# TD9-Applications linéaires

**Exercice 1.**

1. Soient $((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f\left((x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2)\right) &= f\left((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2, t_1 + \lambda t_2)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1 + \lambda x_2) - (t_1 + \lambda t_2) & y_1 + \lambda y_2 + t_1 + \lambda t_2 \\ 3(x_1 + \lambda x_2) + z_1 + \lambda z_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - t_1 & y_1 + t_1 \\ 3x_1 + z_1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x_2 - t_2 & y_2 + t_2 \\ 3x_2 + z_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f\left((x_1, y_1, z_1, t_1)\right) + \lambda f\left((x_2, y_2, z_2, t_2)\right). \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f\left((x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2)\right) = f\left((x_1, y_1, z_1, t_1)\right) + \lambda f\left((x_2, y_2, z_2, t_2)\right).$$

   L'application $f$ est donc linéaire.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} h(P + \lambda Q) &= x(P + \lambda Q)(x + 1) - (x + 1)(P + \lambda Q)(x) \\ &= xP(x + 1) - (x + 1)P(x) + \lambda\left(xQ(x + 1) - (x + 1)Q(x)\right) \\ &= h(P) + \lambda h(Q). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q).$$

   L'application $h$ est donc linéaire.

3. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(M + \lambda N) &= (M + \lambda N)_{1,1} + (M + \lambda N)_{2,2} + (M + \lambda N)_{3,3} + (M + \lambda N)_{4,4} \\ &= M_{1,1} + \lambda N_{1,1} + M_{2,2} + \lambda N_{2,2} + M_{1,1} + \lambda N_{3,3} + M_{4,4} + \lambda N_{4,4} \\ &= g(M) + \lambda g(N). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(M + \lambda N) = g(M) + \lambda g(N).$$

   L'application $g$ est donc linéaire.

**Exercice 2.**

1. - Montrons que $f$ est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= x^2(P + \lambda Q)'(x) - 2x(P + \lambda Q)(x) \\ &= x^2(P'(x) + \lambda Q'(x)) - 2xP(x) - 2\lambda x Q(x) \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q).$$

   L'application $f$ est donc linéaire.

   - Montrons que $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[x]$. Soit $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[x]$. Alors :

$$f(P) = x^2(a_1 + 2a_2 x) - 2x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -2a_0 x - a_1 x^2.$$

   Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$. On en déduit donc que $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[x]$ et est par conséquent un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. - Montrons que $\psi$ est linéaire. Soient $(X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(X + \lambda Y) &= A(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y)B \\ &= AX + \lambda AY - XB - \lambda YB \\ &= AX - XB + \lambda(AY - YB) \\ &= \psi(X) + \lambda \psi(Y). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \psi(X + \lambda Y) = \psi(X) + \lambda \psi(Y).$$

   L'application $\psi$ est donc linéaire.

   - Il est clair que $\psi$ est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 3.**

1. Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = 3x - 2y + 4z.$$

- Montrons que $f$ est linéaire. Soient $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)) &= f((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)) \\ &= 3(x_1+\lambda x_2) - 2(y_1+\lambda y_2) + 4(z_1+\lambda z_2) \\ &= 3x_1 - 2y_1 + 4z_1 + \lambda(3x_2 - 2y_2 + 4z_2) \\ &= f((x_1,y_1,z_1)) + \lambda f((x_2,y_2,z_2)). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1,y_1,z_1)) + \lambda f((x_2,y_2,z_2)).$$

L'application $f$ est donc linéaire.

- Montrons que $F = \ker(f)$ :

$$\begin{aligned} F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x,y,z)) = 0\} \\ &= \ker(f). \end{aligned}$$

2. Soit $g$ l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad g((x,y,z,t)) = (x - y, 2x + z - t).$$

- Montrons que $g$ est linéaire. Soient $((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} & g((x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2)) \\ &= g((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2)) \\ &= (x_1+\lambda x_2 - (y_1+\lambda y_2), 2(x_1+\lambda x_2) + z_1 + \lambda z_2 - (t_1+\lambda t_2)) \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1 + z_1 - t_1) + \lambda(x_2 - y_2, 2x_2 + z_2 - t_2) \\ &= g((x_1,y_1,z_1,t_1)) + \lambda g((x_2,y_2,z_2,t_2)). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$g((x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2)) = g((x_1,y_1,z_1,t_1)) + \lambda g((x_2,y_2,z_2,t_2)).$$

L'application $g$ est donc linéaire.

