DM0 : Correction

Exercice 1

Partie A : étude d'une première fonction

1. En tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition, la fonction d est dérivable sur $]-1,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :
$$d'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \times e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}.$$
En particulier, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $d'(x) > 0$. Ainsi d est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
2. Par opération sur les limites, on sait que :
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$
Ainsi, par composition des limites on trouve :
$$\lim_{x\to-1^+} d(x) = 0.$$
De même, on sait que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1} e^y = e.$$
Ainsi, par composition des limites on trouve :
$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = e.$$
3. D'après les questions précédentes, la fonction d est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, $\lim_{x\to 1^+} d(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} d(x) = e$ donc pour tout $x > -1$ on a
$$0 < d(x) < e.$$
4. (a) Il faut importer la bibliothèque `numpy` avec, par exemple, la commande :
```
import numpy as np
```
(b)
```
def d(x):
      return np.exp(x/(x+1))
```
(c) Il faut importer la bibliothèque `matplotlib.pyplot` avec, par exemple, la commande :
```
import matplotlib.pyplot as plt
```
(d)
```
x=np.linspace(0,10,100)
plt.plot(x,d(x))
plt.show()
```

Partie B : étude d'une deuxième fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f est définie sur $]-1,+\infty[$ par :
$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = x+1-e^{\frac{x}{x+1}}.$$
On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

5. (a) En tant que quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composition, la fonction d est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$.
En tant que somme de fonctions deux fois dérivables sur $]-1,+\infty[$, la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a :
$$f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$$
et
$$f''(x) = -\left(\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4} - \frac{2e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^3}\right) = \frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}.$$

(b) On effectue le changement de variable $y = \frac{1}{x+1}$:

$$\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} = y^2 e^{y\left(\frac{1}{y}-1\right)} = ey^2e^{-y}.$$

Quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, y tend vers $+\infty$ et, par croissance comparée on sait que :

$$\lim_{y\to+\infty} y^2e^{-y} = 0.$$

Ainsi, par composition des limites on obtient :

$$\lim_{x\to-1} \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} = \lim_{y\to 0} ey^2e^{-y} = 0.$$

Finalement on a donc :

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = 1.$$

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$ et, par continuité de la fonction exponentielle en 1, que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$. Ainsi par opération sur les limites on trouve :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1 - e\times 0 = 1.$$

(c) D'après la question 5.(a), le signe de $f''(x)$ est le signe de $2x+1$. On obtient alors :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f'	|| 1	$\searrow$		$\nearrow$	1

6. On a : $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 4e^{-1} < 0$.

D'après la question précédente, la fonction f' est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et continue sur cet intervalle. De plus, $0 \in \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution dans $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On vérifie directement que $f'(0) = 0$ avec l'expression de f' déterminée à la question 5.(a). Ainsi, 0 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$ dans $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

De même, la fonction f' est strictement décroissante et continue sur $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$. De plus, $0 \in \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim\limits_{x\to-1} f'(x)\right[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution dans $\left]-1, -\frac{1}{2}\right]$. On notera α cette solution.

7. (a) D'après les questions précédentes on a :

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f'	|| 1 $\searrow$	0 $\searrow$		$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1

On en déduit donc le tableau de signe de f' puis les variations de f :

x	-1		α		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	||	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(b) D'après la question 2, on sait que :

$$\lim_{x\to-1} e^{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = -1+1-0 = 0.$$

Toujours d'après la question 2, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie C : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0,+\infty[\quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n > 0$ » et montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 \in]0,+\infty[$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n > 0$. Or f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, on a donc :
     $$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1}.$$
     Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
     $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n > 0.$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
   $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - e^{\frac{u_n}{u_n+1}}.$$
   Or, d'après la question précédente $\frac{u_n}{u_n+1}$ est strictement positif donc par croissance stricte de la fonction exponentielle :
   $$e^{\frac{u_n}{u_n+1}} > e^0 = 1$$
   En particulier : $u_{n+1} - u_n < 0$.
   Ceci étant vérifié pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

10. D'après les deux questions précédentes, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0). D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc.

Exercice 2

Partie A

1. (a) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{E} \iff \begin{cases} 2x+y-2z = 3x \\ x-y+5z = 3z\end{cases} &\iff \begin{cases} -x+y-2z = 0 \\ x-y+2z = 0\end{cases}\\ &\iff x = y-2z\\ &\iff (x,y,z) = (y-2z,y,z) = y(1,1,0)+z(-2,0,1)\\ &\iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1)).\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a bien :

$$2\times 1 + (-1) - 2\times(-1) = 3\times 1 \quad \text{et} \quad 1-(-1)+5\times(-1) = 3\times(-1).$$

Ainsi $(1,-1,-1)$ appartient à E.

