TD4-Familles de vecteurs

Exercice 1. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C=0_{\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ -2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & & 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & & & & \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \quad L_4\leftarrow L_4-L_5$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 6\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ -2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ 3\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_1 & = & 0\\ & & \lambda_3 & = & 0\\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, la famille (A,B,C) est libre.

Exercice 2. 1. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(2,1,-1)+\lambda_3(-1,-5,8)=(0,0,0)$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0\\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_2+L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \lambda_2 & = & 2\lambda_3\\ \lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0\\ 2\lambda_1 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2\leftrightarrow L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 2\lambda_3\\ \lambda_1 & = & -3\lambda_3 \end{array}\right.$$

En prenant $\lambda_3=1$, $\lambda_1=-3$ et $\lambda_2=2$, on voit que

$$\lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(2,1,-1)+\lambda_3(-1,-5,8)=(0,0,0).$$

Donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) Pour savoir si $\mathcal{F}$ est génératrice ou non, on peut procéder de plusieurs façons :

- Méthode 1 : supposons qu'elle soit génératrice. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F})=3=\dim\mathbb{R}^3$, alors c'est une base. En particulier, elle est libre ce qui contredit ce qui précède. Par conséquent, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.
- Méthode 2 : soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&(x,y,z)\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3\ (x,y,z)=\lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(2,1,-1)+\lambda_3(-1,-5,8)\\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x\\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & y\\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & z \end{array}\right.\\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x\\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & x+y\\ & - & 5\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & z-2x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2\leftarrow L_2+L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1 \end{array}\\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x\\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{x+y}{3}\\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \frac{2x-z}{5} \end{array}\right.\\
&\iff \frac{x+y}{3}=\frac{2x-z}{5}
\end{aligned}$$

Donc, par exemple le vecteur $(0,0,1)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(X^2+2X) + \lambda_2(X^2+X+1) + \lambda_3(X+2) = 0 \\
&\iff \lambda_2 + 2\lambda_3 + (2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X + (\lambda_1+\lambda_2)X^2 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre.

(b) Pour savoir si $\mathcal{F}$ est génératrice ou non, on peut procéder de plusieurs façons :

- Méthode 1 : Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et que $\mathcal{F}$ est libre, alors c'est une base. En particulier, elle est génératrice.
- Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Vect}(X^2+2X, X^2+X+1, X+2) \\
&= \mathrm{Vect}(X^2+2X, -X+1, X+2) \quad \text{en soustrayant le } 1^{er} \text{ vecteur au } 2^{ieme} \\
&= \mathrm{Vect}(X^2+2X, -X+1, 3) \quad \text{en ajoutant le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 3^{ieme} \\
&= \mathrm{Vect}(X^2+2X, -X+1, 1) \\
&= \mathrm{Vect}(X^2+2X, -X, 1) \quad \text{en ajoutant le } 3^{ieme} \text{ vecteur au } 2^{ieme} \\
&= \mathrm{Vect}(X^2, -X, 1) \quad \text{en ajoutant deux fois le } 2^{ieme} \text{ vecteur au } 1^{er} \\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1) = \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

- Méthode 3 : en montrant que pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = \lambda_1(X^2+2X) + \lambda_2(X^2+X+1) + \lambda_3(X+2)$$

d'inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ possède des solutions.

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille est donc libre.

(b) Pour savoir si $\mathcal{F}$ est génératrice ou non, on peut procéder de plusieurs façons :

- Méthode 1 : la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4 et comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 < 4$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Méthode 2 : soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \\
&\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\
&\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & t \end{array}\right. \\
&\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & -\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & y-2x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ & & & & 2\lambda_2 & = & t-x \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
&\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3,\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2x-y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ & & & & 2\lambda_2 & = & t-x \end{array}\right. \\
&\iff 2x - y = z
\end{aligned}$$

Donc par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = ((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (4^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 3. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

On cherche à montrer que nécessairement, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$. Supposons par l'absurde que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ et considérons n_0 le plus petit entier de $\{0, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k < n_0$, $\lambda_k = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} &= \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \quad \text{car, pour tout } k < n_0,\ \lambda_k = 0 \\ &= e^{-n_0 x} \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \\ &= e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right). \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = 0$$

et comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-n_0 x} \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} = 0.$$

Or, pour $k \geq n_0 + 1$, $n_0 - k < 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{(n_0-k)x} = 0$. Donc, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k \lim_{x\to+\infty} e^{(n_0-k)x} = \lambda_{n_0}.$$

Cela est absurde car, par définition de n_0, $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, notre supposition est fausse et donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$.

