

## TD6-Séries numériques

### Exercice 1.

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \times \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Ainsi, on obtient en effectuant le changement de variable  $i = k + 1$  :

$$\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!} - 1 \right).$$

Or, la suite  $\left( \sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des sommes partielles d'une série exponentielle donc elle converge vers  $e^2$ . Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$  converge vers  $\frac{1}{2} (e^2 - 1)$ .

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$  converge et sa somme vaut  $\frac{1}{2} (e^2 - 1)$ .

5. Soit  $n \geq 1$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$\frac{k2^k}{k!} = 2 \times \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n \frac{k2^k}{k!} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{i!}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n2^n}{n!}$  converge vers  $2e^2$ .

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n2^n}{n!}$  converge et sa somme vaut  $2e^2$ .

6. Pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$\frac{n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{8} \times \frac{n}{4^{n-1}}.$$

La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$  est donc, à un facteur  $\frac{1}{8}$  près, la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison  $\frac{1}{4}$ . Par conséquent, la série converge et sa somme vaut  $\frac{2}{9}$ .

### Exercice 2. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. La famille  $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$  est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée) de  $\mathbb{R}_3[X]$ . C'est donc une famille libre de  $\mathbb{R}_3[X]$ . Comme de plus elle est de cardinal  $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Comme  $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ , il existe un unique 4-uplet  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$X^3 + 2X^2 - 4X + 1 = a + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2).$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 0 on trouve :

$$1 = a.$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 1 on trouve :

$$0 = a + b.$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 2 on trouve :

$$9 = a + 2b + 2c.$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en  $-1$  on trouve :

$$6 = a - b + 2c - 6d.$$

Finalement,  $a = 1, b = -1, c = 5$  et  $d = 1$ . Les coordonnées de  $X^3 + 2X^2 - 4X + 1$  dans la base de la question précédente sont donc  $(1, -1, 5, 1)$ .

3. On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} + \frac{5n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}.$$

Or,

- la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$  converge (série exponentielle sans son premier terme) et sa somme vaut  $e - 1$ ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$  donc, en faisant un changement d'indice,  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$

- pour tout  $n \geq 2$ ,  $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$  (et le premier terme est nul) donc, en faisant un changement d'indice,  $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{n!}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$

- pour tout  $n \geq 3$ ,  $\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$  (et les deux premiers termes sont nuls) donc, en faisant un changement d'indice,  $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e.$$

Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  est une somme de séries convergentes donc est convergente et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = e - 1 - e + 5e + e = 6e - 1.$$

**Exercice 3.** Soit  $n \geq 2$ . On a :

$$\ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) = \ln \left( \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n-1) - \ln n + \ln(n+1) - \ln(n).$$

Donc par télescopage :

$$\sum_{k=2}^n \ln \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \ln(2).$$

Ainsi, la série converge et sa somme vaut  $-\ln(2)$ .

**Exercice 4.**

- Soit  $n \geq 2$ . Comme  $n - \sqrt{n} \leq n$  et que la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  alors on a :

$$\frac{1}{n - \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Ainsi :  $\forall n \geq 2, \frac{1}{n - \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ .

Les séries  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est une série de Riemann divergente. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$  diverge aussi.

- Soit  $n \geq 1$ . Comme  $n! \geq n$  alors  $\sqrt{n}n! \geq n^{\frac{3}{2}}$  puis, la fonction inverse étant décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{n}n!} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi :  $\forall n \geq 1, \frac{1}{\sqrt{n}n!} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ .

Les séries  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}n!}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}n!}$  converge aussi.

**Exercice 5.**

- Par croissance comparée on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0.$$

Donc  $e^{-\sqrt{n}} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ . Les séries  $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$  converge aussi.

- L'idée ici est de chercher à comparer notre terme général à celui d'une série de Riemann.

Par croissance comparée, il est évident qu'on ne pourra pas trouver de  $a > 1$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} = 0.$$

On va donc plutôt chercher un  $a \leq 1$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^a \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} = +\infty$ . Toujours par croissance comparée, on voit que  $a = 1$  convient. Cela signifie que :

$$\frac{1}{n} =_{n \rightarrow +\infty}^o \left( \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} \right).$$

De plus, les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  et  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente. D'après le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$  est donc aussi divergente.

#### Exercice 6.

1. Par équivalent usuel, on sait que :

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or les séries  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$  converge aussi.

2. Par équivalent usuel, on sait que :

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi :

$$1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or les séries  $\sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série de Riemann divergente. Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})$  est divergente aussi.

3. Par équivalent usuel, on sait que :

$$e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^2+1}{k^4+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}.$$

Or les séries  $\sum_{k \geq 1} (e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1)$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  sont à termes positifs. D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série  $\sum_{k \geq 1} (e^{\frac{k^2+1}{k^4+1}} - 1)$  est convergente aussi.

