Chapitre 11 : Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés seront de dimension finie et toutes les matrices seront carrées.

1 Éléments propres d'un endormorphisme, d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1 (Valeur propre, vecteur propre)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   - On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de f s'il existe un **vecteur non nul** x de E tel que
   $$f(x) = \lambda \cdot x.$$
   - Dans ce cas, on dit que x est **vecteur propre de** f **associé à la valeur propre** λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un **vecteur non nul** $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que
   $$\mathrm{AX} = \lambda \cdot \mathrm{X}.$$
   - Dans ce cas, on dit que X est **vecteur propre de** A **associé à la valeur propre** λ.

Remarque 1

1. *Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f, tout vecteur non nul tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ est un vecteur propre associé à λ. En particulier, un vecteur propre est toujours un vecteur non nul!*
2. *Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme f, il y a une infinité de vecteurs propres associés à la valeur propre λ : si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ en est un alors pour tout réel $a \neq 0$ le vecteur $a \cdot x$ est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. En effet :*
$$f(a \cdot x) = a \cdot f(x) = a \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (a \cdot x).$$
3. *Les deux remarques ci-dessus s'appliquent évidemment au cas des matrices carrées.*

Remarque 2 (***Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres d'une matrice***)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons l'endomorphisme f_{A} de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}.$$
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{X} \neq 0$.

1. *λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de f_{A} ;*
2. *X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si et seulement si X est un vecteur propre de f_{A} associé à la valeur propre λ.*

Exemple 1

1. *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que les vecteurs*
$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
sont des vecteurs propres de A dont on précisera les valeurs propres associées.
Remarquons tout d'abord que X_1, X_2 et X_3 sont tous les trois des vecteurs non nuls. De plus :
$$\mathrm{AX}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{X}_1$$

donc X_1 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 1 *;*

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2X_2$$

donc X_2 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 2 *;*

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot X_2$$

donc X_3 *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 0*.*

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x-2y+z, 2x-z, 2x-2y+z).$$

Montrer que les vecteurs

$$u = (1,1,1) \quad , \quad v = (2,1,2) \quad , \quad w = (1,2,2)$$

sont des vecteurs propres de f *dont on précisera les valeurs propres associées.*

Remarquons tout d'abord que u*,* v *et* w *sont tous les trois des vecteurs non nuls. De plus :*

$$f(u) = u \quad , \quad f(v) = 2v \quad , \quad f(w) = 0$$

donc u *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* 1*,* v *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* 2 *et* w *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* 0*.*

Test 1 (***Voir solution.***)

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *défini par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P.$$

Montrer que les vecteurs

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = X-1 \quad , \quad P_2 = (X-1)^2$$

sont des vecteurs propres de f *dont on précisera les valeurs propres associées.*

Définition 2 (Spectre)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le **spectre de** f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Proposition 1 (Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres d'une matrice)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ et on note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $x \in E$ et notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x) = \lambda \cdot x \Longleftrightarrow AX = \lambda \cdot X.$$
2. En conséquence :
   - λ est une valeur propre de $f \Longleftrightarrow \lambda$ est une valeur propre de A.
   - $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.
   - x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \Longleftrightarrow$ X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Exemple 2

On reprend l'exemple 1 : soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x-2y+z, 2x-z, 2x-2y+z).$$

1. *Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   On a
   $$f((1,0,0)) = (2,2,2) \quad , \quad f((0,1,0)) = (-2,0,-2) \quad , \quad f((0,0,1)) = (1,-1,1)$$
   donc
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}.$$

2. *Vérifier la proposition sur cet exemple.*
   On a vu à l'exemple 1 que
   $$u = (1,1,1) \quad , \quad v = (2,1,2) \quad , \quad w = (1,2,2)$$
   sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1, 2 et 0 respectivement.
   D'autre part,
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{X}_1 \quad , \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{X}_2 \quad , \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \mathrm{X}_3$$
   qui sont bien des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, 2 et 0 respectivement.

Dire qu'un réel λ est une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ signifie qu'il existe un vecteur non nul $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ ou encore que $f(x) - \lambda \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \Longleftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

Comme on est en dimension finie, on en déduit

Proposition 2

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
   $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0_{\mathrm{E}}\} &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas injective} \\ &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas surjective} \\ &\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas bijective} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n \text{ n'est pas inversible}$$

Conséquence(s) 1

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Exemple 3

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ défini par

$$\varphi(1) = 2 \quad , \quad \varphi(\mathrm{X}) = -\mathrm{X} + 3 \quad , \quad \varphi(\mathrm{X}^2) = 1 + 3\mathrm{X}^2.$$

La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est triangulaire donc d'après la proposition 1, on a :

$$\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{-1, 2, 3\}.$$

Méthode 1 (***Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice***)

