Chapitre 3 : Correction des tests

Test 1 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, calculer $u+3v$.

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *avec* $u=(1,-1,0)$ *et* $v=(3,-2,5)$.
2. *Dans* $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *avec* $u=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ *et* $v=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.
3. *Dans* $\mathbb{R}[X]$ *avec* $u=3X^3-X+1$ *et* $v=X^5-2X^3+X^2+2$.

Test 2 (*Voir la solution.*)

1. (a) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et soit* $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. *Montrer que* $P+Q\in\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) *En déduire que l'addition de polynômes est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Soit* E *l'ensemble des polynômes de degré* ***exactement*** *égal à* n. *L'addition des polynômes est-elle une loi de composition interne sur* E *?*

Test 3 (*Voir la solution.*)

1. *Déterminer l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}[X]$. *Soit* $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in\mathbb{R}[X]$, *déterminer son symétrique.*
2. *Déterminer l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *déterminer son symétrique.*

Test 4 (*Voir la solution.*)

1. *Dans* $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, *on pose* $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *et* $e_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. *Écrire les vecteurs* $u=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ *et* $v=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* e_1, e_2 *et* e_3.
2. *Dans* $\mathbb{R}[X]$, *montrer que le polynôme* X^2+1 *est combinaison linéaire des polynômes* $(X+1)^2$, $X+1$ *et* 1.
3. *Dans* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, *la matrice* $\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ *est-elle combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ *?*

Test 5 (*Voir la solution.*)

1. *On considère les trois polynômes suivants :* $P=X^2+2X$, $Q=-X^2+1$ *et* $R=4X^2+6X-1$. *Déterminer tous les triplets de réels* (a,b,c) *tels que* $aP+bQ+cR=0$.
2. *Dans* $\mathbb{R}^4$, *on considère les vecteurs* $x=(1,2,-1,4)$ *et* $y=(2,4,-2,4)$. *Déterminer tous les couples de réels* (a,b) *tels que* $ax+by=0$.

Test 6 (*Voir la solution.*)

Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de l'espace considéré ?

1. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$,
2. $G=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P'(0)=0\}$,
3. $H=\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\}$.

Test 7 (*Voir la solution.*)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $E=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM=2M\}$,
2. $F=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n\}$.

Test 8 (*Voir la solution.*)

Donner une expression la plus simple possible des sous-espaces vectoriels suivants.

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$, $F=\mathrm{Vect}((1,2),(2,4))$.
2. *Dans* $\mathbb{R}[X]$, $F=\mathrm{Vect}(1+X,X,X-X^2,1+2X+X^2)$.

Test 9 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $\mathrm{F} = \{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.
2. $\mathrm{F} = \{(c-a)\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + (2a-b)\mathrm{X} + c \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Test 10 (*Voir la solution.*)

Dans chaque cas, montrer que F *est un espace vectoriel et donner une famille génératrice de* F.

1. $\mathrm{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x-y+z=0 \quad \textit{et} \quad 2x+y-5z=0\}$.
2. $\mathrm{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$.
3. $\mathrm{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x=y \quad \textit{et} \quad y=3z\}$.

Test 11 (*Voir la solution.*)

Soit $\mathrm{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\}$.

1. *Rappeler la forme de l'expression du terme général d'un élément de* E.
2. *En déduire que* E *est un espace vectoriel et en donner une famille génératrice.*

Test 12 (*Voir la solution.*)

Décrire les espaces vectoriels suivants à l'aide d'équations.

1. $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}((1,2,-1,2),(1,1,1,1))$.
2. $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(1,4,9))$.
3. $\mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}((2,1,-3),(1,1,-2))$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

1. $u+3v = (1,-1,0)+3(3,-2,5) = (10,-7,15)$.
2. $u+3v = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$.
3. $u+3v = 3X^3 - X + 1 + 3(X^5 - 2X^3 + X^2 + 2) = 3X^5 - 3X^3 + 3X^2 - X + 7$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. (a) *On a :* $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \leqslant n$.
   Donc : $P+Q \in \mathbb{R}_n[X]$
   (b) *L'addition de polynômes* $+ : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to R_n[X]$ *est donc bien définie. C'est une loi de composition interne par définition.*
2. *L'addition des polynômes n'est pas une loi de composition interne sur* E *car la somme de deux polynômes de degré exactement* n *n'est pas nécessairement de degré exactement* n*. Par exemple, avec* $n = 1$, $P = X$ *et* $Q = -X+1$*, on a*
$$\deg P = \deg Q = 1 \quad \textit{mais} \quad \deg(P+Q) = 0 \quad \textit{car} \quad P+Q = 1.$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On a*
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P+0 = 0+P = P.$$
Par unicité, le polynôme nul est donc l'élément neutre de l'addition de $\mathbb{R}[X]$.
On a
$$P + (-P) = (-P) + P = 0,$$
où $-P = -a_0 - a_1X - \cdots - a_nX^n$*. Par unicité,* $-P$ *est donc le symétrique de* P.
2. *On a*
$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (0)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+0)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, la suite constante égale à 0 *est donc l'élément neutre de l'addition de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On a
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
Par unicité, $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc le symétrique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On cherche* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que*
$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
Cela revient à résoudre le système
$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ x & + & 2y & - & z & = & -1\\ x & + & 3y & + & z & = & 3\end{array}\right.$$
Or
$$\begin{aligned}(S) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ & & y & - & 3z & = & -4\\ & & 2y & - & z & = & 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3\\ & & y & - & 3z & = & -4\\ & & & & 5z & = & 8\end{array}\right.\\ &\iff z = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{4}{5}, \quad x = -1.\end{aligned}$$
Donc
$$u = -e_1 + \frac{4}{5}e_2 + \frac{8}{5}e_3.$$
De même pour v*, on cherche* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que*
$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& 2z &=& 1\\ x &+& 2y &-& z &=& -2\\ x &+& 3y &+& z &=& 5\end{array}\right.$$

