Sujet 1 – Type Ecricome

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrés d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. Par définition de F on a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \operatorname{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F. Par ailleurs, cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est aussi libre. Par conséquent, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F et F est de dimension 2.

2. L'ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, I_3 appartient à G mais $2I_3$ n'appartient pas à G.

3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Un calcul direct montre que $A^2 = A$ donc A appartient à G.

   Par ailleurs, il est clair que $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$. Donc A appartient aussi à F.

   Ainsi $A \in F \cap G$.

   (b) D'après la question précédente, $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de A car $A^2 - A = 0_3$.

   (c) On voit que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est donc pas inversible (le système linéaire associé n'étant pas de Cramer).

   (d) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Alors on a :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_0 \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_2)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \text{ et } \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

Ainsi $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier E_0 est un espace vectoriel et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_0.

- De même, on a :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{E}_1 \Longleftrightarrow \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & z & = & 3x \\ -x & + & 2y & - & z & = & 3y \\ -x & - & y & + & 2z & = & 3z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow x = -y - z.$$

Ainsi $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier E_1 est un espace vectoriel et on vérifie facilement que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_1.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec a et b des réels.

4. (a) Un calcul direct donne :

$$\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc :

$$\mathrm{M} \in \mathrm{G} \Longleftrightarrow \mathrm{M}^2 = \mathrm{M} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ 2ab+b^2 & = & b \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0. \end{array} \right.$$

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b+2a-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & a \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2(1-2a)^2-a & = & 0 \\ b & = & 1-2a \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} 9a^2-9a+2 & = & 0 \\ b & = & 1-2a \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & \frac{1}{3} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{2}{3} \\ b & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right. .$$

D'après la question précédente on en déduit donc :

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \left\{ 0_3, \mathrm{I}_3, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A} \right\} = \{0_3, \mathrm{I}_3, \mathrm{I}_3 - \mathrm{A}, \mathrm{A}\}.$$

5. D'après la question précédente, B et A sont bien des éléments de F. Par ailleurs, la famille (A, B) est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une famille libre de F. Or on sait que F est de dimension 2. Ainsi (A, B) est une base de F.
6. (a) C'est un calcul direct.

   (b) On a :
$$\mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) = \mathrm{A} - \mathrm{A}^2 = 0_3 \quad \text{car} \quad \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}.$$
   De même :
$$\mathrm{BA} = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})\mathrm{A} = \mathrm{A} - \mathrm{A}^2 = 0_3.$$

   (c) On remarque que A et B commutent car AB = BA d'après la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{M}^n = (\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k} \\ &= \beta^n \mathrm{B}^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k} + \alpha^n \mathrm{A}^n. \end{aligned}$$
   Or, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$$\mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k} = \mathrm{A}^{k-1} \mathrm{ABB}^{n-k-1} = \mathrm{A}^{k-1} 0_3 \mathrm{B}^{n-k-1} = 0_3.$$
   Ainsi, on obtient :
$$\mathrm{M}^n = \alpha^n \mathrm{A}^n + \beta^n \mathrm{B}^n.$$
   Enfin, comme $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ on en déduit que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{I}_3 - 2\mathrm{A} + \mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_3 - \mathrm{A} = \mathrm{B}$ puis une récurrence immédiate permet de montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}^n = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}^n = \mathrm{B}.$$
   Ainsi, on en déduit que pour tout entier naturel n :
$$\mathrm{M}^n = \alpha^n \mathrm{A} + \beta^n \mathrm{B}.$$
7. (a) Si $\alpha = 0$ ou si $\beta = 0$ alors $\mathrm{M} = \beta\mathrm{B}$ ou $\mathrm{M} = \alpha\mathrm{A}$ donc n'est pas inversible car A et B ne le sont pas.
   Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ alors on a :
$$\mathrm{M}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{A} + \frac{1}{\beta}\mathrm{B}\right) = \mathrm{A}^2 + \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{AB} + \frac{\beta}{\alpha}\mathrm{BA} + \mathrm{B}^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{I}_3.$$
   Ainsi M est inversible d'inverse $\frac{1}{\alpha}\mathrm{A} + \frac{1}{\beta}\mathrm{B}$.

   (b) Soient α et β deux réels non nuls et soit n un entier naturel n. Alors on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{M}^n(\alpha^{-n}\mathrm{A} + \beta^{-n}\mathrm{B}) &= (\alpha^n\mathrm{A} + \beta^n\mathrm{B})(\alpha^{-n}\mathrm{A} + \beta^{-n}\mathrm{B}) \\ &= \mathrm{A}^2 \beta^n \alpha^{-n} \mathrm{BA} + \alpha^n \beta^{-n} \mathrm{AB} + \mathrm{B}^2 \\ &= \mathrm{A} + \mathrm{B} \\ &= \mathrm{I}_3. \end{aligned}$$
   Ainsi M^n est inversible d'inverse $\alpha^{-n}\mathrm{A} + \beta^{-n}\mathrm{B}$. Donc on a bien :
$$\mathrm{M}^{-n} = \alpha^{-n}\mathrm{A} + \beta^{-n}\mathrm{B}.$$

Partie III

8. Un calcul donne $\mathrm{I}_3 - \mathrm{T} = -\mathrm{A} - 4\mathrm{B}$.
9. D'après la question 7, $\mathrm{I}_3 - \mathrm{T}$ est donc inversible et son inverse est :
$$-\mathrm{A} - \frac{1}{4}\mathrm{B}.$$

10. Soit $\mathrm{L} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \mathrm{TL} + \mathrm{Y} \iff \mathrm{L} - \mathrm{TL} = \mathrm{Y} &\iff (\mathrm{I}_3 - \mathrm{T})\mathrm{L} = \mathrm{Y} \\ &\iff \mathrm{L} = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{T})^{-1}\mathrm{Y}. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une unique matrice colonne L telle que $\mathrm{L} = \mathrm{TL} + \mathrm{Y}$ et cette matrice est $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{T})^{-1}\mathrm{Y}$.

