Chapitre 12 : Intégration : rappels et compléments

1 Rappels : intégration sur un segment

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction définie sur I par

$$x \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{F}(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, en effet :

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I.

1. Le réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
2. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(t)dt$ ce réel :

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. *On note souvent :*
$$[\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(t)dt.$$
2. *Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est muette, ainsi*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$
3. *On a*
$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = -(\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)) = -\int_b^a f(t)dt.$$

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. *Linéarité* : on a
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : on a
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$
4. *Croissance* : si $a \leqslant b$ alors
$$\forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$$
5. *Inégalité triangulaire* :
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors, f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Test 1 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

1. *Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$.*
3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.*
4. *Monter que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.*

Extension aux fonctions continues par morceaux

- Soit f une fonction définie sur un segment $[a,b]$. On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement par continuité à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.
- Pour une telle fonction continue par morceaux f, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt.$$
- La proposition 2 reste vraie pour les fonctions continues par morceaux.

Remarque 4

Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est donc une fonction qui est continue sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle admet tout de même des limites finies à droite et à gauche.

Exemple 1

1. *La fonction partie entière f est continue par morceaux sur* $[0,2]$.

2. *Intégrale de f sur* $[0,2]$.

1.2 Techniques de calcul

- Calcul de primitives « à vue »

Fonction f	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction f	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n,\ n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \longmapsto \dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(\lvert u(x)\rvert)$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 2

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$.

Test 2 (*Voir solution.*)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_e^{3e} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$.
2. $\displaystyle\int_0^2 e^{2t-1}\,dt$.
3. $\displaystyle\int_0^1 s(s^2+3)^2\,ds$.

► Intégration par parties

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Exemple 3

Calculer $\displaystyle\int_1^3 t^2\ln(t)\,dt$.

Test 3 (*Voir solution.*)

Soit $x \in]1,+\infty[$. *Calculer* $\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,dt$.

► Changement de variables

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur $u([a,b])$. Alors

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

Exemple 4

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$ *à l'aide du changement de variable* $u = e^t$.

1. *Transformer* du *avec la formule* $du = u'(t)dt$.
2. *Transformer l'expression sous l'intégrale.*
3. *Transformer les bornes.*
4. *Rédaction finale :*

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction impaire continue sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que pour tout* $a \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(-t)dt$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f(x) = \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t}dt$. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer sa dérivée.*

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm\infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $[a,+\infty[$ et on la note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

De même :

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty,b]$.

- Si la limite suivante existe et est finie
$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt,$$
on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de f sur** $]-\infty,b]$ et on la note $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.
- Si la limite $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a,+\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a,+\infty[$,*
2. *on introduit $x\in[a,+\infty[$ et on étudie si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.

Exemple 5

1. *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$.

2. *Étudier la nature de* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

3. *Étudier la nature de* $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Plus généralement :

Exemples de référence

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
2. *Intégrale de Riemann en* $+\infty$: pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt$ converge si et seulement si $a > 1$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Démontrer les critères de convergence des exemples de référence.

2.2 Intégrales impropres sur un intervalle $]a, b]$ ou $[a, b[$

Définition 4 (Convergence d'une intégrale impropre)

Soient a, b deux réels avec $a < b$.

- Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $[a, b[$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.
- Soit f une fonction continue sur $]a, b]$.
  Si la limite suivante existe et est finie
  $$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt,$$
  on l'appelle **intégrale impropre (ou généralisée) de** f **sur** $]a, b]$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Dans ce cas on dira que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ **converge**, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Méthode 2

Soit f définie sur un intervalle $[a, b[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si
$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$
existe et est finie ou non. En pratique :

1. *on commence par montrer que f est continue sur $[a, b[$,*
2. *on introduit $x \in [a, b[$ et on étudie si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b^-.*

On procède de manière analogue pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction f définie sur $]a, b]$.

Exemple 6

1. *Étudier la nature de $\int_0^2 \frac{1}{x-2} dx$.*

2. *Étudier la nature de* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$.

Exemples de référence

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$, impropre en 0, converge.
2. *Intégrale de Riemann en* 0 : pour tout réel $c > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^a}dt$, impropre en 0, converge si et seulement si $a < 1$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Démontrer le critère de convergence des intégrales de Riemann.

Exemple 7

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ et prolongeable par continuité en a. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

2.3 Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité

Définition 5 (Convergence d'une intégrale plusieurs fois impropre)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue sur $]a,b[$.
S'il existe $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent, on dit que l'**intégrale doublement impropre** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Sinon, on dira qu'elle **diverge**.

Remarque 5

En conservant les notations de la définition, les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\int_c^b f(t)\,dt$ *sont des intégrales impropres respectivement en* a *et en* b *au sens des paragraphes précédents.*

Méthode 3

Soit f *définie sur un intervalle* $]a,b[$. *Étudier la nature de l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)\,dt$, *c'est déterminer si elle converge ou non. En pratique on prend n'importe quel* $c \in]a,b[$ *et on étudie la nature des intégrales* $\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\int_c^b f(t)\,dt$ *avec les méthodes précédentes.*

Exemple 8

1. *Étudier la nature de* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

2. *Étudier la nature de* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt$.

