Exercice 1

1) FAUX (voir Remarque 1 du cours) : par exemple

$$\frac{1}{n} = o(1) \text{ et } \frac{1}{n^2} = o(1) \text{ mais } \forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n} \neq \frac{1}{n^2}.$$

2) FAUX : prenons : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = n$, $v_n = -n^2$ et $w_n = n^2$

alors comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

alors $u_n = o(v_n)$ et $u_n = o(w_n)$. Mais $u_n \neq o(v_n + w_n) = o(0)$

car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

3) FAUX : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} = u_n$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1}$

donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} u_n$.

Rmq : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel [ℓ]

alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ aussi. Donc si $\ell \neq 0$

on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ et $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$

par transitivité.

4) VRAI : $\displaystyle\frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) = \frac{n}{2}u_n + \frac{n}{2}u_{n+1} = \frac{nu_n}{2} + \frac{(n+1)u_{n+1}}{2} - \frac{u_{n+1}}{2}$

Or, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n u_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} n u_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{nu_n}{2} + \frac{(n+1)u_{n+1}}{2} - \frac{u_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}(u_n + u_{n+1}) = 1$ donc $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

5) FAUX : $\forall n \in \mathbb{N}$ posons $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Alors

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -1$ donc

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = -1$.

6) VRAI : cela fait partie de la caractérisation de la relation d'équivalence. On peut le montrer directement :

$$\frac{u_n}{1/n} = n u_n = n \times \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + n\, o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \underbrace{o(1)}_{\text{suite cv vers } 0}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1$

7) FAUX : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

mais $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\not\sim} e^{v_n}$ (voir Test 8)

Exercice 2

1) $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $v_n = o(1)$. Ainsi $v_n = o(u_n)$

2) Par croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^8}{n^7} = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

3) Comme $\frac{2}{e} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

4) Comme $\frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $u_n = o(v_n)$

5) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$

Ainsi aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.

6) $\forall n \geq 1$, $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{n^n} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}}$. Or par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln n}} = 1$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \times 1 = 0$ donc $v_n = o(u_n)$

7) $\forall n \geq 1$, on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n e^{n/2}}{\ln(n) e^n} = \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{n}{e^{n/2}}.$$ Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \times 0 = 0$ donc $v_n = o(u_n)$.

8) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = e^{-2} \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = e^2 \neq 0$ donc aucune des deux suites n'est négligeable devant l'autre.

9) $\forall n \geq 1$, $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sqrt{n} \times \ln n}{n} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Donc par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Ainsi $u_n = o(v_n)$.

10) Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ donc $u_n = o(v_n)$

11) $\forall n \geq 0$ on a : $$\frac{v_n}{u_n} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{n^2 \ln 2}} = e^{\sqrt{n}\ln(n) - n^2\ln 2} = e^{n^2\left(\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2} - \ln 2\right)}$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2} = 0$ donc

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2} - \ln 2\right) = -\ln 2 < 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2} - \ln 2\right) = -\infty$ puis, par composition des limites.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. Donc $v_n = o(u_n)$

12) $\forall n \geq 1$, on a $u_n = e^{\ln(n) \times \ln(n)}$ et $v_n = e^{n\ln(\ln(n))}$

donc $$\frac{u_n}{v_n} = e^{-n\ln(\ln(n)) + \ln(n)^2} = e^{n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right)}$$

Par croissance comparée et composition des limites on a :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln(n)^2}{n} - \ln(\ln(n))\right) = -\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. Ainsi $u_n = o(v_n)$.

Exercice 4

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n \neq 0$ et $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

Donc, par opération sur les limites, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

b) D'après les équivalents usuels, on a :
$$\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
donc par compatibilité des équivalents avec le quotient
$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{1/n^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{1} = n.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. En particulier, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas équivalentes

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^n = e^{n\ln(u_n)} = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

Or $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc par compatibilité des équivalents avec le produit on a :
$$n\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times n = 1$$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

Par continuité de la fonction exponentielle, on conclut que
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^1 = e$.

De même, $v_n^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}$. Or $\ln(1+\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

donc $n\ln(1+\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ puis par continuité de exp : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})} = e^0 = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^n}{v_n^n} = \dfrac{e}{1} = e \neq 1$. Par la caractérisation de la relation d'équivalence, les suites $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 : On a, par hypothèse, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donc, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 tels que : $\forall n \geq n_0 \quad u_n = \varepsilon_n v_n$.