11. Soit n entier naturel, on a :

$$\mathrm{X}_{n+1} - \mathrm{L} = \mathrm{TX}_n + \mathrm{Y} - \mathrm{L} = \mathrm{TX}_n + \mathrm{Y} - \mathrm{TL} - \mathrm{Y} = \mathrm{T}(\mathrm{X}_n - \mathrm{L}).$$

Une récurrence permet alors de montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_n - \mathrm{L} = \mathrm{T}^n(\mathrm{X}_0 - \mathrm{L}).$$

12. On sait que $\mathrm{I}_3 - \mathrm{T} = -\mathrm{A} - 4\mathrm{B}$ donc $\mathrm{T} = \mathrm{I}_3 + \mathrm{A} + 4\mathrm{B} = 2\mathrm{A} + 5\mathrm{B}$. D'après la question précédente et la question 6.(c) on trouve donc que pour tout entier naturel n on a

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{T}^n(\mathrm{X}_0 - \mathrm{L}) + \mathrm{L} = (2^n\mathrm{A} + 5^n\mathrm{B})(\mathrm{X}_0 - \mathrm{L}) + \mathrm{L}.$$

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction g

1. Par opération sur les limites on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$$

donc par composition $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.
De même, on $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$

(a) En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0.$$

Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) On vérifie que $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Ainsi $0 \in h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et comme h est continue et strictement croissante, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ notée α.
De plus, comme $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0 = h(\alpha) < 1 = h(1)$ par croissance stricte de h on a nécessairement :

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Attention : montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ n'est pas suffisant !

(c) Soit $x > 0$. On a par la formule de dérivation des composées de fonctions :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\ln(x)\right) g(x) \\ &= \frac{1}{x^2}(2x - 1 + \ln(x)) g(x) \\ &= \frac{1}{x^2} g(x) h(x). \end{aligned}$$

(d) Le signe de $g'(x)$ est le signe de $h(x)$. Ainsi :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit $x > 1$:

$$\begin{aligned} g(x) - x^2 = e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)} - x^2 = x^2 e^{-\frac{1}{x}\ln(x)} - x^2 \\ = x^2\left(e^{-\frac{1}{x}\ln(x)} - 1\right) \\ \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\frac{-\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

par équivalent usuel car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi :

$$g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x).$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « u_n existe et $u_n > 0$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   - Initialisation : $u_0 > 0$ d'après le sujet donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, u_n existe et est strictement positif. Ainsi, u_n appartient à l'ensemble de définition de g et par conséquent $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. Par ailleurs, on a :
     $$u_{n+1} = g(u_n) = e^{\left(2-\frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)} > 0.$$
     Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que u_n existe et $u_n > 0$.
5. En supposant la bibliothèque `numpy` importée sous le label `np`.

```
def u(u0,n):
    L = np.zero(n+1)
    L[0] = u0
    for i in range(1, n+1):
        L[i] = np.exp((2-1/L[i-1])*np.log(L[i-1]))
    return L
```

6. (a) On a

x	0		1		$+\infty$
Signe de $(x-1)$		$-$	0	$+$	
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

   (b) Soit $x > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= \frac{e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)}}{e^{\ln(x)}} \\ &= e^{\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)-\ln(x)} \\ &= e^{\frac{x-1}{x}\ln(x)} \\ &\geqslant e^0 = 1 \end{aligned}$$

   d'après la question précédente et par croissance de la fonction exponentielle.

   (c) D'après la question précédente on a :

$$\forall x > 0, \quad g(x) \geqslant x.$$

   Par ailleurs, on a :

$$g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{g(x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x-1}{x}\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

   Ainsi l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. D'après les questions 4 et 6.(c), on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie par hypothèse.
- Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Or d'après les variations de g, on sait que

$$g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[g(\alpha), \max(g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = [g(\alpha), 1].$$

Or on sait par 6.b et 2.b que :

$$g(\alpha) \geqslant \alpha \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [g(\alpha), 1] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Or $u_{n+1} = g(u_n) \in g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.
Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite ℓ et d'après la question précédente, $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

De plus la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc ℓ est un point fixe de g. D'après 6.(c) on a donc $\ell = 1$.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n > 1$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}_n$ est vraie.

- Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie par hypothèse.
- Hérédité : supposons $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier naturel n et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$. Or d'après 6.c, on sait que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n > 1.$$

Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n > 1$.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone soit elle converge vers une limite ℓ soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde qu'elle converge vers une limite ℓ. Alors par croissance :

$$\ell \geqslant u_0 > 1.$$

De plus, la fonction g étant continue sur $]1, +\infty[$ alors ℓ est un point fixe de g. Mais le seul point fixe de g est 1. On obtient une contradiction.

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

10. On suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. Alors par décroissance de g sur $]0, \frac{1}{2}[$ on a :

$$u_1 = g(u_0) \in \left]g(\frac{1}{2}), +\infty\right[=]1, +\infty[.$$

D'après la question précédente la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergence donc.

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) La variable X_n compte le nombre de succès quand on répète n fois indépendantes l'épreuve de Bernoulli consistant à choisir une urne au hasard et dont le succès est « choisir l'urne 1 ». Ainsi X_n suit la loi $\mathscr{B}(n, 1/3)$. Le raisonnement est analogue pour Y_n et Z_n.
   (b) D'après la question précédente :
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
.
   (c) L'événement $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ signifie que les urnes 2 et 3 n'ont reçu aucun jeton au cours des n premiers tirages. Cela n'est possible que si c'est l'urne 1 qui a reçu les n jetons.
   Ainsi $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n]$.
   (d) On a $V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]$.
   (e) D'après la formule du crible :
$$\begin{aligned}
P(V_n) &= P(X_n = 0) + P([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]) - P([X_n = 0] \cap ([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]))\\
&= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - P([X_n = 0] \cap ([Y_n = 0] \cup [Z_n = 0]))\\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - P(X_n = n) - P([Z_n = n] \cup ([Y_n = n]))\\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

2. On a $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$0 \leqslant P(V) \leqslant P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(V) = 0$.

3. (a) On suppose la bibliothèque `numpy` importée sous le nom `np` et on rappelle que la commande `np.random.randint(a,b+1)` renvoie un nombre choisi uniformément dans $[\![a, b]\!]$.

```
def T():
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    liste = [X,Y,Z]
    while liste[0] == 0 or liste[1] == 0 or liste[2] == 0 :
        i = np.random.randint(0,3)
        liste[i] = liste[i] + 1
        n = n+1
    return n
```

   (b)

```
    S = 0
    for i in range(1000):
        S = S + T()/1000
    print(S)
```

4. Il est clair que $T(\Omega)$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.
5. Soit $n \geqslant 3$. L'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si aucune urne n'est vide à l'instant n (c'est $\bar{V}_n$) mais au moins une urne est vide à l'instant $n - 1$ (c'est V_{n-1}).
Ainsi : $[T = n] = V_{n-1} \backslash V_n$ et comme $V_n \subset V_{n-1}$ alors :
$$P(T = n) = P(V_{n-1} \backslash V_n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$
6. La variable T admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} nP(T = n)$ est absolument convergente.
Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, il suffit de montrer la convergence.

Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{T}=k) &= \sum_{k=3}^{n} k(\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k-1}) - \mathrm{P}(\mathrm{V}_k)) \\
&= \sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k-1}) - \sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) - \sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) \\
&= 3\mathrm{P}(\mathrm{V}_2) + \sum_{k=3}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{V}_k) - n\mathrm{P}(\mathrm{V}_n) \\
&= 3 + \sum_{k=3}^{n-1} \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) - n\mathrm{P}(\mathrm{V}_n) \\
&= 3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} - n\mathrm{P}(\mathrm{V}_n).
\end{aligned}$$

Or par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{P}(\mathrm{V}_n) = 0$ et on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{T}=k) = \frac{11}{2}.$$

Ainsi T possède une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{11}{2}$.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) En 2 tirages, il peut y avoir soit une soit deux urnes vides. Ainsi $\mathrm{W}_2(\Omega) = \{1,2\}$. On sait aussi que $\mathrm{X}_2(\Omega) = [\![0,2]\!]$. On a alors :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0, \mathrm{W}_2 = 1) = \mathrm{P}(\text{urne 1 est vide et une seule urne est vide}) = \frac{2}{9}$$

car soit le premier jeton est dans l'urne 2 et le deuxième dans l'urne 3 ou l'inverse. De même :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0, \mathrm{W}_2 = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_2 = 2) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}_2 = 2) = \frac{2}{9};$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{W}_2 = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{Y}_2 = 1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{Z}_2 = 1) = \frac{4}{9};$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{W}_2 = 2) = 0;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{W}_2 = 1) = 0;$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{W}_2 = 2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 2) = \frac{1}{9}.$$

$x \in \mathrm{X}_2(\Omega)$ \ $w \in \mathrm{W}_2(\Omega)$	1	2
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$

(b) Par la formule des probabilités totales on en déduit :

$w \in \mathrm{W}_2(\Omega)$	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{W}_2 = w)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

La variable W_2 est de support fini donc elle possède une espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{W}_2) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_2, W_2) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2}(i - E(X))\left(j - \frac{4}{3}\right)P(X_2 = i, W_2 = j)\\
&= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(i - \frac{2}{3}\right)\left(j - \frac{4}{3}\right)P(X_2 = i, W_2 = j)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) On sait que $P(X_2 = 1) \neq 0$ et $P(W_2 = 2) \neq 0$. Donc :

$$P(X_2 = 1, W_2 = 2) = 0 \neq P(X_2 = 1)P(W_2 = 2).$$

Les variables aléatoires X_2 et W_2 ne sont donc pas indépendantes.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

8. On a $W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
9. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons et qui vaut 0 sinon.
   (a) La variable $W_{n,i}$ suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité que l'urne i soit vide après n tirage, c'est-à-dire $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Par conséquent : $E(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (b) On a $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$.
   (c) Par linéarité de l'espérance on obtient : $E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
10. Si $[X_n = n]$ est réalisé c'est que l'urne 1 contient les n-premiers jetons donc automatiquement les deux autres urnes sont vides et $[W_n = 2]$ est réalisé. Ainsi :

$$P([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, si $[X_n = k]$ est réalisé après les n premiers tirages, l'urne 1 n'est pas vide et au moins une autre urne contient un jeton. Donc $P([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0$.

11. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'urne 1 reçoit k jetons et l'urne 2 $(n-k)$ ou si l'urne 1 reçoit k jetons et l'urne 3 $(n-k)$. Il y a $\binom{n}{k}$ issues pour que l'urne 1 reçoivent k jetons et l'urne 2 $(n-k)$ et de même $\binom{n}{k}$ issues pour que l'urne 1 reçoivent k jetons et l'urne 3 $(n-k)$. Soit au total $2\binom{n}{k}$ issues favorables pour 3^n issues au total. Ainsi :

$$P([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2\binom{n}{k}}{3^n}.$$

Si l'urne 1 contient tous les jetons, alors les deux autres sont vides donc $P([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = 0$.

12. Les variables X_n et W_n sont à support fini donc d'après le théorème de transfert X_nW_n possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{2} ijP(X_n = i, W_n = j)\\
&= \sum_{i=0}^{n} i(P(X_n = i, W_n = 1) + 2P(X_n = i, W_n = 2)\\
&= \sum_{i=0}^{n} iP(X_n = i, W_n = 1) + 2\sum_{i=0}^{n} iP(X_n = i, W_n = 2)\\
&= 2nP(X_n = n, W_n = 2) + \sum_{i=1}^{n-1} iP(X_n = i, W_n = 1).
\end{aligned}$$

13. D'après les questions précédentes :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n) &= 2n\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n, \mathrm{W}_n = 2) + \sum_{i=1}^{n-1} i\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = i, \mathrm{W}_n = 1) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\frac{2\binom{n}{i}}{3^n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\frac{2\binom{n}{i}}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!}i \\
&= \frac{2}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-1-(i-1))!(i-1)!} \\
&= \frac{2n}{3^n}\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} \\
&= \frac{2n}{3^n}\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{2n}{3^n}2^{n-1} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$
\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_n, \mathrm{W}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_n\mathrm{W}_n) - \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\mathrm{E}(\mathrm{W}_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3}\times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.
$$

14. Les variables X_n et W_n sont non corrélées bien que non indépendantes.

Sujet 2 – Type ESSEC II

Première partie : comportement asymptotique des temps de panne

1. (a) Soit $r \in [\![1,4]\!]$ et soit $\omega \in \Omega$.
   - Si $X_1(\omega) \leqslant 1$ alors on a bien $X_1(\omega)^r \leqslant 1 \leqslant 1 + X_1(\omega)^4$.
   - Si $X_1(\omega) \geqslant 1$ alors : $X_1(\omega)^r \leqslant X_1(\omega)^4 \leqslant 1 + X_1(\omega)^4$.

   Ainsi, on obtient bien : $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.

   (b) Soit $r \in [\![1,4]\!]$. D'après l'énoncé, on sait que X_1 possède un moment d'ordre 4 c'est-à-dire que X_1^4 possède une espérance. D'après la question précédente et la propriété rappelée en préambule, on en déduit que pour tout $r \in [\![1,4]\!]$, la variable X_1^r possède une espérance.

