Chapitre 14 : Fonctions de deux variables réelles

1 Fonctions de deux variables

Définition 1 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application f définie sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

Exemple 1

1. *Les fonctions*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

*sont appelées les **fonctions coordonnées**.*

2. *Les fonctions de la forme*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

avec $A \subset \mathbb{N}^2$ *fini sont appelées **des fonctions polynomiales**.*

3. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$.
5. *Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable :* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xe^{-x}$.

Exemple 2

1. *La fonction* $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *est définie sur*

2. *La fonction* $(x, y) \longmapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ *est définie sur*

3. *La fonction* $(x, y) \longmapsto \ln(x + y)$ *est définie sur*

4. *En économie, les fonctions de production de Cobb-Douglas, sont les fonctions qui, à deux variables réelles (la quantité de travail* L *et le capital investit* K*), associent la production totale* P *définie par :* $P(L, K) = \beta L^{\alpha} K^{1-\alpha}$*, où* α *et* β *sont des réels strictement positifs.*

Définition 2 (Applications partielles)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.

- On appelle première **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $x \mapsto f(x, y_0)$ définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathscr{D}\}$. On la note f_{y_0}.
- On appelle deuxième **application partielle** de f en (x_0, y_0) l'application $y \mapsto f(x_0, y)$ définie sur l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathscr{D}\}$. On la note f_{x_0}.

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors, pour $(x_0, y_0) = (-1, 3)$ on a

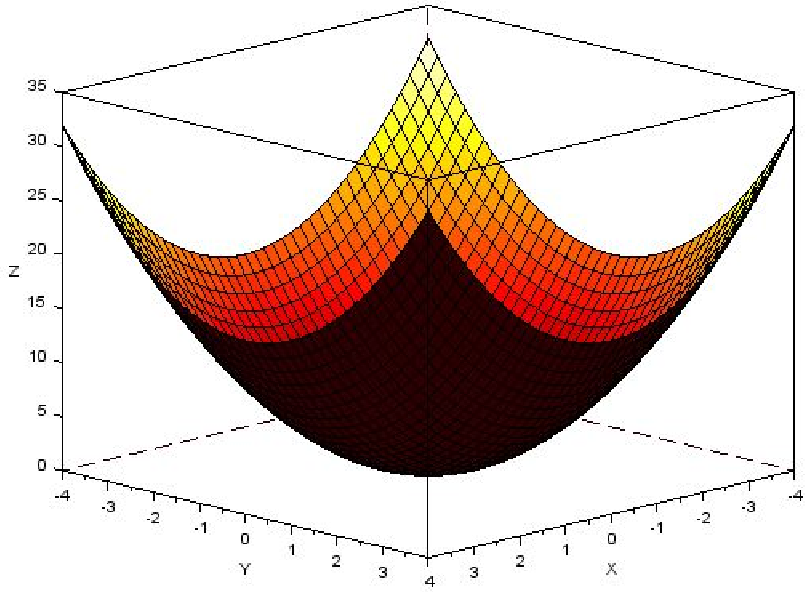
Définition 3 (Représentation graphique)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathscr{D} \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ , \ (x, y) \in \mathscr{D}\}.$$

Exemple 4

On considère la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$.




```
function z=f(x,y)
    z=x^2+y^2
endfunction

x=-4:0.1:4
y=-4:0.1:4

fplot3d(x,y,f)
```

Définition 4 (Ligne de niveau)

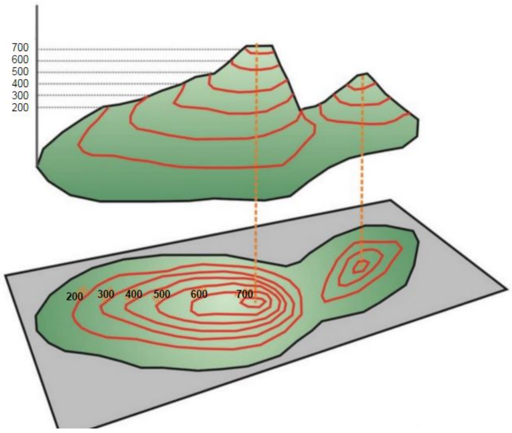
Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $c \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** c **de** f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathscr{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

Remarque 1

Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = c$ et on projette sur le plan $(\mathrm{O}xy)$ pour obtenir la ligne de niveau c de f.

Exemple 5



Exemple 6

On reprend l'exemple de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$.

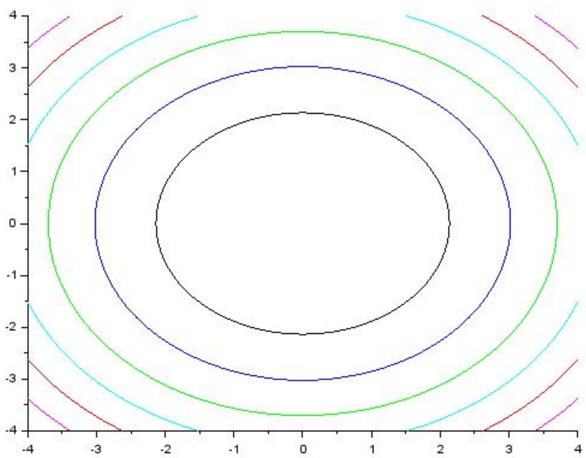
1. *La ligne de niveau -1 de f est*

2. *La ligne de niveau 0 de f est*

3. *La ligne de niveau 1 de f est*

4. *Plus généralement, la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$ est*

Les lignes de niveaux de la fonction de l'exemple 6 :



