Chapitre 5 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base et la dimension.*

1. $F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(1,1,1))$.
2. $F = \mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))$.
3. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\right\}$.

Test 2 ($\star$,*Voir solution.*)

On se place dans $\mathbb{R}[X]$.

1. *Soient* n *et* p *deux entiers naturels non nuls. Soient* $(P_0,\dots,P_n)$ *une famille de vecteurs de degrés inférieurs ou égaux à* p. *Justifier que* $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_n) \subset \mathbb{R}_p[X]$.
2. *En déduire que* $\mathbb{R}[X]$ *ne possède pas de base de cardinal fini.*

Test 3 (*Voir solution.*)

1. *Montrer que* $((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Montrer que* $(1+X+X^2, X+X^2, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
3. *La famille* $((1,1),(1,2),(2,1))$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^2$ *?*

Test 4 (*Voir solution.*)

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$,
2. $\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$,
3. $\mathscr{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$;
2. $\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$.

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\3 & 5 & -1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}4 & 1 & 11 & 3\\-2 & 1 & -7 & -9\\1 & -1 & 4 & 7\\1 & 2 & 1 & -8\end{pmatrix}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices :

1. $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{pmatrix}$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\\2 & 0 & 7\end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La famille* $((1,2,0),(1,1,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F. *En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(F)=2$.
2. *Comme* $(-2,-4)=-2(1,2)$ *alors :*
$$F=\mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))=\mathrm{Vect}((1,2)).$$
Ainsi, $((1,2))$ *est une base de* F *et* $\dim(F)=1$.
3. *On a*
$$F=\left\{(x,x+3z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x(1,1,0)+z(0,3,1)\in\mathbb{R}^3 \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}((1,1,0),(0,3,1)).$$
Donc $((1,1,0),(0,3,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F. *En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(F)=2$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On sait que tout sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$ *contenant* $P_0,\dots,P_n$ *contient* $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_n)$ *(propriété 6 du chapitre 3). Or, pour tout* $i\in\{0,\dots,n\}$, $P_i\in\mathbb{R}_p[X]$ *donc* $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_n)\subset\mathbb{R}_p[X]$.
2. *Supposons par l'absurde que* $\mathbb{R}[X]$ *possède une base de cardinal fini* $(P_0,\dots,P_n)$ *et notons, pour* $i=0,\dots,n$, $d_i=\deg(P_i)\in\mathbb{N}$ *(aucun des* P_i *n'est le polynôme nul car la famille est une base donc* $d_i\in\mathbb{N}$ *pour tout* i*). Soit* p *un entier tel que, pour tout* $i\in\{0,\dots,n\}$, $p\geqslant d_i$ *(par exemple,* $p=d_1+\cdots+d_n$*). Alors, d'après la question précédente on a*
$$\mathbb{R}[X]=\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_n)\subset R_p[X].$$
Ceci est absurde ! Ainsi $\mathbb{R}[X]$ *ne possède pas de base de cardinal fini.*

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $\mathscr{F}=((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$. *Soit* $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$.
$$\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(1,1,1,0)+\lambda_3(1,1,0,3)+\lambda_4(1,0,3,3)\iff\left\{\begin{array}{ccccccccc}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&+&\lambda_4&=&0\\\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&&&=&0\\\lambda_1&+&\lambda_2&&&+&3\lambda_4&=&0\\\lambda_1&&&+&3\lambda_3&+&3\lambda_4&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ccccccccc}\lambda_1&+&\lambda_2&+&\lambda_3&+&\lambda_4&=&0\\&&&&&&-\lambda_4&=&0\\&&&&-\lambda_3&+&2\lambda_4&=&0\\\lambda_1&&&+&3\lambda_3&+&3\lambda_4&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ccc}\lambda_4&=&0\\\lambda_3&=&0\\\lambda_1&=&0\\\lambda_2&=&0\end{array}\right.$$
Ainsi, la famille est libre et comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F})=4=\dim(\mathbb{R}^4)$, *c'est donc une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Soit* $\mathscr{F}=(1+X+X^2,X+X^2,X^2)$. *On a*
$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(1+X+X^2,X+X^2,X^2)&=\mathrm{Vect}(1+X+X^2-(X+X^2),X+X^2,X^2)\\&=\mathrm{Vect}(1,X+X^2-X^2,X^2)\\&=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\mathbb{R}_2[X].\end{aligned}$$
La famille $\mathscr{F}$ *est donc génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$ *et comme* $\mathrm{Card}(\mathscr{F})=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$, *c'est donc une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
3. *Comme* $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, *toute base de* $\mathbb{R}^2$ *est constituée de deux vecteurs. Donc la famille* $((1,1),(1,2),(2,1))$ *n'est pas une base de* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