1) Donc, $\forall n \geq n_0 \quad |u_n| = |\varepsilon_n v_n| = |\varepsilon_n| \times |v_n|$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1$, par continuité de la fonction valeur absolue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varepsilon_n| = |1| = 1$. Ainsi $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$

2) On suppose qu'il existe un rang n_1 tel que $\forall n \geq n_1$ $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. Par hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$

donc $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ on a :

$u_n = \varepsilon_n \times v_n$ donc $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{v_n} > 0$ car $u_n > 0$ et $v_n > 0$
car $n \geq \max(n_0, n_1) \geq n_1$

Ainsi, $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, $\varepsilon_n > 0$ donc $\sqrt{\varepsilon_n}$ est bien définie.

Donc :

$\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, on a :

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{\varepsilon_n \times v_n} = \sqrt{\varepsilon_n}\sqrt{v_n}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 1$, par continuité de la fonction racine carrée, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\varepsilon_n} = \sqrt{1} = 1$.

Ainsi $\sqrt{u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$

Exercice 6

1) $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}} = \dfrac{n}{n^{3/2}} \times \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+1/n}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} = 1$ donc $u_n \sim \dfrac{n}{n^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{b^n}{b^n} \times \dfrac{(a/b)^n - 1}{(a/b)^n+1} = \dfrac{(a/b)^n-1}{(a/b)^n+1}$

Or $\dfrac{a}{b} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

3) $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^2+1}}$

Or $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} \sim n$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc par produit

$u_n \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

4) $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{3n^3}{e^n} \times \dfrac{1+\frac{5}{3n}+\frac{2}{3n^2}}{1+\frac{2n}{e^n}+\left(\frac{2}{e}\right)^n \ln(n)}$

Par croissance comparée, comme $\frac{2}{e} < 1$ on a

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n \ln(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{e^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{3n^2}}{1+\frac{2n}{e^n}+\left(\frac{2}{e}\right)^n \ln(n)} = 1$

Ainsi $u_n \sim \dfrac{3n^3}{e^n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^3}{e^n} = 0$ par croissance comparée.

5) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par les équivalents usuels on a:

$e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$

Par produit on a donc:

$u_n \sim n^2 \times \frac{1}{n^2} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

6) Par les équivalents usuels on a $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{2n}$ et $\overbrace{\ln(n+1)-\ln(n)}^{=\ln(1+\frac{1}{n})} \sim \frac{1}{n}$

donc par quotient:

$u_n \sim \dfrac{1/2n}{1/n} = \dfrac{1}{2}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

7) $\forall n \geq 1$ on a:

$u_n = e^n\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right) \times \frac{1}{n^2} \times (1+n^2e^{-n})$

Or par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)(1+n^2e^{-n}) = 1$

donc $u_n \sim \dfrac{e^n}{n^2}$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^2} = +\infty$

8) $\forall n \geq 1,\ u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

$= \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$

D'après les équivalents usuels, $\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{3n}$ donc par produit

$u_n \sim \dfrac{\sqrt[3]{n}}{3n} = \dfrac{1}{3n^{2/3}}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n^{2/3}} = 0$

9) $\forall n \geq 1,\ u_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. Or par équivalents usuels on a

$\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc par produit $n\ln(1+\frac{1}{n}) \sim 1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$ donc par continuité de l'exponentielle on a:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

10) $\forall n \geq 1\ u_n = e^{n\ln(1+\frac{2}{n^2})}$. Or, $\ln(1+\frac{2}{n^2}) \sim \frac{2}{n^2}$ donc par produit

$n\ln(1+\frac{2}{n^2}) \sim \frac{2}{n}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{2}{n^2}) = 0$

Par continuité de exp, on a $\lim u_n = e^0 = 1$

11) $\forall n \geq 1 \quad u_n = e^{n^2 \ln(1+e^{-n})}$

Or $\ln(1+e^{-n}) \sim e^{-n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ donc, par produit

$n^2 \ln(1+e^{-n}) \sim n^2 e^{-n}$.

Ainsi, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln(1+e^{-n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$

Par continuité de exp, on a donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$.

