TD14-Fonctions de deux variables

Exercice 4 (*et 5, 6*)

1. *La fonction g_1 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (en particulier, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$). De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\begin{aligned}
\partial_1(g_1)(x,y) &= 3x^2y^3 + 6xy - 2y^2 + 1 \\
\partial_2(g_1)(x,y) &= 3x^3y^2 + 3x^2 - 4yx \\
\partial^2_{1,1}(g_1)(x,y) &= 6xy^3 + 6y \\
\partial^2_{1,2}(g_1)(x,y) = \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) &= 9x^2y^2 + 6x - 4y \\
\partial^2_{2,2}(g_1)(x,y) &= 6x^3y - 4x.
\end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a*

$$g_1(0,0) = 1 \quad ; \quad \nabla(g_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_1(h,k) &= 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\
&= 1 + h + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,0)$. On a*

$$g_1(1,0) = 2 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_1(1+h,k) &= 2 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\
&= 2 + h + 3k + 6hk - 2k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,1)$. On a*

$$g_1(1,1) = 4 \quad ; \quad \nabla(g_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_1(1+h,1+k) &= 4 + \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\
&= 4 + 8h + 2k + 6h^2 + 11hk + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

2. *Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2+1$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, la fonction $(x,y) \mapsto x^2+1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2)$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*

   Enfin, par somme, la fonction f_1 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (donc en particulier de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$).

   De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\partial_1(f_1)(x,y) &= 2x + \frac{2x}{x^2+1} \\
\partial_2(f_1)(x,y) &= 2y \\
\partial^2_{1,1}(f_1)(x,y) &= 2 + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
\partial^2_{1,2}(f_1)(x,y) = \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) &= 0 \\
\partial^2_{2,2}(f_1)(x,y) &= 2.
\end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a*

$$f_1(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} f_1(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,0)$. *On a*

$$f_1(1,0) = 1 + \ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} f_1(1+h,k) &= 1 + \ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 1 + \ln(2) + 3h + h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,1)$. *On a*

$$f_1(1,1) = 2 + \ln(2) \quad ; \quad \nabla(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(f_1)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} f_1(1+h,1+k) &= 2 + \ln(2) + \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= 2 + \ln 2 + 3h + 2k + h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

3. $g_2 : (x,y) \mapsto e^{xy} \ln(1+x^2+y^2)$.
   Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ *et* $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y) \mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Par produit, la fonction g_2 *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \partial_1(g_2)(x,y) &= ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \partial_2(g_2)(x,y) &= xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \partial^2_{1,1}(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \\ \partial^2_{2,2}(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,2}(g_2)(x,y) &= e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2} + \frac{2x^2}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)} \right. \\ &= \partial^2_{2,1}(g_2)(x,y) \end{aligned}$$

- *DL en* $(0,0)$. *On a*

$$g_2(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_2)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} g_2(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= h^2 + k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en* $(1,0)$. *On a*

$$g_2(1,0) = \ln(2) \, ; \, \nabla(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \ln(2) \end{pmatrix} \, ; \, \nabla^2(g_2)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} g_2(1+h,k) &= \ln(2) + \begin{pmatrix} 1 & \ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+\ln(2) \\ 1+\ln(2) & 1+\ln(2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \\ &= \ln(2) + h + \ln(2)k + \frac{1+\ln(2)}{2}(2hk + k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k) \end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue en* $(0,0)$ *telle que* $\epsilon(0,0) = 0$.

4. *La fonction $(x,y) \mapsto (x+y)$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y) \mapsto e^x - e^y + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, g_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.*
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\partial_1(g_3)(x,y) &= e^x(1+x+y) - e^y + 1\\
\partial_2(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+1) + e^x + 1\\
\partial^2_{1,1}(g_3)(x,y) &= e^x(x+y+2)\\
\partial^2_{2,2}(g_3)(x,y) &= -e^y(x+y+2)\\
\partial^2_{1,2}(g_1)(x,y) &= \partial^2_{2,1}(g_1)(x,y) = e^x - e^y
\end{aligned}$$

- *DL en $(0,0)$. On a*

$$g_3(0,0) = 0 \quad ; \quad \nabla(g_3)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_3(h,k) &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= h + k + h^2 - k^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,0)$. On a*

$$g_3(1,0) = e \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,0) = \begin{pmatrix} 2e \\ e-1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,0) = \begin{pmatrix} 3e & e-1 \\ e-1 & -3 \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_3(1+h,k) &= e + \begin{pmatrix} 2e & e-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3e & e-1 \\ e-1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\\
&\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= e + 2eh + (e-1)k + \frac{1}{2}(3eh^2 + 2(e-1)hk - 3k^2) + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.

- *DL en $(1,1)$. On a*

$$g_3(1,1) = 2 \quad ; \quad \nabla(g_3)(1,1) = \begin{pmatrix} 1+2e \\ 1-2e \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla^2(g_3)(1,1) = \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -4e \end{pmatrix}.$$

D'où, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g_3(1+h,1+k) &= 2 + \begin{pmatrix} 1+2e & 1-2e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -4e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\\
&\quad + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)\\
&= 2 + (1+2e)h + (1-2e)k + 2eh^2 - 2ek^2 + (h^2+k^2)\epsilon(h,k)
\end{aligned}$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.