TD 6-Séries

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}$.
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$.
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$.
5. $\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$.
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$.

Exercice 2

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. *Montrer que la famille* $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.
2. *Déterminer les coordonnées de* X^3+2X^2-4X+1 *dans cette base.*
3. *En déduire que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 3

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 4

Avec le critère de comparaison des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n!}$

Exercice 5

Avec le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$

Exercice 6

Avec le critère d'équivalence des séries à termes positifs, déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
2. $\sum_{n\geq 1} \left(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$
3. $\sum_{k\geq 1} \left(e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}}-1\right)$

Exercice 7

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$.
2. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^3-n^2+1}{e^n+3n^4+2n^2}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
4. $\sum_{n\geq 1} (n^{\frac{1}{n}}-1)$.
5. $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
6. $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{\ln n}}$.
8. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$.
9. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.
10. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
11. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$.
12. $\sum_{n\geq 1} \left((n+1)^{\frac{1}{4}}-(n-1)^{\frac{1}{4}}\right)$
13. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\ln n}$.
14. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$.
15. $\sum_{n\geq 1} \left(1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$.
16. $\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^7}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 8

1. *Soit* $x \in [0,1]$. *Montrer que* $0 \leq x^2 \leq x$.
2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série convergente à termes positifs. Montrer que* $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ *converge.*

Exercice 9 (*Une série convergente mais pas absolument convergente*)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par*

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
   (c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 (*Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente*)

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $v_n \sim u_n$ où $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie à l'exercice 9.
2. Montrer que la série $\sum v_n$ diverge (on pourra utiliser le fait que $\sum u_n$ converge, où $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie à l'exercice 9).

Exercice 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ et déterminer sa somme si elle existe.
4. Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 12

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = x^3 + nx - 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On notera u_n cette solution.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 13 (*EDHEC 2013*)

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction Scilab qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) En déduire un programme, rédigé en Scilab, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
   (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 14 (*EML, 1992*)

On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

(c) *Établir :* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$*, on note*

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \ \textit{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

(a) *En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites* $(u_n)_{n\geq 2}$ *et* $(v_n)_{n\geq 2}$ *sont adjacentes. On note* ℓ *leur limite commune.*

(b) *Montrer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 2$ *:*

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

(c) *En déduire une valeur approchée de* ℓ *à* 10^{-2} *près.*