φ *est linéaire.*
2. *Déterminer* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *et en déduire le rang de* φ.
3. *En déduire la dimension de* $\ker(\varphi)$.
4. *L'application* φ *est-elle injective ? surjective ? bijective ?*

Test 11 (*Voir solution.*)

Soit f l'application définie par

$$f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Test 12 (*Voir solution.*)

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ telle que

$$f(e_1) = 1 \quad ; \quad f(e_2) = X - 2 \quad ; \quad f(e_3) = X^2 + X - 1.$$

1. *Déterminer l'expression de f.*
2. *Déterminer le rang de f.*
3. *Est-ce un isomorphisme?*

Test 13 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la famille $\mathcal{B} = (1, X+1, X^2+1)$ et les polynômes $P = 3X^2$, $Q = 2 + X - X^2$.

1. *Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q)$.*

Test 14 (*Voir solution.*)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la base canonique $\mathcal{B}$ et l'endomorphisme φ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = {}^t M.$$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Test 15 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer f.

Test 16 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Test 17 (*Voir solution.*)

On considère les applications f et g suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x - y, x + y) \qquad\qquad (x, y) \longmapsto (3x + y, 2x, 3y)$$

1. *On note A et B les matrices de f et de g dans les bases canoniques. Déterminer A et B.*
2. *Déterminer l'expression de $g \circ f$ et en déduire la matrice C de $g \circ f$ dans les bases canoniques.*
3. *Vérifier qu'on a bien $C = BA$.*

Test 18 (*Voir solution.*)

Soient $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (5,-2,2)$ *et* $v_3 = (-1,1,2)$.

1. *On note* $\mathscr{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$.
   (a) *Montrer que* $\mathscr{B}_1$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Donner la matrice de passage* P *de la base canonique à* $\mathscr{B}_1$.
   (c) *Donner la matrice de passage de la base* $\mathscr{B}_1$ *à la base canonique.*
2. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Déterminer la matrice* B *de* f *dans la base* $\mathscr{B}_1$.
   (b) *Calculer* $f(v_1)$, $f(v_2)$ *et* $f(v_3)$ *et retrouver l'expression de* B.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soient* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'))\\ &= (x+\lambda x'-(z+\lambda z'), x+\lambda x'+y+\lambda y')\\ &= (x-z+\lambda(x'-z'), x+y+\lambda(x'+y'))\\ &= (x-z, x+y)+\lambda(x'-z', x'+y')\\ &= f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')). \end{aligned}$$

Comme $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré :*

$$\forall((x,y,z),(x',y',z'))\in\left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad f((x,y,z)+\lambda(x',y',z'))=f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).$$

Ainsi f *est linéaire. Ce n'est pas un endomorphisme car l'ensemble de départ et d'arrivée ne sont pas égaux.*

2. *Soient* $(M,N)\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} t(M+\lambda N) &= {}^t(M+\lambda N)\\ &= {}^tM+{}^t(\lambda N)\\ &= {}^tM+\lambda\,{}^tN\\ &= t(M)+\lambda t(N). \end{aligned}$$

Comme $(M,N)\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré :*

$$\forall(M,N)\in\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right)^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad t(M+\lambda N)=t(M)+\lambda t(N).$$

Ainsi t *est linéaire. C'est un endomorphisme si et seulement si* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})=\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *c'est-à-dire si et seulement si* $n=p$.

3. *Soient* $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\Delta(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)(X+1)=P(X+1)+\lambda Q(X+1)=\Delta(P)+\lambda\Delta(Q).$$

Comme $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré :*

$$\forall(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \Delta(P+\lambda Q)=\Delta(P)+\lambda\Delta(Q).$$

Ainsi Δ *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}[X]$.

