Chapitre 6 : Intégration, rappels et compléments

1 Intégration sur un segment : rappels

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction définie sur I par

$$x \in I \longmapsto F(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, en effet :

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que $a < b$. Soit F une primitive de f sur I.

1. Le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
2. On appelle **intégrale de** f **sur le segment** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ ce réel :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. *On note souvent :*
$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$
2. *Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est muette, ainsi :*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$
3. *On a :*
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)dt.$$

4. *Par convention,* $\int_a^a f(t)dt = 0$.

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. *Linéarité* : on a
$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt \;=\; \int_a^b f(t)dt \;+\; \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : on a
$$\int_a^b f(t)dt \;=\; \int_a^c f(t)dt \;+\; \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\; f(t) \geqslant 0 \implies \int_a^b f(t)dt \;\geqslant\; 0.$$
4. *Croissance* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\; f(t) \geqslant g(t) \implies \int_a^b f(t)dt \;\geqslant\; \int_a^b g(t)dt.$$
5. *Inégalité triangulaire* : si $a \leqslant b$ alors
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \;\leqslant\; \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment $[a,b]$ avec $a < b$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$.
Alors :
$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = 0.$$

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

1.2 Techniques de calcul

- **Calcul de primitives « à vue ».**

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a,\, a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\, n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n,\, n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a,\, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt.$

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}dt.$
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds.$

▸ **Intégration par parties.**

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Exemple 2

Calculer $\int_1^3 t^2 \ln(t)dt$.

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. *Calculer* $\int_1^x \ln(t)dt$.

▸ **Changement de variables.**

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Exemple 3

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ *à l'aide du changement de variable* $u = e^t$.

1. *Transformer* du *avec la formule* $du = u'(t)dt$.

2. *Transformer l'expression sous l'intégrale.*

3. *Transformer les bornes.*

4. *Rédaction finale :*

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction impaire continue sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que pour tout* $a \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(-t)dt$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt.$$

Montrer que f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer sa dérivée.*

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm\infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où a est un réel.

- Si la limite suivante **existe et est finie**

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt,$$

on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $[a, +\infty[$ et on la note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

- Si la limite $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a, +\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$,*
2. *on introduit $x \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

Exemple 4

1. *Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$.*

2. *Étudier la nature de* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

3. *Étudier la nature de* $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Plus généralement :

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
2. *Intégrale de Riemann en* $+\infty$: pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Démonstration :

■

Proposition 6 (Propriétés des intégrales impropres)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Soient $c \in [a, +\infty[$ et λ un réel.

1. *Linéarité* : si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ convergent alors $\int_a^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))dt$ converge et
$$\int_a^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt + \lambda \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge et
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{c} f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si f est positive sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt \geqslant 0$.
4. Si f est positive sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, +\infty[,\ f(t) = 0.$$

Méthode 2 (*Techniques de calcul*)

On peut utiliser les techniques de calcul comme les primitives « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties pour calculer des intégrales impropres :

1. *on se ramène à une intégrale sur un segment : on considère $x \in [a, +\infty[$ et on s'intéresse à l'intégrale sur le segment $[a, x]$),*
2. *on utilise la technique voulue (primitive « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties) dans cette intégrale sur un segment,*
3. *on passe à la limite quand x tend vers $+\infty$.*

Exemple 5

1. Étudier $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt$.

2. Étudier $\int_1^{+\infty} \ln(t) dt$.

3. *Étudier* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ *avec le changement de variable* $u = \frac{1}{t}$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u} du$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ *en posant* $u = \ln(t)$.

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$ où b est un réel.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $]-\infty, b]$ et on la note $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Les propriétés de la proposition 6 sont encore valables pour les intrégrales impropres en $-\infty$.

Exemple 6

Étudier $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}(x+1)e^x dx$.

2.2 Intégrales doublement impropres

Définition 4 (Convergence d'une intégrale doublement impropre)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ convergent, on dit que l'**intégrale doublement impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** et on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt.$$

Sinon, on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 3

Soit f *définie sur* $\mathbb{R}$*. Étudier la nature de l'intégrale doublement impropre* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$*, c'est déterminer si elle converge ou non. En pratique on prend n'importe quel* $c \in \mathbb{R}$ *et on étudie la nature des intégrales impropres* $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ *avec les méthodes précédentes.*

Exemple 7

Étudier la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$.

Les propriétés de la propostion 2 sont encore valables pour les intrégrales doublement impropres.

3 Convergence absolue

Définition 5 (Convergence absolue)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.
  On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.
- Soit f une fonction continue sur $]-\infty, a]$.
  On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{a} |f(t)|dt$ converge.
- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
  On dit que l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Proposition 7

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente. Dans ce cas :

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f(t)|dt.$$

Le résultat analogue est valable pour les intégrales impropres en $-\infty$ et pour les intégrales doublement impropres.

Remarque 4

La réciproque est fausse : il existe des intégrales qui ne sont pas absolument convergentes mais qui sont convergentes.

4 Objectifs

1. Connaître les primitives de références.
2. Connaître la nature des intégrales impropres de référence.
3. Savoir étudier la nature d'une intégrale impropre ou doublement impropre.
4. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable. Appliquer ces techniques à l'étude d'intégrales impropres.