ECE2-Colle 16

03/03/21

1 Convergence et approximation

Loi faible des grands nombres : inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Convergence en loi : définition de la convergence en loi, critère pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, application : si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ pour $n > \lambda$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème Central limite : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi admettant une variance σ^2 non nulle et une espérance m alors $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. De manière équivalente $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Approximation de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ par une loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$. Corollaire : pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Approximation : approximation des lois de Poissons, des lois binomiales par des lois normales. En pratique, si $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ on approxime $P(S_n = k)$ par $P(k - 0,5 \leqslant Z_n \leqslant k + 0,5)$ où $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$ et si $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\alpha)$ on approxime $P(S_n = k)$ par $P(k - 0,5 \leqslant Z_n \leqslant k + 0,5)$ où $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir utiliser les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
2. Savoir montrer qu'une suite de variables aléatoires converge en loi.
3. Savoir montrer qu'une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ converge en loi vers une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
4. Savoir montrer une convergence en loi avec le TCL.
5. Savoir utiliser le TCL pour faire des approximations.

3 Questions de cours

- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Définition de convergence en loi, critère de converge en loi pour les variables à valeurs dans $\mathbb{Z}$
- Loi faible des grands nombres, Théorème Central limite.