Chapitre 19 : Chaîne de Markov

1 Généralités

1.1 Graphe probabiliste

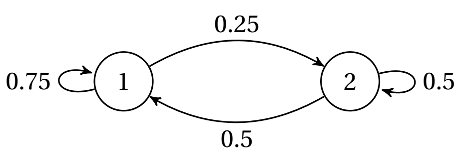
Définition 1 (Graphe probabiliste)

Un graphe probabiliste est un graphe **orienté pondéré** dans lequel :

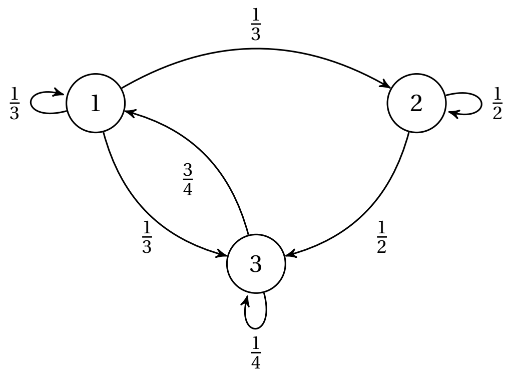
- il y a au plus un arc entre chaque couple de sommets,
- les poids sont des réels de l'intervalle $]0,1]$,
- en chaque sommet, la somme des poids des arêtes sortantes vaut 1.

Exemple 1

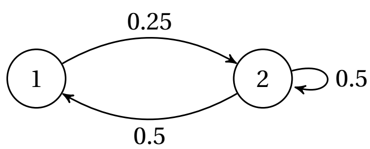
1. *Les graphes suivants sont des graphes probabilistes :*



et

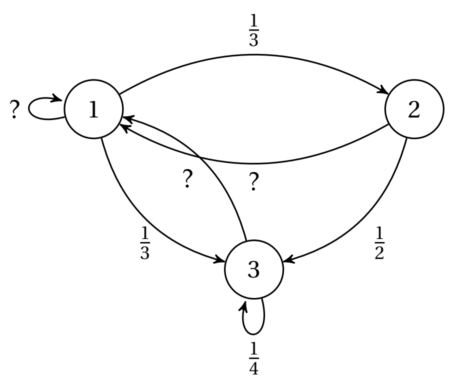


2. *Le graphe suivant n'est pas un graphe probabiliste :*



Test 1 (*Voir solution.*)

Compléter le graphe suivant pour en faire un graphe probabiliste.



Définition 2 (Ordre d'un graphe)

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets de ce graphe.

Remarque 1

Par convention, les sommets d'un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ seront numérotés de 1 à n.

Définition 3 (Matrice de transition)

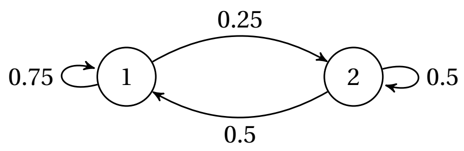
Soit G un graphe probabiliste d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. La **matrice de transition** de G est la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$ le coefficient $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête reliant le sommet n$^\circ i$ au sommet n$^\circ j$ (avec pour convention que $m_{i,j} = 0$ s'il n'y a pas d'arête reliant le sommet n$^\circ i$ au sommet n$^\circ i$).

Remarque 2

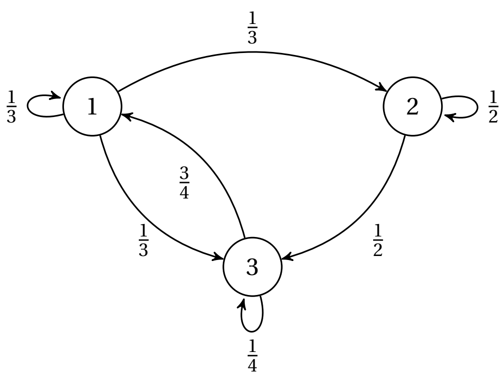
La matrice de transition d'un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une matrice carrée d'ordre n.

Exemple 2

1. *On considère le graphe probabiliste suivant :*



2. *On considère le graphe suivant :*



Test 2 (*Voir solution.*)

Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste trouvé dans le test 1.

Proposition 1

Soit G un graphe probabiliste d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice de transition $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de G vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$;
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

Une matrice vérifiant ces propriétés est appelée une **matrice stochastique**.

Remarque 3

On a associé à tout graphe probabiliste une matrice stochastique : sa matrice de transition.
Réciproquement, à toute matrice stochastique on peut associer un graphe probabiliste.

