DM 1 : Révisions

Pour le mardi 15 septembre

Tout le programme de première année est considéré comme acquis et peut faire l'objet d'un exercice dans les évaluations. Il est fortement recommandé de revoir les cours de première année si vous n'êtes pas au point, notamment en analyse et en calcul matriciel.

Pour le début d'année, il est impératif de savoir :

- les définitions de limite, continuité, nombre dérivé, fonction dérivée...
- les limites usuelles et les croissances comparées,
- les dérivées des fonctions usuelles (cela comprend l'ensemble de dérivabilité), les opérations sur les limites, les fonctions continues, les fonctions dérivées,
- le théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, l'inégalité des accroissements finis (et savoir les utiliser),
- effectuer des calculs avec des matrices, des polynômes.

Ce qui est entendu par *connaître* et *utiliser* un théorème :

1. *connaître* un théorème : en connaître **les hypothèses et les conclusions précisément**
2. *utiliser* un théorème : vérifier que **toutes les hypothèses** sont satisfaites puis en déduire les conclusions.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*EML 2014*)

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. *On admet que* $2 < e < 3$.

1. *Montrer que* φ *est de classe* C^3 *sur* $]0;+\infty[$, *calculer, pour tout* x *de* $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ *et* $\varphi''(x)$ *et montrer :* $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}$.
2. *Etudier le sens de variation de* φ'' *et calculer* $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ', *et montrer :* $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.
3. *Déterminer la limite de* $\varphi(x)$ *lorsque* x *tend vers 0 par valeurs strictement positives.*
4. *Déterminer la limite de* $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *et la limite de* $\varphi(x)$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.
5. *On admet :* $15 < \varphi(3) < 16$. *Montrer :* $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
   On note $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de* φ.
6. *Montrer que* $\mathscr{C}$ *admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.*
7. *Dresser le tableau de variations de* φ, *avec les limites en 0 et en* $+\infty$, *et la valeur en 1.*
   Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ *et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.*

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

1. *Montrer que la suite* $\left(\frac{u_n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmético-géométrique.*
2. *En déduire une expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 3

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que :* $(M - 3I_2)(M - 4I_2) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
2. *Exprimer* M^2 *en fonction de* M *et de* I_2.
3. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad M^n = a_n M + b_n I_2.$$

On définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. *Pour tout entier naturel n on pose*
$$u_n = 3a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = 4a_n + b_n.$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques et en déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
5. *En déduire l'expression de M^n en fonction de n.*

Exercice 4 (*EDHEC 2012*)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1-p$. On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
• Soit si l'on a obtenu "Pile" .
• Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^e lancer ».
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega;\mathscr{A};\mathrm{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. *Loi de T_n .*
   (a) *Pour tout k de $[\![1;n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k=1$, la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n = k)$.*
   (b) *Déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n = n)$.*
   (c) *Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n = k) = 1$.*
   (d) *Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.*
2. *Loi de X_n .*
   (a) *Donner la loi de X_n .*
   (b) *Vérifier que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = 1 - q^n$.*
3. *Loi de Y_n .*
   (a) *Déterminer, pour tout k de $[\![0;n-1]\!]$, la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = k)$.*
   (b) *Déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_n = n)$.*
   (c) *Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$.*