Or

$$\begin{aligned}(\mathrm{S}) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& 2z &=& 1\\ && y &-& 3z &=& -3\\ && 2y &-& z &=& 4\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& 2z &=& 1\\ && y &-& 3z &=& -3\\ && && 5z &=& 10\end{array}\right.\\ &\iff z=2,\quad y=3,\quad x=-6.\end{aligned}$$

Donc

$$v=-6e_1+3e_2+2e_3.$$

2. *On cherche* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tel que*

$$\mathrm{X}^2+1=a(\mathrm{X}+1)^2+b(\mathrm{X}+1)+c=a\mathrm{X}^2+(2a+b)\mathrm{X}+a+b+c.$$

Par identification, cela revient à résoudre le système

$$(\mathrm{S}):\left\{\begin{array}{rcrcrcr} && && a &=& 1\\ && 2a &+& b &=& 0\\ a &+& b &+& c &=& 1\end{array}\right.$$

On trouve que l'unique solution de (S) *est* $(1,-2,2)$ *donc :*

$$\mathrm{X}^2+1=(\mathrm{X}+1)^2-2(\mathrm{X}+1)+2.$$

3. *La matrice* $\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ *est combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ *si et seulement si il existe des réels a et b tels que*

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\b&a+b\end{pmatrix}.$$

On peut identifier les coefficients des matrices de chaque membre et résoudre le système de quatre équations à deux inconnues comme précédemment. On peut aussi remarquer qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice soit combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ *est que ses deux coefficients diagonaux soient égaux. Ainsi,* $\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ *n'est pas combinaison linéaire des matrices* $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=(a-b+4c)\mathrm{X}^2+(2a+6c)\mathrm{X}+b-c.$$

Donc :

$$a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}+c\mathrm{R}=0\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a &-& b &+& 4c &=& 0\\ 2a && &+& 6c &=& 0\\ && b &-& c &=& 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcr} a &=& -3c\\ b &=& c.\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-3c,c,c)\mid c\in\mathbb{R}\}$.

2. *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$ax+by=0\iff\left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& 0\\ 2a &+& 4b &=& 0\\ -a &-& 2b &=& 0\\ 4a &+& 4b &=& 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcr} a &+& 2b &=& 0\\ 4a &+& 4b &=& 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcr} a &=& 0\\ b &=& 0.\end{array}\right.$$

L'unique solution est $(0,0)$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *On a* $(1,0) \in F$ *et* $(0,1) \in F$ *mais* $(1,0)+(0,1) \notin F$. *Ainsi,* F *n'est pas stable par addition et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$.
2. G *est non vide car* $0 \in G$. *Soient* $(P,Q) \in G^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors par linéarité de la dérivation, on a*

$$(P+\lambda Q)'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0) = 0.$$

Ainsi $P+\lambda Q \in G$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* G *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$.

3. *La fonction* f *constante égale à* 1 *appartient à* H *mais* $2f \notin H$. *Ainsi,* H *n'est pas stable par multiplication par un scalaire et ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

On va montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence.

1. *L'ensemble* E *est inclus dans* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *et non vide car contient la matrice nulle. Soient* $(M,N) \in E^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Par linéarité de la transposition on a*

$${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda\, {}^tN = 2M + \lambda 2N = 2(M+\lambda N).$$

Ainsi $M+\lambda N \in E$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. *En particulier,* E *est un espace vectoriel.*

2. *L'ensemble* F *est inclus dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et non vide car contient la suite nulle. Soient* $(u,v) \in F^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et posons* $w = u + \lambda v$. *On a*

$$\begin{aligned} w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n + \lambda(v_{n+1} + 2v_n) \\ &= u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + 2(u_n + \lambda v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n. \end{aligned}$$

Ainsi $w \in F$. *D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels,* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *En particulier,* F *est un espace vectoriel.*

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. $F = \mathrm{Vect}((1,2),(2,4)) = \mathrm{Vect}((1,2))$ *car* $(2,4)$ *est combinaison linéaire de* $(1,2)$.
2.