Exemple 3

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.1 & 0.15 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

1. *Vérifier que* M *est une matrice stochastique.*

2. *Déterminer un graphe* G *dont* M *est la matrice de transition.*

1.2 Chaîne de Markov (homogène)

Définition 4 (Chaîne de Markov homogène)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ une matrice stochastique d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $E = \{1, \ldots, r\}$.
On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** de matrice de transition M si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(i_0, \ldots, i_{n+1}) \in E^{n+2}$ tels que $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$ on a :

$$P_{[X_0 = i_0] \cap \cdots \cap [X_n = i_n]}([X_{n+1} = i_{n+1}]) = m_{i_n, i_{n+1}}. \qquad (1)$$

Remarque 4

1. *En particulier, pour tout* $(i, j) \in E^2$ *on a :*

   $$P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = j) = P_{[X_0 = i]}(X_1 = j) = m_{i,j}.$$

   Les coefficients de la matrice de transition sont donc des probabilités conditionnelles.

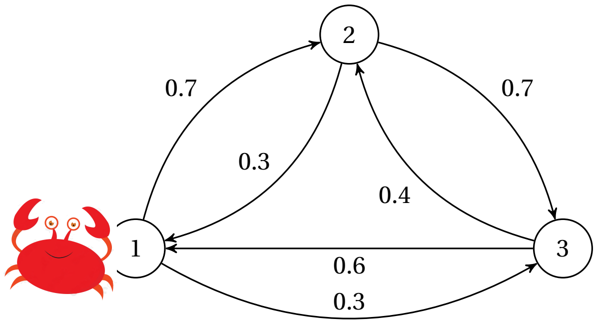
2. *Une chaîne de Markov peut s'interpréter comme une marche aléatoire sur le graphe probabiliste associé à sa matrice de transition. La variable n représente le temps et la relation 1 signifie alors que la probabilité d'aller au sommet* i_{n+1} *à l'instant* $n+1$ *sachant qu'on a visité les sommets* $i_0, \ldots, i_{n+1}$ *vaut* $m_{i_n, i_{n+1}}$. *En particulier, la position future (à l'instant* $n+1$*) ne dépend que de la position présente (à l'instant n) et pas des positions passées (aux instants* $0, \ldots, n-1$*).*

3. *Plus généralement, une chaîne de Markov* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *modélise l'évolution d'une grandeur aléatoire au cours du temps* n *et la relation 1 signifie que le futur (l'état* X_{n+1} *à l'instant* $n+1$*) ne dépend du passé (les états* $X_0, \ldots, X_n$*) que par le présent (l'état* X_n *à l'instant n).*

4. *Les coefficients de la matrice de transition sont appelées* ***les probabilités de transition*** *pour passer d'un état à un autre.*

Exemple 4

On considère le graphe probabiliste suivant sur lequel un crabe se déplace aléatoirement :



- *à l'instant initial $n = 0$, il se situe sur le sommet 1 ;*
- *il passe d'un sommet à un autre en suivant une arête orientée avec une probabilité égale au poids de cette arête.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire qui donne le numéro du sommet sur lequel le crabe se trouve à l'instant n.

1. *Déterminer la loi de X_0 et de X_1.*

2. *Justifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.*

Proposition 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(i_0,\ldots,i_{n+1}) \in E^{n+2}$ tels que $P(X_0 = i_0,\ldots,X_n = i_n) > 0$:

$$P(X_0 = i_0,\ldots,X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)\prod_{k=0}^{n-1} m_{i_k,i_{k+1}}.$$

Démonstration : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i_0,\ldots,i_{n+1}) \in E^{n+2}$ tels que $P(X_0 = i_0,\ldots,X_n = i_n) > 0$.

■

Exemple 5

On reprend l'exemple précédent de la marche aléatoire sur un graphe.

Test 3 (*Voir solution.*)

Aramis le chat répartit son temps entre ses trois occupations préférées : dormir, manger et jouer. Au début de la journée, il dort puis il change d'activité toutes les heures de la façon suivante :

- *Si, à l'heure n, il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité 0.3 et jouer avec probabilité 0.7.*
- *Si, à l'heure n, il est en train de dormir, alors à l'heure $n+1$ il continue de dormir avec probabilité 0.4, il va manger avec probabilité 0.3 et il va jouer avec probabilité 0.3.*
- *Si, à l'heure n, il est en train de jouer, il va manger l'heure suivante avec probabilité 0.4 et il va dormir avec probabilité 0.6.*

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement d'Aramis. On numérote les activités de 1 à 3 (1 :« Dormir », 2 :« Manger », 3 :« Jouer ») et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'état du chat à l'instant n.

1. *Justifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.*
2. *Déterminer sa matrice de transition et le graphe probabiliste associé.*
3. *Calculer $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2)$.*

2 États d'une chaîne de Markov

2.1 États

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition M, les coefficients de M sont des **probabilités conditionnelles** qui représentent la probabilité de passer d'une valeur à une autre.

Dans ce paragraphe, on va chercher à comprendre comment ces probabilités de transition permettent de déterminer la loi de X_n.

Définition 5 (État d'une chaîne de Markov)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **n-ième état de la chaîne de Markov** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la matrice ligne V_n définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & \dots & P(X_n = r) \end{pmatrix}.$$

Remarque 5

Le n-ième état de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne donc la loi de X_n.

