TD8-Couples de variables aléatoires

Exercice 1.

1. On a $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![2,8]\!]$.
   On note aussi Z la variable aléatoire donnant la valeur du dé rouge de sorte que $X + Z = Y$.
   Alors par indépendance des deux dés :
   $$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1)P(Z = 1) = \frac{1}{16}.$$
   De même on obtient :

$i \in X(\Omega)$ \ $j \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([X = i])_{i\in[\![1,4]\!]}$ on a :
   $$\forall j \in [\![2,8]\!], \quad P(Y = j) = \sum_{i=1}^{4} P(X = i, Y = j).$$
   Ainsi :

$j \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y = j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3. Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$ on a :
   $$P_{[Y=5]}(X = i) = \frac{P(X = i, Y = 5)}{P(Y = 5)} = 4 \times P(X = i, Y = 5).$$
   Ainsi :

$i \in X(\Omega)$	1	2	3	4
$P_{[Y=5]}(X = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 2. On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a :
$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ O & \text{si } i > k. \end{cases}$$

1. Soit $(k, i) \in \mathbb{N}^2$. Alors :
   $$P(X = k, Y = i) = P(X = k)P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ O & \text{si } i > k. \end{cases}$$

2. La famille $([X = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a, d'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} P([Y = i]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{P_{[X=k]}([Y = i])}_{=0 \text{ si } i>k} P([X = k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} P_{[X=k]}([Y = i])\, P([X = k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i p^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-i}(1-p)^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i p^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j (1-p)^j}{j!} \end{aligned}$$

où on obtient la dernière ligne en faisant le changement de variable $j = k - i$. On reconnaît la somme d'une série exponentielle :

$$P([Y = i]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i p^i}{i!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

Donc Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 3.

1. L'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. La variable aléatoire X donne le rang du premier succès donc X suit la loi géométrique de paramètre p.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement $[X = k]$ est réalisé, le joueur B fait k lancers et Y compte le nombre de succès de cette répétition de k épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres k et p.
2. Pour tout $k \geq 1$, lorsque $[X = k]$ est réalisé, Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0, k]\!]$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
3. La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = 0) P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k p (1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \quad \text{car } (1-p)^2 \neq 1, \\ &= \frac{p(1-p)}{2p - p^2} \\ &= \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De même qu'à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n) P(X = k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n) P(X = k) \end{aligned}$$

car $P_{[X=k]}(Y = n) = 0$ si $k < n$. D'où :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n) P(X = k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} p (1-p)^{k-1} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} (1-p)^{2k-n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Remarquons que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$[G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] = \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right].$$

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in [G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} G_1(\omega) & + & G_2(\omega) & = & i \\ G_1(\omega) & - & G_2(\omega) & = & j \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 2G_1(\omega) & = & i+j \\ G_1(\omega) & - & G_2(\omega) & = & j \end{array} \right. \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$P([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = P\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right).$$

Or, comme G_1 suit une loi géométrique de paramètre p, $G_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc, pour les entiers i et j tels que $\frac{i+j}{2} \notin \mathbb{N}^*$, on a forcément :

$$P([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = P\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right) = 0.$$

Par exemple,

$$P([G_1 + G_2 = 2, G_1 - G_2 = 1]) = P\left(\left[G_1 = \frac{3}{2}, G_1 - G_2 = 1\right]\right) = 0$$

car $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$.
D'autre part, montrons :$P([G_1 + G_2 = 2]) \neq 0$ et $P([G_1 - G_2 = 1]) \neq 0$.

(a) Montrons que $P([G_1+G_2=2]) \neq 0$. Comme $G_1(\Omega) = G_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on voit que
$$[G_1+G_2=2] = [G_1=1, G_2=1]$$
donc
$$P([G_1+G_2=2]) = P([G_1=1,G_2=1]).$$
Les variables aléatoires G_1 et G_2 étant indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ on a
$$\begin{aligned} P([G_1+G_2=2]) &= P([G_1=1,G_2=1]) \\ &= P([G_1=1]) \times P([G_2=1]) \\ &= p^2 \\ &> 0 \quad \text{car } p>0. \end{aligned}$$