On cherche à déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad (\textit{cas des endomorphismes}) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{AX} = \lambda \cdot \mathrm{X} \quad (\textit{cas des matrices carrées})$$

possède des solutions ***non nuls****. On est donc amené à résoudre un système linéaire à paramètre (très calculatoire).*

Exemple 4

Déterminons les valeurs propres de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche les réels λ pour lesquels l'équation $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ possède une solution non nulle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On doit donc résoudre le système suivant à paramètre

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} (1-(1-\lambda)^2)y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - (1-\lambda)\mathrm{L}_2 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda(2-\lambda)y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système est inversible si et seulement si $\lambda(2-\lambda) \neq 0$. Donc ce système possède des solutions non nulles si et seulement si $\lambda(2-\lambda) = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, 2\}.$$

Méthode 2 (***Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice***)

1. *Dans le cas d'une matrice, on cherche les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible c'est-à-dire les λ tels que $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ n'est pas de rang n. On transforme donc la matrice $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ en une matrice triangulaire par le pivot de Gauss : les valeurs propres sont alors les valeurs de λ pour lesquels au moins un des coefficients diagonaux de la réduite de Gauss est nul.*
2. *Dans le cas d'un endomorphisme, on utilise la proposition 1 pour se ramener au cas d'une matrice.*

Exemple 5

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Déterminons le spectre de* A.

1. *On cherche à déterminer le rang de $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_3$:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - (5-\lambda)\mathrm{L}_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2
\end{aligned}$$

Donc le rang de $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_3$ est strictement plus petit que 3 si et seulement si $6 - \lambda = 0$ ou $-8 + 6\lambda - \lambda^2 = 0$.

2. *On en déduit les valeurs propres.*

Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff 6-\lambda = 0 \text{ ou } -8+6\lambda-\lambda^2 = 0\\ &\iff \lambda = 6 \text{ ou } -(\lambda-2)(\lambda-4) = 0\\ &\iff \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 4\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4,6\}$.

Test 2 (***Voir solution.***)

1. *Déterminer le spectre de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2. *Soit* g *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver le spectre de g.

1.2 Sous-espaces propres

Définition 3 (Sous-espaces propres)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.
   Le **sous-espace propre de** f associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$E_\lambda(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = \lambda \cdot x\right\} = \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_E).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.
   Le **sous-espace propre de** A associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\right\} = \ker(A - \lambda \cdot I_n).$$

Remarque 3

1. *Si* $f \in \mathscr{L}(E)$, *un sous-espace propre de* f *est un sous-espace vectoriel de* E. *En effet,*
   le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de départ.
   De même, si $A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *un sous-espace propre de* A *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. *Le sous-espace propre* $E_\lambda(f)$ *est l'ensemble des vecteurs propres de* f *associés à la valeur propre* λ ***auquel on ajoute le vecteur nul****.*
   De même, le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ *est l'ensemble des vecteurs propres de* A *associés à la valeur propre* λ ***auquel on ajoute le vecteur nul****.*
3. ⚠*Si* A *est la matrice d'un endomorphisme* f *dans une base* $\mathscr{B}$, *les sous-espaces propres associés à une valeur propre* λ *de* f *et de* A ***ne sont pas égaux*** *en général :* $E_\lambda(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *alors que* $E_\lambda(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E. *En revanche, d'après la proposition* 1 *on a :*

$$x \in E_\lambda(f) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in E_\lambda(A)$$

Méthode 3

- *Étant données une matrice* A *et une valeur propre* λ *de* A, *pour déterminer l'espace propre* $E_\lambda(A)$ *on résoud le système linéaire* $AX = \lambda X$ *d'inconnue* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- *Pour un endomorphisme* f, *on résout l'équation* $f(x) = \lambda \cdot x$ *qui se ramène à un système linéaire. On peut aussi se ramener au cas des matrices en considérant la matrice de* f *dans une base.*

Exemple 6

On reprend la matrice A *de l'exemple* 5 *dont le spectre est* $\{2,4,6\}$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons* $E_2(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & - & z & = & 2x \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2y \\ x & - & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & y \end{array}\right.$$

Ainsi $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. *Déterminons* $E_4(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_4(A) \iff AX = 4X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & - & z & = & 4x \\ 2x & + & 4y & - & 2z & = & 4y \\ x & - & y & + & 3z & = & 4z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & z \end{array}\right.$$

Ainsi $E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Test 3 (***Voir solution.***)

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Déterminer une base de* $E_6(A)$.

Proposition 3 (Cas particulier de la valeur propre 0)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$0 \in \text{Sp}(f) \iff \ker(f) \neq \{0_E\} \iff f \text{ n'est pas bijective}$$

Dans ce cas, l'espace propre de f associé à 0 est $\ker(f)$.

