ECE2 – Mathématiques

DM2

- **A rendre le mardi 3 novembre au début de la séance de cours. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.**
- **Le devoir doit être rédigé sur des copies doubles. Les résultats doivent être mis en valeur (encadrés ou soulignés par exemple).**

Exercice 1

On note I, A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \cdot \mathrm{I} + b \cdot \mathrm{A} + c \cdot \mathrm{B}.$$

   (b) En déduire une famille génératrice de E.

   (c) La famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ est-elle libre ? En déduire une base de E et sa dimension.

2. Calculer A^2.
3. On considère le sous-ensemble F de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{BX} = 2\mathrm{X} \right\}$$

   (a) Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff x - z = 0.$$

   (b) En déduire une famille génératrice de F.

   (c) Trouver une base de F et sa dimension.

4. Déterminer le rang de A et le rang de B.

Exercice 2

Le but de l'exercice est d'étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$. De même, montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
2. On s'intéresse à la continuité de f en 0.
   (a) Rappeler la définition de « f est continue en 0 ».
   (b) Déterminer la limite à gauche de f quand x tend vers 0.
   (c) Déterminer la limite à droite de f quand x tend vers 0. Une rédaction soignée et détaillée est attendue.
   (d) Conclure que f est continue en 0.
3. On s'intéresse maintenant à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3\ln(x) + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Rappeler la définition de « g est dérivable en 1 »

(c) Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}.$$

(d) En déduire que g est dérivable en 1 et déterminer $g'(1)$.

(e) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction g' est-elle continue en 1 ?

Exercice 3

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs. Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante :

- On pioche une boule dans l'urne.
- On replace la boule dans l'urne et on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.

On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule est noire et 2 si elle est blanche. On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.
On admet que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.

1. (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi de Y.
2. On dit que les deux variables X_1 et X_2 définies sur une même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont **échangeables** si :
$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = P([X_1 = j] \cap [X_2 = i])$$
   (a) Montrer que les variable X et Y définies ci-dessus sont échangeables. Sont-elles indépendantes ?
   (b) Montrer que deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et de même loi sont échangeables.
   (c) On suppose que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X_1 = i) = P(X_2 = i)$$

Exercice 4

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Écrire une fonction Scilab qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   (b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.
   (c) Donner la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que sa somme (si elle converge).

Exercice 5

Déterminer la nature de la série suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+(-1)^n n e^{-n}\right)$$