On a montré que

$$\forall (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est donc libre.

Exercice 4. On note F l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

1.
   - F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non-vide car la suite nulle vérifie la relation de récurrence.
   - Montrons que F est stable par combinaison linéaire. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F, $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F.
     Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.
     Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.
     Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

     $$\begin{aligned} u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= 2u_{n+1} + u_n + \lambda(2v_{n+1} + v_n) \\ &= 2(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + u_n + \lambda v_n. \end{aligned}$$

     Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Donc pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F. Cela montre que F est stable par combinaison linéaire.
   - D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$. Cette équation possède deux solutions distinctes $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{2}$. Par conséquent, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

   Ainsi, $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{2}$ conviennent.
3. (a) D'après la question précédente, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

   Autrement dit, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Cela signifie que tout élément de F est combinaison linéaire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Réciproquement, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à F donc $\mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset F$.
Finalement, $F = \mathrm{Vect}((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et la famille $((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est donc une famille génératrice de F.

(b) On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$ donc $-1 < 1-\sqrt{2} < 0$.
D'autre part, $1+\sqrt{2} > 1 > 0$ donc $|r_2| = r_2 = 1+\sqrt{2} > 1$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

où $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| \leq \frac{|r_1|}{|r_2|} < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(c) On sait que c'est une famille génératrice de F. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et supposons que

$$\lambda_1(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$$

Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n = 0.$$

En factorisant par b_n, on trouve que

$$b_n\left(\lambda_1\frac{a_n}{b_n} + \lambda_2\right) = 0$$

et comme $b_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_1\frac{a_n}{b_n} + \lambda_2 = 0$$

Grâce à la question, précédente, en passant à la limite on obtient

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \lambda_1\frac{a_n}{b_n} + \lambda_2 = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 = \lambda_2$$

puis que $\lambda_1 = 0$. Ainsi, on a montré que

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_1(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La famille est donc libre. Par ce qui précède, on peut conclure que c'est une base de F.

4. On cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

- Analyse (recherche d'une condition nécessaire) : soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$
En prenant $n = 0$ et $n = 1$ on obtient
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1+\sqrt{2}) = 3 \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} \beta = 2-\alpha \\ \alpha(1-\sqrt{2}) + (2-\alpha)(1+\sqrt{2}) = 3 \end{cases}$$
donc
$$\begin{cases} \beta = 1+\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \alpha = 1-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$
- Synthèse : on vérifie que réciproquement, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)a_n + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)b_n$$
car la suite définie par le membre de droite vérifie la même relation de récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les mêmes conditions initiales.
- Ainsi, les coordonnées de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sont $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}, 1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Exercice 5. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que $AM = MD$.

1. - E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non vide car $A0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}D$.
   - Montrons que E est stable par combinaison linéaire. Soient M, N deux éléments de E, $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $M+\lambda N \in E$.
   Comme $M \in E$, on sait que $AM = MD$ et, de même, comme $N \in E$, on sait que $AN = ND$. Ainsi
   $$\begin{aligned} A(M+\lambda N) &= AM + A(\lambda N) \\ &= MD + \lambda AN \\ &= MD + \lambda ND \\ &= (M+\lambda N)D \end{aligned}$$
   Ainsi, $M+\lambda N \in E$. Ainsi, pour tout $M,N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $M+\lambda N \in E$. Cela montre que E est stable par combinaison linéaire.

- D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. On a

$$AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M \in E &\iff AM = MD \\ &\iff \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &\iff z = 0 \quad \text{et} \quad y = t \end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ une matrice carrée d'ordre deux. D'après la question précédente, on

$$\begin{aligned} M \in E &\iff z = 0 \quad \text{et} \quad y = t \\ &\iff M = \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &\iff M = xU + tA \end{aligned}$$

Ainsi, $E = \mathrm{Vect}(U, A)$ et la famille (U, A) est donc génératrice de E. De plus, U et A ne sont pas colinéaires donc (U, A) est une famille libre. Ainsi la famille (U, A) est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

4. On a

$$UA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme UA ne satisfait pas les équations de la question 2, on en conclut que $UA \notin E$.

