Chapitre 6 : Séries

1 Généralités

1.1 Rappels

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle **série numérique de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Cette série est notée $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ et le terme S_n est appelé la **somme partielle** d'indice n de la série.

Définition 2 (Séries convergentes, séries divergentes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0}$ **converge** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite est appelée **somme** de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
- Lorsque la série $\sum_{n\geqslant 0}$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 1

1. *On peut étendre ces définitions aux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définies à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on note $\sum_{n\geqslant n_0}u_n$ la série de terme général u_n et $\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n$ la somme lorsqu'elle existe.*
2. *On note parfois $\sum u_n$ la série de terme général u_n quand il n'y pas d'ambiguïté.*

Exemple 1

1. *La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ est convergente. En effet*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}.$$

La suite des sommes partielles est convergente. Ainsi la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=2$.

2. *La série de terme général la suite constante est divergente. En effet*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n}1=n+1.$$

La suite des sommes partielles est donc divergente.

Remarque 2

1. *Les séries étant des suites particulières, toutes les techniques d'études de ces dernières peuvent s'appliquer aux séries.*
2. *On ne change pas la nature d'une série en commençant la somme à partir d'un certain rang (mais on change la somme lorsqu'il y a convergence).*

Exemple 2

La série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{2^n}$ *est de même nature que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ *donc convergente et* $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

Proposition 1 (Télescopage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \sum (u_{n+1} - u_n) \quad \text{converge.}$$

Exemple 3

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente à l'aide d'un télescopage.*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$
3. *La suite des sommes partielles converge donc la série est convergente.*

Test 1 (***Voir solution.***)

1. *Montrer que* $\forall n > 1$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. *Montrer que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *En déduire que la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Test 2 (***Voir solution.***)

Montrer, à l'aide d'un télescopage, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Proposition 2

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série numérique.
Si la série est convergente alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Remarque 3

1. *On utilise souvent la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une série diverge :*
« Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *ne converge pas vers* 0 *alors la série* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *diverge. »*
Dans ce cas, on dit que la série ***diverge grossièrement****.*
2. *En revanche, la réciproque est fausse (voir le test 3).*

Test 3 (***Voir solution.***)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.
3. *Montrer que* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *n'est pas majorée et en déduire la nature de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

1.2 Séries usuelles

Proposition 3 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum_{k\geqslant 0} q^k$, $\sum_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

- $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,
- $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$,
- $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exemple 4

Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^{2n+1}}$. *Comme, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\frac{k}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3}k\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{27}k\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1},$$

on reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{9} \in]-1,1[$. *La série converge donc et sa somme vaut*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^{2n+1}} = \frac{1}{27}\frac{1}{(1-\frac{1}{9})^2} = \frac{3}{64}.$$

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Proposition 4 (Séries exponentielles)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme e^x.

Test 5 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Proposition 5 (Séries de Riemann)

Soit $a \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Démonstration : Cette preuve illustre la technique dite de *comparaison série /intégrale* qui consiste à ramener l'étude de la série à l'étude d'une intégrale.

On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles.

- Si $a \leqslant 0$ alors la série diverge grossièrement.
- Si $a > 0$, on considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f(t) = \frac{1}{t^a}.$$

1. Montrons que f est décroissante.
   Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$ on a

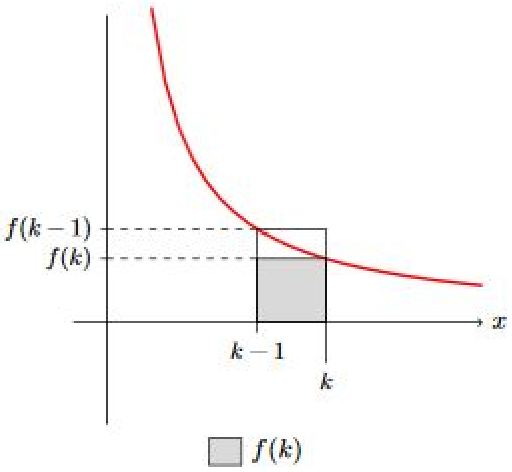
$$f'(t) = -at^{a-1} < 0.$$

   Ainsi f est décroissante.

