Chapitre 10-Comparaison de fonctions et développements limités

1 Comparaison de fonctions

1.1 Notion de voisinage

Définition 1 (Voisinage)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage (fermé) de** a tout intervalle de la forme $[a-r, a+r]$ où $r > 0$.
- Si $a = +\infty$, on appelle **voisinage (fermé) de** a tout intervalle de la forme $[\mathrm{A}, +\infty[$ où $\mathrm{A} > 0$.
- Si $a = -\infty$, on appelle **voisinage (fermé) de** a tout intervalle de la forme $]-\infty, \mathrm{B}]$ où $\mathrm{B} < 0$.

On dit qu'une propriété relative à f est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que la propriété est vraie sur $\mathrm{I} \cap \mathrm{V}$.

Exemple 1

1. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 1$$
est positive au voisinage de 0 : sur le voisinage $[-1, 1]$ de 0, f est positive :
$$\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) \geqslant 0.$$

2. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 1$$
est négative au voisinage de $-\infty$: sur le voisinage $[2, +\infty[$ de $+\infty$, f est négative :
$$\forall x \in [2, +\infty[\quad f(x) \leqslant 0.$$

1.2 Relation de négligeabilité

Définition 2 (Négligeabilité)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\epsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V}, \quad f(x) = \epsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$
On notera $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Remarque 1

1. *Contrairement aux suites, on ne peut pas omettre le « $x \to a$ » sous le petit o ! En effet la relation de négligeabilité entre deux fonctions peut radicalement changer selon le point au voisinage duquel on travaille (voir exemple ci-dessous).*
2. ⚠ *La notation « petit o » (appelé notation de Landau) est un abus d'écriture : $\underset{x \to a}{o}(g(x))$ ne désigne pas une fonction particulière mais toute fonction possédant la propriété d'être négligeable devant g au voisinage de a. Ainsi, si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ on n'a pas nécessairement $f(x) = h(x)$ (même au voisinage de a) !*

Exemple 2

1. $x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$.
En effet,
$$\forall x > 0, \quad x = \frac{1}{x} \times x^2$$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$.
En effet,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = x \times x$$
et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

Exemple 3

1. $x^2 - 1 = \underset{x\to 1}{o}(1)$.
En effet,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 1 = (x^2-1) \times 1$$
et $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$.
2. *Plus généralement* $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ *si et seulement si la suite* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *:*
   - *si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *alors, en prenant pour tout* x *dans un voisinage de* a, $\epsilon(x) = f(x)$ *on voit que* $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$.
   - *si* $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$ *alors il existe un voisinage* V *de* a *et une fonction* $\epsilon : V \to \mathbb{R}$ *tels que*
   $$\forall x \in V \quad f(x) = \epsilon(x) \times 1 \quad \text{et } \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$$
   donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Remarque 2

L'assertion $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *est équivalente à l'assertion* $f(x) = \ell + \underset{x\to a}{o}(1)$.

Test 1 (***Voir la solution.***)

Que signifie « $f(x) = \underset{x\to a}{o}(0)$ *» ?*

Test 2 (***Voir la solution.***)

Soit f *et* g *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *Comparer* f *et* g *au voisinage de* 0.
2. *Comparer* f *et* g *au voisinage de* $+\infty$.

Proposition 1 (Caractérisation)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
Si $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 4

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux fonctions est négligeable devant l'autre :

1. f *et* g *définies sur* $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *par* $f(x) = x^3$ *et* $g(x) = \frac{1}{x-2}$
   - *en* 2 *:* $\lim\limits_{x\to 2} x^3(x-2) = 0$ *donc* $x^3 = \underset{x\to 2}{o}\left(\frac{1}{x-2}\right)$
   - *en* $+\infty$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3(x-2)} = 0$ *donc* $\frac{1}{x-2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^3\right)$
   - *en* 1 *:* $\lim\limits_{x\to 1} x^3(x-2) = -1$ *donc aucune des deux n'est négligeable devant l'autre au voisinage de* 1.
2. f *et* g *définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = x$ *en* 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x}=0 \text{ donc } x=\underset{x\to 0}{o}(e^x).$$

Test 3 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas déterminer laquelle des deux suites est négligeable devant l'autre :

1. *f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ et $g(x)=x^2+2x-1$ en $-\infty$ puis en 0.*
2. *f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ et $g(x)=\ln(x)$ en 0^+.*

Plus généralement, les croissances comparées se traduisent en terme de négligeabilité par

Proposition 2 (Croissances comparées)

1. **En** $+\infty$:
   (a) pour tout $b>a>0$ on a
   - $x^a=\underset{x\to+\infty}{o}(x^b)$
   - $e^{ax}=\underset{x\to+\infty}{o}(e^{bx})$
   - $\dfrac{1}{x^b}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^a}\right)$
   - $e^{-bx}=\underset{x\to+\infty}{o}(e^{-ax})$

