TD11-Réduction des endomorphismes, des matrices

Exercice 1.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Le vecteur Y est non nul et on a :

$$AY = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3Y.$$

Ainsi Y est un vecteur propre de A et la valeur propre associée est 3.

Exercice 2.

1. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **Méthode 1 : par le rang.** On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(C) \iff C - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(C - \lambda I_2) < 2.$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(C - \lambda I_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(C) \iff -1 - (1-\lambda)^2 = 0.$$

Or, pour tout réel λ on a : $-1 - (1-\lambda)^2 \leq -1$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(C) = \emptyset$.

   - **Méthode 2 : par le déterminant.** On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(C) \iff C - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } &\iff \det(C - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff 1 + (1-\lambda)^2 = 0.\end{aligned}$$

Or, pour tout réel λ on a : $1 + (1-\lambda)^2 \geq 1$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(C) = \emptyset$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(E) \iff E - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(E - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(E - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & 2\lambda & -(1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \\ 0 & 0 & (3-\lambda)(3+2\lambda-\lambda^2) \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \tfrac{3+\lambda}{6} L_2 \ .\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(E) \iff (3-\lambda)(3+2\lambda-\lambda^2) = 0 \iff (3-\lambda)^2(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

Donc : $\mathrm{Sp}(E) = \{-1, 3\}$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff B - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(B - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_3-(1-\lambda)L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_3+L_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \Longleftrightarrow 1-\lambda = 0 \text{ ou } 1-(1-\lambda)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 0.$$

Donc : $\mathrm{Sp}(B) = \{0,1,2\}$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **Méthode 1 : par le rang.** On a :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(D) \Longleftrightarrow D-\lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(D-\lambda I_2) < 2.$$

   Or :

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{rg}(D-\lambda I_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow 2L_2-(1-\lambda)L_1.
   \end{aligned}$$

   Ainsi :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(D) \Longleftrightarrow 4-(1-\lambda)^2 = 0 \Longleftrightarrow (1+\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

   Ainsi : $\mathrm{Sp}(D) = \{-1,3\}$.
   - **Méthode 2 : par le déterminant.** On a :

   $$\begin{aligned}
   \lambda \in \mathrm{Sp}(D) \Longleftrightarrow D-\lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } &\Longleftrightarrow \det(D-\lambda I_2) = 0 \\
   &\Longleftrightarrow (1-\lambda)^2-4 = 0 \\
   &\Longleftrightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0.
   \end{aligned}$$

   Ainsi : $\mathrm{Sp}(C) = \{-1,3\}$.

6. Voir Test 2.

Exercice 3.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. - Soit f l'application de l'exercice 1. On a :

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))) \\
   &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}((2,0,3),(0,1,0),(-1,0,-2)) \\
   &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
   \end{aligned}$$

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme le spectre de f et le spectre de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f)$ sont égaux, on a :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f)-\lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f)-\lambda I_3) < 3.$$

   Or :

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(f)-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
   &C_1 \longleftrightarrow C_2 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
   &L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \end{pmatrix}\right) \quad C_2 \longleftrightarrow C_3 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & & 3-(2+\lambda)(2-\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3-(2+\lambda \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & & \lambda^2-1 \end{pmatrix}\right)
   \end{aligned}$$

   Ainsi :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

   Donc : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1,1\}$.

- Soit φ l'application de l'exercice 1. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3), \varphi(X^4)) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(0, X, 2X^2, 3X^3, 4X^4) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le spectre de φ et le spectre de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi)$ sont égaux. De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\varphi)$ est diagonale (donc triangulaire) : ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.
Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Exercice 4.

1. Fait en TD.
2. Soit A la matrice de l'exercice 1. On commence par déterminer les valeurs propres de A. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 5 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -2-(4-\lambda)^2 & 9-\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 - (4-\lambda)L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -2-(4-\lambda)^2 & 9-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 27 - 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3(2 + (4-\lambda)^2)L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^3 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff (3-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 3.$$

Donc : $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) \iff AX = 3X &\iff \begin{cases} 4x - 2y + 5z = 3x \\ x + 4y - z = 3y \\ y + z = 3z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant non nul et générateur de $E_3(A)$, il forme une base de $E_3(A)$.

