Chapitre 11 : Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie et toutes les matrices seront carrées.

1 Éléments propres d'un endormorphisme, d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1 (Valeur propre, vecteur propre)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   - On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de f s'il existe un **vecteur non nul** x de E tel que
   $$f(x) = \lambda \cdot x.$$
   - Dans ce cas, on dit que x est **vecteur propre de f associé à la valeur propre** λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un **vecteur non nul** $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que
   $$\mathrm{AX} = \lambda \cdot \mathrm{X}.$$
   - Dans ce cas, on dit que X est **vecteur propre de** A **associé à la valeur propre** λ.

Remarque 1

1. *Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f, tout vecteur non nul tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ est un vecteur propre associé à λ. En particulier, un vecteur propre est toujours un vecteur non nul!*
2. *Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f, il y a une infinité de vecteurs propres associés à la valeur propre λ : si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ en est un alors pour tout réel $a \neq 0$ le vecteur $a \cdot x$ est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. En effet :*
3. *Les deux remarques ci-dessus s'appliquent évidemment au cas des matrices carrées.*

Remarque 2 (*Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres d'une matrice*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons l'endomorphisme f_{A} de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}.$$
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{X} \neq 0$.

1. *λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de f_{A} ;*
2. *X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si X est un vecteur propre de f_{A} associé à la valeur propre λ.*

Exemple 1

1. *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que les vecteurs*
$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
sont des vecteurs propres de A dont on précisera les valeurs propres associées.

2. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x-2y+z, 2x-z, 2x-2y+z).$$

Montrer que les vecteurs

$$u = (1,1,1) \quad , \quad v = (2,1,2) \quad , \quad w = (1,2,2)$$

sont des vecteurs propres de f dont on précisera les valeurs propres associées.

Test 1 (***Voir solution.***)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P.$$

Montrer que les vecteurs

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X-1 \quad , \quad P_2 = (X-1)^2$$

sont des vecteurs propres de f dont on précisera les valeurs propres associées.

Définition 2 (Spectre)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le **spectre de** f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Proposition 1 (Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres d'une matrice)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On considère une base $\mathscr{B}$ et on note A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $x \in E$ et notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Alors

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x) = \lambda \cdot x \Longleftrightarrow AX = \lambda \cdot X.$$
2. En conséquence :
   - λ est une valeur propre de $f \Longleftrightarrow \lambda$ est une valeur propre de A.
   - $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.
   - x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \Longleftrightarrow$ X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Exemple 2

On reprend l'exemple 1 : soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x - 2y + z, 2x - z, 2x - 2y + z).$$

1. *Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Vérifier la proposition sur cet exemple.*

Dire qu'un réel λ est une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ signifie qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ ou encore que $f(x) - \lambda \cdot x = 0_E$. Ainsi :

Proposition 2

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\} &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas injective} \\ &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas surjective} \\ &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas bijective}\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n \text{ n'est pas inversible}$$

Conséquence(s) 1

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Exemple 3

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ *de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *défini par*

$$\varphi(1) = 2 \quad , \quad \varphi(\mathrm{X}) = -\mathrm{X} + 3 \quad , \quad \varphi(\mathrm{X}^2) = 1 + 3\mathrm{X}^2.$$

Méthode 1 (*Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice*)

On cherche à déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour lesquels le système*

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad (\textit{cas des endomorphismes}) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{AX} = \lambda \cdot \mathrm{X} \quad (\textit{cas des matrices carrées})$$

*possède des solutions **non nuls**. On est donc amené à résoudre un système linéaire à paramètre (très calculatoire).*

Exemple 4

Déterminons les valeurs propres de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 (***Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice***)

1. *Dans le cas d'une matrice, on cherche les* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pour lesquels* $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ *n'est pas inversible c'est-à-dire les* λ *tels que* $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ *n'est pas de rang* n*. On transforme donc la matrice* $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ *en une matrice triangulaire par le pivot de Gauss : les valeurs propres sont alors les valeurs de* λ *pour lesquels au moins un des coefficients diagonaux de la réduite de Gauss est nul.*
2. *Dans le cas d'un endomorphisme, on utilise la proposition 1 pour se ramener au cas d'une matrice.*

Exemple 5

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*. Déterminons le spectre de* A*.*

1. *On cherche à déterminer le rang de* $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_3$ *:*

2. *On en déduit les valeurs propres.*

Test 2 (***Voir solution.***)

1. *Déterminer le spectre de* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. *Soit* g *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est la matrice*