Remarque 4

Ceci est aussi valable pour les matrices. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*. Alors* $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ *si et seulement si* A *n'est pas inversible.*

Exemple 7

1. *On reprend les exemples 1 et 2 : soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x-2y+z, 2x-z, 2x-2y+z).$$

On a vu que 0 *est valeur propre de* f *donc*
f *n'est pas bijective.*

2. *On reprend les exemples 5 et 6 : on considère l'endomorphisme* ψ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*. L'endomorphisme* ψ *est-il bijectif?*

On a l'exemple 5 vu que $\mathrm{Sp}(A) = \{2,4,6\}$*. Or comme* A *est la matrice représentative de* ψ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$*, on sait que* $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\psi)$*. En particulier,* $0 \notin \mathrm{Sp}(\psi)$ *et donc* ψ *est bijective.*

3. *Déterminer* $E_2(\psi)$*.*

On a vu à l'exemple 6 que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$*. Si on note* $\mathscr{B}$ *la matrice canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$*, on sait que, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}_2[X]$*, on a les équivalences suivantes d'après la proposition 1 :*

$$\begin{aligned} P \in E_2(\psi) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) \in E_2(A) &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P = \lambda X + \lambda X^2 \\ &\Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X + X^2). \end{aligned}$$

Ainsi $E_2(\psi) = \mathrm{Vect}(X + X^2)$*.*

Test 4 (***Voir solution.***)

On considère l'endomorphisme ψ *de* $\mathbb{R}_2[X]$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $E_4(\psi)$*.*

1.3 Éléments propres en Scilab

Scilab (Éléments propres d'une matrice)

Si `A` est une matrice déjà implémentée dans Scilab :

- la commande `spec(A)` renvoie un vecteur colonne dont les éléments sont les valeurs propres de `A` ;
- la commande `[P,M]=spec(A)` affecte à la variable `M` une matrice diagonale de même taille que `A` dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de `A` et à la variable `P` une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de `A` correspondant.

Exemple 8

1. *Si on tape :*

```
A=[0,1,-1;-1,2,-1;1,-1,2];
spec(A)
```

2. *Scilab affiche*

```
--> spec(A)
ans =
1.
2.
1.
```

Cela signifie : que le spectre de A *est* $\{1,2,1\}$*.*

Exemple 9

Si on tape :

```
[P,M]=spec(A)
```

1. *Scilab affiche :*

```
M =

1.  0   0
0   2.  0
0   0   1.
```

2. *Scilab affiche*

```
P=

-0.8164966    0.5773503   -0.2264554
-0.4082483    0.5773503    0.5661385
 0.4082483   -0.5773503    0.7925939
```

Cela signifie : que la première et troisième colonnes de P *représentent les coordonnées de vecteurs propres associés à la valeur propre* 1 *et la deuxième colonne les coordonnées d'un vecteur propre associé à la valeur propre* 2.

Exemple 10

Si on tape :

```
B=[3,0,8;3,-1,6;-2,0,-5];
[P,M]=spec(B)
```

1. *Scilab affiche :*

```
M =

-1.    0          0
 0    -1.00000    0
 0     0         -1.
```

2. *Scilab affiche*

```
P=

0.      0.7427813     -0.7427814
1.      0.557086      -0.557086
0.    - 0.3713907      0.3713907
```

2 Polynômes annulateurs

Définition 4 (Polynôme d'endomorphisme/de matrice)

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

   On dit que $P(A)$ est un polynôme de matrice.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k.$$

   On dit que $P(f)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Remarque 5

Comme défini au Chapitre 9 (définition 2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

Exemple 11

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*.*

1. *Si* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 3$ *alors*
$$\mathrm{P}(f) = f^2 - 2f + 3\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} + 3\mathrm{I}_n.$$
2. *Si* $\mathrm{P} = 1$ *alors*
$$\mathrm{P}(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n.$$
3. *Si* $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^3 - 2)$ *alors*
$$\mathrm{P}(f) = (f-1)\circ(f^3 - 2\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = (\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}^3 - 2\mathrm{I}_n).$$

Définition 5 (Polynôme annulateur)

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que P est un **polynôme annulateur** de f si $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

Remarque 6

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie* E *et* $\mathscr{B}$ *une base de* E*. On note* A *la matrice de* f *dans la base* $\mathscr{B}$*. D'après les proposition 12 (et la remarque 9) et 14 du Chapitre* 9*, on a :*
$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ est un polynôme annulateur de } f \iff \mathrm{P} \text{ est un polynôme annulateur de } \mathrm{A}.$$

Exemple 12

1. *Le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice et tout endomorphisme.*
2. *Soit* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$*. Montrons que* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$ *est un polynôme annulateur de* A*.*
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.$$
3. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = (x+y, x+y).$$
Calculer f^2 *et en déduire un polynôme annulateur de* f*.*
On a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f^2((x,y)) = f((x+y, x+y)) = (2x+2y, 2x+2y) = 2f((x,y)).$$
Ainsi, $f^2 - 2f = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ *et le polynôme* $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}$ *est donc un polynôme annulateur de* f*.*