(b) Montrons que $P([G_1-G_2=1]) \neq 0$. On voit que
$$[G_1-G_2=1] \supset [G_1=2, G_2=1]$$
donc
$$P([G_1+G_2=2]) \geq P([G_1=2,G_2=1]).$$
Les variables aléatoires G_1 et G_2 étant indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ on a donc
$$\begin{aligned} P([G_1+G_2=2]) &\geq P([G_1=2,G_2=1]) \\ &\geq P([G_1=2]) \times P([G_2=1]) \\ &= p^2(1-p) \\ &> 0 \quad \text{car } 0<p<1. \end{aligned}$$

Conclusion :
$$P([G_1+G_2=2])\,P([G_1-G_2=1]) \neq 0 = P([G_1+G_2=2, G_1-G_2=1]).$$
Les variables aléatoires G_1-G_2 et G_1+G_2 ne sont pas indépendantes.

Remarque 1 (Loi de G_1-G_2). On a $(G_1-G_2)(\Omega) = \mathbb{Z}$. En effet, soit $j \in \mathbb{Z}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a
$$\begin{aligned} P([G_1-G_2=j]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_1-G_2=j, G_1=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([k-G_2=j, G_1=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2=k-j, G_1=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2=k-j])\,P([G_1=k]) \quad \text{car } G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Or, $G_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $P([G_2=k-j]) = 0$ pour tous les $k\in\mathbb{N}^*$ tels que $k-j \leq 0$ c'est-à-dire pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq j$. Ainsi :
$$\begin{aligned} P([G_1-G_2=j]) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k\geq j+1}}^{+\infty} P([G_2=k-j])\,P([G_1=k]) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*\cap[j+1,+\infty[} P([G_2=k-j])\,P([G_1=k]) \end{aligned}$$

(a) Si $j \geq 0$, alors $\mathbb{N}^* \cap [j+1,+\infty[$ est l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à $j+1$ donc
$$\begin{aligned} P([G_1-G_2=j]) &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*\cap[j+1,+\infty[} P([G_2=k-j])\,P([G_1=k]) \\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} P([G_2=k-j])\,P([G_1=k]) \\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1}p(1-p)^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=j+1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\ &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2} \end{aligned}$$
en faisant le changement de variable $\ell = k-j$. Donc
$$\begin{aligned} P([G_1-G_2=j]) &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2} \\ &= p^2(1-p)^{j-2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell} \\ &= p^2(1-p)^{j-2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right) \end{aligned}$$
car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :
$$P([G_1-G_2=j]) = \frac{p(1-p)^j}{2-p}.$$

(b) Si $j < 0$, alors $j+1 \leq 0$ donc $\mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[= \mathbb{N}^*$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1,+\infty[} P([G_2 = k-j]) P([G_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k-j]) P([G_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1} p(1-p)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\
&= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
&= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :

$$P([G_1 - G_2 = j]) = \frac{p}{(2-p)(1-p)^j}.$$

2. On va commencer par étudier la loi de A. On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement $S =$« le tireur touche deux fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a

$$\begin{aligned}
P(S) &= P([\text{atteindre la cible au } 1^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{atteindre la cible au } 2^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
&= P([\text{atteindre la cible au } 1^{\text{er}} \text{ tir}]) P([\text{atteindre la cible au } 2^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
&= p^2.
\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable A compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi A suit la loi $\mathcal{B}(n, p^2)$.

Étudions maintenant la loi de B. On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement $S =$« le tireur touche exactement une fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a

$$\begin{aligned}
P(S) &= P([\text{atteindre la cible au } 1^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{rater la cible au } 2^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
&\quad + P([\text{rater la cible au } 1^{\text{er}} \text{ tir}]) P([\text{atteindre la cible au } 2^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
&= p(1-p) + (1-p)p \\
&= 2p(1-p).
\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable B compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi B suit la loi $\mathcal{B}(n, 2p(1-p))$.

