ECE2-Colle 15

30/01/23 au 03/02/23

1 Cours

1.1 Réduction des matrices

Valeurs propres, vecteurs propres : valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée; spectre. Caractérisation des valeurs propres : $\lambda \in \mathrm{Sp(A)} \Longleftrightarrow \mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible; valeurs propres d'une matrice triangulaire. Méthode : déterminer les valeurs propres de A en trouvant la réduite de Gauss de $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$

Sous-espaces propres : définition des sous-espaces propres, cas particulier de la valeur propre 0.

Polynômes annulateurs : définition d'un polynôme de matrice; définition de polynôme annulateur. Les valeurs propres d'une matrice sont **des** racines de tout polynôme annulateur. Déterminer l'inverse d'une matrice avec un polynôme annulateur.

Famille de vecteurs propres : si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{F}_i$ est une famille libre de $\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})$ alors la famille $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_p$ est une famille libre. Conséquence : si $\mathrm{Sp(A)} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})\right) \leqslant n$ et le nombre de valeurs propres est $\leqslant n$.

Diagonalisabilité : définition de matrice diagonalisable. Critère de diagonalisabilité : $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$est diagonalisable $\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})\right) = n$. Condition suffisante : en dimension n avoir n valeurs propres distinctes implique être diagonalisable. Les matrices symétriques sont diagonalisables.

Applications : calcul des puissances d'une matrice diagonalisable; étude de suites récurrentes.

1.2 Systèmes différentiels

Rappels de première année : solution des équations de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$; les solutions de $y'(t) + ay(t) = b(t)$ sont de la forme solution particulier + solution de l'équation homogène; solution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.

Systèmes différentiels : mise sous forme matricielle, résolution dans le cas où la matrice associée est diagonalisable. Application à la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogène

États stables et trajectoires : définition des états stables, méthode pour les déterminer; trajectoires convergentes/divergentes, lien entre la nature des trajectoires et le signe des valeurs propres.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir déterminer les valeurs propres d'une matrice.
2. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
3. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur. Savoir déterminer l'inverse d'une matrice à partir d'un polynôme annulateur.
4. Savoir déterminer si une matrice A est diagonalisable ou non. Le cas échéant, savoir déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
5. Savoir résoudre une équation linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 ou 2.
6. Savoir résoudre une équation linéaire non homogène à coefficients constants d'ordre 1 en **étant guidé**.
7. Savoir résoudre un système différentiel dans le cas diagonalisable en **étant guidé**.
8. Savoir déterminer les états stables, des trajectoires divergentes/convergentes.

3 Questions de cours

- Définitions : matrice diagonalisable, valeurs propres, sous-espace propre. États stables, trajectoires convergentes/divergentes.
- Propositions : critère de diagonalisabilité, condition suffisante de diagonalisabilité, diagonalisabilité des matrices symétriques, caractérisation des valeurs propres. Solution des équations de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$.