TD11-Réduction

Exercice 1

1. *Vérifier que le vecteur* $u = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x - z, y, 3x - 2z).$$

   (a) *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

   (b) *Montrer que* u *est une vecteur propre et préciser la valeur propre associée.*

2. *Vérifier que le vecteur* $Y = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\1 & 4 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

   Préciser la valeur propre associée.

Exercice 2

Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;
2. $C = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$;
3. $E = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;
4. $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;
5. $D = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$;
6. $F = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi((x,y,z)) = (x + y + z, 2y + 2z, 3z).$$

1. *Déterminer la matrice* A *de* ψ *dans la base canonique.*
2. *Trouver le spectre de* A.
3. *Trouver une base de chaque sous-espace propre.*

Exercice 4

Montrer que le polynôme $P = X^2 + X - 6$ *est un polynôme annulateur de la matrice* $H = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\4 & -2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. *En déduire les valeurs propres de* H. *La matrice* H *est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.*

Exercice 5

Soient a, b, c *trois réels tous non nuls et*

$$M = \begin{pmatrix}1 & a/b & a/c\\b/a & 1 & b/c\\c/a & c/b & 1\end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $M^2 = 3M$ *et en déduire les valeurs propres possibles de* M.
2. *Déterminer le spectre de* M *et, pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre associé.*
3. *La matrice* M *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 6

Soient a, b, c *trois réels et* $A = \begin{pmatrix}1 & a & 1\\0 & 1 & b\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs de* a, b, c *pour lesquels la matrice* A *est diagonalisable.*

Exercice 7

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (X+1)P'(X) + P(X) \end{aligned}$$

1. *Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.*

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les valeurs propres de A et ses sous-espaces propres.*
2. *En déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.*

Exercice 9

Partie A *: pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :*

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \left\{M(x,y); \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.*
2. *Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?*
3. *Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1, -2, 1)$ et telle que :*

$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. *Déterminer P^{-1}.*
5. *En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.*
   En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}.$$

6. *En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :*
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
7. *En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.*
8. *Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?*

Partie B *: on souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. *Que vaut X_0 ?*
2. *Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :*

$$X_{n+1} = CX_n.$$

   Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.*
4. *À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.*

Exercice 10

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. *Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?*
2. *Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.*
3. *En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.*

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$AM = MA.$$

On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que

$$DN = ND.$$

4. *Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*
5. *Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :*

$$M \in C_A \iff N \in C_D.$$

6. *Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.*
7. *En déduire :*

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. *Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.*