Sujet 1 – Type EM Lyon

Exercice 1

Partie A

1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = p(1 - p)^{k-1}.$$
Donc Y suit une loi géométrique de paramètre p.
2. La variable aléatoire Y possède une espérance et une variance. On en déduit que X possède une espérance et une variance données :
$$E(X) = E(Y - 1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Y - 1) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$$
3.
```
import numpy as np
def simule_X(p):
    Y = 1
    while np.rand() > p :
        Y = Y+1
    return Y-1
```

Partie B

4.
```
    def simule_Z(n,p):
        Z = 1
        for i in range(1,n+1):
            s = 0
            for j in range(1,Z+1):
                s = s + simule_X(p)
            Z = s
        return Z
```

5. (a) Comme $Z_0 = 1$, $u_0 = 0$ et comme Z_1 suit la loi de la variable X alors $u_1 = p$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[Z_n = 0]$ signifie que le joueur n'a plus de jeton après la n-ième activation de la machine. Donc forcément après la $(n + 1)$-ième activation de la machine il n'aurait plus de jeton. Ainsi :
$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n \leqslant u_{n+1}.$$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.
6. (a) Soient m et n deux entiers naturels avec $m < n$. Alors par croissance :
$$B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$$
donc est disjoint de $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est inclus dans A_n alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset B$.

Réciproquement, soit $\omega \in B$. Alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $\omega \in A_n$. Si on note k le plus petit des entiers pour lequel $\omega \in A_n$ alors $\omega \in B_k \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset B$.

Ainsi $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} P(B_n) &= \sum_{n=1}^{N} P(B_n) + P(A_0)\\ &= \sum_{n=1}^{N} (P(A_n) - P(A_{n-1})) + P(A_0)\\ &= P(A_N) - P(A_0) + P(A_0) \quad \text{par télescopage}\\ &= P(A_N).\end{aligned}$$

D'après la propriété rappelée dans l'énoncé, on en déduit bien :

$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

7. On a $R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [Z_n = 0]$. Or d'après la question 5.(*a*), la famille $([Z_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après la question 6, on en déduit :

$$P(R) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

8. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que $[Z_1 = k]$, la machine définit k variables indépendantes $X_1, \dots, X_k$ de même loi que X et $Z_2 = X_1 + \dots + X_k$. Or, les variables X_i prenant des valeurs positives, on a pour tout $\omega \in \Omega$:

$$Z_2(\omega) = 0 \Longleftrightarrow X_1(\omega) = \dots = X_k(\omega).$$

Ainsi par indépendance on en déduit :

$$P_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = P(X_1 = 0) \times \dots \times P(X_k = 0) = p^k = u_1^k.$$

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)(u_n)^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k (u_n)^k\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} (u_n(1-p))^k\\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k\\ &= \frac{p}{1-qu_n} \quad \text{car } qu_n \neq 0.\end{aligned}$$

9. (a) En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$\ell = \frac{p}{1-q\ell}.$$

En multipliant par $1 - q\ell$ membre à membre, on obtient :

$$(1-q\ell)\ell = p$$

c'est-à-dire :

$$p - (1-q\ell)\ell = 0.$$

Donc, on a :

$$(\ell-1)(q\ell-p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = q\ell^2 - \ell + p = -\ell(1-q\ell) + p = 0.$$

(b) On suppose $p \geqslant \frac{1}{2}$. D'après la question précédente, soit $\ell = 1$ soit $\ell = \dfrac{p}{q}$.

Or $p \geqslant \frac{1}{2}$ donc $q = 1 - p \leqslant \frac{1}{2}$ et ainsi $\dfrac{p}{q} \geqslant 1$.

Comme par ailleurs, $\ell \in [0,1]$, on en déduit que $\ell = 1$.

Ainsi d'après la question 7 : $\mathrm{P(R)} = 1$.

(c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$ ».

- Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence on sait que :
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{p}{q}.$$
Donc :
$$-p \leqslant -qu_n \leqslant 0$$
puis
$$1-p \leqslant 1-qu_n \leqslant 1$$
et finalement :
$$p \leqslant u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n} \leqslant \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}.$$
Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : par le principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right].$$

On en déduit que $\ell \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$. Or $p < \frac{1}{2}$ donc $q = 1 - p > \frac{1}{2}$ et ainsi $\dfrac{p}{q} < 1$.

Ainsi d'après la question 7 : $\mathrm{P(R)} = \ell < 1$.

(d) Le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ car presque sûrement le joueur sera ruiné en temps fini.

Partie C

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $[\mathrm{T} \leqslant n] = [\mathrm{Z}_n = 0]$ donc $u_n = \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme T est à valeurs entières et que $[\mathrm{T} \leqslant n] \subset [\mathrm{T} \leqslant n+1]$ alors :
$$\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \mathrm{P}(n-1 < \mathrm{T} \leqslant n) = \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n] \setminus [\mathrm{T} \leqslant n-1]) = \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n]) - \mathrm{P}([\mathrm{T} \leqslant n-1]) = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n.$$

11. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n(v_{n-1} - v_n) &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_{n-1} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_n \\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (k+1) v_k - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_n \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n v_n \\
&= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} ((n+1) v_n - n v_n) - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \\
&= v_0 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N} v_{\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

12. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

(a) D'après la question 8.(*b*)
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} u_n} = \frac{1}{2 - u_n}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n = \frac{n}{n+1}$ ».

- Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence on sait que :
$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$
Ainsi :
$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : par le principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{n+1}.$$

(b) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T} = n)$ est absolument convergente. Or pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_\mathrm{N} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} (1 - u_n) - \mathrm{N}(1 - u_\mathrm{N}) \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n+1} - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1}.\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}+1} = 1$ et $\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{n+1}\right)_{\mathrm{N} \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$. Par conséquent la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T} = n)$ diverge et T n'admet donc pas d'espérance.

13. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}w_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} &= \frac{1 - \frac{p}{1 - qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qu_n}} \\ &= \frac{1 - qu_n - p}{\frac{p(1 - qu_n)}{q} - p} \\ &= \frac{q - qu_n}{\frac{p}{q} - pu_n - p} \\ &= \frac{q}{p} \frac{1 - u_n}{\frac{1}{q} - u_n - 1} \\ &= \frac{q}{p} \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} \\ &= \frac{q}{p} w_n.\end{aligned}$$

(b) La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{q}{p}$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n w_0 = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}.$$
Par ailleurs :
$$w_n = \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$$
donc
$$w_n \left(\frac{p}{q} - u_n\right) = 1 - u_n$$
donc
$$u_n (1 - w_n) = 1 - w_n \frac{p}{q} \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}\right) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} \frac{p}{q} = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

Ainsi pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant v_n = 1 - u_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}} \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

(c) La variable aléatoire T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ est absolument convergente. Or pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}.$$

Par ailleurs pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{N}\left(\frac{q}{p}\right)^{\mathrm{N}}.$$

Comme $p > \frac{1}{2}$ alors $0 \leqslant \frac{q}{p} < 1$. Par croissance comparée et encadrement :

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{N}v_{\mathrm{N}} = 0.$$

De plus par comparaison pour les séries à termes positifs, comme la série géométrique $\sum_{\mathrm{N}\geqslant 0}\left(\frac{q}{p}\right)^{\mathrm{N}}$ est convergente alors la série $\sum_{\mathrm{N}\geqslant 0} v_{\mathrm{N}}$ l'est aussi.

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n)$ converge absolument (elle converge et elle est à termes positifs). Ainsi T possède une espérance et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{T}=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}.$$

14. La valeur $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}.$$

1. (a) Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors en notant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on a :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right) = a+\lambda a' + d + \lambda d' = a + b + \lambda(a'+d') = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) + \lambda\mathrm{Tr}(\mathrm{N}).$$

Ainsi l'application Tr est linéaire.

(b) Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \ker(\mathrm{Tr}) &\Longleftrightarrow a + d = 0 \\ &\Longleftrightarrow a = -d \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de ker(Tr).

Soit $(d,b,c)\in\mathbb{R}^3$ alors :

$$d\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-d&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\iff d=b=c=0.$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est aussi libre ;

C'est donc une base du noyau et on a bien $\dim(\ker(\mathrm{Tr}))=3$.

2. Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})&=\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\mathrm{J}\\&=\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}+(\mathrm{Tr}(\mathrm{M})+\lambda\mathrm{Tr}(\mathrm{N}))\mathrm{J}\quad\text{d'après 1}\\&=\mathrm{M}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}+\lambda(\mathrm{N}+\mathrm{Tr}(\mathrm{N})\mathrm{J})\\&=f(\mathrm{M})+\lambda f(\mathrm{N}).\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$.

(a) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad;\quad f\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(b) On a bien :

$$(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2=0_4.$$

(c) On sait que :

$$\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}+\mathrm{I}_4=(\mathrm{A}-\mathrm{I}_4)^2=0_4$$

donc

$$\mathrm{A}(2\mathrm{I}_4-\mathrm{A})=\mathrm{I}_4.$$

Ainsi A est inversible et $\mathrm{A}^{-1}=2\mathrm{I}_4-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&-2\\-1&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

4. (a) Soit $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in\mathrm{E}_1\iff f(\mathrm{M})=\mathrm{M}&\iff\mathrm{M}+\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}=\mathrm{M}\\&\iff\mathrm{Tr}(\mathrm{M})\mathrm{J}=0_4\\&\iff\mathrm{Tr}(\mathrm{M})=0\quad\text{car }\mathrm{J}\neq0_4\\&\iff\mathrm{M}\in\ker(\mathrm{Tr}).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{E}_1=\ker(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après 1.(b).

(b) On a : $f(\mathrm{J})=(1+\mathrm{Tr}(\mathrm{J}))\mathrm{J}$.

(c) On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{Tr}(\mathrm{J})\neq0$. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$).

$$\begin{aligned}\lambda_1\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\lambda_4\mathrm{J}=0_4&\implies\lambda_4\mathrm{J}=-\lambda_1\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-\lambda_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\\&\implies\lambda_4\mathrm{Tr}(\mathrm{J})=-\lambda_1\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)-\lambda_2\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)-\lambda_3\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0\\&\implies\lambda_4=0\quad\text{car }\mathrm{Tr}(\mathrm{J})\neq0.\end{aligned}$$

Puis, comme la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre on obtient :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_4 J=0_4 \Longrightarrow \lambda_4=0 \quad \text{et} \quad \lambda_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0_4$$
$$\Longrightarrow \lambda_4=0 \quad \text{et} \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus elle contient 4 éléments et la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est 4. Donc c'est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Or, on a :

$$f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f(J)=(1+\mathrm{Tr}(J))J.$$

Donc dans la base $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$:

- $f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(1,0,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,1,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,0,1,0)$;
- $f(J)$ a pour coordonnées $(0,0,0,1+\mathrm{Tr}(J))$.

La matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},J\right)$ est donc :

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{Tr}(J)\end{pmatrix}.$$

(d) Si $\mathrm{Tr}(J)\neq 0$. Alors d'après la question précédent, f est bijective si et seulement si $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{Tr}(J)\end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(J)\neq -1$.
Si $\mathrm{Tr}(J)=0$. Soit $M\in\ker(f)$:

$$f(M)=M+\mathrm{Tr}(M)J=0_4.$$

Alors $M=-\mathrm{Tr}(M)J$. Or, par linéarité de la trace, on déduit de cette égalité :

$$\mathrm{Tr}(M)=\mathrm{Tr}(-\mathrm{Tr}(M)J)=-\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(J)=0.$$

Ainsi : $M=-\mathrm{Tr}(M)J=0_4$. Donc $\ker(f)=\{0_4\}$ et f est injectif. Or f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension fini donc d'après une conséquence du théorème du rang, il est bijectif.
Finalement, f est bijectif si et seulement si $\mathrm{Tr}(J)\neq -1$.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$\forall t\in]-\infty,1[,\quad f(t)=\begin{cases}\frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$ par opérations sur les fonctions continues.
Montrons qu'elle est continue en 0. Par équivalents usuels, on sait que :

$$\ln(1-t)\underset{t\to 0}{\sim}-t.$$

Donc, par quotient :

$$f(t)\underset{t\to 0}{\sim}1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1=f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.
Finalement f est donc continue sur $]\infty,1[$.

2. (a) On a :

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{1-t}.$$

Comme $1 - t > 0$ pour tout $t \in]-\infty, 1[$ il suffit d'étudier le signe de $g : t \mapsto t + (1-t)\ln(1-t)$ sur $]-\infty, 1[$. Or g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et pour tout $t \in]-\infty, 1[$ on a :

$$g'(t) = 1 - \ln(1-t) + (1-t) \times \frac{-1}{1-t} = -\ln(1-t).$$

Ainsi :

x	$-\infty$		0		1
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

La fonction g est donc positive sur $]-\infty, 1[$ et ainsi :

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) = \frac{g(t)}{1-t} \geqslant 0.$$

(b) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$ par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, pour tout $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ on a :

$$f'(t) = -\frac{\frac{-1}{1-t} \times t - 1 \times \ln(1-t)}{t^2} = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} \geqslant 0 \quad \text{d'après la question 2.(a).}$$

(c) D'après ce qui précède, f est croissante sur $]-\infty, 1[$.

3. (a) On a :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2).$$

(b) Il s'agit de montrer que le taux d'accroissement $\frac{f(t) - f(0)}{t}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ quand t tend vers 0. Or, pour tout $t \neq 0$ dans $]-\infty, 1[$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1}{t} &= \frac{-\ln(1-t) - t}{t^2} \\
&= \frac{-(-t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)) - t}{t^2} \\
&= \frac{\frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2))}{t^2} \\
&= \frac{1}{2} + \underset{t\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{2}$.
Donc f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(c) On sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Il s'agit donc de montrer qu'elle l'est aussi au voisinage de 0 c'est-à-dire que f' est continue en 0. Or $\forall t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} &= \frac{\frac{t}{1-t} - t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2} \\
&= \frac{\frac{1}{1-t} - 1 - t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2} \\
&= \frac{(1-t)^{-1} - 1 - t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2} \\
&= \frac{1 + t + t^2 + \underset{t\to 0}{o}(t^2) - 1 - t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2} \\
&= \frac{\frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)}{t^2} \\
&= \frac{1}{2} + \underset{t\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = \dfrac{1}{2} = f'(0)$ et f' est bien continue en 0.

4. Par croissance comparée :

$$\lim_{t\to -\infty} f(t) = 0$$

et par opération :

$$\lim_{t\to 1} f(t) = +\infty.$$

5.

Partie B

6. La fonction F est une primitive de la fonction continue f sur $]-\infty, 1[$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a

$$\mathrm{L}'(x) = f(x).$$

7. **Étude de** L **en** 1 **:**

(a) Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in]0,1[^2$. La fonction $u : t \mapsto 1-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. D'après la formule de changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t)dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{-\ln(1-t)}{t} dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{u'(t)\ln(u(t))}{1-u(t)} dt &= \int_{u(\mathrm{A})}^{u(\mathrm{B})} \frac{\ln(u)}{1-u} du \\
&= \int_{1-\mathrm{A}}^{1-\mathrm{B}} \frac{\ln(u)}{1-u} du \\
&= -\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{\ln(u)}{1-u} du \\
&= \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt.
\end{aligned}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$. On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

En multipliant membre à membre par $-\ln(t)$ et en réarrangeant un peu les termes on obtient bien :

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

Soit $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in]0,1[^2$. En intégrant l'égalité ci-dessus entre $1-\mathrm{B}$ et $1-\mathrm{A}$, on trouve, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} -t^k \ln(t) dt + \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} dt.$$

Or, d'après la question précédente, on sait que

$$\int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_{A}^{B} f(t)\,dt = L(B) - L(A).$$

Ainsi, on a bien

$$\forall (A,B) \in]0,1[^2, \quad L(B) - L(A) = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt + \int_{1-B}^{1-A} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

(c) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(A,B) \in]0,1[^2$. Les fonctions $t \mapsto \frac{-t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1-B, 1-A]$ (ou sur $[1-A, 1-B]$) donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
\int_{1-B}^{1-A} -t^k \ln(t)\,dt &= \left[\frac{-t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_{1-B}^{1-A} - \int_{1-B}^{1-A} \frac{-t^{k+1}}{k+1}\frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \int_{1-B}^{1-A} \frac{t^k}{k+1}\,dt \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_{1-B}^{1-A} \\
&= \frac{(1-B)^{k+1}}{k+1}\ln(1-B) - \frac{(1-A)^{k+1}}{k+1}\ln(1-A) + \frac{(1-A)^{k+1}}{(k+1)^2} - \frac{(1-B)^{k+1}}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