   (b) pour tout $a>0$ et tout $b>0$:
   - $\ln(x)^a=\underset{x\to+\infty}{o}(x^b)$
   - $x^a=\underset{x\to+\infty}{o}(e^{bx})$.
   - $\dfrac{1}{x^b}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln(x)^a}\right)$
2. **En** 0^+ :
   (a) pour tout $b>a>0$ on a
   - $x^b=\underset{x\to 0^+}{o}(x^a)$
   - $\dfrac{1}{x^a}=\underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^b}\right)$

   (b) pour tout $a>0$ et tout $b>0$:
   - $x^a=\underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{\ln(x)^b}\right)$
   - $\ln(x)^b=\underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x^a}\right)$

Exemple 5

1. *Comparer en $+\infty$ les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=x^5+x+1 \quad \text{et} \quad g(x)=e^x+3x^2+5.$$

Les deux fonctions sont non nulles sur un voisinage de $+\infty$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^5+x+1}{e^x+3x^2+5}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée mais on peut lever l'indétermination en factorisant numérateur et dénominateur par leur terme dominant :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^5\left(1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}{e^x\left(1+3\frac{x^2}{e^x}+\frac{5}{e^x}\right)}=\frac{x^5}{e^x}\times\frac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+3\frac{x^2}{e^x}+\frac{5}{e^x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+3\dfrac{x^2}{e^x}+\dfrac{5}{e^x}\right)=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{e^x}=0$. Par le théorème d'opération sur les limites, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+3\frac{x^2}{e^x}+\frac{5}{e^x}}=1$$

puis, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{e^x}=0$.

Finalement, par produit on en déduit que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ donc $f(x)=\underset{x\to+\infty}{o}(g(x))$.

2. *Comparer en 0^+ les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\ln(x)}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{(x+1)\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{x}{x+1}$$

Or $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+1}$ *donc*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Ainsi $g(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(f(x))$.

Test 4 (***Voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{\ln x}$$

Comparer f et g au voisinage de $+\infty$.

Proposition 3 (Opérations sur les o)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

1. (*Transitivité*) Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$ alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.
2. (*Combinaison linéaire*) Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$ alors $\lambda f(x) + \mu g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.
3. (*Multiplication par un réel **non nul***) Si $\lambda \neq 0$ et $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(\lambda g(x))$.
4. (*Produit*) Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f(x)h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)h(x))$.

Remarque 3

1. *En général, on ne garde pas les constantes multiplicatives à l'intérieure du o grâce au troisième point.*
   Par exemple, si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(2x)$ alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(\frac{1}{2}2x) = \underset{x\to a}{o}(x)$.
   De même, si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(2)$ alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(1)$.
2. ⚠*Attention : d'après le point 2, on a*

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \Rightarrow f(x)+g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$$

   mais il ne faut pas confondre avec

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \quad \text{et} \quad f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \Rightarrow f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)+g(x))$$

   qui est FAUX *(voir le test 5) !*
3. ⚠*Attention : pour utiliser les opérations de la propriété ci-dessus, il faut manipuler des petits o au voisinage d'un même point !*
4. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*

Démonstration : Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$). Pour simplifier, on suppose que les fonctions ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

1. Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$ alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

   donc

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = 0 \times 0 = 0.$$

   Ainsi $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

2. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

donc

$$\lim_{x\to a} \frac{\lambda f(x) + \mu g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \left(\lambda \frac{f(x)}{h(x)} + \mu \frac{g(x)}{h(x)}\right) = 0.$$

Ainsi $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

3. Si $\lambda \neq 0$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\lambda g(x)} = 0$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$.

4. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} = 0$$

Ainsi $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$. ■

Test 5 (***Voir la solution.***)

1. *Montrer que* $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2+1)$ *et que* $x \underset{x\to+\infty}{=} o(-x^2+1)$.
2. *A-t-on* $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2+1+(-x^2+1))$ *?*

1.3 Relation d'équivalence

Définition 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction $\epsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \geqslant \mathrm{V} \cap \mathrm{I} \quad f(x) = \epsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 1.$$

On notera $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Exemple 6

Tout comme $f(x) \underset{x\to a}{=} o(0)$, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ *signifie que* f *est nulle au voisinage de* a. ***Ce sont deux notations à ne jamais écrire!***

Exemple 7

1. *On a* $x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.
   En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ *on a*

$$x^2+1 = \frac{x^2+1}{x^2} \times x^2 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

2. *En revanche,* x^2+1 *n'est pas équivalent à* x^2 *au voisinage de* 0.
   Sinon, au voisinage de 0 *on aurait*

$$x^2+1 = \epsilon(x) \times x^2 \quad \textit{avec} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 1.$$

On obtiendrait alors

$$\lim_{x\to 0} x^2+1 = \lim_{x\to 0} \epsilon(x) \times x^2 = 1 \times 0 = 0$$

ce qui est absurde.

