TD10-Comparaison de fonctions et DL

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas si l'une des deux fonctions est négligeables devant l'autre au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ *et* $g(x) = \ln(x)$ *en* $+\infty$.
2. $f(x) = x$ *et* $g(x) = \ln(x + x^2)$ *en* $+\infty$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *et* $g(x) = \frac{1}{x}$ *en* 0^+.
4. $f(x) = \ln(x)$ *et* $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ *en* 0^+.

Exercice 2

Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 *et en déduire la limite en* x_0.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ *en* $x_0 = 0$ *puis en* $x_0 = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{5x^4 + 2x^2}$ *en* $x_0 = 0$ *puis en* $x_0 = +\infty$.
3. $h(x) = e^{x^2} - 1$ *en* $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ *en* $x_0 = +\infty$.
5. $j(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ *en* $x_0 = 0$.
6. $k(x) = e^x - 2 + 3x$ *en* $x_0 = 1$.
7. $l(x) = \ln(1 + x)$ *en* $x_0 = +\infty$.
8. $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ *en* $x_0 = +\infty$.
9. $n(x) = \frac{x - \ln(x)}{x+1}$ *en* $x_0 = 0$ *puis en* $x_0 = +\infty$.

Exercice 3

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\forall x \geq 4, \quad \frac{x \ln(x)}{\sqrt{x} + 1} \leq f(x) \leq \sqrt{x+2}\,\ln(x+1).$$

Déterminer un équivalent de f *au voisinage de* $+\infty$.

Exercice 4

Déterminer le DL à l'ordre 2 *des fonctions suivantes en* x_0 *avec la formule de Taylor-Young.*

1. $f(x) = \ln(2 + x)$ *en* $x_0 = 0$.
2. $g(x) = e^{x^2 - 1}$ *en* $x_0 = 2$.

Exercice 5

Déterminer le DL des fonctions suivantes en x_0 *avec les DL usuels et les opérations sur les DL.*

1. $a(x) = -x + \ln(1 + x)$ *en* $x_0 = 0$ *à l'ordre 2.*
2. $b(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$ *en* $x_0 = 0$ *à l'ordre 1.*
3. $c(x) = e^x - \sqrt{1 + x}$ *en* $x_0 = 0$ *à l'ordre 2.*
4. $d(x) = (x + 1)\sqrt{x + 1} - 1$ *en* $x_0 = 0$ *à l'ordre 2.*

Exercice 6

Déterminer un équivalent de la fonction suivante en 0 *à l'aide d'un DL.*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1 + x)}{x^2}.$$

Exercice 7

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $]0, +\infty[$.
2. *Montrer que* f *est dérivable en* 1 *et que* $f'(1) = -\frac{1}{2}$ *(on pourra poser* $u = x - 1$*).*

Exercice 8

Soit g *la fonction définie sur* $I =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{4}[$ *par :*

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}.$$

1. *Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0.*
2. *Montrer que ce prolongement est dérivable en 0.*

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

Faire l'étude locale de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0).