À rendre le 16/12/2022

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie A : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Faces obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([X=n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie B : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre n de Faces obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard selon la loi uniforme une boule dans cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X=n]$.
   (c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$P([U=k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X=n]) \quad \text{puis} \quad P([U=k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$
   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X=n]$.
   (c) En déduire la loi de V.
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U,V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X,U)$.

Partie C : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

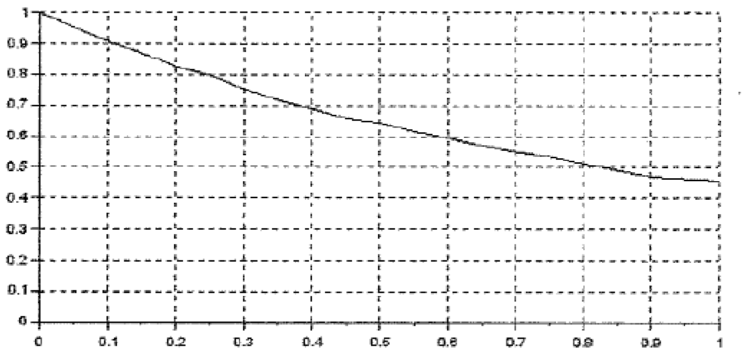
- le joueur A dispose d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces alors obtenus;
- le joueur B dispose d'une autre pièce donnant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces alors obtenus;
- le joueur A gagne si son nombre de Faces obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**
   (a) Écrire une fonction Python nommée `simule_X` qui simule la variable aléatoire X.
   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(1,N+1):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y :
            r = r + 1/N
    return r
```

(c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire** Y

   On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

   (a) Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

   (b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. (a) Montrer : $P([X \leqslant Y]) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P([X=n])\,P([Y \geqslant n])$.

   (b) Déduire des résultats précédents : $P([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

   (c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x, y, z)) = \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right).$$

Partie A

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. L'application f est-elle injective ?
   (c) En déduire, sans utiliser l'algorithme du pivot de Gauss, le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
   (d) Calculer f^2 puis f^3.
2. Soit g un endomorphisme de E vérifiant

$$g(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3).$$

   Montrer que $g = f$.
3. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$.
   (c) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Soit $\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est M.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\mathrm{M} = a\mathrm{A} + b\mathrm{I}_3$.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathscr{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question 4.(a), calculer $(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction de I_3, M et M^2.
   (e) À l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout entier naturel n, M^n en fonction de I_3, A et A^2. Cette formule est-elle valide pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme u de E vérifiant $u \circ u = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe un endomorphisme u tel que $u \circ u = f$.

1. Montrer que $u \circ f = f \circ u$.
2. (a) Montrer que $u(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $u(e'_1) = a\, e'_1$.
   (b) Montrer que $u(e'_2) - a\, e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $u(e'_2) = b\, e'_1 + a\, e'_2$.
   (c) Montrer que : $f \circ u(e'_3) = u \circ f(e'_3) = a\, e'_2 + b\, e'_1$.
   En déduire que $u(e'_3) - a\, e'_3 - b\, e'_2$ appartient au noyau de f.
   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que :

$$u(e'_1) = ae'_1 \quad ; \quad u(e'_2) = be'_1 + ae'_2 \quad ; \quad u(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.$$

   (e) En déduire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$ puis la matrice de $u \circ u$ dans la base $\mathscr{B}'$.
   (f) Conclure.
3. (a) Avec la question 2.(d), calculer $u^2(e'_1)$, $u^2(e'_2)$, $u^2(e'_3)$ en fonction de a, b et c.
   (b) En déduire la matrice de $u \circ u$ dans la base $\mathscr{B}'$ d'une autre façon.