- Montrons que $G = \ker(g)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in G &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - t = 0 \end{cases} \\ &\iff g((x,y,z,t)) = (0,0) \\ &\iff (x,y,z,t) \in \ker(g). \end{aligned}$$

Ainsi $G = \ker(g)$.

3. Soit $h$ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \quad h(P) = P(1) - P'(1).$$

- Montrons que $h$ est linéaire. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} h(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(1) - (P + \lambda Q)'(1) \\ &= P(1) + \lambda Q(1) - P'(1) - \lambda Q'(1) \\ &= h(P) + \lambda h(Q). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_[x] \times \mathbb{R}_n[x]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q).$$

L'application $h$ est donc linéaire.

- Montrons que $H = \ker(h)$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

$$P \in H \iff P(1) = P'(1) \iff P(1) - P'(1) = 0 \iff h(P) = 0 \iff P \in \ker(h).$$

Ainsi $H = \ker(h)$.

**Exercice 4.**

1. (a) On considère l'application $f$ de l'exercice 1.

- Déterminons le noyau de $f$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in \ker(f) &\iff f((x,y,z,t)) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} y + t = 0 \\ 2x - t = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -2x \\ t = 2x \\ z = -3x. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-2,-3,2)).$$

- Déterminons l'image de $f$. Soit $(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

— **Méthode 1 :** d'après le théorème du rang, on sait que :

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de Im(f) dont le cardinal est égal à $\dim(\mathrm{Im}(f))$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

— **Méthode 2 :** on montre que la famille est libre.

(b) On considère l'application $h$ de l'exercice 1.

- Déterminons le noyau de $h$. Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(h) &\iff h(P) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ &\iff x(a(x+1)^2 + b(x+1) + c) - (x+1)(ax^2 + bx + c) = 0 \\ &\iff ax^2 + ax + c = 0 \\ &\iff a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(h) = \mathrm{Vect}(x).$$

La famille $(x)$ est donc une base de $\ker(h)$.

- Déterminons l'image de $h$. Soit $(1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(h) &= \mathrm{Vect}(h(1), h(x), h(x^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-1, 0, x^2 + x) \\ &= \mathrm{Vect}(1, x^2 + x). \end{aligned}$$

La famille $(1, x^2 + x)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(h)$. De plus elle est échelonnée et formée de polynômes non nuls donc elle est libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(h)$.

2. On considère l'application $f$ de l'exercice 2.

- Déterminons le noyau de $f$. Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ &\iff x^2(2ax + b) - 2x(ax^2 + bx + c) = 0 \\ &\iff -bx^2 - 2cx = 0 \\ &\iff b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(h) = \mathrm{Vect}(x^2).$$

La famille $(x^2)$ est donc une base de $\ker(f)$.

- Déterminons l'image de $f$. Soit $(1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1), f(x), f(x^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-2x, -x^2, 0) \\ &= \mathrm{Vect}(x, x^2). \end{aligned}$$

La famille $(x, x^2)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus elle est échelonnée et formée de polynômes non nuls donc elle est libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. 
- Déterminons le noyau de $f$. Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ &\iff (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Or un polynôme de degré inférieur ou égal à deux possédant trois racine est nul. Donc :

$$P \in \ker(f) \iff (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0) \iff P = 0.$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}.$$

- Déterminons l'image de $f$.

— **Méthode 1 :** d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

— **Méthode 2 :** soit $(1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}(f(1), f(x), f(x^2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,0),(0,0,2)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,1,0)) \\ &= \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

**Exercice 5.**

1. Soient $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}f\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right) &= f\left((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)\right) \\ &= 3(x_1+\lambda x_2)-(y_1+\lambda y_2)+z_1+\lambda z_2 \\ &= 3x_1-y_1+z_1+\lambda(3x_2-y_2+z_2) \\ &= f\left((x_1,y_1,z_1)\right)+\lambda f\left((x_2,y_2,z_2)\right).\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f\left((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)\right) = f\left((x_1,y_1,z_1)\right)+\lambda f\left((x_2,y_2,z_2)\right).$$

   L'application $f$ est donc linéaire.

2. L'image de $f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Donc soit $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 0$ ce qui signifie que $\operatorname{Im}(f) = \{0\}$ ; soit $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$ ce qui signifie que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$. Comme $f$ est non nulle, on en conclut que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.
   D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

   Ainsi $3 = \dim(\ker(f)) + 1$ et donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff 3x - y + z = 0 \iff y = 3x + z.$$

   Ainsi :

$$\ker(f) = \operatorname{Vect}((1,3,0),(0,1,1)).$$

   La famille $((1,3,0),(0,1,1))$ est une famille génératrice de $\ker(f)$ de cardinal égal à $\dim(\ker(f))$. Donc $((1,3,0),(0,1,1))$ est une base de $\ker(f)$.

