# 5 Correction des tests

**Correction du test 1** (***Retour à l'énoncé.***)

*Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit* $Z = \max(X, Y)$.
*On note* $F_Z$ *la fonction de répartition de* Z *et* $F_X$, $F_Y$ *celles de* X *et de* Y.

- *Soit* $t \in \mathbb{R}$ *et montrons que* $[Z \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$. *Soit* $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [Z \leqslant t] \Longleftrightarrow Z(\omega) \leqslant t \Longleftrightarrow \max(X(\omega), Y(\omega)) \leqslant t \Longleftrightarrow X(\omega) \leqslant t \quad \text{et} \quad Y(\omega) \leqslant t \Longleftrightarrow \omega \in [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t].$$

  *Ainsi* $[Z \leqslant t] = [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]$
- *On en déduit, par indépendance, que pour tout réel* $t$, $P([Z \leqslant t]) = P([X \leqslant t])P([Y \leqslant t])$.
- *En d'autres termes,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t).$$

**Correction du test 2** (***Retour à l'énoncé.***)

*Ici on sait que* $F_X$ *est une fonction de répartition. Pour vérifier que c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, il s'agit de montrer que* $F_X$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

1. *Montrons que* $F_X$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. $F_X$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *en tant que composée de fonctions continues et continue sur* $]-\infty, 0[$ *car constante sur cet intervalle. Étudions la continuité en* 0 *:*

$$\lim_{x \to 0^+} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x \to 0^-} F_X(x).$$

   *Ainsi,* $F_X$ *est continue en* 0. *Finalement,* $F_X$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrons que* $F_X$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.* $F_X$ *est de classe* $C^1$ *sur* $]0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0[$ *en tant que composée de fonctions de classe* $C^1$ *sur ces intervalles. Ainsi,* $F_X$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* 0.

*Ainsi,* $F_X$ *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Comme la fonction de répartition caractérise la loi,* X *est à densité. De plus,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

*Donc, la fonction* $f$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*est une densité de* X.

**Correction du test 3** (***Retour à l'énoncé.***)

*Il s'agit de montrer que* $f$ *est positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et que l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *converge et vaut* 1.

1. *Montrons que* $f$ *est positive. Sur* $]-\infty, -1[$ *et sur* $[1, +\infty[$, $f$ *est positive. De plus, pour tout* $x \in [-1, 0[$, $f(x) = 1 + x \geqslant 0$ *et pour tout* $x \in [0, 1[$, $f(x) = 1 - x \geqslant 0$.

   *Ainsi,* $f$ *est positive.*
2. *Montrons que* $f$ *est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il est évident que* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* $-1$, 0 *et* 1.
3. *Comme* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* $-1$, 0 *et* 1, *l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *est impropre en* $-\infty$, $-1$, 0, 1 *et* $+\infty$.

   - *Étude de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$. *Comme* $f$ *est nulle sur* $]-\infty, -1[$, *on vérifie facilement que cette intégrale (doublement impropre) converge et vaut* 0.
   - *Étude de* $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)dt$. *Comme* $f$ *est prolongeable par continuité sur* $[-1, 0]$ *l'intégrale converge et*

$$\int_{-1}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} (1 + t)dt = \frac{1}{2}.$$

- *Étude de* $\int_0^1 f(t)dt$. *Comme* $f$ *est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$ *l'intégrale converge et*

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

- *Étude de* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. *Comme* $f$ *est nulle sur* $[1,+\infty[$, *on vérifie facilement que cette intégrale converge et vaut* $0$.

