ECE2 – Concours blanc 1

MATHÉMATIQUES 1-TYPE ECRICOME

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I_3 la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ est un polynôme et M une matrice carrée d'ordre 3, on note P(M) la matrice définie par :

$$P(M) = a_0I_3 + a_1M + a_2M^2.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I_3)^2$ et $(A - I_3)^3$.
2. On pose : $E_1 = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et trouver une base de E_1.
3. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ.
6. On note P la partie régulière du développement limité obtenu à la question précédente. Pour tout $x \in]-1, 1[$, développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I_3$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
9. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$. On explicitera la matrice P.

10. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

11. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

12. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

EXERCICE 2

Partie A : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad$ et $\quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

(a) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.

(c) Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.

(d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(e) Écrire une fonction d'en-tête « `function y=u(n)` » qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. (a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

(b) Montrer que pour tout réel x positif : $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

(e) Pour $n \geqslant 2$, simplifier la somme partielle : $\quad \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers γ.

3. (a) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer $\lim_{n \to \infty} u_n$.

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.
Montrer ensuite que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leqslant \frac{1}{n}$.

(c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction u de la question 1.(e) a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un reel strictement positif : ')
n=floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

Partie B : Étude d'une série

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\quad a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

4. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

5. (a) Justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

   (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

   (c) En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

6. (a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

   où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie A.

   (b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

7. (a) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   (b) Retrouver alors le résultat de la question 3.(b).

EXERCICE 3

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

Partie A : Une première expérience aléatoire

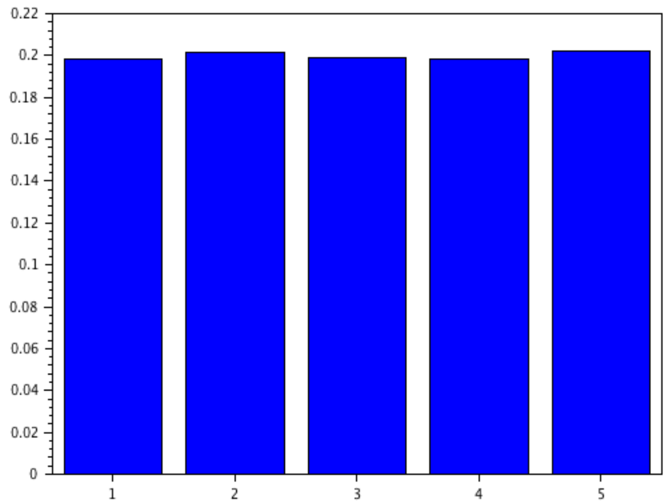
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
   Recopier et compléter le programme `Scilab` suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = input(' Donner un entier naturel non nul') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i = 1 ;
        M = N ;
        while ________________
                i = i + 1 ;
                M = ________________ ;
        end
        S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie B : Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$:
$$P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$
7. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1,N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).
8. Montrer que :
$$\forall j \in [\![1,N]\!], \quad P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1,N-1]\!] \\[2mm] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
9. Calculer l'espérance de Y.

Partie C : Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,. . ., alors $T=4$ et $U=1$.

10. Préciser les valeurs prises par T.
11. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$P(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

12. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
13. (a) Calculer $P([U=1] \cap [T=2])$.
    (b) Calculer $P([U=1] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
14. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.
    (a) Calculer $P([U=j] \cap [T=j+1])$.
    (b) Que vaut $P([U=j] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?
15. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
16. Calculer $P(U=1)$ puis déterminer la loi de U.

• FIN •