ECE2-Semaine 10

05/12/2022 au 09/12/2022

1 Couples de variables aléatoires discrètes

Loi conjointe : loi du couple, système complet d'évènements associé à un couple (aparté sur les séries doubles : convergence absolue des séries doubles).

Lois conditionnelles : lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ et de Y sachant $[X = x]$.

Lois marginales : lois marginales, calcul avec la formule des probabilités totales.

Indépendance : indépendance de deux variables aléatoires, loi du couple et lois conditionnelles pour un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes. Indépendance mutuelle, lemme des coalitions.

Variable aléatoire fonction d'un couple de variables aléatoires discrètes : cas général : loi de $g(X,Y)$, théorème de transfert. Loi d'une somme, stabilités de lois binomiales indépendantes par somme, stabilité de lois de Poisson indépendantes par somme, linéarité de l'espérance. Loi du produit, espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Loi du min et du max : méthode et étude sur des exemples.

Variance et covariance : définition de la covariance, formule de Koenig-Huygens. Linéarité à gauche et à droite, symétrie. Lien avec la variance, variance d'une somme de deux variables non nécessairement indépendantes, cas des variables indépendantes. Coefficient de corrélation linéaire, le coefficient de corrélation linéaire est toujours dans $[-1, 1]$, caractérisation des couples pour lesquels le coefficient de corrélation linéaire vaut 1 ou -1.

2 Méthodes à maîtriser

1. Connaître par coeur les lois usuelles : loi, espérance, variance.
2. Savoir déterminer la loi d'un couple à partir de l'expérience aléatoire, à partir de la loi marginale de X et des lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
3. Savoir trouver les lois conditionnelles à partir de la loi du couple.
4. Savoir trouver les lois marginales grâce à la loi du couple.
5. Savoir trouver la loi marginale de X en connaissant la loi de Y et les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.
6. Savoir montrer que deux variables aléatoires discrètes sont/ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
7. Savoir trouver la loi de XY, $X+Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$.
8. Plus généralement ,savoir trouver la loi, justifier l'existence et déterminer l'espérance (si elle existe) d'une variable de la forme $g(X,Y)$.
9. Savoir justifier l'existence et déterminer $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $V(X+Y)$, $\rho(X,Y)$.
10. Savoir montrer qu'une application est linéaire. Déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire.

3 Questions de cours

- Formule des probabilités totales.
- Définition : covariance, coefficient de corrélation linéaire.
- Stabilité des lois de Poisson par sommes; stabilité des lois binomiales par somme. Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. Existence et expression de la variance d'une somme (proposition 10).
- Lois usuelles : loi, espérance, variance et expérience de référence.
- Définition et caractérisation des applications linéaires.