Proposition 4 (Polynôme annulateur et valeurs propres)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et P un polynôme annulateur de f.
Si un réel λ est une valeur propre de f alors c'est une racine de P. Ainsi
$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(\lambda) = 0\}.$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A.
Si un réel λ est une valeur propre de A alors c'est une racine de P. Ainsi
$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \mathrm{P}(\lambda) = 0\}.$$

Les valeurs propres sont donc à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Remarque 7

1. *Attention, une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre!*
   Par exemple, le polynôme nul est un polynôme annulateur de id_E *et* 3 *est racine du polynôme nul. En revanche,* 3 *n'est pas une valeur propre de* id_E.
2. *En dimension finie, un endomorphisme (ou une matrice) possède toujours un polynôme annulateur* ***non nul*** *(voir Test 6).*

Méthode 4 (*Déterminer les valeurs propres avec un polynôme annulateur*)

Si on connaît un polynôme annulateur P *d'un endomorphisme* f *ou d'une matrice* A*, pour en déterminer les valeurs propres on procède ainsi :*

1. *on détermine les racines de* P *;*
2. *pour chaque racine* λ *de* P *on vérifie si* λ *est une valeur propre de* f *(ou de* A*)*
   - *en résolvant* $f(x) = \lambda x$ *(ou* $AX = \lambda X$*) :* λ *est alors valeur propre si et seulement si le système possède des solutions* ***non nulles****;*
   - *soit en montrant que* $A - \lambda I_n$ *est/n'est pas inversible.*

Exemple 13

On reprend l'exemple 12.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *dont un polynôme annulateur est* $P = X^2 + 2X - 3$*. Déterminons son spectre.*

   P a pour racine évidente 1 *et on en déduit donc que*

   $$P = (X-1)(X+3).$$

   Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-3, 1\}$*. De plus*

   - $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *donc* $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$ *; ainsi* 1 *est bien valeur propre ;*
   - $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *donc* $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ $(L_3 + L_1 = 2L_2)$ *; ainsi* -3 *est bien valeur propre.*

   Finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 1\}$.
2. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x, y)) = (x + y, x + y).$$

   On a vu que le polynôme $X^2 - 2X$ *est annulateur de* f.
   Or $P = X(X-2)$ *donc* $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 2\}$*. De plus*

   - $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$ *donc* f *n'est pas surjective donc pas bijective ; ainsi* 0 *est valeur propre ;*
   - *on voit facilement que* $(1, 1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 2.

   Finalement $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}$.

Remarque 8 (*Polynôme annulateur et inversibilité*)

Soit f *un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et* A *une matrice carrée.*

1. *Si* f *(resp.* A*) possède un polynôme annulateur* P *dont le terme constant est* ***non nul*** *alors* 0 *n'est pas racine de* P *donc n'est pas valeur propre de* f *(resp.* A*).*
2. *Dans ce cas,* f *est bijective (resp.* A *est inversible) et si on note* $P = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ *avec* $a_0 \neq 0$ *on a*

   $$a_p f^p + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{donc} \quad a_p f^p + \cdots + a_1 f = -a_0 \mathrm{id}_E$$

   et comme $a_0 \neq 0$ *:*

   $$f \circ \left(\frac{1}{-a_0} \left(a_p f^{p-1} + \cdots + a_1 \mathrm{id}_E \right) \right) = \left(\frac{1}{-a_0} \left(a_p f^{p-1} + \cdots + a_1 \mathrm{id}_E \right) \right) \circ f = \mathrm{id}_E$$

   donc

   $$f^{-1} = \frac{1}{-a_0} \left(a_p f^{p-1} + \cdots + a_1 \mathrm{id}_E \right).$$

De même,

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-a_0}\left(a_p \mathrm{A}^{p-1} + \cdots + a_1 \mathrm{I}_n\right).$$

Exemple 14

On reprend l'exemple 12 : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$ *est une polynôme annulateur de* A. *Montrons que* A *est inversible et déterminons* A^{-1}.

On sait que $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} - 3\mathrm{I}_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ *donc* $\frac{1}{3}(\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A}) = \mathrm{I}_3$. *Ainsi :*

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{3}(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3)\right) = \mathrm{I}_3.$$

Ainsi A *est inversible et* $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{3}(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3)$.

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A}$. *En déduire un polynôme annulateur de* A.
2. *Déterminer les valeurs propres possibles de* A. *En déduire le spectre de* A *et une base de chaque espace propre.*
3. *Montrer que* A *est inversible et déterminer son inverse.*

Test 6 (*Voir solution.*)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul (le raisonnement est le même pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Rappeler la dimension de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et en déduire que la famille* $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n^2})$ *est liée.*
2. *En déduire qu'il existe* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*

$$\mathrm{P} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{X} + \cdots + \lambda_{n^2} \mathrm{X}^{n^2}$$

soit un polynôme annulateur de A.

