

1 Cours

1.1 Comparaison de fonctions et développements limités

Négligeabilité : définition de la relation de négligeabilité au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, caractérisation, opération avec les petits o (transitivité, combinaison linéaire, produit), croissances comparées.

Équivalence : définition de la relation d'équivalence au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, caractérisation par la limite du quotient, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$, opérations sur les équivalents (symétrie, transitivité, compatibilité avec le produit, l'inverse, les puissances et la valeur absolue), équivalents usuels, équivalents et limites.

Développements limités : définition des DL d'ordre 0, 1 et 2 au voisinage d'un point, unicité du DL s'il existe. L'existence d'un DL d'ordre 1 en x_0 est équivalente à la dérivabilité en x_0 et expression du DL d'ordre 1 dans ce cas. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2, DL usuels en 0, utilisation des règles de calcul sur les petits o pour manipuler les DL (somme de DL, produit de DL sur des exemples simples).

Applications à l'étude de fonctions : lever une indétermination pour des calculs de limites, étudier la position locale d'une courbe par rapport à une tangente, application à l'étude de séries.

1.2 Réduction

Tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Valeurs propres, vecteurs propres : valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée; spectre. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme f et éléments propres d'une matrice de f dans une base. $\lambda \in \text{Sp}(f) \iff f - \lambda \cdot \text{id}_E$ n'est pas bijective, $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible, valeurs propres d'une matrice triangulaire. Méthode : déterminer les valeurs propres de A en trouvant la réduite de Gauss de $A - \lambda \cdot I_n$

Sous-espaces propres : définition des sous-espaces propres associés aux valeurs propres d'un endomorphisme / d'une matrice carrée, cas particulier de la valeur propre 0.

Scilab : commande spec.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir montrer que deux fonctions sont équivalentes ou que l'une est négligeable devant l'autre au voisinage d'un point à l'aide de la définition ou de la caractérisation.
2. Savoir manipuler les opérations avec les petits o et les équivalents pour déterminer une limite.
3. Savoir déterminer un équivalent d'une fonction à l'aide des équivalents usuels et des propriétés des équivalents.
4. Connaître les DL usuels.
5. Savoir déterminer un DL à l'ordre 1 ou 2 de fonctions simples en utilisant la formule de Taylor-Young ou en manipulant les DL usuels.
6. Savoir utiliser les DL pour lever des indéterminations, étudier localement une fonction.
7. Savoir déterminer les valeurs propres d'une matrice.
8. Savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide de son expression ou à l'aide d'une matrice représentative.
9. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.

3 Questions de cours

- Caractérisation de la relation de négligeabilité. Caractérisation de la relation d'équivalence.
- Équivalents usuels. DL usuels à l'ordre 2.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
- Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme/ d'une matrice carrée.