CONCOURS BLANC 1 - MATHÉMATIQUES II

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type Ecricome (pages 2 à 11) ;

— un sujet type ESSEC mathématiques II

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type Ecricome

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrés d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. Par définition de F on a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \text{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F. Par ailleurs, cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est aussi libre. Par conséquent, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F et F est de dimension 2.

2. L'ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, I_3 appartient à G mais $2I_3$ n'appartient pas à G.

3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Un calcul direct montre que $A^2 = A$ donc A appartient à G.

   Par ailleurs, il est clair que $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$. Donc A appartient aussi à F.

   Ainsi $A \in F \cap G$.

   (b) D'après la question précédente, $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de A car $A^2 - A = 0_3$.

   (c) On voit que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est donc pas inversible (le système linéaire associé n'étant pas de Cramer).

   (d) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - Alors on a :

$$X \in E_0 \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad (L_1 \longleftrightarrow L_2)$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

Ainsi $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. En particulier E_0 est un espace vectoriel et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_0.

- De même, on a :

$$X \in E_1 \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 3x \\ -x & + & 2y & - & z & = & 3y \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow x = -y - z.$$

Ainsi $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. En particulier E_1 est un espace vectoriel et on vérifie facilement que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de E_1.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec a et b des réels.

4. (a) Un calcul direct donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc :

$$M \in G \Longleftrightarrow M^2 = M \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ 2ab+b^2 & = & b \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0. \end{array}\right.$$

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b+2a-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & a \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a^2+2(1-2a)^2-a & = & 0 \\ b & = & 1-2a \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} 9a^2-9a+2 & = & 0 \\ b & = & 1-2a \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{2}{3} \\ b & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right. .$$

D'après la question précédente on en déduit donc :

$$F \cap G = \left\{ 0_3, I_3, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, A \right\} = \{0_3, I_3, I_3 - A, A\}.$$

5. D'après la question précédente, B et A sont bien des éléments de F. Par ailleurs, la famille (A, B) est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une famille libre de F. Or on sait que F est de dimension 2. Ainsi (A, B) est une base de F.

6. (a) C'est un calcul direct.

(b) On a :

$$AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0_3 \quad \text{car} \quad A^2 = A.$$

De même :

$$BA = (I_3 - A)A = A - A^2 = 0_3.$$

(c) On remarque que A et B commutent car AB = BA d'après la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} M^n = (\alpha A + \beta B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^k B^{n-k} \\ &= \beta^n B^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^k B^{n-k} + \alpha^n A^n. \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$A^k B^{n-k} = A^{k-1} ABB^{n-k-1} = A^{k-1} 0_3 B^{n-k-1} = 0_3.$$

Ainsi, on obtient :

$$M^n = \alpha^n A^n + \beta^n B^n.$$

Enfin, comme $A^2 = A$ on en déduit que $B^2 = I_3 - 2A + A^2 = I_3 - A = B$ puis une récurrence immédiate permet de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = A \quad \text{et} \quad B^n = B.$$

Ainsi, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n A + \beta^n B.$$

7. (a) Si $\alpha = 0$ ou si $\beta = 0$ alors $M = \beta B$ ou $M = \alpha A$ donc n'est pas inversible car A et B ne le sont pas.
Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors on a :

$$M\left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right) = A^2 + \frac{\alpha}{\beta}AB + \frac{\beta}{\alpha}BA + B^2 = A + B = I_3.$$

Ainsi M est inversible d'inverse $\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B$.

(b) Soient α et β deux réels non nuls et soit n un entier naturel n. Alors on a :

$$\begin{aligned} M^n(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) &= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) \\ &= A^2 \beta^n \alpha^{-n} BA + \alpha^n \beta^{-n} AB + B^2 \\ &= A + B \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Ainsi M^n est inversible d'inverse $\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$. Donc on a bien :

$$M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B.$$

Partie III

8. Un calcul donne $I_3 - T = -A - 4B$.

9. D'après la question 7, $I_3 - T$ est donc inversible et son inverse est :

$$-A - \frac{1}{4}B.$$

10. Soit $L \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} L = TL + Y \iff L - TL = Y &\iff (I_3 - T)L = Y \\ &\iff L = (I_3 - T)^{-1}Y. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une unique matrice colonne L telle que $L = TL + Y$ et cette matrice est $(I_3 - T)^{-1}Y$.

