# Exercice 1

Soient A,B et P les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Partie I**

1. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Calculer $D_1 = P^{-1}AP$ et $D_2 = P^{-1}BP$ .
3. La matrice $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -6 \\ -8 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de A, B et P ?

**Partie II**

On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel $n$ : $\quad X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite matricielle définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+2} & = \frac{1}{2}\, a_{n+1} + \frac{1}{2}\, a_n \\ b_{n+2} & = \frac{1}{2}\, b_{n+1} \\ c_{n+2} & = \frac{2}{3}\, c_{n+1} + \frac{1}{3}\, c_n \end{cases}$$

3. Calculer les matrices $Y_0$ et $Y_1$.
4. Pour tout entier naturel $n$, calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.
5. En déduire l'expression de $X_n$ en fonction de $n$, pour tout entier naturel $n$.

   On notera $X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, et on vérifiera que :

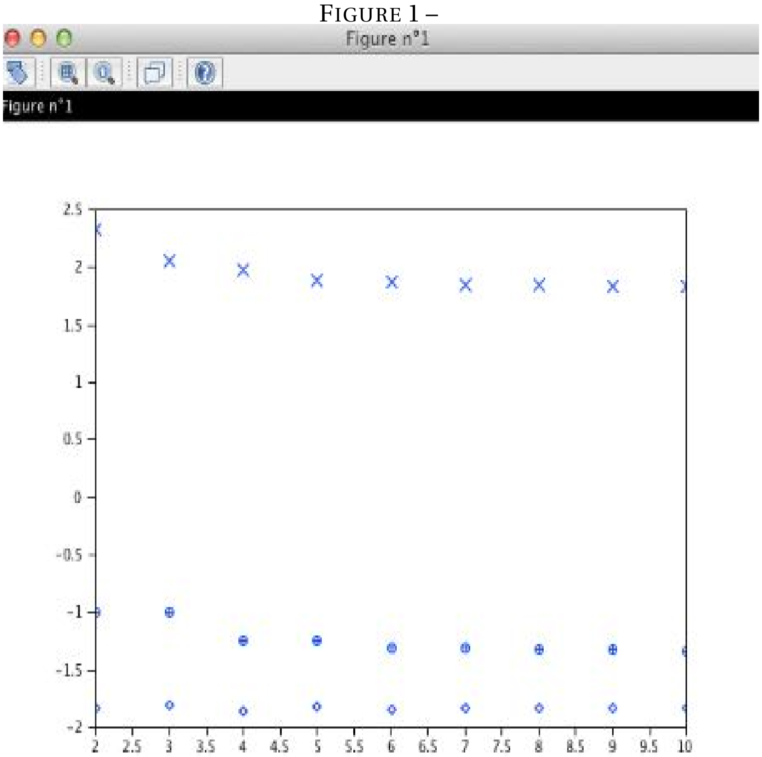
$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}.$$

6. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier $n$ supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice $X_n$ :

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
    B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
    for i=2:n
        Aux= ...............
        Xold=...............
        Xnew=.............
    end
    res=.........
endfunction
```

(b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure 1) les valeurs de $\alpha_n$, $\beta_n$ et $\gamma_n$ en fonction de $n$.
Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en justifiant votre réponse.

FIGURE 1 –



## Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $f_n'$.
   (b) Étudier les variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}$ (on précisera les limites aux bornes).
   (c) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée $u_n$.
2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{n})$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < \frac{1}{n}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$.
   (b) En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
   (a) À l'aide des questions précédentes, déterminer un équivalent simple de $v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $u_n = \frac{1}{n} + \frac{b}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $b$ est un réel à préciser.

## Exercice 3

On admet le résultat suivant :

**Proposition :** soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel $\ell$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ on a , $0 \leqslant u_n < 1$ .
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel $n$ on pose, $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}$ .
   (c) En déduire, à l'aide du résultat admis en début d'exercice, que la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   (d) En déduire que : $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.
   (e) En déduire que : $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. (a) Écrire une fonction Scilab d'entête `function u=suite(n)` qui renvoie la valeur de $u_n$ .
   (b) En déduire un programme, rédigé en Scilab, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de $n$ pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$ .

## Exercice 4

On pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

**Proposition :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance, alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et $E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.

On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de $n$ urnes, numérotées de 1 à $n$, contenant chacune $n$ boules. On répète $n$ épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard (selon une loi uniforme). On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $i$ de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $X_i$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée $i$ contient toujours $n$ boules au bout de ces $n$ épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout $i$ et tout $k$, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro $i$ est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
   Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Justifier également que, si $i$ et $j$ sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :
   $$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$
   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si $i$ et $j$ sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les évènements $[X_i = 1]$ et $\left[X_j = 1\right]$ ne sont pas indépendants.
2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de $Y_n$, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.
3. Pour tout $i$ de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $N_i$ la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée $i$ à la fin de ces $n$ épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de $N_i$ ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$ ?