#### Exercice 7.

1. Par équivalents usuels :

$$n^3 - n^2 + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad 5n^5 + 3n^4 + 2n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 5n^5$$

donc par quotient

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n} \equiv \frac{n^3}{5n^5} = \frac{1}{5n^2}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{5n^2}$  sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{5n^2}$  est une série de Riemann convergente donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{5n^5 + 3n^4 + 2n}$  converge aussi.

2. La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$  est à termes quelconques. Étudions l'absolue convergence.

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2} \geq 0$  donc

$$\left| (-1)^n \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2} \right| = \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}.$$

Or, par équivalent usuel,  $n^3 - n^2 + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3$ . De plus, pour tout  $n \geq 1$  on a

$$e^n + 3n^4 + 2n^2 = e^n \left( 1 + 3\frac{n^4}{e^n} + 2\frac{n^2}{e^n} \right)$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3\frac{n^4}{e^n} + 2\frac{n^2}{e^n} = 1$  car par croissance comparée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$ . Ainsi

$$e^n + 3n^4 + 2n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$$

et par quotient on obtient

$$\frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^3}{e^n}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n}$  sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature.

Étudions la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n}$ . Par croissance comparée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{n^3}{e^n} = 0$  donc  $\frac{n^3}{e^n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  sont à termes positifs et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente donc, d'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs,  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n}$  est convergente.

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3}{e^n}$  étant de même nature,  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$  est convergente aussi.

Finalement, on vient de montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n^3 - n^2 + 1}{e^n + 3n^4 + 2n^2}$  est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

3. Par équivalent usuel

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, par croissance de la fonction logarithme, on a

$$\forall n \geq 1 \quad \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \geq 0.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  sont donc à termes positifs. D'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente donc  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  est divergente aussi.

4. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

par équivalent usuel (car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ ). Les séries  $\sum_{n \geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$  sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$  diverge (voir l'exemple 8 du chapitre 6) donc la série  $\sum_{n \geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)$  diverge aussi.

5. La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  est à termes quelconques. Étudions l'absolue convergence.

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\left| (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \right| = \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  et, par équivalent usuel

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge donc la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  converge aussi.

Ainsi la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  est absolument convergente donc convergente.

6. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}.$$

Or, par équivalent usuel  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  puis par compatibilité avec le quotient

$$n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1$  et par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} = e.$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  diverge grossièrement.

7. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $3^{\ln(n)} = e^{\ln(n) \ln(3)} = n^{\ln(3)}$ . La série est donc une série de Riemann convergente car  $\ln(3) > 1$ .

8. Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$n^{\ln(n)} = e^{\ln(n)^2}.$$

Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = 0$ . En faisant le changement de variable  $X = \ln(n)$ , on trouve

$$n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = e^{2X} \frac{1}{e^{X^2}} = e^{2X - X^2}$$

donc, puisque  $\lim_{X \rightarrow +\infty} 2X - X^2 = -\infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{e^{\ln(n)^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{2X - X^2} = 0.$$

Ainsi,  $\frac{1}{n^{\ln(n)}} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ . Or les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$  est donc convergente.

9. Par croissance comparée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(n)}{n^2} = 0$$

donc  $\frac{\ln(n)}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$ .

Or les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$  est donc convergente.

10. A faire sur feuille pour la rentrée.

11. La série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right)$  est à termes quelconques; on va donc étudier son absolue convergence.

Par équivalent usuel :

$$\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

donc par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue on en déduit l'équivalent suivant :

$$\left| \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \left| \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right) \right|$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  est une série de Riemann convergente donc la série

$\sum_{n \geq 1} \left| \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right) \right|$  converge aussi.

Ainsi la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right)$  est absolument convergente donc convergente.

12. Soit  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} (n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} &= (n+1)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \\ &= (n+1)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - \left( \frac{n+1-1-1}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \\ &= (n+1)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} \right) \end{aligned}$$

Or, par équivalent usuel,

$$\left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4} \times \frac{-2}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}.$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit on obtient

$$(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)^{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{2n}.$$

Or, par équivalent usuel,  $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  puis par compatibilité avec le passage aux puissances

$$(n+1)^{\frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}.$$

Finalement,

$$(n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2n} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \left( (n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} \right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}$  étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}$  est une série de Riemann divergente donc

$\sum_{n \geq 1} \left( (n+1)^{\frac{1}{4}} - (n-1)^{\frac{1}{4}} \right)$  est divergente aussi.

