Chapitre 3 : Espaces vectoriels

1 Espace vectoriel réel

1.1 Structure d'espace vectoriel réel

Exemple 1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.*
- $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *est l'ensemble des polynômes à une variable à coefficients réels.*
- $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *est l'ensemble des polynômes à une variable à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.*
- *Si* D *est une partie de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ *est l'ensemble des applications de* D *dans* $\mathbb{R}$.
- *En particulier,* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est l'ensemble des suites réelles.*

Test 1 (***Voir la solution.***)

Dans chaque cas, calculer $u + 3v$.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *avec* $u = (1, -1, 0)$ *et* $v = (3, -2, 5)$.
2. *Dans* $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *avec* $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *avec* $u = 3\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + 1$ *et* $v = \mathrm{X}^5 - 2\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + 2$

Les ensembles de l'exemple 1, aussi différents les uns des autres soient-ils, possèdent une structure commune : ils peuvent tous être munis d'une « addition » et d'une « multiplication par un nombre réel ». L'objet de ce chapitre est de donner un cadre formel et unifié à l'étude des ensembles ayant une telle structure. Ainsi, les résultats généraux que l'on obtiendra s'appliqueront aussi bien aux matrices qu'aux fonctions, aux polynômes . . .

Définition 1 (Loi de composition interne, loi de composition externe)

Soit E un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne sur** E est une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E.
- Une **loi de composition externe sur** E est une application de $\mathbb{R} \times \mathrm{E}$ dans E

Exemple 2

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. *Dans* $\mathbb{R}^n$.
   - *L'addition de deux n-uplets de réels est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

   - *La multiplication d'un n-uplet de réels par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) &\longmapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

2. *Dans* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   - *L'addition de deux matrices est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) &\longmapsto \mathrm{A} + \mathrm{B} \end{aligned}$$

Rappel : si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *et* $\mathrm{A} = (\mathrm{B}_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *alors* $\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

- *La multiplication d'une matrice par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ (\lambda, \mathrm{A}) &\longmapsto \lambda \cdot \mathrm{A} \end{aligned}$$

Rappel : si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ *alors* $\lambda \cdot \mathrm{A} = (\lambda \cdot a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

3. *Dans* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
   - *L'addition de deux polynômes est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &\longmapsto \mathrm{P} + \mathrm{Q} \end{aligned}$$

   Rappel : si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ *et* $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} b_k \mathrm{X}^k$ *alors* $\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k)\mathrm{X}^k$ *avec pour convention que* $a_k = 0$ *pour* $k \geqslant p$ *et* $b_k = 0$ *pour* $k \geqslant q$.
   - *La multiplication d'un polynôme par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[\mathrm{X}] &\longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ (\lambda, \mathrm{P}) &\longmapsto \lambda \cdot \mathrm{P} \end{aligned}$$

   Rappel : si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ *alors* $\lambda \cdot \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} \lambda \cdot a_k \mathrm{X}^k$.
4. *Dans* $\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ *où* D *est une partie de* $\mathbb{R}$.
   - *L'addition de deux fonctions est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{\mathrm{D}} \times \mathbb{R}^{\mathrm{D}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{D}} \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

   Rappel : $f + g$ *est la fonction définie sur* D *par :* $\forall x \in \mathrm{D},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
   - *La multiplication d'une fonction par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{D}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{D}} \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

   Rappel : $\lambda \cdot f$ *est la fonction définie sur* D *par :* $\forall x \in \mathrm{D},\ (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$.
5. *Dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - *L'addition de deux suites est une loi de composition interne :*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\longmapsto (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

   - *La multiplication d'une suite par un nombre réel est une loi de composition externe :*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\longmapsto (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Test 2 (***Voir la solution.***)

1. (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$. *Montrer que* $\mathrm{P} + \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
   (b) *En déduire que l'addition de polynômes est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. *Soit* E *l'ensemble des polynômes de degré* ***exactement*** *égal à* n. *L'addition des polynôme est-elle une loi de composition interne sur* E *?*

Définition 2 (Espace vectoriel réel)

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une loi de composition externe, notée $\cdot$.
On dit que E est un **espace vectoriel réel** (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si