4. *Soient* $(M,N)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} m_A(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N)\\ &= AM+\lambda AN\\ &= m_A(M)+\lambda m_A(N). \end{aligned}$$

Comme $(M,N)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ *et* $\lambda\in\mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré :*

$$\forall(M,N)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad m_A(M+\lambda N)=m_A(M)+\lambda m_A(N).$$

Ainsi m_A *est un endomorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Montrons que c'est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$. *Soit* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3w=0 &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_1 & & & + & 5\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \quad L_2\to L_2+2L_3\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & & & & -2\lambda_3 & = & 0\\ & & & & 11\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \quad L_2\to L_2-3L_1\\ &\iff \lambda_1=\lambda_3=\lambda_2=0.\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (u, v, w) est libre. De plus, elle est de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. *On a*
$$(3,-5,2) = \frac{13}{11}u - \frac{19}{11}v - \frac{10}{11}w$$
et les coordonnées de $(3,-5,2)$ dans la base (u, v, w) sont donc $\left(\frac{13}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{10}{11}\right)$.

3. *On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que*
$$f(u) = 2 \quad ; \quad f(v) = -1 \quad ; \quad f(w) = 0.$$
Par linéarité de f, on trouve :
$$f((3,-5,2)) = f\left(\frac{13}{11}u - \frac{19}{11}v - \frac{10}{11}w\right) = \frac{13}{11}f(u) - \frac{19}{11}f(v) - \frac{10}{11}f(w) = \frac{45}{11}.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On a*
$$f^2(\mathrm{P}) = f(f(\mathrm{P})) = f(\mathrm{P}(\mathrm{X}+3)) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+3+3) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+6)$$
et
$$f^3(\mathrm{P}) = f(f^2(\mathrm{P})) = f(\mathrm{P}(\mathrm{X}+6)) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+3+6) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+9).$$
Ainsi $f^2 : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+6)$ et $f^3 : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+9)$.

2. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On a*
$$\varphi^2(f) = \varphi(\varphi(f)) = \varphi(f') = f''$$
et
$$\varphi^3(f) = \varphi(\varphi^2(f)) = \varphi(f'') = f^{(3)}.$$
Ainsi, $\varphi^2 : f \mapsto f''$ et $\varphi^3 : f \mapsto f^{(3)}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Par récurrence :*
   - *Initialisation : le cas $k = 0$ est évident.*
   - *Hérédité : supposons que $u^k \circ v = v \circ u^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et montrons que*
   $$u^{k+1} \circ v = v \circ u^{k+1}.$$
   On a :
   $$\begin{aligned} u^{k+1} \circ v = u \circ u^k \circ v &= u \circ v \circ u^k && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= v \circ u \circ u^k && \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent,} \\ &= v \circ u^{k+1}. \end{aligned}$$
   Ainsi la propriété est vraie au rang $k+1$.
   - *Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que*
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \circ v = v \circ u^k.$$

2. *Par récurrence :*
   - *Initialisation : le cas $n = 0$ est évident.*
   - *Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a :*
   $$\begin{aligned} (u+v)^{n+1} &= (u+v) \circ (u+v)^n \\ &= (u+v) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}\right) && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= u \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}\right) + v \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}\right) && \text{par définition de } u+v, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u \circ u^k \circ v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v \circ u^k \circ v^{n-k} && \text{par linéarité de } u \text{ et de } v. \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente dans la deuxième somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k+1}\circ v^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v\circ v^{n-k}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}u^{i}\circ v^{n+1-i}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n+1-k} \quad \text{en faisant le changement de variable } i=k+1,\\
&= \binom{n}{n}u^{n+1}\circ v^{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}u^{i}\circ v^{n+1-i}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n+1-k}+\binom{n}{0}u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= u^{n+1}\circ v^{0}+\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)u^{i}\circ v^{n+1-i}+u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= u^{n+1}\circ v^{0}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}u^{i}\circ v^{n+1-i}+u^{0}\circ v^{n+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}u^{i}\circ v^{n+1-i}.
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

- *Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n-k}=v\circ u^{k}.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors*

$$f((x,y,z))=(0,0)\iff x-z=0 \quad \text{et} \quad x+y=0\iff x=z \quad \text{et} \quad y=-x.$$

Ainsi,

$$\ker(f)=\{(x,-x,x),x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,-1,1)).$$

Donc une base de $\ker(f)$ *est* $(1,-1,1)$ *et sa dimension est égale à* 1.

