Exo 1

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \neq 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{V_n}{U_n} = \frac{\ln(n) - 2n^2}{n^3 - \sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2\left(\frac{\ln(n)}{n^2} - 2\right)}{n^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\sqrt{n^2+1}\right)}$

$= \frac{1}{n} \times \frac{\frac{\ln(n)}{n^2} - 2}{1 - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}}$

Or par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$$

De plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 0 \times 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (-2) = 0 \times (-2) = 0$

Ainsi $V_n = o(U_n)$.

Exo 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n} = \frac{(\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n})(\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n})}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{4n}}$

$= \frac{4n+1-4n}{\sqrt{4n(1+\frac{1}{4n})} + \sqrt{4n}} = \frac{1}{\sqrt{4n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} + 1\right)}$

Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{4n}} + 1 = 2$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$

Ainsi $\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{4n}} = \frac{1}{4\sqrt{n}}$

Exo 3 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{5\ln(n) \times \left(1 + \frac{2}{5\ln(n)}\right)}{3^n\left(\frac{2n}{3^n} + \frac{1}{3^n} + 1\right)}$

Or, par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{5\ln(n)}}{2n/3^n + 1/3^n + 1} = 1$ donc $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5\ln(n)}{3^n}$

Exo 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \neq 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{V_n}{U_n} = \frac{-2n^3\left(1 - \frac{\ln(n)}{2n^3}\right)}{n^3\left(1 - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}\right)} = -2 \times \frac{1 - \frac{\ln(n)}{2n^3}}{1 - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}}$

On a vu que $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3} = 1$ et, par croissance comparée

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{2n^3} = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{U_n} = -2 \times 1 = -2$

donc les suites ne sont pas équivalentes.

Exo 2 : $\forall n \geq 2$ $\ln(n) \neq 0$ et :

$\forall n \geq 2$ $\frac{\frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{\ln(n)}} = \left(\frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{2^n}\right) \times \ln(n)$

$= \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{2^n}$

donc par croissance comparée

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{2^n}}{1/\ln(n)} = 0$$

Ainsi $\frac{1}{n\ln(n)} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

Exo 3 :

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n\sqrt{n}} = 0$, par équivalent usuel on a

$$U_n = \left(1 + \frac{3}{n\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{3}{n\sqrt{n}}.$$