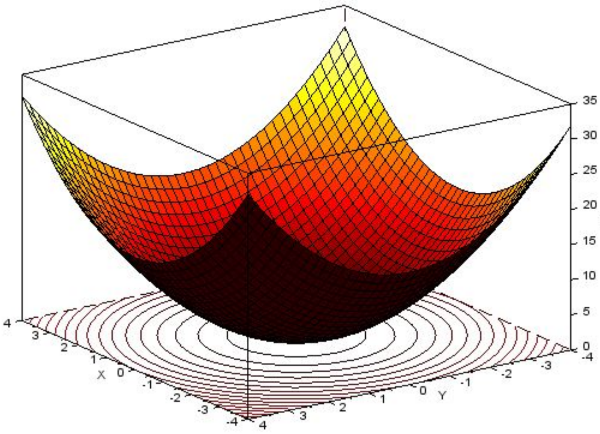

```
x=-4:0.1:4
y=x

z=feval(x,y,f)
contour(x,y,z,6)
```

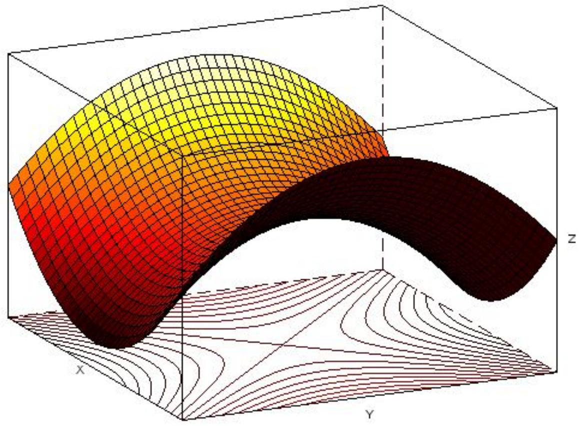
Exemple 7

Graphe et ligne de niveau de

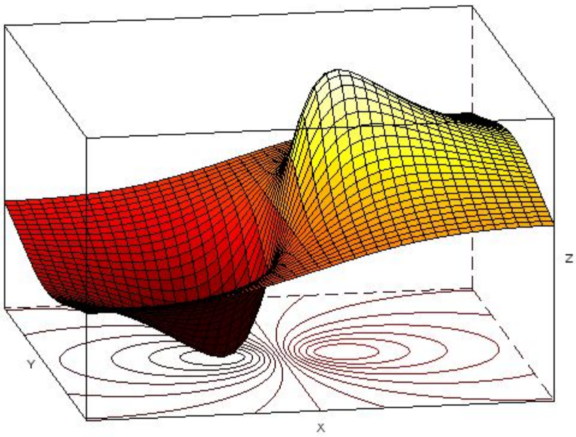
1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$.



2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$



3. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x}{x^2+y^2+1}$.



Dans les deux prochaines parties du chapitre on ne s'intéressera qu'aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2 Continuité des fonctions de deux variables

En première année, on définit la continuité des fonctions d'une variable réelle. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in$ I. On dit que f est continue en x_0 si

ou encore

Autrement dit, une fonction d'une variable réelle f est continue en x_0 si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.

La principale différence lorsque f est une fonction de deux variables réelles est la notion de « suffisamment proche de ».

2.1 Distance euclidienne

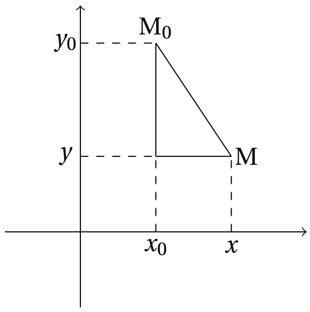
Définition 5 (Distance euclidienne entre deux points)

Soit $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$ et $\mathrm{M} = (x, y)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. On appelle **distance euclidienne entre** M_0 **et** M le réel noté $d(\mathrm{M}_0, \mathrm{M})$ défini par

$$d(\mathrm{M}_0, \mathrm{M}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Remarque 2

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore :



Exemple 8

Soient $\mathrm{A} = (x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ *un point de* $\mathbb{R}^2$ *et* $r > 0$.

1. *L'ensemble* $\left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = r\right\}$

2. *L'ensemble* $\left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) < r\right\}$

   Cet ensemble est appelé ***la boule ouverte de centre*** A ***et de rayon*** r.

3. *L'ensemble* $\left\{\mathrm{M} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \leqslant r\right\}$

   Cet ensemble est appelé ***la boule fermée de centre*** A ***et de rayon*** r.

Proposition 1 (Propriétés de la distance euclidienne)

1. $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A,B) \geqslant 0$;
2. $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$;
3. $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A,B) = d(B,A)$;
4. $\forall (A,B,C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$;

2.2 Continuité

Définition 6 (Continuité en un point)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x, y)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0, y_0)$ pourvu que (x, y) soit suffisamment proche de (x_0, y_0).

Exemple 9

La fonction $f : (x, y) \mapsto x + y$ *est continue en* $(0, 0)$.

Définition 7 (Continuité sur $\mathbb{R}^2$)

Soit f une fonction numérique de deux variables. On dit que f est **continue sur** $\mathbb{R}^2$ si f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Alors

1. toute combinaison linéaire de f et de g est continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence,

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 10

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 1 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction continue sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 11

1. *Montrons que* $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrons que* $(x, y) \mapsto x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 2 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
2. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Méthode 1

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est continue on utilisera souvent les propositions 2 *et* 3 *et les exemples usuels.*

3 Calcul différentiel

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 8 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.

