Chapitre 5 : Dimension d'un espace vectoriel

1 Dimension

1.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une base de cardinal fini (c'est-à-dire constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Théorème 1 (Théorème/Définition : dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** non réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$.
Alors toutes les bases de E ont le même cardinal (c'est-à-dire possède le même nombre de vecteurs).
Ce cardinal est appelé la **dimension** de E et est noté $\dim(\mathrm{E})$.

Par convention, la dimension d'un espace vectoriel réduit à zéro $\{0_{\mathrm{E}}\}$ est 0.

Exemple 1 (*Voir section 3.3 du chapitre précédent*)

1. *On a vu que* $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Donc* $\mathbb{R}^3$ *est un espace vectoriel de dimension finie et* $\dim(\mathbb{R}^3)=3$. *Toutes les bases de* $\mathbb{R}^3$ *possède trois vecteurs.*
2. *On a vu que la famille ci-dessous est une base de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *:*

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Donc $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel de dimension finie et* $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))=4$. *Toutes les bases de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *possèdent* 4 *vecteurs.*

Plus généralement,

Proposition 1 (Dimension des espaces vectoriels de référence)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Les espaces vectoriels suivants sont de dimension finie.

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension $n\times p$.
- $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension $n+1$.

Remarque 1

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *et* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ne sont pas de dimension finie. On dit qu'ils sont de dimension infinie.*

Test 1 (*Voir solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel de dimension finie et en déterminer une base et la dimension.*

1. $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}((1,2,0),(1,1,1))$
2. $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4))$
3. $\mathrm{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+3z=0\right\}$.

Test 2 ($\star$, *Voir solution.*)

On se place dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. *Soient* n *et* p *deux entiers naturels non nuls. Soient* $(\mathrm{P}_0,\dots,\mathrm{P}_n)$ *une famille de vecteurs de degrés inférieurs ou égaux à* p. *Justifier que* $\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0,\dots,\mathrm{P}_n)\subset\mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$.
2. *En déduire que* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *ne possède pas de base de cardinal fini.*

1.2 Cardinal d'une famille libre/génératrice

Proposition 2 (Dimension et cardinal d'une famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{G}) \geqslant n$. De plus, si $\mathrm{Card}(\mathscr{G}) = n$ alors $\mathscr{G}$ est une base de E.

Proposition 3 (Dimension et cardinal d'une famille libre)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{L}$ une famille libre de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leqslant n$. De plus, si $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) = n$ alors $\mathscr{L}$ est une base de E.

Méthode 1

- *Si on connaît la dimension de l'espace et qu'on souhaite en trouver une base, il suffit donc de trouver une famille génératrice ou libre dont le cardinal est égal à la dimension!*
- *On peut aussi se servir des ces résultats pour montrer qu'une famille n'est pas libre/génératrice.*

Exemple 2

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, la famille* $\mathscr{F} = ((1,0,2),(0,2,-1),(1,1,1),(-2,1,5))$ *est-elle libre?*
   On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ *et que* $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4 > 3$*. Donc d'après la proposition 3,* $\mathscr{F}$ *ne peut pas être libre.*
2. *La famille* $(1,(X-1),(X-1)^3)$ *est-elle génératrice de* $\mathrm{R}_3[X]$ *?*
   On sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ *et que le cardinal de la famille est* 3*. Donc d'après la proposition 2, la famille ne peut pas être génératrice.*
3. *La famille* $\mathscr{F} = (1,(X-1),(X-1)^2)$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *?*
   On sait que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$*. Il suffit donc de prouver qu'elle est soit libre soit génératrice pour conclure que c'est une base. Or, elle est clairement libre car échelonnée. Ainsi c'est bien une base de* $\mathbb{R}_2[X]$*.*

Test 3 (***Voir solution.***)

1. *Montrer que* $((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Montrer que* $(1+X+X^2, X+X^2, X^2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
3. *La famille* $((1,1),(1,2),(2,1))$ *est-elle une base de* $\mathbb{R}^2$ *?*

1.3 Dimension d'un sous espace vectoriel

Proposition 4 (Dimension d'un sous-espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et

$$\dim(F) \leqslant \dim(E).$$

De plus, $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $F = E$.

