TD3-Compléments

Exercice 1 (*Unicité de l'élément neutre*)

Le but de cet exercice est de montrer que, dans un espace vectoriel, l'élément neutre est unique.
*Soit E un espace vectoriel dont on note $+$ la loi de composition interne. On rappelle qu'un élément $y \in E$ est un **élément neutre** de E si*

$$\forall x \in E, \quad x + y = y + x = x.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe deux éléments neutres y_1 et y_2 dans E.

1. *Montrer que : $y_1 + y_2 = y_2 + y_1 = y_1$.*
2. *Montrer que : $y_2 + y_1 = y_1 + y_2 = y_2$.*
3. *Conclure.*

Exercice 2 (**)

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $E = F \cap G$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3 (*Preuve de la proposition 6*)

Soit E un espace vectoriel et soient $u_1, \ldots, u_n$ des éléments de E ($n \in \mathbb{N}^*$).
On considère un sous-espace vectoriel H de E contenant $u_1, \ldots, u_n$.

1. *Soit $u \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.*
   (a) *Justifier qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que : $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.*
   (b) *Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\mathcal{P}_k$ la propriété « $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in H$ ».*
   Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.
   (c) *En déduire que $u \in H$.*
2. *En déduire que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \subset H$.*