   (c) La variable aléatoire X_1 est discrète et positive. Soient $I \subset \mathbb{N}$ et $\{x_i \in \mathbb{R}_+ \,,\ i \in I\}$ son support. Alors :

$$\mu = \sum_{i \in I} x_i P(X_1 = x_1) \geqslant 0.$$

   Supposons que $\mu = 0$. Pour tout $i \in I$, le nombre $x_i P(X_1 = x_i)$ est positif donc on en déduit :

$$\forall i \in I, \quad x_i P(X_1 = x_i) = 0.$$

   Par ailleurs, par définition du support, pour tout $i \in I$, $P(X_1 = x_i) > 0$. On en déduit donc :

$$\forall i \in I, \quad x_i = 0.$$

   Par conséquent, si $\mu = 0$ alors X_1 suit la loi certaine égale à 0. Mais alors $F(0) = P(X_1 \leqslant 0) = 1$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur X_1 dans le préambule.
   Ainsi $\mu > 0$.

   (d) D'après la formule du binôme de Newton :

$$(X_1 - \mu)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} X_1^k \mu^{4-k}.$$

   Ainsi, $(X_1 - \mu)^4$ possède une espérance par linéarité; cela signifie que $X_1 - \mu$ possède un moment d'ordre 4.

2. (a) Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k = A_n \cup B_{n+1}.$$

   Ainsi $B_{n+1} \subset B_n$.

   (b) Soit $\omega \in B$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists k \geqslant n \quad \omega \in A_k.$$

   Supposons que ω n'appartient qu'à un nombre fini de A_k et soit $n = \max\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_k\right\}$. D'après ce qui précède, il existe $k \geqslant n+1$ tel que $\omega \in A_{n+1}$. Cela contredit la définition de n. Ainsi ω appartient à A_k pour une infinité de k.
   Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$ appartenant à A_k pour une infinité de k et soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \omega \in A_k\right\}$ étant infini, il n'est pas inclus dans $[\![1, n-1]\!]$. Il existe donc $k \geqslant n$ tel que $\omega \in A_k$ et par conséquent ω appartient à $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Ainsi, on vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in B_n$.
   Donc $\omega \in B$.

   (c) i. Soient n et k deux entiers naturels tels que $n < k$. On a alors :

$$E_n = F_n \backslash F_{n-1} \subset F_{k-1}.$$

   Or $E_k = F_k \backslash F_{k-1}$ donc E_n et E_k sont bien disjoints.

Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $E_n \subset F_n$ alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n$.

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n$ et soit $m = \min\{n \mid \omega \in F_n\}$. Alors $\omega \in F_m$ et $\omega \notin F_{m-1}$ donc $\omega \in E_m \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$.

On en conclut donc que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$ et finalement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n$..

ii. D'après l'énoncé on a :

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} F_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (P(F_n) - P(F_{n-1})) + P(F_0) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (P(F_n) - P(F_{n-1})) + P(F_0) \\
&= \lim_{N\to+\infty} (P(F_N) - P(F_0)) + P(F_0) \quad \text{par télescopage} \\
&= \lim_{N\to+\infty} P(F_N).
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = \overline{B}_n$. D'après 2.(*a*) on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $F_n \subset F_{n+1}$. Ainsi d'après la question précédente :

$$P(B) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} (1 - P(B_n)) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

(e) On a :

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leqslant P(C) + P(D).$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $N > n$, soit $\mathscr{P}_N$ la proposition : « $P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} P(A_k)$ ». Montrons par récurrence que pour tout $N > n$, $\mathscr{P}_N$ est vraie.

— Initialisation : pour $N = n+1$, il s'agit de la question précédente en prenant $C = A_n$ et $D = A_{n+1}$.

— Hérédité : supposons la propriété $\mathscr{P}_N$ vraie pour un entier $N > n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $N+1$. En appliquant la question précédente avec $C = \bigcup_{k=n}^{N} A_k$ et $D = A_{N+1}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N+1} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) + P(A_{N+1}).$$

Or par hypothèse de récurrence on sait que :

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} P(A_k).$$

Ainsi :

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N+1} A_k\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) + P(A_{N+1}) \leqslant \sum_{k=n}^{N} P(A_k) + P(A_{N+1}) = \sum_{k=n}^{N+1} P(A_k).$$

Donc $\mathscr{P}_N$ est vraie.

— Conclusion : par principe de récurrence pour tout $N > n$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} P(A_k).$$

En posant pour tout $N \geqslant n$, $F_N = \bigcup_{k=n}^{N} A_k$ on voit que $(F_N)_{N\geqslant n}$ est une suite croissante. Donc d'après 2.(*c*) :

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} F_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(F_k) \leqslant \lim_{k\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} P(A_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

(g) D'après les questions précédentes :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B})=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{B}_n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k).$$

Or par hypothèse la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ converge donc on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(\mathrm{A}_k)=0.$$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{B})\geqslant 0$ par encadrement on en déduit que $\mathrm{P}(\mathrm{B})=0$.

3. (a) i. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\omega\in\Omega$. Alors :

$$\left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right|>\varepsilon\iff\left(\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right)^2>\varepsilon^2\iff\Sigma_n(\omega)^2>n^2\varepsilon^2.$$

Ainsi : $\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|>\varepsilon\right]=\left[\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2\right]$ d'où le résultat.

ii. La variable U_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2)$. En particulier :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_n)=\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2).$$

On en déduit donc :

$$(n\varepsilon)^2\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2)=\mathrm{E}((n\varepsilon)^2\mathrm{U}_n).$$

Or, pour tout $\omega\in\Omega$ on a :

$$(n\varepsilon)^2\mathrm{U}_n(\omega)=\begin{cases}(n\varepsilon)^2 & \text{si } \Sigma_n^2(\omega)>n^2\varepsilon^2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\leqslant\mathrm{U}_n(\omega)\Sigma_n^2(\omega).$$

D'après la propriété rappelée dans le préambule, on en déduit donc :

$$(n\varepsilon)^2\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2)=\mathrm{E}((n\varepsilon)^2\mathrm{U}_n)\leqslant\mathrm{E}(\mathrm{U}_n\Sigma_n^2)\leqslant\mathrm{E}(\Sigma_n^2).$$

Or comme les variables Y_k sont d'espérance nulle, par linéarité $\mathrm{E}(\Sigma_n)=0$ et la formule de Koenig-Huygens donne :

$$\mathrm{V}(\Sigma_n)=\mathrm{E}(\Sigma_n^2).$$

Par ailleurs, les variables Y_k étant indépendantes de même loi, on a : $\mathrm{V}(\Sigma_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{V}(\mathrm{Y}_k)=n\sigma^2$.

