Exercice 1

Ici l'ensemble des issues possibles Ω est l'ensemble des parties de 2 éléments d'une ensemble à 10 éléments. Ainsi $Card(\Omega) = \binom{10}{2}$. La probabilité sur Ω est la probabilité uniforme.

1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ car on tire deux pièces et qu'il y a 3 pièces défectueuses.

* Le nombre d'issues pour lesquels $X=0$

Une issue pour laquelle $X=0$ est une issue où les 2 pièces tirées sont parmi les 7 pièces non défectueuses. Ainsi $Card([X=0]) = \binom{7}{2}$ donc:

$$P([X=0]) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

* Nombre d'issues pour lesquels $X=1$

Un tirage donne $X=1$ s'il y a 1 pièce défectueuse et 1 pièce non défectueuse. Il y $\binom{3}{1}$ possibilités pour la pièce défectueuse et $\binom{7}{1}$ possibilités pour la non défectueuse.

Ainsi $Card([X=1]) = \binom{3}{1}\binom{7}{1} = 21$

et $P([X=1]) = \frac{21}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$

* Nombre d'issues réalisant $X=2$

Un tirage donne $X=2$ si les 2 pièces sont défectueuses: il y a $\binom{3}{2}$ possibilités. Ainsi $Card([X=2]) = \binom{3}{2} = 3$

et $P([X=2]) = \frac{3}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$

Finalement

$i \in X(\Omega)$	0	1	2
$P(X=i)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

X est à support fini donc possède une espérance et une variance. On a:

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ d'après la formule de Konig-Huygens

$$= 0^2 \times \frac{7}{15} + 1^2 \times \frac{7}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{11}{15} - \frac{9}{25} = \frac{28}{75}$$

Exercice 2 : corrigé en TD

Exercice 3 :

X compte le nombre de fois où on obtient un nombre pair dans une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli dont le succès « obtenir un nombre pair » a une probabilité $\frac{1}{2}$.

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

$E(X) = \frac{n}{2}$ et $V(X) = \frac{n}{4}$

Exercice 4 : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1) $[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X=i]$. Les événements $([X=i])_{i \geq k+1}$ étant 2 à 2 incompatibles, par sigma-additivité de P on a :

* $\sum_{i \geq k+1} P(X=i)$ converge
* $\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) = P(X > k)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > k$. On a

$$\sum_{i=k+1}^{N} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{N} p(1-p)^{i-1} \overset{[j=i-k]}{=} \sum_{j=1}^{N-k} p(1-p)^{j+k-1}$$

$$= p(1-p)^{k-1} \times \sum_{j=1}^{N-k} (1-p)^j$$

Ainsi

$$\sum_{i=k+1}^{N} P(X=i) = p(1-p)^{k-1} \times (1-p) \times \frac{1-(1-p)^{N-k}}{1-(1-p)} \quad \text{car } 1-p \neq 1$$

$$= (1-p)^k \times (1-(1-p)^{N-k})$$

Or comme $p \in]0,1[$, $1-p \in]0,1[$ donc

$$\lim_{N \to +\infty} 1-(1-p)^{N-k} = 1$$

Ainsi,

$$P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i) = \lim_{N \to +\infty} (1-p)^k (1-(1-p)^{N-k}) = (1-p$$

2) Soit $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$P_{[X > \ell]}(X > k+\ell) = \frac{P([X > k+\ell] \cap [X > \ell])}{P([X > \ell])}$$

$$= \frac{P([X > k+\ell])}{P([X > \ell])} \quad \text{car } [X > k+\ell] \cap [X > \ell] = [X > k+\ell] \text{ puisque } \ell \in \mathbb{N}^*.$$

$$= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^\ell}$$

$$= (1-p)^k = P(X > k).$$

Exercice 5

1) Y est à support fini donc possède une espérance et

$$E(Y) = E(m - X) = m - E(X)$$
$$= m - mp = m(1-p)$$

2) Y est à support fini donc possède une espérance. De plus par le théorème de transfert on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{m} 2^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2^k p^k (1-p)^{m-k}$$
$$= (2p+1-p)^m$$
$$= (1+p)^m$$

