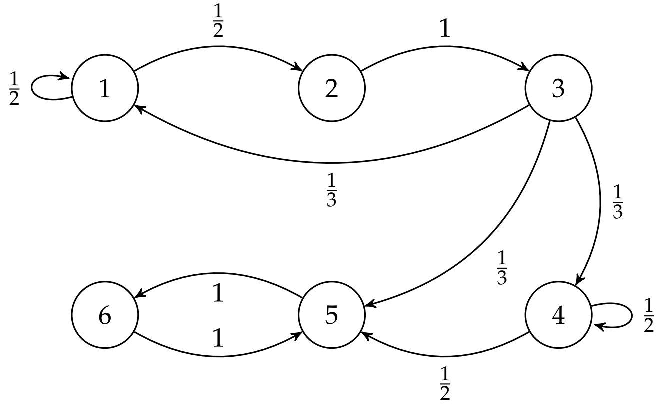
# TD19-Chaînes de Markov

**Exercice 1.** Il faut qu'en chaque sommet, la somme des poids des arêtes soit égale à 1.

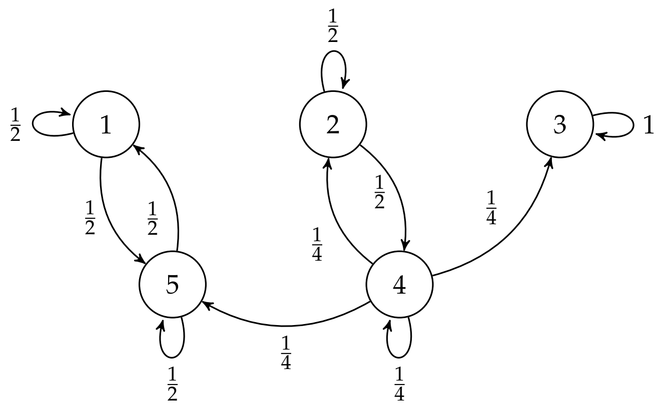
1.




La matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

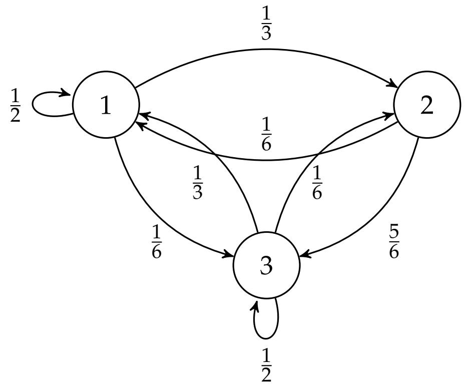



La matrice de transition est :

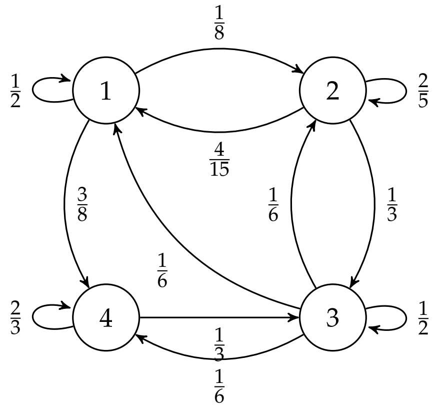
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** On veut que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.




2. $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.




**Exercice 3.**

Les pièces étant équilibrées, chaque variable $Y_n$ suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. On a : $X_1 = Y_1 + Y_0$ et $X_2 = Y_2 + Y_1$ donc :

$$[X_1 = 0] = [Y_1 = 0] \cap [Y_0 = 0] \quad \text{et} \quad [X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] = [Y_2 = 1] \cap [Y_1 = 0] \cap [Y_0 = 0].$$