On en déduit donc :

$$(n\varepsilon)^2\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2)=\mathrm{E}((n\varepsilon)^2\mathrm{U}_n)\leqslant\mathrm{E}(\mathrm{U}_n\Sigma_n^2)\leqslant n\sigma^2.$$

iii. D'après les deux questions précédentes, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$0\leqslant\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right|>n\right)=\mathrm{P}(\Sigma_n^2>n^2\varepsilon^2)\leqslant\frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=0$ par encadrement on en déduit le résultat souhaité.

(b) i. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $\omega\in\Omega$. Alors :

$$\left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right|>\varepsilon\iff\left(\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right)^4>\varepsilon^4\iff\Sigma_n(\omega)^4>n^4\varepsilon^4.$$

Ainsi : $\left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right|>\varepsilon\right]=\left[\Sigma_n^4>n^4\varepsilon^4\right]$ d'où le résultat.

ii. Soit V_n la variable aléatoire valant 1 si $\Sigma_n^4>n^4\varepsilon^4$ et 0 sinon. Alors V_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(\Sigma_n^4>n^4\varepsilon^4)$. En particulier :

$$\mathrm{E}(\mathrm{V}_n)=\mathrm{P}(\Sigma_n^4>n^4\varepsilon^4).$$

On en déduit donc :

$$(n\varepsilon)^4\mathrm{P}(\Sigma_n^4>n^4\varepsilon^4)=\mathrm{E}((n\varepsilon)^4\mathrm{V}_n).$$

Or, pour tout $\omega\in\Omega$ on a :

$$(n\varepsilon)^4 \mathrm{V}_n(\omega) = \begin{cases} (n\varepsilon)^4 & \text{si } \Sigma_n^4(\omega) > n^4\varepsilon^4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \leqslant \mathrm{V}_n(\omega)\Sigma_n^4(\omega).$$

D'après la propriété rappelée dans le préambule, on en déduit donc :

$$(n\varepsilon)^4 \mathrm{P}(\Sigma_n^4 > n^4\varepsilon^4) = \mathrm{E}((n\varepsilon)^4\mathrm{V}_n) \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{V}_n\Sigma_n^4) \leqslant \mathrm{E}(\Sigma_n^4).$$

En divisant membre à membre par $n^4\varepsilon^4$ on en déduit par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}(\Sigma_n^4 > n^4\varepsilon^4) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4}\mathrm{E}\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right).$$

iii. Question à la limite du hors-programme. On a :

$$\Sigma_n^4 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell.$$

On sépare les $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$ en quatre catégories disjointes :

- ceux de la forme (i,i,i,i) ;
- ceux de la forme (i,i,j,j), (i,j,j,i) ou (i,j,i,j) avec $i \neq j$;
- ceux de la forme (i,i,i,j), (i,i,j,i), (i,j,i,i) ou (j,i,i,i) avec $i \neq j$;
- les autres ; on note R ce dernier ensemble.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\Sigma_n^4 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^4 + 3\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_j^2 + 4\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j^3 + \sum_{(i,j,k,\ell)\in\mathrm{R}}\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^4 + 3\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_j^2 + 4\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j^3 + \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i \sum_{(j,k,\ell)\ |(i,j,k,\ell)\in\mathrm{R}} \mathrm{Y}_j\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^4 + 3\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_j^2 + 4\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j^3 + 3\sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^2 \sum_{k\neq i}\sum_{\ell\neq k,\ell\neq i}\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell + \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i\mathrm{Z}_i
\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{Z}_i = \sum_{j\neq i,k\neq i,\ell\neq i} \mathrm{Y}_j\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Sigma_n^4 &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^4 + 3\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_j^2 + 4\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j^3 + 3\sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i^2 \sum_{k\neq i}\sum_{\ell\neq k,\ell\neq i}\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_\ell + \sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i\mathrm{Z}_i \\
&= \sum_{k=1}^n \mathrm{Y}_k^4 + 3\sum_{k=1}^n\sum_{j\neq k}\mathrm{Y}_k^2\mathrm{Y}_j^2 + 4\sum_{k=1}^n\sum_{j\neq k}\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_j^3 + 3\sum_{k=1}^n \mathrm{Y}_k \sum_{i\neq k}\sum_{\ell\neq k,\ell\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_\ell + \sum_{k=1}^n \mathrm{Y}_k\mathrm{Z}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \mathrm{Y}_k^4 + 3\sum_{k=1}^n\sum_{j\neq k}\mathrm{Y}_k^2\mathrm{Y}_j^2 + \sum_{k=1}^n \mathrm{Y}_k\mathrm{W}_k
\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{W}_k = 4\sum_{j\neq k}\mathrm{Y}_k\mathrm{Y}_j^3 + 3\sum_{i\neq k}\sum_{\ell\neq k,\ell\neq i}\mathrm{Y}_i^2\mathrm{Y}_\ell + \mathrm{Z}_k.$$

iv. D'après la question précédente et par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathrm{E}(\Sigma_4^n) = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\mathrm{Y}_k^4) + 3\sum_{k=1}^n\sum_{j\neq k}\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k^2\mathrm{Y}_j^2) + \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\mathrm{Y}_k\mathrm{W}_k).$$

Or, d'après le lemme des coalitions, les variables Y_k^2 et Y_j^2 sont indépendantes pour $k \neq j$ et, de même les variables Y_k et Z_k sont indépendantes. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\Sigma_4^n) &= \sum_{k=1}^{n} E(Y_k^4) + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} E(Y_k^2 Y_j^2) + \sum_{k=1}^{n} E(Y_k W_k) \\ &= n\rho^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} E(Y_k^2)E(Y_j^2) + \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)E(W_k) \\ &= n\rho^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} \sigma^4 + 0 \\ &= n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4. \end{aligned}$$

v. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) = \frac{n\rho^4 + n(n-1)\sigma^4}{n^4} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\rho^4}{n} + \frac{3n(n-1)\sigma^4}{n^2}\right).$$

Or la suite $\left(\frac{\rho^4}{n} + \frac{3n(n-1)\sigma^4}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc est majorée. Si on note C un majorant, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant \frac{C}{n^2}.$$

vi. D'après les questions $3.(b)ii.$ et $3.(b)v.$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$ on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right) \leqslant n^{\frac{1}{2}} E\left(\left(\frac{\Sigma_n}{n}\right)^4\right) \leqslant n^{\frac{1}{2}}\frac{C}{n^2} = \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

4. (a) D'après la question $4.(b)vi$, par comparaison avec une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$ converge.