13. A faire sur feuille pour la rentrée.

14. A faire sur feuille pour la rentrée.

15. Soit  $n \geq 1$ . On a

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

Or, par équivalent usuel

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

donc par compatibilité avec le produit

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  puis par équivalent usuel, on en déduit donc que

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par transitivité, on a donc

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  sont à termes positifs donc d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente,  $\sum_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$  est divergente aussi.

16. Par croissance comparée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^7}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$$

$$\text{donc } \frac{\ln(n)^7}{n\sqrt{n}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right).$$

Or les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  sont à termes positifs et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  est une série de Riemann convergente. D'après le critère de comparaison par négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n^7}{n\sqrt{n}}$  est donc convergente.

**Exercice 8.**

1. Soit  $x \in [0, 1]$ . On a donc

$$0 \leq x \leq 1$$

et en multipliant membre à membre par  $x$  (qui est positif) on obtient

$$0 \leq x^2 \leq x.$$

2. Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série convergente à termes positifs. Comme la série converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . En particulier, il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq 1.$$

Comme la série est à termes positifs, on a donc

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \in [0, 1].$$

D'après la question précédente, on peut donc conclure que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n^2 \leq u_n.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n^2$  et  $\sum_{n \geq 0} u_n$  étant à termes positifs, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, comme  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge,  $\sum_{n \geq 0} u_n^2$  converge aussi.

**Exercice 9** (Une série convergente mais pas absolument convergente).

1. On a

$$\forall n \geq 1 \quad |u_n| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série  $\sum_{n \geq 1} |u_n|$  est donc une série de Riemann divergente. Ainsi  $\sum_{n \geq 1} u_n$  n'est pas absolument convergente.

2. (a) • Soit  $n \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \geq 1, S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$ .

La suite  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  est donc décroissante.

• Soit  $n \geq 0$ . On a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \geq S_{2n}$ .

La suite  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  est donc croissante.

- Soit  $n \geq 1$ . Alors :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0.$$

Ainsi les suites  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  et  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

- (b) Les suites  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  et  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  étant adjacentes, elles convergent vers une même limite notée  $\ell$ . Montrons que  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

Comme  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  converge vers  $\ell$ , il existe un rang  $n_0$  à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$  :

$$\forall n \geq n_0, \quad |S_{2n+1} - \ell| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang impair de  $(S_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ .

Comme  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ , il existe un rang  $n_1$  à partir duquel tous les termes de cette suite sont dans l'intervalle  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$  :

$$\forall n \geq n_1, \quad |S_{2n} - \ell| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, il existe un rang à partir duquel tous les termes de rang pair de  $(S_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ .

On en déduit donc qu'il existe un rang à partir duquel tous les termes (de rang impair et de rang pair) de  $(S_n)_{n \geq 1}$  sont dans  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$  :

$$\forall n \geq \max(2n_0 + 1, 2n_1), \quad |S_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Donc la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ .

- (c) La suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$  converge, donc la série  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 10** (Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente).

1. Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n}.$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 0$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Ainsi  $v_n \sim u_n$  où  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie à l'exercice 9.

2. Supposons que  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge. On a vu à l'exercice précédent que  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge. Or pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{1}{n} = v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  converge donc en tant que différence de séries convergentes : absurde ! Ainsi la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  diverge.

**Exercice 11.**

1. On procède par récurrence en utilisant :

$$\forall x \in ]0, 1[, \quad x - x^2 \in ]0, 1[.$$

2. Soit  $n \geq 0$ . On a

$$u_{n+1} - u_n = u_n - (u_n - u_n^2) = -u_n^2 < 0.$$

Ainsi :  $\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n$ .

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

D'après la question précédente elle est aussi minorée par zéro donc par convergence monotone, elle converge vers un réel  $\ell$ .

D'après la question 1, on a  $\ell \in [0, 1]$ .

Comme la fonction  $f : x \in [0, 1] \mapsto x - x^2$  est continue sur  $[0, 1]$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$f(x) = x \iff x - x^2 = x \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Ainsi l'unique point fixe de  $f$  est 0 donc  $\ell = 0$ . Finalement la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est 0.

3. La formule de récurrence donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 = u_n - u_{n+1}.$$

Donc pour tout entier naturel  $n$  on obtient par télescope

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$ , la suite des sommes partielles  $(\sum_{k=0}^n u_k^2)_{n \geq 0}$  converge vers  $u_0$ . Ainsi la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$  converge et sa somme vaut  $u_0$ .

4. On utilise encore un télescope :

$$\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^n \ln \left( \frac{u_{k+1}}{u_k} \right) = \sum_{k=0}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty.$$

Ainsi la suite des sommes partielles  $\left(\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right)_{n \geq 0}$  diverge donc la série  $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  diverge.

