TD9-Applications linéaires

Exercice 1.

1. Soient $((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f\left((x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2)\right) &= f\left((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2, t_1 + \lambda t_2)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1 + \lambda x_2) - (t_1 + \lambda t_2) & y_1 + \lambda y_2 + t_1 + \lambda t_2 \\ 3(x_1 + \lambda x_2) + z_1 + \lambda z_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 - t_1 & y_1 + t_1 \\ 3x_1 + z_1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x_2 - t_2 & y_2 + t_2 \\ 3x_2 + z_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f\left((x_1, y_1, z_1, t_1)\right) + \lambda f\left((x_2, y_2, z_2, t_2)\right). \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $((x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\left((x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2, t_2)\right) = f\left((x_1, y_1, z_1, t_1)\right) + \lambda f\left((x_2, y_2, z_2, t_2)\right).$$

   L'application f est donc linéaire.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} h(P + \lambda Q) &= X(P + \lambda Q)(X + 1) - (X + 1)(P + \lambda Q)(X) \\ &= XP(X + 1) - (X + 1)P(X) + \lambda\left(XQ(X + 1) - (X + 1)Q(X)\right) \\ &= h(P) + \lambda h(Q). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q).$$

   L'application h est donc linéaire.

3. Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(M + \lambda N) &= (M + \lambda N)_{1,1} + (M + \lambda N)_{2,2} + (M + \lambda N)_{3,3} + (M + \lambda N)_{4,4} \\ &= M_{1,1} + \lambda N_{1,1} + M_{2,2} + \lambda N_{2,2} + M_{1,1} + \lambda N_{3,3} + M_{4,4} + \lambda N_{4,4} \\ &= g(M) + \lambda g(N). \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(M + \lambda N) = g(M) + \lambda g(N).$$

   L'application g est donc linéaire.

Exercice 2.

1.
   - Montrons que f est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= X^2(P + \lambda Q)'(X) - 2X(P + \lambda Q)(X) \\ &= X^2(P'(X) + \lambda Q'(X)) - 2XP(X) - 2\lambda XQ(X) \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

     Ainsi :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(P + \lambda Q) = f(P) + \lambda f(Q).$$

     L'application f est donc linéaire.
   - Montrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$f(P) = X^2(a_1 + 2a_2 X) - 2X(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = -2a_0 X - a_1 X^2.$$

     Ainsi, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. On en déduit donc que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et est par conséquent un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.
   - Montrons que ψ est linéaire. Soient $(X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(X + \lambda Y) &= A(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y)B \\ &= AX + \lambda AY - XB - \lambda YB \\ &= AX - XB + \lambda(AY - YB) \\ &= \psi(X) + \lambda \psi(Y). \end{aligned}$$

     Ainsi :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \psi(X + \lambda Y) = \psi(X) + \lambda \psi(Y).$$

     L'application ψ est donc linéaire.
   - Il est clair que ψ est à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = 3x - 2y + 4z.$$
   - Montrons que f est linéaire. Soient $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} f\left((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)\right) &= f\left((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)\right) \\ &= 3(x_1+\lambda x_2) - 2(y_1+\lambda y_2) + 4(z_1+\lambda z_2) \\ &= 3x_1 - 2y_1 + 4z_1 + \lambda(3x_2 - 2y_2 + 4z_2) \\ &= f\left((x_1,y_1,z_1)\right) + \lambda f\left((x_2,y_2,z_2)\right). \end{aligned}$$
   Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$f\left((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)\right) = f\left((x_1,y_1,z_1)\right) + \lambda f\left((x_2,y_2,z_2)\right).$$
   L'application f est donc linéaire.
   - Montrons que $F = \ker(f)$:
$$\begin{aligned} F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x,y,z)) = 0\} \\ &= \ker(f). \end{aligned}$$

2. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^4$ par :
$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad g((x,y,z,t)) = (x-y, 2x+z-t).$$
   - Montrons que g est linéaire. Soient $((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} & g\left((x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2)\right) \\ &= g\left((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2, t_1+\lambda t_2)\right) \\ &= (x_1+\lambda x_2 - (y_1+\lambda y_2), 2(x_1+\lambda x_2) + z_1 + \lambda z_2 - (t_1+\lambda t_2)) \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1 + z_1 - t_1) + \lambda(x_2 - y_2, 2x_2 + z_2 - t_2) \\ &= g\left((x_1,y_1,z_1,t_1)\right) + \lambda g\left((x_2,y_2,z_2,t_2)\right). \end{aligned}$$
   Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$g\left((x_1,y_1,z_1,t_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2,t_2)\right) = g\left((x_1,y_1,z_1,t_1)\right) + \lambda g\left((x_2,y_2,z_2,t_2)\right).$$
   L'application g est donc linéaire.
   - Montrons que $G = \ker(g)$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$
$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in G &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & z & = & t \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff g((x,y,z,t)) = (0,0) \\ &\iff (x,y,z,t) \in \ker(g). \end{aligned}$$
   Ainsi $G = \ker(g)$.

3. Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad h(P) = P(1) - P'(1).$$
   - Montrons que h est linéaire. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} h\left(P + \lambda Q\right) &= (P+\lambda Q)(1) - (P+\lambda Q)'(1) \\ &= P(1) + \lambda Q(1) - P'(1) - \lambda Q'(1) \\ &= h\left(P\right) + \lambda h(Q). \end{aligned}$$
   Ainsi pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$h(P + \lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q).$$
   L'application h est donc linéaire.
   - Montrons que $H = \ker(h)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
$$P \in H \iff P(1) = P'(1) \iff P(1) - P'(1) = 0 \iff h(P) = 0 \iff P \in \ker(h).$$
   Ainsi $H = \ker(h)$.

Exercice 4.

1. (a) On considère l'application f de l'exercice 1.
   - Déterminons le noyau de f. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :
$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in \ker(f) &\iff f((x,y,z,t)) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & & & + & t & = & 0 \\ 2x & & & & & - & t & = & 0 \\ 3x & & & + & z & & & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2x \\ t & = & 2x \\ z & = & -3x. \end{array}\right. \end{aligned}$$
   Ainsi :
$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,-2,-3,2)).$$
   - Déterminons l'image de f. Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

— **Méthode 1 :** d'après le théorème du rang, on sait que :

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de Im(f) dont le cardinal est égal à $\dim(\mathrm{Im}(f))$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

— **Méthode 2 :** on montre que la famille est libre.

(b) On considère l'application h de l'exercice 1.

- Déterminons le noyau de h. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(h) &\iff h(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff X(a(X+1)^2 + b(X+1) + c) - (X+1)(aX^2 + bX + c) = 0 \\ &\iff aX^2 + aX + c = 0 \\ &\iff a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(h) = \mathrm{Vect}(X).$$

La famille (X) est donc une base de $\ker(h)$.

- Déterminons l'image de h. Soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(h) &= \mathrm{Vect}(h(1), h(X), h(X^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2 + X) \\ &= \mathrm{Vect}(1, X^2 + X). \end{aligned}$$

La famille $(1, X^2 + X)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(h)$. De plus elle est échelonnée et formée de polynômes non nuls donc libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(h)$.

2. On considère l'application f de l'exercice 2.

- Déterminons le noyau de f. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff X^2(2aX + b) - 2X(aX^2 + bX + c) = 0 \\ &\iff -bX^2 - 2cX = 0 \\ &\iff b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(h) = \mathrm{Vect}(X^2).$$

La famille (X^2) est donc une base de $\ker(f)$.

- Déterminons l'image de f. Soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-2X, -X^2, 0) \\ &= \mathrm{Vect}(X, X^2). \end{aligned}$$

La famille (X, X^2) est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus elle est échelonnée et formée de polynômes non nuls donc libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. - Déterminons le noyau de f. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Or un polynôme de degré inférieur ou égal à deux possédant trois racine est nul. Donc :

$$P \in \ker(f) \iff (P(0), P(1), P(2)) = (0, 0, 0) \iff P = 0.$$

Ainsi :

$$\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}.$$

- Déterminons l'image de f.

— **Méthode 1 :** d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

— **Méthode 2 :** soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,1,4)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,0),(0,0,2)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,1,0)) \\ &= \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. Soient $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}f((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)) &= f((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2)) \\ &= 3(x_1+\lambda x_2) - (y_1+\lambda y_2) + z_1 + \lambda z_2 \\ &= 3x_1 - y_1 + z_1 + \lambda(3x_2 - y_2 + z_2) \\ &= f((x_1,y_1,z_1)) + \lambda f((x_2,y_2,z_2)).\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)) = f((x_1,y_1,z_1)) + \lambda f((x_2,y_2,z_2)).$$

   L'application f est donc linéaire.

