Chapitre 12 : Intégration : rappels et compléments

1 Rappels : intégration sur un segment

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction défine sur I par

$$x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{F}(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I.

1. Le réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
2. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)\,dt$ ce réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. *On note souvent :*

$$[\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. *Dans la notation $\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est muette, ainsi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

3. *On a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -(\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)) = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. *Linéarité* : on a
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda\int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. *Croissance* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$
5. *Inégalité triangulaire* :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors, f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Extension aux fonctions continues par morceaux

- Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.
- Pour une telle fonction continue par morceaux f, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$
- La proposition 2 reste vraie pour les fonctions continues par morceaux.

Remarque 4

Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est donc une fonction qui est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet tout de même des limites finies à droite et à gauche.

Exemple 1

1. *La fonction partie entière f est continue par morceaux sur $[0,2]$.*

En effet, elle est continue sur $]0,1[$ *et* $]1,2[$ *car constante sur chacun de ces intervalles. De plus,*

$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor = 1 \quad ;$$

donc sa restriction à $]0,1[$ *(resp. à* $]1,2[$*) est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$ *(resp.* $[1,2]$*).*

2. *Intégrale de* f *sur* $[0,2]$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt \quad \text{par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux}\\ &= \int_0^1 0dt + \int_1^2 1dt\\ &= 1\end{aligned}$$

1.2 Techniques de calcul

► Calcul de primitives « à vue »

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$

On remarque que pour tout $t \in [0,1]$ *:*

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}u'(t)u(t)^{-\frac{1}{2}}$$

où $u(t) = t^2+1$*. Donc*

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{u(t)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[u(t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}\,dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2\,ds.$

► Intégration par parties

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Exemple 3

Calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2\ln(t)\,dt.$

Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$ *et* $v : t \mapsto \ln(t)$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,3]$ *et*

$$\int_1^3 t^2\ln(t)\,dt = \int_1^3 u'(t)v(t)\,dt.$$

Par intégration par parties, on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_1^3 t^2\ln(t)\,dt &= [u(t)v(t)]_1^3 - \int_1^3 u(t)v'(t)\,dt\\ &= \left[\frac{t^3\ln(t)}{3}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{3}\,dt\\ &= 3^2\ln(3) - \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3\\ &= 9\ln(3) - \frac{26}{9}\end{aligned}$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$*. Calculer* $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt.$

► Changement de variables

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt.$$

Exemple 4

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ *à l'aide du changement de variable* $u = e^t$.

1. *Transformer* du *avec la formule* $du = u'(t)dt$.
   Ici, $du = e^t dt$ *ou encore* $du = u dt$*, c'est-à-dire* $\frac{du}{u} = dt$.
2. *Transformer l'expression sous l'intégrale.*

$$\frac{dt}{e^t+1} = \frac{\frac{du}{u}}{u+1} = \frac{du}{u(u+1)}$$

3. *Transformer les bornes.*
   $u(1) = e$ *et* $u(2) = e^2$.
4. *Rédaction finale :*
   La fonction $u : t \mapsto e^t$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1,2]$ *et* $u'(t) = e^t$ *pour tout* $t \in [1,2]$ *donc :*

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{e^t}{e^t}dt = \int_1^2 \frac{dt}{u(t)+1}\frac{u'(t)}{u(t)}dt = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du$$

car $u \mapsto \frac{1}{u(u+1)}$ *est continue sur* $[e, e^2]$.
On remarque ensuite que pour tout $u \in [e, e^2]$,

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$$

donc

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1} = \int_e^{e^2} \frac{1}{u(u+1)}du = \int_e^{e^2} \frac{1}{u}du - \int_e^{e^2} \frac{1}{u+1}du = 1 - \ln\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right)$$

Test 4 (***Voir solution.***)

Soit f *une fonction impaire continue sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que pour tout* $a \geqslant 0$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$

Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(-t)dt$

Test 5 (***Voir solution.***)

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt.$$

Montrer que f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer sa dérivée.*

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm\infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $[a,+\infty[$ et on la note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

De même :

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty,b]$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $]-\infty,b]$ et on la note $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a,+\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,+\infty[$,*
2. *on introduit $x\in[a,+\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.

Exemple 5

1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$.

   La fonction $t\mapsto\frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x\in[1,+\infty[$. Alors
$$\int_1^x \frac{1}{t}dt=\Big[\ln(t)\Big]_1^x=\ln(x)$$
   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ est donc divergente.

2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[2,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [2,+\infty[$. Alors

$$\int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

3. *Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.*

   La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Soit $x \in [0,+\infty[$. Alors

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1.$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = 1$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est donc convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Plus généralement :

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
2. *Intégrale de Riemann en $+\infty$* : pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Démontrer les critères de convergence des exemples de référence.