3) Montrons que $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} P(X=k)$ est absolument convergente. Comme elle est à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est convergente. Or, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k+1} P(X=k) = \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} P(X=k) = \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$
$$\overset{\ell = k+1}{=} e^{-\lambda} \sum_{\ell=1}^{m+1} \frac{\lambda^{\ell-1}}{\ell!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \times \sum_{\ell=1}^{m+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{\ell=0}^{m+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} - 1 \right)$$

Or $\left(\sum_{\ell=0}^{m+1} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^λ donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} P(X=k) \right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Cela montre que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} P(X=k)$ converge absolument. Ainsi Y possède une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} - 1 \right)$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1)$$

Exercice 6

1) a) $[X=0]$ = [le joueur A a tiré une boule blanche au 1e essai]

donc $P([X=0]) = \frac{b}{n+b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$[X=1]$ = [joueur A tire une noire puis une blanche]

comme le tirage est sans remise on a:

$P([X=1]) = P_{[\text{Noire au } 1^e]}(\text{Blanche au } 2^e)\, P(\text{Noire en } 1^e)$

$= \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$[X=2]$ = [A tire une noire puis une noire puis une blanche]

d'après la formule des probabilités composées on a:

$P([X=2]) = P(N_1)\, P_{N_1}(N_2)\, P_{N_1 \cap N_2}(B_3)$

où N_i : tirer une noire au i^e essai de A

B_i : — " — blanche — " —.

donc $P([X=2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$

b) Remarquons que $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ car il n'y a que 2 boules noires. Ainsi

$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

c) D'après la formule des probabilités totales :

$P(Y=0) = P_{[X=0]}(Y=0)\, P(X=0) + P_{[X=1]}(Y=0)\, P(X=1) + P_{[X=2]}(Y=0)\, P($

$= \frac{1}{2} P_{[X=0]}(Y=0) + \frac{1}{3} P_{[X=1]}(Y=0) + \frac{1}{6} P_{[X=2]}(Y=0)$

Sachant, $[X=0]$ l'urne contient 2 boules noires et 1 boule blanche. donc

$P_{[X=0]}(Y=0) = P_{[X=0]}(\text{Tirer une blanche}) = \frac{1}{3}$

Sachant $[X=1]$, l'urne contient 1 noire et 1 blanche

donc $P_{[X=1]}(Y=0) = \frac{1}{2}$

Sachant $[X=2]$, l'urne contient 1 blanche donc

$P_{[X=2]}(Y=0) = 1$

Ainsi,

$P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$P([X=0]\cap[Y=i]) = P_{[X=0]}(Y=i)\,P(X=0)$$
$$= \frac{1}{2} P_{[X=0]}(Y=i)$$

Or sachant $[X=0]$, le joueur B tire une infinité de fois dans une urne contenant 2 boules noires et 1 boule blanche et $Y+1$ donne le rang de la 1e boule blanche

Ainsi $P_{[X=0]}(Y=i) = \left(\frac{2}{3}\right)^i \times \frac{1}{3}$

d'où $P([X=0]\cap[Y=i]) = \frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{3}\right)^i$

De même,

$$P([X=1]\cap[Y=i]) = P_{[X=1]}(Y=i)\,P(X=1)$$
$$= \frac{1}{3} P_{[X=1]}(Y=i)$$
$$= \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

et $P([X=2]\cap[Y=i]) = 0$ car $i\in\mathbb{N}^*$ et que si $[X=2]$ il n'y a plus de boule noire dans l'urne lors du tour du joueur B.

c) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$\forall i\in\mathbb{N}^*$, $P(Y=i) = P(X=0, Y=i) + P(X=1, Y=i) + P(X=2, Y=i)$

$$= \frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^i$$

et $P(Y=0) = 1/2$

Les séries $\sum_{i\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^i$ et $\sum_{i\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ sont des séries géométriques convergentes ($\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$) de sommes :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{1-2/3} - 1 = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$$

Ainsi $\sum_{i\geq 1} P(Y=i)$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=i) = \frac{1}{6}\times 2 + \frac{1}{6}\times 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

donc $\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y=i) = \frac{1}{2} + P(Y=0) = 1$.

f) Montrons que $\sum_{i\geq 0} i\,P(Y=i)$ est absolument converg[ente]

Comme elle est à termes positifs, il suffit pour cela de montrer qu'elle est convergente.

