

Chapitre 6 : Correction des tests

Test 1 ([Voir solution.](#))

1. Montrer que : $\forall n > 1, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \geq 1}$ est majorée.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Test 2 ([Voir solution.](#))

Montrer, à l'aide d'un télescopage, que la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Test 3 ([Voir solution.](#))

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$.
3. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ n'est pas majorée et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Test 4 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ et, le cas échéant, calculer sa somme.

Test 5 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ et, le cas échéant, calculer sa somme.

Test 6 ([Voir solution.](#))

On considère la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$.

1. Montrer que la série est convergente et calculer sa somme.
2. Avec une boucle for, écrire une fonction Scilab qui prend un argument un entier naturel n et qui renvoie la somme partielle d'indice n de la série.
3. Avec une boucle while, écrire une fonction Scilab qui prend un argument un réel $e > 0$ et qui renvoie l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à e près.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $U = [u_0, \dots, u_n]$ que renvoie $\text{sum}(U)$? et $\text{cumsum}(U)$?

Test 7 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$.
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - 1}}$.

Test 8 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (n^{27} + 2n^3)3^{-n}$.

Test 9 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.
2. $\sum \frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n}$.
3. $\sum \frac{n^2 - 4}{e^n - n - 2 \ln n}$.

Test 10 ([Voir solution.](#))

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n (n^5 + 2n^3 + 1)}{e^n + 2}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Comme $n(n-1) \leq n^2$, on a :

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi : $\forall n > 1, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2. Soit $n \geq 1$. Avec la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \quad \text{d'après la question précédente,} \\ &\leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{par télescope,} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Cela montre que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ est majorée.

3. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ est croissante. De plus, elle est majorée donc elle converge. Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Correction du test 2 ([Retour à l'énoncé.](#))

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1) - \ln n.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge.

Correction du test 3 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $k \leq 2n$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} (2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $S_{2n} \geq \frac{n}{2}$ » et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- ★ Initialisation : $S_{2^1} = S_2 \geq 0$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
- ★ Hérédité : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$S_{2^{n+1}} \geq S_{2^n} + \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- ★ Conclusion : d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2^n} \geq \frac{n}{2}$$

3. D'après la question précédente $(S_n)_{n \geq 1}$ n'est pas majorée.

Montrons qu'elle est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n \geq 0$.

La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est donc croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle diverge donc vers $+\infty$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

Correction du test 4 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) + k}{2^k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées seconde et première de raison $\frac{1}{2}$, donc toutes deux convergentes. Ainsi $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{4(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})^2} = 6.$$

Correction du test 5 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k+7}{2^k k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k (k-1)!} + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!} + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} + 7 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ converge vers $e^{\frac{1}{2}}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+7}{2^n n!} = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} + 7 e^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

Correction du test 6 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. En procédant comme au test 4, on montre que la série est convergente et que sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

2. Avec une boucle for

```
1 function s =somme(n)
2     s=0
3     for i=0:n
4         s=s+i^2/3^i
5     endfunction
```

3. Avec une boucle while

```
1 function n =indice(e)
2     n=0
3     s=0
4     while abs(s-3/2)>e
5         s=s+n^2/3^n
6         n=n+1
7     endfunction
```

4. La commande $\text{cum}(U)$ renvoie la valeur de $u_0 + \dots + u_n$ (la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$).
La commande $\text{cumsum}(U)$ renvoie la liste des sommes partielles d'indices 0 à n de la série $\sum u_n$.

Correction du test 7 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. Soit $n \geq 1$. Comme $n^2 + \sqrt{n} \geq n^2$ alors, par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* on a

$$\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par suite;

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ est convergente.

2. De même

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - 1}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}.$$

Or, les séries $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - 1}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann divergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3 - 1}}$ est divergente.

Correction du test 8 ([Retour à l'énoncé.](#))

Par croissance comparée et opération sur les limites on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot (n^{27} + 2n^3)3^{-n} = 0.$$

Donc : $(n^{27} + 2n^3)3^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

De plus, les séries $\sum_{n \geq 0} (n^{27} + 2n^3)3^{-n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} (n^{27} + 2n^3)3^{-n}$ est convergente.

Correction du test 9 ([Retour à l'énoncé.](#))

1. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on a par équivalent usuel :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Or, les séries $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ est convergente.

2. Pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n} = \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)}{4^n \left(\left(\frac{2}{4} \right)^n - 1 \right)} = \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n} = 1$ donc $\frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n} \sim \left(\frac{3}{4} \right)^n$.

De plus, la série $\sum \frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n}$ est à termes positifs (pourquoi?). La série $\sum \left(\frac{3}{4} \right)^n$ est aussi à termes positifs et converge (série géométrique de raison $\frac{3}{4}$). Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{2^n - 3^n}{2^n - 4^n}$ est convergente.

3. (a) Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$\frac{n^2 - 4}{e^n - n - 2 \ln n} = \frac{n^2}{e^n} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n}{e^n} - 2 \frac{\ln n}{e^n}}.$$

De plus, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2}$$

donc, par opérations sur les limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n}{e^n} - 2 \frac{\ln n}{e^n}} = 1.$$

Cela montre que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} \sim \frac{n^2}{e^n}$.

(b) De plus, toujours par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{n^2}{e^n} = 0$ donc $\frac{n^2}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Les séries $\sum \frac{n^2}{e^n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente.

Par comparaison, la série $\sum \frac{n^2}{e^n}$ converge.

(c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^n - n - 2\ln n = e^n(1 - ne^{-n} - 2e^{-n}\ln n).$$

On en déduit par croissance comparée que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n - n - 2\ln n = +\infty.$$

En particulier, $e^n - n - 2\ln n$ est positif pour tout n à partir d'un certain rang.

(d) Finalement, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$ converge.

Remarque : on peut remplacer les étapes (a) et (b) par le calcul suivant :

$$n^2 \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \frac{n^4}{e^n} \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n}{e^n} - 2 \frac{\ln n}{e^n}}$$

pour montrer, par croissance comparée, que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puis conclure par le critère de comparaison. Dans les deux cas, il convient de justifier soigneusement que la série est à termes positifs à partir d'un certain rang car ce n'est pas si évident.

Correction du test 10 (Retour à l'énoncé.)

Montrons que la série est absolument convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} = \frac{(-1)^n n^5}{e^n} \frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}} = 1$ donc : $\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \sim \frac{(-1)^n n^5}{e^n}$.

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec la valeur absolue, on obtient donc :

$$\left| \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \right| \sim \frac{n^5}{e^n}$$

puis :

$$n^2 \cdot \left| \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \right| \sim \frac{n^7}{e^n}.$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^7}{e^n} = 0$. Donc :

$$\left| \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les séries $\sum \left| \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \right|$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente.

Par comparaison, la série $\sum \left| \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2} \right|$ converge. Donc $\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$ est absolument convergente.

En particulier elle converge.