ECE2-Colle 6

18/11/20

1 Cours

1.1 Couples de variables aléatoires discrètes

Loi conjointe, Lois conditionnelles, Lois marginales : voir programme précédent.

Indépendance : voir programme précédent. Complément : si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $A_i \subset X_i(\Omega)$, $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \times \cdots \times P(X_n \in A_n)$.

Variable aléatoire fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes : cas général : loi de $g(X, Y)$, théorème de transfert. Loi d'une somme, stabilités de lois binomiales indépendantes par somme, stabilité de lois de Poisson indépendantes par somme, linéarité de l'espérance. Loi du produit, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Loi du min et du max : méthode et étude sur des exemples.

Variance et covariance : définition de la covariance, formule de Koenig-Huygens. Linéarité à gauche et à droite, symétrie. Lien avec la variance, variance d'une somme de deux variables non nécessairement indépendantes, cas des variables indépendantes. Coefficient de corrélation linéaire, le coefficient de corrélation linéaire est toujours dans $[-1, 1]$, caractérisation des couples pour lesquels le coefficient de corrélation linéaire vaut 1 ou -1.

1.2 Applications linéaires

Applications linéaires : définition et caractérisation des applications linéaires, endomorphisme, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$. $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel, la composée d'applications linéaires est linéaire, puissance d'un endomorphisme. Isomorphisme, automorphisme, la bijection réciproque d'un isomorphisme est linéaire.

Noyau et image : définition du noyau d'une application linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ. Noyau et injectivité. Définition de l'image, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée. Image et surjectivité.

Rang d'une application linéaire : définition du rang d'une application linéaire en dimension finie. Méthode pour trouver une famille génératrice de l'image et calculer le rang.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir déterminer la loi d'un couple à partir de l'expérience aléatoire, à partir de la loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
2. Savoir trouver les lois conditionnelles à partir de la loi du couple.
3. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
4. Savoir trouver la loi marginale de X en connaissant la loi de Y et les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.
5. Savoir montrer que des variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
6. Savoir trouver la loi de XY, $X + Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$.
7. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X, Y)$.
8. Savoir justifier l'existence et déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $V(X + Y)$, $\rho(X, Y)$.
9. Savoir déterminer si une application est linéaire ou non, est un endomorphisme.
10. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire et en déduire si elle est injective ou surjective.

3 Questions de cours

- Formule des probabilités totales.
- Propositions : stabilité des lois de Poisson par sommes; stabilité des lois binomiales par somme. Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. Existence et expression de la variance d'une somme (proposition 10). Caractérisation des applications linéaires.
- Définition : covariance, coefficient de corrélation linéaire, application linéaire, noyau/ image/ rang d'une application linéaire.