ECE2-Semaine 6

13/10/2021

1 Cours

1.1 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels : loi de composition interne /loi de composition externe, définition d'espace vectoriel, règles de calcul, exemples de référence $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^D$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. Combinaison linéaire.

Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel et contient 0_E. Exemples de sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels de référence. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, notation Vect, définition d'une famille génératrice, manipulation de Vect.

1.2 Famille de vecteurs

Familles génératrices : définition ; on ne change pas le caractère générateur d'une famille en changeant l'ordre des vecteurs, en ajoutant à cette famille des nouveaux vecteurs, en multipliant un des vecteurs par un scalaire non nul, retirant de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Familles libres : définition de famille libre/liée, ex de familles liées : famille contenant le vecteur nul, contenant plusieurs fois le même vecteur etc. . ., ex de familles libres : famille d'un vecteur non nul, de deux vecteurs non colinéaires, famille échelonnée de polynômes non nuls ; on ne change pas le caractère libre d'une famille en changeant l'ordre des vecteurs, en retirant un vecteur à la famille, un multipliant un vecteur par un scalaire non nul, en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

Bases : définition, coordonnées dans une base, base canonique des espaces vectoriels de référence.

1.3 Dimension d'un espace vectoriel

Dimension : définition : espaces vectoriels de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel, dimension de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$. Dans un espace vectoriel de dimension finie n, le cardinal d'une famille libre est $\leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille est une base ; le cardinal d'une famille génératrice est $\geqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille est une base. Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité.

Rang : rang d'une famille de vecteurs ; opérations préservant le rang. Rang d'une matrice ; pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$; le rang d'une matrice et de sa transposée sont égaux ; opérations sur les lignes et les colonnes qui préservent le rang. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le rang.

2 Méthodes à maîtriser

1. Les méthodes à maîtriser du programme de la semaine dernière.
2. **Savoir montrer qu'une famille est libre / liée**, est génératrice, est une base.
3. Savoir trouver une base d'un espace vectoriel donné.
4. Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.
5. Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel en déterminant une base.
6. Montrer qu'une famille est une base en montrant
   - qu'elle est libre et que son cardinal est la dimension de l'espace ;
   - ou qu'elle est génératrice et que son cardinal est la dimension de l'espace.
7. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss ou de manière astucieuse.
8. Savoir caractériser l'inversibilité d'une matrice en terme de rang.

3 Questions de cours

- Définitions : famille libre/liée, famille génératrice, base, coordonnées dans une base, rang d'une famille de vecteurs.
- Théorème/Définition : dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Propositions : dimension et cardinal d'une famille libre ; dimension et cardinal d'une famille génératrice.