12) $\forall n \geq 1,\ u_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \ln(\ln(n)+1)\right)$

$= \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}\left(\ln(\ln(n)) + \ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(\sqrt{\ln(\ln(n))}\right) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right) = 0$ donc par continuité de exp, $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} \ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right) = e^0 = 1$

Ainsi $u_n \sim e^{\sqrt{\ln \ln(n))}}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{\ln(\ln n)}} = +\infty$

13) $\forall n \geq 1,\ u_n = \ln n \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc par produit $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Exercice 7

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ alors, comme $e \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$.

2. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 2 \leq \frac{u_n}{n+2} \leq 2+\frac{1}{n}$

Par encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n+2} = 2 \neq 0$.

Donc $\frac{u_n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$ puis par compatibilité avec le produit en multipliant membre à membre par $n+2$:

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(n+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$ par équivalent usuel

Par transitivité, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)u_n = 2 \neq 0$ alors $(n-1)u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$

Par compatibilité avec le produit, en multipliant membre à membre par $\frac{1}{n-1}$ (pour $n \geq 2$) on a :

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1}$.

De plus, $n-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $\frac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)u_n + e^n = 2 \neq 0$ donc $(n-1)u_n + e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$

D'après la caractérisation de l'équivalence on a donc : $(n-1)u_n + e^n = 2 + o(2) = 2 + o(1)$

donc $(n-1)u_n = -e^n + 2 + o(1)$ donc $u_n = \frac{1}{n-1}(-e^n + 2 + o(1))$

donc $u_n = -\frac{e^n}{n-1}(1 - 2e^{-n} - e^{-n}o(1)) = -\frac{e^n}{n-1}(1 - 2e^{-n} + \underbrace{o(e^{-n})}_{:= v_n})$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n}=0$.

Posons $(v_n)_n$ la suite telle que

$$u_n = -\frac{e^n}{n-1}\left(1-\frac{2}{e^n}+v_n\right) \quad \text{avec } v_n = o\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

alors, par définition de la negligeabilité, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_n$ qui tend vers 0 tels que

$\forall n\geq n_0 \quad v_n = \varepsilon_n \times \frac{1}{e^n}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n\times\frac{1}{e^n} = 0\times 0 = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{2}{e^n}+v_n = 1$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^n}{n}$

5. On a : $1-\frac{u_n^2}{2}+o\left(\frac1n\right) = \frac{n-1}{n} = 1-\frac1n$

donc $\frac{u_n^2}{2} = \frac1n + o\left(\frac1n\right)$

donc $u_n^2 = \frac2n + 2\times o\left(\frac1n\right) = \frac2n + o\left(\frac2n\right) = \frac2n+o\left(\frac1n\right)$

donc $\sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac2n + o\left(\frac1n\right)}$

Comme $\forall n\geq1$, $u_n\geq0$ alors $\sqrt{u_n^2}=u_n$ donc

$$u_n = \sqrt{\frac2n+o\left(\frac1n\right)} = \sqrt{\frac2n\left(1+\frac n2\times o\left(\frac1n\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac2n}\sqrt{1+o\left(\frac12\right)} = \sqrt{\frac2n}\sqrt{1+o(1)}$$

Or on a vu que une suite est un petit $o(1)$ si et seulement si elle converge vers zéro donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+o(1) = 1$ puis par continuité de la racine carrée

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+o(1)} = 1$

Ainsi $u_n \sim \sqrt{\frac2n}$

6. $\forall n\geq 2 \qquad 3n^2 - n\ln n \leq u_n \leq 3n^2+n\sqrt n+1$

Remarquons que • $3n^2 - n\ln n = 3n^2\left(1-\frac{\ln(n)}{3n}\right)$.

où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{\ln(n)}{3n} = 1$ donc $3n^2-n\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$.

• $3n^2+n\sqrt n+1 = 3n^2\left(1+\frac{\sqrt n}{3n}+\frac{1}{3n^2}\right)$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{\sqrt n}{3n}+\frac1{3n^2}=1$. Donc $3n^2+n\sqrt n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$

En divisant par $3n^2$ membre à membre on obtient :
$\forall n\geq 2$

$$\frac{3n^2-n\ln n}{3n^2}\leq \frac{u_n}{3n^2}\leq\frac{3n^2+n\sqrt n+1}{3n^2}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2-n\ln n}{3n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n\sqrt n+1}{3n^2} = 1$

donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{3n^2}=1$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$

Exercice 8

Par hypothèse, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 tels que :

$$\forall m \geqslant m_0 \qquad U_m = \varepsilon_m V_m.$$

1) La suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc il existe un rang $m_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall m \geqslant m_1$, $\underbrace{|\varepsilon_m - 0|}_{=|\varepsilon_m|} \leqslant 1$.

