<u>Exercice 1</u> : corrigé en TD

<u>Exercice 2</u> :

Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a

$U = \lambda V + \mu W + \gamma X \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda v_n + \mu w_n + \gamma x_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+4)^2 = \lambda(n+2)^2 + \mu(n+1)^2 + \gamma(n-1)$

Or, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+4)^2 = \lambda(n+2)^2 + \mu(n+1)^2 + \gamma(n-1)$

alors

$$\begin{cases} 25 = 9\lambda + 4\mu & (n=1) \\ 36 = 16\lambda + 9\mu + \gamma & (n=2) \\ 49 = 25\lambda + 16\mu + 2\gamma & (n=3) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 16\lambda + 9\mu + \gamma = 36 \\ 9\lambda + 4\mu = 25 \\ 25\lambda + 16\mu + 2\gamma = 49 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

donc

$$\begin{cases} 16\lambda + 9\mu + \gamma = 36 \\ 9\lambda + 4\mu = 25 \\ -7\lambda - 2\mu = -23 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

donc

$$\begin{cases} 16\lambda + 9\mu + \gamma = 36 \\ 9\lambda + 4\mu = 25 \\ -5\lambda = -21 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$$

donc

$$\begin{cases} \lambda = \frac{21}{5} \\ \mu = -\frac{16}{5} \\ \gamma = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Réciproquement, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$\frac{21}{5}(n+2)^2 - \frac{16}{5}(n+1)^2 - \frac{12}{5}(n-1)$

$= \frac{21}{5}(n^2+4n+4) - \frac{16}{5}(n^2+2n+1) - \frac{12}{5}n + \frac{12}{5}$

$= \left(\frac{21}{5} - \frac{16}{5}\right)n^2 + \left(4\times\frac{21}{5} - 2\times\frac{16}{5} - \frac{12}{5}\right)n + 4\times\frac{21}{5} - \frac{16}{5} + \frac{12}{5}$

$= n^2 + 8n + 16 = (n+4)^2$

Ainsi $U = \frac{21}{5}V - \frac{16}{5}W - \frac{12}{5}X$.

<u>Exercice 3</u>

1) On a :

i) $F \subset E$ et F est non vide car $0_E \in F$

ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est :

$\lim_{n\to+\infty} u_n + \lambda v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lambda \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

Donc F est stable par combinaison linéaire

iii) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E.

2) On a :

i) $F \subset E$ et $0_E \in F$ car la fonction nulle est continue en 1.

ii) Soient $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme f et g sont continue en 1, alors $f+\lambda g$ est continue en 1. Donc $f+\lambda g \in F$. Ainsi F est stable par combinaison linéaire.

iii) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E.

3) On a : i) $F \subset E$ et F est non vide car $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in F$.

ii) Soit $(M,N) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a ${}^tM = M$ car $M \in F$ et ${}^tN = N$ car $N \in F$

Donc ${}^t(M+\lambda N) = {}^tM + \lambda {}^tN = M + \lambda N$.

Ainsi $M + \lambda N \in F$.

Donc F est stable par combinaison linéaire

iii) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4

i) F est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$. De même $0_E \in G$. Ainsi $0_E \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est un sous ensemble non vide de E.

ii) Soit u, v deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme F est un sous-espace vectoriel de E, F est stable par combinaison linéaire. Or, $u \in F \cap G \subset F$ et $v \in F \cap G \subset F$ donc $u + \lambda v \in F$.

De même, $u + \lambda v \in G$.

Ainsi $u + \lambda v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est stable car combinaison linéaire

iii) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6

Exercice 7

corrigés en TD

Exercice 8

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

(x,y,z,t) est solution du système $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z-\boxed{t}=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x+y+2z \\ x = -y-z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -y \\ x = -y-z \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-y-z, y, z, -y)$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) = y(-1,1,0,-1) + z(-1,0,1,0)$

$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}((-1,1,0,-1),(-1,0,1,0))$

Donc l'ensemble des solutions du système est

$\mathrm{Vect}((-1,1,0,-1),(-1,0,1,0)) = \mathrm{Vect}((1,-1,0,1),(1,0,-1,0))$

$= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(1,0,-1,0))$

$= \mathrm{Vect}((2,-1,-1,1),(0,1,-1,-1))$