TD12-Intégration de fonctions positives

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de comparaison par inégalité.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$, 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$, 3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$.

Exercice 2

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de négligeabilité.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$,
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$,
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}} dt$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$, $k \in \mathbb{N}$,
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} dt$,
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$.

Exercice 3

Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème d'équivalence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1} dt$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1} dx$,
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1} dt$,
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt$,
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 4

1. *Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale*

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

est convergente.

2. (a) *Montrer que* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

   (b) *En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que* $J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.