TD 8-Couples de variables aléatoires discrètes

1 Lois associées à un couple

Exercice 1 (*Objectifs 1,2,3*)

On lance deux dès à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un bleu, l'autre rouge. On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. On suppose que l' expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la somme des valeurs des deux dés.

1. *Déterminer la loi du couple (X, Y).*
2. *Déterminer la loi de Y.*
3. *Déterminer la loi de X sachant $[Y = 5]$.*

Exercice 2 (*Objectifs 1,3,4*)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $0 < p < 1$. On suppose que

- *X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$*
- *$Y(\Omega) = \mathbb{N}$*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètre (n, p).*

1. *Déterminer la loi du couple (X, Y).*
2. *Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.*

Exercice 3 (*Objectif 4*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et Y une variable définie sur le même espace probabilisé telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de Y sachant $[X = k]$ est une loi $\mathcal{B}(k, p)$ avec $0 < p < 1$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 (*Objectif 2*)

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir Pile et la probabilité $1 - p$ d'obtenir Face.
Le joueur A commence et s'arrête dès il obtient un Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Le joueur B effectue alors le même nombre de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B.

1. *Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.*
2. *Quelles sont les valeurs prises par Y ?*
3. *Montrer que $P([Y = 0]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{2-p}$.*
4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P([Y = n]) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1}(1-p)^{2k-n-1}$.*

2 Indépendance

Exercice 5 (*Objectif 6*)

1. *Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variable aléatoire réelles indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. Les variables $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ sont-elles indépendantes ?*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?*

Exercice 6 (*Objectifs 1,5*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$ que l'on suppose indépendantes. Déterminer la loi de (X, Y).

3 Variables aléatoire de la forme $Z = g(X, Y)$

Exercice 7 (*Objectifs 1, 3, 7*)

On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1-p$ $(0<p<1)$. Pour tout entier $k>0$, on note P_k l'événement « la pièce donne Pile au k-ième lancer » et F_k l'événement « la pièce donne Face au k-ième lancer ». On note X le rang du premier Pile et Y le rang du deuxième Pile.

1. *Reconnaître, sans calcul, la loi de X.*
2. *Déterminer la loi de (X, Y).*
3. *En déduire la loi de Y.*
4. *Déterminer la loi de $Y - X$. Ce résultat était-il prévisible ?*

Exercice 8 (*Objectif 9*)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. *On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. Montrer que*
$$X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \cdots + k_n, p).$$
2. *On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$. Montrer que*
$$X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

Exercice 9 (*Objectifs 7, 8*)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. *Déterminer la loi de $X + Y$.*
2. *Déterminer la loi de $\min(X, Y)$ et de $\max(X, Y)$.*
3. *Déterminer, lorsqu'elle existe, l'espérance des variables aléatoires des questions précédentes*

Exercice 10 (*Objectif 8*)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $m = \min(X, Y)$ et $\Delta = |X - Y|$. Déterminer l'espérance de Δ si elle existe.

Exercice 11

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(X > n)$.*
   (b) *En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(U > n)$.*
   (c) *En déduire la loi de U.*
2. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(V \leqslant n)$ puis $P(V > n)$.*
   (b) *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} nP(V = n) = \sum_{n=0}^{m-1} P(V > n) - mP(V > m)$.*
   (c) *En déduire que V possède une espérance et la calculer.*

Exercice 12 (*EML 2007*)

Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

1. *Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.*
2. *Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1) Y$.*
   (a) *Justifier T est une variable aléatoire discrète et déterminer sa loi.*
   (b) *Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.*
   (c) *Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$*

4 Variance et covariance

Exercice 13 (*Objectif 10*)

1. *Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. On définit les variables aléatoires $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$.*
   (a) *Déterminer la variance de I.*
   (b) *Déterminer la covariance du couple (I, S).*
   (c) *En déduire la variance de S.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier lancer est p et celle de toucher la cible au second lancer est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants.*

(a) *On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Déterminer la variance de A et B.*

(b) *On note X_1 la variable aléatoire qui donne le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier coup et X_2 la variable qui donne le nombre de tireurs qui touchent la cible au deuxième coup. Déterminer la variance de $X_1 + X_2$.*

3. *Soit $p \in]0,1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la covariance de $(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$.*

Exercice 14 (*EML 2013*)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [[1;n]]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. *Soit $i \in [[1;n]]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.*
2. *Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?*
3. *Soit $(i,j) \in [[1;n]]^2$ tel que $i \neq j$.*

   (a) *Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.*

   (b) *En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).*

Objectifs

1. Savoir déterminer la loi d'un couple.
2. Savoir trouver les lois conditionnelles.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver les lois marginales grâce aux lois conditionnelles.
5. Connaître la définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle.
6. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de XY, $X+Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$.
8. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X,Y)$.
9. Connaître les résultats de stabilité par sommes des variables indépendantes Binomiales et de Poisson.
10. Savoir justifier l'existence et déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $V(X+Y)$, $\rho(X,Y)$.