Proposition 4 (Caractérisation)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).
On a

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x)).$$

En pratique, si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 8

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x)$$

1. *Montrons que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$$

par croissance comparée.

2. *Montrons que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{-\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-\ln(x)} + 1 = 1$$

par croissance comparée.

Exemple 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + x^3 + 2x^2 + 1.$$

1. *Montrons que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x^3}{e^x} + \frac{2x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 1$$

par croissance comparée.

2. *Montrons que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2$*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} = 1.$$

3. *Montrons que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3$*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^3} + 1 + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} = 1$$

par limite usuelle.

Test 6 (***Voir la solution.***)

1. *Montrer que $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^5}$.*
2. *Montrer que $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$.*

Proposition 5 (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h et e quatre fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

1. (*Symétrie*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.
2. (*Transitivité*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
3. (*Produit*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} e(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)e(x)$.
4. (*Inverse*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, que $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ au voisinage de a (sauf éventuellement en a) alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
5. (*Puissance*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)^k \underset{x\to a}{\sim} g(x)^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.
6. (*Valeur absolue*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Remarque 4

1. *Un cas particulier du point 3 en prenant $e = h$ donne :*
   si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)h(x)$.
2. *Les points 3 et 4 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec le produit et l'inverse.*
3. ***La relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition : on n'additionne jamais des équivalents !***
4. *Les points 5 et 6 signifient que la relation d'équivalence est compatible avec la composition à gauche par une fonction puissance ou la fonction valeur absolue.*
5. ***La relation d'équivalence n'est pas compatible avec la composition en général : par exemple, on ne passe jamais au logarithme ou à l'exponentielle dans les équivalents !***
6. *En cas de doutes, il est conseillé de revenir à la définition ou à la caractérisation pour s'assurer que l'opération que l'on souhaite effectuer est licite.*

Test 7 (***Incompatibilité avec l'addition, voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x + \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x + \ln(x).$$

1. *Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.*
2. *A-t-on $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x) - x$?*

Test 8 (***Incompatibilité avec la composition,voir la solution.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. *Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.*
2. *A-t-on $e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)}$?*

Proposition 6 (Équivalents usuels)

1. On a les équivalents suivants au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^a - 1 \underset{x\to 0}{\sim} ax \ (a \in \mathbb{R}^*)$$

2. Soient $n > p$ et $(a_p, a_{p+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$.
   - En $+\infty$ et $-\infty$:
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$$
   - En 0 :
   $$a_p x^p + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

Exemple 10

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2+3x^3+x^4}{x^3+6x^5}.$$

1. *Déterminons un équivalent de f en $+\infty$.*
   Par équivalent usuel on a
   $$x^2+3x^3+x^4 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4 \quad \text{et} \quad x^3+6x^5 \underset{x\to+\infty}{\sim} 6x^5.$$
   Par compatibilité avec le quotient, on obtient
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^4}{6x^5} = \frac{1}{6x}.$$

2. *Déterminons un équivalent de f en 0.*
   Par équivalent usuel on a
   $$x^2+3x^3+x^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \quad \text{et} \quad x^3+6x^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^3.$$
   Par compatibilité avec le quotient, on obtient
   $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

Proposition 7 (Limite et équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère a un élément de I ou une borne de I (a peut-être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand x tend vers a alors g admet pour limite ℓ quand x tend vers a.
2. Si f admet une limite **finie et non nulle** ℓ quand x tend vers a alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Exemple 11

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et que* $\ln(1+u) \underset{x\to 0}{\sim} u$, *on a* $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. *Par compatibilité avec le produit, on trouve*

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.

Méthode 1

Pour déterminer un équivalent simple d'une fonction au voisinage d'un point a, on utilise les mêmes méthodes que pour les suites :

1. *on peut procéder de manière directe : souvent de la même manière que pour lever une forme indéterminée (factorisation par le coefficient dominant au voisinage de a, multiplication par la quantité conjuguée...) ;*
2. *on peut parfois déterminer un équivalent à l'aide d'un encadrement par deux fonctions équivalentes entre elles ;*
3. *on peut utiliser les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents.*

Exemple 12

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \ln(x) + e^x$ *en* 0^+.

   Au voisinage de 0^+*, le terme dominant est* $\ln(x)$ *:*

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) = \ln(x)\left(1 + \frac{e^x}{\ln(x)}\right)$$

   où $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{e^x}{\ln(x)}\right) = 1$. *Donc*

$$f_1(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x).$$

2. $f_2(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ *en* 0^+.

   On a

$$\forall x > 0, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{x}(1+x)\right) = -\ln(x) + \ln(1+x) = -\ln(x)\left(1 + \frac{\ln(1+x)}{-\ln(x)}\right)$$

   avec $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{\ln(1+x)}{-\ln(x)}\right) = 1$. *Donc*

$$f_2(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

3. $f_3(x) = \frac{x\ln(x)}{x-1}$ *en* 1.

