La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et (K_1, K_2, K_3, K_4) la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe :

$$\varphi(M) = JM - MJ.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$, $\varphi(K_3)$, $\varphi(K_4)$ comme combinaison linéaire de K_1, K_2, K_3 et K_4.
   (b) Expliquer comment est construite la matrice A de φ dans la base (K_1, K_2, K_3, K_4) puis expliciter A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. (a) Déterminer le rang de A puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(\varphi)$ puis montrer que (I, J) est une base de $\ker(\varphi)$.
4. (a) Calculer A^2 puis montrer que $A^3 - 4A = 0_4$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A.
5. En Python, on suppose la bibliothèque `numpy` importée sous le label `np` et on rappelle que la commande `np.linalg.rank(A)` donne le rang de A. On a saisi :

```
A= np.array([[0,-1,1,0],[-1,0,0,1],[1,0,0,-1],[0,1,-1,0]])
r1 = np.linalg.rank(A-2*eye([4,4]))
r2 = np.linalg.rank(A+2*eye([4,4]))
print("r1 =", r1)
print("r2 =", r2)
```

   `Python` a renvoyé :

```
r1 = 3
r2 = 3
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres non nulles de A et à la dimension des sous-espaces propres associés ?
6. (a) Déterminer le spectre de A et une base de chaque sous-espace propre.
   (b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $D = P^{-1}AP$.
   (c) Calculer P^{-1}.
   (d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (e) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul, par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

Dans la suite, on s'intéresse à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés $1,\ldots,n$; ce joueur ne pouvant accéder à un niveau suivant que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il réussi les n niveaux du jeu.

Pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, on dit que le joueur a le niveau k si et seulement si il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. On dit que le joueur a le niveau n si et seulement si il a réussi le niveau n et qu'il a le niveau 0 si et seulement si il a échoué au niveau 1.

On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p.

On note X_n le niveau du joueur et on admet que X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note R_k l'événement « le joueur réussi le niveau k ».

1. Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler ce jeu et d'afficher la valeur prise par X_n dès que l'utilisateur saisit une valeur pour p.

```
p = float(input('entrez la valeur de p dans ]0,1[:'))
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
X = __________
while _________ AND np.rand()<=p :
    X = _________
print("le niveau du joueur est :", X)
```

2. (a) Justifier soigneusement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Déterminer $P(X_n = 0)$.
   (c) Écrire l'événement $[X_n = n]$ à l'aide de certains événements R_k puis déterminer $P(X_n = n)$.
   (d) Écrire pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ à l'aide de certains événements R_k puis déterminer $P(X_n = k)$. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $k = 0$.
3. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. (a) Expliquer pourquoi X_n admet une espérance et écrire cette dernière sous forme d'une somme dépendant de n et de p.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.
5. (a) Montrer que pour tout entier naturel k et pour tout entier n supérieur ou égal à $k+1$ on a :
   $$P(X_n = k) = p^k q.$$
   (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k)$. On note p_k cette limite.
   (c) Soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $$P(X = k) = p_k.$$
   Reconnaître la loi de $X+1$ et en déduire l'espérance de X.

Exercice 3

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_n définie, pour tout réel $x \in [0,1]$ par :
   $$f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$
   Dresser le tableau de variations de f_n.
2. Pour tout entier supérieur ou égal à 1 on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx$.
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$
3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Justifier que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite.
   (b) Vérifier que : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.
   (c) Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
5. (a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait :
$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}.$$
   Montrer ensuite que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k).$$
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
   En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n.
7. (a) En utilisant l'encadrement ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3}.
   (b) Déterminer $T_n - S_n$ puis compléter le script Python suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près :

```
n = 1
s = 1-np.log(2)
while ______ :
    n = ______
    s = s + _____
print(______)
```

Problème

Partie 1

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose :
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx.$$

1. (a) Expliquer rapidement pourquoi cette intégrale est définie.
   (b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'on a :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).$$
   On **admet** que l'on peut en déduire par récurrence l'égalité :
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0).$$
2. (a) Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, déterminer $I(p+q, 0)$ puis exprimer $I(p, q)$ en fonction de p et de q.
   (b) Montrer enfin que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^p (1-x)^p \, dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel et on se propose d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\,dt$$

où $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Déterminer $f_0(x)$ pour tout réel x.
4. (a) Donner la valeur de $f_n(1)$.

   (b) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale définissant $f_n(x)$, que :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) + f_n(1-x) = 1.$$

   (c) En déduire la valeur de $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout réel x, l'expression de $f_n'(x)$ en fonction de x et de n.

   (b) Étudier, suivant la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ pour tout réel x.
6. (a) En utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton, montrer que f_n est une fonction polynomiale puis en déduire les valeurs de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ selon que n est pair ou impair.

   (b) Dresser le tableau des variations de f_n (toujours en distinguant les cas n pair et n impair).
7. Dans cette question n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   (a) Pour tout réel x, déterminer $f_n''(x)$ en fonction de x et de n.

   (b) En déduire que (C_n) possède un point d'inflexion si n est impair et trois si n est pair.

   (c) Tracer, selon la parité de n, l'allure de (C_n).