Exercice 5. Vu en TD.

Exercice 6.

1. On vérifie par le calcul qu'on a bien $M^2 = 3M$. En particulier :

$$M^2 - 3M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Donc, le polynôme $X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de M. Les valeurs propres de M sont donc des racines de $X^2 - 3X$. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, 3\}.$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - On a :

$$\begin{aligned} MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 0 \\ \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ + 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{a}L_1 \end{matrix} \\ &\iff x = -\frac{a}{b}y - \frac{a}{c}z. \end{aligned}$$

En particulier, 0 est bien valeur propre de M et :

$$E_0(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a/b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} -a/b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ étant génératrice de $E_0(M)$ et formée de deux vecteurs non colinéaires, il s'agit d'une base de $E_0(M)$. Donc $\dim(E_0(M)) = 2$.

- On a :

$$MX = 3X \iff \begin{cases} x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 3x \\ \frac{b}{a}x + y + \frac{b}{c}z = 3y \\ \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ \frac{b}{a}x - 2y + \frac{b}{c}z = 0 \\ \frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3b}{2c}z = 0 \\ \frac{3c}{2b}y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{b}{2a}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{c}{2a}L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{a}{c}z \\ y = \frac{b}{c}z \end{cases}.$$

En particulier, 3 est bien valeur propre de M et :

$$E_3(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ étant génératrice de $E_3(M)$ et formée d'un vecteur non nul, il s'agit d'une base de $E_3(M)$. Donc $\dim(E_3(M)) = 1$.

- Finalement : $\text{Sp}(M) = \{0, 3\}$.

3. D'après ce qui précède : $\dim(E_0(M)) + \dim(E_3(M)) = 3$. Ainsi M est diagonalisable.

Exercice 7.

- La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
- Si $c = 1$ alors $\text{Sp}(A) = \{1\}$. Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que :

$$D = P^{-1}AP.$$

Or, comme 1 est la seule valeur propre de A, on a $D = I_3$. Donc :

$$I_3 = P^{-1}AP.$$

En multipliant membre à membre par P à gauche et P^{-1} à droite on obtient :

$$A = PI_3P^{-1} = I_3.$$

Ceci est absurde : donc A n'est pas diagonalisable.

- Si $c \neq 1$ alors $\text{Sp}(A) = \{1, c\}$.

— **Déterminons $E_1(A)$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} x + ay + z = x \\ y + bz = y \\ cz = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ay + z = 0 \\ bz = 0 \\ (c-1)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \quad \text{car } c \neq 1 \end{cases}.$$

∗ Si $a \neq 0$ alors on obtient :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0.$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

∗ Si $a = 0$ alors on obtient :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff z = 0.$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

— **Déterminons** $E_c(A)$**.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_c(A) \iff AX = cX \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & cx \\ & & y & + & bz & = & cy \\ & & & & cz & = & cz \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-c)x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & (1-c)y & + & bz & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{ab+c-1}{(1-c)^2} z \\ y & = & -\frac{b}{1-c} z \end{array} \right. \quad \text{car } c \neq 1.$$

Ainsi : $E_c(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{ab+c-1}{(1-c)^2} \\ -\frac{b}{1-c} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

— **Conclusion.**
Si $a \neq 0$ alors $\dim(E_1(A)) + \dim(E_c(A)) = 2 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable.
Si $a = 0$ alors $\dim(E_1(A)) + \dim(E_c(A)) = 3$ donc A est diagonalisable.

- Finalement A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

Exercice 8.