**Exercice 6.**

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}.$$

   On a :

$$\begin{aligned}f(A+\lambda A') = (&a+\lambda a'+e+\lambda e'+i+\lambda i', c+\lambda c'+e+\lambda e'+g+\lambda g', \\ &a+\lambda a'+c+\lambda c'+g+\lambda g'+i+\lambda i') \\ &= (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i)+\lambda(a'+e'+i', c'+e'+g', a'+c'+g'+i') \\ &= f(A)+\lambda f(A').\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f\left(A+\lambda A'\right) = f\left(A\right)+\lambda f\left(A'\right).$$

   Donc $f$ est linéaire.

2. Comme $\dim\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\right) = 9 > \dim(\mathbb{R}^3)$ alors $f$ n'est pas injective.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}A \in \ker(f) \iff f(A) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ a+c+g+i = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ -e+c+g = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -i \\ c = -g \\ e = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} -i & b & -g \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, (b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de $\ker(f)$.
Montrons qu'elle est libre. Soit $(b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned} & i\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \qquad + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \qquad \iff \begin{pmatrix} -i & b & -g \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ & \qquad \iff b = d = f = g = h = i = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de $\ker(f)$. C'est donc $\mathcal{F}$ une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 6$.

4. D'après le théorème du rang, on déduit :

$$9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 6 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc, comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Ainsi $f$ est surjective.

**Exercice 7.**

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Par conséquent :

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$$

car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Ainsi $y \in \ker(f)$. Cela montre : $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Or, on déduit de la question précédente que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$. D'où

$$3 = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) \leq 2\dim(\ker(f)).$$

Ainsi $\frac{3}{2} \leq \dim(\ker(f))$ et comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier alors on en déduit bien :

$$2 \leq \dim(\ker(f)).$$

Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que $\dim(E) = 3$ alors la dimension de $\ker(f)$ est soit égale à 2 soit égale à 3.
Or, si $\dim(\ker(f)) = 3$ alors $\ker(f) = \mathbb{R}^3$ ce qui implique que $f$ est nulle. Cela contredit l'énoncé.
Donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

**Exercice 8.**

1. Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= (2(x+\lambda x') - (y+\lambda y') + (z+\lambda z'), 3(x+\lambda x') - (z+\lambda z')) \\ &= (2x - y + z, 3x - z) + \lambda(2x' - y' + z', 3x' - z') \\ &= f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) = f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')).$$

Donc $f$ est linéaire.

2. On note $\mathcal{B}_3 = (e_1,e_2,e_3)$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}((2,3),(-1,0),(1,-1)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (a) On sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f((1,2,1))) = A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}((1,2,1)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$f((1,2,1)) = e_1 + 2e_2 = (1,2).$$

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(f) &\iff A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 5x \\ z = 3x \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,5,3))$.

(c) On a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))).$$

Or les coordonnées de $f((1,0,0))$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par la première colonne de $A$, celles de $f((0,1,0))$ par la deuxième colonne de $A$ et celles de $f((0,0,1))$ par la troisième colonne de $A$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2,3),(-1,0),(1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 9.**

1. Montrons que $\varphi$ est linéaire : soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= \varphi(M) + \lambda\varphi(N).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(M+\lambda N) = \varphi(M) + \lambda\varphi(N).$$

L'application $\varphi$ est donc linéaire. Comme elle est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(E_{1,1}), \varphi(E_{1,2}), \varphi(E_{2,1}), \varphi(E_{2,2})) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M \in \ker(\varphi) &\Longleftrightarrow C\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow C\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 2b & + & 2c & = & 0 \\ -2a & + & 2d & = & 0 \\ -2a & + & 2d & = & 0 \\ -2b & - & 2c & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -c \\ a & = & d \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Ainsi : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Or, on a vu que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\ker(\varphi)$. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Par conséquent c'est une base de $\ker(\varphi)$ et $\dim(\ker(\varphi)) = 2$. On en déduit donc :

$$4 = 2 + \mathrm{rg}(\varphi)$$

c'est-à-dire : $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

4. (a) L'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec $A$ est le noyau de $\varphi$. Donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   (b) D'après les questions précédentes, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{C}$.