11. Soit n entier naturel, on a :

$$X_{n+1} - L = TX_n + Y - L = TX_n + Y - TL - Y = T(X_n - L).$$

Une récurrence permet alors de montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n - L = T^n(X_0 - L).$$

12. On sait que $I_3 - T = -A - 4B$ donc $T = I_3 + A + 4B = 2A + 5B$. D'après la question précédente et la question 6.(c) on trouve donc que pour tout entier naturel n on a

$$X_n = T^n(X_0 - L) + L = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L.$$

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction g

1. Par opération sur les limites on a :
$$\lim_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)=+\infty$$
donc par composition $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.
De même, on $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x>0,\quad h(x)=\ln(x)+2x-1.$$
   (a) En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a :
$$h'(x)=\frac{1}{x}+2>0.$$
   Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) On vérifie que $\lim_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Ainsi $0\in h(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$ et comme h est continue et strictement croissante, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ notée α.
   De plus, comme $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)<0=h(\alpha)<1=h(1)$ par croissance stricte de h on a nécessairement :
$$\frac{1}{2}<\alpha<1.$$
   Attention : montrer que l'équation $h(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$ n'est pas suffisant !
   (c) Soit $x>0$. On a par la formule de dérivation des composées de fonctions :
$$\begin{aligned} g'(x)&=\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(x)\right)g(x)\\ &=\frac{1}{x^2}(2x-1+\ln(x))g(x)\\ &=\frac{1}{x^2}g(x)h(x).\end{aligned}$$
   (d) Le signe de $g'(x)$ est le signe de $h(x)$. Ainsi :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit $x>1$:
$$\begin{aligned} g(x)-x^2=e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)}-x^2&=x^2e^{-\frac{1}{x}\ln(x)}-x^2\\ &=x^2\left(e^{-\frac{1}{x}\ln(x)}-1\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{-\ln(x)}{x}\end{aligned}$$
par équivalent usuel car $\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln(x)}{x}=0$. Ainsi :
$$g(x)-x^2\underset{x\to+\infty}{\sim}-x\ln(x).$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « u_n existe et $u_n > 0$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   - Initialisation : $u_0 > 0$ d'après le sujet donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, u_n existe et est strictement positif. Ainsi, u_n appartient à l'ensemble de définition de g et par conséquent $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. Par ailleurs, on a :
     $$u_{n+1} = g(u_n) = e^{\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)} > 0.$$
     Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que u_n existe et $u_n > 0$.
5. En supposant la bibliothèque `numpy` importée sous le label `np`.

```python
def u(u0,n):
    L = np.zero(n+1)
    L[0] = u0
    for i in range(1, n+1):
        L[i] = np.exp((2-1/L[i-1])*np.log(L[i-1]))
    return L
```

6. (a) On a

x	0		1		$+\infty$
Signe de $(x-1)$		$-$	0	$+$	
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

   (b) Soit $x > 0$. Alors :
   $$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= \frac{e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)}}{e^{\ln(x)}} \\ &= e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)-\ln(x)} \\ &= e^{\frac{x-1}{x}\ln(x)} \\ &\geqslant e^0 = 1\end{aligned}$$
   d'après la question précédente et par croissance de la fonction exponentielle.

   (c) D'après la question précédente on a :
   $$\forall x > 0, \quad g(x) \geqslant x.$$
   Par ailleurs, on a :
   $$g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x}\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$
   Ainsi l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. D'après les questions 4 et 6.(c), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n.$$
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   - Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie par hypothèse.

- Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Or d'après les variations de g, on sait que

$$g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[g(\alpha), \max(g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [g(\alpha), 1].$$

Or on sait par 6.b et 2.b que :

$$g(\alpha) \geqslant \alpha \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [g(\alpha), 1] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Or $u_{n+1} = g(u_n) \in g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.
Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ et d'après la question précédente, $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
De plus la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc ℓ est un point fixe de g. D'après 6.(c) on a donc $\ell = 1$.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n > 1$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie par hypothèse.
- Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$. Or d'après 6.c, on sait que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n > 1.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n > 1$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone soit elle converge vers une limite ℓ soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde qu'elle converge vers une limite ℓ. Alors par croissance :

$$\ell \geqslant u_0 > 1.$$

De plus, la fonction g étant continue sur $]1, +\infty[$ alors ℓ est un point fixe de g. Mais le seul point fixe de g est 1. On obtient une contradiction.
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

10. On suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. Alors par décroissance de g sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ on a :

$$u_1 = g(u_0) \in \left]g(\frac{1}{2}), +\infty\right[=]1, +\infty[.$$

D'après la question précédente la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergence donc.

