ECG2 – Mathématiques

CONCOURS BLANC 1-MATHÉMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type EM Lyon (pages 2 à 12) ;

— un sujet type HEC mathématiques 1 .

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type EM Lyon

Exercice 1

Partie A

1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Donc Y suit une loi géométrique de paramètre p.

2. La variable aléatoire Y possède une espérance et une variance. On en déduit que X possède une espérance et une variance données :

$$E(X) = E(Y - 1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y - 1) = V(Y) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

3.
```
import numpy as np
def simule_X(p):
    Y = 1
    while np.rand() > p :
        Y = Y+1
    return Y-1
```

Partie B

4.
```
    def simule_Z(n,p):
        Z = 1
        for i in range(1,n+1):
            s = 0
            for j in range(1,Z+1):
                s = s + simule_X(p)
            Z = s
        return Z
```

5. (a) Comme $Z_0 = 1$, $u_0 = 0$ et comme Z_1 suit la loi de la variable X alors $u_1 = p$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[Z_n = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jeton après la n-ième activation de la machine. Donc forcément après la $(n + 1)$-ième activation de la machine il n'aurait plus de jeton. Ainsi :
$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$
   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

6. (a) Soient m et n deux entiers naturels avec $m < n$. Alors par croissance :
$$B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$$
   donc est disjoint de $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$.

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est inclus dans A_n alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset B$.

   Réciproquement, soit $\omega \in B$. Alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $\omega \in A_n$. Si on note k le plus petit des entiers pour lequel $\omega \in A_n$ alors $\omega \in B_k \subset \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset B$.

   Ainsi $B = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} P(B_n) &= \sum_{n=1}^{N} P(B_n) + P(A_0)\\ &= \sum_{n=1}^{N} (P(A_n) - P(A_{n-1})) + P(A_0)\\ &= P(A_N) - P(A_0) + P(A_0) \quad \text{par télescopage}\\ &= P(A_N).\end{aligned}$$

D'après la propriété rappelée dans l'énoncé, on en déduit bien :

$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

7. On a $R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [Z_n = 0]$. Or d'après la question 5.(*a*), la famille $([Z_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après la question 6, on en déduit :

$$P(R) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

8. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que $[Z_1 = k]$, la machine définit k variables indépendantes $X_1, \dots, X_k$ de même loi que X et $Z_2 = X_1 + \cdots + X_k$. Or, les variables X_i prenant des valeurs positives, on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Z_2(\omega) = 0 \Longleftrightarrow X_1(\omega) = \cdots = X_k(\omega).$$

Ainsi par indépendance on en déduit :

$$P_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_k = 0) = p^k = u_1^k.$$

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)(u_n)^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k (u_n)^k\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} (u_n(1-p))^k\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k\\ &= \frac{p}{1-qu_n} \quad \text{car } qu_n \neq 0.\end{aligned}$$

9. (a) En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$\ell = \frac{p}{1-q\ell}.$$

En multipliant par $1 - q\ell$ membre à membre, on obtient :

$$(1-q\ell)\ell = p$$

c'est-à-dire :

$$p - (1-q\ell)\ell = 0.$$

Donc, on a :

$$(\ell-1)(q\ell-p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = q\ell^2 - \ell + p = -\ell(1-q\ell) + p = 0.$$

(b) On suppose $p \geqslant \frac{1}{2}$. D'après la question précédente, soit $\ell = 1$ soit $\ell = \dfrac{p}{q}$.

Or $p \geqslant \frac{1}{2}$ donc $q = 1 - p \leqslant \frac{1}{2}$ et ainsi $\dfrac{p}{q} \geqslant 1$.

Comme par ailleurs, $\ell \in [0,1]$, on en déduit que $\ell = 1$.

Ainsi d'après la question 7 : $P(R) = 1$.

(c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$ ».

- Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence on sait que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{p}{q}.$$

Donc :

$$-p \leqslant -qu_n \leqslant 0$$

puis

$$1-p \leqslant 1-qu_n \leqslant 1$$

et finalement :

$$p \leqslant u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n} \leqslant \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right].$$

On en déduit que $\ell \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$. Or $p < \frac{1}{2}$ donc $q = 1-p > \frac{1}{2}$ et ainsi $\dfrac{p}{q} < 1$.