(b) D'après la question $2.b$ (en conservant les notations), la probabilité recherchée est P(B) qui vaut bien 0 d'après $2.(g)$ puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$ converge.

(c) On va montrer que $\overline{B} \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$. Comme $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1$ cela impliquera que l'événement $\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ a pour probabilité 1.

Soit $\omega \in \overline{B}$. D'après $2.(b)$, ω n'appartient qu'à un nombre fini des A_k. Si on note N le plus grand entier k tel que $\omega \in A_k$ alors pour tout $n > N$, ω n'appartient pas à A_n donc : $\left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$. Ainsi :

$$\forall n > N, \quad 0 \leqslant \left|\frac{\Sigma_n(\omega)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}.$$

Par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n(\omega)}{n} = 0.$$

Ainsi $\omega \in \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ et on a montré : $\overline{B} \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$.

(d) Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \mu &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} - \mu = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega) - n\mu}{n} = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - \mu)}{n} = 0. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] = \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{n} = 0\right].$$

Or, en posant $Y_i = X_i - \mu$, la suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ vérifie les hypothèses de la question 3 et d'après la question précédente l'événement

$$\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] = \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{n} = 0\right]$$

a pour probabilité 1.

5. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme X_{n+1} est positive on a :

$$S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega) + X_{n+1}(\omega) \geqslant S_n(\omega).$$

Ainsi la suite de réels $(S_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ est croissante.

(b) On suppose que $S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+$, alors par produit de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \times S_\infty(\omega) = 0.$$

(c) D'après la question précédente et comme $\mu > 0$, on a :

$$[S_\infty < +\infty] \subset \left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right] \subset \overline{\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]}.$$

Ainsi, en passant au complémentaire :

$$\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] \subset \overline{[S_\infty < +\infty]} = [S_\infty = +\infty].$$

D'après, 4.(*d*), on en déduit : $P(S_\infty = +\infty) = 1$.

Deuxième partie : Le processus de renouvellement

On a montré dans la partie précédente qu'avec probabilité 1, la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ tend vers l'infini. On peut donc définir, pour tout réel $t \geqslant 0$, la variable aléatoire

$$N_t = \max\{k \in \mathbb{N},\ S_k \leqslant t\}.$$

C'est le **processus de renouvellement** associé à la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

6. (a) Soient deux réels s et t tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_k \leqslant s$. On a donc :

$$S_k \leqslant s \leqslant t.$$

Cela montre que :

$$\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant s\} \subset \{k \in \mathbb{N} \mid S_k \leqslant t\}.$$

Donc : $N_s \leqslant N_t$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\omega \in [N_t \geqslant n] \Longleftrightarrow N_t(\omega) \geqslant n \Longleftrightarrow S_n(\omega) \leqslant t \Longleftrightarrow \omega \in [S_n \leqslant t].$$

Ainsi : $[N_t \geqslant n] = [S_n \leqslant t]$.

(c) Pour $\omega \in \Omega$ donné, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante d'après 6.(*a*). D'après le théorème de la limite monotone elle admet une limite (éventuellement infinie) lorsque t tend vers $+\infty$.

(d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose $N_\infty(\omega) = K$.

i. On applique la définition de limite en $+\infty$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il existe $T_\omega > 0$ tel que tout $t \geqslant T_\omega$ on a : $|N_t(\omega) - K| < \frac{1}{2}$. Or $N_t(\omega)$ et K sont des entiers naturels donc :

$$|N_t(\omega) - K| < \frac{1}{2} \Rightarrow N_t(\omega) = K.$$

Ainsi : $\forall t \geqslant T_\omega,\ N_t(\omega) = K$.

ii. D'après la question précédente : $N_{T_\omega}(\omega) = K$. D'après 6.(*b*) on a donc : $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$.
Toujours avec la question précédente, pour tout $t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) = K$ donc $S_{K+1}(\omega) > t$ (sinon cela contredirait la maximalité de K).

iii. On suppose $N_\infty(\omega) = K$. Alors pour tout $t \geqslant T_\omega$:

$$X_{K+1}(\omega) = S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega) > t - T_\omega.$$

En effectuant le changement de variable $s = t - T_\omega$ on en déduit que pour tout $s > 0$:

$$X_{K+1}(\omega) > s.$$

Cela est absurde.

iv. D'après la question précédente on sait que $\left[\lim_{t\to+\infty} N_t \in \mathbb{N}\right] = \varnothing$. Il suffit donc de montrer que $[N_\infty = +\infty] = \overline{\left[\lim_{t\to+\infty} N_t \in \mathbb{N}\right]}$ c'est-à-dire que si $N_t(\omega)$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nécessairement dans $\mathbb{N}$.

Supposons que $N_t(\omega)$ admet une limite en $+\infty$ notée K. Alors en reprenant le travail effectué en 6.$(d)i$:

$$\forall t > T_\omega \quad |N_t(\omega) - K| < \frac{1}{2}.$$

Donc, pour tout $s, t > T_\omega$ on a :

$$|N_t(\omega) - N_s(\omega)| \leqslant |N_s(\omega) - K| + |N_t(\omega) - K| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Donc $N_t(\omega)$ et $N_s(\omega)$ sont deux entiers distants d'une longueur strictement inférieure à 1. Ainsi $N_t(\omega) = N_s(\omega)$.

Par conséquent, $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante sur $[T_\omega, +\infty[$ et donc $K = N_{T_\omega} \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $N_t(\omega)$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nécessairement dans $\mathbb{N}$ et la question précédente montre que ce n'est jamais le cas. Finalement, on a :

$$[N_\infty = +\infty] = \overline{\left[\lim_{t\to+\infty} N_t \in \mathbb{N}\right]} = \Omega$$

et donc $P(N_\infty = +\infty) = 1$.

