

TD15/16-Variables aléatoires à densité

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

Exercice 2

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X .
2. Déterminer une densité de X .
3. Calculer $P(0.973 < X \leq 1.2)$.

Exercice 3 (Loi de Laplace)

Soit $c \in \mathbb{R}$. on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles f est une densité d'une variable aléatoire X .
2. Pour ces valeurs, déterminer la fonction de répartition de X .

Exercice 4

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et posons $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y .
2. La variable Y est-elle à densité?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de Y , vérifier si Y est à densité ou non et déterminer une densité le cas échéant.

1. $Y = \sqrt{X}$.
2. $Y = X^3$.
3. $Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{X(\omega)} & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 6

Pour tout nombre réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$. La variable Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leq X < k + 1].$$

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans \mathbb{N} .
(b) Pour tout k de \mathbb{N}^* , calculer $P(Y = k - 1)$.
(c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
(d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. On pose $Z = X - Y$.
(a) Déterminer les valeurs prises par Z .
(b) En utilisant le système complet d'évènements $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

- (c) En déduire une densité f de Z .
- (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z . Ce résultat était-il prévisible?

Exercice 7

Déterminer si les deux premières variables aléatoires de l'exercice 5 possèdent une

espérance.

Exercice 8 (Loi de Laplace)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Laplace (voir exercice 3).

1. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
2. Montrer que X possède une variance et la calculer.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X dont on donnera la fonction de répartition.
2. La variable X possède-t-elle une espérance ? une variance ? si oui, calculer les.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f .
 - (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $m_n(X)$.
 - (b) En déduire l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer la fonction de répartition de X .
4.
 - (a) Déterminer la loi de $Y = \ln(X)$.
 - (b) À l'aide de la loi de Y , déterminer si Y possède une espérance, une variance. Les calculer (sous réserve d'existence).

Exercice 11

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

(b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).

(c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur \mathbb{R} .

On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.

2. (a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité. On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g , et dont la fonction de répartition est notée G .

(b) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que pour tout réel x ,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(d) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.

(a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z .

(b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .

(c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Exercice 12

Soit $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , telles que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-3, 1])$, et $V \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 3])$. On considère également une variable aléatoire Z , indépendante de U et V , de loi :

$$P(Z = 1) = p \quad \text{et} \quad P(Z = -1) = 1 - p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si } Z(\omega) = -1 \end{cases}.$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V .

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x .

2. (a) Établir, grâce au système complet d'événements $([Z = 1], [Z = -1])$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

(b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3 \quad ; \quad -3 \leq x \leq -1 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad x > 3.$$

(c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X .

(d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

(a) Vérifier que l'on a : $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$.

(b) En déduire que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.

(c) En déduire que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

Exercice 13

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.

On pose $Z = XY$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z .

2. Déterminer $P(Z = 0)$.

3. La variable aléatoire Z est-elle discrète ? à densité ?

Exercice 14

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2).$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle. On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x]).$$

(b) En déduire que Y suit la même loi que X .

2. (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.

(b) En déduire que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3. (a) Rappeler la valeur de $E(X^2)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$.

(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$.

(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E(X^4) = 3$.

4. (a) Vérifier que $E(X^2 Y^2) = 3$.

(b) Déterminer $\text{Cov}(X^2, Y^2)$.

(c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

Exercice 15

1. Déterminer la loi du maximum de 2 variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Soient X_1, \dots, X_n avec $n \geq 2$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 16

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \end{cases}.$$

(a) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

2. On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et admettant f comme densité.

(a) Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.

(b) Établir l'existence de la variance de X , puis donner sa valeur.

3. Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

4. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On note F_Y sa fonction de répartition.

- (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
- (b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X .
- (c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5. On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $I = \inf(U; V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a :

$$I(\omega) = \inf(U(\omega); V(\omega)).$$

On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , et on rappelle que, pour tout réel x , on a

$$P(I > x) = P((U > x) \cap (V > x)).$$

Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I .

- (a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x .
 - (b) En déduire que I suit la même loi que Y .
6. On considère plus généralement n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , $n \geq 2$, toutes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.
On pose $I_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n .
7. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y

```
U=...
V=...
if U<V :
    ...
else :
    ...
```