Donc, $\forall m \geqslant \max(m_0, m_1)$ on a :

$$|U_m| = |\varepsilon_m V_m| = |\varepsilon_m| . |V_m| \leqslant 1 \times |V_m| = |V_m|$$

2) $\forall m \geqslant 1$, $m^2+4m-1 \geqslant 0$ et $(\ln(m+4))^6 \geqslant 0$

De plus
$$\frac{\ln(m+4)^6}{m^2+4m-1} = \frac{\left(\ln\left(m\left(1+\frac{4}{m}\right)\right)\right)^6}{m^2\left(1+\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}\right)} = \frac{\left(\ln(m)+\ln\left(1+\frac{4}{m}\right)\right)^6}{m^2\left(1+\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}\right)}$$
$$= \left(\ln(m)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{4}{m}\right)}{\ln(m)}\right)\right)^6 \times \frac{1}{m^2\left(1+\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}\right)}$$
$$= \frac{\ln(m)^6}{m^2} \times \frac{\left(1+\frac{\ln(1+4/m)}{\ln(m)}\right)^6}{1+\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}}$$

Or $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{\ln(1+4/m)}{\ln(m)}\right)^6}{1+\frac{4}{m}-\frac{1}{m^2}} = 1$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\ln(m)^6}{m^2} = 0$ par croissance comparée. Donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{\ln(m+4)^6}{m^2+4m-1} = 0$

Ainsi $\ln(m+4)^6 = o\left(m^2+4m-1\right)$

D'après la question 1, il existe un rang N tel que

$$\forall m \geqslant N \qquad m^2+4m-1 = |m^2+4m-1| \geqslant |\ln(m+4)^6| = \ln(m+4)^6.$$

3)
```
N=0
while N^2+4N-1 <= (log(N+4))^6
    N=N+1
disp(N)
```

Exercice 9

1) $X_m(\Omega) = \{0, 1, \dots, m\}$.

$\forall k \in \{0,1,\dots,m\}$, $P(X_m = k) = \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \times \left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-k}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\forall m \geqslant k$ on a $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{k!} \times \frac{m(m-1)\dots 2\times 1}{(m-k)(m-k-1)\dots\times 2\times 1}$

$$= \frac{1}{k!} \times m(m-1) \times \dots \times (m-k+1)$$

donc $\binom{m}{k} = \frac{1}{k!} \times m \times m\left(1-\frac{1}{m}\right) \times \dots \times m\left(1-\frac{k}{m}+\frac{1}{m}\right)$
$$= \frac{1}{k!} m^k \times \left(1-\frac{1}{m}\right) \times \left(1-\frac{2}{m}\right) \times \dots \times \left(1-\frac{k-1}{m}\right)$$

Or $\lim\limits_{m\to+\infty} \left(1-\frac{1}{m}\right)\times\left(1-\frac{2}{m}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{k-1}{m}\right) = 1 \times \dots \times 1 = 1$

donc $\binom{m}{k} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^k}{k!}$

3) On en déduit par compatibilité avec le quotient
$$P(X_m = k) \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-k}.$$

Or $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}} = \dfrac{e^{n\ln(1-\frac{1}{n})}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}}$.

