# TD13-Compléments sur les variables aléatoires réelles

**Exercice 1 (*EDHEC 2016*)**

*Soit $p \in ]0,1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes $U$ et $V$, définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3,1])$, et $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,3])$. On considère également une variable aléatoire $Z$,indépendante de $U$ et $V$, de loi :*

$$P(Z=1) = p \quad \text{et} \quad P(Z=-1) = 1-p$$

*Enfin ,on note $X$ la variable aléatoire , définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

*On note $F_X$ , $F_U$ et $F_V$ les fonctions de répartition respectives des variables $X$,$U$ et $V$ .*

1. *Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de $x$ .*
2. (a) *Établir, grâce au système complet d'évènements $((Z=1),(Z=-1))$ , que :*

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)$$

   (b) *Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :*

   $$x < -3, \quad -3 \leq x \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq x \leq 3 \text{ et } x > 3$$

   (c) *On admet que $X$ est une variable à densité .Donner une densité $f_X$ de la variable aléatoire $X$ .*

   (d) *Établir que $X$ admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.*
3. *On se propose de montrer d'une autre façon que $X$ possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.*

   (a) *Vérifier que l'on a : $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$.*

   (b) *En déduire que $X$ possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.*

   (c) *En déduire que $X$ possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.*

**Exercice 2**

*Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que $Y$ suit la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$.*

*On pose $Z = XY$.*

1. *Déterminer la fonction de répartition $F_Z$ de $Z$.*
2. *Déterminer $P(Z=0)$.*
3. *La variable aléatoire $Z$ est-elle discrète ? à densité ?*

**Exercice 3**

*Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et posons $Y = \max(1, X)$.*

1. *Déterminer la fonction de répartition de $Y$.*
2. *$Y$ est-elle à densité ?*

**Exercice 4**

*Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*Montrer que $X$ est une variable à densité et déterminer une densité de $X$.*

**Exercice 5**

*On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable à densité $X$.*
2. *Déterminer une densité de $X$.*
3. *Calculer $P(0.973 < X \leq 1.2)$.*

**Exercice 6 (*Loi de Laplace*)**

*Soit $c \in \mathbb{R}$. on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. *Déterminer les valeurs de $c$ pour lesquelles $f$ est une densité d'une variable aléatoire $X$.*
2. *Pour ces valeurs, déterminer la fonction de répartition de $X$.*

**Exercice 7**

*Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de $Y$, vérifier si $Y$ est à densité ou non (et déterminer une densité le cas échéant).*

1. $Y = \sqrt{X}$.
2. $Y = X^3$.
3. $Y(\omega) = \frac{1}{X(\omega)}$ *si* $X(\omega) \neq 0$ *et* $Y(\omega) = 0$ *sinon..*

**Exercice 8 (*EDHEC 2002*)**

*Pour tout nombre réel $x$, on note $[x]$ la partie entière de $x$, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.*
*Soit $X$ la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$).*
*On pose $Y = [X]$, $Y$ est donc la partie entière de $X$ et on a :*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leqslant X < k+1].$$

1. (a) *Montrer que $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.*
   (b) *Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.*
   (c) *En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.*
   (d) *Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de $Y$.*
2. *On pose $Z = X - Y$.*
   (a) *Déterminer $Z(\Omega)$.*
   (b) *En utilisant le système complet d'évènements $([Y = k])_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :*

   $$\forall x \in [0,1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

   (c) *En déduire une densité $f$ de $Z$.*
   (d) *Déterminer l'espérance $E(Z)$ de $Z$. Ce résultat était-il prévisible ?*

**Exercice 9 (*EDHEC 2007*)**

*On admet que si $Z_1$ et $Z_2$ sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :*

$$\mathrm{Cov}\,(Z_1, Z_2) = E\,(Z_1 Z_2) - E\,(Z_1)\,E\,(Z_2)$$

*On admet également que si $Z_1$ et $Z_2$ sont indépendantes alors leur covariance est nulle.*
*On considère deux variables aléatoires réelles $X$ et $U$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}\,(0,1)$ et $U$ suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.*
*On pose $Y = UX$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.*

1. (a) *En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :*

   $$\mathrm{P}\,(Y \leq x) = \mathrm{P}\,([U = 1] \cap [X \leq x]) + \mathrm{P}\,([U = -1] \cap [X \geq -x])$$

