Exercice 1 1) La fonction $t \mapsto te^{2t}$ est continue sur $[0,2]$ donc l'intégrale est bien définie.

Pour tout $t \in [0,2]$, $te^{2t} = \frac{1}{2} t \times 2e^{2t}$

En posant : $u : t \mapsto t$, $v : t \mapsto e^{2t}$ qui sont de classe C^1 sur $[0,2]$

On a $\int_0^2 te^{2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 u(t)v'(t)dt$

$$= \frac{1}{2}\left([u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t)dt \right) \text{ par IPP}$$

$$= \frac{1}{2}\left([te^{2t}]_0^2 - \int^2 e^{2t}dt \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2e^4 - \frac{1}{2}[e^{2t}]_0^2 \right) = e^4 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3e^4+1)$$

2) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[1,2]$ donc l'intégrale existe

Par IPP, en posant $u : x \mapsto \ln(x)$, de classe C^1 sur $[1,e]$
$v : x \mapsto x$

on a :
$$\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e u(x)v'(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x\, dx$$
$$= e - (e-1) = 1$$

3) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est continue sur $[2,4]$ donc l'intégrale existe

$$\forall x \in [2,4]\ \frac{1}{1-x^2} = \frac{1-x+x}{1-x^2} = \frac{1-x}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x^2}$$

donc, par linéarité

$$\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}dx = \int_2^4 \frac{1}{1+x}dx + \int_2^4 \frac{x}{1-x^2}dx$$
$$= [\ln(1+x)]_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{-2x}{1-x^2}dx$$
$$= [\ln(1+x)]_2^4 - \frac{1}{2}[\ln(|1-x^2|)]_2^4$$
$$= \ln(5) - \ln(3) - \frac{1}{2}\ln(15) + \frac{1}{2}\ln(3)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(5) - \ln(3)$$

4) La fonction $y \mapsto \sqrt{y}\ln(y)$ est continue sur $[1,5]$ donc l'intégrale existe

$$\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y) = \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\ln(y) \right]_1^5 - \int_1^5 \frac{y^{3/2}}{3/2} \times \frac{1}{y}dy$$

par intégration par parties. Donc

$$\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y) = \frac{2}{3}5\sqrt{5}\ln(5) - \frac{2}{3}\int_1^5 y^{1/2}dy$$
$$= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_1^5 = \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{20}{9}\sqrt{5} + \frac{4}{9}$$

5) La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale est donc bien définie.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_0^1 x \times \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}dx$$
$$= \left[x\sqrt{2x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx \text{ par IPP}$$
$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_0^1 2\sqrt{2x+1}\,dx$$
$$= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}(3^{3/2} - 1) = 1/3$$

6)*
$$\int_0^2 x\sqrt{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^2 x \times 3\sqrt{3x+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left[\frac{x(3x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{(3x+1)^{3/2}}{3/2}dx \right)$$
$$= \frac{4}{9} \times 7\sqrt{7} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{3}\int_0^2 3(3x+1)^{3/2}dx$$
$$= \frac{28}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{27}\left[\frac{(3x+1)^{5/2}}{5/2} \right]_0^2 = \frac{28}{9}\sqrt{7} - \frac{4}{135}(7^2\sqrt{7} - 1)$$
$$= \frac{(420 - 4 \times 7^2)\sqrt{7}}{135} + \frac{4}{135}$$
$$= \frac{8 \times 7 \times 4}{135}\sqrt{7} + \frac{4}{135} = \frac{224\sqrt{7}+4}{135}$$

* La fonction $x \mapsto x\sqrt{3x+1}$ est continue sur $[0,2]$, l'intégrale est donc bien définie.

Exercice 3

1) Pour tout $x \in]0,+\infty[$ la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[1/x ; x]$ (si $x \geq 1$) ou sur $[x ; 1/x]$ (si $x < 1$). Donc f est bien définie.

Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ sur $]0,+\infty[$.
(F existe car $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$).

Alors $f(x) = F(x) - F(1/x) \quad \forall x \in]0,+\infty[$.

Or * F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
* De plus $x \mapsto 1/x$ est dérivable à valeur dans $]0,+\infty[$

Donc par composition puis somme, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = F'(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) F'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0$$

2) f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ de dérivée identiquement nulle. Donc f est constante sur $]0,+\infty[$.
Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) = f(1) = 0$.

3) Soit $x \in]0,+\infty[$

$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. Effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$; $t = \frac{1}{u}$

Alors $du = -\frac{1}{t^2} dt = -u^2 dt$. Ainsi $-\frac{du}{u^2} = dt$

donc $$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_{x}^{1/x} \frac{\ln(1/u)}{1+(\frac{1}{u})^2} \times \frac{du}{-u^2}$$

$$= -\int_{x}^{1/x} \frac{-\ln(u)}{u^2+1} du$$

$$= \int_{x}^{1/x} \frac{\ln(u)}{u^2+1} du = -\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(u)}{u^2+1} du = -f(x)$$

Ainsi $f(x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) = 0$.

Exercice 4

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $[2,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $x \in [2,+\infty[$.

$$\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \int_2^x (t-1)^{-1/2} dt = \left[\frac{(t-1)^{1/2}}{1/2}\right]_2^x = 2\sqrt{x-1} - 2$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x-1} - 2 = +\infty$

Donc l'intégrale diverge

2) La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^A -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^A$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A xe^{-x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-A^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$

3) La fonction $t\mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $]-\infty;0]$

donc l'intégrale est impropre en $-\infty$.

Soit $x\in\,]-\infty;0]$

$$\int_x^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_x^0\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\int_x^0 2t(1+t^2)^{-2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+t^2)^{-1}}{-1}\right]_x^0$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0\frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}$

donc l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ converge et vaut $-\frac{1}{2}$

4) La fonction $t\mapsto\frac{1}{1+e^t}$ est continue sur $[0,+\infty[$

donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $x\in[0,+\infty[$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt \overset{u=e^t}{=} \int_1^{e^x}\frac{1}{(1+u)u}du = \int_1^{e^x}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$= \left[\ln(u)-\ln(1+u)\right]_1^{e^x}$$

$$= x-\ln(1+e^x)+\ln(2)$$

$$= x - x - \ln(1+e^{-x})+\ln(2)$$

$$= -\ln(1+e^{-x})+\ln(2)$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{1}{1+e^t}dt = \ln(2)$

donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}dt$ converge et vaut $\ln(2)$

OU

$\forall t\in[0,+\infty[,\quad \frac{1}{1+e^t} = \frac{e^{-t}}{e^{-t}(1+e^t)} = \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}$

donc $$\int_0^A\frac{1}{1+e^t}dt = \int_0\frac{e^{-t}}{e^{-t}+1}dt = -\int_0\frac{-e^{-t}}{e^{-t}+1}dt$$

$$= -\left[\ln(|e^{-t}+1|)\right]_0^A$$

$$= \ln(2)-\ln(e^{-A}+1)$$

et on retrouve le même résultat.