TD1-Études de suites

Exercice 1.

1. On commence par étudier la fonction f sur $[0,1]$. C'est une fonction polynomiale donc dérivable sur son ensemble de définition. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3(1-x)^2 + 1.$$

Étudions le signe de la dérivée sur $[0,1]$: soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \geq (1-x)^2 &\Longleftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} \leq 1-x \leq \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[1-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right] \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[1-\sqrt{\frac{1}{3}}, 1\right] \quad \text{car } x \in [0,1] \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$.
On en déduit :

x	0	$1-\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	1 ↘		↗ 1

Enfin, en remarquant que

$$f\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} > 0,$$

le tableau de variation de f permet de conclure que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[. \qquad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \in]0,1[$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 = 0.4$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0,1[$. D'après $(*)$, on a donc :
  $$u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[.$$
  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (1-u_n)^3 > 0$$
car $u_n < 1$ d'après la question précédente. Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

3. D'après la question 1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et d'après la question 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
On sait par ailleurs que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc ℓ est un point fixe de f. Déterminons les points fixes de f. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(x) = x \Longleftrightarrow (1-x)^3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$
L'unique point fixe de f est donc 1.
Par conséquent, $\ell = 1$.

Exercice 7.

1. La fonction f est la composée $h \circ g$ des fonctions
   - g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x) = x+1$, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et telle que $g(]-1,+\infty[) =]0,+\infty[$;
   - $h = \frac{3}{2}\ln$ définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

   Par le théorème de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et
   $$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} > 0.$$
   Ainsi f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1,2]$ par
   $$\forall x \in [1,2], \quad g(x) = f(x) - x.$$
   En tant que somme de fonctions dérivables sur $[1,2]$, g est dérivable sur $[1,2]$ et
   $$\forall x \in [1,2], \quad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-2x}{2(x+1)} < 0.$$
   Ainsi g est strictement décroissante sur $[1,2]$. Comme g est aussi continue sur $[1,2]$, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[1,2]$ sur $g([1,2]) = [g(2), g(1)]$.
   Or,
   $$g(1) = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(8) - \ln(e^2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{e^2}\right) > 0$$
   et
   $$g(2) = \frac{3}{2}\ln(3) - 2 = \frac{1}{2}(\ln(27) - \ln(e^4)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{e^4}\right) < 0.$$
   Ainsi, $0 \in g([1,2]) = [g(2), g(1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $[1,2]$.
   Finalement, comme pour tout $x \in [1,2], \quad g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x$, l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[1,2]$ que l'on note α.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n \geq \alpha$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 3$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et supérieur à α. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de f. Par conséquent, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus, par croissance de f et hypothèse de récurrence, on a :
     $$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(\alpha) = \alpha.$$
     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq \alpha.$$
4. Soit $x \geq 1$. Alors $x+1 \geq 2$ donc
   $$0 \leq f'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} \leq \frac{3}{4}.$$
   Ainsi
   $$\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$
5. La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a
   $$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
   $$\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2, \quad x \geq y \Rightarrow 0 \leq f(x) - f(y) \leq \frac{3}{4}(x-y).$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité avec $x = u_n$ et $y = \alpha$ on obtient
   $$0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{3}{4}(u_n - b).$$
   Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc
   $$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha).$$
   Ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha).$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     D'après la première partie de la question, on a
     $$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$
     et par hypothèse de récurrence, on a
     $$0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha).$$

Par conséquent,

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha) \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha).$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha).$$

6. Comme $0 \leq \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha) = 0$.
   Par encadrement, on a donc
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$$
   c'est-à-dire
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 9.

1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ [1] et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \left] \lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, n possède un unique antécédent par f. Ainsi, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution, notée x_n.
3. Par définition, de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = n.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc
   $$f(x_n) = n < f(x_{n+1}) = n + 1.$$
   Deux rédactions sont possibles :
   - méthode 1 : d'après le théorème de la bijection, on sait que f^{-1} est strictement croissante. On en déduit donc que
   $$x_n = f^{-1}(f(x_n)) < x_{n+1} = f^{-1}(f(x_{n+1})).$$
   - méthode 2 : supposons par l'absurde que $x_n \geq x_{n+1}$. Par croissance de f, on aurait alors
   $$n = f(x_n) \geq f(x_{n+1}) = n + 1$$
   ce qui est absurde. Ainsi $x_n < x_{n+1}$.

   Peu importe la méthode, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.
   Par conséquent la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. - Méthode 1 : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   Supposons par l'absurde que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = x_n + e^{x_n} = n.$$
   Mais f est continue sur $\mathbb{R}$ donc le membre de gauche a pour limite $f(\ell) \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$ alors que le membre de droite a pour limite $+\infty$.
   Ceci est une contradiction. Par conséquent $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   - Méthode 2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$ donc f^{-1} n'est pas majorée. D'après le théorème de la limite monotone, comme f^{-1} est croissante et non majorée on a
   $$\lim_{y \to +\infty} f^{-1}(y) = +\infty.$$
   Par conséquent,
   $$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = +\infty.$$

1. On peut aussi remarquer que f et dérivable et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 1 > 0$.