TD 7-Variables aléatoires discrètes (révisions)

Exercice 1

Un lot contient 10 pièces dont 3 défectueuses. On tire simultanément et au hasard 2 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise.

1. *Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.*
   (a) *Reconnaître la loi de X_1.*
   (b) *En déduire $E(X_1)$ et $V(X_1)$.*
2. *Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.*
   (a) *Déterminer la loi de X_2.*
   (b) *Calculer $E(X_2)$.*

Exercice 3

Un joueur lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Il gagne 1 euro s'il tombe sur un nombre pair et rien sinon. On note X la variable aléatoire qui compte les gains du joueur. Reconnaître la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

Soit $X \to \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. *Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k) = (1-p)^k$.*
2. *En déduire que $\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\quad P_{[X>l]}(X > k+l) = P(X > k)$.*

Exercice 5

Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.

1. *$Y = n - X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,*
2. *$Y = 2^X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,*
3. *$Y = \frac{1}{X+1}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.*

Exercice 6 (*Ecricome 2013*)

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
*Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.*
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- *A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;*
- *l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;*
- *B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;*
- *X vaut 1 et Y vaut 4.*

1. *Dans cette question, on suppose que $b = n = 2$. On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.*
   (a) *Donner les probabilités des évènements : $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$.*
   (b) *En déduire l'espérance et la variance de X.*
   (c) *Montrer que la probabilité de l'évènement $[Y=0]$est donnée par :*
   $$P([Y=0]) = \frac{1}{2}.$$
   (d) *Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer les probabilités suivantes :*
   $$P([X=0] \cap [Y=i]) \quad ; \quad P([X=1] \cap [Y=i]) \quad ; \quad P([X=2] \cap [Y=i]).$$
   (e) *En déduire la loi de Y.*
   Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y=i])$ en fonction de i, vérifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P([Y=i]) = 1$.

(f) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

2. On se place maintenant dans le cas général.

   (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité $P([X = k])$ puis vérifier que :
   $$P([X=k]) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.$$

   (b) Utiliser la question qui précède pour justifier que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.
   Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :
   $$(\mathcal{S}) \qquad \forall N \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}.$$

   (c) Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\binom{k+a}{a}$ et $(a+1)\binom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :
   $$\sum_{k=0}^{N} k \binom{k+a}{a} = (a+1) \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$
   .

   (d) À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variable $n - X$ est donnée par :
   $$E(n - X) = \frac{nb}{b+1}.$$
   En déduire l'espérance $E(X)$ de X.

   (e) Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i non nul, déterminer la probabilité suivante : $P([X = k] \cap [Y = i])$.

   (f) Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\sum_{i \geqslant 1} i \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

   (g) Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E(Y) = \frac{bn}{b^2-1}$.

Exercice 7 (*EDHEC 2005*)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$:

- il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$,
- il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   (b) Donner la loi de X_1.

   (c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$.

   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$.

3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\}$, $\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k-1)$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}$, $\mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   (c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

   (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right)$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.
   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

   (d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$.

Exercice 8 (*EML 2009*)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$; $\quad 0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès

que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

(a) *Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.*

(b) *En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.*

2. *Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.On note*
   - *X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.*
   - *Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.*
   - *Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.*

   Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul i, on note :
   - *B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",*
   - *N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".*

   (a) i. *Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.*

   ii. *Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.*

   iii. *Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :*

   $$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

   (b) i. *Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1))$.*
   (On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$)

   ii. *En déduire : $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.*

   iii. *Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.*

   On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

   (c) *Donner la loi de Z et son espérance.*

   (d) *Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.*

   (e) *Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\operatorname{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.*