Ainsi d'après la question 7 : $\mathrm{P(R)} = \ell < 1$.

(d) Le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car presque sûrement le joueur sera ruiné en temps fini.

Partie C

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $[\mathrm{T} \leqslant n] = [\mathrm{Z}_n = 0]$ donc $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T est à valeurs entières et que $[\mathrm{T} \leqslant n] \subset [\mathrm{T} \leqslant n+1]$ alors :

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \mathrm{P}(n-1 < \mathrm{T} \leqslant n) = \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n] \setminus [\mathrm{T} \leqslant n-1]) = \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n]) - \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n-1]) = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n.$$

11. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n(v_{n-1} - v_n) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nv_{n-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nv_n \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1)v_k - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nv_n \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (n+1)v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} nv_n \\
&= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} ((n+1)v_n - nv_n) - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} \\
&= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

12. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

(a) D'après la question 8.(b)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}u_n} = \frac{1}{2-u_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n = \frac{n}{n+1}$ ».

- Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence on sait que :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{n+1}.$$

(b) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ est absolument convergente. Or pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1}(1-u_n) - \mathrm{N}(1-u_{\mathrm{N}}) \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n+1} - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} = 1$ et $\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n+1}\right)_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$. Par conséquent la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ diverge et T n'admet donc pas d'espérance.

13. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} &= \frac{1 - \frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qu_n}} \\ &= \frac{1 - qu_n - p}{\frac{p(1-qu_n)}{q} - p} \\ &= \frac{q - qu_n}{\frac{p}{q} - pu_n - p} \\ &= \frac{q}{p} \frac{1-u_n}{\frac{1}{q} - u_n - 1} \\ &= \frac{q}{p} \frac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n} \\ &= \frac{q}{p} w_n. \end{aligned}$$

(b) La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{q}{p}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n w_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}.$$

Par ailleurs :

$$w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$$

donc

$$w_n\left(\frac{p}{q} - u_n\right) = 1 - u_n$$

donc

$$u_n(1-w_n) = 1 - w_n\frac{p}{q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\frac{p}{q} = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

Ainsi pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant v_n = 1 - u_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

(c) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ est absolument convergente. Or pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}.$$

Par ailleurs pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{N}\left(\frac{q}{p}\right)^{\mathrm{N}}.$$

Comme $p > \frac{1}{2}$ alors $0 \leqslant \frac{q}{p} < 1$. Par croissance comparée et encadrement :

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} = 0.$$

De plus par comparaison pour les séries à termes positifs, comme la série géométrique $\sum_{\mathrm{N}\geqslant 0} \left(\frac{q}{p}\right)^{\mathrm{N}}$ est convergente alors la série $\sum_{\mathrm{N}\geqslant 0} v_{\mathrm{N}}$ l'est aussi.

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ converge absolument (elle converge et elle est à termes positifs). Ainsi T possède une espérance et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}.$$

14. La valeur $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}.$$

1. (a) Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors en notant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on a :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right) = a + \lambda a' + d + \lambda d' = a + b + \lambda(a'+d') = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) + \lambda\mathrm{Tr}(\mathrm{N}).$$

Ainsi l'application Tr est linéaire.

(b) Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \ker(\mathrm{Tr}) &\Longleftrightarrow a + d = 0 \\ &\Longleftrightarrow a = -d \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de ker(Tr).

Soit $(d,b,c)\in\mathbb{R}^3$ alors :

$$d\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-d & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\iff d=b=c=0.$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est aussi libre ;

C'est donc une base du noyau et on a bien $\dim(\ker(\mathrm{Tr}))=3$.

2. Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})&=\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\mathrm{J}\\&=\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}+(\mathrm{Tr}(\mathrm{M})+\lambda\mathrm{Tr}(\mathrm{N}))\mathrm{J}\quad\text{d'après 1}\\&=\mathrm{M}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}+\lambda(\mathrm{N}+\mathrm{Tr}(\mathrm{N})\mathrm{J})\\&=f(\mathrm{M})+\lambda f(\mathrm{N}).\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

   (a) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

   Ainsi :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

   (b) On a bien :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2=0_4.$$

   (c) On sait que :

$$\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+\mathrm{I}_4=(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)^2=0_4$$

   donc

$$\mathrm{A}(2\mathrm{I}_4-\mathrm{A})=\mathrm{I}_4.$$

   Ainsi A est inversible et $\mathrm{A}^{-1}=2\mathrm{I}_4-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

4. (a) Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathrm{E}_1\iff f(\mathrm{M})=\mathrm{M}&\iff\mathrm{M}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}=\mathrm{M}\\&\iff\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}=0_4\\&\iff\mathrm{Tr}(\mathrm{M})=0\quad\text{car }\mathrm{J}\neq0_4\\&\iff\mathrm{M}\in\ker(\mathrm{Tr}).\end{aligned}$$

   Ainsi $\mathrm{E}_1=\ker(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après 1.(b).

   (b) On a : $f(\mathrm{J})=(1+\mathrm{Tr}(\mathrm{J}))\mathrm{J}$.

   (c) On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{Tr}(\mathrm{J})\neq0$. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}\lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_4\mathrm{J}=0_4&\implies\lambda_4\mathrm{J}=-\lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\&\implies\lambda_4\mathrm{Tr}(\mathrm{J})=-\lambda_1\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)-\lambda_2\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)-\lambda_3\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=0\\&\implies\lambda_4=0\quad\text{car }\mathrm{Tr}(\mathrm{J})\neq0.\end{aligned}$$

Puis, comme la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre on obtient :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_4 J = 0_4 \Longrightarrow \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0_4$$
$$\Longrightarrow \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus elle contient 4 éléments et la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4. Donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Or, on a :

$$f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f(J)=(1+\mathrm{Tr}(J))J.$$

Donc dans la base $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$:

- $f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(1,0,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,1,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,0,1,0)$;
- $f(J)$ a pour coordonnées $(0,0,0,1+\mathrm{Tr}(J))$.

La matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$ est donc :

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{Tr}(J)\end{pmatrix}.$$

(d) Si $\mathrm{Tr}(J)\neq 0$. Alors d'après la question précédent, f est bijective si et seulement si $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{Tr}(J)\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(J)\neq -1$.
Si $\mathrm{Tr}(J)=0$. Soit $M\in\ker(f)$:
$$f(M)=M+\mathrm{Tr}(M)J=0_4.$$
Alors $M=-\mathrm{Tr}(M)J$. Or, par linéarité de la trace, on déduit de cette égalité :
$$\mathrm{Tr}(M)=\mathrm{Tr}(-\mathrm{Tr}(M)J)=-\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(J)=0.$$
Ainsi : $M=-\mathrm{Tr}(M)J=0_4$. Donc $\ker(f)=\{0_4\}$ et f est injectif. Or f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension fini donc d'après une conséquence du théorème du rang, il est bijectif.
Finalement, f est bijectif si et seulement si $\mathrm{Tr}(J)\neq -1$.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$\forall t\in]-\infty,1[,\quad f(t)=\begin{cases}\frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ par opérations sur les fonctions continues.
Montrons qu'elle est continue en 0. Par équivalents usuels, on sait que :
$$\ln(1-t)\underset{t\to 0}{\sim}-t.$$
Donc, par quotient :
$$f(t)\underset{t\to 0}{\sim}1.$$
Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1=f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.
Finalement f est donc continue sur $]\infty,1[$.

