Nom :
Prénom :

Interro 4 le 12/10/2021.

Question 1. Voir cours.

Exercice. On considère la famille suivante :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right).$$

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

2. La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi :
$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3.$$

Nom :
Prénom :

Interro 4 le 12/10/2021.

Question 1. Voir cours.

Exercice. On considère la famille suivante :

$$\mathcal{F} = ((1,1,1), (1,2,4), (1,3,9)).$$

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,4) + \lambda_3(1,3,9) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

   Donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

2. La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi :
$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3.$$