Chapitre 13 : Réduction des matrices

Dans ce chapitre, toutes les matrices seront carrées.

1 Éléments propres d'une matrice

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1 (Valeur propre, vecteur propre)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de A s'il existe un **vecteur non nul** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$AX = \lambda \cdot X.$$

- Dans ce cas, on dit que X est un **vecteur propre de** A **associé à la valeur propre** λ.

Remarque 1

1. *Si un réel λ est une valeur propre d'une matrice carrée A, tout vecteur non nul tel que $AX = \lambda \cdot X$ est un vecteur propre associé à λ. En particulier, un vecteur propre est toujours* ***un vecteur non nul****!*
2. *Si un réel λ est une valeur propre d'une matrice carrée A, il y a une infinité de vecteurs propres associés à la valeur propre λ : si $X \neq 0$ en est un alors pour tout réel $a \neq 0$ le vecteur $a \cdot X$ est aussi un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. En effet :*

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Montrer que les vecteurs*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A dont on précisera les valeurs propres associées.

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P.$$

1. *Déterminer sa matrice représentative A dans la base canonique.*
2. *Montrer que les vecteurs $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A dont on précisera les valeurs propres associées.*

Définition 2 (Spectre)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

Dire qu'un réel λ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ signifie qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda \cdot X$ ou encore que $AX - \lambda \cdot X = 0$. Ainsi :

Proposition 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inversible} \iff \mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_n) < n.$$

Conséquence(s) 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Conséquence(s) 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Exemple 2

Soit φ l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\varphi(1) = 2 \quad , \quad \varphi(X) = -X + 3 \quad , \quad \varphi(X^2) = 1 + 3X^2.$$

On note A sa matrice représentative dans la base canonique. Déterminer les valeures propres de A.

Méthode 1 (***Déterminer les valeurs propres d'une matrice***)

On cherche à déterminer les réels λ *pour lesquels le système*

$$AX = \lambda \cdot X$$

*possède des solutions **non nulles**. On est donc amené à résoudre un système linéaire à paramètres (très calculatoire).*

Exemple 3

Déterminons les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 (***Déterminer les valeurs propres d'une matrice***)

On cherche les réels λ *pour lesquels* $A - \lambda \cdot I_n$ *n'est pas inversible c'est-à-dire tels que* $A - \lambda \cdot I_n$ *n'est pas de rang* n*.*
On transforme donc la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ *en une matrice triangulaire par le pivot de Gauss : les valeurs propres sont alors les valeurs de* λ *pour lesquels au moins un des coefficients diagonaux de la réduite de Gauss est nul.*

Exemple 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*. Déterminons le spectre de* A.

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et cherchons le rang de* $A - \lambda \cdot I_3$ *:*

2. *On en déduit les valeurs propres.*

Méthode 3 (*Déterminer les valeurs propres d'une matrice* 2×2)

Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *on cherche les réels* λ *pour lesquels* $A - \lambda \cdot I_2$ *n'est pas inversible c'est-à-dire tels que* $\det(A - \lambda \cdot I_2) = 0$.

Test 2 (*Voir solution.*)

1. *Déterminer le spectre de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. *Déterminer le spectre de*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2

Il existe des matrices qui ne possèdent aucune valeur propre.

Exemple 5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors* A *ne possède pas de valeurs propres !*

1.2 Sous-espaces propres

Définition 3 (Sous-espaces propres)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.
Le **sous-espace propre de** A associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\right\} = \ker(A - \lambda \cdot I_n).$$

Remarque 3

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Tout sous-espace propre de* A *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. *En effet,*
2. *Le sous-espace propre* $E_\lambda(A)$ *est l'ensemble formé des vecteurs propres de* A *associés à la valeur propre* λ ***et du vecteur nul***.