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) La variable X_n compte le nombre de succès quand on répète n fois indépendantes l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir une urne au hasard et dont le succès est « choisir l'urne 1 ». Ainsi X_n suit la loi $\mathscr{B}(n, 1/3)$. Le raisonnement est analogue pour Y_n et Z_n.

(b) D'après la question précédente :

$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

.

(c) L'événement $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ signifie que les urnes 2 et 3 n'ont reçu aucun jeton au cours des n premiers tirages. Cela n'est possible que si c'est l'urne 1 qui a reçu les n jetons.
Ainsi $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.

(d) On a $V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$.

(e) D'après la formule du crible :

$$\begin{aligned}
P(V_n) &= P(X_n = 0) + P([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]) - P([X_n = 0] \cap ([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0])) \\
&= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - P([X_n = 0] \cap ([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0])) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - P(X_n = n) - P([Z_n = n] \cup ([Y_n = n])) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

2. On a $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant P(V) \leqslant P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(V) = 0$.

3. (a) On suppose la bibliothèque numpy importée sous le nom np et on rappelle que la commande np.random.randint(a,b+1) renvoie un nombre choisi uniformément dans $[\![a, b]\!]$.

```
def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    liste = [X,Y,Z]
    while liste[0] == 0 or liste[1] == 0 or liste[2] == 0 :
        i = np.random.randint(0,3)
        liste[i] = liste[i] + 1
        n = n+1
    return n
```

(b)

```
        S = 0
        for i in range(1000):
            S = S + T()/1000
        print(S)
```

4. Il est clair que $T(\Omega)$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.

5. Soit $n \geqslant 3$. L'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si aucune urne n'est vide à l'instant n (c'est $\bar{V}_n$) mais au moins une urne est vide à l'instant $n-1$ (c'est V_{n-1}).
Ainsi : $[T = n] = V_{n-1} \backslash V_n$ et comme $V_n \subset V_{n-1}$ alors :

$$P(T = n) = P(V_{n-1} \backslash V_n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6. La variable T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 3} nP(T = n)$ est absolument convergente.

Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, il suffit de montrer la convergence.
Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} kP(T = k) &= \sum_{k=3}^{n} k(P(V_{k-1}) - P(V_k)) \\
&= \sum_{k=3}^{n} kP(V_{k-1}) - \sum_{k=3}^{n} kP(V_k) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)P(V_k) - \sum_{k=3}^{n} kP(V_k) \\
&= 3P(V_2) + \sum_{k=3}^{n-1} P(V_k) - nP(V_n) \\
&= 3 + \sum_{k=3}^{n-1} \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) - nP(V_n) \\
&= 3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - nP(V_n).
\end{aligned}$$

Or par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{V}_n) = 0$ et on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{T}=k) = \frac{11}{2}.$$

Ainsi T possède une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{11}{2}$.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) En 2 tirages, il peut y avoir soit une soit deux urnes vides. Ainsi $\mathrm{W}_2(\Omega) = \{1,2\}$. On sait aussi que $\mathrm{X}_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$. On a alors :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0, \mathrm{W}_2 = 1) = \mathrm{P}(\text{urne 1 est vide et une seule urne est vide}) = \frac{2}{9}$$

car soit le premier jeton est dans l'urne 2 et le deuxième dans l'urne 3 ou l'inverse. De même :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0, \mathrm{W}_2 = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 2) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}_2 = 2) = \frac{2}{9};$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{W}_2 = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{Y}_2 = 1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{Z}_2 = 1) = \frac{4}{9};$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{W}_2 = 2) = 0;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{W}_2 = 1) = 0;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{W}_2 = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2) = \frac{1}{9}.$$

