TD18-Convergence et approximation

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X possède une espérance et un moment d'ordre 2 donnés par :

$$E(X) = V(X) = \lambda.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :

$$\forall a > 0, \quad P(|X-\lambda| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a^2}.$$

Exercice 2. 1. Par hypothèse, on sait que X possède un moment d'ordre 2. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :

$$\forall a > 0, \quad P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq a\right) \leq \frac{11}{12a^2}.$$

2. Soit $a > 0$. On a :

$$P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq a\right) = P\left(\left[X-\frac{3}{2} \geq a\right] \cup \left[X-\frac{3}{2} \leq -a\right]\right) = P\left(\left[X \geq a+\frac{3}{2}\right] \cup \left[X \leq \frac{3}{2}-a\right]\right).$$

En prenant $a = \frac{3}{2}$ et comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on obtient :

$$P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) = P\left([X \geq 3] \cup [X \leq 0]\right) = P\left([X \geq 3]\right).$$

Finalement on trouve donc :

$$P\left([X \geq 3]\right) = P\left(\left|X-\frac{3}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{11}{12\frac{9}{4}} = \frac{11}{27}.$$

Exercice 3. 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i a pour espérance et variance x. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\frac{S_n}{n}$ possède une espérance donnée par :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_i) = x.$$

De plus, les X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, étant mutuellement indépendantes, $\frac{S_n}{n}$ possède une variance donnée par :

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_i) = \frac{x}{n}.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'aprés l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$0 \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{x}{n\varepsilon^2}.$$

Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n\varepsilon^2} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 4. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i a pour espérance 1. Donc par linéarité de l'espérance T_n possède une espérance donnée par :

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n.$$

2. Soit $t > 0$.

(a) Soit $n > t$. On a :

$$[|T_n - n| \geq n-t] = [T_n - n \geq n-t] \cup [T_n - n \leq t-n] = [T_n \geq 2n-t] \cup [T_n \leq t].$$

En particulier, on trouve :

$$[T_n < t] \subset [T_n \leq t] \subset [|T_n - n| \geq n-t].$$

(b) Soit $n > t$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on sait que :

$$P(|T_n - n| \geq n-t) \leq \frac{V(T_n)}{(n-t)^2} = \frac{n}{(n-t)^2}.$$

Avec la question précédente, on obtient alors :

$$P(T_n < t) \leq P(|T_n - n| \geq n-t) \leq \frac{n}{(n-t)^2}.$$

Ainsi :

$$\forall n > t, \quad P(T_n < t) \leq \frac{n}{(n-t)^2}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n-t)^2} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n < t) = 0.$$

(c) Par la propriété de monotonie des probabilités on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[T_k<t]\right)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[T_k<t]\right).$$

Or, comme les X_i sont à valeurs strictement positives on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall k\in[\![1,n]\!],\quad \bigcap_{k=1}^{n}[T_k<t]=[T_n<t].$$

Ainsi :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[T_k<t]\right)=\lim_{n\to+\infty}P\left(T_n<t\right)=0.$$

Exercice 5. 1. La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\begin{aligned}P\left(\overline{X}_n-p\geq\varepsilon\right)=P\left(\overline{X}_n\geq p+\varepsilon\right)&=P\left(n\theta\overline{X}_n\geq n\theta(p+\varepsilon)\right)\\&=P\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

2. La variable aléatoire $e^{n\theta\overline{X}_n}$ est positive et possède une espérance (car elle est à support fini) donc d'après l'inégalité de Markov :

$$P\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right)\leq\frac{E\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}}.$$

Or, on a :

$$e^{n\theta\overline{X}_n}=e^{\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}=\prod_{i=1}^{n}e^{\theta X_i}.$$

D'après le lemme des coalitions, les variables $(e^{\theta X_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes donc :

$$E\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{n}e^{\theta X_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}E\left(e^{\theta X_i}\right).$$

De plus, d'après le théorème de transfert on a :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad E\left(e^{\theta X_i}\right)=pe^{\theta}+q.$$

Finalement, on a donc :

$$E\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)=(pe^{\theta}+q)^n$$

puis

$$P\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right)\leq\frac{E\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}}=\frac{(pe^{\theta}+q)^n}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}}=e^{n\left(\ln(pe^{\theta}+q)-\theta(p+\varepsilon)\right)}.$$

Exercice 6. 1. La fonction de répartition des X_n est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

(a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On a par indépendance :

$$\begin{aligned}P(\max(X_1,\dots,X_n)\leq x)=P([X_1\leq x]\cap\cdots\cap[X_n\leq x])&=P(X_1\leq x)\times\cdots\times P(X_n\leq x)\\&=F(x)^n\\&=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^n & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty}P(\max(X_1,\dots,X_n)\leq x)=\lim_{n\to+\infty}\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x^n & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x\geq1\end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi certaine de paramètre 1. Alors sa fonction de répartition est la fonction F_X donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x\geq1\end{cases}.$$

Ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty}F_{\max(X_1,\dots,X_n)}(x)=F_X(x).$$

Donc la suite $(\max(X_1,\dots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

