TD1-Études de suites

1 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0,4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.*
2. *Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.*

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \end{cases}$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$.

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Monter que l'équation $f(x) = x$ possède comme unique solution 0. En déduire le signe de $x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$1 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$
4. *En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

et la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.*
3. *Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Déterminer les points fixes de f et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
5. *Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n et qui calcule et affiche la valeur de u_n.*

Exercice 4 (*Ecricome 2013*)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}.$$

et on définie une suite u par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 &= e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$$

1. *Dresser le tableau de variations de φ en faisant apparître les limites en 0 et $+\infty$.*
2. *Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [1; e]$*
3. *Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.*
4. *Si cette suite est convergente de limite finie L, que peut valoir L ?*
5. *Prouver que la suite u est strictement croissante.*
6. *Étudier la convergence de u.*

Exercice 5 (*EML 2018*)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

1. *Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.*
2. *Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.*
3. *Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.*

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[.$$
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
7. (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

   (b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à epsilon près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2 n = 0
3 while ........
4     n =n+1
5 end
6 b = suite(n)
7 endfunction
```

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$
et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Déterminer les limites (finies) possibles de la suite.
3. Montrer que $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{7}{16}$.
6. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$. On pourra utiliser le fait que $7 < e^2 < 8$.
3. On pose $u_0 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq \alpha.$$
4. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$
puis que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$$
6. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 (*EML 2014*)

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet que $2 < e < 3$.

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[$, $\varphi(x) \geqslant ex$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$.
7. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
8. Écrire un programme en Scilab qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

9. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

2 Suites définies implicitement

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x + e^x.$$

1. *Montrer que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution x_n.*
3. *Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*
4. *Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = xe^{-x}.$$

1. *Étudier les variations de f et déterminer sa limite en $+\infty$.*
2. *Soit $n \geq 3$. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède deux solutions. On notera u_n et v_n ces solutions avec $u_n < v_n$.*
3. *Justifier que pour tout $n \geq 3$ on a $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [1, +\infty[$.*
4. *Étudier la monotonie de des suites $(u_n)_{n\geq 3}$ et $(v_n)_{n\geq 3}$.*
5. *Déterminer la limite de chacune des deux suites.*

Exercice 11

Pour tout entier n non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.*
2. *Montrer que la suite (x_n) est décroissante et convergente.*
3. *Déterminer sa limite.*

Exercice 12 (*Ecricome 2019*)

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.*
2. *En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.*
3. (a) *Démontrer que :*

   $$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}$$

   (b) *En déduire que :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad h_{n+1}(v_n) \geq 4.$

   (c) *Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.*
4. (a) *Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.*

   (b) *En supposant que $\ell > 1$, démontrer que :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n^n = +\infty.$

   En déduire une contradiction.

   (c) *Déterminer la limite de (v_n).*
5. (a) *Montrer que :* $\quad \forall n \geq 1 \quad v_n \leq 3$

   (b) *Écrire une fonction* `Scilab` *d'en-tête* `function y=h(n,x)` *qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}^{+*}$ en entrée.*

   (c) *Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :*

```
function res=v(n)
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10^(-5)
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4 then ........
            else ........
        end
     end
     ..........
endfunction
```

   (d) *Montrer que :* $\quad \forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

   (e) *Retrouver ainsi le résultat de la question 4) c.*