   Posons $\mathrm{X} = x - 1$ *de sorte que* $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{X} = 0$. *Au voisinage de* 1*, on obtient*

$$f_3(x) = \frac{(\mathrm{X}+1)\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = (\mathrm{X}+1)\frac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}}.$$

   Or $\ln(1+\mathrm{X}) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{X}$ *donc* $\frac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ *par compatibilité avec le quotient. Ainsi :*

$$\lim_{x\to 1} f_3(x) = \lim_{\mathrm{X}\to 0}(\mathrm{X}+1)\frac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = 1$$

   Finalement :

$$f_3(x) \underset{x\to 1}{\sim} 1.$$

Test 9 (*voir la solution.*)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés

1. $f_1(x) = \frac{2x^2+1}{1+x}$ *en* 0 *et en* $-\infty$.
2. $f_2(x) = e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} - 1$ *en* 0^+ *et en* 1.

2 Développements limités

2.1 Développement limité d'ordre 0

Définition 4 (Développement limité d'ordre 0)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.
On dit que f possède **un développement limité à l'ordre** 0 **en** x_0 s'il existe un réel a_0 tel que

$$f(x) = a_0 + \underset{x \to x_0}{o}(1).$$

Remarque 5

Une fonction f définie au voisinage de x_0 possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0 si et seulement si f est continue en x_0. Dans ce cas, $a_0 = f(x_0)$ (en particulier, le développement limité à l'ordre 0 est unique).

Notation 1

On écrira souvent « f admet un $DL_0(x_0)$ » pour dire « f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0 »

2.2 Développement limité d'ordre 1

Définition 5 (Développement limité d'ordre 1)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.
On dit que f possède **un développement limité à l'ordre** 1 **en** x_0 s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)).$$

Notation 2

On écrira souvent « f admet un $DL_1(x_0)$ » pour dire « f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 »

Remarque 6

Si f admet un $DL_1(x_0)$ alors f admet un $DL_0(x_0)$. En effet :

$$\lim_{x \to x_0} a_1(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)) = 0$$

donc $a_1(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)) = \underset{x \to x_0}{o}(1)$. Ainsi

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)) = a_0 + \underset{x \to x_0}{o}(1).$$

Rappel(s) 1 (*Dérivabilité d'une fonction en un point*)

*Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.
On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$: c'est le nombre dérivée de f en x_0.*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Supposons que f est dérivable en x_0.
  1. Déterminons un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$:

     comme f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et vaut $f'(x_0)$. Ainsi, $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est prolongeable par continuité en x_0 par $f'(x_0)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(1).$$

2. En déduire un $DL_1(x_0)$ de f :
comme
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(1)$$
en multipliant par $x-x_0$ membre à membre on trouve :
$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\underset{x\to x_0}{o}(1).$$
Or d'après le point 4 de la proposition 3, $(x-x_0)\underset{x\to x_0}{o}(1)=\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))$ donc
$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)).$$
D'où le DL à l'ordre 1 en x_0 suivant :
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\underset{x\to x_0}{o}(1).$$

► Réciproquement, supposons que f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 : il existe a_0 et a_1 deux réels tels que
$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)).$$

1. Déterminer a_0.
Comme
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}a_0+a_1(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))a_0+a_1(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))=a_0$$
f est continue en x_0 et $f(x_0)=a_0$.
2. Montrer que f est dérivable en x_0 et déterminer a_1.
On a donc
$$f(x)=f(x_0)+a_1(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)).$$
Par conséquent,
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1+\frac{1}{x-x_0}\times\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)).$$
Or d'après le point 4 de la proposition 3, $\frac{1}{x-x_0}\times\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))=\underset{x\to x_0}{o}(1)$ donc
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1+\underset{x\to x_0}{o}(1).$$
Ainsi,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1.$$
La fonction f est donc dérivable en a_1 et $f'(x_0)=a_1$.

On vient de montrer la proposition suivante :

Proposition 8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0\in$ I. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

Remarque 7

On a en fait montré plus que cela : on a montré qu'en cas d'existence, le développement limité à l'ordre 1 est unique et ses coefficients sont donnés par
$$a_0=f(x_0)\quad \textit{et}\quad a_1=f'(x_0)$$

Exemple 13

1. *Au voisinage de 0, par obtient par exemple :*
(a) $e^x=1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)$ *qui s'écrit aussi* $e^x-1=x+\underset{x\to 0}{o}(x)$ *et permet de retrouver l'équivalent* $e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$

grâce à la caractérisation de l'équivalence.

(b) $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ qui permet de retrouver l'équivalent $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ grâce à la caractérisation de l'équivalence.

(c) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ qui s'écrit aussi $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ et permet de retrouver l'équivalent $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$ grâce à la caractérisation de l'équivalence.

