Chapitre 6 : Intégration, rappels et compléments

1 Intégration sur un segment : rappels

1.1 Primitive et intégrale sur un segment

Définition 1 (Primitive)

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que F est une **primitive de** f sur I si F est dérivable sur I de dérivée f:

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque 1

Si une fonction f possède une primitive F sur un intervalle I, alors pour tout réel k, la fonction définie sur I par

$$x \in I \longrightarrow F(x) + k$$

est aussi une primitive de f sur I. De plus, toute primitive de f sur I est de cette forme.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I possède une primitive sur I.

Remarque 2

Une primitive F d'une fonction continue f sur I est donc une fonction de classe C^1 sur I, en effet :

Proposition 1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux éléments de I tels que a < b. Soit F une primitive de f sur I.

- 1. Le réel F(b) F(a) ne dépend pas du choix de la primitive F de f sur I.
- 2. On appelle **intégrale de** f **sur le segment** [a,b] et on note $\int_a^b f(t)dt$ ce réel :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Remarque 3

On conserve les notations de la proposition précédente.

1. On note souvent:

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, la variable t est muette, ainsi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

3. On a:

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_{b}^{a} f(t)dt.$$

4. Par convention,
$$\int_a^a f(t)dt = 0$$
.

Proposition 2

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois éléments de I et λ un réel.

1. Linéarité: on a

$$\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$$

2. Relation de Chasles: on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

3. *Positivité* : si $a \le b$ alors

$$\forall t \in [a,b], \ f(t) \geqslant 0 \implies \int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$$

4. *Croissance* : si $a \le b$ alors

$$\forall t \in [a,b], \ f(t) \ge g(t) \implies \int_a^b f(t)dt \ge \int_a^b g(t)dt.$$

5. *Inégalité triangulaire* : si $a \le b$ alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 3

Soit f une fonction **positive et continue** sur un segment [a,b] avec a < b telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors:

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = 0.$$

Test 1 (Voir solution.)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

- 1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.
- 3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.
- 4. Monter que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

1.2 Techniques de calcul

► Calcul de primitives « à vue ».

Fonction <i>f</i>	Une primitive de f	sur l'intervalle :
$x \longmapsto a, a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ax$	R
$x \longmapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	${\mathbb R}$
$x \longmapsto x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \longmapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$	\mathbb{R}_+^*
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$	\mathbb{R}_+^*
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	IR

TABLE 1 – Primitives usuelles

Fonction <i>f</i>	Une primitive de f	sur tout I tel que :
$x \longmapsto u'(x)u(x)^n, n \in \mathbb{N}$	$x \longmapsto \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	u est dérivable sur I
$x \longmapsto u'(x)u(x)^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \longmapsto \frac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	u est dérivable et $u > 0$ sur I
$x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \longmapsto \ln(u(x))$	u est dérivable et ne s'annule pas sur I
$x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \longmapsto e^{u(x)}$	u est dérivable sur I

TABLE 2 – Primitives de fonctions composées

Exemple 1

Calculer $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

Test 2 (Voir solution.)

Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{e}^{3e} \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

$$2. \int_0^2 e^{2t-1} dt.$$

3.
$$\int_0^1 s(s^2+3)^2 ds$$
.

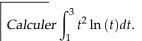
▶ Intégration par parties.

Proposition 4 (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un segment [a,b]. Alors :

$$\int_{a}^{b} u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u(t)v'(t)dt.$$

Exemple 2



Test 3 (Voir solution.)

Soit
$$x \in]1, +\infty[$$
. Calculer $\int_{1}^{x} \ln(t) dt$.

► Changement de variables.

Proposition 5 (Changement de variables)

Soit u une fonction de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone sur [a,b] et soit f une fonction continue sur u([a,b]). Alors :

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt.$$

4

Exemple 3

Calculer $\int_{1}^{2} \frac{dt}{e^{t}+1}$ à l'aide du changement de variable $u=e^{t}$.

