Lycée Jean-Jacques Rousseau- Sarcelles 2021-2022

ECE2 – Concours blanc 1

MATHÉMATIQUES 1-TYPE ECRICOME

EXERCICE 1

Partie A : Étude de la matrice A

1. Un calcul donne :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

2. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{X} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & 2z & = & x \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & y \\ -3x & + & 3y & + & z & = & z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & & & = & \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y. \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{X} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme il s'agit d'une vecteur non nul, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est aussi libre et c'est donc une base de $\mathrm{E}_1(\mathrm{A})$.

3. D'après la première question on sait que :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)^3 = \mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 + 3\mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Par conséquent, on a :

$$\mathrm{A}(\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est :

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie B : Recherche d'une solution particulière

4. La fonction $f : x \mapsto x+1$ est affine donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ et $f(]-1,1[) =]0,2[$.
La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $f(]-1,1[) =]0,2[$.
La fonction φ étant la composée $g \circ f$, elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$. De plus :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}.$$
En particulier :
$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$
5. Comme φ est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 d'après la formule de Taylor-Young, elle possède le DL d'ordre 2 suivant en 0 :
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
6. On note P la partie régulière du développement limité obtenu à la question précédente : $\forall x \in]-1,1[$, $\mathrm{P}(x) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2$. Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$ on a :
$$\mathrm{P}(x)^2 = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2\right)^2 = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4.$$
7. Soit $\mathrm{C} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$. D'après la partie A on sait que C^3 est la matrice nulle (donc C^4 aussi) donc :
$$(\mathrm{P}(\mathrm{C}))^2 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{C} - \frac{1}{8}\mathrm{C}^3 + \frac{1}{64}\mathrm{C}^4 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{C} = \mathrm{A}.$$
En prenant $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ on a alors $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

8. D'après l'énoncé f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Il suffit donc de montrer que f est bijectif. Or, on sait que $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Par conséquent f est bijectif.
Ainsi f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
9. (a) On va utiliser la relation suivante, valable pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$
En particulier, comme $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}$ on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(w)) = \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, les coordonnées de $f(w)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(2,1,-2)$. Donc
$$f(w) = (2,1,-2) \quad \text{et} \quad v = (2,1,-2) - (1,0,1) = (1,1,-3).$$
De même, on a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v)) = \mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
D'où :
$$f(v) = (-5,-5,-3) \quad \text{et} \quad u = (-5,-5,-3) - (1,1,-3) = (-6,-6,0).$$
(b) Montrons que la famille $\mathscr{B}' = (u,v,w)$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors on a :
$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & \lambda_3 & = & 0 \\ -6\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Ainsi la famille $\mathscr{B}'$ est libre. De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{A}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi : $f(u) = u$.
De plus, on a par définition de v et u :

$$f(v) = u + v \quad ; \quad f(w) = v + w.$$

Donc :
- les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont $(1,0,0)$;
- les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont $(1,1,0)$;
- les coordonnées de $f(w)$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont $(0,1,1)$.

On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u), f(v), f(w)) = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathrm{T}.$$

(d) Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors P est inversible et d'après les formules de changement de bases on a :

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Enfin

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix}-6&1&1\\-6&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}.$$

10. Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Supposons $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$, alors : $\mathrm{NT} = \mathrm{N}^3 = \mathrm{TN}$.

Soit $\mathrm{N} = \begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$. Alors, on vient de voir que $\mathrm{NT} = \mathrm{TN}$. Or, on a :

$$\mathrm{TN} = \mathrm{NT} \iff \begin{pmatrix}a+d & b+e & c+f\\ d+g & e+h & f+i\\ g & h & i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & a+b & b+c\\ d & d+e & e+f\\ g & g+h & h+i\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} a+d &=& a\\ b+e &=& a+b\\ c+f &=& b+c\\ d+g &=& d\\ e+h &=& d+e\\ f+i &=& e+f\\ h &=& g+h\\ i &=& h+i\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} d&=&0\\ g&=&0\\ h&=&0\\ a&=&e\\ f&=&b\\ h&=&d\\ i&=&a\end{array}\right.$$

$$\iff \mathrm{N} = \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}.$$

(b) Soit N telle que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$. Alors il existe des réels a, b et c telles que :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}.$$

Donc on doit avoir :

$$\begin{pmatrix}a^2 & 2ab & 2ac+b^2\\ 0 & a^2 & 2ab\\ 0 & 0 & a^2\end{pmatrix} = \mathrm{N}^2 = \mathrm{T}.$$

Ainsi, (a,b,c) vérifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ 2ac+b^2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Donc $(a,b,c)=\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)$ ou $(a,b,c)=\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ c'est-à-dire :

$$\mathrm{N}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{N}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

On a ainsi montré que l'ensemble des solutions est inclus dans $\left\{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad , \quad -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\right\}$.

