Chapitre 18 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

1. *Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à* X.
2. *Pour* $\varepsilon > \frac{1}{2}$*, calculer* $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev est-elle précise ?*

Test 2 (*Voir solution.*)

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev à une variable aléatoire X *suivant la loi normale centrée réduite, montrer que pour tout réel* x *strictement positif on a :*

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit X *une variable aléatoire à densité. Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $X_n = e^{\frac{1}{n}}X$. *Montrer que* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)$. *Montrer que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r à déterminer.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{1}{n}\right)$. *Montrer que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une variable de loi certaine égale à* 0.

Test 6 (*Voir solution.*)

Pour tout entier naturel n*, on considère une variable aléatoire* S_n *suivant la loi binomiale de paramètres* n *et* p *avec* $p \in]0,1[$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant np)$.

Test 7 (*Voir solution.*)

On considère un dé équilibré. L'expérience consiste à effectuer une succession de $n = 3600$ *lancers. Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*, on note* X_i *la variable aléatoire réelle égale à* 1 *si on obtient 1 lors du* i*-ième lancer et égale à* 0 *sinon.*

On note enfin $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *qui compte le nombre de* 1 *obtenus au cours de l'expérience.*

1. (a) *Soit* $i \in [\![1,n]\!]$. *Déterminer la loi de* X_i.
   (b) *Déterminer la loi de* S_n. *Rappeler les valeurs de* $E(S_n)$ *et* $V(S_n)$.
2. *Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*
   (a) *Démontrer que pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*
   $$P(|S_n - 600| > \varepsilon) \leqslant \frac{500}{\varepsilon^2}.$$
   (b) *En déduire que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*
   $$P(600 - \varepsilon \leqslant S_n) \leqslant 600 + \varepsilon \geqslant 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}.$$
   (c) *Démontrer :* $P(540 \leqslant S_n \leqslant 660) \geqslant \frac{31}{36}$.
3. *Avec le TCL.*
   (a) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$. *Expliquer pourquoi on à l'approximation suivante*
   $$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nm + b\sqrt{n}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$
   où σ *et* m *sont des réels à déterminer et* Φ *est la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.*
   (b) *En déduire une approximation de* $P(540 \leqslant S_n \leqslant 660)$. *On pourra utiliser* $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2{,}68$.
4. *Comparer les résultats des deux méthodes.*

1 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

1. *La variable* X *possède un moment d'ordre* 2 *donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev. Comme* $E(X) = \frac{1}{2}$ *et* $V(X) = \frac{1}{12}$*, on obtient :*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{12\varepsilon^2}.$$
2. *Soit* $\varepsilon > \frac{1}{2}$*. Alors on a :*
$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) = P([X - E(X) \geqslant \varepsilon] \cup [X - E(X) \leqslant -\varepsilon]) = P\left(\left[X \geqslant \varepsilon + \frac{1}{2}\right] \cup \left[X \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\right]\right).$$
Or, $\varepsilon > \frac{1}{2}$ *donc :*
$$\left[X \geqslant \varepsilon + \frac{1}{2}\right] \cup \left[X \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon\right] \subset [X \geqslant 1] \cup [X \leqslant 0].$$
Ainsi on trouve :
$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P([X \geqslant 1] \cup [X \leqslant 0]) = 0.$$
Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est très mauvaise ici !

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncé.***)

Soit X *une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. La variable* X *possède un moment d'ordre* 2 *donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme* $E(X) = 0$ *et* $V(X) = 1$ *on obtient :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Soit $x < 0$*. On a :*

$$P(|X| \geqslant x) = P([X \geqslant x] \cup [X \leqslant -x]) = P(X \geqslant x) + P(X \leqslant -x)$$

car $[X \geqslant x]$ *et* $[X \leqslant -x]$ *sont incompatibles. La variable* X *suivant la loi normale centrée réduite, on en déduit :*

$$\begin{aligned} P(|X| \geqslant x) = P(X \geqslant x) + P(X \leqslant -x) &= 1 - P(X < x) + F_X(-x) \\ &= 1 - P(X \leqslant x) + F_X(-x) \\ &= 1 - F_X(x) + F_X(-x) \\ &= 2 - 2F_X(x). \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Finalement on a donc en prenant $\varepsilon = x$ *dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :*

$$P(|X| \geqslant x) = 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

c'est-à-dire :

$$1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *On a alors :*

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leqslant x) = P(e^{\frac{1}{n}}X \leqslant x) = P(X \leqslant e^{-\frac{1}{n}}x) = F_X(e^{-\frac{1}{n}}x).$$

- *Comme* X *est à densité,* F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}}x = x.$$

Par continuité de F_X *en* x *on en déduit donc :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(e^{-\frac{1}{n}}x) = F_X(x).$$

- *Ainsi,* $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

- *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
  — *Si* $x \leqslant 0$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{X_n}(x) = 0$. *Ainsi :* $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 0$.
  — *Si* $x > 0$ *alors il existe un rang* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que :*

$$\forall n \geqslant N \quad \frac{1}{n} < x.$$

  Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $F_{X_n}(x) = 1$ *et donc :* $\lim_{x\to+\infty} F_{X_n}(x) = 1$.