1. la loi $+$ vérifie les conditions suivantes :
   i) $\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2,\ x+y=y+x$ (*commutativité*)
   ii) $\forall (x,y,z)\in \mathrm{E}^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$ (*associativité*)
   iii) il existe un élément, noté 0_{E} et appelé **élément neutre**, tel que :
   $\forall x\in \mathrm{E},\ x+0_{\mathrm{E}}=x=0_{\mathrm{E}}+x$
   iv) pour tout $x\in \mathrm{E}$, il existe un élément, noté $-x$ et appelé **symétrique de** x, tel que : $x+(-x)=(-x)+x=0_{\mathrm{E}}$
2. la loi $\cdot$ vérifie les conditions suivantes :
   i) $\forall x\in \mathrm{E}\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)=\mu\cdot(\lambda\cdot x)$
   ii) $\forall x\in \mathrm{E},\ 1\cdot x=x$
   iii) $\forall (x,y)\in \mathrm{E}^2\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$ (*distributivité*)
   iv) $\forall x\in \mathrm{E}\ \forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

Remarque 1 (*Vocabulaire et notation*)

1. *Attention, par abus, on note avec le même symbole $+$ l'addition dans E et dans $\mathbb{R}$.*
2. *Les éléments de E sont appelés des* ***vecteurs*** *et sont parfois notés avec une flèche (par exemple, $\overrightarrow{u}$) et parfois sans. Au concours, il est recommandé de s'aligner sur la notation du sujet !*
3. *Les éléments de $\mathbb{R}$ qui interviennent dans la loi externe sont parfois appelés des* ***scalaires****.*
4. *On écrira souvent λu au lieu de $\lambda\cdot u$.*
5. *On place toujours les scalaires devant le vecteur.*

Proposition 1

Soit E un ensemble muni de deux lois $+$ et $\cdot$ en faisant un espace vectoriel.

1. L'élément neutre pour la loi $+$ est unique.
2. pour tout $x\in\mathrm{E}$, le symétrique de x est unique.

Proposition 2 (Exemples de référence)

Soient n et p deux entiers non nuls. Les ensembles suivants, munis des lois $+$ et $\cdot$ définies dans l'exemple 2, sont des espaces vectoriels réels :

$$\mathbb{R}^n\ ,\ \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\ ,\ \mathbb{R}[\mathrm{X}]\ ,\ \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\ ,\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ,\ \mathbb{R}^{\mathrm{D}}$$

où D est une partie de $\mathbb{R}$

Remarque 2

Par abus, on dira souvent « E (ou $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, …) est un espace vectoriel réel » en omettant la référence aux lois $+$ et $\cdot$.

Exemple 3

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Espace vectoriel E	*Neutre*	*Élément*	*Symétrique*
$\mathbb{R}^n$	$(0,\dots,0)$	$(x_1,\dots,x_n)$	$(-x_1,\dots,-x_n)$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$	$\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$	$(-a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p} = -\mathrm{A}$
$\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$, D *partie de* $\mathbb{R}$	$x\in\mathrm{D}\mapsto 0$	$f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$	$x\in\mathrm{D}\mapsto -f(x)$

Test 3 (***Voir la solution.***)

1. *Déterminer l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$*. Soit* $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \dots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$*, déterminer son symétrique.*
2. *Déterminer l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, déterminer son symétrique.*

Proposition 3 (Règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel réel. Alors

1. $\forall x\in\mathrm{E},\ 0\cdot x = 0_{\mathrm{E}}$.
2. $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda.0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$.
3. $\forall x\in\mathrm{E}\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\cdot x = 0_{\mathrm{E}} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_{\mathrm{E}})$.
4. $\forall x\in\mathrm{E},\ (-1)\cdot x = -x$.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 3 (Combinaison linéaire de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel et soient $x_1,\dots,x_p$ des vecteurs de E. Un vecteur x est dit **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1,\dots,x_p$ s'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p.$$