Proposition 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$. Si on note $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall j \in [\![1, r]\!], \quad P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i).$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = V_{n-1} M.$$

Démonstration : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ et notons $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, r]\!]$. Comme X_{n-1} est à valeurs dans $[\![1, r]\!]$, la famille $\big([X_{n-1} = i]\big)_{i\in[\![1,r]\!]}$ forme une système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} P_{[X_{n-1}=i]}(X_n = j) P(X_{n-1} = i) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i).$$

Ainsi :

$$\forall j \in [\![1, r]\!], \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = i).$$

La relation matricielle en découle par définition du produit matriciel. ■

Corollaire 1

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

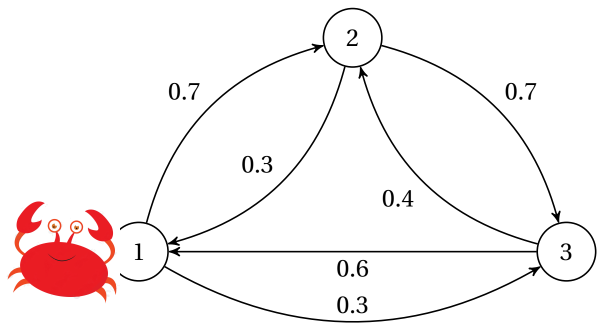
$$\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0\mathrm{M}^n.$$

Remarque 6

1. *Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est entièrement caractérisée par la matrice de transition et l'état initial V_0.*
2. *Déterminer les états successifs d'une chaîne de Markov revient donc à calculer les puissances de la matrice de transition. On pourra donc essayer de la diagonaliser...*

Exemple 6

On reprend l'exemple de la marche aléatoire partant du sommet 1 sur le graphe suivant :



Déterminons V_2.

2.2 États stables

Définition 6 (État stable)

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{V} \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$. On dit que V est un **état stable** de $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :

1. les coefficients de V sont positifs et leur somme vaut 1 ;
2. $\mathrm{V} = \mathrm{VM}$.

Remarque 7

Si l'état initial V_0 d'une chaîne de Markov est stable alors elle ne change pas d'état :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{V}_0.$$

En d'autres termes, les variables X_n suivent toutes la même loi. On dit que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***stationnaire****.*

Proposition 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Si V est un état stable alors ${}^tV$ est un vecteur propre de ${}^tM$ pour la valeur propre 1.

Remarque 8

Attention, tout vecteur propre de ${}^tM$ *pour la valeur propre* 1 *ne fournit pas nécessairement un état stable. En effet, un état stable défini une loi de probabilité : ses coefficients doivent être positifs et de somme égale à* 1.

Proposition 5

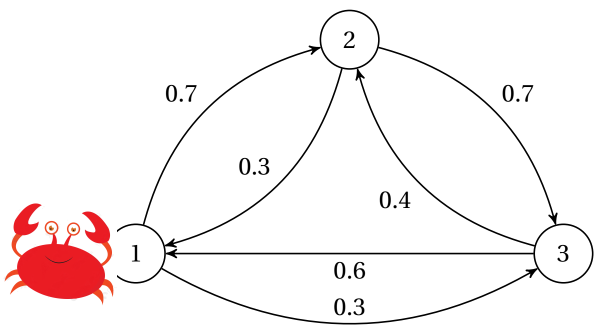
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède (au moins) un état stable.

Remarque 9

Sous certaines hypothèses supplémentaires, l'état stable est unique et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers cet état stable.*

Exemple 7

On reprend l'exemple de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont le graphe est :*



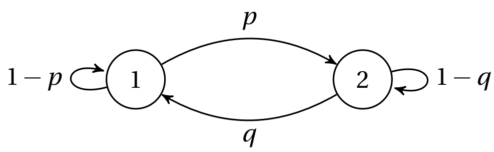
Déterminons les états stables.

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer les états stables de la chaîne de Markov du test 3.

3 Exemple des graphes à deux états

On considère le graphe à deux états suivant, où p et q sont des réels de $]0,1[$.



La matrice de transition M est :

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition M.

► Déterminer le sous-espace propre de ${}^t M$ associé à la valeur propre 1.

► En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède un unique état stable que l'on précisera.

► Déterminer le spectre de M et en déduire que M est diagonalisable.

► En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers l'unique état stable.

4 Objectifs

1. Savoir reconnaître un graphe probabiliste.
2. Savoir déterminer la matrice de transition d'un graphe probabiliste.
3. Étant donné une matrice stochastique, savoir construire un graphe probabiliste dont c'est la matrice de transition.
4. Savoir reconnaître une situation modélisée par une chaîne de Markov.
5. Savoir déterminer les états successifs d'une chaîne de Markov.
6. Savoir déterminer des états stables d'une chaîne de Markov.