TD6-Intégration

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 te^{2t}dt$,
2. $\int_1^e \ln(x)dx$,
3. $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}dx$,
4. $\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy$,
5. $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr$,
6. $\int_0^2 x\sqrt{3x+1}dx$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *soit* f_n *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. *Montrer que pour tout entier naturel* n, I_n *est bien définie et calculer* I_1.
2. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

On considère la fonction f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt.$$

1. *Justifier que* f *est bien définie et est dérivable sur* $]0,+\infty[$. *Calculer sa fonction dérivée.*
2. *En déduire* $f(x)$ *pour tout* $x > 0$.
3. *Retrouver ce résultat à l'aide d'un changement de variable.*

Exercice 4

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$,
2. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$,
3. $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$,
4. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt$.

Exercice 5

Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Exercice 6

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ *la fonction* h *par :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$.

1. *Étudier le signe de* h.
2. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ *est convergente et déterminer sa valeur.*
3. (a) *Justifier que* $H : A \mapsto \int_1^A h(x)dx$ *est croissante sur* $[1,+\infty[$.

   (b) *Montrer que* H *est majorée par* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ *sur* $[1,+\infty[$.

   (c) *Montrer que* $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ *est convergente.*

Exercice 7

1. *Montrer que si* f *est une fonction continue paire et que* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *converge alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *converge et vaut* $2\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
2. *Montrer que si* f *est une fonction continue impaire et que* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *converge alors* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *converge et vaut* 0.