Exercice 1

1. On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc

$$(A^2 - 4I_4)(A^2 - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.$$

En développant on obtient :
$$A^4 - 5A^2 + 4I_4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}.$$

Ainsi :
$$A \times \frac{1}{4}(5A - A^3) = I_4.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(5A - A^3)$.
2 pts : 1 pt pour le calcul et 1pt pour l'inverse.

2. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in E_{-2}(A) \Longleftrightarrow AX = -2X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2t & = & -2x \\ z & = & -2y \\ y & = & -2z \\ 2x & = & -2t \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ z & = & 0 \\ y & = & 0. \end{array} \right.$$

Ainsi : $E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En particulier $E_{-2}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $E_{-2}(A)$. Comme cette famille est formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre.

Finalement, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(A)$.

3 pts : 2pts pour exprimer sous forme de Vect et 1pt pour conclure

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in E_{-1}(A) \Longleftrightarrow AX = -X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2t & = & -x \\ z & = & -y \\ y & = & -z \\ 2x & = & -t \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -y \\ t & = & 0 \\ x & = & 0. \end{array} \right.$$

Ainsi : $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

En particulier $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base[1] de $E_{-1}(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2t & = & x \\ z & = & y \\ y & = & z \\ 2x & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & y \\ t & = & 0 \\ x & = & 0. \end{array}\right.$$

Ainsi : $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

En particulier $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2t & = & 2x \\ z & = & 2y \\ y & = & 2z \\ 2x & = & 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0. \end{array}\right.$$

Ainsi : $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

En particulier $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(A)$.

3 pts

3. Notons $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi $\mathscr{F}$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Comme de plus $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4 = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

3pts

4. (a) Notons $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Il suffit de remarquer que $PQ = I_4$. Ainsi P est inversible et $P^{-1} = Q$.

1 pt

1. Comme l'argument est exactement le même qu'à la question précédente on peut se permettre une rédaction plus succincte la seconde fois.

(b) On a $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1 pt

5.
- Comme la matrice nulle commute avec A, C_A est un sous-ensemble non vide de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
- Soit $(M,N) \in C_A^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $M + \lambda N$ commute avec A :

$$\begin{aligned} A(M+\lambda N) &= AM + \lambda AN \\ &= MA + \lambda NA \quad \text{car M et N commutent avec A} \\ &= (M+\lambda N)A. \end{aligned}$$

  Ainsi $M + \lambda N$ commute avec A.
  Donc : $\forall (M,N) \in C_A^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ M + \lambda N \in C_A$.

Donc C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

1.5 pts

6. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$ de sorte que $M = PNP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} M \in C_A \iff AM = MA \iff APNP^{-1} &= PNP^{-1}A \\ \iff P^{-1}APN &= NP^{-1}AP \end{aligned}$$

en multipliant membre à membre à gauche par P^{-1} et à droite par P. Ainsi :

$$M \in C_A \iff P^{-1}APN = NP^{-1}AP \iff DN = ND \iff N \in C_D.$$

1 pt

7. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Alors

$$N \in C_D \iff ND = DN \iff \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c & -2d \\ -e & -f & -g & -h \\ i & j & k & l \\ 2m & 2n & 2o & 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & -b & c & 2d \\ -2e & -f & g & 2h \\ -2i & -j & k & 2l \\ -2m & -n & o & 2p \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2b &=& -b \\ -2c &=& c \\ -2d &=& 2d \\ -e &=& -2e \\ -g &=& g \\ -h &=& 2h \\ i &=& 2i \\ j &=& -j \\ l &=& 2l \\ 2m &=& -2m \\ 2n &=& -n \\ 2o &=& o \end{array} \right.$$

$$\iff b = c = d = e = g = h = i = j = l = m = n = o = 0.$$

Ainsi :

$$C_D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, (a,f,k,p) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

2pts

8. D'après les questions 6 et 7, on a :

$$\mathrm{C_A} = \{\mathrm{PNP}^{-1}; \mathrm{N} \in \mathrm{C_D}\} = \left\{ \mathrm{P}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}, (a,f,k,p) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{-a+p}{2} \\ 0 & f+k & -f+k & 0 \\ 0 & -f+k & f+k & 0 \\ \frac{-a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{f+p}{2} \end{pmatrix}, (a,f,k,p) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Or l'application $\varphi : (a,f,k,p) \mapsto (\frac{a+p}{2}, \frac{-a+p}{2}, f+k, -f+k)$ est une bijection de $\mathbb{R}^4$ donc en posant $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) = \varphi(a,f,k,p)$ on obtient :

$$\mathrm{C_A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & \mathrm{C} & 0 \\ \mathrm{B} & 0 & 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix}, (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

2 pts

9. D'après la question précédente, la famille :

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de $\mathrm{C_A}$.
De plus, soit $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{B}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{C}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{D}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{D} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} & \mathrm{C} & 0 \\ \mathrm{B} & 0 & 0 & \mathrm{A} \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$$
$$\iff \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{D} = 0.$$

Ainsi la famille $\mathscr{B}$ est libre.
La famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de $\mathrm{C_A}$ donc c'est une base de $\mathrm{C_A}$ et $\dim(\mathrm{C_A}) = 4$.
2pts

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. (a) Les fonctions exponentielle et logarithme sont deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$ donc, par combinaison linéaire f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. Pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}.$$

3 pts : 1pt pour justifier deux fois dérivable, 1pt par dérivée.