Or, $X_3 = Y_3 + Y_2$ donc sachant que $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 0] = [Y_2 = 1] \cap [Y_1 = 0] \cap [Y_0 = 0]$ est réalisé $X_3$ ne peut pas valoir 0 (il vaut 1 ou 2 selon la valeur de $Y_3$). Ainsi :

$$P_{[X_1=1]\cap[X_2=0]}(X_3 = 0) = 0.$$

D'autre part, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P_{[X_2=1]}(X_3 = 0) &= P_{[X_2=1]}(X_3 = 0, Y_2 = 0) + P_{[X_2=1]}(X_3 = 0, Y_2 = 1) \\ &= \frac{P(X_2 = 1, X_3 = 0, Y_2 = 0) + P(X_2 = 1, X_3 = 0, Y_2 = 1)}{P(X_2 = 1)} \\ &= \frac{P(Y_1 = 1, Y_2 = 0, Y_3 = 0) + P(Y_1 = 0, Y_2 = 1, Y_3 = 0)}{P(X_2 = 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{P(X_2 = 1)} \quad \text{par indépendance.} \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à calculer $P(X_2 = 1)$. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1, Y_2 = 1) + P(X_2 = 1, Y_2 = 0) \\ &= P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) + P(Y_1 = 1, Y_2 = 0) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$P_{[X_2=1]}(X_3 = 0) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}. = \frac{1}{2}.$$

2. D'après la question précédente :

$$P_{[X_2=1]}(X_3 = 0) \neq P_{[X_1=1]\cap[X_2=0]}(X_3 = 0).$$

Cela montre que $X_3$ ne dépend pas que de la valeur de $X_2$ mais aussi des valeurs de $X_1$ : la suite $(X_n)$ n'est donc pas une chaîne de Markov.

**Exercice 4.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n$ l'événement ≪ obtenir Face au $n$-ième lancer ≫ et $P_n$ l'événement ≪ obtenir Pile au $n$-ième lancer ≫. On note aussi $A_1$ l'événement ≪ on a choisi la pièce non truquée ≫ et $A_2$ l'événement ≪ on a choisi la pièce truquée ≫

1. On cherche $P_{F_n}(F_{n+1})$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_1, A_2)$ on a :

$$\begin{aligned} P_{F_n}(F_{n+1}) &= P_{F_n \cap A_1}(F_{n+1}) P_{F_n}(A_1) + P_{F_n \cap A_2}(F_{n+1}) P_{F_n}(A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. On cherche $P_{P_n}(F_{n+1})$. Sachant qu'on a fait un Pile, on est sûr d'avoir la pièce non truquée donc :

$$P_{P_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{2}.$$

3. On cherche $P_{P_{n-1} \cap F_n}(F_{n+1})$. Sachant qu'on a fait un Pile, on est sûr d'avoir la pièce non truquée donc :

$$P_{P_{n-1} \cap F_n}(F_{n+1}) = \frac{1}{2}.$$

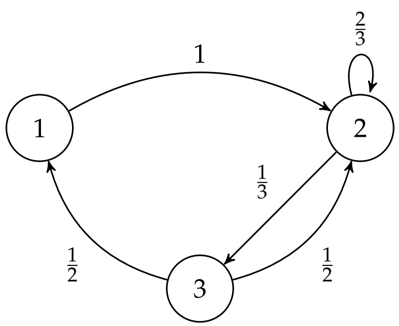
4. D'après les questions précédentes, on remarque :

$$P_{P_{n-1} \cap F_n}(F_{n+1}) \neq P_{F_n}(F_{n+1}).$$

Donc la suite $(X_n)_n$ n'est pas une chaîne de Markov.

**Exercice 5.**

1. On a :




2. La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)$ est le coefficient $(1, 1)$ de la matrice de transition. Ainsi :

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = 0.$$

De même :

$$P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}.$$

3. (a) D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 1) &= P(X_0 = 2) P_{[X_0=2]}(X_1 = 3) P_{[X_0=2, X_1=3]}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(b) La loi de $X_2$ est donnée par le deuxième état $V_2$ de la chaîne, à savoir :

$$V_2 = \begin{pmatrix} P(X_2 = 1) & P(X_2 = 2) & P(X_2 = 3) \end{pmatrix}.$$

Or on sait que :

$$V_2 = V_1 M = V_0 M^2.$$

D'après l'énoncé, $X_0$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ donc on a :

$$V_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Finalement, le calcul matriciel donne :

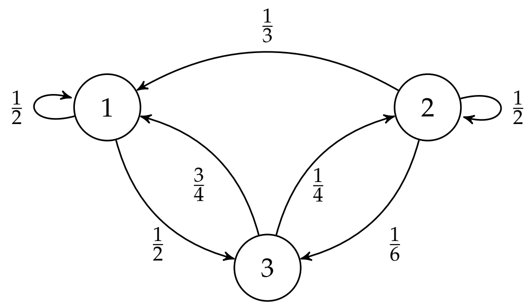
$$V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{13}{18} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$

1. La somme des coefficients sur chaque ligne doit valoir 1 donc on trouve :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe associé :




2. On ne peut pas aller de l'état 1 à l'état 2 en une étape car $P_{1,2} = 0$. En revanche c'est possible en deux étapes : par exemple en allant de 1 à 3 puis de 3 à 2.