**Exercice 10.**

On note $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ signifie que :

- la première colonne de $M$ donne les coordonnées de $f(1)$ dans la base $\mathcal{B}$ ;
- la deuxième colonne de $M$ donne les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ ;
- la troisième colonne de $M$ donne les coordonnées de $f(x^2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. - **Noyau de $f$ :** soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors on a :

$$\begin{aligned}P \in \ker(f) &\Longleftrightarrow M \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow M\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 2c & - & a & = & 0 \\ & & b & = & 0 \\ & & 3a & = & 0 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow a = b = c = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f) = \{0\}$.

   - **Image de $f$ :** $f$ est un **endomorphisme** de $\mathbb{R}_2[x]$ injectif. Comme $\mathbb{R}_2[x]$ est de dimension finie tout endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[x]$ est bijectif (donc surjectif). Ainsi $f$ est surjectif d'où :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x].$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(x, x^2+1, x^2-1) &= \mathrm{rg}(x, x^2+1, x^2-1+x^2+1)\\ &= \mathrm{rg}(x, x^2+1, 2x^2)\\ &= \mathrm{rg}(x, x^2+1, x^2)\\ &= \mathrm{rg}(x, x^2+1-x^2, x^2)\\ &= \mathrm{rg}(x, 1, x^2)\\ &= 3.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(x, x^2+1, x^2-1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ de dimension 3. Or $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ donc :

$$\mathrm{Vect}(x, x^2+1, x^2-1) = \mathbb{R}_2[x].$$

Par conséquent, $(x, x^2-1, x^2+1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$. De plus son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[x]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) On note $\mathcal{B}'$ la base de la question précédente. La matrice $M'$ est alors définie par :

$$M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(x), f(x^2+1), f(x^2-1)).$$

Déterminons les coordonnées de $f(x)$, $f(x^2+1)$ et $f(x^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Remarquons que, d'après la remarque en début d'exercice, on a :

$$f(1) = 2 - x^2 \quad ; \quad f(x) = x \quad ; \quad f(x^2) = -1 + 2x^2.$$

Ainsi :

- $f(x) = x$ donc les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(1,0,0)$ ;
- $f(x^2+1) = f(x^2) + f(1) = 1 + x^2$ donc les coordonnées de $f(x^2+1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0,1,0)$ ;
- $f(x^2-1) = f(x^2) - f(1) = 3(x^2-1)$ donc les coordonnées de $f(x^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0,0,3)$.

Finalement, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après les formule de changement de bases on a :

$$M' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} M P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

En notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ on a donc bien l'égalité souhaitée. Enfin :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x, x^2+1, x^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11.**

1. Comme $A$ est une matrice représentative de $\psi$, on sait que le rang de $\psi$ est égal au rang de $A$. Or, le rang de $A$ vaut 1 car toutes les colonnes sont égales et non nulles. Donc le rang de $\psi$ vaut 1.
   En particulier, $\psi$ n'est pas surjective donc ce n'est pas un automorphisme.
2. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f((x,y,z))) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x,y,z)) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$f((x,y,z)) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

3. (a) Montrons que $(u,v,w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,0,0) &\iff \begin{cases} \lambda_1 \quad\quad\quad + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \quad\quad - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 \quad\quad + \lambda_3 = 0 \\ \quad\quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \quad - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 \quad\quad + \lambda_3 = 0 \\ \quad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \quad\quad 3\lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(u,v,w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) D'après la question 2, on a :

$$\psi(u) = (0,0,0) \quad ; \quad \psi(v) = (0,0,0) \quad : \quad \psi(w) = (3,3,3) = 3w.$$

En particulier, les coordonnées dans la base $(u,v,w)$ de :

- $\psi(u)$ sont $(0,0,0)$ ;
- $\psi(v)$ sont $(0,0,0)$ ;
- $\psi(w)$ sont $(0,0,3)$.

Ainsi, la matrice de $\psi$ dans la base $(u,v,w)$ est la matrice $D$ définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $(u, v, w)$. Alors, d'après les formules de changement de base, on a :

$$D = P^{-1}AP.$$

Déterminons $P$ :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ et notons $(a, b, c)$ ses coordonnées dans la base $(u, v, w)$. Alors, on a :

$$X \in \ker(\psi) \iff D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c = 0.$$

Ainsi :

$$\ker(\psi) = \left\{ au + bv\,; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(u, v).$$

En tant que sous-famille d'une famille libre, la famille $(u, v)$ est libre et on vient de voir que c'est une famille génératrice de $\ker(\psi)$. C'est donc une base de $\ker(\psi)$.
De plus,

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(u), \psi(v), \psi(w)) = \mathrm{Vect}((0, 0, 0), (0, 0, 0), 3w) = \mathrm{Vect}(w).$$

Ainsi $(w)$ est une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.