(b) D'après la question précédente, f'' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ donc la fonction f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
De plus :

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

Ainsi :

x	0	1	$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

2 pts : 1pt pour les variations, 0.5 pour les limites et 0.5 pour $f'(1)$

2. D'après la question précédente, on sait que f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que $f'(1)=0$. Donc f' est strictement négative sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$.
   De plus, pour tout $x>0$:
$$f(x)=e^x\left(1-\frac{e\ln(x)}{e^x}\right).$$
   Donc par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   Par somme, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Enfin, $f(1)=e$.
   Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   3 pts : 1.5 pt pour les variations, 1 pt pour les limites et 0.5 pour $f(1)$.

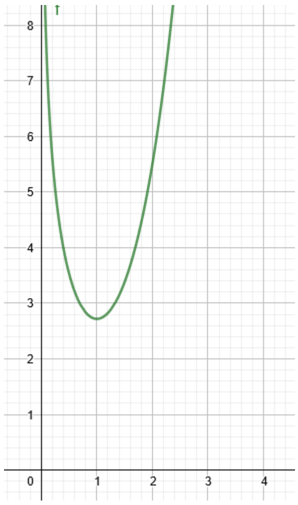
3. 

FIGURE 1 – Courbe représentative de f

   2 pts

4. (a) D'après la question 1.a, u est une somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ donc est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x>0$ on a :
$$u'(x)=f''(x)-1=e^x+\frac{e}{x^2}-1\geqslant\frac{e}{x^2}>0.$$
   Ainsi, la fonction u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
   1.5 pt

   (b) On a, par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$.
   Par somme, on a aussi : $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=-\infty$.
   Ainsi, $u(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.
   La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante.
   En particulier, 0 possède un unique antécédent par u ce qui équivaut à dire que l'équation $f'(x)=x$, d'inconnue $x\in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule. On la note α.
   D'après les encadrements donnés en début d'exercice on a :
$$u(2)=e^2-\frac{e}{2}-2>7{,}3-\frac{2{,}8}{2}-2>0.$$
   Donc :
$$u(1)=-1<u(\alpha)=0<u(2)=e^2-\frac{e}{2}-2,$$

et par croissance stricte de u^{-1} on obtient :

$$1 < \alpha < 2.$$

2.5 pts : l'inégalité $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 0$ doit être justifiée à l'aide des encadrements donnés en début d'exercice!

Partie II : Étude d'une suite, étude d'une série

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « u_n est bien définie et $u_n \geqslant 2$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 2$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et $u_n \geqslant 2$. Ainsi f est bien définie en u_n et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus, d'après le tableau de variations de f on a :
   $$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant e \geqslant 2.$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.$$

   2pts

6. (a) La fonction g est combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $[2, +\infty[$ donc est dérivable sur $[2, +\infty[$. De plus :
   $$\forall x \geqslant 2, \quad g'(x) = f'(x) - 1 = e^x - \frac{e}{x} - 1.$$
   Soit $x \geqslant 2$. D'après les encadrements donnés, on a :
   $$e^x - \frac{e}{x} - 1 \geqslant e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geqslant 7{,}3 - \frac{2{,}8}{2} - 1 > 0.$$
   Ainsi g' est strictement positive sur $[2, +\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. De plus :
   $$g(2) = e^2 - e\ln(2) - 2 > 7{,}3 - 2{,}8 \times 0.7 - 2 > 0.$$
   Par conséquent, g est strictement positive sur $[2, +\infty[$.
   2.5 pts

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5, $u_n \in [2, +\infty[$ donc :
   $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0.$$
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
   1 pt

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone :
   — soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
   — soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Alors d'après la question 5, $\ell \geqslant 2$. Comme f est continue sur $[2, +\infty[$ alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.
   En particulier, $g(\ell) = 0$. Or d'après la question 6.(a), g est strictement positive sur $[2, +\infty[$ ce qui est une contradiction.
   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   3 pts

8.
```
A = input('Entrer un nombre reel')
N = 0
u = 2
while u < A
    u = exp(u)-%e*log(u)
    N = N+1
end
disp(N)
```

