TD12-Intégration

Exercice 1.

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   - Si $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a
   $$1+t+t^n \geq t^n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $n > 1$. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ converge aussi.
   - Si $n = 1$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a
   $$1+t+t^n = 1+2t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \frac{1}{3t}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3t}dt$ est, à un facteur non nul près, une intégrale de Riemann divergente donc divergence elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ diverge aussi.
   - Si $n = 0$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a
   $$1+t+t^n = 2+t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$
   Et on conclut comme précédemment que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ diverge.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq e$ on a
   $$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est une intégrale de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ diverge.
3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(t)}$ est continue sur $[2,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geq 2$ on a
   $$\frac{1}{t^3\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(2)t^3}.$$
   Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(t)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3\ln(2)}$ sont continues, positives sur $[2,+\infty[$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(2)}dt$ est, à un facteur près, une intégrale de Riemann convergente donc converge elle-même. D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(t)}dt$ converge aussi.

Exercice 2.

1. La fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x^2+x}} = 0$.
   Donc $e^{-\sqrt{x^2+x}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Les fonctions $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ converge aussi.
   Enfin, $\int_0^1 e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ est bien définie car $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2+x}}$ est continue sur $[0,1]$. Donc finalement, $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}}dx$ converge.
   ⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).
2. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{4}}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.
   Donc $\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$.
   Les fonctions $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}dx$ est une intégrale de Riemann divergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$ diverge aussi.

3. La fonction $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Par composition de limite :
$$\lim_{t\to+\infty} te^{\frac{1}{t}} = +\infty$$
donc $\frac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{\frac{1}{t}}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto e^{\frac{1}{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann divergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge aussi.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^k e^{-t^2} = 0$.

Donc $t^k e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ converge aussi.

Comme de plus, $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^k e^{-t^2}dt$ existe.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ converge donc.

⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).

5. La fonction $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

De plus, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} = 0$.

Donc $\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4}dt$ converge aussi.

6. Exactement comme la question 4.

Exercice 3.

1. La fonction $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
$$\frac{t^2+2t}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente., $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ converge aussi.

Comme de plus, $t \mapsto \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ existe.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2+2t}{t^4+1}$ converge donc.

⚠On ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2-x+1>0$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2-x+1}dx$.

     Par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
$$\frac{1}{x^2-x+1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
     Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $]-\infty,-1]$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2-x+1}dx$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente., $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge aussi.

     Comme de plus, $x \mapsto \frac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $[-1,0]$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{1}{x^2-x+1}dx$ existe.

     Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge donc.

   - On montre de la même façon que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.
   - Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2-x+1}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.

3. La fonction $t \mapsto \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

On sait par équivalent usuel :
$$e^{\frac{1}{t}}-1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$
D'où :
$$\frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} 1.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1}$ et $t \mapsto 1$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} 1\,dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1}\,dt$ diverge aussi.

4. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, on vérifie à l'aide de la caractérisation que l'on a :

$$\sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ sont continues, positives sur $[c,+\infty[$ pour tout $c>0$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ diverge aussi pour tout $c>0$. Donc $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}\,dt$ diverge.

5. La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus par équivalent usuel, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale convergente, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ converge aussi.

Exercice 4.

1. Soit $x>0$. la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, on sait que :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{e^{-t}}{t} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0.$$

Ainsi : $\frac{e^{-t}}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues et positives sur $[x,+\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge alors $J(x)$ converge aussi.

2. (a) Soit $A \in [x,+\infty[$. On a :

$$\forall t \in [x,+\infty[, \quad \frac{e^{-t}}{t^2} \le e^{-t} \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt &\le \frac{1}{x^2}\int_x^A e^{-t}\,dt\\ &\le \frac{1}{x^2}(e^{-x}-e^{-A})\\ &\le \frac{1}{x^2}e^{-x}.\end{aligned}$$

En particulier, la fonction $A \mapsto \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ est croissante et majorée donc possède une limite en $+\infty$. On en déduit donc que l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$ converge et vérifie :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \le \frac{1}{x^2}e^{-x}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$0 \le \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}} \le \frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt}{\frac{e^{-x}}{x}} = 0.$$

Cela signifie : $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

(b) Soient $x>0$ et $A>x$. Les fonctions $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x,A]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}\,dt &= \int_x^A u(t)v'(t)\,dt\\ &= [u(t)v(t)]_x^A - \int_x^A u'(t)v(t)\,dt\\ &= -\frac{e^{-A}}{A} + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et avec la question précédente on obtient donc :

$$J(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a bien :

$$J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$