TD2-Comparaison de suites

1 Applications directes du cours

Exercice 1 (*Vrai ou faux*)

Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ alors $u_n = v_n$.
2. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n + w_n)$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ alors $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
6. Si $u_n = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
7. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

Exercice 2

Déterminer dans chaque cas si l'une des deux suites est négligeable devant l'autre.

1. $u_n = 1$ et $v_n = \frac{1}{n}$.
2. $u_n = n^7$ et $v_n = (\ln n)^8$.
3. $u_n = e^n$ et $v_n = 2^n$.
4. $u_n = \frac{1}{3^n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$.
5. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{e^n}$.
6. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$.
7. $u_n = \ln(n)e^n$ et $v_n = ne^{\frac{n}{2}}$.
8. $u_n = e^{n-1}$ et $v_n = e^{n+1}$.
9. $u_n = \frac{\ln n}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
10. $u_n = n^e$ et $v_n = e^n$.
11. $u_n = 2^{n^2}$ et $v_n = n^{\sqrt{n}}$.
12. $u_n = n^{\ln n}$ et $v_n = (\ln n)^n$.

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

1. $u_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}})$.
2. $u_n = (n^2 + n + 3^n)(e^{-n} + 1)$.
3. $u_n = \frac{\ln n + 2}{4n+1+3^n}$.
4. $u_n = \frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{e^{\frac{1}{2n}} + 1}$.
5. $u_n = \ln(n^2 + e^n)$.
6. $u_n = e^{n+\ln n+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\ln n}}$.
7. $u_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - \sqrt{4n^2+n+1}$.
8. $u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
9. $u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1$.
10. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.
11. $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$.
12. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$.
13. $u_n = n^{n+1} - (n+1)^n$.
14. $u_n = n^2 + n - e^n + \ln n + e^n$.
15. $u_n = \frac{n^3+6n^2+1}{n^4+3n^2-2n+1}$.
16. $u_n = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}$.
17. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$
18. $u_n = e^{1+\frac{1}{n}}$
19. $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$.
20. $u_n = e^{\frac{2}{\ln n}} - 1$.
21. $u_n = \ln(2n^2) + 1$.
22. $u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
23. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}(1+n)^{\frac{5}{3}}$.
24. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

1. On considère les suites définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \quad et \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2}.$$
   (a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   (b) A-t-on $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$?
   (c) A-t-on $u_n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^n$?
2. Donner un équivalent de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = e^{ne^{\frac{1}{n}}}$.

Exercice 5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. Prouver que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. On suppose de plus que qu'à partir d'un certain rang, les termes des deux suites sont positifs. Prouver que $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice 6

Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas.

1. $\forall n \geq 2,\ u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ où $0 < a < b$.
3. $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{n^2(\ln(n+1)-\ln n)}{\sqrt{n^2+1}}$.
4. $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{3n^3+5n^2+2n}{e^n+2n+2^n\ln n}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.
6. $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln n}$.
7. $\forall n \geq 1,\ u_n = \left(n^2+e^n\right)\left(\frac{1}{n^2}+e^{-n}\right)$.
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.
9. $\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
10. $\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n$.
11. $\forall n \geq 1,\ u_n = (1+e^{-n})^{n^2}$.
12. $\forall n \geq 2,\ u_n = (\ln n+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\ln n}}}$.
13. $\forall n \geq 1,\ u_n = \ln n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7

Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chaque cas.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq \frac{u_n}{n+2} \leq 2+\frac{1}{n}$.
3. La suite $((n-1)u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
4. La suite $((n-1)u_n+e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
5. $1-\frac{u_n^2}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
6. $\forall n \geq 2, 3n^2 - n\ln n \leq u_n \leq 3n^2+n\sqrt{n}+1$.

2 Exercices classiques

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

1. Montrer qu'il existe un entier N tel que
$$\forall n \geq N \quad |u_n| \leq |v_n|.$$
2. Montrer qu'il existe un entier N tel que
$$\forall n \geq N \quad n^2+4n-1 \geq (\ln(n+4))^6.$$
3. Ecrire un programme Scilab permettant de déterminer le plus petit N qui convient.

Exercice 9

Soit X_n une variable aléatoire définie sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

1. Donner $X_n(\Omega)$ ainsi que les valeurs de $P(X_n = k)$ pour $k \in X_n(\Omega)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$
3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-1}\frac{1}{k!}.$$

Exercice 10

On définit la suie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1+\frac{u_n}{n+1}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$. En déduire un réel a tel que $u_n - 1 = \frac{a}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 11

Le but de cet exercice est de montrer que $n!$ n'est pas équivalent à n^n. Pour cela, on note pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$
2. On suppose que la suite (u_n) converge vers 1.

(a) *Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
(b) *Conclure.*

Exercice 12

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x - e^{-x}.$$

1. *Dresser le tableau de variation de f.*
2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution que l'on notera u_n.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \ln n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.*
4. (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$e^{u_n}(1 - e^{-2u_n}) = n.$$

   (b) *En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.*
5. *On cherche maintenant un équivalent de $u_n - \ln n$.*
   (a) *Montrer que $e^{u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.*
   (b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$(u_n - \ln n) + \ln(1 - e^{-2u_n}) = 0.$$

   (c) *En déduire un équivalent de $u_n - \ln n$.*
6. (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$u_n = \ln\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right).$$

   (b) *Vérifier à l'aide de cette expression que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.*
   (c) *Calculer à l'aide de cette expression un équivalent de $u_n - \ln n$.*