Méthode 4

Étant données une matrice A *et une valeur propre* λ *de* A*, pour déterminer l'espace propre* $E_\lambda(A)$ *on résout le système linéaire* $AX = \lambda X$ *d'inconnue* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 6

On reprend la matrice A *de l'exemple 4 dont le spectre est* $\{2, 4, 6\}$ *:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons* $E_2(A)$.

2. *Déterminons* $E_4(A)$.

Test 3 (*Voir solution.*)

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*. Déterminer une base de* $E_6(A)$.

2 Polynômes annulateurs

Définition 4 (Polynômes de matrices)

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

On dit que $P(A)$ est un polynôme de matrice.

Exemple 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Si* $P = X^2 - 2X + 3$ *alors*

$$P(A) = \qquad .$$

2. *Si* $P = 1$ *alors*

$$P(A) = \quad .$$

3. *Si* $P = (X-1)(X^3-2)$ *alors*

$$P(A) = \qquad .$$

Définition 5 (Polynôme annulateur)

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que P est un **polynôme annulateur** de A si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exemple 8

1. *Le polynôme nul est un polynôme annulateur de toute matrice et tout endomorphisme.*
2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrons que* $P = X^2 + 2X - 3$ *est un polynôme annulateur de* A.

Proposition 2 (Polynôme annulateur et valeurs propres)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme annulateur de A.
Si un réel λ est une valeur propre de A alors c'est une racine de P. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid P(\lambda) = 0\}.$$

Les valeurs propres sont donc à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur.

Remarque 4

1. *Attention, une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre !*
   Par exemple, le polynôme nul est un polynôme annulateur de I_3 *et* 4 *est racine du polynôme nul. En revanche,* 4 *n'est pas une valeur propre de* I_3.
2. *Une matrice carrée possède toujours un polynôme annulateur* ***non nul*** *(voir Test 5).*

Méthode 5 (*Déterminer les valeurs propres avec un polynôme annulateur*)

Si on connaît un polynôme annulateur P *d'une matrice* A*, pour en déterminer les valeurs propres on procède ainsi :*

1. *on détermine les racines de* P *;*
2. *pour chaque racine* λ *de* P *on vérifie si* λ *est une valeur propre de* A
   - *soit en résolvant* $AX = \lambda X$ *:* λ *est alors valeur propre si et seulement si le système possède des solutions* ***non nulles****;*
   - *soit en montrant que* $A - \lambda I_n$ *est/n'est pas inversible.*

Exemple 9

On reprend l'exemple 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *dont un polynôme annulateur est* $P = X^2 + 2X - 3$*. Déterminons son spectre.*

Remarque 5 (***Polynôme annulateur et inversibilité***)

Soit A *une matrice carrée.*

1. *Si* A *possède un polynôme annulateur* P *dont le terme constant est* ***non nul*** *alors* 0 *n'est pas racine de* P *donc n'est pas valeur propre de* A.

2. *Dans ce cas,* A *est inversible et si on note* $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ *avec* $a_0 \neq 0$ *on a :*

Exemple 10

On reprend l'exemple 8 : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} - 3$ *est une polynôme annulateur de* A. *Montrons que* A *est inversible et déterminons* A^{-1}.

Test 4 (***Voir solution.***)

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A}$. *En déduire un polynôme annulateur de* A.
2. *Déterminer les valeurs propres possibles de* A. *En déduire le spectre de* A *et une base de chaque espace propre.*
3. *Montrer que* A *est inversible et déterminer son inverse.*

Test 5 (***Voir solution.***)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice carrée possède un polynôme annulateur non nul (le raisonnement est le même pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Rappeler la dimension de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et en déduire que la famille* $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \dots, \mathrm{A}^{n^2})$ *est liée.*
2. *En déduire qu'il existe* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ *avec* $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ *tel que*

$$\mathrm{P} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{X} + \cdots + \lambda_{n^2} \mathrm{X}^{n^2}$$

   soit un polynôme annulateur de A.

