ECE2-Colle 7

25/11/20

1 Applications linéaires

1.1 Généralités

Applications linéaires : définition et caractérisation des applications linéaires, endomorphisme, si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ alors $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$. $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un espace vectoriel, la composée d'applications linéaires est linéaire, puissance d'un endomorphisme. Isomorphisme, automorphisme, la bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Noyau et image : définition du noyau d'une application linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ. Noyau et injectivité. Définition de l'image, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée. Image et surjectivité.

1.2 Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une application linéaire : définition du rang d'une application linéaire en dimension finie. Méthode pour trouver une famille génératrice de l'image et calculer le rang. Théorème du rang, conséquences : deux espaces vectoriels de dimension finie isomorphes ont la même dimension, si $\dim(\mathrm{E}) < \dim(\mathrm{F})$ il n'existe pas d'application linéaire surjective de E dans F, si $\dim(\mathrm{E}) > \dim(\mathrm{F})$ il n'existe pas d'application linéaire injective de E dans F, si $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$ une application linéaire est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective. Une application linéaire est entièrement caractérisée par la donnée de l'image des éléments d'une base, application : deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

Matrice d'une application linéaire : matrice d'une famille de vecteurs dans une base, matrice d'une application linéaire dans des bases. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $p = \dim(\mathrm{E})$ et $n = \dim(\mathrm{F})$; dimension de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Lien entre application linéaire et matrices associées : coordonnées de l'image d'un vecteur à partir d'une matrice représentative, lien entre noyau d'une application et noyau de la matrice associée, matrice représentative d'une composée d'applications linéaires, matrice de la bijection réciproque d'un isomorphisme. Le rang d'une application linéaire est égal au rang de n'importe quelle matrice qui lui est associée.

Changement de bases : matrice de passage, formules de changement de base.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir déterminer si une application est linéaire ou non, est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire et en déduire si elle est injective ou surjective.
3. Savoir calculer le rang d'une application linéaire (avec la définition ou à partir d'une représentation matricielle).
4. Savoir et savoir utiliser le théorème du rang et ses conséquences.
5. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
6. Savoir, à partir de la matrice d'une application linéaire, déterminer son noyau, son image, son rang.
7. Savoir déterminer une matrice de changement de bases.

3 Questions de cours

- Définitions : rang d'une application linéaire, matrice d'une application linéaire dans des bases, matrice de passage.
- Théorème du rang
- Propositions : lien entre composition d'applications linéaires et produit de matrices (Proposition 14), formules de changement de base.