Chapitre 14 : Correction des tests

Test 1 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 2 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
2. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Test 3 (***Voir solution.***)

Déterminer la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable de la fonction f *de l'exemple ci-dessus.*

Test 4 (***Voir solution.***)

Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$;
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (1 + xy)(2x - 2y + 1)$.

Test 5 (***Voir solution.***)

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

Test 6 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles.*

1. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
2. *La fonction* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Test 7 (***Voir solution.***)

Déterminer les dérivées partielles $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *de la fonction* f *de l'exemple ci-dessus. On pourra utiliser le test 3.*

Test 8 (***Voir solution.***)

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$. *Déterminer les dérivées partielles secondes.*

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} \ln(1 + x^2 + y^2)$
2. $f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + e^y)$.
3. $f_3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 + xy)(2x - 2y + 1)$
4. $f_4 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + 2xy + \frac{1}{1+x^2}$.

Test 9 (***Voir solution.***)

Représenter chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ *suivant et préciser s'il est ouvert, fermé, borné (ou non).*

1. $\mathrm{U}_1 = [0, 1] \times \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{U}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$,
3. $\mathrm{U}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$,
4. $\mathrm{U}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

1. *Justifier que* f *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Déterminer les points critiques de* f.
3. *Pour chaque point critique, déterminer s'il s'agit d'un extremum local ou d'un point selle.*
4. *Les extrema locaux trouvés sont-ils globaux ?*

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncé.*)

Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$x^2 - 2xy + y^2 + 1 = (x-y)^2 + 1 > 0.$$

Ainsi la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.
Donc la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $(x,y) \mapsto e^y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition. Donc, par somme, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2+e^y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$. La fonction logarithme est continue sur $[1,+\infty[$. Par composition, la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1+x^2+e^y)$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Les fonctions $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$ sont polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$.*
   La fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ donc, par quotient, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   Enfin, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncé.*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\partial_2(f)(x,y)$ existe et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 4xy + 6x^2y.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncé.*)

Pour montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 existent, on va utiliser les résultats sur les fonctions de classe C^1 (c'est ainsi que l'on procédera toujours désormais).

1. *Les fonctions $(x,y) \mapsto xy$ et $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*
   - *La fonction exponentielle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par composition, $(x,y) \mapsto e^{xy}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*
   - *La fonction $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, $(x,y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*

   Par produit, la fonction f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

   et

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x,y) = xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

2. *La fonction f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, elle possède des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a :*

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = y(2x-2y+1) + 2(1+xy)$$

   et

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(f)(x,y) = x(2x-2y+1) - 2(1+xy).$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncé.*)

Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ *et* $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, on a :*

$$x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1>0.$$

Donc la fonction $(x,y)\mapsto x^2-2xy+y^2+1$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, la fonction $(x,y)\mapsto\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+1}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que quotient de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$.

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*. La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1,+\infty[$*. La fonction logarithme est de classe* C^1 *sur* $[1,+\infty[$*. Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\ln(1+x^2+e^y)$ *est donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus on a :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=\frac{e^y}{1+x^2+e^y}$$

2. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.
Enfin, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy+\frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus on a :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f)(x,y)=1+2y-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=2x.$$

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncé.*)

D'après le test 3, on sait :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f)(x,y)=3y^2-4xy+6x^2y.$$

La fonction $\partial_2(f)$ *est polynomiale donc de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*. En particulier, les dérivées partielles d'ordre 2* $\partial^2_{1,2}(f)$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)$ *sont définies sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus on a :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial_1(\partial_2(f))(x,y)=-4y+12xy$$

et

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\partial_2(\partial_2(f))(x,y)=6y-4x+6x^2.$$

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *Les fonctions* $(x,y)\mapsto xy$ *et* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction exponentielle est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto e^{xy}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
   - *La fonction* $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ *est de classe* C^2 *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc par composition,* $(x,y)\mapsto\ln(1+x^2+y^2)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

   Par produit, la fonction f_1 *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 4 on a :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_1)(x,y)=ye^{xy}\ln(1+x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_1)(x,y) = xe^{xy}\ln(1+x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{1,2}(f_1)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left((1+xy)\ln(1+x^2+y^2) + \frac{2y^2}{1+x^2+y^2} + \frac{2x^2}{1+x^2+y^2} - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\partial^2_{1,1}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left(y^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right)$$

et

$$\partial^2_{2,2}(f_1)(x,y) = e^{xy}\left(x^2\ln(1+x^2+y^2) + \frac{4xy}{1+x^2+y^2} + \frac{2-2y^2+2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right).$$

2. *La fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto 1+x^2$ *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. La fonction* $(x,y)\mapsto e^y$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *par composition. Donc, par somme,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2+e^y$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et à valeur dans* $[1,+\infty[$*. La fonction logarithme est de classe* C^2 *sur* $[1,+\infty[$*. Par composition, la fonction* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \ln(1+x^2+e^y)$ *est donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 6, on a :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_2)(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+e^y}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_2)(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2+e^y}.$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{2,1}(f_2)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f_2)(x,y) = -\frac{2xe^y}{(1+x^2+e^y)^2}$$

$$\partial^2_{2,2}(f_2)(x,y) = \frac{e^y(1+x^2+e^y)-e^{2y}}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{e^y(1+x^2)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

et

$$\partial^2_{1,1}(f_2)(x,y) = \frac{2(1+x^2+e^y)-4x^2}{(1+x^2+e^y)^2} = \frac{2(1-x^2+e^y)}{(1+x^2+e^y)^2}$$

