ECG2 – Mathématiques

CONCOURS BLANC 1-MATHÉMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve comporte deux sujets au choix :

— un sujet type EM Lyon (pages 2 à 5) ;

— un sujet type HEC mathématiques 1 (pages 6 à 10).

Vous devez choisir **un et un seul** sujet.

La mention du sujet choisi doit impérativement figurer sur la première page de votre copie.

Il est inutile d'essayer de faire des questions des deux sujets : seul le sujet choisi sera corrigé.

Sujet 1 – Type EM Lyon

Exercice 1

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.

On considère en particulier un variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = q^k p = (1-p)^k p.$$

Partie A

1. Montrer que la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{X}+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. En déduire que X admet une espérance et une variance et préciser leur valeur.
3. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée le réel p, elle renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
import numpy as np
def simule_X(p):
    Y = _______
    while _______ :
        Y = Y+1
    return Y-1
```

Partie B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine;
- si k est égal à zéro, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$ indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_k)$ jetons;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.

Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, place l'intégralité de ses jetons dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.

On suppose que le joueur commence avec un seul jeton : ainsi $\mathrm{Z}_0 = 1$.

On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et le réel p, elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z_n.
   Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
    def simule_Z(n,p):
        Z = 1
        for i in range(1,n+1):
            s = 0
            for j in range(1,Z+1):
                ------
            Z = ------
        return Z
```

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n la probabilité que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = 0)$.

On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. (a) Préciser les valeurs de u_0 et u_1.

   (b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $[\mathrm{Z}_n = 0]$ et $[\mathrm{Z}_{n+1} = 0]$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite croissante d'événements c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}.$$

   On note $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \backslash \mathrm{A}_{n-1}$ et $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0$. Montrer que les événements B_n, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints et que $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$.

   (b) On rappelle que d'après la question précédente,

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{B}_n).$$

   En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.

7. Justifier : $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \ell$.

8. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}_1=k]}(\mathrm{Z}_2 = 0) = (u_1)^k$.
   On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{P}_{[\mathrm{Z}_1=k]}(\mathrm{Z}_{n+1} = 0) = (u_n)^k$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_1 = k)(u_n)^k = \frac{p}{1 - q u_n}$.

9. (a) Montrer que ℓ vérifie : $(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$.

   (b) On suppose $p \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer : $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = 1$.

   (c) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$.
   En déduire : $\mathrm{P}(\mathrm{R}) < 1$.

   (d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Partie C

On suppose à présent que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses consommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ce n'a plus de jeton.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$.

10. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = v_{n-1} - v_n$.

11. Montrer, pour tout N de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} n\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} v_n - \mathrm{N}v_{\mathrm{N}}$.

12. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{n+1}$.

    (b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

13. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$.
    On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$.

    (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

    Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

(c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que l'on a : $E(T) \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$.

14. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

Exercice 2

On rappelle que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de M le réel noté Tr(M) défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J.$$

1. (a) Montrer que l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ M &\longmapsto \mathrm{Tr}(M)\end{aligned}$$

est linéaire.

(b) Déterminer une base de son noyau et vérifier : $\dim(\ker(\mathrm{Tr})) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

(b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0_4$.

(c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. On revient au cas général où J désigne une matrice non nulle quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que

$$E_1 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base de E_1.

(b) Calculer $f(J)$.

(c) On considère dans cette sous-question le cas où $\mathrm{Tr}(J) \neq 0$. Montrer que la famille formée des vecteurs de la base de E_1 et de J est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

(d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur Tr(J) pour que f soit bijectif.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0\\ 1 & \text{si } t = 0.\end{cases}$$

1. Montre que f est continue sur $]\infty, 1[$.

2. (a) Montrer : $\forall t \in]-\infty, 1[$, $\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0$.

(b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.

(c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty, 1[$.

3. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

(b) Montrer que f est dérivable ne 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(c) Montrer enfin que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Partie B

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1[, \quad \mathrm{L}(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

On rappele que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge et on admet : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et préciser L'.
7. **Étude de** L **en** 1 **:**
   (a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2, \quad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t)\,dt=\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}}\frac{-\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

   (b) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in]0,1[, \ \dfrac{-\ln(t)}{1-t}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}-t^k\ln(t)+\dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$.