$x \in \mathrm{X}_2(\Omega)$ \ $w \in \mathrm{W}_2(\Omega)$	1	2
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$

(b) Par la formule des probabilités totales on en déduit :

$w \in \mathrm{W}_2(\Omega)$	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{W}_2 = w)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

La variable W_2 est de support fini donc elle possède une espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{W}_2) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_2, \mathrm{W}_2) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} (i - \mathrm{E}(\mathrm{X}))\left(j - \frac{4}{3}\right)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = i, \mathrm{W}_2 = j) \\
&= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left(i - \frac{2}{3}\right)\left(j - \frac{4}{3}\right)\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = i, \mathrm{W}_2 = j) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{W}_2 = 2) \neq 0$. Donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{W}_2 = 2) = 0 \neq \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1)\mathrm{P}(\mathrm{W}_2 = 2).$$

Les variables aléatoires X_2 et W_2 ne sont donc pas indépendantes.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

8. On a $\mathrm{W}_n(\Omega) = \{0,1,2\}$.

9. Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note $\mathrm{W}_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons et qui vaut 0 sinon.
   (a) La variable $\mathrm{W}_{n,i}$ suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité que l'urne i soit vide après n tirage, c'est-à-dire $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Par conséquent : $\mathrm{E}(\mathrm{W}_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (b) On a $\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_{n,1} + \mathrm{W}_{n,2} + \mathrm{W}_{n,3}$.
   (c) Par linéarité de l'espérance on obtient : $\mathrm{E}(\mathrm{W}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{W}_{n,1}) + \mathrm{E}(\mathrm{W}_{n,2}) + \mathrm{E}(\mathrm{W}_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
10. Si $[\mathrm{X}_n = n]$ est réalisé c'est que l'urne 1 contient les n-premiers jetons donc automatiquement les deux autres urnes sont vides et $[\mathrm{W}_n = 2]$ est réalisé. Ainsi :

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = n] \cap [\mathrm{W}_n = 2]) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, si $[\mathrm{X}_n = k]$ est réalisé après les n premiers tirages, l'urne 1 n'est pas vide et au moins une autre urne contient un jeton. Donc $\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = k] \cap [\mathrm{W}_n = 2]) = 0$.
11. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'événement $[\mathrm{X}_n = k] \cap [\mathrm{W}_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'urne 1 reçoit k jetons et l'urne 2 $(n-k)$ ou si l'urne 1 reçoit k jetons et l'urne 3 $(n-k)$. Il y a $\binom{n}{k}$ issues pour que l'urne 1 reçoivent k jetons et l'urne 2 $(n-k)$ et de même $\binom{n}{k}$ issues pour que l'urne 1 reçoivent k jetons et l'urne 3 $(n-k)$. Soit au total $2\binom{n}{k}$ issues favorables pour 3^n issues au total. Ainsi :

$$\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = k] \cap [\mathrm{W}_n = 1]) = \frac{2\binom{n}{k}}{3^n}.$$

   Si l'urne 1 contient tous les jetons, alors les deux autres sont vides donc $\mathrm{P}([\mathrm{X}_n = n] \cap [\mathrm{W}_n = 1]) = 0$.
12. Les variables X_n et W_n sont à support fini donc d'après le théorème de transfert $\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n$ possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{2} i\,j\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = j)\\
&= \sum_{i=0}^{n} i(\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 1) + 2\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 2)\\
&= \sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 1) + 2\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 2)\\
&= 2n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n, \mathrm{W}_n = 2) + \sum_{i=1}^{n-1} i\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 1).
\end{aligned}$$

13. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n) &= 2n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n, \mathrm{W}_n = 2) + \sum_{i=1}^{n-1} i\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 1)\\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\,\frac{2\binom{n}{i}}{3^n}\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{2\binom{n}{i}}{3^n}\\
&= \frac{2}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}\,i\\
&= \frac{2}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!}\\
&= \frac{2n}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}\\
&= \frac{2n}{3^n}\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n-1}{k}\\
&= \frac{2n}{3^n}2^{n-1}\\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

   Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_n, \mathrm{W}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n) - \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\mathrm{E}(\mathrm{W}_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

14. Les variables X_n et W_n sont non corrélées bien que non indépendantes.

•Fin du sujet 1 •