Q2, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

$$iP(Y=i) = \frac{1}{6} \times i \times \left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6} i \times \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= \frac{2}{18} \times \underbrace{i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}}_{U_i} + \frac{1}{12} \underbrace{i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}_{V_i}$$

La série $\sum_{i \geq 1} iP(Y=i)$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées 1e $\sum_{i \geq 1} U_i$ et $\sum_{i\geq 1} V_i$ qui sont convergentes car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$.

Ainsi $\sum_{i\geq 1} iP(Y=i)$ est convergente et absolument convergente (car à termes positifs).

Ainsi Y possède une espérance et

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(Y=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} iP(Y=i)$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{(1-2/3)^2} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{(1-1/2)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} = 4/3$$

2) On note N_i : A tire une noire au i^e tirage

a) B_i : ——"—— blanche ——"——

Alors : soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$P(X=k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k \cap B_{k+1})$$

d'après la formule des probabilités composées on en déduit

$$P(X=k) = P(N_1) P_{N_1}(N_2) P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \cdots P_{N_1 \cap \ldots \cap N_k}(B_{k+1})$$

$$= \frac{n}{n+b} \times \frac{n-1}{n+b-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n+b-(k-1)} \times \frac{b}{n+b-k}$$

$$= \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n+b-i}\right) \times \frac{b}{n+b-k}$$

D'autre part

$$\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)! \times (n-k)!} \times \frac{b!\, n!}{(n+b)!}$$

$$= b \times \frac{(n-k+b-1)!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{(n+b)!}$$

$$= b \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(n-k+b-1)!}{(n+b)!}$$

$$= b \times n \times (n-1) \times (n-(k-1)) \times \frac{1}{(n+b)(n+b-1)\cdots(n+b-k)}$$

$$= P(X=k).$$

b) $X(\Omega) = [\![0, m]\!]$ car il n'y a que m boules noires. Donc

$$\sum_{k=0}^{m} P(X=k) = 1$$

Comme $P(X=0) = \frac{b}{m+b} = \frac{\binom{m+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m-k+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}} = 1 \quad \text{càd} \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m-k+b-1}{b-1} = \binom{m+b}{b}$$

c) $k\binom{k+a}{a} = k\frac{(k+a)!}{a!\,k!} = k\frac{(k+a)!}{(a+1)!\,k!} \times$

$$= \frac{(k+a)!}{(a+1)!(k-1)!} \times (a+1)$$

$$= (a+1)\binom{k+a}{a+1}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=0}^{N}(a+1)\binom{k+a}{a+1} = \sum_{k=1}^{N}(a+1)\binom{k+a}{a+1} \quad \text{car} \binom{a}{a+1} = 0$$

$$= (a+1)\sum_{k=1}^{N}\binom{k+a}{a+1}$$

$$= (a+1)\sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+a+1}{a+1}$$

par changement de variable.

d) Par le théorème de transfert on a :

$$E(m-X) = \sum_{k=0}^{m}(m-k)P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(m-k)\frac{\binom{m-k+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}}$$

$$= \frac{1}{\binom{m+b}{b}}\sum_{S=0}^{m} S\binom{S+b-1}{b-1}$$ en faisant le changement de variable $S = m-k$

$$= \frac{1}{\binom{m+b}{b}}(b-1+1)\sum_{k=0}^{m-1}\binom{k+b}{b}$$ d'après la question précédente

$$= \frac{b}{\binom{m+b}{b}} \times \binom{m-1+b+1}{b+1}$$ d'après 2.a)

$$= b \times \frac{(m+b)!}{(1+b)!(m-1)!} \times \frac{b!\,m!}{(m+b)!} = \frac{bm}{1+b}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(m-X) = E(m) - E(X) = m - E(X)$$

donc $E(X) = m - \frac{bm}{b+1} = \frac{m}{b+1}$

e) Soit $k \in [\![1, m]\!]$ et $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=k, Y=i) = P(X=k) P_{[X=k]}(Y=i)$$

$$= \frac{\binom{m-k+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}} P_{[X=k]}(Y=i)$$

Or sachant $[X=k]$, il y a $m-k$ boules noires dans l'urne et $b-1$ blanches lors des tirages de B.

donc
$$P_{[X=k]}(Y=i) = \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{m-k+b-1}$$

donc
$$P(X=k, Y=i) = \frac{\binom{m-k+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}} \times \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i \frac{b-1}{m-k+b-1}$$

On vérifie que cette formule est vraie pour $k=0$

f) Il s'agit d'une série géométrique dérivée première de raison $\dfrac{m-k}{m+b-k-1}$.