2. (a) On a :

$$\forall t \in]-\infty,1[,\qquad \frac{t}{1-t}+\ln(1-t)=\frac{t+(1-t)\ln(1-t)}{1-t}.$$

Comme $1-t>0$ pour tout $t\in]-\infty,1[$ il suffit d'étudier le signe de $g : t\mapsto t+(1-t)\ln(1-t)$ sur $]-\infty,1[$. Or g est dérivable sur $]-\infty,1[$ et pour tout $t\in]-\infty,1[$ on a :

$$g'(t)=1-\ln(1-t)+(1-t)\times\frac{-1}{1-t}=-\ln(1-t).$$

Ainsi :

x	$-\infty$		0		1
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	0

La fonction g est donc positive sur $]-\infty,1[$ et ainsi :

$$\forall t\in]-\infty,1[,\qquad \frac{t}{1-t}+\ln(1-t)=\frac{g(t)}{1-t}\geqslant 0.$$

(b) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, pour tout $t\in]-\infty,0[\cup]0,1[$ on a :

$$f'(t)=-\frac{\frac{-1}{1-t}\times t-1\times\ln(1-t)}{t^2}=\frac{\frac{t}{1-t}+\ln(1-t)}{t^2}\geqslant 0\quad\text{d'après la question 2.(a).}$$

(c) D'après ce qui précède, f est croissante sur $]-\infty,1[$.

3. (a) On a :

$$\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}(t^2).$$

(b) Il s'agit de montrer que le taux d'accroissement $\dfrac{f(t)-f(0)}{t}$ admet pour limite $\dfrac{1}{2}$ quand t tend vers 0. Or, pour tout $t\neq0$ dans $]-\infty,1[$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{-\frac{\ln(1-t)}{t}-1}{t}&=\frac{-\ln(1-t)-t}{t^2}\\&=\frac{-(-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}(t^2))-t}{t^2}\\&=\frac{\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}(t^2))}{t^2}\\&=\frac{1}{2}+\underset{t\to0}{o}(1).\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{2}$.

Donc f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{2}$.

(c) On sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[\cup]0,1[$. Il s'agit donc de montrer qu'elle l'est aussi au voisinage de 0 c'est-à-dire que f' est continue en 0. Or $\forall t \in]-\infty,0[\cup]0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t}+\ln(1-t)}{t^2} &= \frac{\frac{t}{1-t}-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2}\\
&= \frac{\frac{1}{1-t}-1-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2}\\
&= \frac{(1-t)^{-1}-1-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2}\\
&= \frac{1+t+t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2)-1-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2}\\
&= \frac{\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2}\\
&= \frac{1}{2}+\underset{t\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \dfrac{1}{2} = f'(0)$ et f' est bien continue en 0.

4. Par croissance comparée :

$$\lim_{t\to -\infty} f(t) = 0$$

et par opération :

$$\lim_{t\to 1} f(t) = +\infty.$$

5.

Partie B

6. La fonction F est une primitive de la fonction continue f sur $]-\infty,1[$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a

$$\mathrm{L}'(x) = f(x).$$

7. **Étude de** L **en** 1 **:**

(a) Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2$. La fonction $u : t\mapsto 1-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$. D'après la formule de changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t)dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{-\ln(1-t)}{t}dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{u'(t)\ln(u(t))}{1-u(t)}dt &= \int_{u(\mathrm{A})}^{u(\mathrm{B})} \frac{\ln(u)}{1-u}du\\
&= \int_{1-\mathrm{A}}^{1-\mathrm{B}} \frac{\ln(u)}{1-u}du\\
&= -\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{\ln(u)}{1-u}du\\
&= \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-\ln(t)}{1-t}dt.
\end{aligned}$$

(b) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in]0,1[$. On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

En multipliant membre à membre par $-\ln(t)$ et en réarrangeant un peu les termes on obtient bien :

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k\ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2$. En intégrant l'égalité ci-dessus entre $1-\mathrm{B}$ et $1-\mathrm{A}$, on trouve, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-\ln(t)}{1-t}dt = \sum_{k=0}^{n}\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} -t^k\ln(t)dt + \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}dt.$$

Or, d'après la question précédente, on sait que

$$\int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_A^B f(t)\,dt = L(B)-L(A).$$

Ainsi, on a bien

$$\forall (A,B) \in]0,1[^2, \quad L(B)-L(A) = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt + \int_{1-B}^{1-A} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