Exemple 4

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $u = (1,4,1)$ *est combinaison linéaire des vecteurs* $v = (1,0,1)$ *et* $w = (0,1,0)$ *car :*

$$u = v + 4w$$

2. *Dans* $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = 3\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 1$ *est naturellement écrit comme une combinaison linéaire des monômes* 1, X *et* X^2
3. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, soient* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}3 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$. A *est-elle une combinaison linéaire de* B *et de* I_2 *?*
On cherche λ *et* μ *tels que* $\mathrm{A} = \lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{I}_2$ *soit*

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu & 2\lambda\\ 3\lambda & 4\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient $\lambda = 1$ *et* $\mu = 2$*, qui conviennent bien. Ainsi*

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} + 2\mathrm{I}_2$$

4. *Dans tout espace vectoriel* E, 0_{E} *est combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs :*

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathrm{E}^n,\ 0_{\mathrm{E}} = 0\cdot x_1 + \dots + 0\cdot x_n.$$

Remarque 3

En pratique, pour montrer qu'un vecteur x est combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_p$, on cherche les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$ en résolvant un système linéaire.

Test 4 (*Voir la solution.*)

1. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Écrire les vecteurs $u = \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3.*
2. *Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que le polynôme X^2+1 est combinaison linéaire des polynômes $(X+1)^2$, $X+1$ et 1.*
3. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$?*

Test 5 (*Voir la solution.*)

1. *On considère les trois polynômes suivants : $P = X^2+2X$, $Q = -X^2+1$ et $R = 4X^2+6X-1$. Déterminer tous les triplets de réels (a,b,c) tels que $aP+bQ+cR=0$.*
2. *Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $x = (1,2,-1,4)$ et $y = (2,4,-2,4)$. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que $ax+by=0$.*

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Sous-espace vectoriel

Définition 4 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque

1. F est non vide,
2. $\forall x \in F\ \forall y \in F,\ x+y \in F$ (*stabilité par addition*),
3. $\forall x \in F\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot x \in F$ (*stabilité par multiplication par un scalaire*)

Remarque 4

En combinant les points 2 et 3 avec un raisonnement par récurrence, on voit qu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

Exemple 5

1. *Quelque soit l'espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*
2. *$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

   En effet

   (a) *C'est un ensemble non vide.*

   (b) *Il est stable par addition.*

   (c) *Il est stable par multiplication par un scalaire.*

Proposition 4

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel (pour les lois induites par celles de E).
Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E contient 0_E.

Proposition 5 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. F est non vide,
2. $\forall (x, y) \in F^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda y \in F$.

Méthode 1

1. *Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre souvent que c'est un sous-espace d'un espace vectoriel de référence à l'aide de la caractérisation ci-dessus car cela demande beaucoup moins de vérifications que la définition d'espace vectoriel.*
2. *Pour montrer que* F *est non vide, on montre souvent que* $0_E \in F$.

Exemple 6

Montrons que $F = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- *La fonction nulle est continue donc* F *est non vide.*
- *Soient* f *et* g *deux éléments de* F *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors* $f + \lambda g$ *est continue comme combinaison linéaire de fonctions continues. Ainsi* $f + \lambda g \in F$

Donc F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 7

Montrons que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

- $(0, 0, 0) \in F$ *donc* F *est non vide.*
- *Soient* $u = (x, y, z)$ *et* $v = (x', y', z')$ *deux éléments de* F *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*
$$u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$$
et
$$2(x + \lambda x') + y + \lambda y' = 2x + y + \lambda(2x' + y') = 0 + \lambda \cdot 0 = 0.$$
Ainsi $u + \lambda v \in F$

Donc F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple 8

Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système linéaire ***homogène*** *à* n *variables est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$. *En effet, considérons un système*

$$(E) = \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{p,1}x_1 & + & \dots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Un n*-uplet de réels* $(x_1, \dots, x_n)$ *est solution de* (E) *si et seulement si*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$. *L'ensemble des solutions est donc*

$$F = \{{}^t X \mid AX = 0 \quad \text{et} \quad X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Alors

- $(0, \dots, 0) \in F$ *car* $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$
- *Soient* $(x, y) \in F^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*
$$A^t(x + \lambda y) = A({}^t x + \lambda {}^t y) = A^t x + \lambda A^t y = 0$$
donc $x + \lambda y \in F$.

