

TD9-Couples de variables aléatoires discrètes

1 Lois associées à un couple

Exercice 1 (Objectifs 1,2,3)

On lance deux dés à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un bleu, l'autre rouge. On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. On suppose que l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et on note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la somme des valeurs des deux dés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y .
3. Déterminer la loi de X sachant $[Y = 5]$.

Exercice 2 (Objectifs 1,3,4)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et $0 < p < 1$. On suppose que

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètre (n, p) .

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 3 (Objectif 2)

Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir Pile et la probabilité $1 - p$ d'obtenir Face.

Le joueur A commence et s'arrête dès il obtient un Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Le joueur B effectue alors le même nombre de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B .

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

3. Montrer que $P([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{2-p}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} (1-p)^{2k-n-1}$.

2 Indépendance

Exercice 4 (Objectif 6)

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on considère deux variables aléatoires réelles indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Les variables $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ sont-elles indépendantes ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 (Objectifs 1,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$ que l'on suppose indépendantes. Déterminer la loi de (X, Y) .

3 Variables aléatoires de la forme $Z = g(X, Y)$

Exercice 6 (Objectifs 1, 3, 7)

On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$ ($0 < p < 1$). Pour tout entier $k > 0$, on note P_k l'événement « la pièce donne Pile au k -ième lancer » et F_k l'événement « la pièce donne Face au k -ième lancer ». On note X le rang du premier Pile et Y le rang du deuxième Pile.

1. Reconnaître, sans calcul, la loi de X .
2. Déterminer la loi de (X, Y) .
3. En déduire la loi de Y .
4. Déterminer la loi de $Y - X$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 7 (Objectif 9)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. Montrer que

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p).$$

2. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$. Montrer que

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Exercice 8 (Objectifs 7, 8)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer la loi de $\min(X, Y)$ et de $\max(X, Y)$.
3. Déterminer, lorsqu'elle existe, l'espérance des variables aléatoires des questions précédentes.

Exercice 9 (Objectif 8)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $m = \min(X, Y)$ et $\Delta = |X - Y|$. Déterminer l'espérance de Δ si elle existe.

Exercice 10

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(X > n)$.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(U > n)$.

(c) En déduire la loi de U .

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P(V \leq n)$ puis $P(V > n)$.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{n=1}^m nP(V = n) = \sum_{n=0}^{m-1} P(V > n) - mP(V > m)$.

(c) En déduire que V possède une espérance et la calculer.

Exercice 11 (EML 2007)

Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

1. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1)Y$.

- (a) Justifier T est une variable aléatoire discrète et déterminer sa loi.
- (b) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.
- (c) Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

4 Variance et covariance

Exercice 12 (Objectif 10)

1. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . On définit les variables aléatoires $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$.

- (a) Déterminer la variance de I .
- (b) Déterminer la covariance du couple (I, S) .
- (c) En déduire la variance de S .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants.

- (a) On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs. Déterminer la variance de A et B .
- (b) On note X_1 la variable aléatoire qui donne le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier coup et X_2 la variable qui donne le nombre de tireurs qui touchent la cible au deuxième coup. Déterminer la variance de $X_1 + X_2$.
3. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on considère deux variables aléatoires indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la covariance de $(G_1 - G_2, G_1 + G_2)$.

Exercice 13 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne \mathcal{U} contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne \mathcal{U} .

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .
2. Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 - (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
 - (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .

Objectifs

1. Savoir déterminer la loi d'un couple.
2. Savoir trouver les lois conditionnelles.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver les lois marginales grâce aux lois conditionnelles.
5. Connaître la définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle.
6. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de $XY, X + Y, \max(X, Y), \min(X, Y)$.
8. Plus généralement, savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X, Y)$.
9. Connaître les résultats de stabilité par somme des variables indépendantes Binomiales et de Poisson.
10. Savoir justifier l'existence et déterminer $\text{Cov}(X, Y), V(X + Y), \rho(X, Y)$.