3. On suppose que $X_0$ suit la loi certaine de paramètre 1.

   D'après la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([X_1 = 1], [X_1 = 2], [X_1 = 3])$ on a :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1, X_3 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ + P(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 1). \end{aligned}$$

   Comme presque sûrement $X_0 = 1$, l'événement $[X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1]$ est de probabilité nulle (on ne peut pas passer de l'état 1 à l'instant 0 à l'état 2 à l'instant 1). On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1, X_3 = 1) &= P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &+ P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 1). \end{aligned}$$

   D'après la formule des probabilités composées et le fait que $(X_n)$ est une chaîne de Markov, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1, X_3 = 1) &= P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &+ P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 1). \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

   D'après la question précédente on aussi :

$$P(X_2 = 1, X_3 = 2) = 0.$$

4. Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} P &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{a}{2} & + & \frac{b}{3} & + & \frac{3c}{4} & = & a \\ & & \frac{b}{2} & + & \frac{c}{4} & = & b \\ \frac{a}{2} & + & \frac{b}{6} & & & = & c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -\frac{a}{2} & + & \frac{b}{3} & + & \frac{3c}{4} & = & 0 \\ & - & \frac{b}{2} & + & \frac{c}{4} & = & 0 \\ \frac{a}{2} & + & \frac{b}{6} & - & c & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -\frac{a}{2} & + & \frac{b}{3} & + & \frac{6b}{4} & = & 0 \\ & & & & c & = & 2b \\ \frac{a}{2} & + & \frac{b}{6} & - & 2b & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & \frac{11}{3}b \\ c & = & 2b \end{array} \right. \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & 1 & 2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

   Les états stables sont les éléments de $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ dont les coordonnées sont positives et de somme valant 1. Ainsi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \text{ est un état stable } &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{11}{3} & 1 & 2 \end{pmatrix}\right),\ a + b + c = 1,\ a, b, c \geq 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & \frac{11}{3}b \\ c & = & 2b \end{array} \right.,\ b \geq 0 \text{ et } \frac{11}{3}b + b + 2b = 1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & \frac{3}{20} \\ a & = & \frac{11}{20} \\ c & = & \frac{3}{10} \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Finalement le seul état stable est $\begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$.

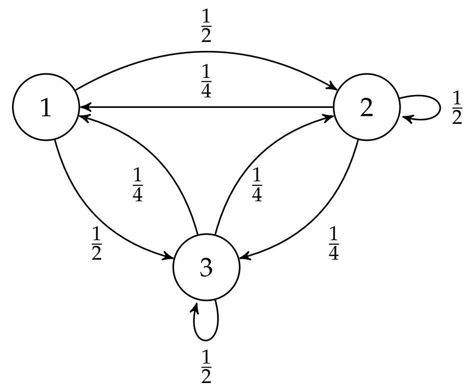
**Exercice 7.** Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut soit neiger soit pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Soit $(X_n)_n$ la suite de variables telle que $X_n$ vaut 1 s'il fait beau temps le $n$-ième jour, 2 s'il neige $n$-ième jour et 3s'il pleut le $n$-ième jour.

   D'après l'énoncé, le temps qu'il fait le $(n+1)$-ième jour ne dépend que du temps de la veille. La suite $(X_n)_n$ est donc une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Le graphe associé :




3. On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le maximum entre $P_{[X_n=1]}(X_{n+2} = 1)$, $P_{[X_n=1]}(X_{n+2} = 2)$ et $P_{[X_n=1]}(X_{n+2} = 3)$.

