Chapitre 13 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P.$$

1. *Déterminer sa matrice représentative A dans la base canonique.*
2. *Montrer que les vecteurs $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A dont on précisera les valeurs propres associées.*

Test 2 (*Voir solution.*)

1. *Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*
2. *Déterminer le spectre de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Test 3 (*Voir solution.*)

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $E_6(A)$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A.*
2. *Déterminer les valeurs propres possibles de A. En déduire le spectre de A et une base de chaque espace propre.*
3. *Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que la famille $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$ est liée.*
2. *En déduire qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ avec $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ tel que*

$$P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$$

   soit un polynôme annulateur de A.

Test 6 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de A.*
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.*

Test 7 (*Voir solution.*)

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* B.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice* B *est-elle diagonalisable? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $\mathrm{B}=\mathrm{PDP}^{-1}$.

Test 8 (***Voir solution.***)

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* 0, 1 *et* 4 *sont les trois valeurs propres de* A *et déterminer les sous-espaces propres associés.*
2. *En déduire une matrice diagonale* D *de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible* P *de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, *dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à* 1, *telles que :* $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$.

Test 9 (***Voir solution.***)

On considère

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $\mathrm{T}^2-3\mathrm{T}$ *et en déduire un polynôme annulateur de* T.
2. *Déterminer le spectre de* T *et une base de chaque sous-espace propre.*
3. *En déduire une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $\mathrm{T}=\mathrm{PDP}^{-1}$.
4. *En déduire* T^n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *On a :*
$$f(1)=1 \quad ; \quad f(\mathrm{X})=2\mathrm{X}-1 \quad ; \quad f(\mathrm{X}^2)=3\mathrm{X}^2-2\mathrm{X}.$$
Ainsi :
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

2. • *On a :*
$$\mathrm{AX}_0=\mathrm{X}_0$$
donc X_0 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 1.
   • *On a :*
$$\mathrm{AX}_1=2\mathrm{X}_1$$
donc X_1 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 2.
   • *On a :*
$$\mathrm{AX}_3=3\mathrm{X}_3$$
donc X_3 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 3.

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncé.***)

1. • ***Méthode 1 : par le déterminant.*** *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)=0$. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)=\det\left(\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\right)=(1-\lambda)(3-\lambda)+1=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$
Ainsi
$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)=0\Longleftrightarrow(\lambda-2)^2=0\Longleftrightarrow\lambda=2.$$
Ainsi $\mathrm{Sp(A)}=\{2\}$.
   • ***Méthode 2 : par le rang.*** *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)<2$. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda\\ 1-\lambda & -1\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_2\longleftrightarrow\mathrm{L}_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda\\ 0 & -1-(1-\lambda)(3-\lambda)\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-(1-\lambda)\mathrm{L}_1.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2)<2\Longleftrightarrow-1-(1-\lambda)(3-\lambda)=0\Longleftrightarrow-(\lambda-2)^2=0\Longleftrightarrow\lambda=2.$$
Ainsi $\mathrm{Sp(A)}=\{2\}$.

2. *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* B *si et seulement si* $\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_3$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_3)<3$. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_3)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_3\longleftrightarrow\mathrm{L}_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2\\ 0 & -\lambda & \lambda\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-(1-\lambda)\mathrm{L}_1\ ;\ \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2\\ 0 & 0 & \lambda+1-(1-\lambda)^2\end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\mathrm{rg}(\mathrm{B}-\lambda\mathrm{I}_3)<3\Longleftrightarrow\lambda+1-(1-\lambda)^2=0\quad \textit{ou}\quad \lambda=0\Longleftrightarrow3\lambda-\lambda^2=0\quad \textit{ou}\quad \lambda=0\Longleftrightarrow\lambda=0\quad \textit{ou}\quad \lambda=3.$$
Ainsi $\mathrm{Sp(B)}=\{0,3\}$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X\in E_6(A)\iff AX=6X\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}5x&+&y&-&z&=&6x\\2x&+&4y&-&2z&=&6y\\x&-&y&+&3z&=&6z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&-&z&=&0\\x&-&y&-&z&=&0\\x&-&y&-&3z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&-&z&=&0\\&&&-&2z&=&0\\&&&-&4z&=&0\end{array}\right.\quad L_2\leftarrow L_2+L_1\ \textit{et}\ L_3\leftarrow L_3+L_1$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&y\\z&=&0\end{array}\right..$$