3. *La fonction* f_3 *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 4 :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_3)(x,y) = y(2x-2y+1)+2(1+xy)$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_3)(x,y) = x(2x-2y+1)-2(1+xy).$$

Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{2,1}(f_3)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f_3)(x,y) = 4x-4y+1$$

$$\partial^2_{1,1}(f_3)(x,y) = 4y \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f_3)(x,y) = -4x.$$

4. *Les fonctions* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+2xy$ *et* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *sont polynomiales donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*.*
La fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto 1+x^2$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}^2$ *donc, par quotient,* $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto \frac{1}{1+x^2}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*.*
Enfin, f_4 *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$ *en tant que somme de fonctions de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$*. De plus, d'après le test 6 :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_1(f_4)(x,y) = 1+2y-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

et

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \partial_2(f_4)(x,y) = 2x.$$

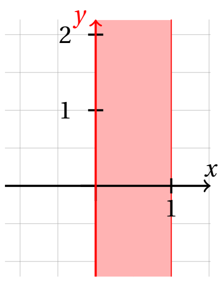
Donc on obtient, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *:*

$$\partial^2_{1,2}(f_4)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f_4)(x,y) = 2$$

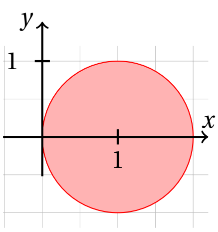
$$\partial^2_{1,1}(f_4)(x,y) = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}\quad \text{et}\quad \partial^2_{2,2}(f_4)(x,y) = 0.$$

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncé.*)

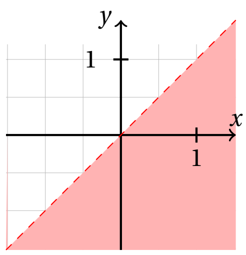
1. *L'ensemble* $[0,1]\times\mathbb{R}$ *est fermé et non borné.*



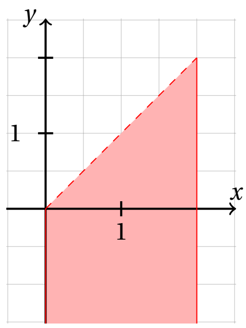
2. *L'ensemble* U_2 *est fermé et bornée.*



3. *L'ensemble* U_3*, est ouvert et non borné.*



4. *L'ensemble* U_4 *est non borné. Il n'est ni ouvert ni fermé.*



Correction du test 10 (*Retour à l'énoncé.*)

1. *La fonction* f *est polynomiale donc de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Pour déterminer les points critiques, il faut calculer le gradient. Or pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, on a*

$$\partial_1(f)(x,y) = 2xy+y^2-y\quad \text{et}\quad \partial_2(f)(x,y) = 2xy+x^2-x.$$

On en déduit donc : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}2xy+y^2-y\\ 2xy+x^2-x\end{pmatrix}$. *Or, pour tout* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2xy+y^2-y = 0\\ 2xy+x^2-x = 0\end{cases} &\iff \begin{cases} 2xy+y^2-y = 0\\ x^2-y^2-x+y = 0\end{cases}\quad (\mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1)\\
&\iff \begin{cases} 2xy+y^2-y = 0\\ (x-y)(x+y-1) = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 2xy+y^2-y = 0\\ x = y\end{cases}\ \text{ou}\ \begin{cases} 2xy+y^2-y = 0\\ x = 1-y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3y^2-y = 0\\ x = y\end{cases}\ \text{ou}\ \begin{cases} 2(1-y)y+y^2-y = 0\\ x = 1-y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y(3y-1) = 0\\ x = y\end{cases}\ \text{ou}\ \begin{cases} y(1-y) = 0\\ x = 1-y\end{cases}\\
&\iff (x,y) = (0,0)\ \text{ou}\ (x,y) = (1/3,1/3)\ \text{ou}\ (x,y) = (1,0)\ \text{ou}\ (x,y) = (0,1).
\end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$, $(1/3,1/3)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.

3. *On va étudier la hessienne en chaque point critique. Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:*

$$\partial^2_{1,1}(f)=2y \quad ; \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=2x \quad ; \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=2x+2y-1.$$

   (a) *Étude en $(0,0)$. On a*

$$\nabla^2(f)(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

   On vérifie les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont 1 et -1. Ainsi, $(0,0)$ est une point selle.

   (b) *Étude en $(1,0)$. On a*

$$\nabla^2(f)(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ sont $1+\sqrt{2}>0$ et $1-\sqrt{2}<0$.
   Ainsi, $(1,0)$ est une point selle.

   (c) *Étude en $(0,1)$. On a*

$$\nabla^2(f)(0,1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,1)$ sont $1+\sqrt{2}>0$ et $1-\sqrt{2}<0$.
   Ainsi, $(0,1)$ est une point selle.

   (d) *Étude en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. On a*

$$\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ sont 1 et $\frac{1}{3}$.
   Ainsi $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ est un minimum local.

4. *Le seul extremum local est $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ qui est un minimum. Or $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}$ et pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a*

$$f(y,y)=y^2(2y-1).$$

Ainsi, $\lim_{y\to-\infty} f(y,y)=-\infty$ et donc le minimum n'est pas global.