Définition 6 (Extension au cas des fonctions ayant un nombre fini de points discontinuité)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuité sur $]a,b[$: il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 \cdots < a_n = b$ de $]a,b[$ telle que f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ les intégrales doublement impropres $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt$ convergent, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **converge** et vaut

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale diverge.

Exemple 9

Étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

1. *Déterminer les impropretés.*

2. *Étude de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

3. *Étude de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{|t|}}}{\sqrt{|t|}}\,dt$.

4. *Conclusion :*

Proposition 6 (Propriétés des intégrales impropres)

Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $]a,b[$. Soient $c \in]a,b[$ et λ un réel.

1. *Linéarité* : si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent alors $\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt$ converge et
$$\int_a^b (f(t)+\lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$
2. *Relation de Chasles* : si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et
$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$
3. *Positivité* : si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
4. Si f est positive sur $]a,b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge alors
$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in]a,b[,\ f(t) = 0.$$

Méthode 4 (*Techniques de calcul*)

On peut utiliser les techniques de calcul comme les primitives « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties pour calculer des intégrales impropres :

1. *on se ramène à une intégrale sur un segment (par exemple, pour une fonction continue sur $[a,b[$ avec une impropreté en b, on considère $x \in [a,b[$ et on s'intéresse à l'intégrale sur le segment $[a,x]$) ;*
2. *on utilise la technique voulue (primitive « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties) dans cette intégrale sur un segment ;*
3. *on passe à la limite (dans l'exemple, quand x tend vers b^-).*

Exemple 10

1. Étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}dt$.

2. Étudier $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.

3. *Étudier* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\,dt$ *avec le changement de variable* $u = \frac{1}{t}$.

Test 8 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$ *en posant* $u = \ln(t)$.

3 Convergences des intégrales de fonctions positives.

Proposition 7

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f une fonction continue **positive** sur $[a,b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est majorée sur $[a,b[$.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f une fonction continue **positive** sur $]a,b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ est majorée sur $]a,b]$.

Remarque 6

Il s'agit d'une conséquence du théorème de la limite monotone : la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ *(resp.* $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$*) est croissante sur* $[a,b[$ *(resp. décroissante sur* $]a,b]$*).*

Proposition 8 (Comparaison par inégalité)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que, au voisinage de b : $0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que, au voisinage de a : $0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Remarque 7

Dire qu'au voisinage de b on a $0 \leqslant f \leqslant g$ signifie :

Exemple 11

Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}} dt$;
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t + e^{-t}}$.

Proposition 9 (Comparaison par négligeabilité)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que $f(t) = \underset{x \to b^-}{o}(g(t))$.
  1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que $f(t) = \underset{x \to a^+}{o}(g(t))$.
  1. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
  2. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Méthode 5 (*Comparaison avec les exemples de référence*)

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à la comparer avec l'un des exemples de référence. Par exemple, si f continue sur $[c,+\infty[$ ($c>0$) et positive au voisinage de $+\infty$ (raisonnement à refaire à chaque fois qu'on l'utilise) :

1. *si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a f(t) = 0$ alors $f(t) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge si $a>1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann ;*
2. *si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a f(t) = +\infty$ alors $\frac{1}{t^a} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(t)\right)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ diverge si $a\leqslant 1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.*

On peut raisonner de manière analogue pour une impropreté en 0.

Exemple 12

1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^2\,dt$.

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|}{t^2}\,dt$.

Proposition 10 (Comparaison par équivalence)

- Soient $a < b \leqslant +\infty$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et **positives au voisinage de** b telles que $f(t) \underset{x\to b^-}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.
- Soient $-\infty \leqslant a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et **positives au voisinage de** a telles que $f(t) \underset{x\to a^+}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.

Méthode 6

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à en déterminer un équivalent simple.

Exemple 13

1. *Déterminer la nature de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,dt$.

2. *Déterminer la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t})\,dt$.

Test 11 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}\,dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$.

Remarque 8

Tous les résultats énoncés pour les fonctions f continues positives se transposent pour les fonctions continues négatives en considérant $-f$ (l'important est que la fonction soit de signe constant).

4 Convergence absolue

Définition 7 (Convergence absolue)

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$, resp. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$).
On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Proposition 11

Soient $a < b \leqslant +\infty$ (resp. $-\infty \leqslant a < b$).
Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$). Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente alors elle est convergente. Dans ce cas :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Remarque 9

La réciproque est fausse : il existe des intégrales qui ne sont pas absolument convergentes mais qui sont convergentes.

5 Objectifs

1. Connaître les primitives de références
2. Connaître la nature des intégrales impropres de référence.
3. Connaître par coeur les critères de convergence des intégrales impropres de fonctions positives (comparaison, négligeabilité, équivalence).
4. Savoir déterminer la nature d'une intégrale impropre d'une fonction positive en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.
5. Savoir montrer qu'une intégrale d'une fonction de signe quelconque est convergente en utilisant la convergence absolue.
6. Savoir étudier une intégrale plusieurs fois impropre.
7. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable. Appliquer ces techniques à l'étude d'intégrales impropres.