1. Transformer du avec la formule du = u'(t)dt.

2. Transformer l'expression sous l'intégrale.

3. Transformer les bornes.

4. Rédaction finale:

Test 4 (Voir solution.)

Soit f une fonction impaire continue sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $a\geqslant 0$: $\int_{-a}^a f(t)dt=0$. Indication : à l'aide d'un changement de variable, montrer que $\int_0^a f(t)dt=\int_{-a}^0 f(-t)dt$.

Test 5 (Voir solution.)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

2 Intégrales impropres

2.1 Intégrales impropres en $\pm \infty$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où a est un réel.

• Si la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt,$$

on l'appelle intégrale impropre (ou généralisée) de f sur $[a, +\infty[$ et on la note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$.

• Si la limite $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, sinon on dira qu'elle diverge.

Méthode 1

Soit f définie sur un intervalle $[a, +\infty[$. Étudier la nature de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non, c'est-à-dire déterminer si

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$$

existe et est finie ou non. En pratique :

- 1. on commence par montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$,
- 2. on introduit $x \in [a, +\infty[$ et on étudie si $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 4

1.	Étudier la nature de $\int_1^{+\alpha}$	$(\frac{1}{t}dt.$		

	nture de $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t}$			
	<u>r+m</u>			
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-it}$	$e^{-t}dt$.		
Étudier la na	nture de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-c}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-c}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	nture de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	e ^{-t} dt.		
Étudier la na	ature de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	e ^{-t} dt.		
Étudier la na	nture de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}}$	r ^{-t} dt.		

Plus généralement :

Exemples de référence

- 1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
- 2. Intégrale de Riemann en $+\infty$: pour tout réel c>0, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ converge si et seulement si a>1.

Démonstration :

Proposition 6 (Propriétés des intégrales impropres)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Soient $c \in [a, +\infty[$ et λ un réel.

1. $\mathit{Lin\'{e}arit\'e}: \operatorname{si} \int_{a}^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_{a}^{+\infty} g(t)dt \text{ convergent alors } \int_{a}^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))dt \text{ converge et }$

$$\int_{a}^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt + \lambda \int_{a}^{+\infty} g(t)dt.$$

2. *Relation de Chasles* : si $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ converge et

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt = \int_{a}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt.$$

- 3. *Positivité* : si f est positive sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt \ge 0$.
- 4. Si f est positive sur $[a, +\infty[$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, +\infty[, f(t) = 0.$$

Méthode 2 (Techniques de calcul)

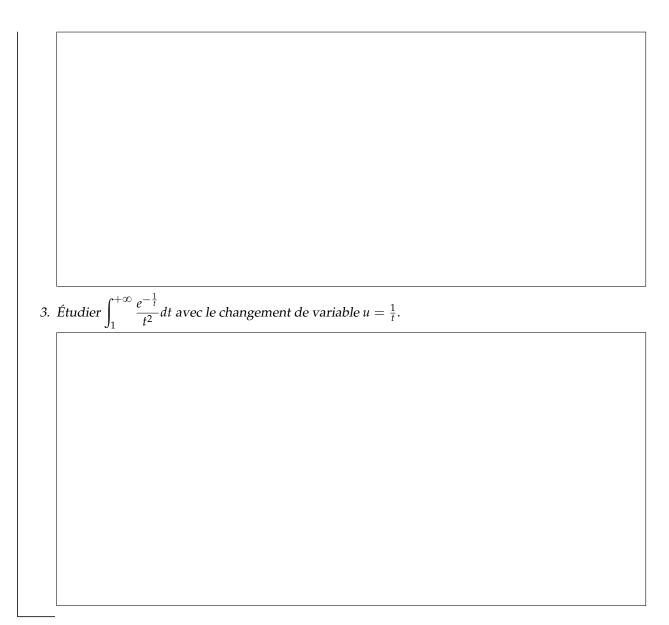
On peut utiliser les techniques de calcul comme les primitives « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties pour calculer des intégrales impropres :

