Aix–Marseille Université 2018-2019

Mathématiques – L2 – MPCI

DS : ESPACES PRÉHILBETIENS ET EUCLIDIENS

Exercice 1 (5 pts) *1. (a) Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(X,Y) =^t XA_1Y$.*

Par linéarité du produit matriciel et de la transposition, ϕ est bilinéaire. De plus,

$$\phi(X,Y) =^t \phi(X,Y) =^t ({}^tXA_1Y) =^t Y^tA_1X =^t YA_1X = \phi(Y,X),$$

car A_1 est symétrique. Il reste donc à vérifier si ϕ est définie positive. Soit X un vecteur colonne de coordonnées x, y, z. Alors,

$$\begin{aligned}\phi(X,X) &= 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz + 2yz \\ &= 2\left[(x - \frac{y}{2} - z)^2 - \frac{y^2}{4} - z^2 - yz\right] + y^2 + 4z^2 + 2yz \\ &= 2(x - \frac{y}{2} - z)^2 + \frac{y^2}{2} + 2z^2.\end{aligned}$$

Ainsi $\phi(X,X) \geq 0$ avec égalité ssi $z = y = x = 0$ ssi $X = 0$. Donc ϕ est un produit scalaire et sa matrice dans la base canonique est par construction A_1.

(b) Supposons que A_2 soit la matrice d'un produit scalaire ϕ sur un espace E. Il existe donc une base de E dans laquelle ϕ s'exprime :

$$\phi(X,Y) =^t XA_2Y.$$

Or, A_2 possède deux colonnes liées : $2C_2 - C_3 = 0$. Le vecteur dont les coordonnées dans la base sont $X =^t (0, 2, -1, 0)$ appartient au noyau de A_2. En particulier,

$$\phi(X,X) =^t A_2X = 0.$$

Donc ϕ n'est pas définie positive. Contradiction. Ainsi A_2 n'est pas la matrice d'un produit scalaire.

Barème :1 pt par matrice.

2. (a) Par linéarité du produit matriciel et de la transposition, ϕ est bilinéaire. De plus, comme A est symétrique, on montre comme à la question précédente que ϕ est symétrique. Si $X =^t (x, y)$ alors,

$$\phi(X,X) = x^2 - 4xy + 5y^2 = (x - 2y)^2 + y^2,$$

Donc ϕ est définie positive. Ainsi c'est un produit scalaire.

Barème :0,5 pt pour la symétrie + 0,5 pt pour défini positif.

(b) On a

$$\begin{aligned}\phi(u_a\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x + ay & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (2x + ay)(u - 2v) \\ &= x(2u - 4v) + y(au - 2av) \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u - 4v \\ au - 2av \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

On cherche à exprimer $\begin{bmatrix} 2u-4v \\ au-2av \end{bmatrix}$ *sous la forme* $A\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ *car on aura alors*

$$\phi(u_a\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \phi(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}).$$

En résolvant le système, on trouve $u' = (5+a)(2u-4v)$ *et* $v' = (4+a)(u-2v)$. *Ainsi, on a montré que*

$$u_a^*(u,v) = ((5+a)(2u-4v), (4+a)(u-2v)).$$

Par ailleurs, $u_a = u_a^*$ *ssi* $a = -4$.

Barème :1,5 pt pour l'adjoint +0,5 pt pour déterminer a.

Exercice 2 (4 pts)

1. *Soient* $S \in S_n(\mathbb{R})$ *et* $A \in A_n(\mathbb{R})$ *alors,*

$$\langle S, A\rangle = tr({}^tSA) = tr(SA) = tr(AS) = -tr({}^tAS) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle.$$

Donc $\langle S, A\rangle = 0$. *Cela montre que* $S_n(\mathbb{R})$ *et* $A_n(\mathbb{R})$ *sont orhtogonaux. Par ailleurs, si* $M \in M_n(\mathbb{R})$, *alors* $M = S + A$ *où* $S = \frac{1}{2}({}^tM + M)$ *est symétrique et* $A = \frac{1}{2}(M -{}^t M)$ *est antisymétrique. Par conséquent,* $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ *et la somme est directe car* $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ *puisqu'ils sont orthogonaux.*

⚠Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux ($S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$) n'est pas pareil que montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $A_n(\mathbb{R})$ ($S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$). En particulier, la première partie de la question n'implique pas que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe ni même que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$.

Barème :1 pt pour l'orthogonalité + 1pt pour suplémentaire.

2. *D'après la question,* $p(M) = \frac{1}{2}(M +^t M)$.

Barème :0.5 pt.

3. *D'après la caractérisation de la projection sur un sev, on a*

$$d(M, S_3(\mathbb{R})) = \parallel M - p(M) \parallel = \parallel \frac{1}{2}(M -^t M) \parallel .$$

Or

$$M -^t M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2.$$

Barème :1,5 pt (justification + calcul correct).