*Ainsi, l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *converge et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$$

*Ainsi,* $f$ *est bien un densité de probabilité. Soit* $\mathrm{X}$ *une variable aléatoire de densité* $f$. *Alors la fonction de répartition de* $\mathrm{X}$ *est donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_X}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

**Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)**

*Ici, on ne sait pas a priori que* $\mathrm{F}$ *est une fonction de répartition. Il s'agit donc de montrer que* $\mathrm{F}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$, $\mathrm{F}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $\mathrm{F}$ *est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

1. *Montrons que* $\mathrm{F}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
   - $\mathrm{F}$ *est croissante sur* $]-\infty,0[$ *car la fonction exponentielle l'est,*
   - $\mathrm{F}$ *est croissante sur* $[0,+\infty[$ *(en étudiant le signe de la dérivée sur* $]0,+\infty[$*),*
   - *pour tout* $x \in ]-\infty,0[$ *et tout* $y \in [0,+\infty[$ *on a*

   $$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}e^x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-y} = \mathrm{F}(y).$$

   *Ainsi* $\mathrm{F}$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
2. *Par limites usuelles, on a :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$.
3. *Montrons que* $\mathrm{F}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. $\mathrm{F}$ *est continue sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *car la fonction exponentielle est continue sur ces intervalles. De plus,* $\mathrm{F}$ *est continue en* $0$ *car*

   $$\lim_{x\to0^-} \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} = \mathrm{F}(0) = \lim_{x\to0^+} \mathrm{F}(x).$$

   *Ainsi* $\mathrm{F}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
4. $\mathrm{F}$ *est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *car la fonction exponentielle est de classe* $\mathrm{C}^1$ *sur ces intervalles.*

*Ainsi* $\mathrm{F}$ *est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité* $\mathrm{X}$. *Comme*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{F}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

*La fonction* $f$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

*est une densité de* $\mathrm{X}$.

**Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)**

*D'après l'exemple 5, la fonction de répartition de* $\mathrm{X}$ *est*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

*On note* $\mathrm{Y} = 3\mathrm{X} - 1$

- *Déterminons la fonction de répartition* $F_Y$ *de* Y. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$[Y \leqslant t] = [3X - 1 \leqslant t] = \left[X \leqslant \frac{t+1}{3}\right].$$

*Donc*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P\left(\left[X \leqslant \frac{t+1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{t+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ 1 - \frac{9}{(t+1)^2} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité. La fonction* $F_Y$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *: elle est continue sur* $]-\infty, 2[$ *et sur* $[2, +\infty[$ *par opérations sur les fonctions usuelles et elle est continue en* 2 *car*

$$\lim_{t \to 2^-} F_Y(t) = 0 = \lim_{t \to 2^+} F_Y(t) = F_Y(2).$$

*Enfin,* $F_Y$ *est de classe* $C^1$ *sauf éventuellement en* 2. *Ainsi,* Y *est à densité.*

- *Déterminons une densité de* Y. *On a, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* 2 *:*

$$F_Y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

*Au final, la fonction* $g$ *définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

*est une densité de* Y.

**Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)**

*Soit* X *une variable aléatoire de loi* $\mathscr{E}(2)$. *Déterminer la loi de* $Y = e^X$.

- *On a* $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. *Déterminons la fonction de répartition* $F_Y$ *de* Y. *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$[Y \leqslant t] = [e^X \leqslant t] = \begin{cases} [X \leqslant \ln(t)] & \text{si } t > 0 \\ \varnothing & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

*Donc*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} P([X \leqslant \ln(t)]) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

*Or, comme* X *suit une loi exponentielle de paramètre* 2, *on a*

$$F_X(\ln(t)) = \begin{cases} 1 - e^{-2\ln(t)} & \text{si } \ln(t) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } \ln(t) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

*Donc finalement,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

- *Montrons que* Y *est une variable à densité.*
*La fonction* $F_Y$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *: elle est continue sur* $]-\infty, 1[$ *et sur* $[1, +\infty[$ *par opérations sur les fonctions usuelles et elle est continue en* 1 *car*

$$\lim_{t \to 1^-} F_Y(t) = 0 = \lim_{t \to 1^+} F_Y(t) = F_Y(1).$$

*Enfin,* $F_Y$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *sauf éventuellement en* 1. *Ainsi,* Y *est à densité.*

- *Déterminons une densité de* Y. *On a, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *sauf en* 1 *:*

$$F_Y'(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t > 1 \\ \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

*Au final, la fonction* $g$ *définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

*est une densité de* Y.