2 pts

9. (a) La fonction exponentielle étant convexe, sa courbe représentative est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 2. Ainsi, pour tout $x \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} e^x \geqslant e^2(x-2)+e^2 &= 3x + x(e^2-3) - e^2 \\ &\geqslant 3x + 4,3x - 7,4 \\ &\geqslant 3x + 8,6 - 7,4 \\ &\geqslant 3x. \end{aligned}$$

La fonction logarithme étant concave, sa courbe représentative est située en dessous de sa tangente au point d'abscisse 2. Ainsi, pour tout $x \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \ln(x) &\leqslant \frac{1}{2}(x-2) + \ln(2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}x + \ln(2) - 0,5 \\ &\leqslant \frac{1}{2}x - 0,2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in [2; +\infty[, \qquad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}.$$

2 pts

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geqslant 2$, d'après les inégalités de la question précédente, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \frac{e}{2}u_n = \frac{6-e}{2}u_n.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}u_n.$

1 pt

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{6-e}\frac{1}{u_n}.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-e}\right)^n \frac{1}{u_0}.$$

De plus, les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{6-e}\right)^n \frac{1}{u_0}$ sont à termes positifs et la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{6-e}\right)^n$ est convergente.
D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge aussi.

3 pts

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. (a) Soit $a > 0$. La fonction f est continue sur $[a, 1]$ donc l'intégrale est bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_a^1 f(x)dx &= \int_a^1 (e^x - e\ln(x))dx \\ &= [e^x]_a^1 - e\left([x\ln(x)]_a^1 - \int_a^1 x \times \frac{1}{x}dx\right) \quad \text{par IPP} \\ &= e - e^a + ea\ln(a) + e - ea \\ &= (2-a)e - e^a + ea\ln(a). \end{aligned}$$

2 pts

(b) Par croissance comparée : $\lim_{a\to 0^+} a\ln(a)) = 0$.

D'après la question précédente, on a donc : $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 f(x)dx = 2e-1$.

1pt

11. Soit $a>0$. Le calcul de la question 10.(a) donne :

$$\int_1^a f(x)dx = e^a-(2-a)e-ea\ln(a) = e^a\left(1-\frac{(2-a)e}{e^a}-\frac{ea\ln(a)}{e^a}\right).$$

Donc par croissance comparée :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a f(x)dx = +\infty.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge donc.

Exercice 3

1. Par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n n^2 e^{-3n} = 0$. Donc par équivalent usuel on a :

$$\ln\left(1+(-1)^n n^2 e^{-3n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n^2 e^{-3n}.$$

Par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue, on obtient :

$$\left|\ln\left(1+(-1)^n n^2 e^{-3n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|(-1)^n n^2 e^{-3n}\right| = n^2 e^{-3n}.$$

De plus, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\left|\ln\left(1+(-1)^n n^2 e^{-3n}\right)\right|$ et $\sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-3n}$ sont à termes positifs. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, elles sont donc de même nature.
Étudions la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-3n}$. Par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\times n^2 e^{-3n} = 0$$

donc :

$$n^2 e^{-3n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De plus les séries $\sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-3n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-3n}$ converge donc aussi.
Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\ln\left(1+(-1)^n n^2 e^{-3n}\right)\right|$ est convergente.
Finalement, la série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+(-1)^n n^2 e^{-3n}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

4pts

2. On a :

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\ln(n)}.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{3}}\times\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)} = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right).$$

De plus les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ sont à termes positifs et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^2+2)\ln(n)}$ converge donc aussi.

3 pts

Exercice 4

Partie I : Étude du cas $n = 3$

1. (a) L'évènement $[X_3 = 4]$ est réalisé si et seulement si les nombres des trois premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et 3 et le quatrième nombre tiré est supérieur ou égal au troisième.

La seule possibilité pour obtenir une suite strictement décroissante de trois nombres entre 1 et 3 est d'avoir $[N_1 = 3]$, $[N_2 = 2]$ et $[N_3 = 1]$. Le quatrième tirage sera alors nécessairement un nombre supérieur ou égal au troisième. Ainsi :

$$[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1].$$

D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 4) &= P(N_1 = 3)P_{[N_1=3]}(N_2 = 2)P_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

4 pts

(b) On a supposé qu'il y a 3 boules dans l'urne : la famille $([N_1 = 1], [N_1 = 2], [N_1 = 3])$ est donc un système complet d'événements formée d'événements de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(X_3 = 2) = P_{[N_1=1]}(X_3 = 2)P(N_1 = 1) + P_{[N_1=2]}(X_3 = 2)P(N_1 = 2) + P_{[N_1=3]}(X_3 = 2)P(N_1 = 3).$$

Or :