Exercice 3 (7 pts)

1. *On commence par déterminer un base de* F *:*

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F &\iff \begin{cases} 3z + 2t &= 0 \\ x+y+t+z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z &= -\frac{2}{3}t \\ x+y+\frac{1}{3}t &= 0 \end{cases} \\ &\iff (x,y,z,t) = y(-1,1,0,0) + t(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1) \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $e_1 = (-1, 1, 0, 0)$ *et* $e_2 = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1)$ *forment une base de* F.
Ensuite, on orthonormalise cette base par l'algorithme de Gram-Schmidt. On norme le vecteur e_1 *en posant* $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1$ *puis on cherche* $f_2 = \mu(e_2 - \lambda f_1)$ *avec* $\mu \neq 0$ *de sorte que* f_2 *soit normé et orthogonal à* f_1. *Cette dernière condition impose*

$$0 = \langle f_1, f_2\rangle = \mu(\langle f_1, e_2\rangle - \lambda),$$

donc

$$\lambda = \langle f_1, e_2\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Ainsi $f_2 = \frac{\mu}{6}(-1, -1, -4, 6)$. *Enfin, comme on veut que* f_2 *soit normé, cela impose la valeur de* μ *(au signe près) :*

$$\mu = \| \frac{1}{6}(-1, -1, -4, 6) \|^{-1} = \frac{6}{3\sqrt{6}}.$$

Ainsi, une base orthonormée de F *est donnée par*

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0) \text{ et } f_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(-1, -1, -4, 6).$$

Barème :1 pt pour la base + 2pts pour l'orthonormalisation.

2. *Puisque* f_1, f_2 *est une base orthonormée de* F, *la projection* p_F *s'exprime :*

$$p_F(x) = \langle f_1, x\rangle f_1 + \langle f_2, x\rangle f_2.$$

On trouve alors

$$p_F((1,0,0,0)) = \frac{1}{27}(14, -13, 2, -3), \ p_F((0,1,0,0)) = \frac{1}{27}(-13, 14, 2, -3),$$
$$p_F((0,0,1,0)) = \frac{1}{27}(2, 2, 8, -12), \ p_F((0,0,0,1)) = \frac{1}{27}(-3, -3, -12, 18).$$

Du coup, la matrice est :

$$\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}.$$

Barème :2,5 pts (justification + calculs corrects).

3. *La distance de* $(1, 0, 0, 0)$ *à* F *est*

$$d((1,0,0,0), F) = \| (1,0,0,0) - p_F(1,0,0,0) \| .$$

D'après la question précédent, un calcul donne

$$d((1,0,0,0), F) = \sqrt{\frac{13}{27}}.$$

Barème :1,5 pts (justification + calcul correct.

Exercice 4 (4pts) 1. *Soit* $f \in H^{\perp}$. *La fonction* $g : t \mapsto tf(t)$ *est continue sur* $[0, 1]$ *et* $g(0) = 0$ *donc* $g \in H$. *Il s'ensuit que*

$$0 = \langle f, g\rangle = \int_0^1 tf(t)^2 dt.$$

En particulier, pour tout $t \in [0, 1]$, $tf(t)^2 = 0$ *puisque l'intégrande est positif et continu. Donc, pour tout* $t > 0$, $f(t) = 0$ *puis, par continuité de* f, $f(t) = 0$ *pour tout* $t \in [0, 1]$. *Ainsi,* f *est la fonction nulle. Par conséquent,* $H^{\perp} = \{0\}$.

Barème :1 pt.

2. *Supposons par l'absurde que ϕ possède un adjoint ϕ^*.*
   (a) *Pour $h \in H$, comme $h(0) = 0$ alors $\phi(h) = h$. Soient $h \in H$ et $f \in E$. On a :*
   $$\langle h, f \rangle = \langle \phi(h), f \rangle = \langle h, \phi^*(f) \rangle.$$
   En particulier, par linéarité à gauche, pour tout $h \in H$, on a
   $$\langle h, f - \phi^*(f) \rangle = 0,$$
   ie $f - \phi^*(f) \in H^\perp$. D'après la question précédent, on a donc $\phi^*(f) = f$ pour tout $f \in E$.
   Barème :1,5 pts.
   (b) *Soit $f : t \mapsto t + 1$. On a par ce qui précède :*
   $$\langle \phi(f), f \rangle = \langle f, \phi^*(f) \rangle = \langle f, f \rangle.$$
   Or, le membre de gauche vaut
   $$\int_0^1 t(t+1)dt = \frac{5}{6},$$
   et le membre de droite,
   $$\int_0^1 (t+1)^2 dt = \frac{7}{3}.$$
   Contradiction. Donc ϕ n'a pas d'adjoint.
   Barème :0.5 pt.

Exercice 5 (3 pts) *Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ et considérons l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par*
$$\phi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$
Par linéarité de l'intégral et bilinéarité du produit, ϕ est une forme bilinéaire qui est de plus symétrique (trivial). Par ailleurs, par positivité de l'intégrale
$$\phi(f, f) = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$$
avec égalité ssi f est identiquement nulle sur $[a, b]$. Cela montre que ϕ est un produit scalaire.

Barème :1 pt.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors : pour tout $f, g \in E$:
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)$$
avec égalité ssi f et g sont liées.

En prenant g constante égale à 1 on trouve :
$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt$$
avec égalité ssi f et g sont liées ssi f est constante.

Barème :1 pt pour l'inégalité + 1 pt pour le cas d'égalité.