Réciproquement, on vérifie que les matrices

$$\mathrm{N}_1=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{N}_2=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

sont bien solutions de l'équation $\mathrm{N}^2=\mathrm{T}$.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} \quad , \quad -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 4 & -1\\ 0 & 8 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\right\}$.

11. Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^2=\mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}^2\mathrm{P}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} &\Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{MP}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\\ &\Longleftrightarrow (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^2=\mathrm{T}\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=\mathrm{N}_1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}=\mathrm{N}_2\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{PN}_1\mathrm{P}^{-1} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}=\mathrm{PN}_2\mathrm{P}^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi l'équation $\mathrm{M}^2=\mathrm{A}$ possède exactement deux solutions :

$$\mathrm{M}=\mathrm{PN}_1\mathrm{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}=\mathrm{PN}_2\mathrm{P}^{-1}.$$

12. Si E était un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et il contiendrait la matrice nulle. Or ce n'est pas le cas.

EXERCICE 2

Partie A : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n) \quad$ et $\quad v_n=u_n-\dfrac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x)-\ln(x+1).$$

   (a) On sait que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$$

   Par somme, on en déduit donc :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty.$$

   Par ailleurs, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

   Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ donc par composition des limites :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{u\to 1}\ln(u)=0.$$

   Puis, par somme on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}+0=0.$$

(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (je ne détaille pas pourquoi $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable car c'est le même argument que pour la question 4 de l'exercice 1). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.

(d) D'après les questions 1)a) et 1)b), on sait que f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 0.$$

En particulier, on obtient avec la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n) \leqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

(e)

```
function y=u(n)
    y = 0
    for k = 1:n
        y = y + 1/k
    end
    y = y - log(n)
endfunction
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 1)c), on trouve :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= f(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

(b) La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a :

$$g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

Ainsi la fonction g est concave. Sa courbe représentative est donc située sous sa tangente au point d'abscisse 0. Cette tangente a pour équation réduite $y = x$. Ainsi :

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$

En particulier, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Avec la question précédente, on en déduit donc que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) D'après les développements limités usuels :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On en déduit donc :

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a donc :

$$x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit par composition des limites que :

$$\lim_{n\to+\infty} = \frac{\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc, par 2)a) on a bien :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ est à termes positifs par 2)b). D'après la question précédente et le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n^2}$ sont de même nature.

Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n^2}$ converge (c'est, à un facteur $\frac{1}{2}$ près, une série de Riemann convergente). Donc la série de terme général $v_{n+1}-v_n$ est convergente. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(v_{n+1}-v_n)$.

(e) Soit $n \geqslant 2$, par télescopage on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = v_n - v_1 = v_n.$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc vers γ.

3. (a) On sait que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ alors par somme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \gamma.$$

(b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant \gamma.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \gamma \leqslant u_n.$$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a donc :

$$u_n - \frac{1}{n} = v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n.$$

Ainsi :

$$-\frac{1}{n} \leqslant \gamma - u_n \leqslant 0.$$

On en conclut donc :

$$|u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Ainsi : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad |u_n-\gamma| \leqslant \frac{1}{n}.$

(c) Ligne 1 : le programme demande un réel strictement positif à l'utilisateur et le stocke dans la variable `eps`.
Ligne 2 : on affecte la valeur `floor(1/eps)+1` à la variable `n`. La variable `n` vérifie donc `1/n`$\leqslant$ `eps`.
Ligne 3 : on affiche la valeur `u(n)` : d'après la question précédente $|\mathtt{u(n)} - \gamma| \leqslant \frac{1}{\mathtt{n}} \leqslant \mathtt{eps}$.
Ainsi le programme affiche une valeur approchée de γ à `eps` près.

Partie B : Étude d'une série

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\quad a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Par équivalent usuel et compatibilité avec le passage à l'inverse on a :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Comme les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n^2}$ sont à termes positifs cela implique, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, qu'elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n^2}$ est convergente donc la série de terme général a_n converge aussi.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant les indices pairs des indices impairs, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k\in[\![1,2n]\!]\ |\ k \text{ pair}} \frac{1}{k} + \sum_{k\in[\![1,2n]\!]\ |\ k \text{ impair}} \frac{1}{k}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$.

(b) On vérifie que $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ convient.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2k-1} - \frac{1}{k}\right)\\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\\ &= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{d'après 5)a)}\\ &= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\\ &= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k}$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{2n} - u_n + \ln(2) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) + \ln(n) + \ln(2) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 5)c) et 3)a) on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2(u_{2n} - u_n + \ln(2)).$$

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ donc par somme $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\ln(2)$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\ln(2)$.

7. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a, en effectuant le changement de variable $i = k-n$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{i}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}. \qquad (1)$$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$.

(b) Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x\in[0,1]\ h(x) = \frac{1}{1+x}$. Alors on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît la suite des sommes de Riemann de la fonction h sur $[0,1]$ à pas constant. Comme h est continue sur $[0,1]$ on en déduit que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 h(t)dt$.

Or :

$$\int_0^1 h(t)dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right) = 2\int_0^1 h(t)dt = 2\ln(2).$$

EXERCICE 3

Partie A : Une première expérience aléatoire

1.