2. Montrons que pour tout $k \geqslant 2$ on a

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k-1).$$

Soit $k \geqslant 2$. Pour tout $t \in [k-1, k]$ on a :



$$k-1 \leqslant 1 \leqslant k$$

donc, par décroissance de f,

$$f(k-1) \geqslant f(t) \geqslant f(k).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on obtient :

$$f(k-1) = \int_{k-1}^{k} f(k-1)dt \geqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)dt = f(k).$$

3. En sommant ces inégalités pour tout $k = 2, \ldots, n$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k-1)$$

et, en utilisant la relation de Chasles

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k-1).$$

Finalement, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n - 1 \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt \leqslant S_{n-1}.$$

4. On peut maintenant conclure.
On sait que

$$\int_{1}^{n} f(t)dt = \begin{cases} \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_1^n & \text{si } a \neq 1 \\ \left[\ln(t) \right]_1^n & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

- ⋆ Si $a > 1$, on a donc

$$S_n \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt + 1 = \frac{n^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{-a+1} + 1 \leqslant 1 + \frac{1}{a-1}.$$

La suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est donc majorée. De plus, elle est croissante car pour tout $n \geqslant 1$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n^a} \geqslant 0$. Par conséquent, $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

- ⋆ Si $a = 1$, on a donc

$$S_{n-1} \geqslant \int_{1}^{n} f(t)dt = \ln(n)$$

et par comparaison, la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ diverge donc vers $+\infty$.

- ⋆ Si $a < 1$, on a donc

$$S_{n-1} \geqslant \int_{1}^{n} f(t)dt = \frac{n^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{-a+1}$$

et par comparaison, la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ diverge donc vers $+\infty$. ■

Remarque 4

Les étapes clés de la démonstration.

1. *On a une fonction f continue décroissante sur $]0,+\infty[$ et à valeurs positives.*
2. *On montre (en utilisant la décroissance) que*

$$\forall k \geqslant 2, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k-1).$$

3. *On en déduit par sommation*

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = S_{n-1}.$$

4. *Comme f est à valeurs positives, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On utilise alors*
   - *soit la première inégalité pour montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée et on conclut par le théorème de limite monotone;*
   - *soit la seconde inégalité pour montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.*

Exemple 5

1. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente.*
2. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente (ici $a = \frac{3}{2}$).*
3. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (ici $a = \frac{1}{2}$).*

Test 6 (*Voir solution.*)

On considère la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$.

1. *Montrer que le série est convergente et calculer sa somme.*
2. *Avec une boucle* for, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un entier naturel n et qui renvoie la somme partielle d'indice n de la série.*
3. *Avec une boucle* while, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un réel $e > 0$ et qui renvoie l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à e près.*
4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $U = [u_0, \dots, u_n]$ que renvoie $sum(U)$? et $cumsum(U)$?*

2 Séries à termes positifs

Tous les résultats de cette partie seront énoncés pour les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à **termes positifs** c'est-à-dire que $u_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ils restent néanmoins valables pour les séries dont le terme général est positif à partir d'un certain rang.

Par ailleurs, les résultats s'adaptent aux séries à termes négatifs (à partir d'un certain rang) en considérant la série $\sum_{n\geqslant 0} -u_n$.

Proposition 6

Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante. En particulier

- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, la série est convergente et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k;$$

- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, la série diverge vers $+\infty$.

Démonstration : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La deuxième partie de l'énoncer est alors une conséquence directe du théorème de convergence monotone. ■

Exemple 6

Voir les tests 1 et 3

Proposition 7 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'ordre)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.

Exemple 7

Déterminons la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k^2+1}$.

i) Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{k^2+1} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

ii) Or, la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

iii) De plus, les séries sont à termes positifs, donc par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2+1}$ converge.

Exemple 8

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$.

i) Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$.

ii) Or, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

iii) De plus, les séries sont à termes positifs, donc par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Test 7 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Proposition 8 (Comparaison des séries à termes positifs et relation de négligeabilité)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

1. Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.

Démonstration : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Cela signifie qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers 0 et un rang n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\epsilon_n$.
- La suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|\epsilon_n| \leqslant 1$.
- Donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a

$$u_n = |u_n| = |\epsilon_n v_n| = |\epsilon_n||v_n| \leqslant |v_n| = v_n$$

où les deux égalités extrémales proviennent du fait que les séries sont à termes positifs.

- Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ donc les hypothèses de la proposition précédente, qui permet de conclure. ■

Méthode 1 (***Comparaison avec les séries de Riemann***)

En pratique, pour étudier une série à termes positifs, on cherche à la comparer avec une série usuelle et notam-

ment avec une série de Riemann. Par exemple, si $\sum u_n$ est à termes positifs (raisonnement à refaire à chaque fois qu'on l'utilise) :

1. *si $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = 0$ alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^a}\right)$ donc $\sum u_n$ converge si $a > 1$ par comparaison avec une série de Riemann;*
2. *si $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = +\infty$ alors $\frac{1}{n^a} = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ donc $\sum u_n$ diverge si $a \leqslant 1$ par comparaison avec une série de Riemann.*

Exemple 9

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-n}$.

1. *On cherche le terme général d'une série usuelle devant lequel ne^{-n} est négligeable.*
   Par croissance comparée, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot ne^{-n} = \lim_{n\to+\infty} n^3 e^{-n} = 0$$
   donc $ne^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
2. *On vérifie que les deux séries que l'on compare sont à termes positifs :*
   Or les séries sont à termes positifs.
3. *On conclut.*
   De plus, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-n}$ converge.

Exemple 10

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$.
Par croissance comparée, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$
donc $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$. De plus, les séries $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Test 8 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27} + 2n^3)3^{-n}$.

Proposition 9 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'équivalence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Démonstration : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- On suppose que $u_n \sim v_n$. Cela signifie qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers 1 et un rang n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n \epsilon_n$.
- La suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|\epsilon_n - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, c'est à dire $\frac{1}{2} \leqslant \epsilon_n \leqslant \frac{3}{2}$.
- Donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ on a donc
  $$\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n.$$
- D'après la proposition 7, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge aussi (en utilisant l'inégalité gauche) et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi (en utilisant l'inégalité droite). ■

Méthode 2

1. *En pratique, pour déterminer la nature d'une série à termes positifs $\sum u_n$, on peut chercher un équivalent simple v_n de son terme général puis on étudie la série $\sum v_n$.*
2. *Si $\sum u_n$ est à termes positifs et que $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = \ell > 0$ alors $u_n \sim \frac{\ell}{n^a}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ par comparaison avec une série de Riemann.*

Exemple 11

Déterminons la nature de la série $\sum \frac{2n^2+2n-12}{5n^3+6}$.

1. *Recherche d'un équivalent simple.*
   On a $\dfrac{2n^2+2n-12}{5n^3+6} \sim \dfrac{2}{5n}$.
2. *Conclusion : les séries sont à termes positifs à partir d'un certain rang et la série de Riemann* $\sum \dfrac{2}{5n}$ *diverge.*
   D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{2n^2+2n-12}{5n^3+6}$ *est divergente.*

Test 9 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
2. $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$.
3. $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$.

Exemple 12 (***Contre-exemple quand les suites ne sont pas à terme positifs***)

En TD nous verrons des exemples qui montrent que les résultats de cette partie ne s'appliquent pas aux séries de termes quelconques.

3 Séries à termes quelconques

Définition 3 (Convergence absolue)

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 13

1. *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *est absolument convergente.*
2. *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *n'est pas absolument convergente.*

Proposition 10

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple 14

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *est convergente car elle est absolument convergente.*

Remarque 5

La réciproque de la proposition précédente est fausse ! Il est donc faux de conclure qu'une série est divergente parce qu'elle n'est pas absolument convergente.

Exemple 15

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *n'est pas absolument convergente et est convergente (voir TD).*

Exemple 16

Étudions la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$. *La série n'est pas à termes positifs donc on va étudier la série* $\sum \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$.

1. *Recherche d'un équivalent : comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$ *on a*
   $$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{puis} \quad \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \sim \frac{1}{n^2}$$ *par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue.*
2. *Comparaison : de plus, les séries* $\sum \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ *et* $\sum \frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Comme la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est convergente, la série* $\sum \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ *converge aussi.*

3. Conclusion : *la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.*

⚠ *Il est faux de dire : « $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ converge » car les séries qui interviennent ne sont pas à termes positifs !*

Test 10 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$.