(c) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(A,B) \in]0,1[^2$. Les fonctions $t \mapsto \frac{-t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1-B, 1-A]$ (ou sur $[1-A, 1-B]$) donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt &= \left[\frac{-t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_{1-B}^{1-A} - \int_{1-B}^{1-A} \frac{-t^{k+1}}{k+1}\frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \int_{1-B}^{1-A} \frac{t^k}{k+1}\,dt \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_{1-B}^{1-A} \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \frac{(1-A)^{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{(1-B)^{k+1}}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

(d) Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to 0} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 0$ et par limite usuelle $\lim\limits_{t\to 1} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 1$. En particulier, $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée donc $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, on voit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} = 0.$$

Ainsi $t \in]0,1[\mapsto \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 0.
On note F_n la primitive s'annulant en 0 de la fonction ainsi prolongée en 0 :

$$\forall c \in [0,1[, \quad F_n(c) = \int_0^c \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $[0,1[$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a :

$$F_n'(t) = \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \geqslant 0.$$

Ainsi F_n est croissante sur $[0,1[$. De plus, d'après la question précédente, on sait que $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$. En notant M un majorant de cette fonction, on a :

$$\forall t \in]0,1[, \quad 0 \leqslant \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \leqslant M t^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et c on obtient :

$$\forall c \in [0,1[, \quad 0 \leqslant F_n(c) \leqslant \int_0^c M t^n\,dt = M\frac{c^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi F_n bornée sur $[0,1[$.
La fonction F_n est croissante et majorée sur $[0,1[$. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède une limite fini en 1. On note ℓ_n cette limite. Comme pour tout $c \in [0,1[$ on a :

$$0 \leqslant F_n(c) \leqslant \frac{M}{n+1}$$

on obtient, en faisant tendre c vers 1 :

$$0 \leqslant \ell_n \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi par encadrement, la suite $(\ell_n)_n$ converge vers 0.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 7.(c), on a pour tout $(A,B) \in]0,1[^2$:

$$L(B)-L(A) = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt + \int_{1-B}^{1-A} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt + F_n(1-A) - F_n(1-B).$$

D'après la question 7.(c) :

$$\lim_{A\to 0} \int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt = \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-B)^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

D'après la question 7.(f) :

$$\lim_{A\to 0} F_n(1-A) = \ell_n.$$

Comme L est continue en 0 et que $L(0) = 0$, en faisant tendre A vers 0 on obtient pour $B \in]0,1[$:

$$L(B) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-B)^{k+1}}{(k+1)^2} \right) + \ell_n - F_n(1-B).$$

De plus, par croissance comparée pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\lim_{B\to 1} \left(\frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-B)^{k+1}}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Enfin, par continuité en 0 de F_n : $\lim\limits_{B\to 1} F_n(1-B) = F_n(0) = 0$.

Ainsi, en tant que somme de fonctions admettant une limite en 1, L admet une limite en 1 et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{B\to 1} L(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \ell_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \ell_n.$$

Ceci étant valable pour tout n, en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\lim_{B\to 1} L(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

(h) C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. (a) La fonction L est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. La fonction $x \mapsto -x$ définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ est dérivable et à valeurs dans $]-1,0[\cup]0,1[$. Par composition, $x \mapsto L(-x)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
De même, $x \mapsto L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
Ainsi, par somme la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ sa dérivée en x est donnée par :

$$\begin{aligned}
L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) &= f(x) - f(-x) - xf(x^2)\\
&= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + \frac{x\ln(1-x^2)}{x^2}\\
&= \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln 1 - x^2}{x}\\
&= \frac{-\ln(1-x)(1+x) + \ln 1 - x^2}{x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) La fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ de dérivée nulle et continue sur $[-1,0]$. Elle est donc constante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $x \in [-1,0]$:

$$L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2) = \lim_{x\to 0}\left(L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)\right) = 0.$$

De même, pour tout $x \in [0,1]$, $L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2) = 0$.

(c) On a :

$$L(-1) + L(1) - \frac{1}{2}L(1) = 0.$$

Donc :

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

•Fin du sujet 1 •