# ECE2-Semaine 4

**14/10/20**

## 1 Cours

### 1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

**Rang :** rang d'une famille de vecteurs; opérations préservant le rang. Rang d'une matrice; pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(A) \leqslant n$ et $\text{rg}(A) \leqslant p$; le rang d'une matrice et de sa transposée sont égaux; opérations sur les lignes et les colonnes qui préservent le rang. Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le rang.

### 1.2 Séries

**Rappels de première année :** série numérique, notation $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, série convergente/divergente, somme d'une série convergente, télescopage. Si une série converge alors son terme général tend vers 0. Critère de convergence des séries géométriques (dérivées première et seconde) et expression de la somme le cas échéant, convergence des séries exponentielles et expression de la somme.

**Séries de Riemann :** critère de convergence des séries de Riemann.

**Séries à termes positifs :** critère de comparaison des séries à termes positifs (majoration par le terme général d'une série convergente / minoration par le terme général d'une série divergente). Comparaison : critère de négligeabilité des séries à termes positifs; cas particulier de la comparaison avec une série de Riemann. Comparaison : critère d'équivalent des séries à termes positifs; cas particulier de la comparaison avec une série de Riemann.

**Séries à termes quelconques :** convergence absolue, la convergence absolue implique la convergence.

### 1.3 Variables aléatoires discrètes (révisions)

**Généralités :** variable aléatoire discrète, fonction de répartition, loi, loi de $g(X)$ pour $X$ une variable aléatoire réelle discrète et $g$ une fonction définie sur $X(\Omega)$.

**Moments :** espérance, linéarité de l'espérance, théorème de transfert. Moment d'ordre supérieur, variance, formule de Koenig-Huygens.

**Lois usuelles :** loi certaine, loi de Bernoulli, loi binomiale , loi uniforme , loi géométrique , loi de Poisson. Espérance et variance des lois usuelles. Expérience aléatoire de référence de la loi Bernoulli, binomiale , uniforme et géométrique.

## 2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteur, d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss ou de manière astucieuse.
2. Savoir étudier la nature d'une série en utilisant les outils connus sur les suites (suite des sommes partielles croissante majorée etc...), connaître les propriétés des opérations sur les séries (une somme de séries convergentes est convergente, ...), savoir reconnaître un télescopage, reconnaître les séries usuelles (programme d'ECE1).
3. Savoir calculer la somme d'une série en reconnaissant des séries usuelles.
4. Savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs en utilisant les critères de comparaison (majoration/-minoration, négligeabilité ou équivalence), notamment en comparant avec des série de Riemann.
5. Savoir montrer qu'une série à termes quelconques est convergente en utilisant la convergence absolue.
6. Savoir montrer qu'une variable aléatoire discrète possède une espérance (en lien avec les séries).

## 3 Questions de cours

- Déterminer le rang d'une matrice au choix de l'examinateur par pivot de Gauss ($3 \times 3$ minimum).
- Définition : convergence absolue
- Propositions : Critère de convergence et somme des séries géométriques/ exponentielles. Critère de convergence des séries de Riemann. Critère de comparaison des séries à termes positifs (majoration/minoration). Critère de comparaison des séries à termes positifs (négligeabilité). Critère de comparaison des séries à termes positifs (équivalence).