2. *Déterminer un $DL_1(2)$ de la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x - 1.$$

La fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = 4 + e^2$ et $f(2) = 3 + e^2$ donc

$$f(x) = 3 + e^2 + (4 + e^2)(x-2) + \underset{x\to 2}{o}((x-2)).$$

2.3 Développement limité d'ordre 2

Définition 6 (Développement limité d'ordre 2)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$.
On dit que f possède **un développement limité à l'ordre** 2 **en** x_0 s'il existe trois réels a_0, a_1 et a_2 tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2).$$

Notation 3

On écrira souvent « f admet un $DL_2(x_0)$ » pour dire « f possède un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de x_0 »

Définition 7 (Partie régulière d'un DL)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant un DL d'ordre n au voisinage de $x_0 \in \mathrm{I}$ avec $n \in [\![0,2]\!]$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ est appelé la **partie régulière** du DL et $\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$ le **reste** du DL.

Remarque 8

1. *Si f admet un $DL_2(x_0)$ alors f admet un $DL_1(x_0)$ (donc aussi un $DL_0(x_0)$). En effet :*

$$a_2(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2) = (x-x_0)\left(a_2(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a_2(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))\right) = 0$. Ainsi donc $a_2(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))$ et

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)).$$

2. *En particulier, on vient de voir que $(x-x_0)^2 = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0))$: un DL d'ordre 2 précise le comportement de f au voisinage de x_0 par rapport au DL d'ordre 1 :*
   - *la partie régulière du DL d'ordre 1 donne une approximation affine de f au voisinage de x_0 ;*
   - *la partie régulière du DL d'ordre 2 donne une approximation quadratique de f au voisinage de x_0.*

Proposition 9

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0 (avec $n \in [\![0,2]\!]$) alors la partie régulière est unique.

Théorème 1 (Formule de Taylor-Young)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est de classe C^2 au voisinage de x_0 alors f admet un DL d'ordre 2 en x_0 donné par

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2).$$

Remarque 9

Attention, contrairement à ce qui se passe pour les DL d'ordre 1*, posséder un DL d'ordre* 2 *en* x_0 *n'implique pas d'être deux fois dérivable en* x_0.

On en déduit les DL usuels suivants :

Proposition 10 (DL usuels en 0)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
3. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Méthode 2 (*Déterminer le DL d'une fonction*)

On peut procéder de différente façon pour déterminer le DL d'une fonction f *au voisinage d'un point* x_0 *:*

1. *si* f *est de classe* C^2 *au voisinage de* x_0*, on peut utiliser la formule de Taylor-Young;*
2. *si l'expression de* f *fait intervenir des DL usuels, on peut utiliser les règles suivantes de calculs avec les* o*,* ***valables uniquement en*** 0 *:*
   (a) $\underset{x\to 0}{o}(x^n) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *et* $\underset{x\to 0}{o}(x^n) - \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *(cf prop 3.2);*
   (b) $x^m \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+m})$ *et* $\underset{x\to 0}{o}(x^m) \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+m})$ *(cf prop 3.4);*
   (c) *si* $m < n$ *alors* $\underset{x\to 0}{o}(x^m) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^m)$ *(cf prop 2 et 3).*

Exemple 14

Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de 0 *de la fonction* f *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+x}$$

f est de classe C^2 *au voisinage de* 0 *car c'est un produit de fonctions de classes* C^2 *au voisinage de* 0*. De plus,*

$$f'(x) = -2e^{-2x}\sqrt{1+x} + e^{-2x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{donc} \quad f'(0) = -\frac{3}{2}.$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4e^{-2x}\sqrt{1+x} - e^{-2x}\frac{1}{\sqrt{1+x}} - e^{-2x}\frac{1}{\sqrt{1+x}} - e^{-2x}\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= e^{-2x}\left(4\sqrt{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

donc $f''(0) = \frac{7}{4}$*. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young, on a*

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Exemple 15

1. *Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de* 0 *de la fonction* f *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \ln(1+x) - x.$$

Par les DL usuels, on a

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Par unicité de la partie régulière, le DL à l'ordre deux de f *en* 0 *est donc*

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. *Déterminer le DL d'ordre 2 au voisinage de* 0 *de la fonction* f *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+x}.$$

Par les DL usuels, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + x \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

Par unicité de la partie régulière, le DL à l'ordre deux de f *en* 0 *est donc*

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Test 10 (*voir la solution.*)

1. *Déterminer le DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction* g *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

2. *En déduire le DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction* h *définie sur* $]-1,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad h(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

2.4 Application à l'étude locale de fonction

- Lever une indétermination pour des calculs de limites.

Méthode 3

*Lorsqu'on ne connaît pas d'équivalents ou qu'on a envie de sommer des équivalents (**chose formellement interdite**), il est souvent judicieux d'utiliser un développement limité.*

Exemple 16

Déterminons $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée. Au voisinage de 0 *on a*

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$$

Or, par DL usuel, on a

$$\ln(1+x)-x=-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc, par la caractérisation des équivalents, on trouve

$$\ln(1+x)-x\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}.$$

De plus, par équivalent usuel et produit, on trouve que $x\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x^2$.