3 Réduction des endomorphismes, des matrices

3.1 Famille de vecteurs propres

Proposition 5

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de f et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathcal{F}_i$ une famille libre de $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$. Alors la famille

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$$

est une famille libre de E.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de A et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathcal{F}_i$ une famille libre de $\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})$. Alors la famille

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$$

est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 9

1. *En particulier, si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre de* E.
2. *De même, si* $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p$ *sont des vecteurs propres de* A *associés à des valeurs propres distinctes alors la famille* $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_p)$ *est une famille libre de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On en déduit donc :

Conséquence(s) 2 (Nombre maximal de valeurs propres distinctes)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors f possède au plus n valeurs propres distinctes.
   De plus, si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors
   $$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right) \leqslant n.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.
   De plus, si $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors
   $$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})\right) \leqslant n.$$

Exemple 15

On reprend l'exemple 1 : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a vu que* 0, 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* A *donc*
$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{0, 1, 2\}$$

3.2 Diagonalisabilité

Définition 6 (Diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que
   $$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Proposition 6

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ soit diagonale.

Démonstration : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

$\Longrightarrow$ Supposons que f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées à $e_1, \dots, e_n$ (non nécessairement distinctes) :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Par conséquent
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ soit diagonale.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors, comme les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathscr{B}'$ sont données par la i-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Ainsi la base $\mathscr{B}'$ est formée de vecteurs propres. Cela signifie que f est diagonalisable. ∎

Proposition 7 (Lien entre endomorphisme et matrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Démonstration : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

$\Longrightarrow$ Supposons que f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ soit diagonale. Notons P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1, \ldots, e'_n).$$

D'après la formule de changement de base, on a :

$$\mathrm{D} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{P}.$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable.

$\Longleftarrow$ Supposons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{P}.$$

Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est P et notons $\mathscr{B}' = (g(e_1), \ldots, g(e_n))$. Comme g est bijective (sa matrice dans une base est inversible), $\mathscr{B}'$ est une base de E et de plus

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g(e_1), \ldots, g(e_n)) = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

d'après la formule de changement de bases. Donc f est diagonalisable d'après la proposition précédente. ∎

Proposition 8 (Critère de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Notons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right) = n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Alors

$$\mathrm{A} \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim\left(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A})\right) = n.$$

Méthode 5 (*Déterminer les matrices* P *et* D *en cas de diagonalisabilité*)

En cas de diagonalisabilité d'une matrice A*, une fois les valeurs propres et une base des sous-espaces propres déterminées :*

1. *la matrice diagonale* D *est obtenue en mettant sur la diagonale les valeurs propres, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé ;*
2. *les colonnes de* P *sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres que l'on place dans le même ordre que les valeurs propres correspondantes.*

Exemple 16

1. *On reprend l'exemple 6 : on a vu que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *a pour spectre l'ensemble* $\{2,4,6\}$ *et que*

$$E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_4(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_6(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Comme

$$\dim(E_2(A)) + \dim(E_4(A)) + \dim(E_6(A)) = 1 + 1 + 1 = 3$$

la matrice A *est diagonalisable. Posons* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Alors*

$$D = P^{-1}AP.$$

On aurait aussi pu prendre $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. D'après le test 2, le spectre de* B *est* $\{0,3\}$.

De plus, on vérifie que

$$E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_3(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille libre, c'est une base de* $E_0(B)$ *et on a*

$$\dim(E_0(B)) + \dim(E_3(B)) = 2 + 1 = 3.$$

La matrice B *est donc diagonalisable. Posons* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$*. Alors*

$$D = P^{-1}BP.$$

On aurait aussi pu prendre $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* A.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. A *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $A = PDP^{-1}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* B.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. B *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

Il existe des endomorphismes qui ne sont pas diagonalisables :

Test 9 (*Voir solution.*)

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_1[X]$ *défini par*

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[X], \quad \psi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'.$$

1. *Déterminer le spectre de* ψ.
2. *En raisonnant par l'absurde, montrer que* ψ *n'est pas diagonalisable.*

Proposition 9 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Remarque 10

Ce n'est pas une condition nécessaire comme l'illustre le point 2 de l'exemple 16.

Exemple 17

On reprend l'exemple 1 : on a $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et on a vu que les vecteurs*

$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A *associés aux valeurs propres* 1, 2 *et* 0.
On en déduit que A *est diagonalisable et que*

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}_1) \quad ; \quad \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}_2) \quad ; \quad \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}_3).$$

De plus, en posant

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

on a $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Test 10 (*Voir solution.*)

Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* 0, 1 *et* 4 *sont les trois valeurs propres de* A *et déterminer les sous-espaces propres associés.*
2. *En déduire une matrice diagonale* D *de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible* P *de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, *dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à* 1, *telles que :* $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

Théorème 1

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Remarque 11

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. S'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est symétrique alors f est diagonalisable.