1. Un calcul donne :

$$\varphi(1) = 1 \quad ; \quad \varphi(X) = 2X + 1 \quad ; \quad \varphi(X^2) = 3X^2 + 2X.$$

Ainsi :

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(1, 2X+1, 3X^2+2X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice $\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi)$ est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. De plus, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi))$ donc :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 2, 3\}.$$

- Déterminons une base de $E_1(\varphi)$: soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} P \in E_1(\varphi) \iff \varphi(P) = P &\iff (X+1)P'(X) + P(X) = P(X) \\ &\iff (X+1)P'(X) = 0 \\ &\iff P'(X) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi : $E_1(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(X) = 0\} = \mathbb{R}_0[X]$.
En particulier, (1) est une base de $E_1(\varphi)$.

- Déterminons une base de $E_2(\varphi)$: soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} P \in E_2(\varphi) \iff \varphi(P) = 2P &\iff (X+1)P'(X) + P(X) = 2P(X) \\ &\iff (X+1)P'(X) - P(X) = 0 \\ &\iff (X+1)(2aX+b) - (aX^2+bX+c) = 0 \\ &\iff aX^2 + 2aX + b - c = 0 \\ &\iff a = 0 \quad \text{et} \quad b = c. \end{aligned}$$

Ainsi : $E_2(\varphi) = \{c(X+1),\ c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X+1)$.
En particulier, $(X+1)$ est une base de $E_2(\varphi)$.

- Déterminons une base de $E_3(\varphi)$: soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} P \in E_3(\varphi) \iff \varphi(P) = 3P &\iff (X+1)P'(X) + P(X) = 3P(X) \\ &\iff (X+1)P'(X) - 2P(X) = 0 \\ &\iff (X+1)(2aX+b) - 2(aX^2+bX+c) = 0 \\ &\iff (2a-b)X + b - 2c = 0 \\ &\iff b = 2a \quad \text{et} \quad c = a. \end{aligned}$$

Ainsi : $E_3(\varphi) = \left\{a(X^2+2X+1),\ a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(X^2+2X+1)$.
En particulier, (X^2+2X+1) est une base de $E_3(\varphi)$.

3. La dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ est égale à 3 et φ possède trois valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable. En posant :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'après les formules de changement de bases :

$$D = P^{-1}AP.$$

Exercice 9.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & \frac{1+\lambda^2}{2} \end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + \tfrac{1-\lambda}{2} L_1 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2-1}{2} \end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad ou \quad \frac{\lambda^2-1}{2} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.$$

Donc : $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_0(A) \Longleftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ainsi : $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) \Longleftrightarrow AX = -X &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -x \\ & & & - & z & = & -y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & -z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ y & = & z \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ainsi : $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) \Longleftrightarrow AX = X &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & x \\ & & & - & z & = & y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & 0 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Ainsi : $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. La matrice A appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. En posant :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'après les formules de changement de bases :

$$D = P^{-1}AP.$$

Exercice 10. Partie A

1. On a :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} 3x & -2x & 2x \\ -x & 4x & -2x \\ 0 & 4x & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2y & -y \\ -y & -3y & y \\ -2y & -4y & y \end{pmatrix} \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$ étant formée de deux vecteurs non colinéaires, il s'agit d'une famille libre.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E et $\dim(E) = 2$.

2. On a $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   - On a :

$$\begin{aligned} AX = X &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & x \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & y \\ & & 4y & - & z & = & z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & 2y \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi 1 est bien valeur propre et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

   - On a :

$$\begin{aligned} AX = 2X &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 2x \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & 2y \\ & & 4y & - & z & = & 2z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}z \\ y & = & \frac{3}{4}z \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi 2 est bien valeur propre et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

   - On a :

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 3x \\ -x & + & 4y & - & 2z & = & 3y \\ & & 4y & - & z & = & 3z \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi 3 est bien valeur propre et $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Comme A est une matrice de taille 3x3 avec trois valeurs propres distinctes, elle n'en possède pas d'autre et est diagonalisable.

3. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$D_A = P^{-1}AP.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} on obtient bien :

$$A = PD_AP^{-1}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} .$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On rappelle que : $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

- $BX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $BX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -X_2$;
- $BX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -X_3$.

