ECG2 – Mathématiques

DS1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty,1]$ par :

$$\forall x\in\,]-\infty,1],\quad \varphi(x)=\begin{cases} x+(1-x)\ln(1-x) & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty,1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et calculer, pour tout $x\in\,]-\infty,1[$, $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty,1]$.
   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

Partie B : Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0\in[0,1[\quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\varphi(u_n).$$

5. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bien défini et appartient à l'intervalle $[0,1[$.
6. Soit g la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$\forall x<1,\quad g(x)=\varphi(x)-x.$$

   (a) Étudier les variations de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g.
   (c) En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
8. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n.

Partie C : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

9. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\dfrac{1}{1-t}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\dfrac{t^n}{1-t}$.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt$.
10. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0\leqslant\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt\leqslant\frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

    En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

11. Montrer alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

12. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

    (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \varphi(x)$.

13. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \varphi(1)$.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie A : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'évènement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3. En déduire $P(X_3 = 4)$.

   (b) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.

2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie B : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n = n+1)$.
5. Montrer, pour tout i de $[\![1; n]\!]$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.

   En déduire : $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$.

   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.
9. En déduire : $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in [\![2; n+1]\!], P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie C : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

    On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2; +\infty]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![2; +\infty]\!], P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 3

Soit U la matrice

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie A : Étude d'un système

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = y_0 = 1\ ;\ z_0 = t_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rcccccccc} x_{n+1} & = & & & y_n & + & z_n & + & t_n \\ y_{n+1} & = & x_n & + & & & z_n & + & t_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & & & t_n \\ t_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & z_n & & \end{array} \right. .$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{U}\mathrm{X}_n$.
2. On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{U}\mathrm{P}$. Par la suite on notera D cette matrice.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Y}_n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{D}\mathrm{Y}_n$.
   (b) Calculer Y_0.
   (c) En déduire :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \mathrm{Y}_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ (-1)^n \\ (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

4. Déduire des questions précédentes l'expression de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Partie B : Calcul de puissance

5. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
6. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$a_0 = 1 \quad , \quad b_0 = 0 \quad ; \quad \forall k\in\mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{k+1} & = & 3b_k \\ b_{k+1} & = & a_k + 2b_k \end{array} \right. .$$

   (a) Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{U}^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k & b_k & b_k \\ b_k & a_k & b_k & b_k \\ b_k & b_k & a_k & b_k \\ b_k & b_k & b_k & a_k \end{pmatrix}.$$

   (b) Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$b_{k+2} = 2b_{k+1} + 3b_k.$$

   (c) En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$b_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4} \quad \text{et} \quad a_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}.$$

7. Donner l'expression de U^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.
8. On se propose de retrouver le résultat de la question 4 d'une autre manière.
   (a) En conservant les notations de la partie A, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{U}^n\mathrm{X}_0.$$

   (b) En déduire une nouvelle preuve du résultat de la question 4.