  On en conclut que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to+\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- *Soit* X *suivant la loi certaine de paramètre* 0. *Alors on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} F_{X_n}(x)$ *et* $F_X(x)$ *coïncident en tout point* x *non nul c'est-à-dire en tout point* x *où* F_X *est continue.*
Par conséquent :

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *la variable* X_n *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *de même qu'une variable* X *de loi certaine de paramètre* 0. *On va donc utiliser la caractérisation de la convergence en loi pour les variables aléatoires à valeurs entières.*
Soit $k \in \mathbb{Z}$.

- *Si* $k < 0$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $P(X_n = k) = 0$. *Donc on a*

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0 = P(X = k).$$

- *Si* $k = 0$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $P(X_n = k) = e^{-\frac{1}{n}}$. *Donc on a*

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = 1 = P(X = 0).$$

- *Si* $k > 0$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a* $P(X_n = k) = \frac{1}{n^k k!}e^{-\frac{1}{n}}$. *Donc on a*

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0 = P(X = k).$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ *on a :* $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Donc $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi* $\mathscr{B}(p)$*. Alors pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *les variables* S_n *et* $\sum_{k=1}^{n} X_k$ *ont la même loi.*

Or d'après le théorème central limite, on sait que :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

où X *suit la loi normale centrée réduite.*

Notons F_n *la fonction de répartition de* $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}}$*. Comme* 0 *est un point de continuité de* F_X *on a donc :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(0) = F_X(0).$$

Or, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *:*

$$F_n(0) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant np\right) = F_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(np) = F_{S_n}(np).$$

Ainsi on obtient : $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant np) = F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. (a) *Pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$, X_i *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{6}$.

   (b) *Vu l'expérience aléatoire, on peut supposer les lancers indépendants et* S_n *suit donc la loi* $\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{6}\right)$*. En particulier :*

   $$E(S_n) = \frac{n}{6} = 600 \quad \textit{et} \quad V(S_n) = n\frac{1}{6}\frac{5}{6} = 500.$$

2. (a) *D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout* $\varepsilon > 0$ *:*

   $$P(|S_n - 600| > \varepsilon) \leqslant \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

   (b) *En passant au complémentaire, pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a :*

   $$P(600-\varepsilon \leqslant S_n \leqslant 600+\varepsilon) = P(|S_n-600| \leqslant \varepsilon) = 1 - P(|S_n - 600| > \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{500}{\varepsilon^2}.$$

   (c) *En prenant* $\varepsilon = 60$ *dans la question précédente on obtient :* $P(540 \leqslant S_n \leqslant 660) \geqslant 1 - \frac{500}{60^2} = \frac{31}{36}$.

3. *Avec le TCL.*

   (a) *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$*. Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *on a :*

   $$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nm + b\sqrt{n}) = P\left(a \leqslant \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\right).$$

   Donc en prenant $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{6} = \sqrt{V(X)}$ *et* $m = \frac{1}{6} = E(X)$*, on sait d'après le corollaire du TCL que :*

   $$\lim_{n\to+\infty} P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nm + b\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

   Ainsi, pour n *grand (par exemple* $n = 3600$*) on a bien l'approximation demandée :*

   $$P(nm + a\sigma\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant nm + b\sqrt{n}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

   (b) *Avec* $n = 3600$ *on a, pour tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *l'approximation :*

   $$P(600 + 10a\sqrt{5} \leqslant S_n \leqslant 600 + 10b\sqrt{5}) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

Ainsi, en prenant $a = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ *et* $b = \frac{6}{\sqrt{5}}$ *on obtient l'approximation :*

$$\mathrm{P}(540 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 660) \simeq \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(2.68) - 1.$$

Or $\Phi(2.68) \simeq 0.9963$ *donc on obtient :*

$$\mathrm{P}(540 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 660) \simeq 0.9926.$$

En déduire une approximation de $\mathrm{P}(540 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 660)$. *On pourra utiliser* $\frac{6}{\sqrt{5}} \simeq 2,68$.