Finalement, par quotient, on obtient

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Test 11 (***voir la solution.***)

On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, par :*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est dérivable en* 0 *et calculer* $f'(0)$.
2. *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* f' *est continue en* 0.

- Position locale d'une courbe par rapport à une tangente.

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant un DL d'ordre 2 au voisinage de $x_0\in\mathrm{I}$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^2).$$

Alors :

1. f est continue en x_0 et $a_0=f(x_0)$,
2. f est dérivable en x_0 et $a_1=f'(x_0)$,
3. l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est
$$y=a_0+a_1(x-x_0),$$
4. si $a_2>0$, la courbe représentative de f est localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0 et si $a_2<0$ la courbe représentative de f est localement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse x_0

Remarque 10

Si $a_2=0$*, on ne peut rien conclure sur la position relative de la courbe représentative de* f *par rapport à sa tangente* *au point d'abscisse x_0.*

Remarque 11 (***Cas particulier important***)

Si $a_1 = 0$, c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$, la tangente est horizontale. Donc :

- *si $a_2 > 0$, la courbe représentative de f est localement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0 donc x_0 est un minimum local ;*
- *si $a_2 < 0$, la courbe représentative de f est localement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse x_0 donc x_0 est un maximum local.*

Exemple 17

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = e^{-2x}\sqrt{1+x}.$$

Étudions la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.
On a vu à l'exemple 14 que

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc, la tangente à la courbe représentative de f en 0 a pour équation

$$y = 1 - \frac{3}{2}x.$$

Comme $\frac{7}{8} > 0$, la courbe représentative de f est située au dessus de la droite $y = 1 - \frac{3}{2}x$ au voisinage du point $(0,1)$.

Test 12 (***voir la solution.***)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+x}+1.$$

Étudier la position locale de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

► Déterminer une asymptote

Définition 8 (Asymptote)

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est **asymptote** à la courbe représentative de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0.$$

Méthode 4

Si au voisinage de $+\infty$ on a

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en $+\infty$ et de plus

- *si $c > 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de son asymptote localement au voisinage de $+\infty$;*
- *si $c < 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de son asymptote localement au voisinage de $+\infty$.*

Exemple 18

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

Déterminer une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

1. *On se ramène à une étude locale en zéro en faisant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$.*

   On a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

donc
$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2. *On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ s'écrit :*
$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+x\times\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
c'est-à-dire
$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. *On conclut :*
Comme
$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} = x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
la droite d'équation $y = x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe. De plus, $-\frac{1}{8}<0$ donc localement au voisinage de $+\infty$ la courbe est sous son asymptote.

Test 13 (***voir la solution.***)

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par
$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad f(x) = \sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}.$$
Déterminer une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

► Étude de séries

Méthode 5

Lorsque le terme général d'une série est trop compliqué pour en déterminer un équivalent facilement, on peut utiliser un DL en, $\frac{1}{n}$.

Exemple 19

Étudions la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
On a au voisinage de 0 :
$$x-\ln(1+x) = x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)$$
donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on a au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
ce qui entraîne que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}.$$
On vérifie que $u_n\geqslant0$ pour tout $n\geqslant1$ et on conclut par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geqslant1}u_n$ converge.

3 Objectifs

1. Connaître la définition de négligeabilité et sa caractérisation.
2. Connaître la définition d'équivalence et sa caractérisation.
3. Savoir montrer que deux fonctions sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre au voisinage d'un point à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
4. Connaître par coeur les croissances comparées en terme de petits o et les équivalents usuels.
5. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.
6. Savoir déterminer un équivalent par encadrement ou de manière directe.
7. Connaître les DL usuels.

8. Savoir déterminer un DL à l'ordre 1 ou 2 de fonctions simples en utilisant la formule de Taylor-Young ou en manipulant les DL usuels.
9. Savoir utiliser les DL pour lever des indéterminations, étudier localement un fonction.

4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

D'après la définition de « o », $f(x) = \underset{x\to a}{o}(0)$ si et seulement si il existe un voisinage V de a et une fonction définie sur V telle que

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = \epsilon(x) \times 0$$

et $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Autrement, une fonction f est un petit o de 0 au voisinage de a si et seulement si f est nulle au voisinage de a.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad et \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *On a*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times \frac{1}{x} = \sqrt{x} \times f(x)$$

et $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$. Donc $g(x) = \underset{x\to 0}{o}\big(f(x)\big)$.

2. *D'autre part,*

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times g(x)$$

et $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $f(x) = \underset{x\to +\infty}{o}\big(g(x)\big)$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1.
   - *Au voisinage de $-\infty$.*
   La fonction f ne s'annule pas au voisinage de $-\infty$ et

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = 0.$$

   Donc $g(x) = \underset{x\to -\infty}{o}\big(f(x)\big)$.
   - *Au voisinage de 0.*
   La fonction g ne s'annule pas au voisinage de 0 et

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+2x-1} = 0.$$

   Donc $f(x) = \underset{x\to 0}{o}\big(g(x)\big)$.