- sachant qu'on a tiré la boule 1 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé pour n'importe quel deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=1]}(X_3 = 2) = 1;$$
- sachant qu'on a tiré la boule 2 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé ssi on obtient la boule 2 ou 3 deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=2]}(X_3 = 2) = \frac{2}{3};$$
- sachant qu'on a tiré la boule 3 au premier tirage, $[X_3 = 2]$ est réalisé ssi on obtient la boule 3 deuxième tirage donc
$$P_{[N_1=3]}(X_3 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Finalement, comme N_1 suit une loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$ on obtient :

$$P(X_3 = 2) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Comme $X_3(\Omega) = [\![2, 4]\!]$ alors :

$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = \frac{8}{27}.$$

4 pts : 3 pts pour $P(X_3 = 2)$ **et 1 pt pour** $P(X_3 = 3)$**.**

2. La variable X_3 est à support fini donc possède bien une espérance :

$$E(X_3) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3) + 4P(X_3 = 4) = \frac{64}{27}.$$

1 pt

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Soit k de $[\![1; n + 1]\!]$. La variable N_k suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
1.5 pts

4. L'évènement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si les nombres des n premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et n et le $(n+1)$-ème nombre tiré est supérieur ou égal au $n$ème.
   La seule possibilité pour obtenir telle une suite strictement décroissante de n nombres entre 1 et n est d'avoir $[N_1 = n]$, $[N_2 = n-1]$, …, $[N_n = 1]$. Le $(n+1)$-ème tirage sera alors nécessairement un nombre supérieur ou égal au n-ème. Ainsi :
   $$[X_n = n+1] = \bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n-i+1].$$
   Ainsi, les tirages étant indépendants (tirages avec remise) :
   $$P(X_n = n+1) P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n-i+1]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(N_i = n-i+1) = \frac{1}{n^n}.$$
   2pts
5. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Sachant que $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est-à-dire sachant que la boule i a été tirée en premier, $[X_n = 2]$ est réalisé ssi on tire l'une des boules i, $i+1$,…, n. Ainsi :
   $$P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}.$$
   2 pts
6. Comme $N_1(\Omega) = [\![1,n]\!]$, la famille $([N_1 = i])_{i\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :
   $$\begin{aligned} P(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} P_{[N_1=i]}(X_n = 2) P(N_1 = i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j \quad \text{en posant } j = n-i+1 \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$
   2 pts
7. Soit $k \in [\![2;n]\!]$. L'évènement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si les nombres des k premiers tirages forment une suite strictement décroissante de nombres entre 1 et n.
   Donc : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.
   Les issues réalisant l'événement $(N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$ correspondent aux suites strictement décroissantes de k éléments parmi $[\![1,n]\!]$. Une telle suite est entièrement déterminée par le choix de k éléments parmi $[\![1,n]\!]$: il y en a donc $\binom{n}{k}$.
   Comme les variables $N_1,\ldots,N_k$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, chacune de ces issues se réalise avec probabilité $\frac{1}{n^k}$.
   Ainsi : $P(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.
   On a : $P(X_n > 0) = 1 = P(X_n > 1)$ donc la formule est vraie aussi pour $k = 0$ et $k = 1$.
   3 pts
8. Soit $k \in [\![2;n+1]\!]$, $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$.
9. Comme X_n est à support fini, elle possède bien une espérance. D'après la question précédente on a :
   $$\begin{aligned} E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} iP(X_n > i) + \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + P(X_n > 1) - (n+1)P(X_n > n+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + 1 - 0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(X_n > i). \end{aligned}$$

Avec la question 7, on obtient alors :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

10. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après les questions 7 et 8, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n > k-1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}_n > k) &= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n^{k-1}}\left(\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} - \frac{n!}{nk!(n-k)!}\right) \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}} \times \frac{nk-n+k-1}{n(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{n!}{n^{k-1}} \times \frac{(n+1)(k-1)}{n(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1)! \times (k-1)}{n^k (n+1-k)!k!} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in [\![2; n+1]\!], \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \frac{k-1}{n^k}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \frac{k-1}{n^k k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n+1-i) \\
&= \frac{k-1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{n+1-i}{n}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-i+1}{n} = 1$. Donc par produit on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

12. La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ est la différence des séries $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{(k-1)!}$ et $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k!}$ toutes les deux convergentes. Donc elle converge et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

13. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} k\mathrm{P}(\mathrm{Z} = k)$ converge absolument. Cette série étant à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est convergente.
Or $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathrm{P}(\mathrm{Z}=k) = \sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{k(k-1)}{k!} = \sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{(k-2)!}$ est une série exponentielle qui converge vers e. Ainsi Z possède une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = e$.
D'après la question 9, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.
Par continuité de la fonction exponentielle on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = e = \mathrm{E}(\mathrm{Z}).$$