On a $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))\subset\mathbb{R}^2$.
De plus, la famille $((1,2),(2,1))$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$ *et libre car formée de deux vecteurs*

non colinéaires. Par conséquent c'est une base de $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$ *et donc* $\dim \mathrm{Vect}((1,2),(2,1)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. *Ainsi* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La famille* $\mathscr{F}_1$ *est libre, c'est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)$. *Donc*
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_1) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)) = 3.$$
2. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ *et la famille* $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est libre (formée de deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2)$. *Ainsi*
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_2) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2)) = 2.$$
3. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *car* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. *Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3)$. *Ainsi*
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_3) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3)) = 2$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

Dans chaque étape, on appelle v_1, v_2, v_3 *et* v_4 *les vecteurs de la famille (de gauche à droite).*

1. *Par invariance du rang par opérations élémentaires, on a*
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}_1) =& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-8\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_2 & \leftarrow & v_2+v_1 \\ v_3 & \leftarrow & v_3-4v_1 \\ v_4 & \leftarrow & v_3-v_1 \\ v_5 & \leftarrow & v_5-5v_1 \end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && v_5 \leftarrow \frac{-1}{8}v_5\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_1 & \leftarrow & v_1-2v_5 \\ v_2 & \leftarrow & v_2-2v_5 \\ v_3 & \leftarrow & v_3+4v_5 \\ v_4 & \leftarrow & v_4+2v_5 \end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_2 & \leftarrow & v_2-3v_4 \\ v_3 & \leftarrow & -v_3 \end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 4.
\end{aligned}$$
2. *De même*
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_4 = -v_1\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_3 = -v_2\\
&= 2 \quad \textit{car les deux matrices ne sont pas colinéaires}
\end{aligned}$$

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

On procède par un pivot de Gauss.

1. *On a*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

   Il y a trois pivots non nuls (en rouge) donc le rang est 3.

2. *On a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & -2 & -7 & -9 \\ -1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \\ 0 & -7 & -21 & -14 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 & \leftarrow & \frac{1}{5}L_3 \\ L_4 & \leftarrow & -\frac{1}{7}L_4 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - L_2 \end{matrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

   car il y a deux pivots non nuls (en rouge).

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Toutes les colonnes de* A *sont identiques donc* $\mathrm{rg}(A) = 1$. *Avec plus de détails :*

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

2. *La troisième ligne de* B *est combinaison linéaire des deux autres :* $L_3 = L_1 + L_2$. *Par conséquent :*

$$\mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, L_2)) = 2$$

   car L_1 *et* L_2 *sont linéairement indépendantes (non colinéaires).*

3. $$\mathrm{rg}(C) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

On va déterminer si les matrices sont inversibles ou non en calculant leur rang. On notera C_1, C_2 *et* C_3 *les colonnes des matrices et* L_1, L_2, L_3 *les lignes.*

1. *Comme* C_2 *est nulle et que* C_1 *et* C_3 *ne sont pas colinéaires,* $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$ *et* A *n'est donc pas inversible.*
2. *Comme* L_1 *et* L_2 *sont colinéaires et que* L_1 *et* L_3 *ne le sont pas,* $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \mathrm{Vect}(L_1, L_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\mathrm{rg}(B) = 2 < 3$ *et* B *n'est donc pas inversible.*
3. *On a*

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_1 \end{matrix}$$

   Donc C *est de rang* 3 *donc inversible.*