# Exercice 2

1) à 6) : Fait en TD

7) On factorise par le terme dominant dans le logarithme :

$$\ell(x) = \ln(1+x) = \ln\left(x\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)$$
$$= \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

maintenant on factorise encore par le terme dominant

$$\ell(x) = \ln(x)\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} = 1$

Ainsi $\ell(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

8) Pour tout $x > 0$ on a

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

Or par équivalent usuel $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

donc par inverse $\frac{1}{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Ainsi

$$m(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

9) En $0^+$ : $m(x) = \frac{x-\ln(x)}{x+1}$

Par équivalent usuel, $x+1 \underset{x\to0^+}{\sim} 1$

En factorisant le numérateur par le terme prépondérant on a $x - \ln(x) = -\ln(x)\left(\frac{x}{-\ln(x)} + 1\right)$

Or $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{-\ln(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{-\ln(x)} + 1 = 1$

Ainsi $x - \ln(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$

Par quotient, $m(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)$

En $+\infty$ : par équivalent usuel, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$

En factorisant le numérateur par le terme prépondérant on a : $x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$ donc $x - \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x$

Ainsi par quotient,

$$m(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to0^+} m(x) = \lim_{x\to0^+} -\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} m(x) = 1$$

Exercice 3

On a $\sqrt{x}+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ : en effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient on a donc

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(x)$$

D'autre part, $\sqrt{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ : ~~par équivalence~~

en effet, $$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

donc $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1$$

De plus, $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ (voir exo 2 question 7)

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit on a donc

$$\sqrt{x+2}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

Or

$$\forall x \geq 4 \qquad \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \leq f(x) \leq \sqrt{x+2}\ln(x+1)$$

En divisant membre à membre par $\sqrt{x}\ln(x) > 0$ pour $x \geq 4$

on a

$$\frac{x\ln x}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+2)}{\sqrt{x}\ln(x)}$$

Comme $\frac{x\ln x}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x)$ et $\sqrt{x+2}\ln(x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x)$

Alors $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+2)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1$$

Par encadrement, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$

Exercice 4

1) $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $0$ donc d'après la formule de Taylor-Young, $f$ possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{+o}(x^2)$$

Or $f(0)=\ln(2)$ et

$x>-1$, $f'(x)=\dfrac{1}{2+x}$ et $f''(x)=-\dfrac{1}{(2+x)^2}$

donc $f'(0)=\frac{1}{2}$ et $f''(0)=-\frac{1}{4}$

Ainsi $f(x)=\ln(2)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$

2) $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 2 donc, d'après la formule de Taylor-Young, $g$ possède un DL d'ordre 2 en 2 donné par

$$g(x)=g(2)+g'(2)(x-2)+\frac{g''(2)}{2}(x-2)^2\underset{x\to 2}{+o}((x-2)^2)$$

Or $g(2)=e^3$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=2xe^{x^2-1}$ ; $g''(x)=e^{x^2-1}(2+4x^2)$

donc $g'(2)=4e^3$ et $g''(2)=18e^3$

Ainsi
$$\begin{aligned}g(x)&=g(2)+g'(2)(x-2)+\frac{g''(2)}{2}(x-2)^2+\underset{x\to 2}{o}((x-2)^2)\\&=e^3+4e^3(x-2)+9e^3(x-2)^2+\underset{x\to 2}{o}((x-2)^2)\end{aligned}$$

Exercice 5

1) D'après les DL usuels, on sait que
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{+o}(x^2)$$

donc
$$\begin{aligned}a(x)=-x+\ln(1+x)&=-x+x-\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{+o}(x^2)\\&=-\frac{x^2}{2}\underset{x\to 0}{+o}(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi $a$ possède un DL d'ordre 2 en 0 et par unicité son DL est : $a(x)=-\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$

2) D'après les DL usuels, on sait que
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc
$$\begin{aligned}b(x)=\frac{e^x-x-1}{x}&=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-x-1}{x}\\&=\frac{\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x}\\&=\frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)\end{aligned}$$

Ainsi $b$ possède un DL à l'ordre 1 en 0 donné par $b(x)=\dfrac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)$

3) D'après les DL usuels, on sait que
$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2) \text{ et } \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc

$$c(x) = e^x - \sqrt{1+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \underset{x \to 0}{+o}(x^2) - \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \underset{x \to 0}{+o}(x^2)\right)$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

Donc $c(x)$ possède un DL d'ordre 2 donné par

$$c(x) = \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

?) <u>Méthode 1</u> (manipulation des o)

Par les DL usuels, on sait que

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

donc

$$d(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 = (x+1)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)\right) - 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2) + x\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2) + \frac{x^2}{2} + x \underbrace{- \frac{1}{8}x^3 + x \times \underset{x \to 0}{o}(x^2)}_{= \underset{x \to 0}{o}(x^2)}$$

$$=$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2) \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

Ainsi $d$ possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par

$$d(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

<u>Méthode 2</u> (plus efficace)

Comme $(x+1)\sqrt{x+1} = (1+x)^{3/2}$, d'après les DL usuels on a

$$(x+1)\sqrt{x+1} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

Donc

$$d(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

$$= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2) - 1$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \underset{x \to 0}{+o}(x^2)$$

Exercice 6

1) Par DL usuels, on sait que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$e^x - 1 - \ln(1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{+o}(x^2) - 1 - x + \frac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{-o}(x^2)$$
$$= x^2 \underset{x\to 0}{+o}(x^2)$$

Ainsi d'après la caractérisation de la relation d'equivalence

$$e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$$

Donc par compatibilité avec le quotient

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

2) $\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$$= \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2\ln(x)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)} = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)} = 1$$

Finalement,

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$$