3 Réduction des matrices carrées

3.1 Famille de vecteurs propres

Proposition 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de A et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ soit $\mathscr{F}_i$ une famille libre de $E_{\lambda_i}(A)$. Alors la famille

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \dots \cup \mathscr{F}_p$$

est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 6

En particulier, si $X_1, \dots, X_p$ *sont des vecteurs propres de* A *associés à des valeurs propres distinctes alors la famille* $(X_1, \dots, X_p)$ *est une famille libre de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On en déduit donc :

Conséquence(s) 3 (Nombre maximal de valeurs propres distinctes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.
De plus, si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) \leqslant n.$$

Exemple 11

On reprend l'exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a vu que* 0, 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* A *donc :*

3.2 Diagonalisabilité

Définition 6 (Diagonalisabilité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Proposition 4 (Critère de diagonalisabilité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = n.$$

Méthode 6 (*Déterminer les matrices* P *et* D *en cas de diagonalisabilité*)

Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *pour étudier si elle est diagonalisable on :*

1. *détermine l'ensemble des valeurs propres et pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé,*
2. *si la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut* n *c'est que la matrice est diagonalisable. Sinon c'est qu'elle ne l'est pas.*

Dans le cas où A *est diagonalisable, on obtient les matrices* P *et* D *de la façon suivante :*

1. *la matrice diagonale* D *est obtenue en mettant sur la diagonale les valeurs propres, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé ;*
2. *les colonnes de* P *sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres que l'on place dans le même ordre que les valeurs propres correspondantes.*

Exemple 12

1. *On reprend l'exemple 6 : on a vu que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *a pour spectre l'ensemble* $\{2,4,6\}$ *et que*

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

2. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *D'après le test 2, le spectre de* B *est* $\{0, 3\}$.

Test 6 (***Voir solution.***)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* A.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $A = PDP^{-1}$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le spectre de* B.
2. *Trouver une base de chaque espace propre.*
3. *La matrice* B *est-elle diagonalisable ? Si oui déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $B = PDP^{-1}$.

Proposition 5 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Exemple 13

On reprend l'exemple 1 : on a $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et on a vu que les vecteurs* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres de* A *associés aux valeurs propres* 1, 2 *et* 0.

Remarque 7

Ce n'est pas une condition nécessaire comme l'illustre le point 2 de l'exemple 12.

Test 8 (*Voir solution.*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* 0, 1 *et* 4 *sont les trois valeurs propres de* A *et déterminer les sous-espaces propres associés.*
2. *En déduire une matrice diagonale* D *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible* P *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à* 1, *telles que :* $A = PDP^{-1}$.

Théorème 1

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable.

Exemple 14

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

4 Exemples et applications

4.1 Puissance de matrices

La diagonalisation fournit une méthode efficace pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.
En effet, soit A une matrice diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

On montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Comme D est diagonale, le calcul de D^n est facile.

Test 9 (***Voir solution.***)

On considère

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $T^2 - 3T$ *et en déduire un polynôme annulateur de* T.
2. *Déterminer le spectre de* T *et une base de chaque sous-espace propre.*
3. *En déduire une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $T = PDP^{-1}$.
4. *En déduire* T^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Étude de suites récurrentes linéaires

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4u_n & - & 6v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & 5vn & & \\ w_{n+1} & = & 3u_n & + & 6v_n & + & 5w_n. \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Montrer que les valeurs propres de A sont -1, 5 et 2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.

4. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n puis u_n, v_n et w_n en fonction de n.

5 Objectifs

1. Savoir déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée.
2. Savoir déterminer les valeurs propres d'une matrice.
3. Étant donné un polynôme P, savoir exprimer P(A) pour A une matrice carrée.
4. Savoir déterminer le spectre à partir d'un polynôme annulateur.
5. Savoir déterminer si une matrice est diagonalisable ou non.
6. Savoir déterminer les matrices P et D telles que $D = P^{-1}AP$ lorsque A est diagonalisable.