TD11-Réduction

Exercice 1

1. *Vérifier que le vecteur* $u = (1, 0, 3)$ *est un vecteur propre de l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = (2x - z, y, 3x - 2z).$$
Préciser la valeur propre associée.
2. *Vérifier que le vecteur* X^3 *est un vecteur propre de l'endomorphisme* φ *de* $\mathbb{R}_4[X]$ *défini par*
$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \quad \varphi(P) = XP'(X).$$
Préciser la valeur propre associée.
3. *Vérifier que le vecteur* $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Préciser la valeur propre associée.

Exercice 2

Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit ψ *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi((x, y, z)) = (x + y + z, 2y + 2z, 3z).$$

1. *Déterminer la matrice de* ψ *dans la base canonique.*
2. *En déduire le spectre de* ψ.
3. *Reprendre les questions précédentes avec les applications* f *et* φ *de l'exercice 1.*

Exercice 4

1. *Déterminer une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme* ψ *de l'exercice 3.*
2. *Déterminer une base de chaque sous-espace propre de la matrice* A *de l'exercice 2*

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *tel que*
$$f^3 - 7f + 6 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}.$$
Déterminer les valeurs propres possibles de f. *L'endomorphisme* f *est-il inversible ? Si oui, déterminer son inverse en fonction de* f.
2. *Montrer que le polynôme* $P = X^2 + X - 6$ *est un polynôme annulateur de la matrice* $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *En déduire les valeurs propres de* H. *La matrice* H *est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.*

Exercice 6

Soient a, b, c *trois réels tous non nuls et*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M^2 = 3M$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.
2. Déterminer le spectre de M et, pour chaque valeur propre, une base de l'espace propre associé.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 7

Soient a, b, c trois réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquels la matrice A est diagonalisable.

Exercice 8

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (X+1)P'(X) + P(X) \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ et une base de chaque espace propre.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 9

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et ses sous-espaces propres.
2. En déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 10

Partie A : pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y); \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $(1, -2, 1)$ et telle que :
$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. Déterminer P^{-1}.
5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.
En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :
$$B = PD_BP^{-1}.$$
6. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B : on souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 11

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

   On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
   $$AM = MA.$$
   On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
   $$DN = ND.$$
4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
   $$M \in C_A \Longleftrightarrow N \in C_D.$$
6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.
7. En déduire :
   $$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$
8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 12

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2.$$
On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
   (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.
   (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
3. Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :
```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[.......]
disp(.....)
```
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2).$
   (b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.
   (c) En déduire A^n.