Exercice 1

A tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $\mathrm{M}(a,b)$ définie par :

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $\mathrm{M}(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\mathrm{E} = \left\{\mathrm{M}(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On note I la matrice identité $\mathrm{M}(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
3. (a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = \mathrm{X}\right\}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F et en déduire sa dimension.
   (c) Montrer que $\mathrm{A} - \mathrm{I}$ n'est pas inversible.
4. (a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{G} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{AX} = 2\mathrm{X}\right\}$ est un espace vectoriel et déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G et en déduire sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   (c) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ constituée des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ et des vecteurs de $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celle du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. On considère la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. On notera D cette matrice.
6. Soi $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Prouver que la matrice $\mathrm{D}(a,b) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}(a,b)\mathrm{P}$ est une matrice diagonale.
   (b) Montrer que $\mathrm{M}(a,b)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{D}(a,b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $\mathrm{M}(a,b)$ soit inversible.
   (c) Prouver que $(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I}$ si et seulement si $(\mathrm{D}(a,b))^2 = \mathrm{I}$
   En déduire l'existence de quatre matrices $\mathrm{M}(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant

$$(\mathrm{M}(a,b))^2 = \mathrm{I}.$$

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f_n'.
2. Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}$ (on précisera les limites aux bornes).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée u_n.
4. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(\frac{1}{n})$ puis justifier que $0 < u_n < \frac{1}{n}$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Justifier l'égalité $u_n = \frac{e^{-u_n}}{n}$, puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. En déduire que $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où a et b sont des réels à préciser.

Exercice 3

On pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et possédant une espérance, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et $E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
   Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :
   $$\forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$
   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :
   $$P\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$
   (c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les évènements $[X_i = 1]$ et $[X_j = 1]$ ne sont pas indépendants.
2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

Exercice 4

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$pour tout $x \in\,]-\infty;0[\, \cup\,]0;+\infty[$.
   (c) Montrer : $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser le fait que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 h(x)$$

   où h est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
   (d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1-x)\, e^x - 1$$

   (b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\forall x \in [0;+\infty[,\ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geqslant 0$
   (b) Montrer : $\forall x \in\,]0;+\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2\,(e^x-1)^2}$
   (c) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$
   (d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\,(1-\alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que$|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant x\, f(x).$
   En déduire la limite de G en $+\infty$.
   (b) Montrer : $\forall x \in\,]-\infty;0],\ G(x) \leqslant x\, f(x).$
   En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.