7. On suppose que la fonction `X` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
def Renouvellement (t) :
    N = 0
    S = 0
    while S<=t :
        S = S + X()
        N = N + 1
    return N
```

8. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Comme N_t est à valeurs entière on sait que : $[N_t \geqslant n] \setminus [N_t \geqslant n+1] = [N_t = n]$. Ainsi, puisque par ailleurs $[N_t \geqslant n+1] \subset [N_t \geqslant n]$ on a :

$$P(N_t = n) = P([N_t \geqslant n] \setminus [N_t \geqslant n+1]) = P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1).$$

(b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout entier naturel n, on note $F_n(t) = P(S_n \leqslant t)$.

i. Pour tout $t \geqslant 0$, $F_0(t) = P(S_0 \leqslant t) = P(0 \leqslant t) = 1$ et $F_1(t) = P(X_1 \leqslant t) = F(t)$.

ii. D'après les questions 8.(a) et 6.(b) :

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(N_t \geqslant n) - P(N_t \geqslant n+1) \\ &= P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t). \end{aligned}$$

9. Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([U = k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned} P(V = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(U = k) P_{[U=k]}(V = j) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(U' = k) P_{[U'=k]}(V' = j) \quad \text{car U et U}' \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

(où les sommes sont prises sur les indices k tels que $P(U=k)\neq 0$ et $P(U'=k)\neq 0$). Or d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([U'=k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a :

$$P(V'=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(U'=k)P_{[U'=k]}(V'=j).$$

Ainsi :

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad P(V=j)=P(V'=j).$$

Comme V et V′ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ cela signifie qu'elles ont même loi.

10. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On note $W=\min\{k\geqslant 1,\ Z_k=1\}$.

(a) La variables W donne le rang du premier 1 pris par une succession de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Donc W suit la loi géométrique de paramètre p.

(b) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $W_n=\min\left\{k\geqslant 1,\ \sum_{l=1}^{k}Z_l=n\right\}$.

i. Soit $k\geqslant n$. L'événement $[W_n=k]$ est réalisé si et seulement si les événements $\left[\sum_{l=1}^{k}Z_l=n\right]$ et $\left[\sum_{l=1}^{k-1}Z_l\leqslant n-1\right]$ le sont si et seulement si $[Z_k=1]$ est réalisé et il y a exactement $(n-1)$ des variables $Z_1,\dots,Z_{k-1}$ qui valent 1.
Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles pour les $(n-1)$ variables parmi $Z_1,\dots,Z_{k-1}$ qui valent 1 et chacun de ces choix a, par indépendance des Z_i, une probabilité $p^{n-1}(1-p)^{(k-1)-(n-1)}=p^{n-1}(1-p)^{k-n}$.
Ainsi :

$$P(W_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{k-n}P(Z_k=1)=\binom{k-1}{n-1}p^{n}(1-p)^{k-n}.$$

ii. Soient $k\geqslant n$ et $j\geqslant k+1$, on a par indépendance :

$$P_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j)=P(Z_{k+1}=0,\dots,Z_{j-1}=0,Z_j=1)=p(1-p)^{j-k-1}.$$

(c) On suppose que pour tout entier $i\geqslant 1$, $P(X_1=i)=p(1-p)^{i-1}$.

i. Soient j et k des entiers tels que $j\geqslant k+1$, on a :

$$P_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j)=P(X_{n+1}=j-k)=p(1-p)^{j-k-1}.$$

ii. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, S_n a même loi que W_n.

- Initialisation : d'après 10.(b)i, W_1 et $X_1=S_1$ on la même loi.
- Hérédité : on suppose qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 1 tel que S_n et W_n aient même loi. Alors d'après les questions 10.(b)ii et 10.(c).i les hypothèses de la question 9 sont vérifiées avec $U=S_n$, $U'=W_n$, $V=S_{n+1}$ et $V'=W_{n+1}$. Ainsi S_{n+1} et W_{n+1} ont la même loi.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n\geqslant 1$, S_n et W_n ont la même loi.

(d) Soient $t\geqslant 0$ un réel et n un entier naturel non nul, on a d'après 8.(b).ii :

$$P(N_t=n)=P(S_n\leqslant t)-P(S_{n+1}\leqslant t).$$

Or, S_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc :

$$P(S_n\leqslant t)=P\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}[S_n=k]\right)=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(S_n=k)$$

et de même :

$$P(S_{n+1}\leqslant t)=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(S_{n+1}=k).$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}P(N_t=n)&=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(S_n=k)-\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(S_{n+1}=k)\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(W_n=k)-\sum_{k=0}^{\lfloor t\rfloor}P(W_{n+1}=k)\quad\text{d'après la question précédente}\\&=\sum_{k=n}^{\lfloor t\rfloor}\binom{k-1}{n-1}p^{n}(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{\lfloor t\rfloor}\binom{k-1}{n}p^{n+1}n(1-p)^{k-n-1}\quad\text{d'après la question 10.(b)i.}\end{aligned}$$

1 Troisième partie : Théorème du renouvellement

Le but de cette partie est d'obtenir des propriétés asymptotiques, en moyenne, du processus de renouvellement.

11. (a) Par définition de N_t, pour tout réel $t \geqslant 0$, $S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}$.

    (b) Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question 6.(d), on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$. En particulier, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout $t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) > 0$. En divisant membre à membre par $N_t(\omega)$ dans l'inégalité de la question précédente on obtient alors pour tout $t \geqslant T_\omega$:
$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}}{N_t(\omega)}.$$

    (c) D'après la question 6.(d), on sait que pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$. Donc par composition des limites on a :
$$\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] \subset \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right].$$
    Or d'après 4.(d), l'événement $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ a pour probabilité 1 donc l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ a pour probabilité 1 aussi.

    (d) Soit $\omega \in \Omega$. Alors on a :
$$\frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)} = \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)+1} \times \frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)}.$$
    Comme $N_t(\omega)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$ on en déduit que :
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)+1} \times 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \times 1 = \mu.$$
    Ainsi l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$ est égal à Ω et a donc pour probabilité 1.

    (e) Soit $\omega \in \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$. D'après 11.(b), par encadrement on a :
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t(\omega)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$
    Donc :
$$\left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \subset \left[\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right].$$
    Or $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ est l'intersection de deux événements de probabilité 1 donc est lui même de probabilité 1. Par conséquent, l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$ a pour probabilité 1.

12. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_J = \sum\limits_{k=1}^{J} X_k$.

    (a) Soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $k > J(\omega)$, on a $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = 0$ et pour tout $k \in [\![1, J(\omega)]\!]$ on a $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = 1$. Ainsi on a :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega)\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega) = S_J(\omega).$$