2. L'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. Donc soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$ ce qui signifie que $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$; soit $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ ce qui signifie que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Comme f est non nulle, on en conclut que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
   D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

   Ainsi $3 = \dim(\ker(f)) + 1$ et donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

3. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff 3x - y + z = 0 \iff y = 3x + z.$$

   Ainsi :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,3,0),(0,1,1)).$$

   La famille $((1,3,0),(0,1,1))$ est une famille génératrice de $\ker(f)$ de cardinal égal à $\dim(\ker(f))$. Donc $((1,3,0),(0,1,1))$ est une base de $\ker(f)$.

Exercice 6.

1. Soient $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$$

   et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}f(A+\lambda A') = (&a+\lambda a' + e + \lambda e' + i + \lambda i', c + \lambda c' + e + \lambda e' + g + \lambda g', \\ &a + \lambda a' + c + \lambda c' + g + \lambda g' + i + \lambda i') \\ &= (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i) + \lambda(a'+e'+i', c'+e'+g', a'+c'+g'+i') \\ &= f(A) + \lambda f(A').\end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(A + \lambda A') = f(A) + \lambda f(A').$$

   Donc f est linéaire.

2. Comme $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9 > \dim(\mathbb{R}^3)$ alors f n'est pas injective.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \in \ker(f) \iff f(A) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + e + i = 0 \\ c + e + g = 0 \\ a + c + g + i = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a + e + i = 0 \\ c + e + g = 0 \\ -e + c + g = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = -i \\ c = -g \\ e = 0. \end{cases}$$

   Ainsi :

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -i & b & -g \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, (b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

   Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de $\ker(f)$.
Montrons qu'elle est libre. Soit $(b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}
& i\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\quad +d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix}-i&b&-g\\d&0&f\\g&h&i\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\iff b=d=f=g=h=i=0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de $\ker(f)$. C'est donc $\mathcal{F}$ une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 6$.

4. D'après le théorème du rang, on déduit :

$$9 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 6 + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc, comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Ainsi f est surjective.

Exercice 7.

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Par conséquent :

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$$

car $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Ainsi $y \in \ker(f)$. Cela montre : $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Or, on déduit de la question précédente que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$. D'où

$$3 = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) \leq 2\dim(\ker(f)).$$

Ainsi $\frac{3}{2} \leq \dim(\ker(f))$ et comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier alors on en déduit bien :

$$2 \leq \dim(\ker(f)).$$

Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(E) = 3$ alors la dimension de $\ker(f)$ est soit égale à 2 soit égale à 3.
Or, si $\dim(\ker(f)) = 3$ alors $\ker(f) = \mathbb{R}^3$ ce qui implique que f est nulle. Cela contredit l'énoncé.
Donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

Exercice 8.

1. Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) &= (2(x+\lambda x')-(y+\lambda y')+(z+\lambda z'), 3(x+\lambda x')-(z+\lambda z'))\\
&= (2x-y+z, 3x-z)+\lambda(2x'-y'+z', 3x'-z')\\
&= f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f((x,y,z))+\lambda f((x',y',z')).$$

Donc f est linéaire.

2. On note $\mathcal{B}_3 = (e_1,e_2,e_3)$ et $\mathcal{B}_2$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}((2,3),(-1,0),(1,-1)) = \begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. (a) On sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f((1,2,1))) = A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}((1,2,1)) = A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$f((1,2,1)) = e_1 + 2e_2 = (1,2).$$

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f) &\iff A\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}((x,y,z)) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0\\ 3x - z = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} y = 5x\\ z = 3x\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\ker(f) = \mathrm{Vect}((1,5,3))$.

(c) On a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))).$$

Or les coordonnées de $f((1,0,0))$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par la première colonne de A, celles de $f((0,1,0))$ par la deuxième colonne de A et celles de $f((0,0,1))$ par la troisième colonne de A. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2,3),(-1,0),(1,-1)) = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 9.

1. Montrons que φ est linéaire : soient $(M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(M+\lambda N) &= A(M+\lambda N) - (M+\lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= \varphi(M) + \lambda \varphi(N).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(M+\lambda N) = \varphi(M) + \lambda\varphi(N).$$

L'application φ est donc linéaire. Comme elle est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(E_{1,1}), \varphi(E_{1,2}), \varphi(E_{2,1}), \varphi(E_{2,2})) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M \in \ker(\varphi) &\iff C\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ -2a + 2d = 0 \\ -2a + 2d = 0 \\ -2b - 2c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -c \\ a = d \end{cases}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Or, on a vu que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\ker(\varphi)$. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Par conséquent c'est une base de $\ker(\varphi)$ et $\dim(\ker(\varphi)) = 2$. On en déduit donc :

$$4 = 2 + \mathrm{rg}(\varphi)$$

c'est-à-dire : $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

4. (a) L'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec A est le noyau de φ. Donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   (b) D'après les questions précédentes, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 10.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On rappelle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ signifie que :