2. *En effectuant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on trouve*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\ln(X)}{e^X} = 0.$$

Ainsi $g(x) = \underset{x\to 0^+}{o}(f(x))$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $x > 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3^x}}{\frac{1}{e^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{3^x}\right)}{\frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{e^x} + \frac{\ln(x)}{2^x} + 1\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x} + \frac{\ln(x)}{2^x} + 1}.$$

Or, par croissance comparée, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{2^x} = 0$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{3^x}}{\frac{\ln(x)}{e^x} + \frac{\ln(x)}{2^x} + 1} = 1.$$

Comme par croissance comparée, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, *on obtient*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ainsi $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(g(x))$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x^2 + 1} = 0$$

donc $x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^2 + 1)$ *et* $x \underset{x \to +\infty}{=} o(-x^2 + 1)$.

2. *Comme* $x^2 + 1 + (-x^2 + 1) = 2$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} x \neq 0$, $x \mapsto x$ *n'est pas négligeable devant* $x \mapsto x^2 + 1 + (-x^2 + 1)$ *au voisinage de* $+\infty$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Pour tout* $x > 0$, *on a*

$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = x^2 + 1.$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^5}} = 1.$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x^5}$.

2. *Pour tout* $x > 0$, *on a*

$$\frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x^5}}{\frac{1}{x^3}} = 1.$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, $\frac{x^2+1}{x^5} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $x > 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + \sqrt{x}}{x + \ln(x)} = \frac{x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\ln(x)}{x}}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ *alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\ln(x)}{x}} = 1$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - x = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g(x) - x = \ln(x).$$
Par croissance comparée, on a donc
$$g(x) - x = \underset{x\to+\infty}{o}(f(x) - x).$$
En particulier, $f(x) - x$ n'est pas équivalent à $g(x) - x$ au voisinage de $+\infty$.

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncer.***)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e$ donc en particulier
$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e.$$
Ainsi $e^{f(x)}$ et $e^{g(x)}$ ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

Correction du test 9 (***Retour à l'énoncer.***)

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points donnés

1. • Au voisinage de 0 : par équivalents usuels
$$2x^2 + 1 \underset{x\to0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to0}{\sim} 1.$$
Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc
$$f_1(x) \underset{x\to0}{\sim} 1.$$
• Au voisinage de $-\infty$: par équivalents usuels
$$2x^2 + 1 \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x^2 \quad \text{et} \quad 1 + x \underset{x\to-\infty}{\sim} x.$$
Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on obtient donc
$$f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x} = 2x.$$

2. • Au voisinage de 0^+. Commençons par étudier la limite en 0^+ de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$. Par continuité de la racine carrée, on a
$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = 0.$$
Or, par équivalent usuel, on sait que $e^u - 1 \underset{u\to0}{\sim} u$. Donc, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$, on trouve par composition des limites :
$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1} = \lim_{u\to0} \frac{e^u - 1}{u} = 1.$$
Ainsi $f_2(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$.
Cherchons maintenant un équivalent simple de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1$ au voisinage de 0. Pour tout $x \geqslant 0$ on a, en multipliant par la quantité conjuguée :
$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1} - (\sqrt{x} + 1) &= \frac{x + 1 - (\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1}.\end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1=2$ *donc* $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1\underset{x\to0^+}{\sim}2$ *et par compatibilité avec le quotient on obtient :*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{-2\sqrt{x}}{2}=-\sqrt{x}.$$

Finalement, par transitivité de la relation d'équivalence :

$$f_2(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\sqrt{x}.$$

- *Au voisinage de* 1*. Commençons par étudier la limite en* 1 *de* $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1$*. Par continuité de la racine carrée, on a*
$$\lim_{x\to1}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-1=\sqrt{2}-2.$$
Donc par continuité de la fonction exponentielle, on a
$$\lim_{x\to1}f_2(x)=e^{\sqrt{2}-2}-1.$$
Comme $e^{\sqrt{2}-2}-1\neq0$, $f_2(x)\underset{x\to1}{\sim}e^{\sqrt{2}-2}-1$.

