Nom :
Prénom :

Interro 6 le 21/11.

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i, Y=j]) = \frac{e^{-1}}{(i+j+1)!}.$$

1. Déterminer et reconnaître la loi de $X+Y$.
2. Calculer $P([X=0])$.

Réponses. 1. Il est clair que $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$; soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $([X=i])_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$P([X+Y=k]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X=i, X+Y=k]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X=i, Y=k-i])$$

Or, comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, pour tout $i > k$, $P([Y=k-i]) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P([X+Y=k]) = \sum_{i=0}^{k} P([X=i, Y=k-i]) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-1}}{(i+k-i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-1}}{(k+1)!} \\ &= (k+1) \times \frac{e^{-1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-1}}{k!} \end{aligned}$$

Au final, $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([X+Y=k]) = \frac{e^{-1}}{k!}$.
Ainsi $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

2. D'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $([Y=i])_{i\in\mathbb{N}}$, on a :

$$P([X=0]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X=0, Y=i]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{(i+1)!} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{\ell!}$$

en faisant le changement de variable $\ell = i+1$. Ainsi,

$$P([X=0]) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{\ell!} - e^{-1} = 1 - e^{-1}.$$

Nom :
Prénom :

Interro 6 le 21/11.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$ (pour calculer $P([X+Y=k])$, on distinguera le cas où $k \leqslant n+1$ et le cas où $k > n+1$).
2. $X+Y$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Réponses. 1. Il est clair que $(X+Y)(\Omega) \subset [\![2,2n]\!]$; soit $k \in [\![2,2n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $([X=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned} P([X+Y=k]) = \sum_{i=1}^{n} P([X=i, X+Y=k]) &= \sum_{i=1}^{n} P([X=i, Y=k-i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P([X=i])\, P([Y=k-i]), \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de l'indépendance de X et Y.
Or, comme $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ tels que $k-i \notin [\![1,n]\!]$, $P([Y=k-i]) = 0$. Comme

$$k-i \in [\![1,n]\!] \Longleftrightarrow k-n \leqslant i \leqslant k-1$$

on obtient : $P([X+Y=k]) = \displaystyle\sum_{i\in[\![1,n]\!]\cap[\![k-n,k-1]\!]}^{n} P([X=i])\, P([Y=k-i])$.

- Si $k \in [\![2,n+1]\!]$ alors $[\![1,n]\!] \cap [\![k-n,k-1]\!] = [\![1,k-1]\!]$ et on obtient
$$P([X+Y=k]) = \sum_{i=1}^{k-1} P([X=i])\, P([Y=k-i]) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$
- si $k \in [\![n+2,2n]\!]$ alors $[\![1,n]\!] \cap [\![k-n,k-1]\!] = [\![k-n,n]\!]$ et on obtient
$$P([X+Y=k]) = \sum_{i=k-n}^{n} P([X=i])\, P([Y=k-i]) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

2. La variable aléatoire $X+Y$ est à support fini donc possède une espérance. Par linéarité
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n+1.$$