- 1. on se ramène à une intégrale sur un segment : on considère $x \in [a, +\infty[$ et on s'intéresse à l'intégrale sur le segment [a, x]),
- 2. on utilise la technique voulue (primitive « à vue », le changement de variable ou l'intégration par parties) dans cette intégrale sur un segment,
- 3. on passe à la limite quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 5

1. Étudier $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt.$

2. Étudier $\int_{1}^{+\infty} \ln(t) dt$.



Test 6 (Voir solution.)

Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

$$1. \int_0^{+\infty} u e^{-u} du;$$

2.
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{2}} dt \text{ en posant } u = \ln(t).$$

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en $-\infty$)

Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $]-\infty,b]$ où b est un réel.

• Si la limite suivante existe et est finie

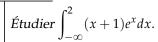
$$\lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt,$$

on l'appelle intégrale impropre (ou généralisée) de f sur $]-\infty,b]$ et on la note $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$.

• Si la limite $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ existe et est finie, on dira que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ converge, sinon on dira qu'elle **diverge**.

Les propriétés de la proposition 6 sont encore valables pour les intrégrales impropres en $-\infty$.

Exemple 6



2.2 Intégrales doublement impropres

Définition 4 (Convergence d'une intégrale doublement impropre)

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} .

S'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que les deux intégrales impropres $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ convergent, on dit que l'**intégrale doublement impropre** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** et on note

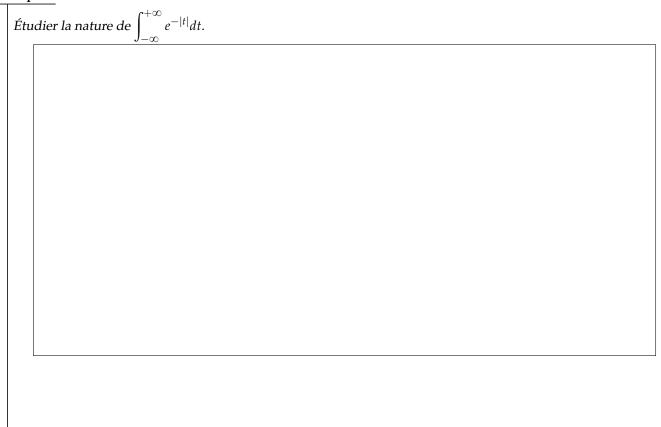
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt.$$

Sinon, on dira qu'elle diverge.

Méthode 3

Soit f définie sur \mathbb{R} . Étudier la nature de l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, c'est déterminer si elle converge ou non. En pratique on prend n'importe quel $c \in \mathbb{R}$ et on étudie la nature des intégrales impropres $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ avec les méthodes précédentes.

Exemple 7



Les propriétés de la propostion 2 sont encore valables pour les intrégrales doublement impropres.

3 Convergence absolue

Définition 5 (Convergence absolue)

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

 On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.
- Soit f une fonction continue sur $]-\infty,a]$.

 On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^a |f(t)|dt$ converge.
- Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} .

 On dit que l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge.

Proposition 7

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente. Dans ce cas :

$$\left| \int_{a}^{+\infty} f(t)dt \right| \leq \int_{a}^{+\infty} |f(t)|dt.$$

Le résultat analogue est valable pour les intégrales impropres en $-\infty$ et pour les intégrales doublement impropres.

Remarque 4

La réciproque est fausse : il existe des intégrales qui ne sont pas absolument convergentes mais qui sont convergentes.

4 Objectifs

- 1. Connaître les primitives de références.
- 2. Connaître la nature des intégrales impropres de référence.
- 3. Savoir étudier la nature d'une intégrale impropre ou doublement impropre.
- 4. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable. Appliquer ces techniques à l'étude d'intégrales impropres.