   En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2, \quad \mathrm{L}(\mathrm{B})-\mathrm{L}(\mathrm{A})=\sum_{k=0}^{n}\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}}-t^k\ln(t)\,dt+\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}}\frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

   (c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2$, calculer $\displaystyle\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}}-t^k\ln(t)\,dt$.

   (d) Montrer que la fonction $t\mapsto \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.
   (*On pourra commencer par calculer les limites en* 0 *et en* 1).

   (e) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\in]0,1[\mapsto \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 0.
   On note F_n la primitive s'annulant en 0 de la fonction ainsi prolongée en 0 :

$$\forall c\in [0,1[, \quad \mathrm{F}_n(c)=\int_0^c\frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt.$$

   (f) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, F_n est monotone et bornée sur $[0,1[$. En déduire qu'elle admet une limite finie ℓ_n en 1 et que :

$$\lim_{n\to+\infty}\ell_n=0.$$

   (*Utiliser la question 7.d.*)

   (g) Justifier pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B})\in]0,1[^2, \quad \mathrm{L}(\mathrm{B})-\mathrm{L}(\mathrm{A})=\sum_{k=0}^{n}\int_{1-\mathrm{B}}^{1-\mathrm{A}}-t^k\ln(t)\,dt+\mathrm{F}_n(1-\mathrm{A})-\mathrm{F}_n(1-\mathrm{B}).$$

   En déduire que L admet une limite finie en 1 et déterminer cette limite.

   (h) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $\mathrm{L}(1)=\frac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8. (a) Justifier que la fonction $x\mapsto \mathrm{L}(x)+\mathrm{L}(-x)-\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.
   (b) En déduire : $\forall x\in[-1,1]$, $\mathrm{L}(x)+\mathrm{L}(-x)=\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$.
   (c) Préciser alors la valeur de $\mathrm{L}(-1)$.

•Fin du sujet 1 •

Sujet 2 – Type HEC Mathématiques 1

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle. Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 16, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire discrète Y sur cet espace à valeurs dans J.
- une famille $(\mathrm{X}_t)_{t\in \mathrm{J}}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in \mathrm{J}$,

$$\mathrm{X}_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \text{si } \mathrm{Y}(\omega) = t \text{ alors } \mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{X}_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(\mathrm{Y})$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(\mathrm{Y})$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0,1]$ par :