   (b) *En déduire que $Y$ suit la même loi que $X$.*
2. (a) *Calculer l'espérance de $U$ puis montrer que $E\,(XY) = 0$.*
   (b) *En déduire que $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$.*
3. (a) *Rappeler la valeur de $E\,(X^2)$ et en déduire que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.
   (b) *Montrer, grâce à une intégration par parties que*

   $$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3\int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (c) *En déduire que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ *converge et vaut* $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.
   (d) *Établir finalement que $X$ possède un moment d'ordre $4$ et que $E\,(X^4) = 3$*
4. (a) *Vérifier que $E\,(X^2 Y^2) = 3$.*
   (b) *Déterminer $\mathrm{Cov}\,(X^2, Y^2)$.*
   (c) *En déduire que $X^2$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes. Montrer alors que $X$ et $Y$ ne le sont pas non plus.*

**Exercice 10**

1. *Déterminer la loi du maximum de $2$ variables aléatoires indépendantes $X_1$ et $X_2$ suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.*
2. *Soient $X_1$,...,$X_n$ avec $n \geq 2$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \ldots, X_n)$.*

**Exercice 11**

*Déterminer si les variables aléatoires de l'exercice 7 possèdent une espérance.*

**Exercice 12 (*Loi de Laplace*)**

*Soit $X$ une variables aléatoire suivant une loi de Laplace (voir exercice 6).*

1. *Montrer que $X$ possède une espérance et la calculer.*
2. *Montrer que $X$ possède une variance et la calculer.*

**Exercice 13**

*Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que $f$ est une densité d'une variable aléatoire $X$ dont on donnera la fonction de répartition.*
2. *$X$ possède-t-elle une espérance ? une variance ? si oui, calculer les.*

**Exercice 14**

*On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Montrer que $f$ est une densité de probabilité.*
2. *Par la suite, on note $X$ une variable aléatoire de densité $f$.*
   (a) *Montrer que $X$ possède des moments de tous ordres et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $m_n(X)$.*
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de $X$.*
3. *Déterminer la fonction de répartition de $X$.*
4. (a) *Déterminer la loi de $Y = \ln(X)$.*
   (b) *A l'aide de la loi de $Y$, déterminer si $Y$ possède une espérance, une variance. Les calculer (sous réserve d'existence).*
   (c) *Retrouver les résultats de la question précédente à l'aide du théorème de transfert.*

**Exercice 15**

*Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. (a) *Montrer que $g$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en $0$ ? Est-elle dérivable en $0$ ?*
   (b) *Donner le tableau de variations de $g$ sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de $g$ en $+\infty$).*
   (c) *Étudier la convexité de $g$ sur $]0, +\infty[$.*
   (d) *Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse $0$ de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.*
2. (a) *Montrer que la fonction $g$ est une densité de probabilité. On note $Y$ une variable aléatoire dont une densité est la fonction $g$, et dont la fonction de répartition est notée $G$.*
   (b) *Sans calcul, justifier que la fonction $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
   (c) *Montrer que pour tout réel $x$,*

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (d) *Montrer que la variable aléatoire $Y$ admet une espérance, que l'on calculera.*
3. *On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.*
   (a) *Déterminer la fonction de répartition notée $H$ de la variable aléatoire $Z$.*
   (b) *En déduire que $Z$ est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de $Z$.*
   (c) *La variable aléatoire $Z$ admet-elle une espérance ?*

**Exercice 16**

1. *On considère la fonction $f$ définie pour tout $x$ réel par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad x \in [-1;1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1] \end{cases}.$$

   (a) *Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ . En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ .*
   (b) *Vérifier que $f$ peut être considérée comme une densité.*
2. *On considère dorénavant une variable aléatoire $X$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant $f$ comme densité.*
   (a) *Établir l'existence de l'espérance de $X$ , puis donner sa valeur.*
   (b) *Établir l'existence de la variance de $X$, puis donner sa valeur.*

3. *Montrer que la fonction de répartition de $X$, notée $F_X$, est définie par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

4. *On pose $Y = |X|$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $F_Y$ sa fonction de répartition.*
   (a) *Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque $x$ est strictement négatif.*
   (b) *Pour tout réel $x$ positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction $F_X$.*
   (c) *En déduire qu'une densité de $Y$ est la fonction $g$ définie par :*

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (d) *Montrer que $Y$ possède une espérance et une variance et les déterminer.*
5. *On considère deux variables aléatoires $U$ et $V$, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.*
   *On pose $I = \inf(U;V)$, c'est»à-dire que, pour tout $\omega$ de $\Omega$, on a*

$$I(\omega) = \inf(U(\omega); V(\omega)).$$

   *On admet que $I$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que, pour tout réel $x$, on a*

$$P(I > x) = P((U > x) \cap (V > x)).$$

   *Pour finir, on note $F_I$ la fonction de répartition de $I$.*
   (a) *Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel $x$.*
   (b) *En déduire que $I$ suit la même loi que $Y$.*
6. *On considère plus généralement $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.*
   *On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.*
   *Déterminer la fonction de répartition de $I_n$.*
7. *Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de $Y$*

```
U=...
V=...
if U<V then
    ...
else ...
end
```