Exercice 9

1) $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
Par composition avec $x \mapsto x e^{-x}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $f : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_1(f)(x,y) = (2x - 2x(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$
$= 2x(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$

et $\partial_2(f)(x,y) = 2y(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ 2y(1-(x^2+y^2))e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x(1-(x^2+y^2)) = 0 \\ 2y(1-(x^2+y^2)) = 0 \end{cases} \iff x^2+y^2 = 1 \text{ ou } (x,y) = (0,0)$$

Ainsi, l'ensemble des points critique est
$\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

3) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
$g'(x) = (1-x)e^{x}$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
Signe $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

En particulier, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a

$g(0) = 0 \leq g(x^2+y^2) = f(x,y) \leq e^{-1} = g(1)$

Ainsi, comme $f(0,0)=0$ et que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=1$ $f(x,y)=e^{-1}$, on déduit que

- f possède un maximum global en tout point de $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ qui vaut e^{-1}
- f possède un minimum global en $(0,0)$ qui vaut 0.

Exercice 10

1) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$\partial_1(f)(x,y) = 3y-3x^2$; $\partial_2(f)(x,y) = 3x-3y^2$

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -6x$; $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -6y$

$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 3$

Étude des points critiques : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3y-3x^2=0\\3x-3y^2=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=x^2\\x=y^2\end{cases} \iff \begin{cases}y=x^2\\x=x^4\end{cases}$

$\iff \begin{cases}y=x^2\\x(1-x^3)=0\end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$ ou $(x,y)=(1,1)$

Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

Étude de $(0,0)$: $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{bmatrix}$

Les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont les réels λ tels que $\begin{bmatrix}-\lambda & 3\\3 & -\lambda\end{bmatrix}$ n'est pas inversible c.à.d tels que $\lambda^2-9=0$

Donc $Sp(\nabla^2(f)(0,0)) = \{-3;3\}$

Comme f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et que les valeurs propres de la hessienne de f aux points critiques $(0,0)$ sont non nulles et de signes opposés, $(0,0)$ est un point selle.

Étude de $(1,1)$: $\nabla^2(f)(1,1) = \begin{bmatrix}-6 & 3\\3 & -6\end{bmatrix}$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda\in Sp(\nabla^2(f)(1,1)) \iff \begin{bmatrix}-6-\lambda & 3\\3 & -6-\lambda\end{bmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (-6-\lambda)^2-9=0$

$\iff (6+\lambda-3)(6+\lambda+3)=0$

$\iff \lambda=-3$ ou $\lambda=-9$

Ainsi $Sp(\nabla^2(f)(1,1)) = \{-9;-3\}$

f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, $(1,1)$ est un point critique de f et les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,1)$ sont strictement négatives donc f possède un maximum local en $(1,1)$.

) f_2 est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$\partial_1(f)(x,y) = 2x - y$ et $\partial_2(f)(x,y) = 2y - x$

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2$; $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2$

$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -1$

Points critiques : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x-y=0\\2y-x=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=2x\\3x=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Le seul point critique de f est $(0,0)$

Etude de $(0,0)$: $\nabla^2(f)(0,0) = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$,

$\lambda\in Sp\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right) \iff \begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\-1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\iff (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0$

$\iff \lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

Donc $Sp\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\right) = \{1,3\}$

~~Le pour~~

La fonction f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, $(0,0)$ est un point critique et les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont strictement positives. Donc f possède un minimum local en $(0,0)$.

3) On a vu à l'exo 8 que $(x,y)\mapsto \ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction carrée, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $(x,y)\mapsto \ln(x)^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

Par somme puis produit avec des fonctions polynomiales (donc de classe C^2) on déduit que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ on a :

$$\partial_1(f)(x,y) = \ln(x)^2 + y^2 + x\left(2\frac{\ln(x)}{x}\right) = \ln(x)^2 + 2\ln(x) + y^2$$

$\partial_2(f)(x,y) = 2xy$.

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x}$ | $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 2y$

$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2x$

Points critiques :

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\ln(x)^2+2\ln(x)+y^2=0\\xy=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\ln(x)(\ln(x)+2)=0\\y=0\end{cases} \quad \text{car } x>0$$

$$\iff \begin{cases}\ln(x)=0\\y=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\ln(x)=-2\\y=0\end{cases} \iff (x,y)=(1,0) \text{ ou } (x,y)=(e^{-2},0)$$

f possède donc 2 points critiques $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$

Étude de $(1,0)$: $\nabla^2(f)(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(1,0)$ est un point critique de f et les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ sont strictement positives. Donc f possède un minimum local en $(1,0)$.

Étude de $(e^{-2},0)$: $\nabla^2(f)(e^{-2},0) = \begin{bmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{bmatrix}$

$(e^{-2},0)$ est un point selle.