Or comme $k \in [\![0, m]\!]$ et $b \geq 2$ on a
$$0 \leq \frac{m-k}{m-k+b-1} < 1$$

donc la série converge et sa somme est égale à

$$\frac{1}{\left(1-\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^2} = \frac{(m-k+b-1)^2}{(b-1)^2}$$

g) D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'évènements $([X=k])_{k \in [\![0, m]\!]}$ on a ; pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y=i) = \sum_{k=0}^{m} P(X=k, Y=i)$$

$$= \frac{b-1}{(m-k+b-1)} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i \frac{\binom{m-k+b-1}{b-1}}{\binom{m+b}{b}}$$

$$= \frac{b-1}{m-k+b-1} \sum_{k=0}^{m} P(X=k) \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i$$

Pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, la série

$$\sum_{i \geq 0} i \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i P(X=k)$$ converge et sa somme

vaut $$\frac{m-k}{m-k+b-1} \times P(X=k) \times \frac{(m-k+b-1)^2}{(b-1)^2} = \frac{(m-k)(m-k+b-1)}{(b-1)^2} P(X=$$

d'après la question précédente.

Or $\sum_{i \geq 0} i P(Y=i)$ est combinaison linéaire des séries

$$\sum_{i \geq 0} i \left(\frac{m-k}{m-k+b-1}\right)^i P(X=k)$$ pour $k = 0, \ldots, m$.

donc $\sum_{i\geq 0} i\,P(Y=i)$ converge et sa somme est

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{b-1}{m-k+b-1} \times \frac{(m-k)(m-k+b-1)}{(b-1)^2} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{m-k}{b-1} P(X=k)$$

Comme $\sum_{i\geq 0} i\,P(Y=i)$ est à termes positifs et cv, elle est absolument cv. Donc Y possède une espérance et

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m-k}{b-1} P(X=k) = \frac{1}{b-1} \mathbb{E}(m-X)$$

$$= \frac{mb}{b^2-1}$$

Exercice 7

1) a) $[T=k] = [X_1 \neq 0] \cap \dots \cap [X_{k-1} \neq 0] \cap [X_k = 0]$

$= [X_1=1] \cap \dots \cap [X_{k-1}=k-1] \cap [X_k=0]$

b) $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X_1=1) = p$ donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

c) Soit $k \geq 2$.

$P(T=k) = P([X_1=1] \cap \dots \cap [X_{k-1}=1] \cap [X_k=0])$

D'après la formule des probabilités composées on a :

$$P(T=k) = P(X_1=1)\, P_{[X_1=1]}(X_2=2) \dots P_{[X_1=1]\cap\dots\cap[X_{k-2}=k-2]}(X_{k-1}=k-1)$$
$$\times P_{[X_1=1]\cap\dots\cap[X_{k-1}=k-1]}(X_k=0)$$

$$= P(X_1=1)\, P_{[X_1=1]}(X_2=2) \dots P_{[X_{k-2}=k-2]}(X_{k-1}=k-1)\, P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k$$

$$= p \times p \times \dots \times p \times p \times (1-p)$$

$$= p^{k-1}(1-p)$$

De plus $P(T=1) = P(X_1=0) = 1-p$

Donc $T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)$

2a) Initialisation : $X_0(\Omega) = \{0\}$

Hérédité : supposons que $X_m(\Omega) = [\![0,m]\!]$

alors, pour tout $k \in [\![1,m+1]\!]$ on a :

