Chapitre 6 : Séries

1 Généralités

1.1 Rappels

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle **série numérique de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette série est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et le terme S_n est appelé la **somme partielle** d'indice n de la série.

Définition 2 (Séries convergentes, séries divergentes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ **converge** lorsque la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite est appelée **somme** de la série et notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarque 1

1. *On peut étendre ces définitions aux suites $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définies à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ la série de terme général u_n et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la somme lorsqu'elle existe.*
2. *On note parfois $\sum u_n$ la série de terme général u_n quand il n'y pas d'ambiguïté.*

Exemple 1

1. *La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$*
2. *La série de terme général la suite constante égale à 1 ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$)*

Remarque 2

1. *Les séries étant des suites particulières, toutes les techniques d'étude de ces dernières peuvent s'appliquer aux séries.*
2. *On ne change pas la nature d'une série en commençant la somme à partir d'un certain rang (mais on change la somme lorsqu'il y a convergence).*

Exemple 2

La série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{2^n}$ *est*

Proposition 1 (Télescopage)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \sum(u_{n+1}-u_n) \quad \text{converge.}$$

Exemple 3

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente à l'aide d'un télescopage.*

Test 1 (*Voir solution.*)

1. *Montrer que :* $\forall n>1\,, \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. *Montrer que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *En déduire que la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Montrer, à l'aide d'un télescopage, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Proposition 2

Soit $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ une série numérique.
Si la série est convergente alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

Remarque 3

1. *On utilise souvent la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une série diverge :*
   « Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0 alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge. »
   *Dans ce cas, on dit que la série **diverge grossièrement**.*
2. *En revanche, la réciproque est fausse (voir le test 3).*

Test 3 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.*
2. *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.*
3. *Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas majorée et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.*

1.2 Séries usuelles

Proposition 3 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} q^k$, $\sum\limits_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$,
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exemple 4

Études la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^{2n+1}}$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ et, le cas échéant, calculer sa somme.

Proposition 4 (Séries exponentielles)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme e^x.

Test 5 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Proposition 5 (Séries de Riemann)

Soit $a \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Démonstration : Cette preuve illustre la technique dite de *comparaison série /intégrale* qui consiste à ramener l'étude de la série à l'étude d'une intégrale.

On note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles.

■

Remarque 4

Les étapes clés de la démonstration.

1. *On a une fonction f continue décroissante sur $]0,+\infty[$ et à valeurs positives.*
2. *On montre (en utilisant la décroissance) que*

$$\forall k \geqslant 2, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k-1).$$

3. *On en déduit par sommation*

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{S}_n - f(1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_{1}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = \mathrm{S}_{n-1}.$$

4. *Comme f est à valeurs positives, la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On utilise alors*
   - *soit la première inégalité pour montrer que $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée et on conclut par le théorème de limite monotone ;*
   - *soit la seconde inégalité pour montrer que $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge.*

Exemple 5

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou non.

1. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$.*

2. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.*

3. *La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Test 6 (*Voir solution.*)

On considère la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$.

1. *Montrer que le série est convergente et calculer sa somme.*
2. *Avec une boucle* for, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un entier naturel n et qui renvoie la somme partielle d'indice n de la série.*
3. *Avec une boucle* while, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un réel $e > 0$ et qui renvoie l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à e près.*
4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\mathrm{U} = [u_0, \dots, u_n]$ que renvoie $sum(\mathrm{U})$? et $cumsum(\mathrm{U})$?*

2 Séries à termes positifs

Tous les résultats de cette partie seront énoncés pour les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ à **termes positifs** c'est-à-dire que $u_k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ils restent néanmoins valables pour les séries dont le terme général est positif à partir d'un certain rang.

Par ailleurs, les résultats s'adaptent aux séries à termes négatifs (à partir d'un certain rang) en considérant la série $\sum_{n\geqslant 0} -u_n$.

Proposition 6

Soit $\sum u_n$ une série à **termes positifs**. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante. En particulier

- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, la série est convergente et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k;$$

- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, la série diverge vers $+\infty$.

Démonstration : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

■

Exemple 6

Voir les tests 1 et 3.

Proposition 7 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'ordre)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.

Exemple 7

Déterminons la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k^2+1}$.

Exemple 8

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}$.

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Proposition 8 (Comparaison des séries à termes positifs et relation de négligeabilité)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

1. Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.

Démonstration : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

$\blacksquare$

Méthode 1 (*Comparaison avec les séries de Riemann*)

En pratique, pour étudier une série à termes positifs, on cherche à la comparer avec une série usuelle et notamment avec une série de Riemann. Par exemple, si $\sum u_n$ *est à termes positifs (raisonnement à refaire à chaque fois qu'on l'utilise) :*

1. *si* $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = 0$ *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^a}\right)$ *donc* $\sum u_n$ *converge si* $a>1$ *par comparaison avec une série de Riemann ;*
2. *si* $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = +\infty$ *alors* $\frac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ *donc* $\sum u_n$ *diverge si* $a\leqslant 1$ *par comparaison avec une série de Riemann.*

Exemple 9

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-n}$.