(b) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On a par indépendance :

$$\begin{aligned}P(\min(X_1,\dots,X_n)>x)=P([X_1>x]\cap\cdots\cap[X_n>x])&=P(X_1>x)\times\cdots\times P(X_n>x)\\&=(1-F(x))^n.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_{\min(X_1,\dots,X_n)}(x)=1-P(\min(X_1,\dots,X_n)>x)=1-(1-F(x))^n=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-(1-x)^n & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty}F_{\min(X_1,\dots,X_n)}(x)=\lim_{n\to+\infty}\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-(1-x)^n & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi certaine de paramètre 0. Alors sa fonction de répartition est la fonction F_X donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ c'est-à-dire pour tout x en lequel F_X est continue , on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\min(X_1,\dots,X_n)}(x) = F_X(x)$. Donc la suite $(\min(X_1,\dots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

2. Soit X une variable de loi $\mathscr{B}(e^{-1})$. Comme les variables X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on va utiliser la caractérisation de la convergence en loi pour les variables discrètes. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$P(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{0,1\} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \text{si } k = 1 \\ 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

Or, par équivalent usuel :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}.$$

Par compatibilité avec le quotient on en déduit donc :

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$. Par continuité de la fonction exponentielle en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

On en déduit donc :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

Ainsi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

3. La fonction de répartition de X_n est la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{1-\frac{1}{n}} & \text{si } x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x > 1-\frac{1}{n} \end{cases}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.
- Si $x \in [0,1[$ alors il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right[.$$

Donc pour tout $n \geq N$, $F_n(x) = \frac{x}{1-\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = x$.

- Si $x \geq 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi, si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_X(x).$$

Donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 7. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2}\, dt.$$

En effectuant le changement de variable $s = \sqrt{n}t$ on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{\sqrt{n}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2}\, ds = \Phi(\sqrt{n}x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x = +\infty$. Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t) = 1$ donc par composition des limites, on trouve :
   $$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(\sqrt{n}x) = 1.$$
   - Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x = -\infty$. Or, $\lim\limits_{t\to-\infty} \Phi(t) = 0$ donc par composition des limites, on trouve :
   $$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(\sqrt{n}x) = 0.$$
3. Soit X suivant une loi certaine de paramètre 0. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire pour tout réel x en lequel F_X est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 8. 1. Par stabilité par somme des lois binomiales, on sait que $X+Y+Z$ suit la loi $\mathscr{B}\left(30, \frac{1}{2}\right)$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires suivant la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après le TCL on sait que $\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, on a l'approximation suivant pour tout $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$:

$$P\left(a \leq 2\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 15}{\sqrt{30}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

On a :

$$P\left(a \leq 2\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 15}{\sqrt{30}} \leq b\right) = P\left(a\frac{\sqrt{30}}{2} + 15 \leq \sum_{i=1}^{30} X_i \leq b\frac{\sqrt{30}}{2} + 15\right).$$

Or, $\sum_{i=1}^{30} X_i$ et $X+Y+Z$ ont la même loi donc :

$$\begin{aligned} P\left(a \leq 2\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 15}{\sqrt{30}} \leq b\right) &= P\left(a\frac{\sqrt{30}}{2} + 15 \leq X+Y+Z \leq b\frac{\sqrt{30}}{2} + 15\right) \\ &= P\left(a\frac{\sqrt{30}}{6} + 5 \leq R \leq b\frac{\sqrt{30}}{6} + 5\right). \end{aligned}$$

En prenant $a = -\sqrt{\frac{6}{5}}$ et $b = +\infty$ on obtient :

$$P(R \geq 4) = P\left(a \leq 2\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i - 15}{\sqrt{30}}\right) \simeq 1 - \Phi(a) = \Phi(-a) \simeq 0.86.$$

Exercice 9. D'après le TCL on sait que $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - 3n}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, on a l'approximation suivant pour tout $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$:

$$P\left(a < \frac{\sum_{i=1}^{1000} T_i - 3000}{\sqrt{500}} \leq b\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a).$$

Or on a :

$$\begin{aligned} P\left(a < \frac{\sum_{i=1}^{1000} T_i - 3000}{\sqrt{500}} \leq b\right) &= P\left(a\sqrt{500} + 3000 < \sum_{i=1}^{1000} T_i \leq b\sqrt{500} + 3000\right) \\ &= P\left(a\frac{\sqrt{5}}{1000} + 3 < S \leq b\frac{\sqrt{5}}{1000} + 3\right). \end{aligned}$$

En prenant $a = -\sqrt{5}$ et $b = \sqrt{5}$ on obtient :

$$P(2.95 < S \leq 3.05) \simeq \Phi(\sqrt{5}) - \Phi(-\sqrt{5}) = 2\Phi(\sqrt{5}) - 1 \simeq 0.956.$$

Exercice 10.

1. Par stabilité par somme des lois de Poisson, S_n étant la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{P}(1)$, on sait que S_n suit la loi $\mathscr{P}(n)$. En conséquence, $E(S_n) = n = V(S_n)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} e^{-n}\frac{n^i}{i!} = \sum_{i=1}^{n} P(S_n = i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [S_n = i]\right) = P(1 \leq S_n \leq n).$$

Comme S_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on en déduit :

$$u_n = P(S_n \leq n) - P(S_n = 0) = P(S_n \leq n) - e^{-n}.$$

3. D'après le TCL, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

où Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(S_n \leq n)$. Ainsi, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(P(S_n \leq n) - e^{-n}\right) = \frac{1}{2}.$$