Remarque 3

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- *f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si la limite suivante existe*
- *f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en (x_0, y_0) si la limite suivante existe*

Définition 9

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y) \end{aligned}$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y) \end{aligned}$$

Méthode 2

Pour déterminer la dérivée partielle par rapport à une variable, on considère l'autre variable comme une constante *et on utilise les formules de dérivation des fonctions d'une variable.*

Exemple 12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

Montrons que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point (x, y).

1. *On fixe la deuxième variable : soit $y \in \mathbb{R}$.*

2. *On dérive par rapport à la variable x (y est fixé et donc à considérer comme une constante).*

3. *Conclusion :*

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f de l'exemple ci-dessus.

Exemple 13

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Déterminer les dérivées partielles.

1. *Par rapport à la première variable.*

2. *Par rapport à la deuxième variable.*

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (1 + xy)(2x - 2y + 1)$

Définition 10 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}^2$ si elle admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 14

On reprend la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de l'exemple précédent :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu que g admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad et \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4 (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence,

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 15

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Justifier que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction de classe C^1 sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 16

1. *Montrons que* $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrons que* $(x,y) \mapsto x\ln(x^2+y^2+1)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Méthode 3

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^1 *on utilisera souvent les propositions* 4 *et* 5 *et les exemples usuels.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles.*

1. *La fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$.
2. *La fonction* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$.

Proposition 6

Toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4

Attention, contrairement à ce qu'il se passe pour les fonctions d'une variable, l'existence des dérivées partielles d'une fonction f en un point (x_0, y_0) n'assure pas que f est continue en (x_0, y_0) : l'existence des dérivées partielles en (x_0, y_0) assure que f « paraît continue » en (x_0, y_0) tant qu'on approche (x_0, y_0) selon une direction verticale ou horizontale mais ne donne aucune information sur ce qu'il se passe lorsqu'on approche ce point par une autre direction !
L'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues permet d'assurer la continuité de f.

Définition 11 (Gradient)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **gradient de f en** (x_0, y_0) le vecteur de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x_0, y_0)$ (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x_0, y_0) \\ \partial_2(f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Proposition 7 (Développement limité d'ordre 1)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2}\,\epsilon(h,k)$$

où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0) = 0$.
Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en** (x_0, y_0) et est unique.

Remarque 5

1. *De manière équivalente, le développement limité en (x_0, y_0) s'écrit :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,\epsilon(x,y)$$

   où $\epsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue en (x_0, y_0) telle que $\epsilon(x_0, y_0) = 0$.
2. *Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variable du développement limité d'ordre 1 pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\epsilon(h)$$

   avec $\lim_{\to 0} \epsilon(h) = 0$.
3. *Graphiquement, l'équation $z = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ est l'équation du plan tangent au graphe de f aux points de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.*

Exemple 17

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + y^2.$$

1. *Justifions que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *Déterminons le gradient de f en $(0,1)$.*

3. *Déterminons le développement limité de f en* $(0,1)$

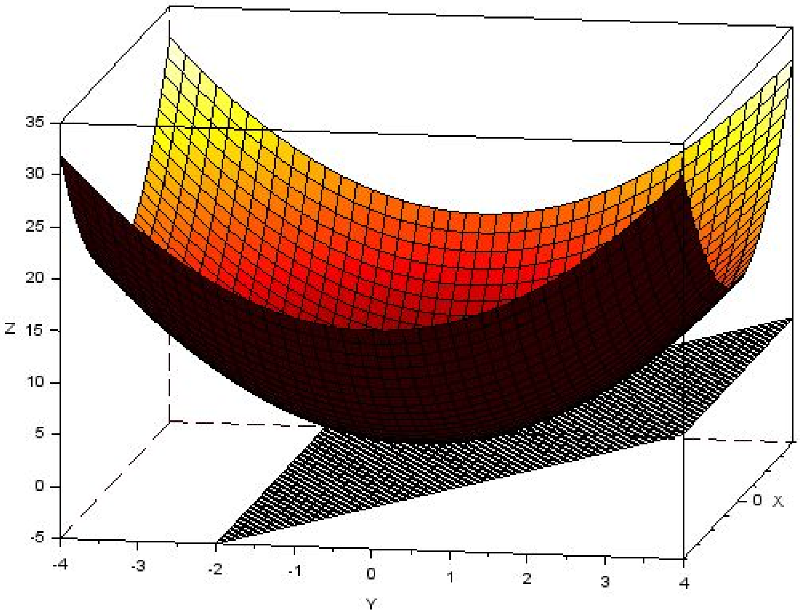


FIGURE 1 – Graphe de la fonction de l'exemple 17 avec le plan tangent en $(0,1)$

3.2 Fonctions de classe C^2

Définition 12 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{2,1}(f) = \partial_2(\partial_1(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{1,2}(f) = \partial_1(\partial_2(f)).$$
- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la seconde variable sur** $\mathbb{R}^2$ si $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable sur $\mathbb{R}^2$. On note
$$\partial^2_{2,2}(f) = \partial_2(\partial_2(f)).$$

Exemple 18

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$
On a vu à l'exemple 12 que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable :
$$\forall (x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = -2y^2 + 6y^2x.$$
Montrons que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivantes : $\partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{1,1}(f)$.

1. *Justifions l'existence de $\partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{1,1}(f)$.*
2. *Calculons $\partial^2_{1,1}(f)$.*
3. *Calculons $\partial^2_{2,1}(f)$.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer les dérivées partielles $\partial^2_{1,2}(f)$ et $\partial^2_{2,2}(f)$ de la fonction f de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le test 3.