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver le spectre de g*.*

1.2 Sous-espaces propres

Définition 3 (Sous-espaces propres)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.
   Le **sous-espace propre de** f associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $\mathrm{E}_\lambda(f)$ défini par :
   $$\mathrm{E}_\lambda(f) = \left\{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = \lambda \cdot x\right\} = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_\mathrm{E}).$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.
   Le **sous-espace propre de** A associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ défini par :
   $$\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = \lambda \cdot \mathrm{X}\right\} = \ker(\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n).$$

Remarque 3

1. *Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, un sous-espace propre de f est un sous-espace vectoriel de* E. *En effet,*

   De même, si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, un sous-espace propre de A *est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
2. *Le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ **auquel on ajoute le vecteur nul**.*
   De même, le sous-espace propre $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ est l'ensemble des vecteurs propres de A *associés à la valeur propre λ **auquel on ajoute le vecteur nul**.*
3. ⚠ *Si* A *est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B}$, les sous-espaces propres associés à une valeur propre λ de f et de* A ***ne sont pas égaux** en général : $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors que $\mathrm{E}_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de* E. *En revanche, d'après la proposition 1 on a :*
   $$x \in \mathrm{E}_\lambda(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_\mathscr{B}(x) \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$$

Méthode 3

- *Étant données une matrice* A *et une valeur propre λ de* A, *pour déterminer l'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ on résoud le système linéaire $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *Pour un endomorphisme f, on résout l'équation $f(x) = \lambda \cdot x$ qui se ramène à un système linéaire. On peut aussi se ramener au cas des matrices en considérant la matrice de f dans une base.*

Exemple 6

On reprend la matrice A *de l'exemple 5 dont le spectre est $\{2, 4, 6\}$:*

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons $\mathrm{E}_2(\mathrm{A})$.*

2. *Déterminons* $E_4(A)$.

Test 3 (***Voir solution.***)

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Déterminer une base de* $E_6(A)$.

Proposition 3 (Cas particulier de la valeur propre 0)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \iff \ker(f) \neq \{0_E\} \iff f \text{ n'est pas bijective}$$

Dans ce cas, l'espace propre de f associé à 0 est $\ker(f)$.

Remarque 4

Ceci est aussi valable pour les matrices. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ *si et seulement si* A *n'est pas inversible.*

Exemple 7

1. *On reprend les exemples 1 et 2 : soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x - 2y + z, 2x - z, 2x - 2y + z).$$

On a vu que 0 *est valeur propre de* f *donc*

2. *On reprend les exemples 5 et 6 : on considère l'endomorphisme* ψ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *L'endomorphisme* ψ *est-il bijectif?*

3. *Déterminer* $E_2(\psi)$.

Test 4 (***Voir solution.***)

On considère l'endomorphisme ψ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $E_4(\psi)$.

1.3 Éléments propres en Scilab

Scilab (Éléments propres d'une matrice)

Si `A` est une matrice déjà implémentée dans Scilab :

- la commande `spec(A)` renvoie un vecteur colonne dont les éléments sont les valeurs propres de `A`;
- la commande `[P,M]=spec(A)` affecte à la variable `M` une matrice diagonale de même taille que `A` dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de `A` et à la variable `P` une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de `A` correspondant.

Exemple 8

1. *Si on tape :*

```
A=[0,1,-1;-1,2,-1;1,-1,2];
spec(A)
```

2. *Scilab affiche*

```
--> spec(A)
ans =
1.
2.
1.
```

Cela signifie :

Exemple 9

Si on tape :

```
[P,M]=spec(A)
```

1. *Scilab affiche :*

```
M =

1.   0    0
0    2.   0
0    0    1.
```

2. *Scilab affiche*

```
P=

-0.8164966     0.5773503    -0.2264554
-0.4082483     0.5773503     0.5661385
 0.4082483    -0.5773503     0.7925939
```

Cela signifie :

Exemple 10

Si on tape :

```
B=[3,0,8;3,-1,6;-2,0,-5];
[P,M]=spec(B)
```

1. *Scilab affiche :*

```
M =

-1.     0          0
 0     -1.00000    0
 0      0         -1.
```

2. *Scilab affiche*

```
P=

0.     0.7427813     -0.7427814
1.     0.557086      -0.557086
0.   - 0.3713907      0.3713907
```

2 Polynômes annulateurs

Définition 4 (Polynôme d'endomorphisme/de matrice)

Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note P(A) la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{A}^k.$$

   On dit que P(A) est un polynôme de matrice.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On note $\mathrm{P}(f)$ l'endomorphisme de E défini par

$$\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k.$$

   On dit que $\mathrm{P}(f)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Remarque 5

Comme défini au Chapitre 9 (définition 2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

et $f^0 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Exemple 11

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Si* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 3$ *alors*

   $\mathrm{P}(f) =$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) =$.

