Interro 5 le 17/11.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = x - 2y + z.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

Réponses.

1. Soient $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \\ &= x+\lambda x' - 2(y+\lambda y') + z + \lambda z' \\ &= x - 2y + z + \lambda x' - 2\lambda y' + \lambda z' \\ &= f((x,y,z)) + \lambda(x' - 2y' + z') \\ &= f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z')). \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f((x,y,z)) + \lambda f((x',y',z'))$$

   donc f est linéaire.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f((x,y,z)) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \Leftrightarrow x = 2y - z.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} \ker(f) = \{(2y+z, y, -z)\ ;\ y,z \in \mathbb{R}\} &= \left\{ y(2,1,0) + z(1,0,-1)\ ;\ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,1,0),(1,0,-1)). \end{aligned}$$

   La famille $((2,1,0),(1,0,-1))$ est donc génératrice de $\ker(f)$ et comme elle est constituée de deux vecteurs non-colinéaires, c'est une famille libre. Ainsi, $((2,1,0),(1,0,-1))$ est une base de $\ker(f)$.
   Comme $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$, f n'est pas injective.
3. $\mathrm{Im}(f) = \left\{ x - 2y + z\ ;\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathbb{R}$. Ainsi f est surjective.

Interro 5 le 17/11.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f((x,y)) = (4x - 6y, 2x - 3y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de son noyau. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

Réponses.

1. Soient $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f((x,y)+\lambda(x',y')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y')) \\ &= (4(x+\lambda x') - 6(y+\lambda y'), 2(x+\lambda x') - 3(y+\lambda y')) \\ &= (4x - 6y, 2x - 3y) + (4\lambda x' - 6\lambda y', 2\lambda x' - 3\lambda y') \\ &= f((x,y)) + \lambda(4x' - 6y', 2x' - 3y') \\ &= f((x,y)) + \lambda f((x',y')). \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f((x,y)+\lambda(x',y')) = f((x,y)) + \lambda f((x',y'))$$

   donc f est linéaire.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in \ker(f) \Leftrightarrow f((x,y)) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} \ker(f) = \left\{ (\frac{3}{2}x, x)\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ x(\frac{3}{2}, 1)\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}((\frac{3}{2}, 1)). \end{aligned}$$

   La famille $\left((\frac{3}{2},1)\right)$ est donc génératrice de $\ker(f)$ et comme elle est constituée d'un vecteur non nul, c'est une famille libre. Ainsi, $\left((\frac{3}{2},1)\right)$ est une base de $\ker(f)$.
   Comme $\ker(f) \neq \{(0,0)\}$, f n'est pas injective.
3.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \left\{ (4x - 6y, 2x - 3y);\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x(4,2) + y(-6,-3)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}((4,2)) \end{aligned}$$

   car $(4,2)$ et $(-6,-3)$ sont colinéaires. En particulier $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$ donc f n'est pas surjective.