5. On a :

$$\forall n \geq 1, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , par équivalent usuel on obtient :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$$

d'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante alors pour tout entier naturel  $n$  on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$

Ainsi la série  $\sum_{n \geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est à termes positifs. Les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  sont à termes positifs, donc avec l'équivalent ci-dessus et d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, on déduit qu'elles sont de même nature. Or d'après la question précédente,  $\sum_{n \geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  diverge. Donc  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est divergente aussi.

### Exercice 12.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que polynôme et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = 3x^2 + n \geq 0$$

avec égalité si et seulement si  $x = 0$  et  $n = 0$ .

La fonction  $f_n$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et  $y$  est continue (car dérivable). D'après le théorème de la bijection monotone,  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $f_n(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$ . En particulier, comme  $0 \in f_n(\mathbb{R})$ , 0 possède un unique antécédent par  $f_n$ , ie l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$ .

Ceci étant valable quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a ainsi montré que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$f_n(0) = -1 \leq 0 = f_n(u_n) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^3 = f_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, d'après le théorème de la bijection monotone, la bijection réciproque  $f_n^{-1}$  de  $f_n$  est strictement croissante. On en déduit donc que

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ .

3. Par encadrement  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $f_n(u_n) = 0$  par définition, on a

$$u_n^3 + nu_n - 1 = 0$$

c'est-à-dire

$$nu_n = 1 - u_n^3.$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}, nu_n = 1 - u_n^3$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = 0$ . Finalement, on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ .

5. De la question précédente, on déduit :

$$nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

Par compatibilité des équivalents avec le quotient, on trouve :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  étant à termes positifs (voir question 2), d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs elles sont de même nature. Comme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente,  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est divergente aussi.

### Exercice 13. Voir DM2

### Exercice 14.

1. La fonction  $f$  est le quotient de deux fonctions dérivables sur  $]1, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur  $]1, +\infty[$ . De plus

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2} < 0.$$

Ainsi,  $f$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$ .



2. Soit un entier  $k$  tel que  $k \geq 3$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $[k-1, k]$  alors :

$$\forall x \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(x) \leq f(k-1).$$

En intégrant cette inégalité entre  $k-1$  et  $k$ , on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx$$

c'est-à-dire :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour  $k$  allant de 3 à  $n$ , on obtient

$$\sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1).$$

Cela se ré-écrit, en faisant un changement de variable dans le membre de droite :

$$\sum_{k=2}^n f(k) - f(2) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

Ainsi,

$$S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}.$$

Or, par la relation de Chasles, on a :  $\sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx = \int_2^n f(x) dx$ . Donc

$$S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}.$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . Calculons  $\int_2^n f(x) dx$ . On remarque que  $f$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  où  $u = \ln$ . Une primitive de  $f$  est donc  $\ln(u)$ . Ainsi

$$\int_2^n f(x) dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

D'après la question précédente, on a donc

$$S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \text{ et } \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}.$$

Ainsi :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}.$$

(c) En divisant membre à membre par  $\ln(\ln(n))$  dans l'inégalité précédente on trouve que pour tout  $n \geq 2$  :

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))} \left( \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2)) \right)$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))} \left( \frac{1}{2 \ln(2)} - \ln(\ln(2)) \right) = 1$$

donc par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$ . Ainsi  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ , on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

(a) • Soit  $n \geq 2$ . On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \\ &\geq 0 \text{ en utilisant la question 2 avec } k = n+2. \end{aligned}$$

Ainsi  $(u_n)_{n \geq 2}$  est croissante.

• Soit  $n \geq 2$ . On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &\leq 0 \text{ en utilisant la question 2 avec } k = n+1. \end{aligned}$$

Ainsi  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante.

• Soit  $n \geq 2$ . Alors :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \int_n^{n+1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, par la question 2 (avec  $k = n + 1$ ), on a

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

donc par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$ .

Ainsi les suites  $(u_n)_{n \geq 2}$  et  $(v_n)_{n \geq 2}$  sont adjacentes. On note  $\ell$  leur limite commune.

(b) Comme  $(u_n)_{n \geq 2}$  est croissante et a pour limite  $\ell$  alors

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \leq \ell.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2, \quad v_n - \ell \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

où la dernière inégalité a été prouvée à la question précédente. De plus,  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et a pour limite  $\ell$  donc

$$\forall n \geq 2, \quad \ell \leq v_n.$$

Finalement, on obtient que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$  :

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

(c) On en déduit que  $0 \leq v_{100} - \ell \leq \frac{1}{10^2 \ln(10^2)} \leq \frac{1}{10^2}$ . Ainsi  $v_{100}$  est une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-2}$  près.