Méthode 2

Pour montrer que deux espaces vectoriels sont égaux, on peut donc

1. *montrer que* $F \subset E$,
2. *puis que* $\dim(E) = \dim(F)$.

Test 4 (***Voir solution.***)

Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

2 Rang

2.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2 (Rang d'un famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_n)$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$.

Remarque 2

Dans un espace vectoriel E *de dimension finie, on a, pour toute famille* $(u_1,\ldots,u_n)$ *de vecteurs :*

1. $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_n) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité si et seulement si* $E = \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$ *d'après la proposition 4.*
2. $\mathrm{rg}(u_1,\ldots,u_n) \leqslant n$ *avec égalité si et seulement si* $(u_1,\ldots,u_n)$ *est libre.*

Exemple 3

Déterminons le rang des familles suivantes.

1. $\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ *: la famille* $\mathscr{F}_1$ *est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une famille libre. Ainsi* $\mathrm{rg}(\mathscr{F}_1) = 2$.
2. $\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ *: la famille* $\mathscr{F}_2$ *est contient la famille* $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ *qui est génératrice de* $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$*, donc* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$*. Ainsi* $\mathrm{rg}(\mathscr{F}_2) = 2$.

Test 5 (***Voir solution.***)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
3. $\mathscr{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Proposition 5 (Rang et opérations)

Le rang d'une famille de vecteurs reste inchangé si :

- on change l'ordre des vecteurs,
- on multiplie un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
- on retire de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres,
- on ajoute à l'un des éléments de la famille une combinaison linéaires des autres.

Remarque 3

Comparer avec la proposition 1 du chapitre 4.

Méthode 3

Pour trouver le rang d'une famille $\mathscr{F} = (u_1,\ldots,u_p)$*, on peut appliquer successivement les opérations de la proposition 5 pour transformer la famille en une famille de même rang dont on connaît le rang.*

Exemple 4

Déterminons le rang de la famille

$$\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\right) && \textit{(car le vecteur nul est combinaison linéaire des autres)}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\right) && (v_2 \leftarrow \frac{1}{5}v_2)\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\right) && (v_1 \leftarrow v_1 - 3v_2 \quad \textit{et} \quad v_3 \leftarrow v_3 + v_2)\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \textit{(car le dernier vecteur est combinaison linéaire des autres)}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Test 6 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$;
2. $\mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$.

2.2 Rang d'une matrice

Définition 3 (rang d'une matrice)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **rang** de A, et on note rg(A), le rang de la famille de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée des vecteurs colonnes de A.

Remarque 4

En d'autres termes, si $A = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ C_1 & \dots & C_p \\ | & \dots & | \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *alors*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)).$$

Remarque 5

D'après la proposition 5, le rang d'une matrice est invariant par opération élémentaire sur les colonnes (voir aussi la proposition 8 ci-dessous).

D'après la remarque 2, on a

Proposition 6

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(A) \leqslant p.$$

Exemple 5

Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}$.

On procède par opération sur les colonnes pour se ramener à une matrice dont le rang est facile à calculer :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right) \quad \textit{en faisant} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\right) \quad \textit{en faisant} \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_3\\ &= 3\end{aligned}$$

Proposition 7

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Remarque 6

En particulier, le rang d'une matrice est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes.

En conséquence, le rang est aussi invariant par opérations élémentaires sur les lignes :

Proposition 8

Le rang d'une matrice est inchangée si

- on multiplie l'une des colonnes ou l'une des lignes par un scalaire non nul;
- on ajoute à l'une des colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes);
- en échangeant deux colonnes ou deux lignes entre elles.

Méthode 4

Pour déterminer le rang d'une matrice, on effectue des opérations sur les lignes et les colonnes pour obtenir une matrice de même rang et dont le rang est facile à calculer. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix}a_1&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a_2&\cdots&\cdots&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\0&0&\cdots&a_r&\cdots\\0&0&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\cdots\\0&0&\ldots&0&\cdots\end{pmatrix}$$

où $a_1,\ldots,a_r$ sont non nuls, est de rang r.
Si on agit sur les lignes, l'algorithme du pivot de Gauss permet d'obtenir une telle matrice!