Or, les événements $[A = n]$ et $[B = 1]$ sont incompatibles car il n'y a que n tireurs. Donc

$$P([A = n, B = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$P([A = n]) = p^{2n} \quad \text{et} \quad P([B = 1]) = n2p(1-p)(1-2p(1-p))^{n-1}.$$

Comme $p \in]0,1[$, on obtient donc

$$P([A = n]) \neq 0 \quad \text{et} \quad P([B = 1]) \neq 0$$

et par conséquent,

$$P([A = n]) P([B = 1]) \neq P([A = n, B = 1]).$$

Ainsi A et B ne sont pas indépendantes.

Exercice 5. On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Par indépendance, on a

$$P([X = i, Y = j]) = P([X = i]) P([Y = j]) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}.$$

Exercice 6.

1. L'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. La variable aléatoire X donne le rang du premier succès donc X suit la loi géométrique de paramètre p.
2. On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$. Soit $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
   - Si $j \leq i$ alors $P(X = i, Y = j) = 0$ car le deuxième Pile arrive nécessairement après le premier.
   - Si $i < j$ alors l'événement $[X = i, Y = j]$ est réalisé si et seulement si les $i-1$ premiers lancers sont des Faces, le i-ième est un Pile, les $j-i-1$ suivants sont des Faces et le j-ième un Pile. Ainsi par indépendance des lancers :

$$P(X = i, Y = j) = (1-p)^{i-1} p (1-p)^{j-i-1} p = p^2 (1-p)^{j-2}.$$

3. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complets d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc, pour tout $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=j) &= \sum_{i=1}^{j-1} P(X=i, Y=j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} \\ &= (j-1)p^2(1-p)^{j-2}. \end{aligned}$$

4. Comme $Y > X$ on a $(Y-X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. La famille $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complets d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc, pour tout $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(Y-X=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y-X=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=i, Y=i+j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{i+j-2} \\ &= p^2(1-p)^{j-1}\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1} \\ &= p^2(1-p)^{j-1}\frac{1}{p} \\ &= p(1-p)^{j-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $Y-X$ suit la loi géométrique de paramètre p.
Les lancers étant indépendants, après l'obtention du premier Pile, on peut considérer les lancers suivants comme une nouvelle séquence d'épreuves de Bernoulli et la variable $Y-X$ donne alors le rang du premier succès. D'où le fait que $Y-X$ suive une loi géométrique.

Exercice 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On procède par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$:
« pour toutes variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes telles pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$ on a $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \cdots + k_n, p)$ ».
Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   - Initialisation : le cas $n=2$ est un résultat de cours.
   - Hérédité : supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. On pose $Y = X_1 + \cdots + X_n$.
     (a) Montrons que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
     On sait que $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes donc pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_{n+1}(\Omega)$ on a :
     $$P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1}[X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n+1} P\left([X_k = x_k]\right).$$
     Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_{n+1} = x_{n+1}])_{x_{n+1}\in X_{n+1}(\Omega)}$ on trouve donc :
     $$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_k]\right) &= \sum_{x_{n+1}\in X_{n+1}(\Omega)} P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_k]\right) \cap [X_{n+1} = x_{n+1}]\right) \\ &= \sum_{x\in X_{n+1}(\Omega)} \prod_{k=1}^{n+1} P\left([X_k = x_k]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P\left([X_k = x_k]\right) \sum_{x\in X_{n+1}(\Omega)} P\left([X_{n+1} = x_{n+1}]\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P\left([X_k = x_k]\right). \end{aligned}$$
     Cela montre que
     $$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\ P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left([X_k = x_k]\right).$$
     Ainsi $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
     (b) D'après l'hypothèse de récurrence, Y suit donc une loi $\mathcal{B}(k_1 + \cdots + k_n, p)$.
     (c) D'après le lemme des coalitions, Y et X_{n+1} sont indépendantes.
     (d) D'après $\mathcal{P}_2$, on a donc
     $$X_1 + \cdots + X_{n+1} = Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \cdots + k_n + k_{n+1}, p).$$
     Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. Même preuve que pour la question précédente.

Exercice 8.