Donc F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 9

Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ avec $n\leqslant m$.

1. *$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_m[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.*
2. *L'ensemble des suites réelles convergeantes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Test 6 (*Voir la solution.*)

Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace considéré ?

1. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$.
2. $G=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P'(0)=0\}$
3. $H=\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\}$

Test 7 (*Voir la solution.*)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels

1. $E=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM=2M\}$.
2. $F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n\}$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré

Définition 5 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1,\dots,u_n$ est un sous-espace vectoriel de E appelé **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $u_1,\dots,u_n$. On le note

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$$

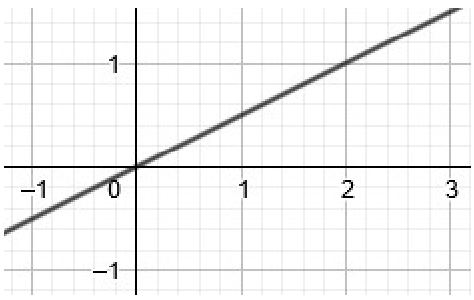
On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une **famille génératrice** de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$.

Remarque 5

Soit E *un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de* E.

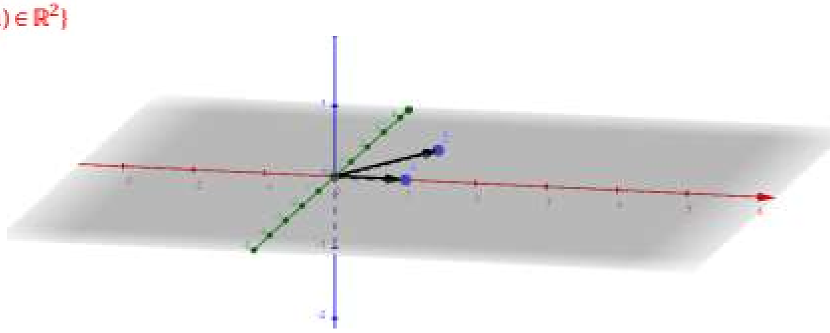
$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\{\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n \mid (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\}$$

Exemple 10

1. *Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(1,X,X^2)$ est égal à $\mathbb{R}_2[X]$.*
   En effet, pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$
   $$P\in\mathrm{Vect}(1,X,X^2)\iff\exists(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3,\quad P=\lambda_0\cdot1+\lambda_1\cdot X+\lambda_2\cdot X^2\iff P\in\mathbb{R}_2[X]$$
   Plus généralement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^n)$ est égal à $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Soit E un espace vectoriel et $x\in E$. Alors $\mathrm{Vect}(x)=\{tx \mid t\in\mathbb{R}\}$ (si $x\neq 0_E$, on dit que $\mathrm{Vect}(x)$ est la droite vectorielle engendrée par x).*
   Dans $\mathbb{R}^2$, représenter $\mathrm{Vect}((2,1))$.
   $$\begin{aligned}\mathrm{Vect}((2,1))&=\{\lambda\cdot(2,1)\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}\\&=\{(2\lambda,\lambda)\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2y=x\}\end{aligned}$$
   

3. *Dans $\mathbb{R}^3$, représenter $\mathrm{Vect}((1,0,0),(1,2,0))$.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}((1,0,0),(1,2,0))&=\{\lambda\cdot(1,0,0)+\mu\cdot(1,2,0)\in\mathbb{R}^3 \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(\lambda+\mu,2\mu,0)\in\mathbb{R}^3 \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}\\&=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$



Proposition 6

Soit E un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs de E. Tout sous-espace vectoriel de E contenant $u_1,\dots,u_n$ contient $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$.

Proposition 7

Soit E un espace vectoriel et soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Si un vecteur u est combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$ alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n,u)$.
2. On a
$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\forall j\neq i,\ \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i+u_j,\dots,u_n).$$
3. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des scalaires **tous non nuls** alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(\lambda_1 u_1,\dots,\lambda_n u_n)$.