$$f_k(t) = \mathrm{P}([\mathrm{X}_t = k]).$$

1. *Un exemple avec Python.* On considère le script Python suivant :

```
def X(t):
    r = 1
    while np.random.rand()> ________ :
        r = ________
    return r
Y = np.random.rand()
Z = ________
print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $\mathrm{J} =]0,1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathscr{G}(\mathrm{Y})$.

2. (a) Soit $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}\left([\mathrm{Z}=k] \cap [\mathrm{Y}=y]\right) = f_k(y)\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right)$$

et si $\mathrm{P}\left([\mathrm{Y}=y]\right) \neq 0$,

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}=y]}([\mathrm{Z}=k]) = f_k(y).$$

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}([\mathrm{Z}=k]) = \mathrm{E}\left(f_k(\mathrm{Y})\right) \tag{1}$$

(c) *Un exemple où* $\mathrm{J} = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}([\mathrm{Y}=n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t \in \mathrm{J}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big)$ existe.

   (a) Montrer que :

$$\mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big) = \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathrm{P}\big([\mathrm{Y} = y]\big) \right).$$

   (b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Z})$ existe et que :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \mathrm{E}\big(g(\mathrm{Y})\big) \tag{2}$$

4. Soit $(\mathrm{A}_n)_n$ une suite croissante d'événements c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}.$$

   On note $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \backslash \mathrm{A}_{n-1}$ et $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0$. Montrer que les événements B_n, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints et que $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$.

   (b) On rappelle que d'après la question précédente,

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{B}_n).$$

   En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt. Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note

$$\alpha = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k,$$

ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $\mathrm{J} = \mathbb{R}^+$. On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathrm{E}(\mathrm{R}_n)$ et on pose $r_n = \mathrm{E}(\mathrm{R}_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $\mathrm{Z}_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :

$$\mathrm{I}_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \mathrm{Z}_{n-k}. \tag{*}$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $\mathrm{Y}_n = \mathrm{R}_n \mathrm{I}_n$, on a :

$$\mathrm{Z}_{n+1} \text{ suit la loi } \mathscr{P}(\mathrm{Y}_n)$$

où $\mathscr{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

5. Donner une justification de $(*)$.
6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathrm{E}(\mathrm{I}_n)$ existe. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_{n+1})$ existe et vaut $r_n \mathrm{E}(\mathrm{I}_n)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k}. \qquad (3)$$
7. *Programmation de z_n avec Python.*
   On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.
   On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ldots \alpha_d)$.
   Écrire une fonction Python d'entête `def z(Delta,n)` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ.
8. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant 0}$, $(\mathrm{V}_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{U}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{V}_n) = 1$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{U}_n \cap \mathrm{V}_n) = 1$.

On rappelle que l'on dit qu'un événement A *est presque sûr lorsque* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1$.

9. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [\mathrm{Z}_k = 0]$ et B l'événement "la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours".
   (a) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$.
   (b) En distinguant les cas où $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [\mathrm{Z}_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir que, pour tout $p \geqslant d$,
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [\mathrm{Z}_k = 0]\right) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [\mathrm{Z}_k = 0]\right)$$
   puis que $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [\mathrm{Z}_k = 0]\right)$.
   (c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}([\mathrm{Z}_n = 0]) = 1$.
   (d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{L} = k)$ où L est une variable aléatoire de loi certaine égale à 0.
10. (a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{P}([\mathrm{Z}_{n+1} = 0]) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{Y}_n}\right).$$
   (b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x réel, $e^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

11. On suppose, dans cette question, qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, $r_n \alpha \leqslant \rho$.
    On note (H_1) cette hypothèse.

(a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1}\sum\limits_{k=0}^{d} a_k t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta\in\,]0,1[$ tel que $\theta^{d+1}\geqslant \rho\left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose $M=\max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]}\dfrac{z_k}{\theta^k}$.

(b) Montrer que pour tout $n\geqslant N$, $z_n\leqslant M\theta^n$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=0$.

On montrerait de même que s'il existe $N\in\mathbb{N}$ *et* $\rho>1$ *tels que, pour tout* $n\geqslant N$, $r_n\alpha\geqslant\rho$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=+\infty$. *On note* (H_2) *cette hypothèse.*

- On suppose, dans les questions 13 à 16 , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypohèse.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$U_n=\begin{pmatrix} z_n\\ z_{n-1}\\ \vdots\\ z_{n-d}\end{pmatrix}$$

avec $z_{-1}=\ldots=z_{-d}=0$.

12. (a) Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L=(a_0\ldots a_d)$, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=AU_n$.

(b) En déduire que, pour tout $n\geqslant 0$, $U_n=A^nU_0$ puis que $z_{n+1}=LA^nU_0$.

13. Dans cette question, $d=2$ et $L=\begin{pmatrix}\frac16 & \frac23 & \frac16\end{pmatrix}$.

(a) Pour tout réel λ, on pose :

$$E_\lambda=\left\{X\in\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})\mid AX=\lambda X\right\}.$$

Montrer que E_1, $E_{-\frac12}$ et $E_{-\frac13}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 et déterminer une base de chacun d'eux.

(b) Soient (V_1) une base de E_1, (V_1) une base de $E_{-\frac12}$ et (V_3) une base de $E_{-\frac13}$ de sorte que le premier coefficient de V_1, V_2 et V_3 soit égal a 1.

Montrer que (V_1,V_2,V_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(c) Déterminer $(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{R}^3$, tel que $U_0=s_1V_1+s_2V_2+s_3V_3$.

(d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

14. On revient au cas général.

(a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que E_λ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si $\lambda^{d+1}=\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$ et qu'alors E_λ est de dimension 1.

On note Sp(A) l'ensemble des réels λ tels que $\lambda^{d+1}=\sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$.

(b) Montrer que E_1 n'est pas réduit au vecteur nul et déterminer en une base (V) telle que la somme des coordonnées de V soit égale à $d+1$.

(c) Montrer que $-1\notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda|>1$, alors $\lambda\notin\mathrm{Sp}(A)$.

15. On pose pour tout $k\in[\![0,d]\!]$, $b_k=\sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W=\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_d\end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k w_k=0$.

(a) Montrer que pour tout $W\in H$, $AW\in H$.

(b) Déterminer l'unique réel s tel que $U_0-sV\in H$.

(c) Nous admettons que, pour tout $W\in H$, $LA^nW\to 0$ quand $n\to+\infty$.

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=s$.

16. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

•Fin du sujet 2 •