4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

D'après la définition de « o », $u_n = o(0)$ si et seulement si il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \epsilon_n \times 0$. Autrement, une suite est un petit o de 0 si et seulement si u_n est nul à partir d'un certain rang.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

Toutes les suites sont non nulles à partir d'un certain rang, on peut donc utiliser la caractérisation.

1. *Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$. Donc $v_n = o(u_n)$.*
2. *Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. Donc $u_n = o(v_n)$.*
3. *On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{b-a}} = 0$ car $b-a>0$. Donc $u_n = o(v_n)$.*

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Les termes de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sot non nuls et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{e^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\ln n}} &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln n}} \times \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1}\\ &= \frac{\ln n}{n} \times \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1}.\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc, par somme, quotient et produit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{n}{3^n}}{\frac{\ln n}{e^n}+\frac{\ln n}{2^n}+1} = 1 \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Ainsi, $u_n = o(v_n)$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda \neq 0$ un réel non nul. Supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Par conséquent, comme $\lambda \neq 0$, on a

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \left(\frac{1}{\lambda}\epsilon_n\right)(\lambda v_n)$$

   avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda}\epsilon_n = \dfrac{1}{\lambda} \lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$. Donc $u_n = o(\lambda v_n)$.
4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suite et supposons que $u_n = o(v_n)$. Il existe donc un rang n_0 et une suite $(\epsilon_n)_{n\geqslant n_0}$ convergeant vers 0 tels que*

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = \epsilon_n v_n.$$

   Donc,

   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n w_n = \epsilon_n v_n w_n.$$

   Ainsi, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *La suite* $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes non nuls et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^2}{e^n}+\frac{n^3}{e^n}\right)=1$$

car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n}=0$ *par croissance comparée. D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien*

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^n.$$

2. *De même, la suite* $(e^n+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *est à termes non nuls et*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^3}{e^n+n^2}\right)=1$$

car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n+n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n}\times\frac{1}{1+\frac{n^2}{e^n}}=0.$$

D'après la caractérisation de l'équivalence on a bien

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^n+n^2.$$

3. *En revanche, pour tout* $n\geqslant 1$*, on a*

$$\frac{u_n-e^n}{n^2}=\frac{n^2+n^3}{n^2}$$

donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-e^n}{n^2}=+\infty$*. Par conséquent,* u_n *n'est pas équivalent à* e^n-n^2*. En particulier, on ne peut pas soustraire ou additionner membre à membre des équivalents!*