$$P(X_{m+1}=k) \geq P(X_{m+1}=k, X_m=k-1) = P(X_m=k-1)\, P_{[X_m=k-1]}(X_{m+1}$$

$$\geq p\, P(X_m=k-1) > 0 \quad \text{car } k-1 \in [\![0,m]\!] = X_m(\Omega)$$

et $P(X_{m+1}=0) \geq P(X_{m+1}=0, X_m=m) = P(X_m=m)\, P_{[X_m=m]}(X_{m+1}=0)$

$$= (1-p)\, P(X_m=m) > 0$$

Ainsi $[\![0,m+1]\!] \subset X_{m+1}(\Omega)$

De plus, il est clair que $X_{m+1}(\Omega) \subseteq [\![0,m+1]\!]$ donc

$X_{m+1}(\Omega) = [\![0,m+1]\!]$

Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}$, $X_m(\Omega) = [\![0,m]\!]$.

2) b) D'après la formule des probabilités totales

$$P(X_m=0) = \sum_{k=0}^{m-1} P(X_{m-1}=k) P_{[X_{m-1}=k]}(X_m=0)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (1-p) P(X_{m-1}=k) = (1-p)\sum_{k=0}^{m-1} P(X_{m-1}=k)$$

$$= (1-p) \quad \text{car } X_{m-1}(\Omega) = [\![0,m-1]\!]$$

3) a) Soit $m \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, m+1]\!]$

$$P(X_{m+1}=k) = P(X_m=k-1) P_{[X_m=k-1]}(X_{m+1}=k)$$

$$= p \times P(X_m=k-1)$$

b) ~~Soit $m \in \mathbb{N}^*$~~

Montrons par récurrence que : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, "$\forall k \in [\![0,m-1]\!]$ on a $P(X_m=k) = p^k(1-p)$"

<u>Initialisation</u> : $m=1$; on a bien $P(X_{1}=0) = (1-p)$

<u>Hérédité</u> : on suppose que pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ on a "$\forall k \in [\![0,m-1]\!]$, $P(X_m=k) = p^k(1-p)$"

Soit $k \in [\![0,m]\!]$ et montrons que $P(X_{m+1}=k) = p^k(1-p)$

<u>si $k \neq 0$</u> : d'après la question précédente

$$P(X_{m+1}=k) = p\, P(X_m=k-1)$$

Or $k-1 \in [\![0,m-1]\!]$ donc par hypothèse de récurrence $P(X_m=k-1) = p^{k-1}(1-p)$

Ainsi $P(X_{m+1}=k) = p \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p)$

<u>si $k=0$</u> : d'après 2.a) $\quad P(X_{m+1}=0) = 1-p = p^0(1-p)$

Donc la propriété est vraie au rang $m+1$.

<u>Conclusion</u> : par récurrence, le résultat est démontré

De même, par 3)a) on a :

$P(X_{m+1}=m+1) = p\,P(X_m=m)$ donc la suite $(P(X_m=m))_{m \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de 1e terme $P(X_0=0)=1$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad P(X_m=m) = p^m.$$

En effet, $P(X_m=m) = P(X_1=1, \dots, X_m=m)$

$$= P(X_1=1) P_{[X_1=1]}(X_2=2) \dots P_{[X_1=1,\dots,X_{m-1}=m-1]}(X_m=m)$$

$$= p \times p \cdots \times p.$$

$$= p^m.$$

3)c) $$\sum_{k=0}^{m} P(X_m=k) = \sum_{k=0}^{m-1} p^k(1-p) + p^m$$

$$= (1-p) \times \frac{1-p^m}{1-p} + p^m \qquad \text{car } p \in]0,1[$$

$$= 1.$$

4) a) Soit $m \geq 2$ et considérons

$$f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{m-1} x^k$$

f est un polynôme donc est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in]0,1[, \ f'(x) = \sum_{k=1}^{m-1} k x^{k-1}$$

D'autre part,

$$f(x) = \frac{1-x^m}{1-x} \quad \text{car } x \in]0,1[.$$

donc $f'(x) = \dfrac{-mx^{m-1}(1-x)+1-x^m}{(1-x)^2} = \dfrac{(m-1)x^m - mx^{m-1}+1}{(1-x)^2}$