4 Bilan : méthode et erreurs à ne pas commettre

4.1 Plan d'étude d'une série

1. Le terme général tend-il vers 0 ?
   - $\hookrightarrow$ non : la série diverge grossièrement
   - $\hookrightarrow$ oui : la série peut être divergente ou convergente, il faut poursuivre l'étude.
2. Le terme général est-il positif (à partir d'un certain rang) ?
   - $\hookrightarrow$ oui : on peut alors essayer d'utiliser les théorèmes de comparaison, équivalence ou négligeabilité pour les séries à termes positifs ; on essaie alors de comparer avec les séries usuelles (notamment les séries de Riemann) ;
   - $\hookrightarrow$ non : il faut poursuivre l'étude.
3. Si la série est à terme quelconque on peut essayer de
   - $\hookrightarrow$ montrer qu'elle est absolument convergente ;
   - $\hookrightarrow$ calculer les sommes partielles si on reconnaît des séries usuelles ou une somme télescopique.

Remarque 6

Le point 2 s'applique aussi dans le cas où le terme général est négatif (il suffit d'appliquer les résultats à la série $\sum -u_n$).

4.2 Erreurs à ne pas commettre

1. Il ne faut pas confondre :
   - $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ (qui désigne la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$) ;
   - $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ (qui désigne la somme partielle d'indice n de la série) ;
   - $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ (qui désigne la somme de la série **lorsqu'elle est convergente**).
2. Il ne faut jamais écrire $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **avant** d'avoir justifié la convergence de la série.
3. Il ne faut surtout pas écrire « $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge » : c'est une erreur impardonnable !
4. Il ne faut pas utiliser les théorèmes de comparaison, équivalence ou négligeabilité pour les séries à termes positifs sans avoir vérifié que les séries en question sont bien à termes positifs !
5. Le fait que $u_n \sim v_n$ **n'implique pas** que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ ni que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$!
6. La convergence absolue implique la convergence mais la réciproque est fausse !

5 Objectifs

1. Savoir étudier la nature d'une série en utilisant les outils connus sur les suites, connaître les propriétés des opérations sur les séries, savoir reconnaître un télescopage, connaître les séries usuelles (programme d'ECE1).
2. Connaître la nature des séries de Riemann.
3. Connaître par coeur les critères de convergence des séries à termes positifs (comparaison, négligeabilité, équivalence).
4. Savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.

5. Savoir montrer qu'une série à termes quelconque est convergente en utilisant la convergence absolue.
6. Savoir écrire un programme Scilab calculant un/les termes successifs d'une série.
7. Savoir écrire un programme Scilab renvoyant l'indice à partir duquel une suite ou une série atteint sa limite à une erreur fixée près.

6 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncer.***)

1. *On a* $\forall n > 1$
$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geqslant \frac{1}{n^2}$$
car $n(n-1) \leqslant n^2$.

2. *Pour tout* $n \geqslant 1$ *on a*
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{d'après la question précédente}\\ &\leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{par télescopage}\\ &\leqslant 2.\end{aligned}$$
Ainsi $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*

3. *Pour tout* $n \geqslant 1$, *on a*
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$
donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est croissante. De plus, elle est majorée donc elle converge. Ainsi la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncer.***)

Pour tout $n \geqslant 1$, *on a*
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n.$$
Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, *on a*
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$
Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncer.***)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Or, pour tout $k \leqslant 2n$, *on a* $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ *donc*
$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. *Montrons par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.
   - ⋆ *Initialisation :* $S_{2^0} = S_1 = 1 \geqslant 0$.
   - ⋆ *Hérédité : supposons que* $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}^*$ *et montrons que* $S_{2^{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{2}$.
   Comme $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, *d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a :*
$$S_{2^{n+1}} \geqslant S_{2^n} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$
   - ⋆ *Par le principe de récurrence, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.