2. *On voit facilement que* $\ker(t)=\left\{0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}\right\}$.

3. *Soit* $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in\ker(m_{\mathrm{A}})\iff \mathrm{AM}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 2(x+z) & 2(y+t)\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z&=&0\\ y+t&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-z\\ y&=&-t\end{array}\right.\\
&\iff \mathrm{M}=\begin{pmatrix}-z & -t\\ z & t\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\ker(m_{\mathrm{A}})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$. *Comme les matrices* $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *sont non colinéaires, la famille* $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\ker(m_{\mathrm{A}})$ *et* $\dim(\ker(m_{\mathrm{A}}))=2$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

Seule l'application t est injective.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f)=\left\{(x-z,x+y),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{(x,x)+(-z,0)+(0,y),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}&=\left\{x(1,1)+z(-1,0)+y(0,1),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\
&=\mathrm{Vect}((1,1),(-1,0),(0,1))=\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soient* $((x,y),(x',y')) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\begin{aligned} f((x,y)+\lambda(x',y')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y')) \\ &= (2(x+\lambda x') - (y+\lambda y'), 2(y+\lambda y') - 3(x+\lambda x')) \\ &= (2x - y + \lambda(2x'-y'), 2y - 3x + \lambda(2y'-3x')) \\ &= (2x-y, 2y-3x) + \lambda(2x'-y', 2y'-3x') \\ &= f((x,y)) + \lambda f((x',y')). \end{aligned}$$

Comme $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sont quelconques, on a montré :*

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f((x,y)+\lambda(x',y')) = f((x,y)) + \lambda f((x',y')).$$

Donc f *est linéaire.*

2. *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in \ker(f) \iff f((x,y)) = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -3x & + & 2y & = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ & & x & = 0 \end{array} \right. \qquad \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \\ &\iff x = y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{(0,0)\}$.
De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) = \left\{(2x-y, 2y-3x), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \left\{(2x,-3x) + (-y,2y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(2,-3) + y(-1,2), (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,-3),(-1,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,-1),(-1,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,-1),(0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

3. *D'après la question précédente,* f *est surjective et injective (c'est donc un isomorphisme de* $\mathbb{R}^2$*).*

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

Comme la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi) &= \mathrm{Vect}\left(\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right), \varphi\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right), \varphi\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right), \varphi\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

On vérifie sans mal que la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ *est libre. Donc* $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soient* $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}_3[\mathrm{X}])^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\varphi(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}) = ((\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(1), (\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})(2)) = (\mathrm{P}(1)+\lambda\mathrm{Q}(1), \mathrm{P}(2)+\lambda\mathrm{Q}(2)) = \varphi(\mathrm{P}) + \lambda\varphi(\mathrm{Q}).$$

Ainsi,

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in (\mathbb{R}_3[\mathrm{X}])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}) = \varphi(\mathrm{P}) + \lambda\varphi(\mathrm{Q}).$$

Donc φ *est linéaire.*

2. *Comme* $(1, X, X^2, X^3)$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$*, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\varphi) &= \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1),(1,2),(1,4),(1,8))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1),(0,1))\\ &= \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

3. *D'après le théorème du rang, on a :*

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi)$$

c'est-à-dire

$$4 = \dim(\ker(\varphi)) + 2.$$

Ainsi $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

4. *D'après la question précédente,* $\ker(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ *donc* φ *n'est pas injective (donc pas bijective). D'après la question* 2, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$ *donc* φ *est surjective.*