(c) D'après la question 1.(a), la famille $((1,1,0),(-2,0,1))$ est une famille génératrice de E. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. La famille $((1,1,0),(-2,0,1))$ est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

2. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1(1,-1,-1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(-1,0,1)=(0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0\\ -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_1 & = & \lambda_2\\ \lambda_1 & = & \lambda_3\end{array}\right.$$
$$\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$$

Ainsi la famille $((1,-1,-1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille libre.

(b) On sait que $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 et que la famille $((1,-1,-1),(1,1,0),(-1,0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ formée de trois vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1(1,-1,-1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(-1,0,1)=(1,2,3) \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2\\ -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 3\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 1\\ & & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 3\\ & & \lambda_2 & & & = & 4\end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2+L_1\\ L_3 & \leftarrow & L_3+L_1\end{array}\right)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 2\\ \lambda_3 & = & 5\\ \lambda_2 & = & 4\end{array}\right. .$$

Ainsi :

$$(1,2,3)=2(1,-1,-1)+4(1,1,0)+5(-1,0,1).$$

Partie B

3. Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$Y=PX \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & y_1\\ -x_1 & + & x_2 & & & = & y_2\\ -x_1 & + & & & x_3 & = & y_3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & y_1\\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & y_1+y_2\\ & & x_2 & & & = & y_1+y_3\end{array}\right. \quad \left(\text{en faisant } \begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2+L_1\\ L_3 & \leftarrow & L_3+L_1\end{array}\right)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & y_1\\ & & x_3 & & & = & 2x_2-y_1-y_3\\ & & x_2 & & & = & y_1+y_3\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1-x_2+x_3\\ x_3 & = & y_1-y_2+2y_3\\ x_2 & = & y_1+y_3\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1-y_2+y_3\\ x_2 & = & y_1+y_3\\ x_3 & = & y_1-y_2+2y_3\end{array}\right.$$
$$\iff X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}Y.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

4. On trouve :

$$D_1=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad D_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Partie C

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme $P^{-1}A=D_1P^{-1}$ et $P^{-1}B=D_2P^{-1}$ alors on a :

$$\begin{aligned}
Y_{n+2} = P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\
&= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\
&= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\
&= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}\ a_{n+1} + \frac{1}{2}\ a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}\ b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}\ c_{n+1} + \frac{1}{3}\ c_n \end{cases}$$

7. Un calcul donne :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. D'après les questions 2 et 3.
   - La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ et de premiers termes $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{9}{4}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Ainsi :
   $$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$
   Comme $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$ alors :
   $$\begin{cases} a+b &= 2 \\ a - \frac{b}{2} &= 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a &= \frac{4}{3} \\ b &= \frac{2}{3} \end{cases}.$$
   Ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$
   - La suite $(b_n)_{\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $b_1 = 1$ donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
   On vérifie que cette expression est aussi valable pour $n = 0$ d'où :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

- La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$ et de premiers termes $c_0=1$ et $c_1=-1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{16}{9}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1=-\frac{1}{3}$ et $x_2=1$. Ainsi :
$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \forall n\in\mathbb{N}\ c_n=a+b\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$
Comme $c_0=1$ et $c_1=-1$ alors :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1\\ a-\frac{b}{3} & = & -1\end{array}\right. \quad\text{donc}\quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -\frac{1}{2}\\ b & = & \frac{3}{2}\end{array}\right. .$$
Ainsi :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad c_n=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$\mathrm{X}_n=\mathrm{PY}_n=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+b_n-c_n\\-a_n+b_n\\-a_n+c_n\end{pmatrix}.$$
Ainsi :
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\left\{\begin{array}{ll}\alpha_n & =\frac{11}{6}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\[2mm] \beta_n & =\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{4}{3}\\[2mm] \gamma_n & =-\frac{11}{6}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.\end{array}\right.$$