Définition 13 (Fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
On dit que f est de **classe** C^2 **sur** $\mathbb{R}^2$ si

- elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$;
- ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 19

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

On a vu à l'exemple 14 que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(g)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}.$$

Montrons que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 8

Toute fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemples de référence

1. Les fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions constantes sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 9 (Opérations sur les fonctions de classe C^2)

Soient f et g deux fonctions numériques de deux variables réelles définies sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Alors

1. toute combinaison linéaire de f et de g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$;
2. le produit $f \times g$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$;
3. si g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

En conséquence,

Exemples de référence

Les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 20

Montrons que la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10 (Composition par une fonction d'une variable)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction de classe C^2 sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g \circ f$ de deux variables réelles est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 21

1. *Montrons que* $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

2. *Montrons que* $(x, y) \mapsto x \ln(x^2+y^2+1)$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Méthode 4

Comme sur les exemples précédents, pour montrer qu'une fonction est de classe C^2 *on utilisera souvent les propositions 9 et 10 et les exemples usuels.*

Test 8 (*Voir solution.*)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles secondes.*

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 + xy)(2x - 2y + 1)$
4. $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Exemple 22

1. *On considère la fonction de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

Déterminer $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,1}(f)$.

2. *On considère la fonction de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 1 + xy^2 + e^x.$$

Déterminer $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,1}(f)$.

3. *Que remarque-t-on ?*

Théorème 1 (de Schwarz)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial^2_{2,1}(f)(x, y) = \partial^2_{1,2}(f)(x, y).$$

Définition 14 (Matrice hessienne)

Soient f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On appelle matrice hessienne de f en (x,y) la matrice de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, notée $\nabla^2(f)(x,y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y)\\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y)\end{pmatrix}.$$

Remarque 6

Si f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de f en tout point est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Exemple 23

Déterminons la matrice hessienne en $(1,2)$ de la fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=1+xy^2+e^x.$$

Proposition 11 (Développement limité d'ordre 2)

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+{}^t\nabla(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\cdot\nabla^2(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+(h^2+k^2)\epsilon(h,k)$$

où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en $(0,0)$ telle que $\epsilon(0,0)=0$.
Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 2 de f en** (x_0,y_0) et est unique.

Remarque 7

1. *De manière équivalente, le développement limité en (x_0,y_0) s'écrit, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+{}^t\nabla(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-x_0 & y-y_0\end{pmatrix}\cdot\nabla^2(f)(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\epsilon(x,y)$$

   où $\epsilon:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est une fonction continue en (x_0,y_0) telle que $\epsilon(x_0,y_0)=0$.
2. *Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variable de la formule de Taylor à d'ordre 2 vue au chapitre 10.*

Exemple 24

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x^2+y^2.$$

1. *Justifions que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *On a vu à l'exemple 17 que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x, y) = 2x$ *et* $\partial_2(f)(x, y) = 2y$.
   Déterminons la hessienne de f *en* $(0, 1)$.

3. *Déterminons le développement limité de* f *en* $(0, 1)$ *à l'ordre 2*

4 Extension aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Pour le moment, nous n'avons étudié que des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Cependant, il est fréquent de rencontrer des fonctions qui ne sont définies que sur une partie de $\mathbb{R}^2$ (comme dans l'exemple 2).

Le but de cette partie est d'étendre les notions rencontrées dans les parties 2 et 3 aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$.

4.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition 15 (Boules ouvertes,boules fermées)

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte de centre** A **et de rayon** r et on note $B(A, r)$ le sous-ensemble de de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$B(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\right\}.$$
- On appelle **boule fermée de centre** A **et de rayon** r et on note $B_f(A, r)$ le sous-ensemble de de $\mathbb{R}^2$ défini par :
$$B_f(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leqslant r\right\}.$$

Définition 16 (Ouverts, fermés)

- On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $D = \emptyset$ ou si pour tout point $M \in D$ il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \subset D$.
- On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est un **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

Exemple 25

1. *Les boules ouvertes sont des ouverts. Il est conseillé de faire un dessin !*

2. *Les boules fermées sont des fermés. Il est conseillé de faire un dessin !*

3. $\mathbb{R}^2$ *est ouvert, son complémentaire* $\emptyset$ *est donc fermé.*
   $\emptyset$ *est ouvert, son complémentaire* $\mathbb{R}^2$ *est donc fermé.*
   Ainsi $\mathbb{R}^2$ *et* $\emptyset$ *sont à la fois ouverts et fermés.*
4. *Les ensembles de la forme* $]a, b[\times]c, d[$ *sont ouverts.*
5. *Les ensembles de la forme* $[a, b] \times [c, d]$ *sont fermés.*
6. *L'ensemble* $[0, 1[\times [0, 1[$ *n'est ni ouvert ni fermé.*
7. *Les ensembles* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$ *sont des ouverts (voir exemple 2).*

Définition 17 (Ensemble borné)

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}^2$ est **bornée** si elle est incluse dans une boule centrée en $(0,0)$:

$$\exists r>0 \quad \mathrm{D} \subset \mathrm{B}((0,0),r) \quad \text{ou encore} \quad \exists r>0\ \forall \mathrm{M} \in \mathrm{D} \quad d((0,0),\mathrm{M})<r.$$

Exemple 26

1. *Toute boule (ouverte ou fermée) est bornée. Il est conseillé de faire un dessin !*
2. *L'ensemble* $[0,1]\times[0,1]$ *est bornée*
3. *L'ensemble* $\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ *est non borné.*

Test 9 (***Voir solution.***)

Représenter chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ *suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).*

1. $\mathrm{U}_1=[0,1]\times\mathbb{R}$
2. $\mathrm{U}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$.
3. $\mathrm{U}_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x\}$
4. $\mathrm{U}_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x \text{ et } 0\leqslant x\leqslant 2\}$

4.2 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Définition 18 (Continuité)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0,y_0)\in\mathrm{D}$.