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Montrons que* f *est une application linéaire :*

$$\forall \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2(x+\lambda x') + y + \lambda y'\\ z + \lambda z'\\ y + \lambda y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y\\z\\y\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2x'+y'\\z'\\y'\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + \lambda f\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right).$$

Ainsi f *est linéaire. C'est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. *Comme* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ *forment une base de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

3. *L'application* f *est un endomorphisme de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *surjectif donc est bijectif car* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *est de dimension finie. Ainsi c'est un automorphisme.*

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. On a*

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

donc par linéarité de f *on trouve :*

$$\begin{aligned}f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)\\ &= x + y(X-2) + z(X^2 + X - 1)\\ &= x - 2y - z + (y+z)X + zX^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\quad f((x,y,z)) = x - 2y - z + (y+z)X + zX^2.$$

2. *On sait que*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X-2, X^2+X-1).$$

Or la famille $(1, X-2, X^2+X-1)$ *est formée de polynômes non nuls de* $\mathbb{R}_2[X]$ *de degrés distincts donc c'est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Comme elle est de cardinal* $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*, c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*. Ainsi,*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X-2, X^2+X-1) = \mathbb{R}_2[X]$$

donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

3. *D'après la question précédente,* f *est surjective. Comme* $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*, c'est donc un isomorphisme.*

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La famille* $\mathscr{B}$ *est formée de polynômes non nuls de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *de degrés distincts donc c'est une famille libre de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. *Comme elle est de cardinal* $3 = \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$, *c'est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. *Déterminons les coordonnées de* P *et de* Q *dans cette base :*

$$\mathrm{P} = 3(\mathrm{X}^2+1) - 3 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Q} = -(\mathrm{X}^2+1) + (\mathrm{X}+1) + 2$$

donc les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ *de* P *sont* $(-3,0,3)$ *et celles de* Q *sont* $(2,1,-1)$. *Ainsi*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction du test 14 (*Retour à l'énoncé.*)

La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *est la famille* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\mathrm{E}_3,\mathrm{E}_4)$ *où*

$$\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\varphi(\mathrm{E}_1) = \mathrm{E}_1\ ;\ \varphi(\mathrm{E}_2) = \mathrm{E}_3\ ;\ \varphi(\mathrm{E}_3) = \mathrm{E}_2\ ;\ \varphi(\mathrm{E}_4) = \mathrm{E}_4.$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction du test 15 (*Retour à l'énoncé.*)

Comme A *est la matrice de* f *dans la base canonique* $(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$ *de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, *cela signifie que la première colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(1)$ *dans la base canonique, la deuxième colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(\mathrm{X})$ *dans la base canonique, la dernière colonne de* A *correspond aux coordonnées de* $f(\mathrm{X}^2)$ *dans la base canonique. Ainsi :*

$$f(1) = 1+2\mathrm{X}+3\mathrm{X}^2\ ;\ f(\mathrm{X}) = 2+\mathrm{X}+2\mathrm{X}^2\ ;\ f(\mathrm{X}^2) = 1+2\mathrm{X}+3\mathrm{X}^2.$$

Puis par linéarité, l'image d'un polynôme $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} f(\mathrm{P}) = af(\mathrm{X}^2) + bf(\mathrm{X}) + cf(1) &= a(1+2\mathrm{X}+3\mathrm{X}^2) + b(2+\mathrm{X}+2\mathrm{X}^2) + c(1+2\mathrm{X}+3\mathrm{X}^2) \\ &= (3a+2b+3c)\mathrm{X}^2 + (2a+b+2c)\mathrm{X} + a+2b+c. \end{aligned}$$

Correction du test 16 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *sa matrice représentative dans la base canonique. Alors, puisque* A *est la matrice représentative de* f *dans la base canonique, on a*

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f) \iff \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & 3z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3z \\ y & = & z. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc le noyau de f *est l'ensemble des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *dont les coordonnées dans la base canonique sont de la forme* $(-3z,z,z)$ *avec* $z \in \mathbb{R}$. *Ainsi*

$$\ker(f) = \{(-3z,z,z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-3,1,1)).$$

De même, comme A *est la matrice de* f *dans la base canonique, les colonnes de* A *correspondent aux coordonnées des images de la base canonique dans la base canonique :*

$$f((1,0,0)) = (1,1,0)\ ;\ f((0,1,0)) = (1,0,-1)\ ;\ f((0,0,1)) = (2,3,1).$$

Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,-1),(2,3,1)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,-1))$$

car $(2,3,1) = 3(1,1,0)-(1,0,-1)$.