1. On a $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$. Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ on a

$$\begin{aligned}
P([X+Y=n]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X=i, X+Y=n]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X=i, Y=n-i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P([X=i, Y=n-i]) \quad \text{car } P([X=i, Y=n-i]) = 0 \text{ si } n \leq i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} P([X=i])\, P[[Y=n-i]) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{n-i-1} \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent une loi } \mathcal{G}(p) \\
&= p^2 \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1+n-i-1} \\
&= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.
\end{aligned}$$

2. (a) Posons $V = \min(X,Y)$. Alors $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

     $$V(\omega) > k \Longleftrightarrow \min(X(\omega), Y(\omega)) > k \Longleftrightarrow X(\omega) > k \ \text{ et } \ Y(\omega) > k.$$

     Donc

     $$[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]\,.$$

   - Ainsi,

     $$\begin{aligned}
     P([\min(X,Y) > k]) &= P([X > k] \cap [Y > k]) \\
     &= P([X > k])\, P([Y > k]) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
     &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1}\right)\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1}\right) \\
     &= p^2 \left(\sum_{\ell=k}^{+\infty} (1-p)^{\ell}\right)^2 \\
     &= (1-p)^{2k}
     \end{aligned}$$

   - On a donc :

     $$P([\min(X,Y) = 1]) = 1 - P([\min(X,Y) > 1]) = 1 - (1-p)^2$$

     et, pour tout $k \geq 2$, on a

     $$\begin{aligned}
     P([\min(X,Y) = k]) &= P([\min(X,Y) > k-1]) - P([\min(X,Y) > k]) \\
     &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} \\
     &= (1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2).
     \end{aligned}$$

     Ainsi, $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.

   (b) Posons $U = \max(X,Y)$. Alors $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

     $$U(\omega) \leq k \Longleftrightarrow \max(X(\omega), Y(\omega)) \leq k \Longleftrightarrow X(\omega) \leq k \ \text{ et } \ Y(\omega) \leq k.$$

     Donc

     $$[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]\,.$$

   - Ainsi,

     $$\begin{aligned}
     P([\max(X,Y) \leq k]) &= P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \\
     &= P([X \leq k])\, P([Y \leq k]) \quad \text{par indépendance} \\
     &= \left(\sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} p(1-p)^{j-1}\right) \\
     &= p^2 \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (1-p)^{\ell}\right)^2 \\
     &= (1-(1-p)^k)^2
     \end{aligned}$$

   - On a donc :

     $$P([\max(X,Y) = 1]) = p^2$$

     et, pour tout $k \geq 2$, on a

     $$\begin{aligned}
     P([\max(X,Y) = k]) &= P([\max(X,Y) \leq k]) - P([\max(X,Y) \leq k-1]) \\
     &= (1-(1-p)^k)^2 - (1-(1-p)^{k-1})^2 \\
     &= p(1-p)^{k-1}(2-(2-p)(1-p)^{k-1}).
     \end{aligned}$$

3. Comme X et Y possèdent une espérance, $X+Y$ aussi et par linéarité on a

   $$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{p}.$$

   De plus, $\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$ donc possède une espérance et

   $$E(\min(X,Y)) = \frac{1}{1-(1-p)^2}.$$

   Pour justifier l'existence et calculer l'espérance de $\max(X,Y)$ on peut procéder de plusieurs façons.

- Méthode 1 : on remarque que $\max(X,Y)+\min(X,Y) = X+Y$ donc $\max(X,Y) = X+Y-\min(X,Y)$. Ainsi, comme on vient de voir que $X+Y$ et $\min(X,Y)$ possèdent une espérance, $\max(X,Y)$ aussi et par linéarité on a

$$E(\max(X,Y)) = E(X+Y) - E(\min(X,Y)) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{p(2-p)}.$$

- Méthode 2 : on connaît la loi de $U = \max(X,Y)$. Par définition, U possède une espérance si la série $\sum_{k\geq 1} kP([U=k])$ est absolument convergente. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} kP([U=k]) &= k\left((1-(1-p)^k)^2 - (1-(1-p)^{k-1})^2\right) \\ &= k\left((1-p)^{2k} - (1-p)^{2(k-1)} + 2(1-p)^{k-1} - 2(1-p)^k\right) \\ &= k(1-p)^{2(k-1)}\left((1-p)^2-1\right) + 2pk(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k\geq 1} kP([U=k])$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées premières $\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{2(k-1)}$ et $\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{(k-1)}$ de raison respective $(1-p)^2$ et $(1-p)$. Comme $|1-p| < 1$ et $|(1-p)^2| < 1$, ces séries convergent et par conséquent, $\sum_{k\geq 1} kP([U=k])$ converge absolument. Ainsi, U possède une espérance et