- On dit que f est **continue en** (x_0,y_0) si

$$\forall \epsilon>0\ \exists r>0\ \forall (x,y)\in\mathrm{D},\ d((x,y),(x_0,y_0))<r \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon.$$

- On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point de D.

Tous les résultats vus dans la partie 2 s'étendent aux fonctions continues sur une partie D **de** $\mathbb{R}^2$**.**

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$. Comme D est un ouvert

- l'application partielle f_{y_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0,
- l'application partielle f_{x_0} est définie sur un intervalle ouvert contenant y_0.

Définition 19 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ si l'application partielle f_{y_0} est dérivable en x_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{y_0} en x_0 est noté $\partial_1(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point de D, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\partial_1(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_1(f) : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y) \end{aligned}$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ si l'application partielle f_{x_0} est dérivable en y_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de f_{x_0} en y_0 est noté $\partial_2(f)(x_0, y_0)$.
- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point de D, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\partial_2(f)$ la fonction :

$$\begin{aligned} \partial_2(f) : \mathrm{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y) \end{aligned}$$

Définition 20 (Fonctions de classe C^1 sur un ouvert)

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est de **classe** C^1 **sur** D si elle admet des dérivées partielles sur D et que les dérivées partielles sont continues sur D.

Définition 21 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur D.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à la première variable sur** D si $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur D. On note

$$\partial^2_{1,1}(f) = \partial_1(\partial_1(f)).$$

- On définit de même, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 2 $\partial^2_{2,1}(f)$, $\partial^2_{1,2}(f)$, $\partial^2_{2,2}(f)$ sur D.

Définition 22 (Fonctions de classe C^2 sur un ouvert)

Soient $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un **ouvert** D de $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est de **classe** C^2 **sur** D si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D et que les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur D.

Tous les résultats vus dans la partie 3 s'étendent aux fonctions continues sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 27

On considère la fonction La fonction $g : (x, y) \longmapsto \ln(x+y)$ *définie sur l'ouvert* $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

1. *Montrons que* g *est de classe* C^2 *sur* D.

2. *Déterminons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*

3. *Déterminons le développement limité de* g *au voisinage de* $(1,0)$.

Exemple 28

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Montrons que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. *Est-elle continue en* $(0,0)$ *?*

3. *Montrons que* f *admet des dérivées partielles d'ordre* 1 *en* $(0,0)$.

Remarque 8

Cela montre que l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité ! Il faut l'hypothèse supplémentaire que les dérivées partielles sont continues (voir la remarque 4).

5 Extrema des fonctions de deux variables

Définition 23 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **minimum local en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}((x_0,y_0), r) \cap \mathrm{D} \quad f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

  Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in \mathrm{D}$.

- On dit que f admet un **maximum local en** $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{B}((x_0,y_0), r) \cap \mathrm{D} \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

  Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x,y) \in \mathrm{D}$.

Remarque 9

1. *Un minimum/ maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.*
2. *Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).*
3. *Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement unique.*

Exemple 29

Soit f la fonction définie sur U *par :*

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

où est une partie de $\mathbb{R}^2$

1. *On prend* $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2$.

2. *On prend* $\mathrm{U} = \mathrm{B}_f((0,0),1)$.

Proposition 12

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie (elle possède un maximum et un minimum sur cette partie).

Proposition 13 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$.
Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 10

Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xy.$$

Définition 24 (Point critique)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$.
On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f si $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 11

Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

Méthode 5 (*Déterminer les points critiques*)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^2$, pour déterminer ses points critiques

1. *on s'assure que U est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe C^1 sur U ;*
2. *on résout le système de deux inconnues à deux équations $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.*

Attention, ce système n'est en général pas linéaire ! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum !

Exemple 30

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Cherchons les extrema de f.

1. *Recherche des points critiques.*

2. Étude des points critiques.

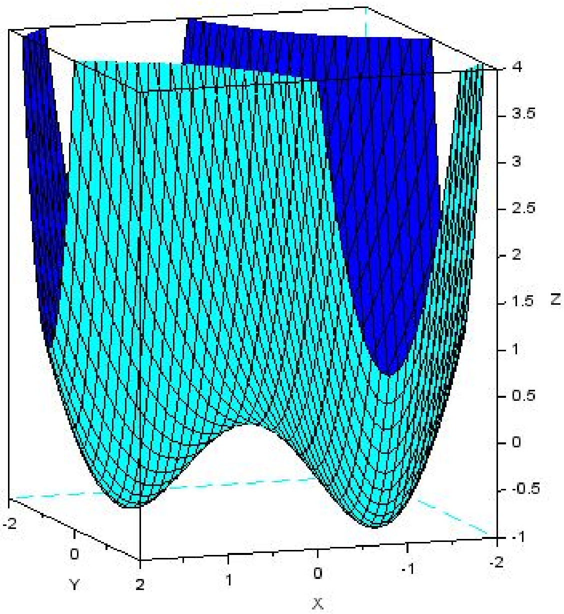


FIGURE 2 – Graphe de la fonction de l'exemple 30

Proposition 14 (Condition suffisante d'existence d'un extremum)

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$ un point critique de f.

- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives alors (x_0, y_0) est un maximum local de f.
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives alors (x_0, y_0) est un minimum local de f.
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés alors (x_0, y_0) n'est pas un extremum de f. On dit que (x_0, y_0) est un **point selle** ou **point col** de f.
- Si l'une des valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut rien conclure.

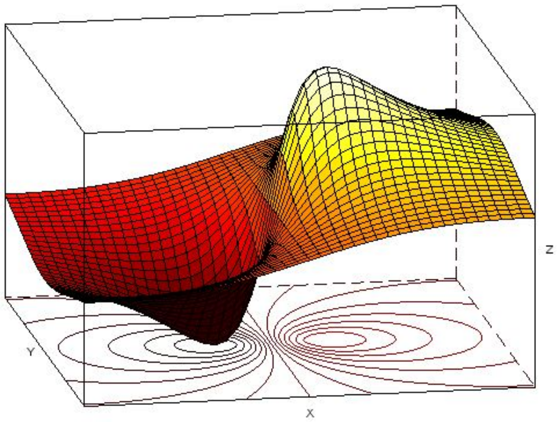


FIGURE 3 – Un minimum (à gauche) et un maximum (à droite)

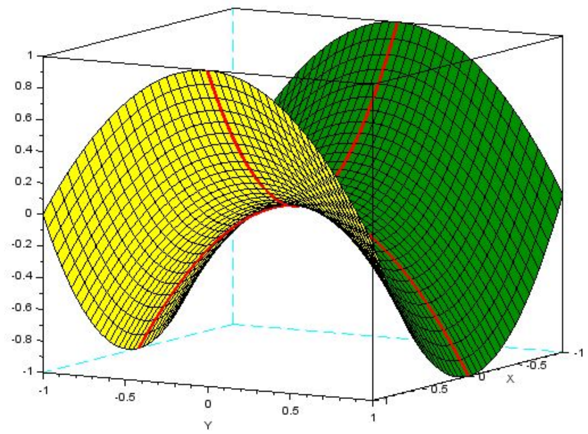


FIGURE 4 – Un point selle

Méthode 6 (*Étudier les extrema*)

Étant donnée une fonction f définie sur un sous-ensemble U *de* $\mathbb{R}^2$*, pour déterminer ses extrema locaux*

1. *on s'assure que* U *est un ouvert (c'est souvent donné dans l'énoncé) et que f est de classe* C^2 *sur* U *;*
2. *on détermine les points critiques de f sur* U *;*
3. *on calcule la hessienne de f en chaque point critique et on détermine ses valeurs propres ;*
4. *on utilise la proposition 14.*

Exemple 31

On reprend la fonction de l'exemple précédent. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 4xy.$$

Les points critiques sont $(0, 0)$*,* $(1, -1)$ *et* $(-1, 1)$*. Déterminons les extremas de f.*

1. *Calcul de la hessienne.*

2. *Étude en* $(0,0)$.

3. *Étude en* $(1,-1)$.

4. *Étude en* $(-1,1)$.

