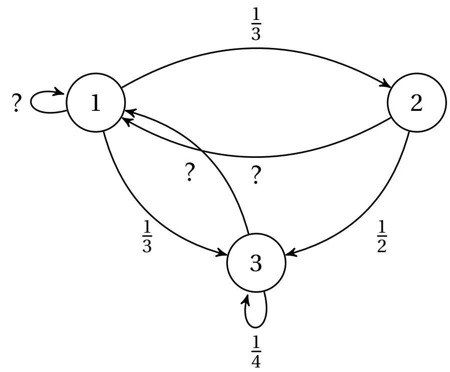
Chapitre 19 : Chaîne de Markov

1 Tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Compléter le graphe suivant pour en faire un graphe probabiliste.



Test 2 (***Voir solution.***)

Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste trouvé dans le test 1.

Test 3 (***Voir solution.***)

Aramis le chat répartit son temps entre ses trois occupations préférées : dormir, manger et jouer. Au début de la journée, il dort puis il change d'activité toutes les heures de la façon suivante :

- *Si, à l'heure n, il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité* 0.3 *et jouer avec probabilité* 0.7.
- *Si, à l'heure n, il est en train de dormir, alors à l'heure $n+1$ il continue de dormir avec probabilité* 0.4, *il va manger avec probabilité* 0.3 *et il va jouer avec probabilité* 0.3.
- *Si, à l'heure n, il est en train de jouer, il va manger l'heure suivante avec probabilité* 0.4 *et il va dormir avec probabilité* 0.6.

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement d'Aramis. On numérote les activités de 1 *à* 3 *(1 :« Dormir », 2 :« Manger », 3 :« Jouer ») et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'état du chat à l'instant n.*

1. *Justifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.*
2. *Déterminer sa matrice de transition et le graphe probabiliste associé.*
3. *Calculer* $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2)$.

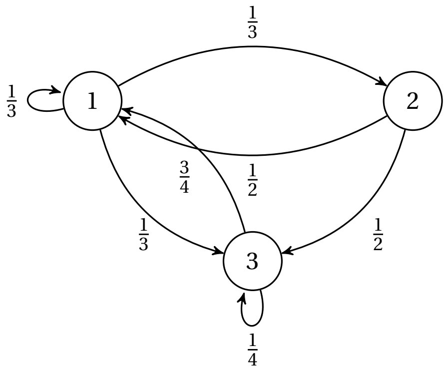
Test 4 (***Voir solution.***)

Déterminer les états stables de la chaîne de Markov du test 3.

2 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

Il faut qu'en chaque sommet, la somme des poids des arêtes sortantes soit égale à 1



Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

On obtient :

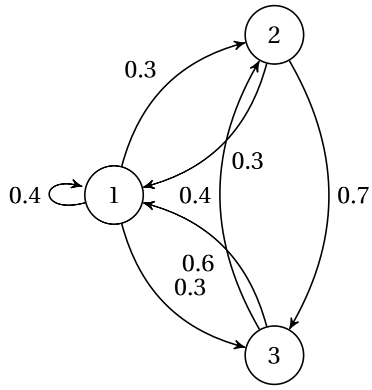
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *L'état d'Aramis à l'instant* $n+1$ *ne dépend que de son état à l'état* n. *Ainsi pour tout* $(x_0,\dots,x_{n+1}) \in \{1,2,3\}^{n+2}$ *tels que* $\mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = x_0,\dots,\mathrm{X}_n = x_n) > 0$ *on a*

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=x_0]\cap\cdots\cap[\mathrm{X}_n=x_n]}\left([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]\right) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x_n]}\left([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]\right).$$

2. *On obtient :*



et :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *D'après la formule des probbilités composées :*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = 1, \mathrm{X}_1 = 1, \mathrm{X}_2 = 3, \mathrm{X}_3 = 2) &= \mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = 1)\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=1]}(\mathrm{X}_1 = 1)\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=1]\cap[\mathrm{X}_1=1]}(\mathrm{X}_2 = 3)\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=1]\cap[\mathrm{X}_1=1]\cap[\mathrm{X}_2=3]}(\mathrm{X}_3 = 2) \\ &= 1 \times 0.4 \times 0.3 \times 0.4 \\ &= 0.048 \end{aligned}$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $V = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$. *Alors :*

$$V = VA \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0.4x & + & 0.3y & + & 0.6z & = & x \\ 0.3x & & & + & 0.4z & = & y \\ 0.3x & + & 0.7y & & & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -0.6x & + & 0.3y & + & 0.6z & = & 0 \\ 0.3x & - & y & + & 0.4z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.7y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0.3x & - & y & + & 0.4z & = & 0 \\ -0.6x & + & 0.3y & + & 0.6z & = & 0 \\ 0.3x & + & 0.7y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0.3x & - & y & + & 0.4z & = & 0 \\ & - & 1.7y & + & 1.4z & = & 0 \\ & & 1.7y & - & 1.4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0.3x & - & y & + & 0.4z & = & 0 \\ & - & 1.7y & + & 1.4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{24}{17}z \\ y & = & \frac{14}{17}z \end{array}\right. .$$

Ainsi, V *est un état stable si et seulement si :*

$$V = z\begin{pmatrix} \frac{24}{17} & \frac{14}{17} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad z \geqslant 0 \quad ; \quad \frac{24}{17}z + \frac{14}{17}z + z = 1$$

si et seulement si :

$$V = z\begin{pmatrix} \frac{24}{17} & \frac{14}{17} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad z = \frac{17}{55}.$$

Ainsi, l'unique état stable est :

$$V = \frac{17}{55}\begin{pmatrix} \frac{24}{17} & \frac{14}{17} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{55} & \frac{14}{55} & \frac{17}{55} \end{pmatrix}.$$