Remarque 6

1. *En particulier,* $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n,0_{\mathrm{E}})$.
2. *En combinant les points 2 et 3, on voit que si on ajoute un multiple d'un vecteur de la famille à un autre vecteur de la famille, la nouvelle famille obtenue engendre le même sous-espace vectoriel :*
$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\forall j\neq i,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i+\lambda u_j,\dots,u_n).$$

Exemple 11

1. *Dans* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*, simplifions* $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Cherchons à déterminer si l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.
Une façon de faire est de chercher s'il existe des scalaires x,y,z non tous nuls tels que

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}x\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&2y&+&4z&=&0\\2x&+&2y&+&6z&=&0\\-x&+&y&-&z&=&0\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&2y&+&4z&=&0\\&-&2y&-&2z&=&0\\&&3y&+&3z&=&0\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&2y&+&4z&=&0\\&&&&z&=&-y\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2y\\z&=&-y\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}4\\6\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. *De plus, on ne peut pas simplifier plus car* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$ *et* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ *sont strictement inclus dans* F *(le vérifier).*

2. *Dans* $\mathbb{R}[X]$, *déterminons* $F = \mathrm{Vect}(X^2+1, X+2, 1)$. *On a*

$$\begin{aligned}
F &= \mathrm{Vect}(X^2+1, X+2, -1) && \textit{d'après le point 3 de la proposition}\\
&= \mathrm{Vect}(X^2+1-1, X+2, -1) && \textit{d'après le point 2 de la proposition}\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X+2, -1)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X+2, -2) && \textit{d'après le point 3 de la proposition}\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X+2-2, -2) && \textit{d'après le point 2 de la proposition}\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X, -2)\\
&= \mathrm{Vect}(X^2, X, 1) && \textit{d'après le point 3 de la proposition}\\
&= \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

Test 8 (*Voir la solution.*)

Donner une expression la plus simple possible des sous-espaces vectoriels suivants.

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((1,2),(2,4))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}[X]$, $F = \mathrm{Vect}(1+X, X, X-X^2, 1+2X+X^2)$.

Méthode 2

Pour montrer qu'un ensemble F *est un (sous-)espace vectoriel, on peut aussi montrer que c'est l'espace engendré par une famille de vecteurs.*

- Lorsque l'ensemble est donné sous forme paramétrique.

Exemple 12

Dans chaque cas, montrons que F *est un espace vectoriel et donnons une famille génératrice de* F.

1. $F = \left\{(x, y, -3x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

   On a

$$\begin{aligned}
F = \left\{(x,y,-3x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\} &= \left\{(x,0,-3x)+(0,y,y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{x(1,0,-3)+y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \mathrm{Vect}((1,0,-3),(0,1,1))
\end{aligned}$$

2. $F = \left\{\begin{pmatrix}\lambda & \lambda+\mu\\ \lambda-\mu & 2\lambda\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

   On a

$$\begin{aligned}
F = \left\{\begin{pmatrix}\lambda & \lambda+\mu\\ \lambda-\mu & 2\lambda\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\} &= \left\{\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ \lambda & 2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \mu\\ -\mu & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{\lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Test 9 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $F = \left\{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
2. $F = \left\{(c-a)X^3 + aX^2 + (2a-b)X + c \in \mathbb{R}[X] \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

- Lorsque l'ensemble est décrit à l'aide d'équations.

Exemple 13

On considère $F = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad x+2y-3z=0\right\}$.

1. *Écrire les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à* F *sous forme d'un système.*

   Soit $(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$. *Alors*

$$(x,y,z)\in F \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0\\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0\end{array}\right.$$

2. Obtenir un système triangulaire équivalent.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Exprimer les inconnues principales en fonctions des autres.
Rappel : sur chaque ligne, l'inconnue principale est la première inconnue avec un coefficient non nul.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-z \\ y & = & 4z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5z \\ y & = & 4z \end{array}\right.$$

4. Faire apparaître la famille génératrice et conclure.
Finalement, $(x,y,z) \in \mathrm{F} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5z \\ y & = & 4z \end{array}\right.$ *. Donc*

$$\mathrm{F} = \left\{(-5z, 4z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z(-5,4,1) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((-5,4,1)).$$

Test 10 (***Voir la solution.***)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y-5z=0\right\}$.
2. $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\right\}$.
3. $\mathrm{H} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x=y \quad \text{et} \quad y=3z\right\}$

Test 11 (***Voir la solution.***)

Soit $\mathrm{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\right\}$

1. Rappeler la forme de l'expression du terme général d'un élément de E.
2. En déduire que E est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.