3. *D'après la question précédente $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas majorée. En effet, supposons qu'elle le soit : il existe un réel* $A > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant A$. *Alors pour un entier* N *tel que* $N > 2A$ *on a*

$$A < \frac{N}{2} \leqslant S_{2^N} \leqslant A$$

ce qui est absurde! Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est non majorée. De plus, elle est croissante car Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

Par convergence monotone, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ diverge donc vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)+k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée seconde et première de raison $\frac{1}{2} < 1$, donc toutes deux convergentes. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 6.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ et, le cas échéant, calculer sa somme. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k+7}{2^k k!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k (k-1)!} + 7\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} + 7\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(k)!} + 7\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+7}{2^n n!} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + 7e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *En procédant comme au test 4, on montre que la série est convergente et que sa somme vaut $\frac{3}{2}$.*
2. *Avec une boucle* for

```
function s =somme(n)
    s=0
    for i=0:n
          s=s+i^2/3^i
endfunction
```

3. *Avec une boucle* while

```
function n =indice(e)
    n=0
    s=0
    while abs(s-3/2)>e
          s=s+n^2/3^n
          n=n+1
```

```
endfunction
```

4. On a $cum(\mathrm{U}) = u_0 + \cdots + u_n$: c'est la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$.
On a $cumsum(\mathrm{U}) = [u_0, u_0 + u_1, \ldots, u_0 + \cdots + u_n]$ c'est la liste des sommes partielles d'indices 0 à n de la série $\sum u_n$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. Pour tout $n \geqslant 1$, $n^2 + \sqrt{n} \geqslant n^2$ donc $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Par suite, pour tout $n \geqslant 1$
$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Or, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est convergente.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, $\sqrt{n^3-1} \leqslant \sqrt{n^3}$ donc
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}.$$
Or, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann divergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ est divergente.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

Par croissance comparée et opération sur les limites,
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot (n^{27} + 2n^3)3^{-n} = 0$$
donc $(n^{27} + 2n^3)3^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. De plus, les séries $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27} + 2n^3)3^{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27} + 2n^3)3^{-n}$ est convergente.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

1. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$. Or les séries $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.
2. Pour tout $n \geqslant 0$ on a
$$\frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{4^n\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n - 1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$. Par conséquent, $\frac{2^n-3^n}{2^n-4^n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Or la série $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ est à termes positifs car pour tout $n \geqslant 0$, $2^n - 3^n \leqslant 0$ et $2^n - 4^n \leqslant 0$. La série $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est aussi à termes positifs et converge (série géométrique de raison < 1). Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ est convergente.
3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$ on a
$$\frac{n^2-4}{e^n - n - 2\ln n} = \frac{n^2}{e^n} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n}{e^n} - 2\frac{\ln n}{e^n}}.$$
De plus, par croissances comparées, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}$$

donc, par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}} = 1.$$

Cela montre que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} \sim \frac{n^2}{e^n}$.

(b) De plus, toujours par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{n^2}{e^n} = 0$ donc $\frac{n^2}{e^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les séries $\sum \frac{n^2}{e^n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série $\sum \frac{n^2}{e^n}$ converge.

(c) Comme $e^n - n - 2\ln n = e^n(1-ne^{-n}-2e^{-n}\ln n)$, on en déduit par croissance comparée que

$$\lim_{n\to+\infty} e^n - n - 2\ln n = +\infty.$$

En particulier, $e^n - n - 2\ln n$ est positif à partir d'un certain rang.

(d) Finalement, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$ converge

Remarque : on peut remplacer les étapes (a) et (b) par le calcul suivant :

$$n^2 \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \frac{n^4}{e^n} \frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}$$

pour montrer, par croissance comparée, que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puis conclure par le critère de comparaison. Dans les deux cas, il convient de justifier soigneusement que la série est à termes positifs à partir d'un certain rang car ce n'est pas si évident.

Correction du test 10 (***Retour à l'énoncer.***)

Montrons que la série est absolument convergente. On a

$$\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} = \frac{(-1)^n n^5}{e^n} \frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}}$$

où $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}} = 1$. Ainsi, $\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \sim \frac{(-1)^n n^5}{e^n}$ donc

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \sim \frac{n^5}{e^n}$$

puis

$$n^2 \cdot \left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \sim \frac{n^7}{e^n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^7}{e^n} = 0$ par croissance comparée donc

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Les séries $\sum \left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série $\sum \left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ converge. Donc $\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$ est absolument convergente. En particulier elle converge.