(d) Par croissance comparée, $\lim_{t\to 0} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 0$ et par limite usuelle $\lim_{t\to 1} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 1$. En particulier, $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée donc $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, on voit que

$$\lim_{t\to 0} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} = 0.$$

Ainsi $t \in]0,1[\mapsto \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 0.
On note F_n la primitive s'annulant en 0 de la fonction ainsi prolongée en 0 :

$$\forall c \in [0,1[, \quad F_n(c) = \int_0^c \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $[0,1[$ et pour tout $t \in]0,1[$ on a :

$$F_n'(t) = \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \geqslant 0.$$

Ainsi F_n est croissante sur $[0,1[$. De plus, d'après la question précédente, on sait que $t \mapsto \frac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$. En notant M un majorant de cette fonction, on a :

$$\forall t \in]0,1[, \quad 0 \leqslant \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \leqslant M t^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et c on obtient :

$$\forall c \in [0,1[, \quad 0 \leqslant F_n(c) \leqslant \int_0^c M t^n\,dt = M\frac{c^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi F_n bornée sur $[0,1[$.
La fonction F_n est croissante et majorée sur $[0,1[$. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède une limite fini en 1. On note ℓ_n cette limite. Comme pour tout $c \in [0,1[$ on a :

$$0 \leqslant F_n(c) \leqslant \frac{M}{n+1}$$

on obtient, en faisant tendre c vers 1 :

$$0 \leqslant \ell_n \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi par encadrement, la suite $(\ell_n)_n$ converge vers 0.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 7.(*c*), on a pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in]0,1[^2$:

$$\mathrm{L}(\mathrm{B})-\mathrm{L}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} -t^k \ln(t)\,dt + \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} -t^k \ln(t)\,dt + \mathrm{F}_n(1-\mathrm{A}) - \mathrm{F}_n(1-\mathrm{B}).$$

D'après la question 7.(*c*) :

$$\lim_{\mathrm{A}\to 0} \int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}} -t^k \ln(t)\,dt = \frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{k+1}\ln(1-\mathrm{B}) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

D'après la question 7.(*f*) :

$$\lim_{\mathrm{A}\to 0} \mathrm{F}_n(1-\mathrm{A}) = \ell_n.$$

Comme L est continue en 0 et que $\mathrm{L}(0) = 0$, en faisant tendre A vers 0 on obtient pour $\mathrm{B} \in]0,1[$:

$$\mathrm{L}(\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{k+1}\ln(1-\mathrm{B}) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{(k+1)^2} \right) + \ell_n - \mathrm{F}_n(1-\mathrm{B}).$$

De plus, par croissance comparée pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\lim_{\mathrm{B}\to 1} \left(\frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{k+1}\ln(1-\mathrm{B}) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{(1-\mathrm{B})^{k+1}}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Enfin, par continuité en 0 de F_n : $\lim_{\mathrm{B}\to 1} \mathrm{F}_n(1-\mathrm{B}) = \mathrm{F}_n(0) = 0$.

Ainsi, en tant que somme de fonctions admettant une limite en 1, L admet une limite en 1 et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\mathrm{B}\to 1} \mathrm{L}(\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \ell_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \ell_n.$$

Ceci étant valable pour tout n, en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\lim_{\mathrm{B}\to 1} \mathrm{L}(\mathrm{B}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

(h) C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. (a) La fonction L est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. La fonction $x \mapsto -x$ définie sur $]-1,0[\cup]0,1[$ est dérivable et à valeurs dans $]-1,0[\cup]0,1[$. Par composition, $x \mapsto \mathrm{L}(-x)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
De même, $x \mapsto \mathrm{L}(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$.
Ainsi, par somme la fonction $x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ sa dérivée en x est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}'(x) - \mathrm{L}'(-x) - x\mathrm{L}'(x^2) &= f(x) - f(-x) - xf(x^2) \\
&= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + \frac{x\ln(1-x^2)}{x^2} \\
&= \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln 1 - x^2}{x} \\
&= \frac{-\ln(1-x)(1+x) + \ln 1 - x^2}{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) La fonction $x \mapsto \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ de dérivée nulle et continue sur $[-1,0]$. Elle est donc constante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $x \in [-1,0]$:

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2) = \lim_{x\to 0} (\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)) = 0.$$

De même, pour tout $x \in [0,1]$, $\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2) = 0$.

(c) On a :

$$\mathrm{L}(-1) + \mathrm{L}(1) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1) = 0.$$

Donc :

$$\mathrm{L}(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Sujet 2 – Type HEC

Partie 1 - Lois composées

1. *Un exemple avec Python.*

```python
def X(t):
    r = 1
    while np.random.rand() > t :
        r = r+1
    return r
Y = np.random.rand()
Z = X(Y)
print(Z)
```

2. (a) Soit $y \in Y(\Omega)$ et $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} P\left([Z=k] \cap [Y=y]\right) &= P\left([X_y=k] \cap [Y=y]\right) \\ &= P\left([X_y=k]\right) P\left([Y=y]\right) \quad \text{car } X_y \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= f_k(y) P(Y=y). \end{aligned}$$