Exercice 6. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère le sous-ensemble E des matrices $M(a, b)$ définies par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$E = \{M(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. On note $A = M(1, 0)$.

   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = I_3$.

   (b) Comme $A^2 = AA = I_3$, A est inversible et $A^{-1} = A$.

2.

$$\begin{aligned} E = \{M(a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}\} &= \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b \\ a & b & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & b & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Donc, $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E. Elle est formée de deux matrices non colinéaires donc elle est libre. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.

Exercice 7.

1. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. On note $e_1 = (3, 1, 3)$, $e_2 = (2, 2, 1)$ et $e_3 =$

$(4,3,2)$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$
\begin{aligned}
&(x,y,z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & x\\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & y\\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & x\\ -2\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & y-x\\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & x\\ -2\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & y-x\\ 3\lambda_1 & & & & & = & 2z-x \end{array}\right. \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1)\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & \frac{x-3\lambda_1-4\lambda_3}{2}\\ \lambda_3 & = & x-y-\lambda_1\\ \lambda_1 & = & \frac{2z-x}{3} \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & \frac{x-3\frac{2z-x}{3}-4\left(x-y-\frac{2z-x}{3}\right)}{2}\\ \lambda_3 & = & x-y-\frac{2z-x}{3}\\ \lambda_1 & = & \frac{2z-x}{3} \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & \frac{-7x+6y+5z}{3}\\ \lambda_3 & = & \frac{5x-3y-4z}{3}\\ \lambda_1 & = & \frac{2z-x}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, (x,y,z) est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3. Plus précisément, on a

$$(x,y,z) = \frac{2z-x}{3} \cdot e_1 + \frac{-7x+6y+5z}{3} \cdot e_2 + \frac{5x-3y-4z}{3} \cdot e_3.$$

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. En appliquant les calculs précédents avec $(x,y,z) = (0,0,0)$ on voit que

$$(0,0,0) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & \frac{-7\times 0+6\times 0+5\times 0}{3} = 0\\ \lambda_3 & = & \frac{5\times 0-3\times 0-4\times 0}{3} = 0\\ \lambda_1 & = & \frac{2\times 0-0}{3} = 0 \end{array}\right.$$

  Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont :
$$\left(\frac{2z-x}{3}, \frac{-7x+6y+5z}{3}, \frac{5x-3y-4z}{3}\right).$$
  En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

2. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1) + x(1,0,0).$$

   La famille est donc génératrice.

   - Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\lambda_1(0,1,0) + \lambda_2(0,0,1) + \lambda_3(1,0,0) = (0,0,0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

   La famille est donc libre.

   - La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette base sont (y,z,x). En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(2,1,3)$.

3. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$
\begin{aligned}
P = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (X-1) + \lambda_3 \cdot (X-1)^2 &\iff P = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3 X^2\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_0\\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & a_1\\ & & & & \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & a_0 + a_1 + a_2\\ \lambda_2 & = & a_1 + 2a_2\\ \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

   Ainsi, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, P est combinaison linéaire de 1, $X-1$ et $(X-1)^2$; plus précisément :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 = (a_0+a_1+a_2) \cdot 1 + (a_1+2a_2) \cdot (X-1) + a_2 \cdot (X-1)^2.$$

   - La famille $\mathcal{B}$ est échelonnée donc elle est libre.

   - La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ dans cette base sont $(a_0+a_1+a_2, a_1+2a_2, a_2)$. En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(3,3,1)$.

4. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit $\begin{pmatrix} x & y\\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$;

on a :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & t \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccccl} \color{red}{\lambda_1} & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z & \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccccl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \color{red}{\lambda_2} & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & \\ & & & - & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & z+y-x & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & x - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & x - y - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_4 & = & z + y - x + \lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \frac{3x+2y-2z-t}{4} \\ \lambda_2 & = & \frac{-x-2y+2z+3t}{4} \\ \lambda_4 & = & \frac{2z+2y-x-t}{4} \\ \lambda_3 & = & \frac{x-t}{2} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. En appliquant les calculs précédents avec $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on voit que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

  Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ dans cette base sont :

$$\left(\frac{3x+2y-2z-t}{4}, \frac{-x-2y+2z+3t}{4}, \frac{x-t}{2}, \frac{2z+2y-x-t}{4} \right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$