```
N = input(' Donner un entier naturel non nul') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
      i = 1 ;
      M = N ;
      while grand(1,1,"uin",1,n)>1
            i = i + 1 ;
            M = M-1 ;
      end
      S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. Ici, N=5. La fréquence d'apparition de chaque entier de $[\![1,n]\!]$ est environ égale à $\frac{1}{5}$. On peut donc conjecturer que :

$$\forall k\in[\![1,5]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{5}.$$

On peut donc conjecturer que X suit la loi uniforme sur $[\![1,5]\!]$.

.

3. L'événement $[\mathrm{X}=1]$ est réalisé si et seulement si on obtient la boule noire du premier coup : $[\mathrm{X}=1] = \mathrm{N}_1$. Ainsi :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \mathrm{P}(\mathrm{N}_1) = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

De même, $[\mathrm{X}=2] = \mathrm{B}_1\cap\mathrm{N}_2$ donc d'après la formule des probabilités composées on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{N}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{N}_2) = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\times\frac{1}{\mathrm{N}-1} = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

De même, $[\mathrm{X}=3] = \mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2\cap\mathrm{N}_3$ donc d'après la formule des probabilités composées on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2\cap\mathrm{N}_3) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{B}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2}(\mathrm{N}_3) = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\times\frac{\mathrm{N}-2}{\mathrm{N}-1}\times\frac{1}{\mathrm{N}-2} = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

4. Soit $k \in [\![3, \mathrm{N}]\!]$. De même qu'à la question précédente, on a, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_{k-1} \cap \mathrm{N}_k) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\left(\prod_{i=1}^{k-2} \mathrm{P}_{\mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_i}(\mathrm{B}_{i+1})\right) \mathrm{P}_{\mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_{k-1}}(\mathrm{N}_k) \\
&= \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}} \times \left(\prod_{i=1}^{k-2} \frac{\mathrm{N}-i-1}{\mathrm{N}-i}\right) \times \frac{1}{\mathrm{N}-k-1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

Avec la question précédente on obtient donc :

$$\forall k \in [\![1, \mathrm{N}]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

Ainsi la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![1, \mathrm{N}]\!]$.

5. Le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{N}+1}{2}.$$

Partie B : Une deuxième expérience aléatoire

6. Sachant C_1, pour être en mesure de la discerner de l'urne 2 au j-ième tirage, il faut tirer la boule noire au j-ième tirage. Donc, pour tout entier $j \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{Y}=j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=j) = \frac{1}{\mathrm{N}}.$$

7. Soit $j \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$.
   - Sachant C_1, si $j \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!]$ alors on ne peut pas discerner l'urne 2 de l'urne 1 en j tirages (car on ne sait pas si la boule noire est dans les boules restantes). Donc :

   $$\mathrm{P}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{Y}=j) = 0.$$

   - Sachant C_1 si $j = \mathrm{N}$ alors en N tirages on a obtenu toutes les boules donc on sait de manière certaine qu'elle urne on a choisie. Ainsi :

   $$\mathrm{P}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{Y}=j) = 1.$$

8. Soit $j \in [\![1, \mathrm{N}]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) = \mathrm{P}(\mathrm{C}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{Y}=j) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{Y}=j) = \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\mathrm{C}_1}(\mathrm{Y}=j) + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{\mathrm{C}_2}(\mathrm{Y}=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{N}} & \text{si } j \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\mathrm{N}} & \text{si } j = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, \mathrm{N}]\!], \quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{N}} & \text{si } j \in [\![1, \mathrm{N}-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\mathrm{N}} & \text{si } j = \mathrm{N}. \end{cases}$$