Si de plus $P\left([Y=y]\right) \neq 0$, alors on a :

$$f_k(y) = \frac{P\left([Z=k] \cap [Y=y]\right)}{P(Y=y)} = P_{[Y=y]}\left([Z=k]\right).$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=y])_{y \in Y(\Omega)}$, on a :

$$\begin{aligned} P\left([Z=k]\right) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P\left([Z=k] \cap [Y=y]\right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} f_k(y) P(Y=y) \\ &= E(f_k(Y)) \quad \text{d'après le théorème de transfert.} \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$f_k(n) = P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k \in [\![1, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'après le théorème de transfert, $f_k(Y)$ possède une espérance si la série $\sum_{n \geqslant 1} f_k(n) n p^2 (1-p)^{n-1}$ converge absolument. Or, pour tout $N \geqslant k$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N} |f_k(n) n p^2 (1-p)^{n-1}| = \sum_{n=k}^{N} p^2 (1-p)^{n-1} = p^2 (1-p)^{k-1} \frac{1-(1-p)^{N-k+1}}{p} = p(1-p)^{k-1} - p(1-p)^{N}.$$

Comme $\lim_{N \to +\infty} p(1-p)^N = 0$, on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_k(n) n p^2 (1-p)^{n-1}$ converge absolument et puisqu'elle est à termes positifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_k(n) n p^2 (1-p)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_k(n) n p^2 (1-p)^{n-1}| = p(1-p)^{k-1}.$$

D'après la question précédente, on a alors :

$$P(Z=k) = E(f_k(Y)) = p(1-p)^{k-1}.$$

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z suit bien la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t \in \mathrm{J}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big)$ existe.

   (a) D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big) = \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} g(y)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y) &= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathrm{E}(\mathrm{X}_y)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y) \\
&= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_y=k)\right)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y) \\
&= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_y=k)\right)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y) \\
&= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y)\right)\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y) \\
&= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)\right).
\end{aligned}$$

   (b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big) &= \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} k f_k(y)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\sum_{y\in \mathrm{Y}(\Omega)} f_k(y)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) \quad \text{d'après 2.b.}
\end{aligned}$$

   En particulier la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k)$ converge (absolument) donc Z possède une espérance et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) = \mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big).$$

4. Soit $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite croissante d'événements c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}.$$

   On note $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$.

   (a) Soient m et n deux entiers naturels avec $m < n$. Alors par croissance :

$$\mathrm{B}_m \subset \mathrm{A}_m \subset \mathrm{A}_{n-1}$$

   donc est disjoint de $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \backslash \mathrm{A}_{n-1}$.

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est inclus dans A_n alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}$.

   Réciproquement, soit $\omega \in \mathrm{B}$. Alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $\omega \in \mathrm{A}_n$. Si on note k le plus petit des entiers pour lequel $\omega \in \mathrm{A}_n$ alors $\omega \in \mathrm{B}_k \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}$.

   Ainsi $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) - \mathrm{P}(\mathrm{A}_{n-1}).$$

Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} P(B_n) &= \sum_{n=1}^{N} P(B_n) + P(A_0)\\ &= \sum_{n=1}^{N} (P(A_n) - P(A_{n-1})) + P(A_0)\\ &= P(A_N) - P(A_0) + P(A_0) \quad \text{par télescopage}\\ &= P(A_N).\end{aligned}$$

D'après la propriété rappelée dans l'énoncé, on en déduit bien :

$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Partie 2 - Le modèle de Cori

5. Le $n^{\text{ième}}$-jour, les individus contagieux sont :
   - si $n \geqslant d$, les individus ayant été contaminés les jours $0, \ldots, n$ avec un profil $\alpha_n, \ldots, \alpha_0$ donc :
   $$I_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k Z_{n-k};$$
   - si $n > d$, les individus ayant été contaminés les jours $n, (n-1), \ldots, (n-d)$ avec un profil $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ donc :
   $$I_n = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k Z_{n-k}.$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe. On sait que $Y_n = R_n I_n$ et que I_n et R_n sont indépendantes. On sait d'après l'énoncé que $E(R_n)$ et $E(I_n)$ existent. Par conséquent Y_n possède une espérance donnée par :
   $$E(Y_n) = E(R_n)E(Y_n) = r_n E(I_n).$$
   Par ailleurs Z_{n+1} suit la loi $\mathscr{P}(Z_{n+1})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la loi $\mathscr{P}(t)$ admet une espérance $g(t)$ valant t. D'après la question 3.*b*, on en déduit que $E(Z_{n+1})$ existe et vaut :
   $$E(Z_{n+1}) = E(g(Y_n)) = E(Y_n) = r_n E(I_n).$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $Z_0, \ldots, Z_n$ possèdent une espérance ».
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   - Initialisation : $Z_0 = 1$ donc possède une espérance.
   - Hérédité : on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, $Z_0, \ldots, Z_n$ possèdent une espérance et on veut montrer que $Z_0, \ldots, Z_n, Z_{n+1}$ possèdent une espérance. On sait déjà par hypothèse de récurrence que $Z_0, \ldots, Z_n$ possèdent une espérance; il suffit donc de montrer que Z_{n+1} possède une espérance. Or d'après la question 5 et par linéarité de l'espérance, on sait que I_n possèdent une espérance donnée par :
   $$E(I_n) = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k E(Z_{n-k}).$$
   D'après la question précédente on en déduit donc que Z_{n+1} possède une espérance donnée par :
   $$E(Z_{n+1}) = r_n E(I_n) = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k E(Z_{n-k}).$$
   - Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_0, \ldots, Z_n$ possède une espérance.

