Nom :
Prénom :

Interro 7 le 04/12.

Exercice 1. A l'aide d'un DL, déterminer un équivalent au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}.$$

Réponses. Pour tout réel x différent de 0, on a :

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}.$$

- Déterminons un équivalent du dénominateur. Par équivalent usuel on sait que

$$e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$$

donc par compatibilité de la relation d'équivalence avec le produit, on obtient

$$x(e^x-1)\underset{x\to 0}{\sim}x^2.$$

- Déterminons un équivalent du numérateur. Le numérateur fait apparaître une différence de deux termes équivalents ($e^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$) donc on ne peut pas espérer s'en sortir en factorisant par le terme prépondérant ! On ne peut pas non plus soustraire les équivalents ! On va donc utiliser un DL : on sait que

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc

$$x-(e^x-1)=x-(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1)=-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, comme $\underset{x\to 0}{o}(x^2)=\underset{x\to 0}{o}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ alors

$$x-(e^x-1)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}.$$

- Finalement, par compatibilité des équivalent avec le quotient, on obtient :

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad f(x)=2e^x-\sqrt{1+x}.$$

1. Déterminer un DL d'ordre 2 en 0 de f.
2. En déduire l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Réponses. 1. On sait que

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\quad\text{et}\quad\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned}f(x)=2e^x-\sqrt{1+x}&=2(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2))-(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2))\\&=1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}x^2+2\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\&1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

car une combinaison linéaire de $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ est un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ (attention, quand on écrit $2\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\underset{x\to 0}{o}(x^2)=\underset{x\to 0}{o}(x^2)$, il serait faux de croire que c'est parce que $\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\underset{x\to 0}{o}(x^2)=0$!)
Ainsi, f possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x)=1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. En particulier, la tangente au point d'abscisse 0 à $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation

$$y=1+\frac{3}{2}x$$

et comme $\frac{9}{8}>0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

Nom :
Prénom :

Interro 7 le 04/12.

Exercice 1. A l'aide d'un DL, déterminer un équivalent au voisinage de 0 de

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

Réponses. Pour tout réel x différent de 0, on a :

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

- Déterminons un équivalent du numérateur. Le numérateur fait apparaître une différence de deux termes équivalents ($\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$) donc on ne peut pas espérer s'en sortir en factorisant par le terme prépondérant ! On ne peut pas non plus soustraire les équivalents ! On va donc utiliser un DL : on sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc

$$x - \ln(1+x) = x - (x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, comme $\underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ alors

$$x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

- Finalement, par compatibilité des équivalent avec le quotient, on obtient :

$$\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = e^x - \frac{2}{\sqrt{1+x}}.$$

1. Déterminer un DL d'ordre 2 en 0 de f.
2. En déduire l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Réponses.

1. On sait, par DL usuel, que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) = e^x - \frac{2}{\sqrt{1+x}} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 2\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\ &= -1 + 2x - \frac{1}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 2\underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= -1 + 2x - \frac{1}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

car une combinaison linéaire de $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ est un $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$
Ainsi, f possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = -1 + 2x - \frac{1}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. En particulier, la tangente au point d'abscisse 0 à $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation

$$y = -1 + 2x$$

et comme $-\frac{1}{4} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 0.