En particulier -1 est valeur propre de B et (X_2, X_3) est une famille libre de $E_{-1}(B)$; 0 est valeur propre de B et (X_1) est une famille libre de $E_0(B)$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de B ne doit pas excéder 3 alors nécessairement on a :

$$\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 0\} \quad ; \quad E_0(B) = \mathrm{Vect}(X_1) \quad ; \quad E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}(X_2, X_3).$$

En particulier on a, en posant $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$D_B = P^{-1} B P.$$

En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} on obtient bien :

$$B = P D_B P^{-1}.$$

6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après les calculs de la question 1, on remarque que :

$$M(x, y) = xA + yB = xPD_A P^{-1} + yPD_B P^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1}.$$

Ainsi la matrice suivante convient :

$$D(x, y) = xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}.$$

7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice $M(x, y)$ est inversible si et seulement si $D(x, y)$ l'est. Or $D(x, y)$ étant diagonale, elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi :

$$M(x, y) \quad \text{inversible} \iff x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 2x \quad \text{et} \quad y \neq 3x.$$

8. On a :

$$B^2 = (PD_B P^{-1})^2 = PD_B^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PD(0, -1)P^{-1} = M(0, -1).$$

Ainsi B^2 appartient à E.
De même $A^2 = PD_A^2 P^{-1}$ appartient à E si et seulement si il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D(x, y) = D_A^2$. Or :

$$D(x, y) = D_A^2 \iff \begin{cases} x & = & 1 \\ 2x - y & = & 4 \\ 3x - y & = & 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & -2 \\ y & = & -6 \end{cases}.$$

Le système n'a donc pas de solution. Ainsi A^2 n'appartient pas à E.

Partie B

1. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n + c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} X_n.$$

Ainsi la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ convient.
Si $C = M(x, y)$ alors en identifiant les coefficients $(1, 1)$ et $(1, 2)$ on doit nécessairement avoir $(x, y) = (1, 3)$. Réciproquement, on vérifie que $M(1, 3)$ est bien égale à C.

3. Par récurrence montrons que $\mathcal{P}_n$:≪ $X_n = C^n X_0$ ≫ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : $C^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n fixé et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_n = C^n X_0$ donc :
     $$X_{n+1} = CX_n = CC^n X_0 = C^{n+1} X_0.$$
     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $X_n = C^n X_0$.
4. On sait que $C = M(1,3) = PD(1,3)P^{-1}$. Par récurrence immédiate, on montre que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C^n = (PD(1,3)P^{-1})^n = PD(1,3)^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
   Ainsi pour tout entier naturel n :
   $$\begin{aligned} X_n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   Ainsi :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_n &=& 1 - 2(-1)^n \\ b_n &=& -1 + 3(-1)^n \\ c_n &=& -2 + 4(-1)^n \end{array} \right.$$

Exercice 11.

1. La matrice A est symétrique à coefficients réels donc diagonalisable.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.On a :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_4 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) < 4.$$
   Or :
   $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_4 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \frac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \right) \quad L_4 \longleftarrow L_4 + \frac{\lambda}{2} L_1 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4-\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4-\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_2 \end{aligned}$$
   Ainsi :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff 1 - \lambda^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - \lambda^2 = 0 \iff \lambda^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = 4.$$
   Donc : $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1, 2\}$.
   - Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :
     $$\begin{aligned} X \in E_{-2}(A) \iff AX = -2X &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2t &=& -2x \\ z &=& -2y \\ y &=& -2z \\ 2x &=& -2t \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -t \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$
     Ainsi : $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{-1}(A) \iff AX = -X \iff \begin{cases} 2t = -x \\ z = -y \\ y = -z \\ 2x = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Ainsi : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{1}(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} 2t = x \\ z = y \\ y = z \\ 2x = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Ainsi : $E_{1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{2}(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} 2t = 2x \\ z = 2y \\ y = 2z \\ 2x = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ainsi : $E_{2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a : $D = P^{-1}AP$.