   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = E(Z_n)$ existe et la relation prouvée dans l'hérédité donne :
   $$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}.$$

7. *Programmation de z_n avec Python.*

```
def z(Delta,n):
    z = np.zeros(n+1)
    z[0] = 1
    if n<=d:
        for i in range(1,n+2):
            r=(i+2)/(i+1)
            s = 0
            for j in range(0,i+1):
                s = s + Delta[j]*z[i-j]
            z[i] = r*s
    else :
        for i in range(1,n+2):
            r=(i+2)/(i+1)
            s = 0
            for j in range(0,d+1):
                s = s + Delta[j]*z[i-j]
            z[i] = r*s
```

8. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(V_n) = 1$.
D'après la formule du crible, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$P(U_n\cap V_n) = P(U_n)+P(V_n)-P(U_n\cup V_n).$$

Or, on a aussi :

$$P(U_n)\leqslant P(U_n\cup V_n)\leqslant 1.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(U_n\cup V_n) = 1.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(U_n\cap V_n) = \lim_{n\to+\infty} (P(U_n)+P(V_n)-P(U_n\cup V_n)) = 1+1-1 = 1.$$

9. On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".

(a) L'événement A_n est l'événement « la contamination s'arrête le $n^{\text{ième}}$ jour ». On a donc :

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$A_n = [Z_n = 0]\cap \bigcap_{k=n+1}^{+\infty} [Z_k = 0] = [Z_n = 0]\cap A_{n+1} \subset A_{n+1}.$$

D'après la question 4, on en déduit donc :

$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(b) Soit $p\geqslant d$.

- Si $P\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) = 0$ alors, comme on a :

$$\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0] \subset \bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]$$

il est clair que :

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right).$$

- Si $\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right)\neq 0$ on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\cap\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)$$
$$=\mathrm{P}_{\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]}\left(\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right).$$

Or, sachant que l'événement $\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]$ est réalisé – c'est-à-dire sachant que pendant $(d+1)$ jours consécutifs il n'y a pas eu de nouvel infecté – l'épidémie s'arrête puisque la durée de contagiosité est de $d+1$ jours. En particulier, il n'y aura plus de nouvelle infection donc $\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]$ est presque sûr :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)=\mathrm{P}_{\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]}\left(\bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right)=1\times\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right).$$

Or on sait que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=\lim_{p\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[\mathrm{Z}_k=0]\right)=\lim_{p\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[\mathrm{Z}_k=0]\right).$$

(c) • On suppose $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{Z}_n=0])=1$. En particulier, pour tout $k\in[\![0,d]\!]$, on a aussi :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}([\mathrm{Z}_{n+k}=0])=1.$$

De plus par les questions précédentes on sait que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d}[\mathrm{Z}_{k+n}=0]\right)$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=\mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Montrons par récurrence que pour tout $d\geqslant 1$, si l'on dispose de $d+1$ suites d'événements $(\mathrm{U}_n^0)_n,\ldots,(\mathrm{U}_n^d)_n$ telles que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_n^k\right)=1$ pour tout $k\in[\![0,d]\!]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d}\mathrm{U}_n^k\right)=1$.

— Initialisation : le cas $d=1$ est donnée par la question 8.

— Hérédité : on suppose que pour un certain $d\geqslant 1$ si l'on dispose de $d+1$ suites d'événements $(\mathrm{U}_n^0)_n,\ldots,(\mathrm{U}_n^d)_n$ telles que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_n^k\right)=1$ pour tout $k\in[\![0,d]\!]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d}\mathrm{U}_n^k\right)=1$.

  On se donne alors $d+2$ suites d'événements $(\mathrm{U}_n^0)_n,\ldots,(\mathrm{U}_n^{d+1})_n$ telles que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_n^k\right)=1$ pour tout $k\in[\![0,d+1]\!]$ et on veut montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d+1}\mathrm{U}_n^k\right)=1.$$

  En posant $\mathrm{U}_n=\bigcap_{k=0}^{d}\mathrm{U}_n^k$ et $\mathrm{V}_n=\mathrm{U}_n^{d+1}$ par hypothèse de récurrence, (U_n) et (V_n) vérifient les hypothèses de la question 8 et on conclut donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{U}_n\cap\mathrm{V}_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d+1}\mathrm{U}_n^k\right)=1.$$

En appliquant cela avec $\mathrm{U}_n^k=[\mathrm{Z}_{n+k}=0]$ pour $k\in[\![0,d]\!]$ on en déduit alors que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d}\mathrm{U}_n^k\right)=1.$$

- Réciproquement, on suppose que P(B) = 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{d} [\mathrm{Z}_{k+n} = 0]\right) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0) \leqslant 1.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1$ donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0) = 1.$$

(d) Soit L une variable aléatoire de loi certaine égale à 0.
Si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0) = 1$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \neq 0) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0).$$

Par encadrement on en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) = 0 = \mathrm{P}(\mathrm{L} = k).$$

De plus par la question précédente on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0) = 1 = \mathrm{P}(\mathrm{L} = 0).$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{L} = k).$$

Réciproquement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{L} = k)$$

alors en particulier, pour $k = 0$ on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{L} = 0) = 1.$$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que Z_{n+1} suit la loi $\mathscr{P}(\mathrm{Y}_n)$ donc d'après 2.b on sait que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = 0) = \mathrm{E}(f_0(\mathrm{Y}_n)).$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_0(t) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_t = 0) = e^{-t}$ car $\mathrm{X}_t \hookrightarrow \mathscr{P}(t)$. Donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = 0) = \mathrm{E}(f_0(\mathrm{Y}_n)) = \mathrm{E}\left(e^{-\mathrm{Y}_n}\right).$$

(b) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.
La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe (elle est de classe $\mathscr{C}^2$ est sa dérivée seconde est positive) ; sa courbe représentative est donc située au dessus de ses tangentes. En particulier, en considérant la tangente au point d'abscisse 0 on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} \geqslant 1 - x.$$

On en déduit, par croissance de l'espérance, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = 0) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}e^{-\mathrm{Y}_n}\right) \geqslant \mathrm{E}(1 - \mathrm{Y}_n) = 1 - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = 1 - \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}.$$

Or, pour tout $n \geqslant d$, on a :

$$\sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k}$$

et avec les hypothèses de la question et par opération sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k} = 0.$$

On en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = 0) = 1.$$

La question 9.*c* permet de déduire que B est presque sûr.

