TP 5-Découverte des chaînes de Markov

Durée : 3h

1 Chaîne de Markov

1.1 Notion de chaîne de Markov

Définition 1 (Chaîne de Markov)

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ et à valeurs dans un ensemble E. On dit que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \mathrm{E}^{n+2}$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = x_0, \ldots, \mathrm{X}_n = x_n) > 0$ on a

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=x_0]\cap\cdots\cap[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]).$$

Dans ce cas, on dit que

- E est l'**espace d'états** de la chaîne de Markov ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ la probabilité $\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x]}\left([\mathrm{X}_{n+1} = y]\right)$, notée $p_{x,y}(n)$ est appelée la **probabilité de transition** pour aller de l'état x à l'état y à l'instant n.

Remarque 1

Intuitivement, la variable n représente le temps et la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente l'évolution d'une grandeur aléatoire au cours du temps. La relation

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=x_0]\cap\cdots\cap[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}])$$

signifie que le futur *(l'état X_{n+1} à l'instant $n+1$) ne dépend du passé (les états $\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n$) que par le présent (l'état X_n à l'instant n).*

Définition 2 (Chaîne de Markov homogène)

Une chaîne de Markov $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble E est dite **homogène** si pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ les probabilités de transition pour aller de l'état x à l'état y ne dépendent pas du temps :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{x,y}(n) = p_{x,y}(0)$$

autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x]}\left([\mathrm{X}_{n+1} = y]\right) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=x]}\left([\mathrm{X}_1 = y]\right)$$

On note alors simplement $p_{x,y}$ les probabilités de transition.

Aramis le chat répartit son temps entre ses trois occupations préférées : dormir, manger et faire sa toilette. Au début de la journée, il dort puis il change d'activité toutes les heures de la façon suivante :

- Si, à l'heure n, il est en train de manger, alors il va dormir l'heure suivante avec probabilité 0.3 et faire sa toilette avec probabilité 0.7.
- Si, à l'heure n, il est en train de dormir, alors à l'heure $n+1$ il continue de dormir avec probabilité 0.4, il va manger avec probabilité 0.3 et il va faire sa toilette avec probabilité 0.3.
- Si, à l'heure n, il est en train de faire sa toilette, il va manger l'heure suivante avec probabilité 0.4 et il va dormir avec probabilité 0.6.

On s'intéresse ici à l'évolution du comportement d'Aramis. On numérote les activités de 1 à 3 (1 :« Dormir », 2 :« Manger », 3 :« Faire sa toilette ») et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle X_n la variable aléatoire égale à l'état du chat à l'instant n.

► Justifier que $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov

L'état d'Aramis à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'état n. Ainsi pour tout $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \{1,2,3\}^{n+2}$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}_0 = x_0, \ldots, \mathrm{X}_n = x_n) > 0$ on a

$$\mathrm{P}_{[\mathrm{X}_0=x_0]\cap\cdots\cap[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]) = \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_n=x_n]}([\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1}]).$$

► Déterminer les probabilités de transition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire sur la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$p_{1,1}(n) = 0.4 \quad ; \quad p_{1,2}(n) = 0.3 \quad ; \quad p_{1,3}(n) = 0.3$$

$$p_{2,1}(n) = 0.3 \quad ; \quad p_{2,2}(n) = 0 \quad ; \quad p_{2,3}(n) = 0.7$$

$$p_{3,1}(n) = 0.6 \quad ; \quad p_{3,2}(n) = 0.4 \quad ; \quad p_{3,3}(n) = 0$$

Les probabilités de transition ne dépendent pas de l'instant n. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc homogène.

Diagramme de transition

Une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un nombre fini d'états peut être représentée par un graphe orienté pondéré :

- les sommets correspondent aux états ;
- une flèche relie le sommet x aux sommets y si $p_{x,y} > 0$; cette flèche est pondérée par $p_{x,y}$.

Ce graphe s'appelle le **diagramme de transition** de la chaîne de Markov.

La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrivant le comportement d'Aramis le chat a trois états (1, 2 et 3). Son diagramme de transition va donc comporter 3 sommets. Lorsqu'Aramis est dans l'état 1 (« Dormir ») l'instant suivant

- il reste dans l'état 1 avec probabilité 0.4 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 1 pondérée par 0.4 ;
- il va dans l'état 2 (« Manger ») avec probabilité 0.3 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 2 pondérée par 0.3 ;
- il va dans l'état 3 (« Faire sa toilette ») avec probabilité 0.3 : le diagramme de transition comporte une flèche du sommet 1 vers le sommet 3 pondérée par 0.3.