9. La variable aléatoire Y est à support fini donc elle possède bien une espérance. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} j\mathrm{P}(\mathrm{Y}=j) &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-1} j \times \frac{1}{2\mathrm{N}} + \mathrm{N}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mathrm{N}}\right) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{N}} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}-1} j \times + \frac{\mathrm{N}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{N}} \times \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2} + \frac{\mathrm{N}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3\mathrm{N}+1}{4}.
\end{aligned}$$

Partie C : Une troisième expérience aléatoire

10. La variable aléatoire T prend comme valeurs tout les entiers supérieurs ou égaux à 2.
11. Soit $k \geqslant 2$. Il y a deux façons de réaliser $[T = k]$:
    - soit en obtenant $(k-1)$ blanches puis une noire ;
    - soit en obtenant $(k-1)$ noires puis une blanche.

    Ainsi : $[T = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$.
    Les événements $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$ et $N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$ étant disjoints et les tirages indépendants (tirages avec remise), on a donc :

$$\begin{aligned}
P(T = k) &= P((B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)) \\
&= P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(B_i)\right) \times P(N_k) + \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(N_i)\right) \times P(B_k) \\
&= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \times \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \times \frac{N-1}{N}.
\end{aligned}$$

    Ainsi pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$P(T = k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

12. La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(T = k)$ converge absolument. Il s'agit d'une série à termes positifs donc il suffit de voir qu'elle est convergente. Or d'après la question précédente :

$$\forall k \geqslant 2, \quad kP(X = k) = \frac{1}{N} k \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} k \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

    Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(T = k)$ est une combinaison linéaire des séries géométriques dérivées d'ordre 1 convergentes $\sum_{k\geqslant 2} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k\geqslant 2} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$.
    Ainsi la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(T = k)$ converge absolument. Donc T possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(T) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T = k) &= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{N-1}{N})^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{N}(N^2 - 1) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) \\
&= \frac{N^2 - N + 1}{N-1}.
\end{aligned}$$

13. (a) On voit facilement que $[T = 2] = [U = 1]$ donc :

$$P([U = 1] \cap [T = 2]) = P(T = 2) = \frac{2(N-1)}{N^2}.$$

    (b) Soit $k \geqslant 3$. On a vu que :

$$[T = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

    Donc : $[U = 1] \cap [T = k] = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$. Donc par indépendance des tirages :

$$P([U = 1] \cap [T = k]) = P(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) = \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \times \frac{N-1}{N} = \frac{N-1}{N^k}.$$

14. Soit $j \geqslant 2$.

(a) On a vu que :

$$[T = j+1] = (B_1 \cap \cdots \cap B_j \cap N_{j+1}) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_j \cap B_{j+1}).$$

Donc : $[U = j] \cap [T = j+1] = B_1 \cap \cdots \cap B_j \cap N_{j+1}$. Par indépendance des tirages :

$$P([U = j] \cap [T = j+1]) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_j \cap N_{j+1}) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \times \frac{1}{N}.$$

(b) Soit $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$. On a :

$$[T = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) \subset [U = k-1] \cup [U = 1].$$

Donc $[U = j] \cap [T = k] = \varnothing$ et $P([U = j] \cap [T = k]) = 0$.

15. D'après les questions précédentes :
    - $P([U = 2] \cap [T = 4]) = 0$;
    - $P(U = 2) \geqslant P([U = 2] \cap [T = 3]) > 0$;
    - $P(T = 4) > 0$.

    Par conséquent : $P([U = 2] \cap [T = 4]) = 0 \neq P(U = 2)P(T = 4)$. Ainsi les variables aléatoires T et U ne sont pas indépendantes.

16. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([T = k])_{k \geqslant 2}$ on a :

$$\begin{aligned} P(U = 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(U = 1, T = k) \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{N-1}{N^k} \quad \text{d'après 13.} \\ &= \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{N-1}{N^3\left(1 - \frac{1}{N}\right)} \\ &= \frac{2N-1}{N^2}. \end{aligned}$$

17. On sait que $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit $j \geqslant 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([T = k])_{k \geqslant 2}$ on a :

$$\begin{aligned} P(U = j) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(U = j, T = k) \\ &= P(U = j, T = j+1) \quad \text{d'après 14.} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^j. \end{aligned}$$

Ainsi, $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(U = k) = \begin{cases} \frac{2N-1}{N^2} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n & \text{sinon} \end{cases}.$$

• FIN •