Ainsi : $E_6(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On trouve* $A^2-4A=-4I_3$. *Ainsi,*
$$A^2-4A+4I_3=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$
Cela signifie que X^2-4X+4 *est un polynôme annulateur de* A.
2. *Le spectre de* A *est inclus dans l'ensemble des racines de* $X^2-4X+4=(X-2)^2$. *Donc la seule valeur propre possible est* 2. *Vérifions si* 2 *est valeur propre.*

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$$AX=2X\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}3x&-&y&+&z&=&2x\\2x&&&+&2z&=&2y\\x&-&y&+&3z&=&2z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&y&+&z&=&0\\2x&-&2y&+&2z&=&0\\x&-&y&+&z&=&0\end{array}\right.\iff x-y+z=0.$$
L'ensemble des solutions de ce système est
$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid x-y+z=0\right\}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
Comme le système possède des solutions non nulles, 2 *est bien valeur propre. Donc* $\operatorname{Sp}(A)=\{2\}$ *et*
$$E_2(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$
3. *Comme* 0 *n'est pas valeur propre de* A, A *est inversible. De plus :*
$$A^2-4A=-4I_3\quad\textit{donc}\quad\left(-\frac{1}{4}(A-4I_3)\right)A=I_3.$$
Donc $A^{-1}=-\frac{1}{4}(A-4I_3)$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On sait que :* $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))=n^2$.
La famille $(I_n,A,\dots,A^{n^2})$ *est une famille de* n^2+1 *vecteurs d'un espace vectoriel de dimension* n^2. *Elle est donc liée.*
2. *Par définition d'une famille liée, il existe* $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n^2})\in\mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n^2})\neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*
$$\lambda_0I_n+\lambda_1A+\cdots+\lambda_{n^2}A^{n^2}=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Cela signifie, en posant $P=\lambda_0+\lambda_1X+\cdots+\lambda_{n^2}X^{n^2}$, *que*

$$P(A)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Ainsi P *un polynôme annulateur de* A. *De plus,* P *est non nul car* $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n^2})\neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *donc au moins l'un de ses coefficients est non nul.*

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda\in \mathrm{Sp}(A)\Longleftrightarrow A-\lambda I_3 \quad \textit{n'est pas inversible} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_3)<3.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 2-\lambda\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ -\lambda & 1 & -1\end{pmatrix}\right) \quad L_1\longleftrightarrow L_3\\
&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 2-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & -1+2\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}\right) \quad L_2\longleftarrow L_2+L_1 \textit{ et } L_3\longleftarrow L_3+\lambda L_1\\
&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & 2-\lambda\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 0 & 0 & -2+3\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}\right) \quad L_3\longleftarrow L_3-L_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3)<3 \Longleftrightarrow 1-\lambda=0 \quad \textit{ou} \quad -2+3\lambda+\lambda^2=0 &\Longleftrightarrow \lambda=1 \quad \textit{ou} \quad (\lambda-1)(\lambda-2)=0\\
&\Longleftrightarrow \lambda=1 \quad \textit{ou} \quad \lambda=2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{1,2\}$.

2. • $E_1(A)$ *: soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X\in E_1(A)\Longleftrightarrow AX=X \Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & x\\ -x & + & 2y & - & z & = & y\\ x & - & y & + & 2z & = & z\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0\\ -x & + & y & - & z & = & 0\\ x & - & y & + & z & = & 0\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow & x-y+z=0\\
\Longleftrightarrow & x=y-z.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_1(A)$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $E_1(A)$.

• $E_2(A)$ *: soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X\in E_2(A)\Longleftrightarrow AX=2X \Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 2x\\ -x & + & 2y & - & z & = & 2y\\ x & - & y & + & 2z & = & 2z\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & z & = & 0\\ -x & & & - & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right.\\
\Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & z & = & 0\\ & - & y & - & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right. \quad L_1\longleftrightarrow L_1+2L_3 \textit{ et } L_2\longleftrightarrow L_2+L_3\\
\Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{rcl} z & = & -y\\ x & = & y\end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_2(A)$.