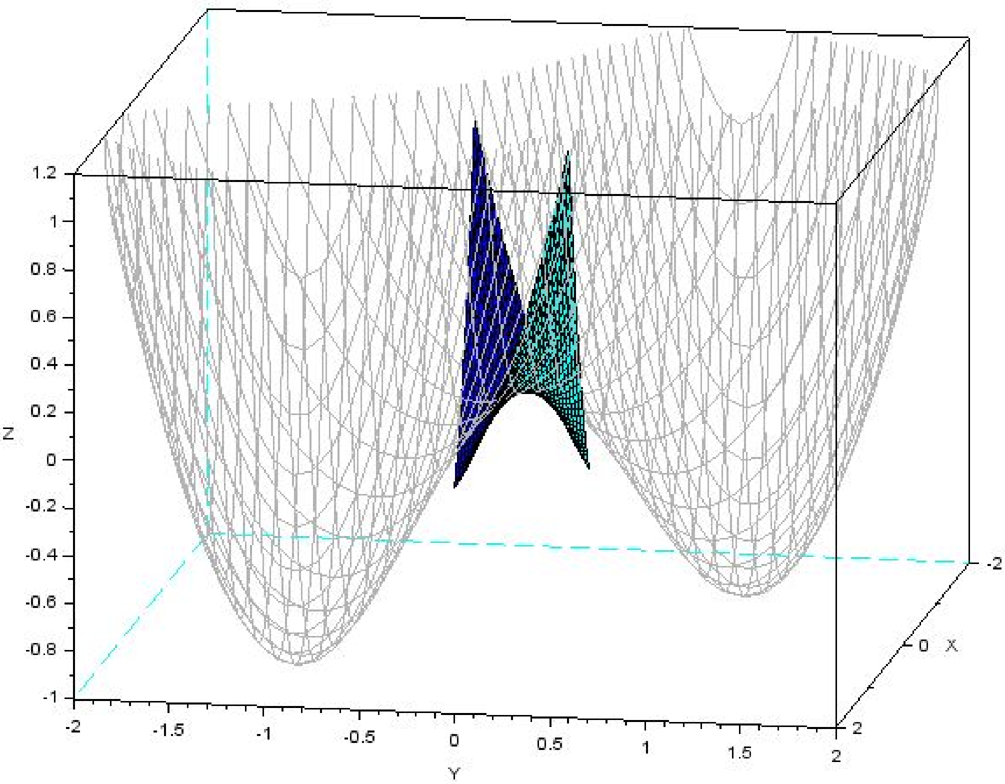


FIGURE 5 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$

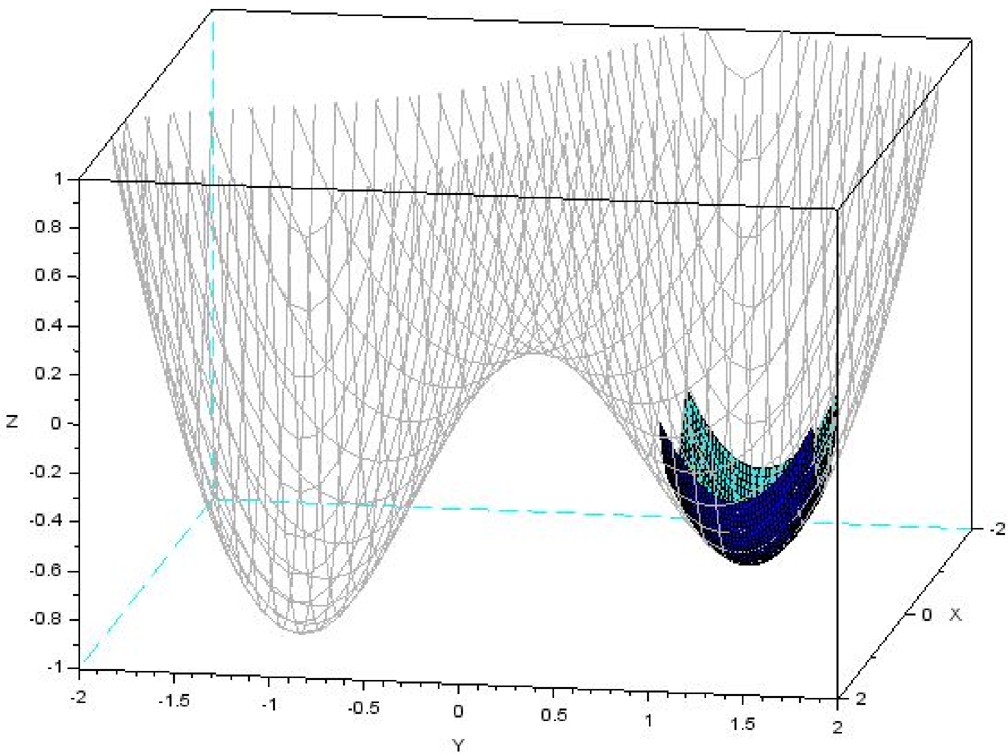


FIGURE 6 – Approximation à l'ordre 2 au voisinage de $(-1,1)$

Méthode 7 (*Déterminer si un extremum est global*)

On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$

- *Pour montrer que f possède un maximum global (resp. minimum global) en $(x_0,y_0)\in U$, il faut montrer que $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$) pour tout $(x,y)\in U$ (voir l'exemple 30).*
- *Pour montrer que f n'a pas d'extremum global, l'énoncer suggère parfois de considérer deux fonctions g et h d'une variable telles que $t\mapsto f(g(t),h(t))$ possède une limite infinie ($-\infty$ pour contredire un minimum et $+\infty$ pour contredire un maximum).*

Exemple 32

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=xy^3-x^2-3y^2+2xy+1$.

Montrons que f ne possède pas d'extremum global en considérant $y\mapsto f(1,y)$.

1. *Supposons par l'absurde que f possède un maximum global en un point (x_0,y_0).*

2. *Supposons par l'absurde que f possède un minimum global en un point (x_0, y_0).*

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xy(x+y-1).$$

1. *Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer les points critiques de f.*
3. *Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.*
4. *Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux ?*

6 Objectifs

1. Savoir justifier la continuité, le caractère C^1 ou C^2 d'une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Savoir calculer les dérivées partielles, le gradient d'une fonction de deux variables.
3. Savoir calculer les dérivées partielles seconde, la Hessienne.
4. Savoir déterminer un DL d'ordre 1 ou 2 d'une fonction de deux variables.
5. Savoir déterminer les points critiques.
6. Savoir déterminer la nature des points critiques.

7 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ *et* $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x - y)^2 + 1 > 0$ *donc la fonction* $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que quotient de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}^2$. *La fonction* $(x, y) \mapsto e^y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + e^y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1, +\infty[$. *La fonction logarithme est continue sur* $[1, +\infty[$. *Par composition, la fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$ *est donc continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Les fonctions* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy$ *et* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$ *sont polynomiales donc continues sur* $\mathbb{R}^2$.
   La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
   Enfin, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions continues sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. *La fonction* $f_x : y \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$ *est polynomiale donc dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Ainsi, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\partial_2(f)(x, y)$ *existe et*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Pour montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 existent, on va utiliser les résultats d'opération sur les fonctions de classe C^1 *(c'est ainsi que l'on procédera toujours désormais).*

1. *Les fonctions* $(x, y) \mapsto xy$ *et* $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x, y) \mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x, y) \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Par produit, la fonction f *est donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de* $\mathbb{R}^2$. *De plus,*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = ye^{xy}\ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}$$

   et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = xe^{xy}\ln(1 + x^2 + y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

2. *La fonction* f *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de* $\mathbb{R}^2$. *De plus,*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x, y) = y(2x - 2y + 1) + 2(1 + xy)$$

   et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x, y) = x(2x - 2y + 1) - 2(1 + xy).$$

Correction du test 5 (***Retour à l'énoncé.***)

Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ *et* $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1>0$ *donc la fonction* $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, la fonction $(x,y)\mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que quotient de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 6 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1,+\infty[$. *La fonction logarithme est de classe* C^1 *sur* $[1,+\infty[$. *Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \ln(1+x^2+e^y)$ *est donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2+e^y}$$

2. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
Enfin, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=1+2y-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=2x.$$