Exemple 18

La matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

C'est une matrice symétrique donc elle l'est.

4 Exemples et applications

4.1 Matrices possédant une seule valeur propre

Il est courant aux concours de rencontrer la situation suivante : vous avez montré qu'une matrice A possède une seule valeur propre et on vous demande si elle est diagonalisable.
Le raisonnement est toujours le même et il est impératif de savoir le refaire :

Exemple 19

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer que* $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2$.
   Un calcul montre que $(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3)^2 = 0$.
2. *Déterminer la seule valeur propre de* A.
   Le polynôme $(\mathrm{X} - 2)^2$ *est donc un polynôme annulateur de* A. *Ainsi,* $\mathrm{Sp(A)} \subset \{2\}$. *De plus,*

   $$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   est de rang 1 *donc non inversible. Cela montre que* 2 *est valeur propre de* A. *Finalement, la seule valeur propre de* A *est* 2.
3. A *est-elle diagonalisable ?*
   Supposons par l'absurde que A *est diagonalisable : il existe une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que :*

   $$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \quad \textit{ou encore} \quad \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

   Notons $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$. *On a déjà vu que les coefficients diagonaux de* D *sont les valeurs propres de* D *mais on peut le redémontrer. Si on note* $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *on a*

   $$\mathrm{A}(\mathrm{PE}_i) = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PE}_i = \mathrm{PDE}_i = a_i\mathrm{PE}_i$$

   ce qui montre que a_i *est une valeur propre et que* PE_i *est un vecteur propre associé.*
   Ainsi, comme 2 *est l'unique valeur propre de* A, $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ *et* $\mathrm{D} = 2\mathrm{I}_3$. *Il s'ensuit que*

   $$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{P}(2\mathrm{I}_3)\mathrm{P}^{-1} = 2\mathrm{PI}_3\mathrm{P}^{-1} = 2\mathrm{I}_3.$$

   Absurde ! Donc A *n'est pas diagonalisable.*

Test 11 (*Voir solution.*)

La matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

4.2 Puissance de matrices

La diagonalisation fournit une méthode efficace pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

En effet, soit A une matrice diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

On montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}.$$

Comme D est diagonale, le calcul de D^n est facile.

Test 12 (*Voir solution.*)

On considère

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T}$ *et en déduire un polynôme annulateur de* T.
2. *Déterminer le spectre de* T *et une base de chaque sous-espace propre.*
3. *En déduire une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $\mathrm{T} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
4. *En déduire* T^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Étude de commutant

On se donne une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche à étudier (base, dimension) l'espace vectoriel

$$\mathrm{C_A} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AM} = \mathrm{MA}\}.$$

Si A est diagonalisable, il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

Il est souvent plus facile d'étudier $\mathrm{C_D}$ puis d'utiliser l'équivalence

$$\mathrm{M} \in \mathrm{C_A} \iff \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathrm{C_D}$$

pour en déduire des informations sur $\mathrm{C_A}$.

5 Objectifs

1. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
2. Savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.
3. Étant donné un polynôme P, savoir exprimer $\mathrm{P}(f)$ pour f un endomorphisme ou une matrice carrée.
4. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur.
5. Savoir déterminer si une matrice ou un endomorphisme est diagonalisable ou non.

6 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

Comme P_0, P_1 *et* P_2 *sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* 1, 2 *et* 3 *respectivement.*

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $A-\lambda I_2$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(A-\lambda I_2)<2$. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-\lambda I_2)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda\\ 1-\lambda & -1\end{pmatrix}\right) \quad L_2\longleftrightarrow L_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda\\ 0 & -1-(1-\lambda)(3-\lambda)\end{pmatrix}\right) \quad L_2\leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(A-\lambda I_2)<2\Longleftrightarrow -1-(1-\lambda)(3-\lambda)=0\Longleftrightarrow \lambda=2$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A)=\{2\}$.