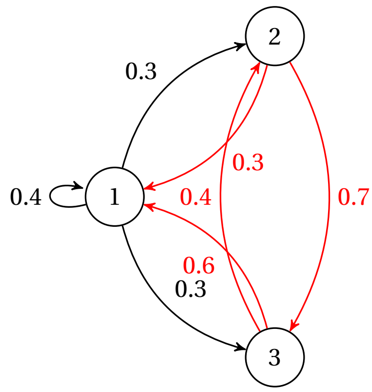

FIGURE 1 – Diagramme de transition

► Compléter le diagramme de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrivant le comportement d'Aramis.

1.2 Matrice de transition

Définition 3 (Matrice de transition)

On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un nombre fini m d'états numérotés de 1 à m. La **matrice de transition** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la matrice $A = (p_{i,j})$ où $p_{i,j}$ est la probabilité de transition pour passer de l'état i à l'état j. Autrement dit, $A = (p_{i,j})$ est la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ définie définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2, \quad p_{i,j} = P_{[X_0=i]}(X_1 = j).$$

- Déterminer la matrice de transition A de la chaîne de Markov de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrivant le comportement d'Aramis.

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$ le vecteur définissant la loi de X_n.

- A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et des coefficients de la matrice de transition A.

La formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ donne :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{[X_n=1]}P(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{[X_n=2]}P(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) + P_{[X_n=3]}P(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) \\ &= 0.4 \times P(X_n = 1) + 0.3 \times P(X_n = 2) + 0.6 \times P(X_n = 1) \end{aligned}$$

- Exprimer de même $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$.

De même

$$P(X_{n+1} = 2) = 0.3 \times P(X_n = 1) + 0.4 \times P(X_n = 3)$$

et

$$P(X_{n+1} = 3) = 0.3 \times P(X_n = 1) + 0.7 \times P(X_n = 2).$$

On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$.

- Exprimer U_n en fonction de A et de U_0. Que signifie le choix $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Comment obtient-on U_n dans ce cas ?

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$, on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = U_0 A^n.$$

Le choix de $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ signifie que l'état initial d'Aramis est presque sûrement l'état 1. Cela correspond au fait qu'au début de la journée il dort.
On remarque alors que U_n est la première ligne de A^n.

- Avec `Scilab`, calculer A^5, A^{10}, A^{20}, A^{100}. Que remarque-t-on ?

On remarque que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de A semble converger.

- Avec `Scilab` déterminer le spectre de A. En déduire que A est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec la commande `Spec`, on trouve que A possède trois valeurs propres distinctes : 1, -0.1 et -0.5.
Comme A est une matrice 3×3 avec 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.
Après un calcul un peu laborieux on trouve qu'en posant

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 1 & 13 & -9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$.

Un autre calcul donne $P^{-1} = \frac{1}{220}\begin{pmatrix} 96 & 56 & 68 \\ -15 & 5 & 10 \\ -11 & -11 & 22 \end{pmatrix}$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{220}\begin{pmatrix} (96+135(-0.1)^n - 11(-0.5)^n) & (56-45(-0.1)^n - 11(-0.5)^n) & (68-90(-0.1)^n + 22(-0.5)^n) \\ (96-195(-0.1)^n + 99(-0.5)^n) & (56+65(-0.1)^n - 45(-0.5)^n) & (68+65(-0.1)^n - 198(-0.5)^n) \\ (96-30(-0.1)^n - 66(-0.5)^n) & (56+10(-0.1)^n - 66(-0.5)^n) & (68+20(-0.1)^n + 132(-0.5)^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Simulation avec Scilab

2.1 Simulation des trajectoires

Définition 4 (Trajectoire d'une chaîne de Markov)

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour $\omega \in \Omega$, on appelle **trajectoire de taille** n la suite finie $(X_0(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

Méthode 1 (***Simulation de trajectoire avec*** `Scilab`)

Si la matrice de transition `A` *est déjà définie dans* `Scilab`*, la commande*

`grand(n,'markov', A ,x0)`

permet de simuler une trajectoire de taille `n` *dont l'état initial est* `x0` *où* `A` *est la matrice de transition de la chaîne de Markov :*

