TD 3-Espaces vectoriels

Exercice 1.

1. **Ce n'est pas un espace vectoriel** : la multiplication par un nombre réel n'est pas une loi de composition externe sur E car $(1,0) \in E$ mais $(-1) \cdot (1,0) \notin E$.
2. **C'est un espace vectoriel** : on va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $E \subset \mathbb{R}^4$.
   - E est non vide car $(0,0,0,0) \in E$.
   - Soient (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que

   $$(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) \in E.$$

   On a :

   $$(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2, t_1 + \lambda t_2).$$

   Or, puisque (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) appartiennent à E :

   $$\begin{aligned} 2(x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2) - (t_1 + \lambda t_2) &= \underbrace{2x_1 + y_1 - t_1}_{=0 \text{ car } (x_1,y_1,z_1,t_1) \in E} + \lambda(\underbrace{2x_2 + y_2 - t_2}_{=0 \text{ car } (x_2,y_2,z_2,t_2) \in E}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   et

   $$y_1 + \lambda y_2 = t_1 + \lambda t_2.$$

   Ainsi :

   $$(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) \in E.$$

   On a donc montré que

   $$\forall ((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in E^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2) \in E.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En particulier, c'est un espace vectoriel.
3. **Ce n'est pas un espace vectoriel** : l'addition des polynômes n'est pas une loi de composition interne pour E : en effet $X \in E$ et $X + 1 \in E$ mais $X + (X + 1) \notin E$.
4. **C'est un espace vectoriel** : on va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels. Notons E l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergentes.
   - On a bien $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - E est non vide car la suite nulle converge.
   - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, par opérations sur les limites, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi :

   $$\forall ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in E^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En particulier, c'est un espace vectoriel.
5. **Ce n'est pas un espace vectoriel** : l'addition des suites n'est ici pas une loi de composition interne pour E : en effet la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, la suite $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi mais $(n)_{n\in\mathbb{N}} + (-n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diverge pas.

Exercice 2. On cherche s'il existe des réels a, b et c tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+4)^2 = a(n+2)^2 + b(n+1)^2 + c(n-1).$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** : supposons qu'il existe des réels a, b et c tels que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \ (n+4)^2 = a(n+2)^2 + b(n+1)^2 + c(n-1).$$

  Alors, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ on obtient :

  $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4a & + & b & - & c & = & 16 \\ 9a & + & 4b & & & = & 25 \\ 16a & + & 9b & + & c & = & 36. \end{array} \right.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4a & + & b & - & c & = & 16 \\ 9a & + & 4b & & & = & 25 \\ 16a & + & 9b & + & c & = & 36 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4a & + & b & - & c & = & 16 \\ 9a & + & 4b & & & = & 25 \\ 20a & + & 10b & & & = & 52 \end{array}\right. \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4a & + & b & - & c & = & 16 \\ 9a & + & 4b & & & = & 25 \\ 2a & + & 2b & & & = & 2 \end{array}\right. . \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4a & + & 1-a & - & c & = & 16 \\ 9a & + & 4(1-a) & & & = & 25 \\ & & & & b & = & 1-a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{21}{5} \\ b & = & -\frac{16}{5} \\ c & = & -\frac{12}{5} \end{array}\right.$$

- **Synthèse** : réciproquement, soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{21}{5}(n+2)^2 - \frac{16}{5}(n+1)^2 - \frac{12}{5}(n-1) &= \frac{21}{5}(n^2+4n+4) - \frac{16}{5}(n^2+2n+1) - \frac{12}{5}(n-1) \\ &= n^2 + 8n + 16 \\ &= (n+4)^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{21}{5}v_n - \frac{16}{5}w_n - \frac{12}{5}x_n.$$

La suite u est donc combinaison linéaire des suites v, w et x.

Exercice 3.

1. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset E$.
   - F est non vide car la suite nulle converge vers 0.
   - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$
   Donc, par opérations sur les limites, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi :
   $$\forall ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset E$.
   - F est non vide car la fonction nulle est continue en 1.
   - Soient f et g deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors f et g sont continues en 1. Donc, par opérations sur les fonctions continues, la fonction $f + \lambda g$ est continue en 1. Ainsi :
   $$\forall (f,g) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ f + \lambda g \in F.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de E.
3. On va montrer que F est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
   - On a bien $F \subset E$.
   - F est non vide car la matrice nulle est symétrique.
   - Soient A et B deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $${}^tA = A \quad \text{et} \quad {}^tB = B.$$
   Donc, par linéarité de la tranposition :
   $${}^t(A + \lambda B) = {}^t A + \lambda {}^tB = A + \lambda B.$$
   Ainsi :
   $$\forall (A,B) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ A + \lambda B \in F.$$

   D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4. On va montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E grâce à la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

- On a bien $F \cap G \subset E$.
- Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.
  De même, comme G est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in G$.
  Ainsi $0_E \in F \cap G$. En particulier $F \cap G$ est non vide.
- Soient x et y deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Comme $x \in F$ et $y \in F$ et que F est un sous-espace vectoriel de E alors
  $$x + \lambda y \in F.$$

De même, comme $x \in G$ et $y \in G$ et que G est un sous-espace vectoriel de E alors

$$x + \lambda y \in G.$$

Donc : $x + \lambda y \in F \cap G$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in (F \cap G)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x + \lambda y \in F \cap G.$$

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5.

1. L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(X^3, X^2, X, 1)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de 1, X, X^2, X^3 :

$$\mathrm{Vect}(X^3, X^2, X, 1) = \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0\ ;\ (a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}_3[X].$$

2. D'après les propriétés sur les sous-espaces engendrés :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(X+1, X+2, X+3) &= \mathrm{Vect}(X+1, X+2-{\color{red}(X+1)}, X+3)\\ &= \mathrm{Vect}(X+1, 1, X+3)\\ &= \mathrm{Vect}(X+1-{\color{red}1}, 1, X+3)\\ &= \mathrm{Vect}(X, 1, X+3)\\ &= \mathrm{Vect}(X, 1) \text{ car } X+3 \text{ est combinaison linéaire de } X \text{ et } 1\\ &= \mathbb{R}_1[X].\end{aligned}$$

3. Comme $(2, -4) = -2(-1, 2)$ alors :

$$\mathrm{Vect}((-1,2),(2,-4)) = \mathrm{Vect}((-1,2)) = \{(-a, 2a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\}.$$

Il s'agit de la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = -2x$.

4. On a

$$\mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \{x(1,0) + y(0,1)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y)\ ;\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 6.

- **Méthode 1** : on procède par double inclusion.
  - Montrons que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$ c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont combinaisons linéaires de $\vec{s}$ et de $\vec{t}$.
    On voit facilement que

$$\vec{u} = \vec{s} + \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \vec{s} + 2\vec{t}.$$

    Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}).$$

  - De même, montrons que $\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\vec{s}$ et $\vec{t}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ c'est-à-dire que $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
    On voit facilement que

$$\vec{s} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{t} = \vec{v} - \vec{u}.$$

    Ainsi $\vec{s}$ et $\vec{t}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t}) \subset \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}).$$

  Ainsi : $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})$.
- **Méthode 2** :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) &= \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u})\\ &= \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{t})\\ &= \mathrm{Vect}(\vec{u} - \vec{t}, \vec{t})\\ &= \mathrm{Vect}(\vec{s}, \vec{t})\end{aligned}$$

Exercice 7.

Dans chaque cas, on va écrire F sous la forme $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ avec $u_i \in E$. En particulier, cela montrera que F est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $(u_1, \ldots, u_n)$.

1. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.
   (a) On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & 0\\ x & + & y & + & z & = & 0\end{array}\right.$$

   (b) Ici le système est déjà sous forme triangulaire.
   (c) On exprime les inconnues principales en fonctions des autres.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0\\ & & 2y & - & z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y-z\\ 2y & = & z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y\\ z & = & 2y\end{array}\right.$$

   (d) Finalement, $(x,y,z) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3y\\ z & = & 2y\end{array}\right.$. Donc

$$F = \left\{(-3y, y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(-3,1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((-3,1,2)).$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $((-3,1,2))$ est une famille génératrice de F.

2. L'ensemble F est décrit par une équation.

   On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.

   Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff a = 2c$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} 2c & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F.

3. L'ensemble F est donné sous forme paramétrique.

$$\begin{aligned} F &= \{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(X+2X^3) + bX^2 + c(X - X^2),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(X + 2X^3, X^2, X - X^2) \end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(X+2X^3, X^2, X - X^2)$ est une famille génératrice de F.

4. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.

   On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.

   Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors

$$P \in F \iff P(1) = P(2) \iff a + b + c = 4a + 2b + c \iff b = -3a.$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} F &= \left\{ aX^2 - 3aX + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a(X^2 - 3X) + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(X^2 - 3X, 1). \end{aligned}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(X^2 - 3X, 1)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 8. Il s'agit de montrer que

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z-t = 0 \quad \text{et} \quad x+y+z = 0\} = \mathrm{Vect}(2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1)).$$

On va commencer par déterminer une famille génératrice de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z-t = 0 \quad \text{et} \quad x+y+z = 0\}.$$

L'ensemble F est décrit par un système d'équations.

1. On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.

   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$(x,y,z,t) \in F \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Ici le système est déjà sous forme triangulaire.
3. On exprime les inconnues principales en fonctions des autres.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & 2x+y+2z \\ x & = & -y-z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & -y \\ x & = & -y-z \end{array} \right.$$

4. Finalement, $(x,y,z,t) \in F \iff \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & -y \\ x & = & -y-z \end{array} \right.$. Donc

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (-y-z, y, z, -y) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y(-1,1,0,-1) + z(-1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,0,-1),(-1,0,1,0)). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}((-1,1,0,-1),(-1,0,1,0)) &= \mathrm{Vect}((-1,1,0,-1)+(-1,0,1,0),(-1,0,1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((-2,1,1,-1),(-1,0,1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(-1,0,1,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(-2,0,2,0)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(-2,0,2,0)+(2,-1,-1,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(0,-1,1,1)) \\ &= \mathrm{Vect}(2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1)). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y+2z-t = 0 \quad \text{et} \quad x+y+z = 0\} = \mathrm{Vect}(2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1)).$$

Exercice 9.

1. Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de F.

   (a) On écrit la condition pour qu'un vecteur appartienne à F sous forme d'un système (non-homogène).
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(-1,2,1) \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (S)\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ \lambda & + & 2\mu & = & y \\ \lambda & + & \mu & = & z \end{array}\right.\end{aligned}$$

   Ainsi

$$(x,y,z) \in F \iff (S) \text{ possède au moins une solution.}$$

   (b) On met le système sous forme triangulaire. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ \lambda & + & 2\mu & = & y \\ \lambda & + & \mu & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & - & \mu & = & x \\ & & 3\lambda & = & y+2x \\ & & 2\lambda & = & x+z \end{array}\right.$$

   (c) Ainsi, (S) possède des solutions si et seulement si $\dfrac{y+2x}{3} = \dfrac{x+z}{2}$. Donc

$$(x,y,z) \in F \iff \frac{y+2x}{3} = \frac{x+z}{2} \iff x+2y-3z = 0.$$

   Finalement,

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z = 0\}.$$

2. Déterminons un système d'équations caractérisant les éléments de F.

   (a) On écrit la condition pour qu'un vecteur appartienne à F sous forme d'un système (non-homogène).
   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff \exists(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) = \lambda(2,1,-3) + \mu(1,1,-2) + \gamma(1,0,0) \\ &\iff \exists(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad (S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -3\lambda & - & 2\mu & & & = & z \end{array}\right.\end{aligned}$$

   Ainsi

$$(x,y,z) \in F \iff (S) \text{ possède au moins une solution.}$$

   (b) On met le système sous forme triangulaire. Soit $(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -3\lambda & - & 2\mu & & & = & z \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 2\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & x \\ \lambda & + & \mu & & & = & y \\ -\lambda & & & & & = & z+2y \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccc} \gamma & = & x+y+z \\ \mu & = & 3y+z \\ \lambda & = & -z-2y \end{array}\right. .\end{aligned}$$

   (c) Ainsi, (S) possède des solutions pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Donc

$$F = \mathbb{R}^3.$$