Méthode 3

Inversement, étant donné un espace vectoriel sous forme de « Vect » vous devez savoir en déterminer des équations qui le décrivent.

Exemple 14

Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2,1),(-1,1,0))$.

1. Écrire la condition pour qu'un vecteur appartienne à F sous forme d'un système (non-homogène).
Soit $(x,y,z) \in \mathrm{R}^3$*. Alors*

$$(x,y,z) \in \mathrm{F} \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda(1,2,1) + \mu(-1,1,0) \Longleftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (\mathrm{S}) \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & = & y \\ \lambda & & & = & z \end{array}\right.$$

Ainsi

$$(x,y,z) \in \mathrm{F} \Longleftrightarrow (\mathrm{S}) \text{ possède au moins une solution.}$$

Il faut voir ce système comme un système d'inconnues λ *et* μ *et de paramètres* x, y *et* z*. L'objectif est de déterminer les conditions sur* x, y, z *pour que ce système admette des solutions.*

2. Mettre le système sous forme triangulaire.

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & x \\ 2\lambda & + & \mu & = & y \\ \lambda & & & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & 3\lambda & = & y+x \\ & & \lambda & = & z \end{array}\right.$$

3. Faire apparaître les équations et conclure

$$(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & 3\lambda & = & y+x \\ & & \lambda & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & \lambda & = & z \\ & & 3z & = & y+x \end{array}\right.$$

Le système (S) *possède des solutions si et seulement si* $3z = y+x$ *(par exemple,* $(\lambda,\mu) = (z, z-x)$ *est solution lorsque* $3z = y+x$*). Ainsi*

$$(x,y,z) \in \mathrm{F} \Longleftrightarrow 3z = y+x.$$

4. *S'il n'y a pas de condition, c'est que le système admet des solutions pour tout vecteur de l'espace, cela signifie que* $\mathrm{F} = \mathbb{R}^3$.

Test 12 (*Voir la solution.*)

Décrire les espaces vectoriels suivants à l'aide d'équations.

1. $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}((1,2,-1,2),(1,1,1,1))$.
2. $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(1,4,9))$.
3. $\mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2))$.

3 Objectifs

1. Avoir compris les notions d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel.
2. Connaître par coeur les définitions de *combinaison linéaire, sous-espace engendré par une famille.*
3. Savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel avec la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
4. Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel en en déterminant une famille génératrice.
5. Savoir décrire un sous-espace vectoriel engendré par une famille à l'aide d'équations.
6. Savoir manipuler la notation Vect.

4 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. $u+3v=(1,-1,0)+3(3,-2,5)=(10,-7,15)$.
2. $u+3v=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.
3. $u+3v=3X^3-X+1+3(X^5-2X^3+X^2+2)=3X^5-3X^3+3X^2-X+7$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

1. (a) *On a* $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)\leqslant n$ *donc* $P+Q\in\mathbb{R}_n[X]$
   (b) *L'addition de polynômes* $+:\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to R_n[X]$ *est donc bien définie. C'est une loi de composition interne par définition.*
2. *L'addition des polynôme n'est pas une loi de composition interne sur* E *car la somme de deux polynômes de degré exactement* n *n'est pas nécessairement de degré exactement* n*. Par exemple, avec* $n=1$*,* $P=X$ *et* $Q=-X+1$*, on a*
$$\deg P=\deg Q=1\quad \textit{mais}\quad \deg(P+Q)=0\quad \textit{car}\quad P+Q=1.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a*
$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad P+0=0+P=P.$$
Par unicité, le polynôme nul est donc l'élément neutre de l'addition de $\mathbb{R}[X]$.
On a
$$P+(-P)=(-P)+P=0,$$
où $-P=-a_0-a_1X-\cdots-a_nX^n$*. Par unicité,* $-P$ *est donc le symétrique de* P.
2. *On a*
$$\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(0)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n+0)_{n\in\mathbb{N}}=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, la suite constante égale à 0 *est donc l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On a
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}=(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc le symétrique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$u=xe_1+ye_2+ze_3.$$
Cela revient à résoudre le système
$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ x & + & 2y & - & z & = & -1\\ x & + & 3y & + & z & = & 3\end{array}\right.$$
Or
$$\begin{aligned}(S)\iff&\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ & & y & - & 3z & = & -4\\ & & 2y & - & z & = & 0\end{array}\right.\\ \iff&\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ & & y & - & 3z & = & -4\\ & & & & 5z & = & 8\end{array}\right.\\ \iff& z=\frac{8}{5}\quad y=\frac{4}{5}\quad x=-1\end{aligned}$$
Donc
$$u=-e_1+\frac{4}{5}e_2+\frac{8}{5}e_3.$$
De même pour v*, on cherche* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*
$$v=xe_1+ye_2+ze_3.$$

Cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

Or

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & 3z & = & -3 \\ & & 2y & - & z & = & 4 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & - & 3z & = & -3 \\ & & & & 5z & = & 10 \end{array}\right. \\ &\iff z=2 \quad y=3 \quad x=-6\end{aligned}$$

Donc

$$v=-6e_1+3e_2+2e_3.$$

2. *On cherche* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\mathrm{X}^2+1=a(\mathrm{X}+1)^2+b(\mathrm{X}+1)+c=a\mathrm{X}^2+(2a+b)\mathrm{X}+a+b+c.$$

Par identification, cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & a & = & 1 \\ & & 2a & + & b & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 1 \end{array}\right.$$

On trouve que l'unique solution de (S) *est* $(1,-2,2)$ *donc*

$$\mathrm{X}^2+1=(\mathrm{X}+1)^2-2(\mathrm{X}+1)+2$$

3. *La matrice* $\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ *est combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ *si et seulement si il existe des réels* a *et* b *tels que*

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b\\b & a+b\end{pmatrix}.$$

On peut identifier les coefficients des matrices de chaque membre et résoudre le système de quatre équations à deux inconnues comme précédemment. On peut aussi remarquer qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice soit combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ *est que ses deux coefficients diagonaux soient égaux. Ainsi,* $\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ *n'est pas combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=(a-b+4c)\mathrm{X}^2+(2a+6c)\mathrm{X}+b-c$$

donc

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=0\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 4c & = & 0 \\ 2a & & & + & 6c & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & -3c \\ b & = & c \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-3c,c,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$

2. *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$ax+by=0\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0 \\ 2a & + & 4b & = & 0 \\ -a & - & 2b & = & 0 \\ 4a & + & 4b & = & 0 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & 2b & = & 0 \\ 4a & + & 4b & = & 0 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

L'unique solution est $(0,0)$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a* $(1,0) \in F$ *et* $(0,1) \in F$ *mais* $(1,0)+(0,1) \notin F$. *Ainsi,* F *n'est pas stable par addition et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.
2. G *est non vide car* $0 \in G$. *Soient* $(P,Q) \in G^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors par linéarité de la dérivation, on a*

$$(P+\lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0.$$

   Ainsi $P+\lambda Q \in G$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.
3. *La fonction* f *constante égale à* 1 *appartient à* H *mais* $2f \notin H$. *Ainsi,* H *n'est pas stable par multiplication par un scalaire et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

On va montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence.

1. *L'ensemble* E *est non vide car contient la matrice nulle. Soient* $(M,N) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Par linéarité de la transposition on a*

$${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda\, {}^tN = 2M + \lambda 2N = 2(M+\lambda N).$$

   Ainsi $M+\lambda N \in E$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. *En particulier,* E *est un espace vectoriel.*
2. *L'ensemble* F *est non vide car contient la suite nulle. Soient* $(u,v) \in F^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et posons* $w = u + \lambda v$. *On a*

$$\begin{aligned} w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n + \lambda(v_{n+1} + 2v_n) \\ &= u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + 2(u_n + \lambda v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n \end{aligned}$$

   Ainsi $w \in F$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *En particulier,* F *est un espace vectoriel.*