ECE2-Colle 16

02/02/22

1 Cours

1.1 Réduction des endomorphismes et des matrices

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, polynômes annulateurs : voir programme précédent.

Famille de vecteurs propres : si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de f et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\mathscr{F}_i$ est une famille libre de $E_{\lambda_i}(f)$ alors la famille $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_p$ est une famille libre de E. Conséquence : si $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \leqslant n$ et le nombre de valeurs propres est $\leqslant n$. Résultats analogues pour les matrices.

Diagonalisabilité : définition de matrice/endomorphisme diagonalisable, un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale si et seulement si la matrice de f dans n'importe quelle base est diagonalisable. Critère de diagonalisabilité : f est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) = n$ (et résultat analogue pour les matrices). Condition suffisante : en dimension n avoir n valeurs propres distinctes implique être diagonalisable. Les matrices symétriques sont diagonalisables.

Exemples et applications : exemple des matrices possédant une seule valeur propre ; calcul des puissances d'une matrice diagonalisable ; étude du commutant d'une matrice diagonalisable.

1.2 Intégration (rappels de première année)

Intégration sur un segment : primitives d'une fonction continue sur un intervalle, intégrale d'une fonction continue sur un segment, propriétés de l'intégrale, extension aux fonctions continues par morceaux. Techniques de calcul : primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable.

Intégrale impropre en $\pm\infty$: définition d'intégrale impropre d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ (définition de convergence/ divergence) ; exemples de référence : critère de convergence des intégrales de Riemann en $+\infty$, convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ avec $\lambda > 0$.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.
2. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
3. Étant donné un polynôme P, savoir exprimer $P(f)$ pour f un endomorphisme ou une matrice carrée.
4. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur. Savoir déterminer l'inverse d'un automorphisme à partir d'un polynôme annulateur.
5. Savoir déterminer si une matrice A ou un endomorphisme est diagonalisable ou non. Le cas échéant, savoir déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.
6. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable, une primitive.
7. Savoir étudier la convergence d'une intégrale impropre en $\pm\infty$.

3 Questions de cours

- Définitions : matrice diagonalisable, endomorphisme diagonalisable.
- Propositions : critère de diagonalisabilité, condition suffisante de diagonalisabilité, diagonalisabilité des matrices symétriques.
- Primitives usuelles, intégrales impropres de référence.