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP([U=k]) \\ &= \left((1-p)^2-1\right)\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{2(k-1)} + 2p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= \left((1-p)^2-1\right) \times \frac{1}{\left(1-(1-p)^2\right)^2} + 2p \times \frac{1}{\left(1-(1-p)\right)^2} \\ &= -\frac{1}{1-(1-p)^2} + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Exercice 9.

— **Méthode 1 :** on remarque que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Ainsi

$$m = \frac{X+Y-\Delta}{2}$$

d'où

$$\Delta = X+Y-2m.$$

On a vu dans l'exercice précédent que m suit la loi $\mathcal{G}(1(1-p)^2)$. Ainsi X, Y et m possèdent une espérance. Par linéarité Δ aussi et :

$$E(\Delta) = E(X) + E(Y) - 2E(m) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{1-(1-p)^2} = \frac{2-2p}{p(1-p)}.$$

— **Méthode 2 :** on remarque :

$$\Delta = |X-Y| = \max(X,Y) - \min(X,Y).$$

De plus :

$$X+Y = \max(X,Y) + \min(X,Y).$$

D'où on obtient : $\Delta = X+Y-2m$ et on finit comme ci-dessus.

Exercice 10. 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P([X>n]) = 1 - P([X\leq n]) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X=i]\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} P([X=i]) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} p_1(1-p_1)^{k-1} \\ &= 1 - p_1\frac{1-(1-p_1)^n}{p_1} \\ &= (1-p_1)^n. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que, $P([Y>n]) = (1-p_2)^n$ par un calcul similaire à celui de la question précédente. Or, $[U>n] = [X>n] \cap [Y>n]$ donc

$$\begin{aligned} P([U>n]) &= P([X>n]\cap[Y>n]) \\ &= P([X>n])\,P([Y>n]) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1-p_1)^n(1-p_2)^n. \end{aligned}$$

(c) On voit facilement que $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} P([U=n]) = F_U(n) - F_U(n-1) &= (1-P([U>n]) - (1-P([U>n-1]) \\ &= P([U>n-1]) - P([U>n]) \\ &= (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1} - (1-p_1)^n(1-p_2)^n \\ &= ((1-p_1)(1-p_2))^{n-1}(1-(1-p_1)(1-p_2)). \end{aligned}$$

Ainsi, U suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p_1)(1-p_2)$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P([V \leq n]) &= P([X \leq n] \cap [Y \leq n]) \\ &= P([X \leq n])\, P([Y \leq n]) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - P([X > n]))(1 - P([Y > n])) \\ &= (1-(1-p_1)^n)(1-(1-p_2)^n). \end{aligned}$$

Puis

$$P([V > n]) = 1 - P([V \leq n]) = 1 - (1-(1-p_1)^n)(1-(1-p_2)^n).$$

En posant $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$ on trouve

$$P([V > n]) = 1 - P([V \leq n]) = q_1^n + q_2^n - q_1^n q_2^n.$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} nP(V=n) &= \sum_{n=1}^{m} n(F_V(n) - F_V(n-1)) \\ &= \sum_{n=1}^{m} n(P(V \leq n) - P(V \leq n-1)) \\ &= \sum_{n=1}^{m} n(P(V > n-1) - P(V > n)) \\ &= \sum_{n=1}^{m} nP(V > n-1)) - \sum_{n=1}^{m} nP(V > n)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(V > k)) - \sum_{n=1}^{m} nP(V > n)) \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $k = n - 1$ dans la première somme. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} nP(V=n) &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(V > k)) - \sum_{n=1}^{m} nP(V > n)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} kP(V > k)) + \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k)) - \sum_{n=1}^{m} nP(V > n)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k)) - mP(V > m). \end{aligned}$$

(c) L'existence de l'espérance de V est équivalente à la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$. Comme cette série est à termes positifs, V possède une espérance si et seulement si $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$ converge.