4. La matrice nulle appartient à C_A donc C_A est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Soit $(M, N) \in C_A \times C_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme M et N commutent avec A on a :

$$A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A.$$

Ainsi, $M + \lambda N$ commute avec A : $M + \lambda N \in C_A$.
D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

5. Notons que : $M = PNP^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} M \in C_A \iff AM = MA &\iff APNP^{-1} = PNP^{-1}A \\ &\iff P^{-1}APNP^{-1} = NP^{-1}A \quad \text{en multipliant par } P^{-1} \\ &\iff P^{-1}APN = NP^{-1}AP \quad \text{en multipliant par } P \\ &\iff DN = ND \quad \text{car } D = P^{-1}AP \\ &\iff N \in C_D. \end{aligned}$$

6. Soit $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Un calcul donne :

$$DN = \begin{pmatrix} -2n_{1,1} & -2n_{1,2} & -2n_{1,3} & -2n_{1,4} \\ -n_{2,1} & -n_{2,2} & -n_{2,3} & -n_{2,4} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & n_{3,4} \\ 2n_{4,1} & 2n_{4,2} & 2n_{4,3} & 2n_{4,4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ND = \begin{pmatrix} -2n_{1,1} & -n_{1,2} & n_{1,3} & 2n_{1,4} \\ -2n_{2,1} & -n_{2,2} & n_{2,3} & 2n_{2,4} \\ -2n_{3,1} & -n_{3,2} & n_{3,3} & 2n_{3,4} \\ -2n_{4,1} & -n_{4,2} & n_{4,3} & 2n_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$N \in C_D \iff DN = ND$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2n_{1,1} &=& -2n_{1,1} \\ -2n_{1,2} &=& -n_{1,2} \\ -2n_{1,3} &=& n_{1,3} \\ -2n_{1,4} &=& 2n_{1,4} \\ -n_{2,1} &=& -2n_{2,1} \\ -n_{2,2} &=& -n_{2,2} \\ -n_{2,3} &=& n_{2,3} \\ -n_{2,4} &=& 2n_{2,4} \\ n_{3,1} &=& -2n_{3,1} \\ n_{3,2} &=& -n_{3,2} \\ n_{3,3} &=& n_{3,3} \\ n_{3,4} &=& 2n_{3,4} \\ 2n_{4,1} &=& -2n_{4,1} \\ 2n_{4,2} &=& -n_{4,2} \\ 2n_{4,3} &=& n_{4,3} \\ 2n_{4,4} &=& 2n_{4,4} \end{array}\right.$$
$$\iff n_{i,j} = 0 \text{ pour tout } i \neq j.$$

Ainsi : $C_D = \left\{ \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{4,4} \end{pmatrix} , \ (n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$

7. D'après les questions 5 et 6, on a :

$$C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{4,4} \end{pmatrix} P^{-1} , \ (n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Or, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$C_A = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_{1,1} + n_{4,4} & 0 & 0 & -n_{1,1} + n_{4,4} \\ 0 & n_{2,2} + n_{3,3} & -n_{2,2} + n_{3,3} & 0 \\ 0 & -n_{2,2} + n_{3,3} & n_{2,2} + n_{3,3} & 0 \\ -n_{1,1} + n_{4,4} & 0 & 0 & n_{1,1} + n_{4,4} \end{pmatrix} , \ (n_{1,1}, \dots, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Or l'application :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (n_{1,1}, \dots, n_{4,4}) \longmapsto \frac{1}{2} \left(n_{1,1} + n_{4,4}, -n_{1,1} + n_{4,4}, n_{2,2} + n_{3,3}, -n_{2,2} + n_{3,3} \right) \end{array}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^4$. Donc, en posant

$$(a, b, c, d) = \frac{1}{2} \left(n_{1,1} + n_{4,4}, -n_{1,1} + n_{4,4}, n_{2,2} + n_{3,3}, -n_{2,2} + n_{3,3} \right)$$

on obtient :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} , \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. D'après la question précédente, la famille :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une famille génératrice de C_A. De plus, pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ on a :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$
$$\iff a = b = c = d = 0.$$

Ainsi cette famille est aussi libre.
Finalement, la famille suivante est une base de C_A :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, $\dim(C_A) = 4$.