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

11. On suppose, dans cette question, qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0,1[$ tels que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $r_n \alpha \leqslant \rho$.
On note (H_1) cette hypothèse.

(a) Par opération sur les limites :

$$\lim_{t \to 1} \sum_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{\sum_{k=0}^{d} \alpha_k}{\alpha} = 1.$$

Par l'absurde, si pour tout $\theta \in]0,1[$ on a $\theta^{d+1} < \rho \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \right)$ alors en faisant tendre θ vers 1 on obtient :

$$1 \leqslant \rho.$$

Or $\rho \in]0,1[$ d'où une contradiction. Par conséquent, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \right)$.

(b) Par récurrence, montrons que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $z_i \leqslant \mathrm{M}\theta^i$ pour tout $i \in [\![\mathrm{N}, n]\!]$.

- Initialisation : par définition de M on a :

$$\frac{z_\mathrm{N}}{\theta^\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{M}$$

c'est-à-dire $(\theta > 0)$: $z_\mathrm{N} \leqslant \mathrm{M}\theta^\mathrm{N}$.

- Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$ la propriété est vérifiée et on veut montrer qu'elle l'est alors au rang $n+1$. Par hypothèse on sait que pour tout $i \in [\![\mathrm{N}, n]\!]$ $z_i \leqslant \mathrm{M}\theta^i$ et on veut montrer que $i \in [\![\mathrm{N}, n+1]\!]$ $z_i \leqslant \mathrm{M}\theta^i$. Or :

— si $n+1 \in [\![\mathrm{N}, \mathrm{N}+d]\!]$ alors par définition de M on a :

$$\frac{z_{n+1}}{\theta^{n+1}} \leqslant \mathrm{M} \quad \text{donc} \quad z_{n+1} \leqslant \mathrm{M}\theta^{n+1};$$

— si $n+1 \geqslant \mathrm{N}+d+1$ alors $n \geqslant d$ et on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= r_n \sum_{k=0}^{d} \alpha_k z_{n-k} \\ &\leqslant r_n \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \mathrm{M}\theta^{n-k} \quad \text{par hypothèse de récurrence car } n-k \in [\![\mathrm{N}, n]\!] \\ &\leqslant \mathrm{M}\theta^{n-d} r_n \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \mathrm{M}\theta^{d-k} \\ &\leqslant \mathrm{M}\theta^{n-d} r_n \alpha \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \\ &\leqslant \mathrm{M}\theta^{n-d} \rho \sum_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \\ &\leqslant \mathrm{M}\theta^{n-d}\theta^{d+1} \\ &\leqslant \mathrm{M}\theta^{n+1}. \end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $z_n \leqslant \mathrm{M}\theta^n$.

(c) Les variables Z_n étant positives, avec la question précédente on obtient l'encadrement :

$$0 \leqslant z_n \leqslant \mathrm{M}\theta^{n+1}.$$

Or $\theta \in]0,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{M}\theta^{n+1} = 0$. Par encadrement on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$.
On montrerait de même que s'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *et* $\rho > 1$ *tels que, pour tout* $n \geqslant \mathrm{N}$, $r_n \alpha \geqslant \rho$, *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$. *On note* (H_2) *cette hypothèse.*

- On suppose, dans les questions 13 à 16 , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypohèse.
  On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$
  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

12. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On sait que :
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} a_k z_{n-k}.$$
Pour $n \geqslant d$ on a donc :
$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k}.$$
Ainsi pour tout $n \geqslant d$ on a :
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_n \\ \vdots \\ z_{n+1-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$
La relation est encore valable pour $n < d$ donc en posant
$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

(b) Un récurrence immédiate donne, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n U_0$.
On en déduit alors :
$$LA^n U_0 = LU_n = z_{n+1}.$$

13. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice A est :
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- On a :
$$X \in E_1 \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{6}x & + & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{6} z & = & x \\ x & & & & & = & y \\ & & y & & & = & z \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & y \end{array} \right.$$
Ainsi $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- De même :
$$X \in E_{-\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{6}x & + & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{6} z & = & -\frac{1}{2}x \\ x & & & & & = & -\frac{1}{2}y \\ & & y & & & = & -\frac{1}{2}z \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{4}z \\ y & = & -\frac{1}{2}z \end{array} \right.$$
Ainsi $E_{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

- De même :

$$X \in E_{-\frac{1}{3}} \iff AX = X \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{6}x & + & \frac{2}{3}y & + & \frac{1}{6}z & = & -\frac{1}{3}x \\ x & & & & & = & -\frac{1}{3}y \\ & & y & & & = & -\frac{1}{3}z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{9}z \\ y & = & -\frac{1}{3}z \end{array}\right.$$

Ainsi $E_{-\frac{1}{3}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$.