- la première colonne de M donne les coordonnées de $f(1)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- la deuxième colonne de M donne les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- la troisième colonne de M donne les coordonnées de $f(X^2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. - **Noyau de f :** soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors on a :

$$\begin{aligned}P \in \ker(f) &\iff M \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2c - a = 0 \\ b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases} \qquad \iff a = b = c = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi $\ker(f) = \{0\}$.

   - **Image de f :** f est un **endomorphisme** de $\mathbb{R}_2[X]$ injectif. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie tout endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[X]$ est bijectif (donc surjectif). Ainsi f est surjectif d'où :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X].$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(X, X^2+1, X^2-1) &= \mathrm{rg}(X, X^2+1, X^2-1+X^2+1)\\ &= \mathrm{rg}(X, X^2+1, 2X^2)\\ &= \mathrm{rg}(X, X^2+1, X^2)\\ &= \mathrm{rg}(X, X^2+1-X^2, X^2)\\ &= \mathrm{rg}(X, 1, X^2)\\ &= 3.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(X, X^2+1, X^2-1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ donc :

$$\mathrm{Vect}(X, X^2+1, X^2-1) = \mathbb{R}_2[X].$$

Par conséquent, (X, X^2-1, X^2+1) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) On note $\mathcal{B}'$ la base de la question précédente. La matrice M' est alors définie par :

$$M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(X), f(X^2+1), f(X^2-1)).$$

Déterminons les coordonnées de $f(X)$, $f(X^2+1)$ et $f(X^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Remarquons que, d'après la remarque en début d'exercice, on a :

$$f(1) = 2 - X^2 \quad ; \quad f(X) = X \quad ; \quad f(X^2) = -1 + 2X^2.$$

Ainsi :

- $f(X) = X$ donc les coordonnées de $f(X)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(1, 0, 0)$;
- $f(X^2+1) = f(X^2) + f(1) = 1 + X^2$ donc les coordonnées de $f(X^2+1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0, 1, 0)$;
- $f(X^2-1) = f(X^2) - f(1) = 3(X^2-1)$ donc les coordonnées de $f(X^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0, 0, 3)$.

Finalement, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après les formule de changement de bases on a :

$$M' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} M P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

En notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ on a donc bien l'égalité souhaitée. Enfin :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X, X^2+1, X^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.

1. Comme A est une matrice représentative de ψ, on sait que le rang de ψ est égal au rang de A. Or, le rang de A vaut 1 car toutes les colonnes sont égales et non nulles. Donc le rang de ψ vaut 1.

   En particulier, ψ n'est pas surjective donc ce n'est pas un automorphisme.

2. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f((x,y,z))) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x,y,z)) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

   Ainsi :

$$f((x,y,z)) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

3. (a) Montrons que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,0,0) &\iff \begin{cases} \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}\\ &\iff \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi, la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) D'après la question 2, on a :

$$\psi(u) = (0,0,0) \quad ; \quad \psi(v) = (0,0,0) \quad : \quad \psi(w) = (3,3,3) = 3w.$$

   En particulier, les coordonnées dans la base (u, v, w) de :

   - $\psi(u)$ sont $(0, 0, 0)$;
   - $\psi(v)$ sont $(0, 0, 0)$;
   - $\psi(w)$ sont $(0, 0, 3)$.

   Ainsi, la matrice de ψ dans la base (u, v, w) est la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w). Alors, d'après les formules de changement de base, on a :

$$D = P^{-1}AP.$$

Déterminons P :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $X \in \mathbb{R}^3$ et notons (a, b, c) ses coordonnées dans la base (u, v, w). Alors, on a :

$$X \in \ker(\psi) \iff D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c = 0.$$

Ainsi :

$$\ker(\psi) = \left\{ au + bv \,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}(u, v).$$

En tant que sous-famille d'une famille libre, la famille (u, v) est libre et on vient de voir que c'est une famille génératrice de $\ker(\psi)$. C'est donc une base de $\ker(\psi)$.
De plus,

$$\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(u), \psi(v), \psi(w)) = \mathrm{Vect}((0,0,0), (0,0,0), 3w) = \mathrm{Vect}(w).$$

Ainsi (w) est une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.