2. *On sait qu'un réel* λ *est valeur propre de* g *si et seulement si* $B-\lambda I_3$ *n'est pas inversible si et seulement si* $\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3$. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\right)&=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\end{pmatrix}\right) \quad L_3\longleftrightarrow L_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2\\ 0 & -\lambda & \lambda\end{pmatrix}\right) \quad L_2\leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1\ ;\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ &=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)^2\\ 0 & 0 & \lambda+1-(1-\lambda)^2\end{pmatrix}\right) \quad L_3\leftarrow L_3+L_2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(B-\lambda I_3)<3\Longleftrightarrow \lambda+1-(1-\lambda)^2=0 \quad \textit{ou} \quad \lambda=0\Longleftrightarrow \lambda=0 \quad \textit{ou} \quad \lambda=3$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(g)=\mathrm{Sp}(B)=\{0,3\}$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X\in E_6(A)\Longleftrightarrow AX=6X&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl}5x&+&y&-&z&=&6x\\2x&+&4y&-&2z&=&6y\\x&-&y&+&3z&=&6z\end{array}\right.\\&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&-&z&=&0\\x&-&y&-&z&=&0\\x&-&y&-&3z&=&0\end{array}\right.\\&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcl}-x&+&y&-&z&=&0\\&&&-&2z&=&0\\&&&-&4z&=&0\end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_2+L_1 \textit{ et } L_3\leftarrow L_3+L_1\\&\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}x&=&y\\z&=&0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{E}_6(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

D'après l'exemple 6, on sait que $\mathrm{E}_4(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. *De plus, si* $\mathrm{P} = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *alors*

$$\mathrm{P} \in \mathrm{E}_4(\psi) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)}(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}_4(\mathrm{A}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathrm{E}_4(\psi) = \left\{\lambda + \lambda \mathrm{X}^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(1 + \mathrm{X}^2\right)$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On trouve* $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} = -4\mathrm{I}_3$. *Ainsi,*

$$\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} + 4\mathrm{I}_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

ce qui signifie que $\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.

2. *Le spectre de* A *est inclus dans l'ensemble des racines de* $\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4 = (\mathrm{X} - 2)^2$. *Donc la seule valeur propre possible est* 2. *Vérifions si* 2 *est bien valeur propre.*

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{AX} = 2\mathrm{X} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & 2x \\ 2x & & & + & 2z & = & 2y \\ x & - & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x - y + z = 0$$

L'ensemble des solutions de ce système est

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x - y + z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Comme le système a des solutions non nulles, 2 *est bien valeur propre. Donc* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{2\}$ *et*

$$\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. *Comme* 0 *n'est pas valeur propre de* A, A *est inversible. De plus*

$$\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} = -4\mathrm{I}_3 \quad \textit{donc} \quad \left(-\frac{1}{4}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3)\right)\mathrm{A} = \mathrm{I}_3.$$

Donc $\mathrm{A}^{-1} = -\frac{1}{4}(\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_3)$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.
La famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \dots, \mathrm{A}^{n^2})$ *est une famille de* $n^2 + 1$ *vecteurs d'un espace vectoriel de dimension* n^2. *Elle est donc liée.*
2. *Par définition d'une famille liée, il existe* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*

$$\lambda_0 \mathrm{I}_n + \lambda_1 \mathrm{A} + \cdots + \lambda_{n^2} \mathrm{A}^{n^2} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Cela signifie, en posant $\mathrm{P} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{X} + \cdots + \lambda_{n^2} \mathrm{X}^{n^2}$, *que*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Ainsi P *un polynôme annulateur de* A. *De plus,* P *est non nul car* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *donc au moins l'un de ses coefficients est non nul.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow A - \lambda I_3 \quad \textit{n'est pas inversible} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1+2\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \textit{ et } L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -2+3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) < 3 \Longleftrightarrow 1-\lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad -2+3\lambda+\lambda^2 = 0 &\Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 2
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.

2. • $E_1(A)$ *: soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = X &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & x \\ -x & + & 2y & - & z & = & y \\ x & - & y & + & 2z & = & z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow x - y + z = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = y - z
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_1(A)$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $E_1(A)$.

• $E_2(A)$ *: soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) \Longleftrightarrow AX = 2X &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 2x \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2y \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & & & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \longleftrightarrow L_1 + 2L_3 \;\; \textit{et} \;\; L_2 \longleftrightarrow L_2 + L_3 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -y \\ x & = & y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* $E_2(A)$.

3. *Comme* $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 1 + 2 = 3$, A *est diagonalisable. En posant*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

on a

$$D = P^{-1}AP \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = PDP^{-1}.$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On sait que*

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff B - \lambda I_3 \quad \text{n'est pas inversible} \iff \mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1-\lambda & 6 \\ 3-\lambda & 0 & 8 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 6 \\ 0 & 3-\lambda & 8 \\ 0 & -2 & -5-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad C_1 \longleftrightarrow C_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -5-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 8 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -5-\lambda \\ 0 & 0 & 8 + \frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2} \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{3-\lambda}{2} L_2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3 \iff -1-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 8 + \frac{(3-\lambda)(-5-\lambda)}{2} = 0 &\iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad 1 + 2\lambda + \lambda^2 = 0 \\
&\iff \lambda = -1
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(B) = \{-1\}$.