Or, d'après les questions précédentes, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} nP(V=n) &= \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k)) - mP(V > m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (q_1^k + q_2^k - q_1^k q_2^k) - mP(V > m) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} q_1^k + \sum_{k=0}^{m-1} q_2^k - \sum_{k=0}^{m-1} (q_1 q_2)^k - m(q_1^m + q_2^m + (q_1 q_2)^m). \end{aligned}$$

Comme $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$ et $|q_1 q_2| < 1$, les séries $\sum_{k \geq 0} q_1^k$, $\sum_{k \geq 0} q_2^k$ et $\sum_{k \geq 0} (q_1 q_2)^k$ convergent et ont pour somme $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ et $\frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}$. De plus

$$\lim_{m \to +\infty} m(q_1^m + q_2^m + (q_1 q_2)^m) = 0$$

donc finalement, la série $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$ converge. Ainsi, V possède une espérance et

$$E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(V = n) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

Exercice 11.

1. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P([Y+1 = n]) = P([Y = n-1]) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-(n-1)}.$$

Ainsi $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$. Du coup,

$$E(Y) = E(Y+1-1) = E(Y+1) - 1 = \frac{1}{1-e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e-1}$$

et

$$V(Y) = V(Y+1) = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1)\, Y$.

   (a) La variable aléatoire T est un produit de variables aléatoires discrètes donc c'est une variable aléatoire discrète. Comme $(2U-1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- si $n > 0$ on a, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} + 0 \end{aligned}$$

car $-n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$ on a de même

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(T = 0, U = 1) + P(T = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0, U = 1) + P(Y = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0)P(U = 1) + P(Y = 0)P(U = 0) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} \\ &= 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

- Si $n < 0$ on a de même

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad \text{(indépendance)} \\ &= 0 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{n} \end{aligned}$$

car $n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Comme U et Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, $2U - 1$ et Y sont indépendantes. De plus, $2U - 1$ et Y possèdent une espérance. Donc T possède une espérance et

$$E(T) = E(2U - 1)E(Y) = 0.$$

(c) Comme $(2U - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ alors $((2U - 1)^2)(\Omega) = \{1\}$ donc

$$T^2 = (2U - 1)^2 Y^2 = Y^2.$$

Comme Y possède un moment d'ordre 2 et que $T^2 = Y^2$, T possède un moment d'ordre 2 aussi, donc une variance. Par la formule de Koenig-Huygens on a

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \frac{e + 1}{(e - 1)^2}.$$

Exercice 12.

1. On a vu dans l'exercice 8 que I suit la loi $\mathcal{G}(1(1 - p)^2)$.

(a) Ainsi I possède une variance et :

$$V(I) = \frac{1 - (1 - (1 - p)^2)}{(1 - (1 - p)^2)^2} = \frac{(1 - p)^2}{(1 - (1 - p))^2}.$$

(b) Comme I suit une loi géométrique, elle possède un moment d'ordre 2.

Montrons que S possède un moment d'ordre 2. Comme $I + S = G_1 + G_2$ alors $S = G_1 + G_2 - I$. Or G_1 et G_2 possèdent un moment d'ordre 2 donc d'après la proposition 10, $G_1 + G_2$ possède une variance donc un moment d'ordre 2 aussi. En appliquant une nouvelle fois la proposition 10, on en déduit que S possède un moment d'ordre 2.

Comme I et S possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent une covariance et d'après la formule de Koenig-Huygens on a :

$$\mathrm{Cov}(I, S) = E(IS) - E(I)E(S).$$

— Comme I suit la loi $\mathcal{G}(1(1 - p)^2)$ alors :

$$E(I) = \frac{1}{1 - (1 - p)^2}.$$

— Comme $S = G_1 + G_2 - I$ par linéarité on a :

$$E(S) = E(G_1) + E(G_2) - E(I) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1 - p)^2}.$$

