

TD 9-Applications linéaires

1 Généralités, noyau, image

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. L'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \quad f((x, y, z, t)) = \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix}$$

2. L'application h définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad h(P) = XP(X+1) - (X+1)P(X)$$

3. L'application $g : \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad g(M) = M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3} + M_{4,4}$$

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes.

1. L'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f(P) = X^2P'(X) - 2XP(X)$$

2. L'application ψ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \psi(X) = AX - XB$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Décrire chacun de ces espaces comme le noyau d'une application linéaire.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\}.$

2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \text{ et } 2x + z = t\}.$

3. $H = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1)\}$

Exercice 4

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes.

1. Les applications f et h de l'exercice 1.
2. L'application f de l'exercice 2.
3. L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad f(P) = (P(0), P(1), P(2)).$$

Exercice 5

Soit f l'application définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x, y, z)) = 3x - y + z.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\text{Im}(f)$. En déduire $\dim(\ker(f))$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 6

Soit f l'application définie par

$$f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longmapsto (a + e + i, c + e + g, a + c + g + i)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Sans calcul, justifier que f n'est pas injective.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et sa dimension.

4. En déduire que f est surjective.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. Montrer que $\dim(\ker(f)) \geq 2$. En déduire que $\text{rg}(f) = 1$.

2 Matrice d'une application linéaire et changement de bases

Exercice 8

Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y + z, 3x - z)$$

1. Montrer que f est linéaire. Est-elle injective ?
2. Déterminer la matrice A représentative de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 .
3. A l'aide de la matrice A :
 - (a) Déterminer $f((1, 2, 1))$.
 - (b) Déterminer $\ker(f)$.
 - (c) Déterminer $\text{Im}(f)$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM - MA$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice C de φ dans la base canonique

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer le noyau de φ à l'aide de la matrice C . En déduire $\text{rg}(\varphi)$.

4. On note \mathcal{C} l'ensemble des matrices qui commutent avec A .

- (a) Montrer que \mathcal{C} est un espace vectoriel.
- (b) Déterminer une base de \mathcal{C} .

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f .
2.
 - (a) Montrer que la famille $(X, X^2 + 1, X^2 - 1)$ est une base $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
 - (c) Déterminer une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$.

Exercice 11

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et ψ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A .

1. Déterminer le rang de ψ . Est-ce un automorphisme ?
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\psi((x, y, z))$.
3. On note $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
 - (a) Montrer que (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (b) Déterminer $\psi(u)$, $\psi(v)$ et $\psi(w)$. En déduire la matrice de ψ dans la base (u, v, w) .
 - (c) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on précisera et donner une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Avec la matrice D , déterminer une base de $\ker(\psi)$ et une base de $\text{Im}(\psi)$.

Exercice 12 (EDHEC 2013)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on considère l'endomorphisme f de

$$\mathbb{R}^3 \text{ dont la matrice dans la base } \mathcal{B} \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3 .

2. Déterminer une base (a) de $\ker(f)$ ainsi qu'une base (b, c) de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \ker(f)$
4. Dans la suite, on considère un endomorphisme g de \mathbb{R}^3 tel que :

$$g^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad g^3 = 0.$$

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique de \mathbb{R}^3 on a donc :

$$M^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad M^3 = 0.$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im}(g^2) = \ker(g)$.

- (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^3 tel que $g^2(u) \neq 0$.
- (b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 , que l'on notera \mathcal{B}' .
- (c) Donner la matrice N de g dans la base \mathcal{B}' .
- (d) Déterminer $\operatorname{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\ker(g)$.
Pour finir, déterminer $\operatorname{Im}(g^2)$ puis conclure.

Exercice 13 (EML 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E .

On note i l'application identité de E , et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto x$$

$$\theta : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto 0_E$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta.$$

1. Montrer que f n'est pas bijectif.
2. En déduire qu'il existe un vecteur v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.
3. (a) Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif.
(b) En déduire qu'il existe v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$.
4. On note $v_3 = f(v_2)$.
(a) Montrer : $f(v_3) = -v_2$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E .
(c) Déterminer la matrice C de f dans la base \mathcal{B} .