(b) On a $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Montrons que (V_1, V_2, V_3) est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 9\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 3\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & - & 3\lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

Ainsi (V_1, V_2, V_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) = 3$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) On a $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3 \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 \\ s_1 & - & 2s_2 & - & 3s_3 & = & 0 \\ s_1 & + & 4s_2 & + & 9s_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 \\ & - & 3s_2 & - & 4s_3 & = & -1 \\ & & 3s_2 & + & 8s_3 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 \\ & - & 3s_2 & - & 4s_3 & = & -1 \\ & & & & 4s_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} s_1 & = & \frac{1}{2} \\ s_2 & = & 1 \\ s_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$U_0 = \frac{1}{2}V_1 + V_2 - \frac{1}{2}V_3.$$

(d) En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, les formules de changement de bases donnent :

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} = \mathrm{LA}^n \mathrm{U}_0 &= \mathrm{LP} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \mathrm{U}_0 \\
&= \mathrm{LP} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} (s_1 \mathrm{V}_1 + s_2 \mathrm{V}_2 + s_3 \mathrm{V}_3) \\
&= \mathrm{L} \left(s_1 \mathrm{V}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n s_2 \mathrm{V}_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n s_3 \mathrm{V}_3 \right) \\
&= s_1 \mathrm{LV}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n s_2 \mathrm{LV}_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n s_3 \mathrm{LV}_3.
\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n \to +\infty} z_{n+1} = s_1 \mathrm{LV}_1 = s_1 \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) = s_1.$$

14. On revient au cas général.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_0 x_0 + \cdots + a_d x_d & = & \lambda x_0 \\ x_0 & = & \lambda x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & \lambda x_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{d-1} & = & \lambda x_d \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_0 x_0 + \cdots + a_d x_d & = & \lambda x_0 \\ x_0 & = & \lambda^d x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & \lambda^{d-i} x_d \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{d-1} & = & \lambda x_d \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x_d \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^k & = & \lambda^{d+1} x_d \\ x_0 & = & \lambda^d x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & \lambda^{d-i} x_d \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{d-1} & = & \lambda x_d \end{array} \right.$$

Le système admet alors des solutions non nulles si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \lambda^k$. Dans ce cas l'ensemble E_λ des solutions est le sous-espace vectoriel engendré par :

$$\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc en particulier est de dimension 1.

(b) D'après la question précédente (avec $\lambda = 1$), comme

$$1 = 1^{d+1} = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} 1^k$$

alors E_1 n'est pas réduit au vecteur nul et est engendré par

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Comme pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ $a_k \in]0, 1[$ alors alors

$$\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}(-1)^k \in]-1, 1[.$$

En particulier :

$$\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}(-1)^k \neq (-1)^{d+1}.$$

Donc $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
Soit $|\lambda| > 1$, alors pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ on a :

$$|\lambda|^k \leqslant |\lambda|^d.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}|\lambda|^k \\ &\leqslant \left(\sum_{k=0}^{d} a_{d-k} \right) |\lambda|^d \\ &= |\lambda|^d \\ &< |\lambda|^{d+1}. \end{aligned}$$

En particulier, $\lambda^{d+1} \neq \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$ et donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

15. (a) Soit $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \in H$ et montrons que $AW \in H$. On pose $AW = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ et on veut montrer que :

$$\sum_{k=0}^{d} b_k x_k = 0.$$

Pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, on a :

$$x_i = \sum_{k=0}^{d} a_{i+1,k} w_k = \begin{cases} a_0 w_0 + \cdots + a_d w_n & \text{si } i = 0 \\ w_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d} b_k x_k &= \sum_{k=1}^{d} b_k w_{k-1} + b_0(a_0 w_0 + \cdots + a_d w_n) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} b_{i+1} w_i + b_0 \sum_{i=0}^{d} a_i w_i \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} (b_{i+1} + a_i) w_i + a_d w_d \quad \text{car } b_0 = 1 \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} b_i w_i + a_d w_d \quad \text{car } b_{i+1} + a_i = b_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} b_i w_i \\ &= 0 \quad \text{car } W \in H. \end{aligned}$$

Ainsi $AW \in H$.

(b) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V} \in \mathrm{H} &\iff (1-s)b_0 - s\sum_{k=1}^{d} b_k = 0 \\
&\iff (1-s) - s\sum_{k=1}^{d} b_k = 0 \quad \text{car } b_0 = 1 \\
&\iff 1 = s(1 + \sum_{k=1}^{d} b_k) \\
&\iff 1 = s\sum_{k=0}^{d} b_k \\
&\iff s = \frac{1}{\sum_{k=0}^{d} b_k}.
\end{aligned}$$

(c) Nous admettons que, pour tout $\mathrm{W} \in \mathrm{H}$, $\mathrm{LA}^n\mathrm{W} \to 0$ quand $n \to +\infty$. En particulier , $\mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) \to 0$ quand $n \to +\infty$ D'après la question 12.(b), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \mathrm{LA}^n\mathrm{U}_0 = \mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) + s\mathrm{LA}^n\mathrm{V}.$$

Or, $\mathrm{AV} = \mathrm{V}$ donc une récurrence immédiate donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) + s\mathrm{LA}^n\mathrm{V} = \mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) + s\mathrm{LV} = \mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) + s.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{LA}^n(\mathrm{U}_0 - s\mathrm{V}) + s = s.$$

16. Sous l'hypothèse H2, $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
Sous l'hypothèse H3, $\lim_{n\to+\infty} z_n = s \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.
Sous l'hypothèse H1, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $z_n \leqslant \mathrm{M}\theta^n$ avec $\theta \in]0,1[$. Par comparaison avec la série géométrique convergente $\sum_{k\geqslant \mathrm{N}} \theta^k$, on en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} z_k$ converge (ce sont des séries à termes positifs).