3. *Comme* $\dim(E_1(A))+\dim(E_2(A))=1+2=3$, A *est diagonalisable. Posons :*

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad \textit{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$D=P^{-1}AP\quad \textit{c'est-à-dire}\quad A=PDP^{-1}.$$

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda\in \mathrm{Sp}(B)\Longleftrightarrow B-\lambda I_3\quad \textit{n'est pas inversible}\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3.$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}3-\lambda&0&8\\3&-1-\lambda&6\\-2&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}3&-1-\lambda&6\\3-\lambda&0&8\\-2&0&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)\quad L_1\longleftrightarrow L_2\\&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&3-\lambda&8\\0&-2&-5-\lambda\end{pmatrix}\right)\quad C_1\longleftrightarrow C_2\\&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&-2&-5-\lambda\\0&3-\lambda&8\end{pmatrix}\right)\quad L_2\longleftrightarrow L_3\\&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1-\lambda&3&6\\0&-2&-5-\lambda\\0&0&8+\frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2}\end{pmatrix}\right)\quad L_3\longleftarrow L_3+\frac{3-\lambda}{2}L_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3\Longleftrightarrow -1-\lambda=0\quad \textit{ou}\quad 8+\frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2}=0\Longleftrightarrow \lambda=-1\quad \textit{ou}\quad 1+2\lambda+\lambda^2=0\Longleftrightarrow \lambda=-1.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(B)=\{-1\}$.

2. $E_{-1}(B)$ *: soit* $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X\in E_{-1}(B)\Longleftrightarrow BX=-X&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcr}3x&&&+&8z&=&-x\\3x&-&y&+&6z&=&-y\\-2x&&&-&5z&=&-z\end{array}\right.\\&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcr}4x&+&8z&=&0\\3x&+&6z&=&0\\-2x&-&4z&=&0\end{array}\right.\\&\Longleftrightarrow 4x+8z=0\\&\Longleftrightarrow x=-2z.\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(B)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_{-1}(B)$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $E_{-1}(B)$.

3. *Comme* $\dim(E_{-1}(B))=2\neq 3$, B *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda\in \mathrm{Sp}(A)\Longleftrightarrow A-\lambda I_3\quad \textit{n'est pas inversible}\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_3)<3.$$

Or

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda^2-5\lambda+4) \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda^2-5\lambda+4=0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 4.$$

Ainsi $\operatorname{Sp}(A) = \{0,1,4\}$.

- $E_0(A)$: *soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_0(A) \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_0(A)$.

- $E_1(A)$: *soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = X &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & x \\ x & + & y & + & z & = & y \\ x & + & y & + & 3z & = & z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 0 \\ & & x & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & -z \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_1(A)$.

- $E_4(A)$: *soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_4(A) \iff AX = 4X \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 4x \\ x & + & y & + & z & = & 4y \\ x & + & y & + & 3z & = & 4z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -3x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} -2x & + & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & 2y \end{array} \right. .$$

Ainsi, $E_4(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_4(A)$.

2. *Comme* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *possèdent trois valeurs propres distinctes, alors* A *est diagonalisable. En posant*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

on a alors $D = P^{-1}AP$ *donc en multipliant à droite par* P^{-1} *et à gauche par* P *membre à membre on obtient*

$$PDP^{-1} = A.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

=

1. *On a :* $T^2 - 3T = -2I_3$ *donc* $T^2 - 3T + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. *Ainsi* $X^2 - 3X + 2$ *est un polynôme annulateur de* T.
2. *La matrice* T *est triangulaire donc son spectre est constitué de ses coefficients diagonaux :* $\mathrm{Sp}(T) = \{1, 2\}$.
3. *Déterminons les sous-espaces propres : soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- *On a :*

$$X \in E_1(T) \iff TX = X \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & x \\ & & y & + & z & = & y \\ & & & & 2z & = & z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} 2z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff z = 0.$$

Ainsi,

$$E_1(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_1(T)$ *formée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une base de* $E_1(T)$.

- *On a :*

$$X \in E_2(T) \iff TX = X \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 2x \\ & & y & + & z & = & 2y \\ & & & & 2z & = & 2z \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2z \\ y & = & z \end{array} \right. .$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}_2(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{E}_2(\mathrm{T})$ *formée d'un vecteur non nul, c'est donc une base de* $\mathrm{E}_2(\mathrm{T})$.

- *En posant* $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a*

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP} \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \mathrm{T} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

4. *Par récurrence, montrons que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.
   - *Initialisation : c'est la question précédente.*
   - *Hérédité : supposons qu'il existe un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ *et montrons que* $\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^n &= \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence} \\ &= \mathrm{PDD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{car} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_3 \quad \textit{et} \quad \mathrm{DI}_3 = \mathrm{I}_3 \\ &= \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}. \end{aligned}$$

   - *Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

   On a aussi $\mathrm{T}^0 = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

   On trouve facilement que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme* $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ *on obtient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$