    Donc on a bien $S_J = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$.

    (b) On vérifie facilement que $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]} = 1 - \mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]}$. D'après l'hypothèse faite sur J et par le lemme des coalitions, on en déduit que $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$ est indépendante de X_k.

    (c) i. Soit $\omega \in \Omega$ et posons $k = U(\omega)$. On a alors :
$$\mathbb{1}_{[U\geqslant n]}(\omega) = 0 \Longleftrightarrow n > k.$$
    Donc, on obtient l'égalité suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}(\omega) = \sum_{n=1}^{k} 1 = k = U(\omega).$$
    Ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien : $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}$.

ii. D'après la propriété admise dans l'énoncé, on a, sous réserve d'existence :

$$\mathrm{E(U)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathbb{1}_{[\mathrm{U} \geqslant n]}).$$

Or $\mathbb{1}_{[\mathrm{U} \geqslant n]}$ est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(\mathrm{U} \geqslant n)$. Ainsi on trouve :

$$\mathrm{E(U)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathbb{1}_{[\mathrm{U} \geqslant n]}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{U} \geqslant n).$$

(d) D'après la question 12.(a) et la propriété admise dans l'énoncé, on a, sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E(S_J)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k \mathbb{1}_{[\mathrm{J} \geqslant k]}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)\mathrm{E}(\mathbb{1}_{[\mathrm{J} \geqslant k]}) \quad \text{par indépendance (question 12.(b)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)\mathrm{P}([\mathrm{J} \geqslant k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)\mathrm{P}([\mathrm{J} \geqslant k]) \quad \text{car tous les } \mathrm{X}_k \text{ ont même loi} \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}([\mathrm{J} \geqslant k]) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)\mathrm{E(J)} \quad \text{d'après 12.(c)ii} \\
&= \mu \mathrm{E(J)}.
\end{aligned}$$

13. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{[\mathrm{J} \leqslant n]} = \mathbb{1}_{[\mathrm{N}_t + 1 \leqslant n]} &= \mathbb{1}_{[\mathrm{N}_t \leqslant n-1]} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{[\mathrm{N}_t \geqslant n]} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{[\mathrm{S}_n \leqslant t]}.
\end{aligned}$$

Or d'après le lemme des coalitions, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_l$ est indépendante de $\mathrm{X}_{n+1}, \mathrm{X}_{n+2}, \ldots$ donc $\mathbb{1}_{[\mathrm{J} \leqslant n]}$ aussi.

(b) Les hypothèses de la question 12 sont satisfaites d'après la question précédente. On déduit donc de la question 12.(d) :

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}) = \mu(\mathrm{E}(\mathrm{N}_t) + 1).$$

Or on sait que $\mu > 0$ d'où :

$$\mathrm{E}(\mathrm{N}_t) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1})}{\mu} - 1.$$

14. Soit $t > 0$. D'après 11.(a) on sait que :

$$\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1}}{t} \geqslant 1$$

donc par croissance de l'espérance :

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}_t)}{t} = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_t+1})}{\mu t} - \frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}.$$

15. Soit $b > 0$. On pose $\tilde{\mathrm{X}}_i = \min(b, \mathrm{X}_i)$.

(a) La positivité est claire, l'indépendance vient du lemme des coalitions et le fait qu'elles ont même loi du fait que les X_i ont même loi.

(b) On pose $\tilde{\mathrm{S}}_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathrm{X}}_i$ et $\tilde{\mu}_b = \mathrm{E}(\tilde{\mathrm{X}}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{\mathrm{N}}_t$ associé aux $\tilde{\mathrm{X}}_i$.

i. Soit $n \geqslant 1$. Par définition de X_i, on sait que tout i, on a :

$$\tilde{\mathrm{X}}_i \leqslant \mathrm{X}_i.$$

On en déduit donc : $\tilde{\mathrm{S}}_n \leqslant \mathrm{S}_n$.

ii. Soit $t \geqslant 0$. D'après la question précédente :

$$\mathrm{S}_n \leqslant t \Rightarrow \tilde{\mathrm{S}}_n \leqslant t.$$

Donc $\mathrm{N}_t \leqslant \tilde{\mathrm{N}}_t$.

iii. Soit $t \geqslant 0$. Par définition on sait que :

$$\tilde{\mathrm{S}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t} \leqslant t.$$

Donc :

$$\tilde{\mathrm{S}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t+1} = \tilde{\mathrm{S}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t} + \tilde{\mathrm{X}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t+1} \leqslant t + \min(b, \mathrm{X}_{\tilde{\mathrm{N}}_t+1}) \leqslant t + b.$$

(c) i. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après 15.(a) on peut appliquer le résultat de 13.(b) à la suite $(\tilde{\mathrm{X}}_i)$ et on obtient :

$$\frac{\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{N}}_t)}{t} = \frac{\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{S}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t}.$$

ii. Soit $b > 0$. Par croissance de l'espérance et 15.(b)ii et iii on a :

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}_t)}{t} \leqslant \frac{\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{N}}_t)}{t} = \frac{\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{S}}_{\tilde{\mathrm{N}}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

(d) On choisit $b = \sqrt{t}$.

i. D'après 15.(c)ii avec $b = \sqrt{t}$ on a bien :

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1))}.$$

ii. Par définition, du minimum, on a bien $0 \leqslant \mathrm{X}_1 - \min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1)$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1(\omega) - \min(\mathrm{X}_1(\omega), \sqrt{t}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{X}_1(\omega) \leqslant \sqrt{t} \\ \mathrm{X}_1(\omega) - \sqrt{t} & \text{si } \mathrm{X}_1(\omega) > \sqrt{t} \end{cases} \\ &\leqslant \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{X}_1(\omega) \leqslant \sqrt{t} \\ \mathrm{X}_1(\omega) & \text{si } \mathrm{X}_1(\omega) > \sqrt{t} \end{cases} \\ &= \mathrm{X}_1(\omega)\mathbb{1}_{\mathrm{X}_1 > \sqrt{t}}(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi on a bien : $0 \leqslant \mathrm{X}_1 - \min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1) \leqslant \mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1 > \sqrt{t}]}$.

iii. Par croissance de l'espérance on déduit :

$$0 \leqslant \mu - \mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1)) \leqslant \mathrm{E}(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1 > \sqrt{t}]}).$$

Or, par le lemme de transfert, on sait que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1 > \sqrt{t}]}) = \sum_{k=\lfloor\sqrt{t}\rfloor+1}^{+\infty} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) - \sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{t}\rfloor} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = k).$$

Donc :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_1\mathbb{1}_{[\mathrm{X}_1 > \sqrt{t}]}) = 0.$$

On en déduit par encadrement que $\lim_{t\to+\infty}(\mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1)) - \mu) = 0$ c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1)) = \mu$.

iv. D'après les questions précédentes, pour tout $t > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t\mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1))}.$$

Or on a d'après la question précédente :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+\sqrt{t}}{t\mathrm{E}(\min(\sqrt{t}, \mathrm{X}_1))} = \frac{1}{\mu}.$$

Par encadrement on conclut que : $\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.