Chapitre 12 : Correction des tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

Test 2 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt.$$

Test 3 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}\,dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$.
Soit $t \geqslant 1$. *Alors* $\sqrt{t} \leqslant t$ *donc*
$$t+\sqrt{t} \leqslant 2t$$
et par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ *on en déduit :*
$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \frac{t}{t+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{2}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{t}{t+\sqrt{t}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{2}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$ *donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2} dt$ *diverge, l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}} dt$ *diverge aussi.*
2. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{e^t+e^{-t}}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *Or,*
$$\forall t \geqslant 1, \quad \frac{1}{e^t+e^{-t}} \leqslant \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$
Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{e^t+e^{-t}}$ *et* $t \mapsto e^{-t}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$ *donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme* $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ *converge (exemple de référence), l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ *converge aussi.*

Correction du test 2 (***Retour à l'énoncé.***)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ *est continue sur* $[2,+\infty[$ *donc l'intégrale est impropre en* $+\infty$. *De plus,*

- $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\ln(t)}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ *donc* $\frac{1}{t} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$;
- *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sont continues et positives sur* $[2,+\infty[$;
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ *diverge.*

Par le critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt$ *est divergente.*

Correction du test 3 (***Retour à l'énoncé.***)

1. *La fonction* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$. *L'intégrale est impropre en* $+\infty$.
   - $\sqrt{t^2+t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{t^2} = t$ *donc* $\frac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$;
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ *et* $t \mapsto \frac{1}{t}$ *sont continues et positives sur* $]0,1]$

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ *sont de même nature. Comme* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ *diverge (intégrale de Riemann), l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt$ *diverge aussi.*
2. *La fonction* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ *est continue sur* $[2,+\infty[$. *L'intégrale est impropre en* $+\infty$.
   - *Par croissance comparée, on sait que*
   $$e^t-1-t = e^t\left(1-\frac{1+t}{e^t}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^t.$$
   En particulier, par compatibilité de la relation d'équivalence avec le passage au quotient, on déduit l'équivalent suivant
   $$\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{e^t}.$$
   - *les fonctions* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}$ *et* $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{e^t}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$ *(attention ce n'est pas trivial pour la première fonction et il faudrait détailler sur une copie).*

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}dt$ *et* $\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt$ *sont de même nature.*

Par ailleurs, par croissance comparée on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{t^2\sqrt{t}}{e^t}=0.$$

Donc $\frac{\sqrt{t}}{e^t}=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$*. Par le critère de négligeabilité, comme* $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *converge alors* $\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}dt$ *converge aussi.*

Finalement $\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt$ *converge.*

3. *La fonction* $t\mapsto\frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$*. L'intégrale est donc impropre en* $+\infty$*.*
   - $t^2+1\underset{x\to+\infty}{\sim}t^2$ *donc* $\frac{1}{t^2+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^2}$ *;*
   - *les fonctions* $t\mapsto\frac{1}{t^2+1}$ *et* $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ *sont continues et positives sur* $[1,+\infty[$*.*

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$ *et* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *sont de même nature. Comme* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ *converge (intégrale de Riemann convergente en* $+\infty$*), l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$ *converge aussi.*

   Enfin, comme $t\mapsto\frac{1}{t^2+1}$ *est continue sur* $[0,1]$*, l'intégrale* $\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$ *est bien définie et par la relation de Chasles on déduit que* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$ *converge.*

   ⚠*On ne peut pas appliquer directement le critère sur* $[0,+\infty[$ *car la fonction* $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ *n'est pas continue sur* $[0,+\infty[$ *(elle n'est pas définie en* 0 *!).*