Exercice 3

1. (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. L'événement $(\mathrm{S}=k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i\in[\![1,k-1]\!]$ le crabe a avancé à l'instant i puis est retourné en 0 à l'instant k. Ainsi $(\mathrm{S}=k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i\in[\![1,k-1]\!]$, $(\mathrm{Y}_i=i)$ et $(\mathrm{Y}_k=0)$ sont réalisés. Donc
$$(\mathrm{S}=k)=(\mathrm{Y}_k=0)\cap\bigcap_{i=1}^{k-1}(\mathrm{Y}_i=i).$$
(b) La variable aléatoire Y_1 prend la valeur 0 avec probabilité $1-p$ et la valeur 1 avec probabilité p. Ainsi, Y_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
(c) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées (les événements par lesquels on conditionne étant bien de probabilités non nulles), on a :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{S}=k)&=\mathrm{P}(\mathrm{Y}_1=1)\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_1=1)}(\mathrm{Y}_2=2)\ldots\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_1=1)\cap\cdots\cap(\mathrm{Y}_{k-2}=k-2)}(\mathrm{Y}_{k-1}=k-1)\\&\quad\times\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_1=1)\cap\cdots\cap(\mathrm{Y}_{k-1}=k-1)}(\mathrm{Y}_k=0)\\&=p\times p\times\cdots\times p\times(1-p)\\&=p^{k-1}(1-p).\end{aligned}$$
Ainsi : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(\mathrm{S}=k)=p^{k-1}(1-p)$.
On reconnaît que S suit la loi géométrique de paramètre $(1-p)$.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\mathrm{Y}_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$ » et montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : d'après l'énoncé, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que $\mathrm{Y}_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$. De plus, il est évident que $\mathrm{Y}_{n+1}(\Omega)\subset[\![0,n+1]\!]$ car le mobile ne peut pas avancer de plus de $n+1$ en $n+1$ instants.
   Soit $k\in[\![0,n+1]\!]$ et montrons que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1}=k)>0$.
     - Si $k=0$ alors on a :
     $$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1}=0)\geqslant\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1}=0,\mathrm{Y}_n=0)&=\mathrm{P}_{(\mathrm{Y}_n=0)}(\mathrm{Y}_{n+1}=0)\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n=0)\\&=(1-p)\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n=0)>0\end{aligned}$$
     d'après l'hypothèse de récurrence.

- Si $k \geqslant 1$ alors on a :

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1}=k) &\geqslant P(Y_{n+1}=k, Y_n=k-1)\\
&= P_{(Y_n=k-1)}(Y_{n+1}=k)P(Y_n=k-1)\\
&= pP(Y_n=k)>0
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi : $\forall k \in [\![0,n+1]\!],\ P(Y_{n+1}=k)>0$.
Par conséquent, $Y_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$.
Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad Y_n(\Omega)=[\![0,n]\!].$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, la famille $\big((Y_{n-1}=k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales on obtient alors :

$$\begin{aligned}
P(Y_n=0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{(Y_{n-1}=k)}(Y_n=0)P(Y_{n-1}=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(1-p)P(Y_{n-1}=k)\\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1}P(Y_{n-1}=k)\\
&= 1-p.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_n=0)=1-p$.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n+1]\!]$. Toujours d'après la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(Y_{n+1}=k)=\sum_{i=0}^{n}P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1}=k)P(Y_n=i).$$

Or, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1}=k)=\begin{cases} p & \text{si } i=k-1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1}=k) &= \sum_{i=0}^{n}P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1}=k)P(Y_n=i)\\
&= pP(Y_n=k-1).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1,2,\dots n+1\},\ P(Y_{n+1}=k)=p\,P(Y_n=k-1).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ P(Y_n=k)=p^k(1-p)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après la question 1.(b), $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait :

$$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!],\ P(Y_n=\ell)=p^\ell(1-p).$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

  - Si $k \geqslant 1$ alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence avec $\ell=k-1 \in [\![0,n-1]\!]$ on a :

$$P(Y_{n+1}=k)=pP(Y_n=k-1)=p\times p^{k-1}(1-p)=p^k(1-p).$$

  - Si $k=0$, on a déjà vu en 2.(b) que

$$P(Y_{n+1}=0)=1-p=p^0(1-p).$$

  Ainsi, on a montré :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(Y_{n+1}=k)=p^k(1-p).$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = p^k(1-p).$$

Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel non nul n on a $\mathrm{Y}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ alors, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) = 1 - (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} = p^n.$$

(c) Découle de la question précédente.

4. (a) Soit $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1}.$$

D'autre part, on sait que pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Donc en dérivant, on trouve :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1 - x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0,1[, \quad \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Le support de Y_n est fini (on a vu que c'est $[\![0, n]\!]$). Donc Y_n possède une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + n\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n) \\
&= p(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \\
&= p(1-p)\frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n(1-p)}{1-p} \\
&= \frac{p - p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{p(1-p^n)}{1-p}.
\end{aligned}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire Y_{n+1} est à support fini donc Y_{n+1}^2 possède une espérance et d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{Y}_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k-1) \quad \text{d'après 3.}(a), \\
&= p\sum_{i=0}^{n} (i+1)^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = i) \quad \text{en posant } i = k-1, \\
&= p\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = i) + 2\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = i) + \sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = i)\right) \\
&= p\left(\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + 1\right).
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p\left(\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + 1\right) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p(u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + 1) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n - (2n-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} + 2p\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pu_n + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} + p + 2p\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n).
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$ d'après 4.(b) donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= pu_n + \frac{2p^{n+2} + 2p^2(1-p^n) + p(1-p)}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p^2+p}{1-p} \\
&= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.
\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = p\frac{1+p-2p^n}{(1-p)^2}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) = p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme Y_n est à support fini, elle possède une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) &= \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n^2) - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)^2 \\
&= p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p\left(1-(2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p\left(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)}{(1-p)^2}.
\end{aligned}$$