ECE2-Semaine 3

22/09/21

1 Cours

1.1 Étude de suites

Suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ » : montrer qu'une suite est bien définie, étude de la monotonie quand f est croissante (récurrence), et étude de la monotonie par l'étude du signe de $x \mapsto f(x) - x$, définition de point fixe, thm : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et que f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe, utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude de la convergence.

Suites implicites : existence, étude de la monotonie et de la convergence sur des exemples.

Toutes les études de suites récurrentes et implicites seront guidées

1.2 Comparaison de suites

Négligeabilité : définition de $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, caractérisation des suites $\underset{n\to+\infty}{o}(1)$, caractérisation par la limite du quotient, opération avec les petits $\underset{n\to+\infty}{o}$ (transitivité, combinaison linéaire, produit), croissances comparées.

Équivalence : définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, caractérisation par la limite du quotient et lien avec les $\underset{n\to+\infty}{o}$ (Proposition 4), opérations sur les équivalents (symétrie, transitivité, compatibilité avec le produit, l'inverse, les puissances et la valeur absolue), équivalents usuels, lien avec les limites.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir montrer que les termes d'une suite définie par récurrence sont bien définis, appartiennent à un intervalle donné.
2. Savoir exploiter la croissance de f ou le signe de $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence.
3. Savoir déterminer l'existence de points fixes d'une fonction f en résolvant l'équation $f(x) = x$ ou en étudiant $x \mapsto f(x) - x$ (étude de signe, utilisation du théorème de la bijection ...)
4. Savoir étudier la convergence d'une suite définie par récurrence (à l'aide du théorème de convergence monotone, en utilisant les points fixes ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis par exemple)
5. Savoir justifier l'existence d'une suite définie implicitement (avec le théorème de la bijection).
6. Savoir exploiter les variations de(s) fonction(s) pour étudier une suite définie implicitement (monotonie, majorant, minorant, éventuellement la limite).
7. Savoir montrer que deux suites sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
8. Savoir déterminer un équivalent simple d'une suite à l'aide des équivalents usuels, des opérations sur les équivalents.
9. Savoir déterminer un équivalent simple d'une suite par encadrement ou de manière directe (factorisation par le terme dominant, multiplication par la quantité conjuguée,...).
10. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.

3 Questions de cours

- Définitions : point fixe, négligeabilité, équivalence.
- Théorèmes : théorème 1 du chapitre 1 (lien entre point fixe de f et limite d'une suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ »), inégalité des accroissements finis, théorème de la bijection.
- Propositions : caractérisation de la négligeabilité /de l'équivalence, croissances comparées, équivalents usuels.
- Scilab : commandes `eye`, `ones`, `zeros`.