— En remarquant que $IS = G_1 G_2$, on obtient par indépendance de G_1 et G_2 :

$$E(IS) = E(G_1 G_2) = E(G_1)E(G_2) = \frac{1}{p^2}.$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(I, S) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{1 - (1 - p)^2}\left(\frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1 - p)^2}\right) \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(2 - p)}\left(\frac{2}{p} - \frac{1}{p(2 - p)}\right) \\ &= \frac{(2 - p)^2 - 2(2 - p) + 1}{p^2(2 - p)^2} \\ &= \frac{(1 - p)^2}{p^2(2 - p)^2}. \end{aligned}$$

(c) D'une part, on sait que :

$$\begin{aligned}V(I+S) &= V(I)+V(S)+2\mathrm{Cov}(I,S)\\ &= \frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2}+V(S)+2\frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}\\ &= \frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}+V(S)+2\frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}\\ &= 3\frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}+V(S).\end{aligned}$$

D'autre part, comme $I+S=G_1+G_2$ et par indépendance de G_1 et G_2 on a :

$$V(I+S)=V(G_1+G_2)=V(G_1)+V(G_2)=2\frac{1-p}{p^2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}V(S) &= V(I+S)-3\frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}\\ &= 2\frac{1-p}{p^2}-3\frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}.\end{aligned}$$

2. (a) On a vu à l'exercice 4 que A suit la loi $\mathcal{B}(n,p^2)$ et B suit la loi $\mathcal{B}(n,2p(1-p))$.

- **Méthode 1 :** on considère la variable aléatoire C comptant le nombre de tireurs ne touchant aucune cible : C compte le nombre de succès lorsque l'expérience de Bernoulli de succès « rater les deux cibles » est répétée n fois de manière indépendante. Donc C suit la loi $\mathcal{B}(n,(1-p)^2)$.

  Or $A+B+C=n$ car chaque tireur touche ou bien deux cibles, ou bien une seule ou bien aucune. Par conséquent :

  $$\mathrm{Cov}(A,A+B+C)=\mathrm{Cov}(A,n)=0.$$

  D'autre part, par linéarité à droite, on a :

  $$\mathrm{Cov}(A,A+B+C)=V(A)+\mathrm{Cov}(A,B)+\mathrm{Cov}(A,C).$$

  Ainsi :

  $$\mathrm{Cov}(A,B)=-\mathrm{Cov}(A,C)-V(A).$$

  De même, on trouve :

  $$\mathrm{Cov}(C,A)=-\mathrm{Cov}(C,B)-V(C)\quad\text{et}\quad\mathrm{Cov}(B,C)=-\mathrm{Cov}(B,A)-V(B).$$

  Ainsi, on obtient par symétrie de la covariance :

  $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(A,B) &= -\mathrm{Cov}(A,C)-V(A)\\ &= \mathrm{Cov}(C,B)+V(C)-V(A)\\ &= -\mathrm{Cov}(B,A)-V(B)+V(C)-V(A)\\ &= -\mathrm{Cov}(A,B)-V(B)+V(C)-V(A).\end{aligned}$$

  Donc :

  $$\mathrm{Cov}(A,B)=\frac{-V(B)+V(C)-V(A)}{2}.$$

  En remplaçant $V(A)$, $V(B)$ et $V(C)$ par leurs valeurs respectives on obtient :

  $$\mathrm{Cov}(A,B)=-2np^3(1-p).$$

- **Méthode 2 :** d'après la formule de Koenig-Huygens (les variables étant à support fini elles possèdent bien un moment d'ordre deux) on a :

  $$\mathrm{Cov}(A,B)=E(AB)-E(A)E(B)=E(AB)-2n^2p^3(1-p).$$

  Calculons maintenant $E(AB)$. D'après le théorème de transfert, on a :

  $$E(AB)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}ijP(A=i,B=j).$$

  Soit $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$. L'événement $[X=i,Y=j]$ est réalisé si et seulement si i tireurs touchent les deux cibles, j tireurs touchent une seule cible (et les autres ne touchent donc aucune cible). Comme il n'y a que n tireurs, on a :

  $$i+j>n\Longrightarrow P(A=i,B=j)=0.$$

  Si $i+j\leq n$ on a :

  $$P(A=i,B=j)=\underbrace{\binom{n}{i}p^{2i}}_{(*)}\underbrace{\binom{n-i}{j}(2p(1-p))^j}_{(**)}\underbrace{(1-p)^{2(n-i-j)}}_{(***)}.$$

