TD2-Comparaison de suites

Exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$, on $u_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}) = \ln(1 + 1 - e^{-\frac{1}{n^2}})$.

   Or, comme $\lim_{n\to+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}} = 0$, on reconnaît un équivalent usuel :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

2. Le terme dominant dans le facteur $n^2 + n + 3^n$ est 3^n et le terme dominant du facteur $e^{-n} + 1$ est 1. En factorisant par les termes dominants, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n\left(\frac{n^2}{3^n} + \frac{n}{3^n} + 1\right)(e^{-n} + 1)$$

   Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{3^n} + \frac{n}{3^n} + 1\right)(e^{-n} + 1) = 1.$$

   Par définition, on a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n$.

3. Le terme dominant du numérateur est $\ln(n)$ et celui du dénominateur est 3^n. En factorisant par les termes dominants, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\ln(n)}{3^n}\,\frac{1 + \frac{2}{\ln(n)}}{\frac{4n}{3^n} + \frac{1}{3^n} + 1}.$$

   Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln(n)} = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{2}{\ln(n)}}{\frac{4n}{3^n} + \frac{1}{3^n} + 1} = 1.$$

   Par définition, on a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{3^n}$.

4. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, d'après les équivalents usuels on a

$$e^{\frac{1}{2n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2n}} + 1 = 2$, on a

$$e^{\frac{1}{2n}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2.$$

   Par compatibilité avec le quotient, on a donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}.$$

5. Ici, le terme dominant est donné par le e^n.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n^2 + e^n) &= \ln\left(e^n\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\right)\\
&= \ln(e^n) + \ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\\
&= n + \ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\\
&= n\left(1 + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right)\right)
\end{aligned}$$

   Or, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ donc, par continuité du logarithme, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right) = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right) = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^2}{e^n} + 1\right) = 1$$

   donc, par définition, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

6. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n = e^{n+\ln n+1} e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}} = n e^{n+1} e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}}$$

Or, par continuité de l'exponentielle, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\ln n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}} = 1.$$

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n e^{n+1}$.

7. Ici, on va multiplier par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= \sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1} \\
&= \left(\sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}\right) \times \frac{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}} \\
&= \frac{4n+1}{\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1}}.
\end{aligned}$$

Le numérateur est équivalent à $4n$ par les équivalents usuels. Pour le dénominateur :

$$\begin{aligned}
\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1} &= \sqrt{4n^2\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}\right)} + \sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)} \\
&= 2n\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} \\
&= 2n\left(\sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{1}{2n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n^2}} = 2$, par compatibilité avec le produit, on a

$$\sqrt{4n^2+5n+2} + \sqrt{4n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \times 2,$$

puis, par compatibilité avec le quotient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n}{2n\times 2}$$

i.e. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

8. Par continuité du logarithme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. Par continuité de la fonction racine carrée, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

9. Comme ci-dessus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ et on reconnaît un équivalent usuel. Ainsi

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Un autre équivalent usuel donne

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc, par produit,

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Par transitivité, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

10. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1.$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Par équivalent usuel, on a donc :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

11. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
u_n = \frac{e^{(n+1)\ln(n)}}{e^{n\ln(n+1)}} &= e^{n\ln(n)+\ln(n)-n\ln(n+1)} \\
&= e^{-n(\ln(n+1)-\ln(n))} e^{\ln n} \\
&= n e^{-n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\
&= n e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or, par équivalent usuel, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc, par compatibilité avec le produit :

$$-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1$ et par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}$$

i.e. $e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$. Enfin, la compatibilité avec le produit donne

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1} n.$$

12. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc, par équivalent usuel, on a : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

13. Pour tout $n \geq 1$,on a

$$\begin{aligned} u_n &= e^{(n+1)\ln(n)} - e^{n\ln(n+1)} \\ &= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln(n+1)-(n+1)\ln(n)}\right) \\ &= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln(n+1)-n\ln(n)-\ln(n)}\right) \\ &= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln(n)}\right) \\ &= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)}\right) \\ &= e^{(n+1)\ln(n)}\left(1 - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}e^{-\ln(n)}\right) \\ &= n^{n+1}\left(1 - \frac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n}\right) \end{aligned}$$

Or, par les équivalents usuels, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc, par compatibilité avec le produit,

$$n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ puis, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n} = 1$ ce qui montre que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{n+1}$.

14. Pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = n^2 + n - e^n + \ln n + e^n = n^2 + n + \ln n.$$

Le terme dominant est n^2, donc en factorisant on obtient

$$u_n = n^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 1$. Cela montre que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$.

15. Par les équivalents usuels, on a

$$n^3 + 6n^2 + 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad n^4 + 3n^2 - 2n + 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^4.$$

Par compatibilité avec le quotient, on a

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}.$$

16. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$.

17. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, par équivalent usuel on a $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$.

18. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$ donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} e$.

19. Pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} = \frac{-2}{n^2 - 1}.$$

Or $n^2 - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$ donc par compatibilité avec le quotient $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-2}{n^2}$.

20. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\ln(n)} = 0$, par équivalent usuel on a $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\ln(n)}$.

21. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n = 2\ln(n) + \ln(2) + 1.$$

Le terme dominant est $2\ln(n)$. En factorisant on trouve :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = 2\ln(n)\left(1 + \frac{\ln(2) + 1}{2\ln(n)}\right)$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{\ln(2) + 1}{2\ln(n)} = 1$. Cela montre que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

22. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or, par les équivalents usuels, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc, par compatibilité avec le produit,

$$n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ puis $\lim_{n\to+\infty} 1+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2$. On a donc

$$1+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}2$$

et par produit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

23. Le terme dominant dans le premier facteur est 1 et celui du deuxième facteur est n. En factorisant, on a donc

$$\forall n\geq 1,\ u_n=n^{\frac{5}{3}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{3}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{\frac{5}{3}}=1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{5}{3}}$.

24. Pour tout $n\geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

donc par équivalent usuel, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$.