2. *Si* $\mathrm{P} = 1$ *alors*

   $\mathrm{P}(f) =$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) =$.

3. *Si* $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^3 - 2)$ *alors*

   $\mathrm{P}(f) =$ *et* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) =$.

Définition 5 (Polynôme annulateur)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Remarque 6

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie* E *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E. *On note* A *la matrice de* f *dans la base* $\mathscr{B}$. *D'après les proposition 12 (et la remarque 9) et 14 du Chapitre* 9, *on a :*

$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ est un polynôme annulateur de } f \iff \mathrm{P} \text{ est un polynôme annulateur de } \mathrm{A}.$$

Exemple 12

1. *Le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice et tout endomorphisme.*
2. *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrons que* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$ *est un polynôme annulateur de* A.
3. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x, y)) = (x + y, x + y).$$

Calculer f^2 *et en déduire un polynôme annulateur de* f.

Proposition 4 (Polynôme annulateur et valeurs propres)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et P un polynôme annulateur de f.
   Si un réel λ est une valeur propre de f alors c'est une racine de P. Ainsi
   $$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(\lambda) = 0\}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A.
   Si un réel λ est une valeur propre de A alors c'est une racine de P. Ainsi
   $$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(\lambda) = 0\}.$$

Les valeurs propres sont donc à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Remarque 7

1. *Attention, une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre!*
   Par exemple, le polynôme nul est un polynôme annulateur de id_{E} *et* 3 *est racine du polynôme nul. En revanche,* 3 *n'est pas une valeur propre de* id_{E}.
2. *En dimension finie, un endomorphisme (ou une matrice) possède toujours un polynôme annulateur* ***non nul*** *(voir Test 6).*

Méthode 4 (*Déterminer les valeurs propres avec un polynôme annulateur*)

Si on connaît un polynôme annulateur P *d'un endomorphisme* f *ou d'une matrice* A*, pour en déterminer les valeurs propres on procède ainsi :*

1. *on détermine les racines de* P *;*
2. *pour chaque racine* λ *de* P *on vérifie si* λ *est une valeur propre de* f *(ou de* A*)*
   - *en résolvant* $f(x) = \lambda x$ *(ou* $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$*) :* λ *est alors valeur propre si et seulement si le système possède des solutions* ***non nulles****;*
   - *soit en montrant que* $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ *est/n'est pas inversible.*

Exemple 13

On reprend l'exemple 12.

1. *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *dont un polynôme annulateur est* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$*. Déterminons son spectre.*

2. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = (x+y, x+y).$$

On a vu que le polynôme $X^2 - 2X$ est annulateur de f.

Remarque 8 (*Polynôme annulateur et inversibilité*)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et A une matrice carrée.

1. *Si f (resp. A) possède un polynôme annulateur P dont le terme constant est* ***non nul*** *alors 0 n'est pas racine de P donc n'est pas valeur propre de f (resp. A).*
2. *Dans ce cas, f est bijective (resp. A est inversible) et si on note $P = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ avec $a_0 \neq 0$ on a*

Exemple 14

On reprend l'exemple 12 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P = X^2 + 2X - 3$ *est une polynôme annulateur de A. Montrons que A est inversible et déterminons A^{-1}.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A.*
2. *Déterminer les valeurs propres possibles de A. En déduire le spectre de A et une base de chaque espace propre.*

3. *Montrer que* A *est inversible et déterminer son inverse.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul (le raisonnement est le même pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Rappeler la dimension de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et en déduire que la famille* $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ *est liée.*
2. *En déduire qu'il existe* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*

$$P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$$

soit un polynôme annulateur de A.

