ECE2-Colle 15

19/01/22

1 Réduction

Tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

Valeurs propres, vecteurs propres : valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée ; spectre. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme f et éléments propres d'une matrice de f dans une base. Caractérisation des valeurs propres : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff f - \lambda \cdot \mathrm{id_E}$ n'est pas bijective ..., $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \iff \mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible ; valeurs propres d'une matrice triangulaire. Méthode : déterminer les valeurs propres de A en trouvant la réduite de Gauss de $\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$

Sous-espaces propres : définition des sous-espaces propres associés aux valeurs propres d'un endomorphisme / d'une matrice carrée, cas particulier de la valeur propre 0.

Scilab : commande `spec`.

Polynômes annulateurs : définition d'un polynôme d'endomorphisme, de matrice ; définition de polynôme annulateur. Les valeurs propres d'un endomorphisme/matrice sont **des** racines de tout polynôme annulateur. Déterminer l'inverse d'un automorphisme avec un polynôme annulateur.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire. Savoir déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire (chapitre 9).
2. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données. Savoir étudier une application linéaire (noyau, image) à l'aide d'une matrice représentative (chapitre 9).
3. Savoir déterminer les valeurs propres d'une matrice A en étudiant le rang de $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ ou en résolvant le système à paramètre $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$ dans des cas simples.
4. Savoir déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme à l'aide de son expression ou à l'aide d'une matrice représentative.
5. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
6. Étant donné un polynôme P, savoir exprimer $\mathrm{P}(f)$ pour f un endomorphisme ou une matrice carrée.
7. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur.
8. Savoir déterminer l'inverse d'un automorphisme à partir d'un polynôme annulateur.

3 Questions de cours

- Définitions : valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme/ d'une matrice carrée. Polynôme annulateur d'un endomorphisme/ d'une matrice carrée.
- Propositions : lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres d'une matrice représentative de cet endomorphisme (proposition 1). Caractérisation des valeurs propres (proposition 2) : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff f - \lambda \cdot \mathrm{id_E}$ n'est pas bijective ..., $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \iff \mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Lien entre spectre et racine d'une polynôme annulateur (proposition 4).
- Scilab : commande pour obtenir le spectre d'une matrice.