DM 1 : Révisions

Pour le lundi 20 septembre

Tout le programme de première année est considéré comme acquis et peut faire l'objet d'un exercice dans les évaluations. Il est fortement recommandé de revoir les cours de première année si vous n'êtes pas au point, notamment en analyse et en calcul matriciel.

Pour le début d'année, il est impératif de savoir :

- les définitions de limite, continuité, nombre dérivé, fonction dérivée...
- les limites usuelles et les croissances comparées,
- les dérivées des fonctions usuelles (cela comprend l'ensemble de dérivabilité), les opérations sur les limites, les fonctions continues, les fonctions dérivées,
- le théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, l'inégalité des accroissements finis (et savoir les utiliser),
- effectuer des calculs avec des matrices, des polynômes.

Ce qui est entendu par *connaître* et *utiliser* un théorème :

1. *connaître* un théorème : en connaître **les hypothèses et les conclusions précisément**
2. *utiliser* un théorème : vérifier que **toutes les hypothèses** sont satisfaites puis en déduire les conclusions.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 3b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & 3c_n \end{array}\right.$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. *Pour tout entier naturel n, on considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

2. *Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geqslant 3$.*
3. *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2.$$

4. *En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.*

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathscr{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2.*
   En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.
2. *Soit k un entier supérieur ou égal à 1.*
   (a) *Déterminer $P(Z_k = 1)$ et $P(Z_k = k)$.*

(b) *Montrer :*

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!], \quad P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n} P(Z_k = \ell) + \frac{n-\ell+1}{n} P(Z_k = \ell - 1).$$

On pourra utiliser la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements judicieusement choisi.

(c) *En déduire :* $E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} E(Z_k) + 1$.

3. *Montrer que la suite* $(u_k)_{k\geqslant 1}$ *de terme général* $u_k = E(Z_k) - n$ *est une suite géométrique.*
4. *En déduire, pour tout entier* k *supérieur ou égal à* 1 *:*

$$E(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right).$$

Exercice 3

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *l'application de classe* C^2*, définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé.*
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. (a) *Calculer, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
   (b) *En déduire le sens de variation de* f.
   (c) *Calculer, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. *Déterminer la limite de* f *en* $-\infty$ *et la limite de* f *en* $+\infty$.
3. *Montrer que* $\mathscr{C}$ *admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.*
4. *Tracer* $\mathscr{C}$ *en faisant apparaître les tangentes à* $\mathscr{C}$ *en l'origine et en chacun des points d'inflexion.*
   On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 *centimètres.*
5. *On considère la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

   (a) *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante.*
   (b) *Etablir que la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *converge et déterminer sa limite.*
   (c) *Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche un entier* n *tel que* $u_n \leqslant 10^{-3}$.
   (d) i. *Etablir :* $\forall x \in [0;1], \quad f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2$.
   ii. *En déduire :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$.
   iii. *Démontrer que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ *converge.*