  En effet :

  $(*)$ il y a $\binom{n}{i}$ choix possibles pour les i tireurs qui vont toucher les deux cibles et la probabilité qu'un tireur touche deux cibles est p^2 ;

  $(**)$ il y a alors $\binom{n-i}{j}$ pour les j tireurs qui vont toucher une des deux cibles et la probabilité qu'un tireur touche une des deux cibles exactement est $2p(1-p)$;

  $(***)$ les $n-i-j$ tireurs restants ne touchent aucune cible et la probabilité qu'un tireur ne touche aucune cible est $(1-p)^2$.

Dans la suite, on note $p_A = p^2$, $p_B = 2p(1-p)$ et $p_C = (1-p)^2$ de sorte que $p_A + p_B + p_C = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
E(AB) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} ij P(A=i, B=j) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} ij \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p_A^i p_B^j p_C^{n-i-j}
\end{aligned}$$

car si $j > n-i$ alors $i+j > n$ et $P(A=i, B=j) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
E(AB) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} ij \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p_A^i p_B^j p_C^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=0}^{n-i} \underbrace{j \binom{n-i}{j} p_B^j p_C^{n-i-j}}_{=0 \text{ si } j=0} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} j \binom{n-i}{j} p_B^j p_C^{n-i-j}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in [\![1, n-i]\!]$ on a : $j\binom{n-i}{j} = (n-i)\binom{n-i-1}{j-1}$ d'où :

$$\begin{aligned}
E(AB) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} j \binom{n-i}{j} p_B^j p_C^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} (n-i) \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $k = j-1$ puis en utilisant la formule du binôme de Newton on trouve :

$$\begin{aligned}
E(AB) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{k} p_B^{k+1} p_C^{n-i-1-k} \\
&= p_B \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{k} p_B^k p_C^{n-i-1-k} \\
&= p_B \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \\
&= p_B \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (ni - i^2) p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \\
&= p_B \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} n i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \right) \\
&= p_B \left(n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \right) \\
&= \frac{p_B}{p_C + p_B} \left(n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i} \right).
\end{aligned}$$

Comme $p_A + p_B + p_C = 1$ on reconnaît dans la somme $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i}$ l'espérance d'une variable X de loi $\mathcal{B}(n, p_A)$ et dans la somme $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i}$ son moment d'ordre 2. Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(AB) &= \frac{p_B}{p_C + p_B} \left(nE(X) - E(X^2) \right) \\
&= \frac{p_B}{p_C + p_B} \left(nE(X) - V(X) - E(X)^2 \right) \\
&= \frac{p_B}{p_C + p_B} \left(n^2 p_A - n p_A (1 - p_A) - n^2 p_A^2 \right) \\
&= \frac{n p_A p_B}{1 - p_A} \left(n - (1 - p_A) - n p_A \right) \\
&= n(n-1) p_A p_B \\
&= 2n(n-1) p^3 (1-p).
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(A,B) &= E(AB) - 2n^2p^3(1-p)\\ &= 2n(n-1)p^3(1-p) - 2n^2p^3(1-p)\\ &= -2np^3(1-p).\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La variable aléatoire X_i suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{1}{n})$.
2. Soit $i \neq j$. On a $P(X_i = k, X_j = k) = 0$ car en k tirages on ne peut pas tirer k fois la boule i et k fois la boule j. Or, d'après la question précédente, $P(X_i = k)$ et $P(X_j = k)$ sont non nulles donc

$$P(X_i = k, X_j = k) \neq P(X_i = k)P(X_j = k).$$

   Ainsi, les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes. Donc les variables $X_1, \ldots, X_n$ ne le sont pas.
3. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) La variable $X_i + X_j$ compte le nombre de succès lorsqu'on répète k fois indépendantes l'expérience de Bernoulli de succès « avoir la boule i ou la boule j ». La probabilité de succès est $\frac{2}{n}$ donc $X_i + X_j$ suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{2}{n})$.
   (b) On sait que $V(X_i + X_j) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. D'autre part, on a

$$V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 2 \times \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

   Ainsi,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{k}{n^2}.$$