Soit $i \in \{1,2,3\}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événement $([X_{n+1}=1],[X_{n+1}=2],[X_{n+1}=3])$ on a :

$$\begin{aligned}P_{[X_n=1]}(X_{n+2}=i) &= \sum_{k=1}^{3} P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=k, X_{n+2}=1)\\ &= \sum_{k=1}^{3} P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=k) P_{[X_n=1]\cap[X_{n+1}=k]}(X_{n+2}=1)\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la formule des probabilités composées.

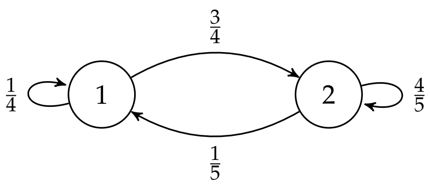
Ainsi, on obtient :

- $P_{[X_n=1]}(X_{n+2}=1) = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ;
- $P_{[X_n=1]}(X_{n+2}=2) = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ ;
- $P_{[X_n=1]}(X_{n+2}=2) = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Finalement, s'il fait beau un jour, les temps les plus probables le surlendemain sont neige ou pluie.

**Exercice 8.**

1. Tel que décrit dans l'énoncé, le véhicule que voit Marguerite a un certain moment ne dépend que du dernier véhicule et pas de tous les véhicules précédents. Ainsi $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ est une chaîne de Markov dont le graphe est




et la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

2. (a) Soit $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Alors on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M \iff \begin{cases} 1/4a + 1/5b &= a \\ 3/4a + 4/5b &= b \end{cases} \iff b = \frac{15}{4}a.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ si et seulement si $b = \frac{15}{4}a$, $a$ et $b$ sont positifs et $a+b=1$.
Or : ‘

$$a + b = 1 \iff \frac{15}{4}a + a = 1 \iff a = \frac{4}{19}.$$

Ainsi l'unique état stable est $\begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{15}{19} \end{pmatrix}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(M) &\iff \det(M - \lambda I_2) = 0\\ &\iff \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{4}{5} - \lambda\right) - \frac{3}{20} = 0\\ &\iff 1 - 21\lambda + 20\lambda^2 = 0\\ &\iff \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(M) = \left\{1, \frac{1}{20}\right\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

- On a :

$$\begin{aligned}X \in E_1(M) &\iff \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = y \end{cases}\\ &\iff x = y.\end{aligned}$$

Ainsi $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- On a :

$$\begin{aligned}X \in E_{\frac{1}{20}}(M) &\iff \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = \frac{1}{20}x \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{1}{20}y \end{cases}\\ &\iff 4x + 15y = 0\\ &\iff y = -\frac{4}{15}x.\end{aligned}$$

Ainsi $E_{\frac{1}{20}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -15 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

- En posant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a alors :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

Un simple calcul donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 4 + 15\left(\frac{1}{20}\right)^n & 15 - 15\left(\frac{1}{20}\right)^n \\ 4 - 4\left(\frac{1}{20}\right)^n & 15 + 4\left(\frac{1}{20}\right)^n \end{pmatrix}.$$

3. Notons $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$V_n = V_0 M^n.$$

Si on note $p = P(X_0 = 1)$ et $q = 1 - p$ alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 M^n \\ &= \frac{1}{19}\left(p\left(4 + 15\left(\tfrac{1}{20}\right)^n\right) + q\left(4 - 4\left(\tfrac{1}{20}\right)^n\right) \quad p\left(15 - 15\left(\tfrac{1}{20}\right)^n\right) + q\left(15 + 4\left(\tfrac{1}{20}\right)^n\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) &= \frac{1}{19} \lim_{n \to +\infty} p\left(4 + 15\left(\frac{1}{20}\right)^n\right) + q\left(4 - 4\left(\frac{1}{20}\right)^n\right) \\ &= \frac{4}{19}(p = q) \\ &= \frac{4}{19} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2) &= p\left(15 - 15\left(\frac{1}{20}\right)^n\right) + q\left(15 + 4\left(\frac{1}{20}\right)^n\right) \\ &= \frac{15}{19}(p = q) \\ &= \frac{15}{19}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(X_n)_n$ converge en loi vers l'état stable.

4. La proportion de camion sur la route est $\frac{4}{19}$.

**Exercice 9.**

1.