2. $E_{-1}(B)$: *soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(B) \iff BX = -X &\iff \begin{cases} 3x & & + 8z = -x \\ 3x & - y & + 6z = -y \\ -2x & & - 5z = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 4x + 8z = 0 \\ 3x + 6z = 0 \\ -2x - 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff 4x + 8z = 0 \\
&\iff x = -2z
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. *La famille* $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ *est une famille génératrice de* $E_{-1}(B)$ *; de plus, elle est formée de deux vecteurs non-colinéaires. C'est donc une base de* $E_{-1}(B)$.

3. *Comme* $\dim(E_{-1}(B)) = 2 \neq 3$, B *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_1[X]$ *défini par*

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \psi(P) = P'.$$

1. *La matrice de* ψ *dans la base canonique est*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
car $\psi(1) = 0$ *et* $\psi(X) = 1$*. De plus, on sait que* $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}(A)$*. Comme* A *est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi :*
$$\mathrm{Sp}(\psi) = \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.$$

2. *Supposons par l'absurde que* ψ *est diagonalisable. Alors, il existe une base* (P_1, P_2) *de* $\mathbb{R}_1[X]$ *formée de vecteurs propres de* ψ*. Comme* 0 *est la seule valeur propre de* ψ*, on aurait donc :*
$$\psi(P_1) = 0 \quad \textit{et} \quad \psi(P_2) = 0.$$
L'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_1[X]$ *et* ψ *coïncident donc sur la base* (P_1, P_2) *de* $\mathbb{R}_1[X]$*. Par conséquent* ψ *est l'endomorphisme nul. Mais* $\psi(X) = 1 \neq 0$ *; absurde! Ainsi,* ψ *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Comme la première colonne et la deuxième colonne de* A *sont égale, on remarque que*
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
donc 0 *est valeur propre et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 0*. De plus*
$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
est de rang 2 *car* $1 \times C_1 + 1 \times C_2 + (-1) \times C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Ainsi* 1 *est valeur propre et on peut même en déduire que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 1*.*
De même,
$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
est de rang 2 *car* $1 \times C_1 + 1 \times C_2 + 2 \times C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Ainsi* 1 *est valeur propre et on peut même en déduire que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 4*.*
Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *possèdent trois valeurs propres distinctes, alors ce sont les seules,* A *est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension* 1*. Ainsi :*
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

2. *En posant*
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
on a alors $D = P^{-1}AP$ *donc en multipliant à droite par* P^{-1} *et à gauche par* P *membre à membre on obtient*
$$PDP^{-1} = A.$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncer.*)

La matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, B *possède une unique valeur propre :* -2*. Supposons par l'absurde que* B *est diagonalisable : il existe donc* P *une matrice inversible et* D *une matrice diagonale telles que* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{D}$*. Comme les coefficients diagonaux de* D *sont les valeurs propres de* B*, on a forcément* $\mathrm{D} = -2\mathrm{I}_3$*.*
Or, en multipliant à droite par P^{-1} *et à gauche par* P *membre à membre dans* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP} = \mathrm{D}$*, on obtient*

$$\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{P}(-2\mathrm{I}_3)\mathrm{P}^{-1} = -2\mathrm{I}_3,$$

absurde ! Ainsi, B *n'est pas diagonalisable.*

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T} = -2\mathrm{I}_3$ *donc* $\mathrm{T}^2 - 3\mathrm{T} + 2\mathrm{I}_3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$*. Ainsi* $\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$ *est un polynôme annulateur de* T*.*
2. T *est triangulaire donc son spectre est constitué de ses coefficients diagonaux :* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{1, 2\}$*.*
3. *Déterminons les sous-espaces propres : soit* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*.*

   - $$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E}_1(\mathrm{T}) \iff \mathrm{TX} = \mathrm{X} &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & x \\ & & y & + & z & = & y \\ & & & & 2z & = & z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi,

     $$\mathrm{E}_1(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

   - $$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{E}_2(\mathrm{T}) \iff \mathrm{TX} = \mathrm{X} &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 2x \\ & & y & + & z & = & 2y \\ & & & & 2z & = & 2z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & z \end{array} \right. \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi,

     $$\mathrm{E}_2(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   - *En posant* $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a*

     $$\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP} \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \mathrm{T} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

4. *Par récurrence, montrons que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$*.*

- *Initialisation : c'est la question précédente.*
- *Hérédité : supposons qu'il existe un rang* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ *et montrons que* $\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}$.
  On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^n &= \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence}\\
&= \mathrm{PDD}^n\mathrm{P}^{-1} \quad \textit{car} \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{I}_3 \quad \textit{et} \quad \mathrm{DI}_3 = \mathrm{I}_3\\
&= \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}
\end{aligned}$$

- *Conclusion : d'après le principe de récurrence pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

On a aussi $\mathrm{T}^0 = \mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1}$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

On trouve facilement que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et comme* $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ *on obtient*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(2^n - 1) \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$