Chapitre 12 : Intégration de fonctions positives

1 Comparaison par inégalité

Proposition 1

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue **positive** sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$.
- Soient $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue **positive** sur $]-\infty, b]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ est majorée sur $]-\infty, b]$.

Remarque 1

Il s'agit d'une conséquence du théorème de la limite monotone : la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ (resp. $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$) est croissante sur $[a, +\infty[$ (resp. décroissante sur $]-\infty, b]$).

Proposition 2 (Comparaison par inégalité)

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ et **positives au voisinage de** $+\infty$ telles que, au voisinage de $+\infty$: $0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.
- Soient $b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $]-\infty, b]$ et **positives au voisinage de** $-\infty$ telles que, au voisinage de $-\infty$: $0 \leqslant f \leqslant g$.
  1. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)dt$ diverge.

Remarque 2

Dire qu'au voisinage de $\pm\infty$ on a $0 \leqslant f \leqslant g$ signifie :

Exemple 1

Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$.

Test 1 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}\,dt$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$.

2 Comparaison par négligeabilité

Proposition 3 (Comparaison par négligeabilité)

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ et **positives au voisinage de** $+\infty$ telles que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
  1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.
- Soient $b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $]-\infty,b]$ et **positives au voisinage de** $-\infty$ telles que $f(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(g(x))$.
  1. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ converge.
  2. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ diverge alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt$ diverge.

Méthode 1 (***Comparaison avec les exemples de référence***)

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à la comparer avec l'un des exemples de référence. Par exemple, si f continue sur $[c,+\infty[$ ($c>0$) et positive au voisinage de $+\infty$ (raisonnement à refaire à chaque fois qu'on l'utilise) :

1. *si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a f(x) = 0$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^a}\right)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si $a>1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann ;*
2. *si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a f(x) = +\infty$ alors $\frac{1}{x^a} \underset{x\to+\infty}{=} o\big(f(x)\big)$ donc $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge si $a \leqslant 1$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.*

Exemple 2

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Test 2 (***Voir solution.***)

Déterminer la nature de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\,dt.$$

3 Comparaison par équivalence

Proposition 4 (Comparaison par équivalence)

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ et **positives au voisinage de** $+\infty$ telles que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.
- Soient $b \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $]-\infty, b]$ et **positives au voisinage de** $-\infty$ telles que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x)$. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Méthode 2

En pratique, pour étudier la nature d'une intégrale d'une fonction positive, on cherche à en déterminer un équivalent simple.

Exemple 3

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)dt$.

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+t}}dt$;
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}dt$.

Remarque 3

Tous les résultats énoncés dans cette partie pour les fonctions f continues positives se transposent pour les fonctions continues négatives en considérant $-f$ (l'important est que la fonction soit de signe constant).

4 Objectifs

1. Connaître par coeur les critères de convergence des intégrales impropres de fonctions continues positives (comparaison, négligeabilité, équivalence).
2. Savoir déterminer la nature d'une intégrale impropre d'une fonction continue positive en utilisant les critères de comparaison, négligeabilité, équivalence.