3 Réduction des endomorphismes, des matrices

3.1 Famille de vecteurs propres

Proposition 5

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de f et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathcal{F}_i$ une famille libre de $E_{\lambda_i}(f)$. Alors la famille

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$$

est une famille libre de E.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de A et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathcal{F}_i$ une famille libre de $E_{\lambda_i}(A)$. Alors la famille

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$$

est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 9

1. *En particulier, si* $x_1, \ldots, x_p$ *sont des vecteurs propres de* f *associés à des valeurs propres distinctes alors la famille* $(x_1, \ldots, x_p)$ *est une famille libre de* E.
2. *De même, si* $X_1, \ldots, X_p$ *sont des vecteurs propres de* A *associés à des valeurs propres distinctes alors la famille* $(X_1, \ldots, X_p)$ *est une famille libre de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On en déduit donc :

Conséquence(s) 2 (Nombre maximal de valeurs propres distinctes)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f possède au plus n valeurs propres distinctes.
De plus, si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \leqslant n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.
De plus, si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leqslant n.$$

Exemple 15

On reprend l'exemple 1 : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a vu que* 0, 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* A *donc*

3.2 Diagonalisabilité

Définition 6 (Diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que
$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Proposition 6

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ soit diagonale.

Démonstration : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

■

Proposition 7 (Lien entre endomorphisme et matrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Démonstration : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

■

Proposition 8 (Critère de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Notons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right) = n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Alors

$$\mathrm{A} \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})\right) = n.$$

Méthode 5 (*Déterminer les matrices* P *et* D *en cas de diagonalisabilité*)

En cas de diagonalisabilité d'une matrice A*, une fois les valeurs propres et une base des sous-espaces propres déterminées :*

1. *la matrice diagonale* D *est obtenue en mettant sur la diagonale les valeurs propres, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé ;*
2. *les colonnes de* P *sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres que l'on place dans le même ordre que les valeurs propres correspondantes.*

Exemple 16

1. *On reprend l'exemple 6 : on a vu que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *a pour spectre l'ensemble* $\{2, 4, 6\}$ *et que*

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. D'après le test 2, le spectre de* B *est* $\{0, 3\}$*.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* A.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. A *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $A = PDP^{-1}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* B.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. B *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $B = PDP^{-1}$.

Il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables :

Test 9 (*Voir solution.*)

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_1[X]$ *défini par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \psi(P) = P'.$$

1. *Déterminer le spectre de* ψ.
2. *En raisonnant par l'absurde, montrer que* ψ *n'est pas diagonalisable.*

Proposition 9 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exemple 17

On reprend l'exemple 1 : on a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et on a vu que les vecteurs* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres de* A *associés aux valeurs propres* $1, 2$ *et* 0.

Remarque 10

Ce n'est pas une condition nécessaire comme l'illustre le point 2 de l'exemple 16.

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $0, 1$ *et* 4 *sont les trois valeurs propres de* A *et déterminer les sous-espaces propres associés.*
2. *En déduire une matrice diagonale* D *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible* P *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à* 1*, telles que :* $A = PDP^{-1}$.

Théorème 1

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Remarque 11

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. S'il existe une base de E *dans laquelle la matrice de f est symétrique alors f est diagonalisable.*

Exemple 18

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

4 Exemples et applications

4.1 Matrices possédant une seule valeur propre

Il est courant aux concours de rencontrer la situation suivante : vous avez montré qu'une matrice A possède une seule valeur propre et on vous demande si elle est diagonalisable.
Le raisonnement est toujours le même et il est impératif de savoir le refaire :

Exemple 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer que* $(A - 2I_3)^2$.
2. *Déterminer la seule valeur propre de* A.

3. A *est-elle diagonalisable ?*

Test 11 (***Voir solution.***)

La matrice

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

4.2 Puissance de matrices

La diagonalisation fournit une méthode efficace pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.
En effet, soit A une matrice diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

On montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Comme D est diagonale, le calcul de D^n est facile.

Test 12 (***Voir solution.***)

On considère

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $T^2 - 3T$ *et en déduire un polynôme annulateur de* T.
2. *Déterminer le spectre de* T *et une base de chaque sous-espace propre.*
3. *En déduire une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $T = PDP^{-1}$.
4. *En déduire* T^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Étude de commutant

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à étudier (base, dimension) l'espace vectoriel

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

Si A est diagonalisable, il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

Il est souvent plus facile d'étudier C_D puis d'utiliser l'équivalence

$$M \in C_A \Longleftrightarrow P^{-1}MP \in C_D$$

pour en déduire des informations sur C_A.

5 Objectifs

1. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
2. Savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.
3. Étant donné un polynôme P, savoir exprimer $P(f)$ pour f un endomorphisme ou une matrice carrée.
4. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur.
5. Savoir déterminer si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable ou non.
6. Savoir déterminer les matrices P et D telles que $D = P^{-1}AP$ lorsque A est diagonalisable.