TD5-Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (Vrai ou Faux)**.**

1. **Faux** : dans $\mathbb{R}^2$, prenons $u = (1,0)$, $v = (1,1)$ et $w = (0,1)$. Alors (u,v), (u,w) et (v,w) sont libres (ce sont des familles de deux vecteurs non colinéaires). Pourtant, la famille (u,v,w) est liée car $v = u + w$.

2. **Vrai** : soit E un espace vectoriel et $(u,v,w) \in E^3$ tels que $w \in \text{Vect}(u,v)$. Alors w est combinaison linéaire de u et de v donc (u,v,w) est liée.

3. **Faux** : la dimension de $\mathbb{R}_5[X]$ est 6.

4. **Faux** : dans $\mathbb{R}^3$ prenons $F = \text{Vect}((1,0,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0))$. Ce sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 mais $F \neq G$.

5. **Faux** : la famille contient 4 éléments et la dimension de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est égale à 6. Donc ça ne peut pas être une base.

Exercice 2. 1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$AM = \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } MA = \begin{pmatrix} a & 2a+b & 3a+2b+c \\ d & 2d+e & 3d+2e+f \\ g & 2g+h & 3g+2h+i \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
M \in F &\iff AM = MA \\
&\iff \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b & 3a+2b+c \\ d & 2d+e & 3d+2e+f \\ g & 2g+h & 3g+2h+i \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2d+3g = 0 \\ -2a+2e+3h = 0 \\ -3a-2b+2f+3i = 0 \\ 2g = 0 \\ h-d = 0 \\ 2i-3d-2e = 0 \\ 2g = 0 \\ 3g+2h = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g = 0 \\ 2d = 0 \\ -2a+2e+3h = 0 \\ -3a-2b+2f+3i = 0 \\ h-d = 0 \\ 2i-3d-2e = 0 \\ 2h = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g = 0 \\ d = 0 \\ h = 0 \\ -2a+2e = 0 \\ -3a-2b+2f+3i = 0 \\ 2i-2e = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g = 0 \\ d = 0 \\ h = 0 \\ a = e \\ i = e \\ b = f \end{cases}
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$M \in F \iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : $F = \text{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

2. D'après la question précédente, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} aI_3 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre. C'est une famille libre et génératrice de F donc c'est une base de F. En particulier, F est de dimension finie et sa dimension est égale à 3.

3. (a) On a

$$A = I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons, B la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \geq 3$, on a

$$B^k = B^{k-3}B^3 = 0.$$

D'après la formule du binôme de Newton, comme $I_3B = BI_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} A^n = (I_3 + B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} B^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, on a donc

$$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) + 3n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

formule aussi valable pour $n = 1$. Or, I_3, B et B^2 sont des éléments de F. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est combinaison linéaire d'éléments de F. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.

(b) D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, A^n &= I_3 + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_3 + 2n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2n(n-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_3 + 2n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(2n+1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les coordonnées de A^n dans la base déterminée ci-dessus sont $(1, 2n, n(2n+1))$.

Exercice 3. 1.

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \text{ réels} \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel de dimension finie (car $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est de dimension finie). De plus, $\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de E.

Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, alors :

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix}a&a&a\\0&b&b\\0&0&c\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\ &\iff a=b=c=0.\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille libre et génératrice de E. Ainsi, c'est une base de E et E est de dimension 3.

2. On a :

$$J=M(1,1,1)-I_3=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(a) On trouve :

$$J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad J^3=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Donc, pour tout $n\geq 3$, on a

$$J^n=J^{n-3}J^3=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

(b) Soit $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}(M(1,1,1))^n&=(I_3+J)^n\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}I_3^{n-k}J^k \quad \text{binôme de Newton car } I_3 \text{ et } J \text{ commutent}\\ &=I_3+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2 \quad \text{car, pour tout } n\geq 3,\ J^n=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Pour $n=0$, la formule ci-dessus donne bien $M^0=I_3$ et pour $n=1$, on trouve $M^1=I_3+J$. Donc la formule est valable pour $n=0$ et $n=1$.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$. On déduit des questions précédente que :

$$\begin{aligned}(M(1,1,1))^n&=I_3+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2\\ &=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&n&n\\0&0&n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. La famille (u,v,w) est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de cardinal $3=\dim\mathbb{R}^3$. Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre.

   Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3w=(0,0,0)&\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\\ \lambda_1-\lambda_3=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2=0\\ 3\lambda_1=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\lambda_3=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases}\end{aligned}$$

   Donc la famille (u,v,w) est libre. Par ce qui précède, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille $(X^2+X+1,X-1,X+1)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ de cardinal $3=\dim\mathbb{R}_2[X]$. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(X^2+X+1)+\lambda_2(X-1)+\lambda_3(X+1)=0 \\
&\iff \lambda_1 X^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & & & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(X^2+X+1, X-1, X+1)$ est une famille libre. Par ce qui précède, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. La famille $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car c'est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée). De plus, cette famille est de cardinal 4 et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$. Par conséquent, $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$. Si

$$P = \lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3$$

alors,

$$P' = \lambda_1 + 2\lambda_2(X-1) + 3\lambda_3(X-1)^2 \quad ; \quad P'' = 2\lambda_2 + 6\lambda_3(X-1) \quad ; \quad P''' = 6\lambda_3.$$

En particulier on a

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} P(1) & = & a & + & b & + & c & + & d & = \lambda_0 \\ P'(1) & = & 3a & + & 2b & + & c & & & = \lambda_1 \\ P''(1) & = & 6a & + & 2b & & & & & = 2\lambda_2 \\ P'''(1) & = & 6a & + & & & & & & = 6\lambda_3 \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = \lambda_0 \\ 3a & + & 2b & + & c & & & = \lambda_1 \\ 3a & + & b & & & & & = \lambda_2 \\ a & + & & & & & & = \lambda_3 \end{array}\right.$$

Réciproquement, on vérifie que

$$P = (a+b+c+d) + (3a+2b+c)(X-1) + (3a+b)(X-1)^2 + a(X-1)^3.$$

Les coordonnées de P dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ sont donc

$$(a+b+c+d, 3a+2b+c, 3a+b, a).$$

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. (a) H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide car $(0, \ldots, 0) \in H$.
   (b) Montrons que H est stable par combinaison linéaire. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de H et $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $x + \lambda y \in H$.
   On sait que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car $x \in H$ et $y_1 + \cdots + y_n = 0$ car $y \in H$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}(x_1+\lambda y_1) + \cdots + (x_n + \lambda y_n) &= x_1 + \cdots + x_n + \lambda(y_1 + \cdots + y_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Ainsi $x + \lambda y \in H$.
   Cela montre que pour tout $x, y \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda y \in H$. Ainsi H est stable par combinaison linéaire.
   (c) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on en conclut que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour $i = 2, \ldots, n$, on note $f_i = e_1 - e_i$. Comme la famille $(f_2, \ldots, f_n)$ est de cardinal $n-1$ et que H est de dimension $n-1$ d'après l'énoncé, pour montrer que $(f_2, \ldots, f_n)$ est une base de H il suffit
   (a) de vérifier que pour tout $i = 2, \ldots, n$, $f_i \in H$,
   (b) de montrer que $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre.
   Montrons cela.
   (a) Pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $f_i = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ où le -1 est un $i^{\text{ième}}$ position. Comme

$$1 + 0 + \cdots + 0 - 1 + 0 \cdots + 0 = 0$$

   alors $f_i \in H$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$.
   (b) Montrons que $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre. Soit $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 &\iff \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (e_1 - e_k) = 0 \\
&\iff \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) e_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k e_k = 0 \\
&\iff \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad \text{car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est libre}
\end{aligned}$$

   Ainsi, la famille $(f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

Par ce qui précède, la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est donc une base de H.

Exercice 6.

- $E = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$ donc la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de E. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une base de E et donc $\dim E = 2$.
- De même, $\left(\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right)$ est une base de F donc $\dim F = 2$.
- On remarque que
$$\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$
donc $\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix} \in E$ et $\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} \in E$. Par conséquent, $F \subset E$.
- On a $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$ donc $F = E$.

Exercice 7.

1. Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes L_1, L_2, L_3 de A. Comme L_2 est nulle,
$$\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \operatorname{Vect}(L_1, L_3)$$
et comme (L_1, L_3) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, (L_1, L_3) est une base de $\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ et $\operatorname{rg}(A) = 2$.
2. B est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible. Ainsi $\operatorname{rg}(B) = 3$.
3. Le rang de C est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes L_1, L_2, L_3 de C. Comme $L_3 = 3L_1$,
$$\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3) = \operatorname{Vect}(L_1, L_2)$$
et comme (L_1, L_2) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi, (L_1, L_2) est une base de $\operatorname{Vect}(L_1, L_2, L_3)$ et $\operatorname{rg}(C) = 2$.
4. Le rang de D est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2, C_3 de D. Comme $C_1 = C_2 = C_3$,
$$\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1)$$
et comme C_1 est non nul, c'est une base de $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$. Donc $\operatorname{rg}(D) = 1$.
5. Le rang de E est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2, C_3 de E. Comme $C_1 = C_2$,
$$\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_3)$$
et comme (C_1, C_3) est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Donc (C_1, C_3) est une base de $\operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ et $\operatorname{rg}(E) = 2$.
6. Le rang de F est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes C_1, C_2 de F. Comme (C_1, C_2) est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Donc (C_1, C_2) est une base de $\operatorname{Vect}(C_1, C_2)$ et $\operatorname{rg}(F) = 2$.

Exercice 8.

1. On remarque que
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$$
donc
$$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right).$$
De plus, $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre car c'est une famille formée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, c'est une base de $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}\right)$. Donc
$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}\right) &= \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$
2. On a
$$7 - 6X^2 = -6(X^2 + 2X) + 12(X + 3) - \frac{29}{2} \cdot 2$$
donc $\operatorname{Vect}(2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2) = \operatorname{Vect}(2, 3 + X, 2X + X^2)$.
Or la famille $(2, 3 + X, 2X + X^2)$ est échelonnée (famille de polynômes non nuls de degrés distincts) donc elle est libre. Ainsi $(2, 3 + X, 2X + X^2)$ est une base de $\operatorname{Vect}(2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2)$. Donc
$$\operatorname{rg}(2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2) = \dim \operatorname{Vect}(2, 3 + X, 7 - 6X^2, 2X + X^2) = 3.$$

Exercice 9. On considère $C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\0 & -2 & 2 & 4\\1 & 3 & -1 & -4\\2 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

1. On procède par l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(C) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_2 \end{array} \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les lignes de C est égal au rang de C. Donc $\dim E = 2$. De plus, d'après les calculs de la question précédente, on voit que

$$L_3 = L_1 - \frac{1}{2}L_2 \quad \text{et} \quad L_4 = 2L_1 + \frac{3}{2}L_2$$

donc $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, L_3, L_4) = \mathrm{Vect}(L_1, L_2)$. Ainsi (L_1, L_2) est une famille génératrice de E. Elle est formée de deux vecteurs et $\dim(E) = 2$. Ainsi (L_1, L_2) est une base de E.

3. Montrons que la famille (L_1, L_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ où $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$.
   - Méthode 1. Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ et que la famille (L_1, L_2, e_3, e_4) a 4 éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ -2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.
\end{aligned}$$

   La famille (L_1, L_2, e_3, e_4) est donc libre et par conséquent c'est une base de $\mathbb{R}^4$ par ce qui précède.
   - Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ et que la famille (L_1, L_2, e_3, e_4) a 4 éléments, il suffit de montrer qu'elle est génératrice. Or,

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4$$

   donc $\dim \mathrm{Vect}(L_1, L_2, e_3, e_4) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. Comme de plus $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, e_3, e_4) \subset \mathbb{R}^4$, on a donc, $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(L_1, L_2, e_3, e_4)$. Ainsi la famille (L_1, L_2, e_3, e_4) est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et par ce qui précède c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne

$$u_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad ; \quad u_3 = (3, -4, -3).$$

1. On remarque que

$$u_3 = u_1 - 2u_2$$

donc $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}(u_1, u_2)$.
De plus, (u_1, u_2) est formée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une famille libre. Ainsi,

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2.$$

2. Par définition du rang, on a $\dim F = 2$ d'après la question précédente et (u_1, u_2) est une base F.

Exercice 11. 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -9 & 1 \end{pmatrix}\right) & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -11 & 2 \end{pmatrix}\right) & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 9\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}\right) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 9\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_2\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\right) \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2\\
&= 2.
\end{aligned}
$$