1. *On cherche le terme général d'une série usuelle devant lequel* ne^{-n} *est négligeable.*

2. *On vérifie que les deux séries que l'on compare sont à termes positifs :*

3. *On conclut.*

Exemple 10

Déterminons la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n)}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27}+2n^3)3^{-n}$.

Proposition 9 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'équivalence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Démonstration : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- On suppose que $u_n \sim v_n$. Cela signifie

- La suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1 donc

- D'après la proposition 7, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge aussi (en utilisant l'inégalité de gauche) et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi (en utilisant l'inégalité de droite). ■

Méthode 2

1. *En pratique, pour déterminer la nature d'une série à termes positifs $\sum u_n$, on peut chercher un équivalent simple v_n de son terme général puis étudier la série $\sum v_n$.*
2. *Si $\sum u_n$ est à termes positifs et que $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = \ell > 0$ alors $u_n \sim \frac{\ell}{n^a}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ par comparaison avec une série de Riemann.*

Exemple 11

Déterminons la nature de la série $\sum \frac{2n^2+2n-12}{5n^3+6}$.

1. *Recherche d'un équivalent simple.*
2. *Conclusion :*

Test 9 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
2. $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$.
3. $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$.

Exemple 12 (*Contre-exemple quand les suites ne sont pas à terme positifs*)

En TD nous verrons des exemples qui montrent que les résultats de cette partie ne s'appliquent pas aux séries de termes quelconques.

3 Séries à termes quelconques

Définition 3 (Convergence absolue)

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple 13

1. *La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$*

2. *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Proposition 10

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Exemple 14

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

Remarque 5

La réciproque de la proposition précédente est fausse! Il est donc faux de conclure qu'une série est divergente parce qu'elle n'est pas absolument convergente.

Exemple 15

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *n'est pas absolument convergente et est convergente (voir TD).*

Exemple 16

Étudions la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$*. La série n'est pas à termes positifs donc on va étudier la série* $\sum \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$.

1. *Recherche d'un équivalent :*

2. *Comparaison :*

3. *Conclusion :*

⚠ *Il est faux de dire : «* $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^2}$ *et* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *converge donc la série* $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$*converge » car les séries qui interviennent ne sont pas à termes positifs!*

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$.

4 Bilan : méthode et erreurs à ne pas commettre

4.1 Plan d'étude d'une série

1. Le terme général tend-il vers 0 ?
   - $\hookrightarrow$ non : la série diverge grossièrement ;
   - $\hookrightarrow$ oui : la série peut être divergente ou convergente, il faut poursuivre l'étude.
2. Le terme général est-il positif (à partir d'un certain rang) ?
   - $\hookrightarrow$ oui : on peut alors essayer d'utiliser les théorèmes de comparaison, équivalence ou négligeabilité pour les séries à termes positifs ; on essaie alors de comparer avec les séries usuelles (notamment les séries de Riemann) ;
   - $\hookrightarrow$ non : il faut poursuivre l'étude.
3. Si la série est à termes quelconques on peut essayer de
   - $\hookrightarrow$ montrer qu'elle est absolument convergente ;
   - $\hookrightarrow$ calculer les sommes partielles si on reconnaît des séries usuelles ou une somme télescopique.

Remarque 6

Le point 2 s'applique aussi dans le cas où le terme général est négatif (il suffit d'appliquer les résultats à la série $\sum -u_n$*).*

4.2 Erreurs à ne pas commettre

1. Il ne faut pas confondre :
   - $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ (qui désigne la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$) ;
   - $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ (qui désigne la somme partielle d'indice n de la série) ;
   - $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ (qui désigne la somme de la série **lorsqu'elle est convergente**).
2. Il ne faut jamais écrire $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ **avant** d'avoir justifié la convergence de la série.
3. Il ne faut surtout pas écrire « $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge » : c'est une erreur impardonnable !
4. Il ne faut pas utiliser les théorèmes de comparaison, équivalence ou négligeabilité pour les séries à termes positifs **sans avoir vérifié que les séries en question sont bien à termes positifs** !
5. Le fait que $u_n \sim v_n$ **n'implique pas** que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ ni que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$!
6. La convergence absolue implique la convergence mais la réciproque est fausse !

5 Objectifs

1. Savoir étudier la nature d'une série en utilisant les outils connus sur les suites, connaître les propriétés des opérations sur les séries, savoir reconnaître un télescopage, connaître les séries usuelles (programme d'ECE1).
2. Connaître la nature des séries de Riemann.
3. Connaître par coeur les critères de convergence des séries à termes positifs (comparaison, négligeabilité, équivalence).
4. Savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.
5. Savoir montrer qu'une série à termes quelconques est convergente en utilisant la convergence absolue.
6. Savoir écrire un programme Scilab calculant un/les termes successifs d'une série.
7. Savoir écrire un programme Scilab renvoyant l'indice à partir duquel une suite ou une série atteint sa limite à une erreur fixée près.