TD 4-Familles de vecteurs

Exercice 1

Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$*, soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La famille (A, B, C) *est-elle libre ?*

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{F}$ *est libre ou liée et génératrice ou non.*

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1,-1,2),(2,1,-1),(-1,-5,8))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{F} = (X^2+2X, X^2+X+1, X+2)$.
3. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
4. *Dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = ((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (4^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $k \in \{0,\dots,n\}$*, on note* f_k *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = e^{-kx}.$$

Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ *est libre.*

Exercice 4

On note F *l'ensemble des suites de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

1. *Montrer que* F *est un espace vectoriel (pour les lois usuelles).*
2. *Déterminer deux réels* $r_1 < r_2$ *tels que, pour tout* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$*, il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$
3. *On définit deux suites* (a_n) *et* (b_n) *par*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = r_1^n \quad \text{et} \quad b_n = r_2^n.$$
   (a) *Justifier que la famille* $((a_n),(b_n))$ *est une famille génératrice de* F.
   (b) *Montrer que* $|r_1| < 1$ *et* $|r_2| > 1$. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.
   (c) *Monter que la famille* $((a_n),(b_n))$ *est une base de* F.
4. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ *la suite telle que* $v_0 = 2$ *et* $v_1 = 3$. *Déterminer les coordonnées de* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans la base* $((a_n),(b_n))$.

Exercice 5 (*EML 2006*)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E *l'ensemble des matrices carrées* M *d'ordre deux telles que* $AM = MD$.

1. *Vérifier que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. *Soit* $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ *une matrice carrée d'ordre deux. Montrer que* M *appartient à* E *si et seulement si* $z = 0$ *et* $y = t$.
3. *Montrer que la famille* (U, A) *est une base de* E.
4. *Calculer* UA. *Est-ce un élément de* E *?*

Exercice 6 (*Ecricome 2002*)

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*, on considère le sous-ensemble* E *des matrices* $M(a,b)$ *définies par :*

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \{M(a,b) \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. *On note* $A = M(1,0)$.
   (a) *Calculer* A^2.
   (b) *En déduire que* A *est une matrice inversible et donner* A^{-1} *en fonction de* A.
2. *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. *Donner une base de* E.

Exercice 7

Dans chaque cas, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et donner les coordonnées de u dans cette base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((3,1,3),(2,2,1),(4,3,2))$ *et* $u = (3,2,1)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ *et* $u = (3,2,1)$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ *et* $u = X^2 + X + 1$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ *et* $u = I_2$.

Exercice 8

Déterminer une base des espaces suivants :

1. $\{(x+y, y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$,
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\}$,
3. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1)\}$,
4. $\{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$,
5. $\left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$,
6. $\{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$,
7. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d \right\}$.