Par conséquent, pour tout $x \in]0,1[$

$$\sum_{k=1}^{m-1} k x^k = \frac{(m-1)x^m - mx^{m-1}+1}{(1-x)^2}$$

En prenant $x = p \in]0,1[$ on obtient le résultat

b) X_m est de support finie donc possède une espérance.

$$E(X_m) = \sum_{k=0}^{m} k\, P(X_m = k) = \sum_{k=1}^{m-1} k p^k (1-p) + m p^m$$

d'où

$$E(X_m) = p(1-p) \times \frac{(m-1)p^m - mp^{m-1}+1}{(1-p)^2} + mp^m$$

$$= \frac{(m-1)p^{m+1} - mp^m + p + mp^m(1-p)}{1-p} = \frac{-p^{m+1}+p}{1-p} = \frac{p(1-p^m)}{1-p}$$

5) a)

$$E(X_{m+1}^2) = \sum_{k=0}^{m+1} k^2 P(X_{m+1}=k) = \sum_{k=1}^{m+1} p\, P(X_m = k-1) \times k^2 + 0$$

$$= p \sum_{k=1}^{m+1} k^2 P(X_m = k-1)$$

$$= p \sum_{\ell=0}^{m} (\ell+1)^2 P(X_m = \ell) \quad \text{en posant } \ell = k-1$$

$$= p\left(\sum_{\ell=0}^{m} \ell^2 P(X_m=\ell) + 2 \sum_{\ell=0}^{m} \ell P(X_m = \ell) + \sum_{\ell=0}^{m} P(X_m = \ell) \right)$$

$$= p\left(E(X_m^2) + 2E(X_m) + 1\right)$$

b) $u_{m+1} = E(X_{m+1}^2) + (2m+1)\dfrac{p^{m+2}}{1-p}$

$$= p\left(E(X_m^2) + 2E(X_m) + 1\right) + (2m+1)\frac{p^{m+2}}{1-p}$$

$$= pE(X_m^2) + 2p \times \frac{p(1-p^m)}{1-p} + p + (2m+1)\frac{p^{m+2}}{1-p}$$

$$= p\left(E(X_m^2) + \frac{(2m-1)p^{m+1}}{1-p}\right) + 2p\frac{p(1-p^m)}{1-p} + p + 2\frac{p^{m+2}}{1-p}$$

$$= p u_m + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

5)c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmetico-géométrique

* soit $x\in\mathbb{R}$

$$x = px + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff (1-p)x = \frac{p(1+p)}{1-p}$$
$$\iff x = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \quad \text{car } 1-p\neq 0$$

* Posons $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = u_n - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

alors

$\forall n\in\mathbb{N}$
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$
$$= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$
$$= pu_n - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}\,p$$
$$= pv_n$$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = p^n v_0 = p^n\left(u_0 - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right)$

et $u_0 = E(X_0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad v_n = -p^n\left(\dfrac{p(1-p)+p(1+p)}{(1-p)^2}\right) = -p^n \times \dfrac{2p}{(1-p)^2}$

puis $\quad u_n = v_n + \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{p(1+p-2p^n)}{(1-p)^2}$

puis

$$E(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$$
$$= \frac{p(1+p-2p^n)}{(1-p)^2} - \frac{(2n-1)p^{n+1}}{1-p}$$
$$= \frac{p(1+p-2p^n) - (2n-1)p^{n+1}(1-p)}{(1-p)^2}$$
$$= \frac{p(1+p-2p^n-(2n-1)p^n+(2n-1)p^{n+1})}{(1-p)^2}$$
$$= \frac{p(1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1})}{(1-p)^2}$$

d) Par la formule de Koenig-Huygens

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$
$$= \frac{p(1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1})}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2}$$
$$= \frac{p}{(1-p)^2}\left[1+p-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1} - p(1-2p^n+p^{2n})\right]$$
$$= \frac{p}{(1-p)^2}\left[1-(2n+1)p^n+(2n-1)p^{n+1}+2p^{n+1}-p^{2n+1}\right]$$
$$= \frac{p}{(1-p)^2}\left[1-(2n+1)(p^n-p^{n+1})-p^{2n+1}\right] = \frac{p}{(1-p)^2}\left[1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n}\right.$$