TD 9-Indications

1 Généralités, noyau, image

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

1. *Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par*
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi((x,y,z)) = 3x - 2y + 4z$$
est linéaire et que $F = \ker(\varphi)$.
2. *Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*
$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \varphi((x,y,z,t)) = (x-y, 2x+z-t)$$
est linéaire et que $G = \ker(\varphi)$.
3. *Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par*
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = P(1) - P'(1)$$
est linéaire et que $H = \ker(\varphi)$.

Exercice 4

Exercice 5

1. *Soient (x,y,z), (x',y',z') des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Commencer par calculer*
$$f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')).$$
2. *Pour $\mathrm{Im}(f)$ on peut*
   - *soit utiliser que*
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$$
   où (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (mais ce n'est pas le plus rapide)
   - *soit remarquer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$: quelles sont alors les dimensions possibles pour $\mathrm{Im}(f)$?*

   Pour en déduire $\dim(\ker(f))$, utiliser le théorème du rang.
3. *Commencer par justifier que $(x,y,z) \in \ker(f) \iff 3x - y + z = 0$ et en déduire une famille génératrice.*

Exercice 6

1. *Soient $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$ deux matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$. Commencer par calculer*
$$f\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}\right).$$
2. *Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arriver.*
3. *Montrer qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(f)$ si et seulement si*
$$\begin{cases} a + e + i = 0 \\ c + e + g = 0 \\ a + c + g + i = 0 \end{cases}.$$
Résoudre le système et en déduire une famille génératrice.
4. *Théorème du rang.*

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. *Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$: qu'est-ce que cela signifie ?*
Calculer ensuite $f(y)$.
2. *D'après la question précédente, comparer $\dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\dim(\ker(f))$.*

Avec le théorème du rang, en déduire que

$$3 \leqslant 2\dim(\ker(f)).$$

(rappel : la dimension est un entier naturel !).
Une fois prouver que $\dim(\ker(f)) \geqslant 2$*, quelles sont toutes les valeurs possibles pour* $\dim(\ker(f))$ *? Rappel :* $\dim(E) = 3$ *et* f *est non nulle.*

2 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Exercice 8

1. *Comparer la dimension de* $\mathbb{R}^3$ *et de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Voir la méthode 4 du cours.*
3. (a) *Déterminer les coordonnées de* $(1,2,1)$ *dans la base canonique, en déduire* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}((1,2,1))$. *Utiliser la conséquence 5 du cours.*

   (b) *Déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tels que*

   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   puis utiliser la conséquence 6 du cours. Par exemple, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *signifie que le vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *dont les coordonnées dans la base canonique sont* $(1,5,3)$ *appartient au noyau de* f.

   (c) *Que représentent les colonnes de* A *? En déduire une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$ *à l'aide de la proposition* 10.

Exercice 9

1.
2. *Voir méthode 4 du cours.*
3. *Même indication que pour la question 3.b de l'exercice précédent.*
4. (a) *Montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.*

   (b) *Montrer que* $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *appartient à* $\mathcal{C}$ *si et seulement si* (x,y,z,t) *est solution d'un système à déterminer. En déduire une famille génératrice.*

Exercice 10

1. *Pour le noyau : déterminer l'ensemble des* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *; il s'agit de l'ensemble des coordonnées dans la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$ *des éléments du noyau.*
   Pour l'image : M *est la matrice de* f *dans la base canonique, que représentent les colonnes de* M *? En déduire une famille génératrice de l'image grâce à la proposition 10.*
2. (a)

   (b) *Déterminer les coordonnées de* $f(X)$, $f(X^2+1)$ *et* $f(X^2-1)$ *dans la base* (X, X^2+1, X^2-1) *et utiliser la méthode 4.*

   (c) *Utiliser les formules de changement de bases :* P *est une matrice de passage entre deux bases.*

Exercice 11

1. *Comparer le rang de* A *et le rang de* ψ. *La matrice* A *est-elle inversible ?*
2. *Utiliser la conséquence 5.*
3. (a)

   (b) *Après avoir déterminer* $\psi(u)$, $\psi(v)$ *et* $\psi(w)$*, trouver leurs coordonnées dans la base* (u,v,w).

   (c) *Montrer que* $D = P^{-1}AP$ *: utiliser les formules de changement de bases :* P *est une matrice de passage entre deux bases et* D *est la matrice de la question précédente.*
4. *Pour le noyau : déterminer l'ensemble des* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *; il s'agit de l'ensemble des coordonnées dans la base* (u,v,w) *des éléments du noyau.*
   Pour l'image : D *est la matrice de* f *dans la base* (u,v,w)*, que représentent les colonnes de* D *? En déduire une famille génératrice de l'image grâce à la proposition 10.*