- *la trajectoire obtenue démarre à l'instant* 1 *;*
- *les états sont nommées* 1,..., m *où* m *est la taille de* `A`*.*

► Simuler une trajectoire de la vie d'Aramis sur 100 heures. Combien d'heure passe-t-il à dormir ? Manger ?

```
tabul(grand(100,'markov',A,1))
```

2.2 Comportement asymptotique

On souhaite déterminer le comportement du chat après n heures lorsque n tend vers $+\infty$. Pour cela, on compare

- la loi théorique de X_n donnée par le vecteur U_n,
- une valeur approchée de U_n obtenue en déterminant l'effectif de chaque état pour un nombre `N` de simulations de trajectoires de taille `n`.

► Partant de l'état initial `x0` quelles commandes faut-il utiliser pour obtenir U_n ?

```
B=A^n
B(x0,:)
```

On considère le programme incomplet suivant :

```
//Valeur des parametres
N=input('Entrer le nombre de simulations')
n=input('Entrer la taille des trajectoires')
x0 = input('Entrer etat initial')

//Distribution theorique
A=[0.4,0.3,0.3;0.3,0,0.7;0.6,0.4,0]
B=A^n
P=B(x0,:)

//Valeurs observees
Obs = zeros(1,N)
for i=1:N
    trajectoire = grand(n,'markov',A,x0)
    Obs(i) = trajectoire(n)
end

//Calcul des effectifs observes
v=tabul(Obs)

clf()
//Diagramme des frequences observees
bar(v(:, 1) + 0.5,v(:,2)/N,width=0.4,'red')
//Diagramme de la distribution theorique
bar(1:3,P,width=0.4)
```

- Compléter le programme ci-dessus qui
  - demande à l'utilisateur un entier `N`, un entier `n` et un état initial `x0`,
  - stocke dans la variable `P` la loi théorique de X_n donnée par le vecteur U_n,
  - simule `N` trajectoires et stocke dans `Obs` les réalisations de X_n,
  - affiche le diagramme en barre des fréquences observées et de la distribution théorique.
- Exécuter le programme pour `N=1000`, `n=50`, `x0=1`.
- Observer le diagramme obtenu et comparer le avec les diagrammes obtenues pour les mêmes valeurs de `N` et de `n` mais en prenant comme état initial 2 puis 3. Que remarque-t-on ?

On obtient sensiblement les mêmes diagrammes avec les états initiaux 2 et 3.

- Que cela signifie-t-il sur le comportement à terme d'Aramis ?

Cela signifie que le comportement à terme d'Aramis ne dépend pas de son état initial.

- En admettant que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (c'est-à-dire que les trois suites $(P(X_n=1))_{n\in\mathbb{N}}$, $(P(X_n=2))_{n\in\mathbb{N}}$, $(P(X_n=3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent) qu'elle relation peut-on en déduire entre sa limite U_∞ et A ?

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $U_{n+1}=U_nA$ on peut en déduire que

$$U_\infty = U_\infty A$$

Définition 5 (Distribution stationnaire)

Soient $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Un vecteur ligne π dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients vaut 1 est appelé **distribution stationnaire** ou **loi stationnaire** si

$$\pi A = \pi$$

où A est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

Remarque 2

1. *Si π est une distribution stationnaire alors ${}^t\pi$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.*
2. *On peut montrer qu'une chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini possède toujours une distribution invariante.*
3. *Avec une hypothèse supplémentaire (appelée* irréductibilité*) on peut montrer que chaîne de Markov homogène sur un espace d'états fini possède une unique distribution invariante.*

- Que représente le vecteur U_∞ pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Le vecteur U_∞ (s'il existe) est donc une loi stationnnaire pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- A l'aide du calcul de A^n réalisé précédemment, déterminer une loi stationnaire de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Avec le calcul précédent de A^n on remarque

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{220}\begin{pmatrix} 96 & 56 & 68 \\ 96 & 56 & 68 \\ 96 & 56 & 68 \end{pmatrix} = A_\infty.$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $A^{n+1}=A^nA$ donc par passage à la limite :

$$A_\infty = A_\infty A.$$

En multipliant à gauche membre à membre par $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ on voit que les lignes de A_∞ sont des lois stationnaires pour la chaîne de Markov. Ainsi

$$\frac{1}{220}\begin{pmatrix}96 & 56 & 68\end{pmatrix}$$

est une loi stationnaire de la chaîne de Markov.