Correction du test 17 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Comme* $f((1,0)) = (1,1)$*, les coordonnées de* $f((1,0))$ *dans la base canonique sont* $(1,1)$ *et la première colonne de* A *est* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$*. De même,* $f((0,1)) = (-1,1)$ *donc la deuxième colonne de* A *est* $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$*. Ainsi*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Comme $g((1,0)) = (3,2,0)$*, les coordonnées de* $g((1,0))$ *dans la base canonique sont* $(3,2,0)$ *et la première colonne de* B *est* $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$*. De même,* $g((0,1)) = (1,0,3)$ *donc la deuxième colonne de* B *est* $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$*. Ainsi*

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

2. *Soit* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *. On a :*

$$\begin{aligned} g\circ f((x,y)) = g((x-y,x+y)) &= (3(x-y)+x+y,2(x-y),3(x+y))\\ &= (4x-2y,2x-2y,3x+3y).\end{aligned}$$

Ainsi, $g\circ f((1,0)) = (4,2,3)$ *donc les coordonnées de* $g\circ f((1,0))$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *sont* $(4,2,3)$ *et la première colonne de* C *est* $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$*. De même,* $g\circ f((0,1)) = (-2,-2,3)$ *donc la deuxième colonne de* C *est* $\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$*. D'où*

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$

3. *On a bien* $\mathrm{C} = \mathrm{BA}$.

Correction du test 18 (*Retour à l'énoncé.*)

1. (a) *Montrons que* $\mathscr{B}_1$ *est une famille libre : soit* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$*. Alors*

$$\begin{aligned}\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = (0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & - & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & - & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ & & & + & 3\lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \quad \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2\\ &\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{B}_1$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$ *de cardinal* $3=\dim(\mathbb{R}^3)$*. C'est donc une base de* $\mathbb{R}^3$.

(b) *La matrice de passage* P *de la base canonique à* $\mathscr{B}_1$ *est la matrice de la famille* $\mathscr{B}_1$ *dans la base canonique. Ainsi*

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

(c) *La matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base canonique est l'inverse la matrice* P. *On trouve*

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *D'après la formule de changement de bases, on a*

$$\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) • *Les coordonnées de v_1 dans la base canonique sont* $(1,0,0)$. *Donc*

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_1) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_1)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_1)$ dans la base canonique sont donc $(1,0,0)$. *D'où :*

$$f(v_1) = (1,0,0) = v_1.$$

• *Les coordonnées de v_2 dans la base canonique sont* $(5,-2,2)$. *Donc*

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_2) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_2)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_2)$ dans la base canonique sont donc $(-5,2,-2)$. *D'où :*

$$f(v_2) = (-5,2,-2) = -v_2.$$

• *Les coordonnées de v_3 dans la base canonique sont* $(-1,1,2)$. *Donc*

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f)\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(v_3) = \mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_3)).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\textit{Base can.}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f(v_3)$ dans la base canonique sont donc $(-2,2,4)$. *D'où :*

$$f(v_3) = (-2,2,4) = 2v_3.$$

D'après ce qui précède, dans la base $\mathscr{B}_1$ les coordonnées de v_1 sont $(1,0,0)$, *celles de v_2 sont* $(0,-1,0)$ *et celles de v_3 sont* $(0,0,2)$. *Ainsi, on retrouve bien :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{B}.$$