TD1-Suites récurrentes

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = (1-x)^3 + x.$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) *Dresser le tableau de variations de f.*
   (b) *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.*
2. *Monter que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.*

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1 \end{cases}$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$.

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède comme unique solution 0. En déduire le signe de $x \mapsto f(x) - x$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$

4. *En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

et la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Étudier les variations de f.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.*
3. *Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *Déterminer les points fixes de f et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
5. *Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n et qui calcule et affiche la valeur de u_n.*

Exercice 4 (*Ecricome 2013*)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}$$

et on définie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 &= e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) + u_n \end{cases}.$$

1. *Dresser le tableau de variations de φ en faisant apparaître les limites en 0 et $+\infty$.*
2. *Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$.*
   Justifier que $\alpha \in [1; e]$
3. *Démontrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > \alpha$.*
4. *Si cette suite est convergente de limite finie L, que peut valoir L ?*
5. *Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
6. *Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 5 (*EML 2018*)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

1. *Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.*
2. *Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.*
3. *Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.*

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[.$$

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. (a) Écrire une fonction `suite` en Python qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

   (b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à epsilon près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while ........ :
4         n =n+1
5     return suite(n)
```

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. Déterminer les limites (finies) possibles de la suite.
3. Montrer que $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{7}{16}$.
6. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{2}\ln(x+1)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1, 2]$. On pourra utiliser le fait que $7 < e^2 < 8$.
3. On pose $u_0 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq \alpha.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.
5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$$

6. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 (*EML 2014*)

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet que $2 < e < 3$.

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
   Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.
2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ' et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[,\ \varphi(x) \geqslant ex$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$.
7. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
8. Écrire un programme en Python qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
9. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?