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}(1+X\,,\, X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1+X\,,\, -X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1+X-X\,,\, -X\,,\, X-X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, X-X^2-X\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2\,,\, 1+2X+X^2) \\ &= \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2) \end{aligned}$$

car $1+2X+X^2$ *est combinaison linéaire de* 1, $-X$ *et* $-X^2$. *Finalement,*

$$F = \mathrm{Vect}(1\,,\, -X\,,\, -X^2) = \mathrm{Vect}(1\,,\, X\,,\, X^2) = \mathbb{R}_2[X].$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

1.

$$\begin{aligned} F = \left\{(2a+c, a+3b, 2b+c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} &= \left\{(2a,a,0)+(0,3b,2b)+(c,0,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a(2,1,0)+b(0,3,2)+c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,1,0),(0,3,2),(1,0,1)). \end{aligned}$$

En particulier, F *est un espace vectoriel.*

2.
$$F=\left\{(c-a)X^3+aX^2+(2a-b)X+c\in\mathbb{R}[X]\mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{-aX^3+aX^2+2aX-bX+cX^3+c\in\mathbb{R}[X]\mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\left\{a(-X^3+X^2+2X)-bX+c(X^3+1))\in\mathbb{R}[X]\mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\mathrm{Vect}(-X^3+X^2+2X,-X,X^3+1).$$

En particulier, F *est un espace vectoriel.*

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$(x,y,z)\in F\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x&-&y&+&z&=&0\\ 2x&+&y&-&5z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x&-&y&+&z&=&0\\ &&-y&-&3z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&-y+z\\ y&=&-3z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&4z\\ y&=&-3z\end{array}\right..$$

Donc
$$F=\left\{(4z,-3z,z)\in\mathbb{R}^3\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}(4,-3,1)).$$

2.
$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+2z=0\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=y-2z\right\}$$
$$=\left\{(y-2z,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
$$=\mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,1)).$$

3. *Soit* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$(x,y,z)\in H\iff\left\{\begin{array}{rcl} 2x&=&y\\ y&=&3z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} 2x&=&3z\\ y&=&3z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&\frac{3}{2}z\\ y&=&3z\end{array}\right..$$

Donc
$$H=\left\{\left(\frac{3}{2}z,3z,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid z\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathrm{Vect}\left(\left(\frac{3}{2},3,1\right)\right).$$

Correction du test 11 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $E=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+2}=u_{n+1}+6u_n\right\}$.

1. *Les suites de* E *sont les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est* X^2-X-6. *Son discriminant est* 25 *et ses racines sont donc* 3 *et* -2. *Ainsi,*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E\iff\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=a\cdot(-2)^n+b\cdot 3^n.$$

2. *Si on note* $u=((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v=(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *la question précédente montre qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* E *si et seulement si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est combinaison linéaire de* u *et de* v. *Donc*

$$E=\mathrm{Vect}(u,v).$$

En particulier, c'est un espace vectoriel.

Correction du test 12 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Soit* $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. *Alors*

$$(x,y,z,t)\in F_1\iff\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\quad(x,y,z,t)=\lambda(1,2,-1,2)+\mu(1,1,1,1)\iff\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\quad(S)\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda&+&\mu&=&x\\ 2\lambda&+&\mu&=&y\\ -\lambda&+&\mu&=&z\\ 2\lambda&+&\mu&=&t\end{array}\right.$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y-x \\ -2\lambda = z-x \\ \lambda = t-x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda = y-x \\ -2(y-x) = z-x \\ y-x = t-x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu = x \\ \lambda = y-x \\ 3x-2y-z = 0 \\ y-t = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $y-t=0$ *et* $3x-2y-z=0$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y-t=0 \quad et \quad 3x-2y-z=0\right\}.$$

2. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Alors*

$$(x,y,z) \in \mathrm{F}_2 \iff \exists(\lambda,\mu,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad (x,y,z) = \lambda(1,1,1)+\mu(1,2,3)+\gamma(1,4,9) \iff \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \quad (\mathrm{S}) \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \lambda + 2\mu + 4\gamma = y \\ \lambda + 3\mu + 9\gamma = z \end{cases}$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \mu + 3\gamma = y-x \\ 2\mu + 8\gamma = z-x \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = x \\ \mu + 3\gamma = y-x \\ 2\gamma = x+z-2y \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_2 = \mathbb{R}^3.$$

3. *Soit* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Alors*

$$(x,y,z) \in \mathrm{F}_3 \iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y,z) = \lambda(2,1,-3)+\mu(1,1,-2) \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad (\mathrm{S}) \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu = y \\ -3\lambda - 2\mu = z \end{cases}$$

Or,

$$(\mathrm{S}) \iff \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ -\lambda = y-x \\ \lambda = z+2x \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda = x-y \\ x-y = z+2x \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda = x-y \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le système (S) *a des solutions si et seulement si* $x+y+z=0$*. Ainsi*

$$\mathrm{F}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}.$$