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Il s'agit d'un DL usuel (* $(1+x)^{-1}$*) donc*
$$g(x)=1-x+\frac{-1(-1-1)}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)=1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2).$$
On peut aussi retrouver le résultat avec la formule de Taylor-Young. La fonction g *est de classe* $\mathscr{C}^2$ *au voisinage de* 0*. D'après la formule de Taylor-Young,* g *possède donc un DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *et plus précisément :*
$$g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2).$$
On a
$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad g'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\quad\textit{et}\quad g''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$
donc en particulier, $g'(0)=-1$ *et* $g''(0)=2$*. Finalement*
$$g(x)=1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2).$$

2. *Remarquons que* $h(x)=e^x\times g(x)$*. On sait que* $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)$ *donc avec la question précédente on obtient :*
$$\begin{aligned}h(x)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\times(1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))\\&=1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))+\underset{x\to0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)).\end{aligned}$$
Or, $\underset{x\to0}{o}(x^2)\times((1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))=\underset{x\to0}{o}(x^2)$ *(si vous n'êtes pas convaincu, montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2). Ainsi*
$$\begin{aligned}h(x)&=1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)+x(1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))+\frac{x^2}{2}(1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2))+\underset{x\to0}{o}(x^2)\\&=1-x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)+x-x^2+x^3+x\times\underset{x\to0}{o}(x^2)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to0}{o}(x^2)+\underset{x\to0}{o}(x^2)\\&=1+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\underset{x\to0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to0}{o}(x^2)+\underset{x\to0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to0}{o}(x^2)}\\&=1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\end{aligned}$$
(si vous n'êtes pas convaincu que $\underset{x\to0}{o}(x^2)+x^3+x\times\underset{x\to0}{o}(x^2)-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}\times\underset{x\to0}{o}(x^2)+\underset{x\to0}{o}(x^2)=\underset{x\to0}{o}(x^2)$*, montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2).*

Par unicité des coefficients du DL d'ordre 2, on en conclut que le DL d'ordre 2 *de* h *au voisinage de* 0 *est*

$$h(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On pouvait aussi utiliser la formule de Taylor-Young!

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Il s'agit de montrer que* $\frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x}$ *possède une limite finie quand* x *tend vers* 0. *Or, pour tout* $x \neq 0$, *comme*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} &= \frac{x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + 1}{x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \quad \textit{d'après les règles de la méthode 2} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad \textit{d'après la caractérisation de la relation d'équivalence} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. *Par opérations sur les fonctions dérivables* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$. *Donc avec, la question précédente, on conclut que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *De plus :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour montrer que f' *est continue en* 0, *il s'agit de montrer que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

En utilisant le DL de l'exponentielle à l'ordre 2 *en* 0, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 - x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1\right)^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2}
\end{aligned}$$

Or $x\left(\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ *donc*

$$\begin{aligned}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{\left(x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2\left(1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2}\\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)}{\left(1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2}\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) = -\frac{1}{2} \quad et \quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 = 1$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)}{\left(1+\frac{1}{2}x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f' *est continue en* 0.

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncer.*)

On va utiliser le théorème 2. Pour cela, commençons par déterminer un DL à l'ordre 2 *de* f *au voisinage de* 0. *Il y a deux façons de faire : soit en utilisant la formule de Taylor-Young, soit en utilisant les DL usuels et les opérations sur les petits o. Procédons de la deuxième façon : par les DL usuels, on sait que*

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}f(x) &= x\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)+1\\ &= x+\frac{1}{2}x^2+\underbrace{x\left(-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}+1\\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).\end{aligned}$$

(si vous n'êtes pas convaincu que $x\left(-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, *montrez-le soit avec la caractérisation de la relation de négligeabilité soit en utilisant la méthode 2). Ainsi* f *possède un DL à l'ordre* 2 *en* 0, *qui est donné par :*

$$f(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après le théorème 2, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ *représentative de* f *au point d'abscisse* 0 *a pour équation*

$$y = 1+x.$$

Comme le coefficient devant x^2 *dans le DL à l'ordre* 2 *en* 0 *de* f *est* $\frac{1}{2} > 0$, *au voisinage de* 0, *la courbe* $\mathscr{C}$ *est située au dessus de la droite d'équation* $y = x+1$.

Correction du test 13 (*Retour à l'énoncer.*)

On va chercher à écrire f *sous la forme*

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. *Dans l'expression de* f, *factorisant par les termes prépondérants en* $+\infty$, *on a pour* $x > 1$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + x\sqrt{1-\frac{1}{x}} \quad \textit{car } \sqrt{x^2} = x \textit{ puisque } x > 0 \\
&= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)
\end{aligned}
$$

Maintenant, comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ *et que* $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{x\to 0}{o}(u^2)$*, alors*

- *en faisant le changement de variable* $u = \frac{2}{x^2}$ *on a*

$$
\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x^2}\right)^2 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{2}{x^2}\right)^2\right) = 1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{2}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
$$

- *en faisant le changement de variable* $u = \frac{-1}{x}$ *on a*

$$
\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{-1}{x} - \frac{1}{8}\left(\frac{-1}{x}\right)^2 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{-1}{x}\right)^2\right) = 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \\
&= x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= 2x - \frac{1}{2} + \frac{7}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{7}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{7}{8x}\right)
$$

donc d'après la caractérisation de la relation d'équivalence,

$$
f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{8x}.
$$

Donc

$$
\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{8x} = 0.
$$

Ainsi, la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{2}$ *est asymptote à la courbe représentative de* f *en* $+\infty$*.*