Exemple 6

Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix}-1&1&2&1&0\\1&-1&0&1&2\\2&2&2&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$.

1. *Effectuer la méthode du pivot de Gauss (opération sur les lignes)*

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad \textit{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3$$

2. *Le rang est le nombre de pivots non nuls.*

$$\mathrm{rg}(A) = 3$$

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$
2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 & 3 \\ -2 & 1 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$

⚠La méthode du pivot de Gauss marche à tous les coups mais dans certain cas, on peut déterminer le rang bien plus facilement!

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer le rang des matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

Proposition 9 (Rang et inversibilité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Remarque 7

Cette proposition sera utile dans les chapitres suivants. Pour le moment, elle est déjà pratique pour montrer que certaines matrices ne sont pas inversibles.

Test 9 (*Voir solution.*)

Les matrices suivantes sont-elles inversibles?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3 Objectifs

1. Connaître et avoir compris les notions de dimension, rang.
2. Connaître la dimension des espaces vectoriels de référence.
3. Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel en déterminant une base.
4. Montrer qu'une famille est une base en montrant
   - qu'elle est libre et que son cardinal est la dimension de l'espace;
   - ou qu'elle est génératrice et que son cardinal est la dimension de l'espace.
5. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteur, d'une matrice.
6. Savoir caractériser l'inversibilité d'une matrice en terme de rang.

4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *La famille* $((1,2,0),(1,1,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F. *En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(\mathrm{F}) = 2$.
2. $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2),(-2,-4)) = \mathrm{Vect}((1,2))$ *car* $(-2,-4) = -2(1,2)$. *Ainsi,* $(1,2)$ *est une base de* F *et* $\dim(\mathrm{F}) = 1$.
3. $\mathrm{F} = \left\{(x, x+3z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x(1,1,0) + z(0,3,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,3,1))$. *Donc* $((1,1,0),(0,3,1))$ *est génératrice de* F *et elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de* F. *En particulier,* F *est de dimension finie et* $\dim(\mathrm{F}) = 2$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

On se place dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *Soient* $(n,p) \in \mathbb{N}$

1. *On sait que tout sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *contenant* $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n$ *contient* $\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ *(propriété 6 du chapitre 3). Or, pour tout* $i \in \{0, \dots, n\}$, $\mathrm{P}_i \in \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ *donc* $\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n) \subset \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$.
2. *Supposons par l'absurde que* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *possède une base de cardinal fini* $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ *et notons, pour* $i = 0, \dots, n$, $d_i = \deg(\mathrm{P}_i) \in \mathbb{N}$ *(aucun des* P_i *n'est le polynôme nul car la famille est une base donc* $d_i \in \mathbb{N}$ *pour tout* i*). Soit* p *un entier tel que, pour tout* $i \in \{0, \dots, n\}$, $p \geqslant d_i$ *(par exemple,* $p = d_1 + \cdots + d_n$*). Alors, d'après la question précédente on a*
$$\mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n) \subset \mathrm{R}_p[\mathrm{X}].$$
Ceci est absurde ! Ainsi $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *ne possède pas de base de cardinal fini.*

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $\mathscr{F} = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,3),(1,0,3,3))$. *Soit* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.
$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(1,1,1,0) + \lambda_3(1,1,0,3) + \lambda_4(1,0,3,3) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\
\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 3\lambda_4 & = & 0 \\
\lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \\
 & & & & & & -\lambda_4 & = & 0 \\
 & & & & -\lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\
\lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & + & 3\lambda_4 & = & 0
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc}
\lambda_4 & = & 0 \\
\lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & = & 0 \\
\lambda_2 & = & 0
\end{array}\right.
\end{aligned}$$
Ainsi, la famille est libre et comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, *c'est donc une base de* $\mathbb{R}^4$.
2. *Soit* $\mathscr{F} = (1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2, \mathrm{X} + \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2)$. *On a*
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2, \mathrm{X} + \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2) &= \mathrm{Vect}(1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 - (\mathrm{X} + \mathrm{X}^2), \mathrm{X} + \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2) \\
&= \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^2) \\
&= \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2) = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]
\end{aligned}$$
La famille $\mathscr{F}$ *est donc génératrice de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et comme* $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}])$, *c'est donc une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
3. *Comme* $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, *toute base de* $\mathbb{R}^2$ *est constituée de deux vecteurs. Donc la famille* $((1,1),(1,2),(2,1))$ *n'est pas une base de* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