Or $\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$ donc $n\times \ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}\times n = -1$

Par compatibilité avec le produit.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{1}{n}) = -1$ puis par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{-1}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^{k} = 1$ donc finalement

$$\lim_{n\to+\infty} (1-\frac{1}{n})^{n-k} = e^{-1}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})^{n-k} = \dfrac{e^{-1}}{k!}$

Exercice 10

1) a) On a $u_0 = 1$,

Montrons par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Initialisation : $u_1 = 1 + \frac{u_0}{1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Donc la propriété est vraie au rang 1

Hérédité : supposons la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

Or, $n \geqslant 1$ donc $n+1 \geqslant 2$ puis, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

Ainsi, $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \times u_n \leqslant \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

donc $1 \leqslant 1 + \frac{u_n}{n+1} \leqslant 1 + 1 = 2$.

ie $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : par le principe de récurrence,
$\forall n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Comme de plus, $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$1 \leqslant u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n} \leqslant 1 + \frac{2}{n} \quad \text{d'après 1.a)}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ donc par encadrement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

puis, par compatibilité avec le quotient : $\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Ainsi $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ d'où $u_n - 1 = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

Exercice 11

1) On a, par équivalent usuel :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par compatibilité des équivalents avec le produit, on a donc

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n} \quad \text{ie} \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, par continuité de l'exponentielle en 1, on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$$

2)a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)\,n!} = \dfrac{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n}{n!}$

donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n^n}{n!}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(*)$

b) Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$

En passant à la limite dans l'égalité $(*)$ on a:

$$1 = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\times e.$$

Contradiction.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1. Cela signifie que $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n!)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Exercice 12

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$$

donc

x	
Variation de f	$\nearrow$

2) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De plus, f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable sur $\mathbb{R}$) donc d'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\infty;+\infty[$.

En particulier, comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\in f(\mathbb{R})$, n possède un unique antécédent par f ie : $\forall n\in\mathbb{N}$ $f(x)=n$ possède une unique solution u_n.

3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(\ln n) = e^{\ln n} - e^{-\ln(n)} = n - \frac{1}{n} < n = f(u_n)$

D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \ln(n) < u_n.$$

Par comparaison, comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

4) a) Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n = e^{u_n} - e^{-u_n} = e^{u_n}(1 - e^{-2u_n})$$

b) D'après 3, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n > 0$ donc, d'après 4a)

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \ln(n) = u_n + \ln(1-e^{-2u_n})$$
$$= u_n\left(1 + \frac{\ln(1-e^{-2u_n})}{u_n}\right)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} e^{-2u_n} = 0$ puis

$\lim_{n\to+\infty} \ln(1-e^{-2u_n}) = \ln(1) = 0$ par continuité du logarithme. Ensuite, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-e^{-2u_n})}{u_n} = 0$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1-e^{-2u_n})}{u_n} = 1$ et $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

5) a) D'après 4a), comme $\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-2u_n} = 1$ on a :

$$n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{u_n}$$

b) D'après le calcul de 4.b on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n - \ln(n) + \ln(1-e^{-2u_n}) = 0$$

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n - \ln(n) = -\ln(1-e^{-2u_n})$$

Or $\lim_{n\to+\infty} e^{-2u_n} = 0$ donc par équivalent usuel

$$\ln(1-e^{-2u_n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-2u_n}$$

donc $u_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-2u_n}$

Or $e^{-2u_n} = \frac{1}{(e^{u_n})^2}$ donc par compatibilité avec le quotient et les puissances, comme $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ on a :

$$\frac{1}{(e^{u_n})^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Finalement, par transitivité $u_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

6) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $f\left(\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)\right) = e^{\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)}$

$$= \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} - \frac{2}{n+\sqrt{n^2+4}}$$

$$= \frac{(n+\sqrt{n^2+4})^2 - 4}{2(n+\sqrt{n^2+4})} = \frac{n^2 + 2n\sqrt{n^2+4} + n^2 + \cancel{4} - \cancel{4}}{2(n+\sqrt{n^2+4})}$$

$$= \frac{2n(n+\sqrt{n^2+4})}{2(n+\sqrt{n^2+4})} = n.$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = n$, donne donc ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n = \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

b) $U_n = \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) = \ln\left(\frac{n+n\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right)$

$= \ln(n) + \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right)$

$= \ln(n)\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right)}{\ln(n)}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 0$ car continuité des fonctions racine carrée et logarithme. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right)}{\ln(n)} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4/n^2}}{2}\right)}{\ln(n)} = 1$. Ainsi $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

c) D'après 5)b) on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad U_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)$

$= \ln\left(1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)$

$= \ln\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} - 1\right)\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} - 1\right) = 0$ donc par équivalent usuel:

$U_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} - 1\right)$

Or par équivalent usuel

$$\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\times\frac{4}{n^2}$$

donc $\quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\times\frac{4}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

Par transitivité

$$U_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$