TD 3-Espaces vectoriels

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}_3[x]$, on considère les polynômes P, Q, R et S définis par :

$$P(x) = (x+4)^2, \quad Q(x) = (x+2)^2, \quad , R(x) = (x+1)^2, \quad S(x) = x - 1.$$

Le polynôme P est-il combinaison linéaire des polynômes Q, R, S ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans chaque cas, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $F = \{M \in E \mid {}^tM = M\}$.
2. $E = \mathbb{R}^4$ *et* $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ et } y = t\}$.
3. $E = \mathbb{R}_n[x]$ *et* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \mid P'(3) = 2P(3)\}$.

Exercice 3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4

Expliciter les sous-espaces vectoriels dans chacun des cas suivants.

1. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(x^3, x^2, x, 1)$ *de* $\mathbb{R}_4[x]$.
2. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(x+1, x+2, x+3)$ *de* $\mathbb{R}_1[x]$.
3. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}((-1,2),(2,-4))$ *de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1))$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,1,-3)$, $\overrightarrow{v} = (3,2,-1)$, $\overrightarrow{s} = (1,0,-5)$ et $\overrightarrow{t} = (1,1,2)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une famille génératrice de F.

1. $E = \mathbb{R}^3$ *et* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\}$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a = 2c \right\}$.
3. $E = \mathbb{R}_3[x]$ *et* $F = \{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $E = \mathbb{R}_2[x]$ *et* $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$.

Exercice 7

Montrer que l'ensemble des solutions $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ du système homogène

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - t & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

est $\mathrm{Vect}(2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1))$.

Exercice 8

Dans chaque cas, exprimer F à l'aide d'équations.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(-1,2,1))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2),(1,0,0))$.

Exercice 9

Soient $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ *et* $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$. *Montrer que* $F = E$.