On a $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1)) \subset \mathbb{R}^2$.
De plus, la famille $((1,2),(2,1))$ *est une famille génératrice de* $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$ *et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. Par conséquent c'est une base de* $\mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$ *et donc* $\dim \mathrm{Vect}((1,2),(2,1)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.
Ainsi $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,2),(2,1))$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *La famille $\mathscr{F}_1$ est libre, c'est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)$*. Donc*

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_1) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)) = 3.$$

2. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ *et* $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ *est libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires), c'est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2)$*. Ainsi*

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_2) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2)) = 2.$$

3. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *car* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$*. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la famille* $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ *est donc une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3)$*. Ainsi*

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}_3) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}_3)) = 2$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans chaque étape, on appelle v_1, v_2, v_3 et v_4 les vecteurs de la famille (de gauche à droite).

1. *Par invariance du rang par opérations élémentaires, on a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}_1) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-8\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_2 & \leftarrow & v_2+v_1 \\ v_3 & \leftarrow & v_3-4v_1 \\ v_4 & \leftarrow & v_3-v_1 \\ v_5 & \leftarrow & v_5-5v_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && v_5 \leftarrow \frac{-1}{8} v_5 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_1 & \leftarrow & v_1-2v_5 \\ v_2 & \leftarrow & v_2-2v_5 \\ v_3 & \leftarrow & v_3+4v_5 \\ v_4 & \leftarrow & v_4+2v_5 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{lcl} v_2 & \leftarrow & v_2-3v_4 \\ v_3 & \leftarrow & -v_3 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 4
\end{aligned}$$

2. *De même*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_4 = -v_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && \textit{car } v_3 = -v_2 \\
&= 2 \quad \textit{car les deux matrices ne sont pas colinéaires}
\end{aligned}$$

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

Par le pivot de Gauss

1. *On a*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

Il y a trois pivots non nuls (en rouge) donc le rang est 3.

2. *On a*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & -2 & -7 & -9 \\ -1 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \\ 0 & 5 & 15 & 10 \\ 0 & -7 & -21 & -14 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 & \leftarrow & \frac{1}{5}L_3 \\ L_4 & \leftarrow & -\frac{1}{7}L_4 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_3 & \leftarrow & L_3 - L_2 \\ L_4 & \leftarrow & L_4 - L_2 \end{matrix} \\
&= 2
\end{aligned}$$

car il y a deux pivots non nuls (en rouge).

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Toutes les colonnes de* A *sont identiques donc* $\mathrm{rg}(A) = 1$. *Avec plus de détails :*

$$\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

2. *La troisième ligne de* B *est combinaison linéaire des deux autres :* $L_3 = L_1 + L_2$. *Par conséquent :*

$$\mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3)) = \dim(\mathrm{Vect}(L_1, L_2)) = 2$$

car L_1 *et* L_2 *sot linéairement indépendantes (non colinéaires).*

3. $$\mathrm{rg}(C) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)\right) = 1.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

On va déterminer si les matrices sont inversibles ou non en calculant leur rang. On notera C_1, C_2 *et* C_3 *les colonnes des matrices et* L_1, L_2, L_3 *les lignes.*

1. *Comme* C_2 *est nulle et que* C_1 *et* C_3 *ne sont pas colinéaires,* $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$ *et* A *n'est donc pas inversible.*
2. *Comme* L_1 *et* L_2 *sont colinéaires et que* L_1 *et* L_3 *ne le sont pas,* $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \mathrm{Vect}(L_1, L_3)$ *est de dimension* 2. *Ainsi* $\mathrm{rg}(B) = 2 < 3$ *et* B *n'est donc pas inversible.*
3. *On a*

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - L_1 \end{matrix}$$

Donc C *est de rang* 3 *donc inversible.*