TD6-Compléments

Exercice 1

Soit α un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}.$$

1. (a) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.*
   (b) *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$?*
   (c) *On suppose dans cette question que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :*
   $$u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}.$$
   (d) *Déduire que $\ell(\alpha) = 0$.*
2. *Dans cette question, on prend α dans l'intervalle $]0,1[$.*
   (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \frac{1}{n+1}$.*
   (b) *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$?*

Exercice 2 (*Séries de Bertrand*)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^a \ln(n)^b}$ en fonction des valeurs des réels a et b.

1. *Montrer que la série converge si $a > 1$.*
2. *Montrer que la série diverge si $a < 1$.*
3. *On prend maintenant $a = 1$ et on pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$:*
   $$T_n = \int_2^n \frac{dx}{x\ln(x)^b}.$$
   (a) *Montrer que si $b \leq 0$ la série diverge.*
   (b) *En calculant T_n, montrer que :*
   - *si $b > 1$ alors $(T_n)_{n\geq 2}$ est bornée,*
   - *si $b \leq 1$ alors $(T_n)_{n\geq 2}$ diverge vers $+\infty$.*

   (c) *Soit $b > 0$. Montrer que*
   $$\forall n \geq 3, \quad \int_3^{n+1}\frac{dx}{x\ln(x)^b} \leq \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)^b} \leq \int_2^n \frac{dx}{x\ln(x)^b}.$$
   (d) *Déduire des questions précédentes la nature de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln(n)^b}$ en fonction des valeurs de b lorsque b est positif strictement.*

Exercice 3 (*Critère de d'Alembert*)

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose de plus :*
   $$\exists r < 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r.$$
   (a) *Montrer : $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq r^{n-n_0}u_{n_0}$.*
   (b) *En déduire la nature de la série de terme général u_n.*
   (c) *En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel strictement inférieur à 1 alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose de plus :*
   $$\exists r > 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq r.$$
   (a) *Montrer : $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq r^{n-n_0}u_{n_0}$.*
   (b) *En déduire la nature de la série de terme général u_n.*
   (c) *En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel strictement supérieur à 1 alors la série $\sum u_n$ diverge.*

3. *A l'aide des résultats démontrés ci-dessus, étudier la nature des séries suivantes :*

(a) $\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$; (b) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$.