Correction du test 7 (***Retour à l'énoncé.***)

D'après le test 3,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=3y^2-4xy+6x^2y.$$

La fonction $\partial_2(f)$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *En particulier, les dérivées partielles d'ordre 2* $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial_1(\partial_2(f))(x,y)=-4y+12xy$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\partial_2(\partial_2(f))(x,y)=6y-4x+6x^2.$$

Correction du test 8 (***Retour à l'énoncé.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles secondes.*

1. *Les fonctions* $(x,y)\mapsto xy$ *et* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto\ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Par produit, la fonction f_1 *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *De plus, d'après le test 4 on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_1)(x,y)=ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_1)(x,y)=xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Donc

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,2}(f_1)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f_1)(x,y)=e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2)+\frac{2y^2}{1+x^2+y^2}+\frac{2x^2}{1+x^2+y^2}-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,1}(f_1)(x,y)=e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2)+\frac{4xy}{1+x^2+y^2}+\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,2}(f_1)(x,y)=e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2)+\frac{4xy}{1+x^2+y^2}+\frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right).$$

2. *La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y)\mapsto e^y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par composition. Donc, par somme, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et à valeur dans $[1,+\infty[$. La fonction logarithme est de classe C^2 sur $[1,+\infty[$. Par composition, la fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\ln(1+x^2+e^y)$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après le test 6, on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_2)(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_2)(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2+e^y}.$$

Donc

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,1}(f_2)(x,y)=\partial^2_{1,2}(f_2)(x,y)=-\frac{2xe^y}{(1+x^2+e^y)^2}$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,2}(f_2)(x,y)=\frac{e^y(1+x^2+e^y)-e^{2y}}{(1+x^2+e^y)^2}=\frac{e^y(1+x^2)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,1}(f_2)(x,y)=\frac{2(1+x^2+e^y)-4x^2}{(1+x^2+e^y)^2}=\frac{2(1-x^2+e^y)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

3. *La fonction f_3 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après le test 4 :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_3)(x,y)=y(2x-2y+1)+2(1+xy)$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_3)(x,y)=x(2x-2y+1)-2(1+xy).$$

Donc

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,1}(f_3)(x,y)=\partial^2_{1,2}(f_3)(x,y)=4x-4y+1$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,1}(f_3)(x,y)=4y\quad \textit{et}\quad \partial^2_{2,2}(f_3)(x,y)=-4x$$

4. *Les fonctions $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ donc, par quotient, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
Enfin, f_4 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après le test 6 :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_4)(x,y)=1+2y-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_4)(x,y)=2x.$$

Donc

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,2}(f_4)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f_4)(x,y)=2$$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,1}(f_4)(x,y)=\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}\quad \text{et}\quad \partial^2_{2,2}(f_4)(x,y)=0.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=xy(x+y-1).$$

1. *La fonction f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Pour déterminer les points critiques, il faut calculer le gradient. Or pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a*

$$\partial_1(f)(x,y)=2xy+y^2-y\quad \text{et}\quad \partial_2(f)(x,y)=2xy+x^2-x.$$

On en déduit donc le gradient de f :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}2xy+y^2-y\\ 2xy+x^2-x\end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl}2xy+y^2-y&=&0\\ 2xy+x^2-x&=&0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl}2xy+y^2-y&=&0\\ x^2-y^2-x+y&=&0\end{array}\right. \quad (L_2\leftarrow L_2-L_1)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}2xy+y^2-y&=&0\\ (x-y)(x+y-1)&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}2xy+y^2-y&=&0\\ x&=&y\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl}2xy+y^2-y&=&0\\ x&=&1-y\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}3y^2-y&=&0\\ x&=&y\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl}2(1-y)y+y^2-y&=&0\\ x&=&1-y\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}y(3y-1)&=&0\\ x&=&y\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl}y(1-y)&=&0\\ x&=&1-y\end{array}\right.\\
&\iff (x,y)=(0,0) \text{ ou } (x,y)=(1/3,1/3) \text{ ou } (x,y)=(1,0) \text{ ou } (x,y)=(0,1).
\end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$, $(1/3,1/3)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

3. *On va étudier la hessienne en chaque point critique. Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:*

$$\partial^2_{1,1}(f)=2y\quad ;\quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=2x\quad ;\quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=2x+2y-1.$$

   (a) *Étude en $(0,0)$. On a*

$$\nabla^2(f)(0,0)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}^2=I_2$, le polynôme X^2-1 est annulateur de $\nabla^2(f)(0,0)$. Ainsi les valeurs propres possibles de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont -1 et 1. On vérifie ensuite que 1 et -1 sont effectivement des valeurs propres. Ainsi, $(0,0)$ est un point selle.

(b) *Étude en* $(1,0)$. *On a*

$$\nabla^2(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ *sont* $1+\sqrt{2} > 0$ *et* $1-\sqrt{2} < 0$.
Ainsi, $(1,0)$ *est un point selle.*

(c) *Étude en* $(0,1)$. *On a*

$$\nabla^2(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,1)$ *sont* $1+\sqrt{2} > 0$ *et* $1-\sqrt{2} < 0$.
Ainsi, $(0,1)$ *est un point selle.*

(d) *Étude en* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *On a*

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *sont* 1 *et* $\frac{1}{3}$.
Ainsi f *admet en* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *un minimum local.*

4. *Le seul extremum local est en* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *et est un minimum. Or* $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *on a*

$$f(y,y) = y^2(2y-1).$$

Ainsi, $\lim_{y \to -\infty} f(y,y) = -\infty$ *et donc le minimum n'est pas global.*