TD10-Comparaison de fonctions et DL

Exercice 1.

1. Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0.$$

Ainsi : $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(f(x))$.

2. Soit $x>0$. Alors :

$$\frac{\ln(x+x^2)}{x}=\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\frac{2\ln(x)}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

Or, par croissance comparée et opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

Ainsi : $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(f(x))$.

3. Par croissance comparée (voir proposition 2) : $f(x)\underset{x\to0^+}{=}o(g(x))$.

4. Par croissance comparée (voir proposition 2) : $f(x)\underset{x\to0^+}{=}o(g(x))$.

Exercice 2.

1. Par équivalent usuel en $+\infty$ et en 0, on sait que :

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}3 \quad \text{et} \quad f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to0}f(x)=3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$$

2.
 - En 0 : par équivalent usuel on a :

$$x^3+x-1\underset{x\to0}{\sim}-1 \quad \text{et} \quad 5x^4+2x^2\underset{x\to0}{\sim}2x^2.$$

 Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{-1}{2x^2}.$$

 Ainsi : $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2x^2}=-\infty$.

 - En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x^3+x-1\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3 \quad \text{et} \quad 5x^4+2x^2\underset{x\to+\infty}{\sim}5x^4.$$

 Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient alors :

$$g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5x}.$$

 Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{5x}=0$.

3. En posant $X=x^2$, on a : $\lim_{x\to0}X=0$. Donc par équivalent usuel :

$$h(x)=e^X-1\underset{x\to0}{\sim}X.$$

Ainsi :

$$h(x)\underset{x\to0}{\sim}x^2.$$

Ainsi : $\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}x^2=0$.

4. En posant $X=\frac{1}{x^3}$ alors $\lim_{x\to+\infty}X=0$. Ainsi par équivalent usuel :

$$i(x)=\sqrt{1+X}-1\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}X=\frac{1}{2x^3}.$$

Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}i(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^3}=0$.

5. En posant $X = -x^2$, on a : $\lim_{x\to 0} X = 0$. Donc par équivalent usuel :

$$e^{-x^2} = e^X - 1 \underset{x\to 0}{\sim} X = -x^2.$$

De plus, par équivalent usuel : $x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Par compatibilité de la relation d'équivalence avec le quotient, on obtient :

$$j(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x} = -x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} j(x) = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.

6. Par opération sur les limites :

$$\lim_{x\to 1} k(x) = 2.$$

Ainsi : $k(x) \underset{x\to 1}{\sim} 2$.

7. Soit $x > 0$. En factorisant par le terme dominant au voisinage de $+\infty$ dans le logarithme on obtient :

$$l(x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Maintenant, on factorise par le terme dominant au voisinage de $+\infty$:

$$l(x) = \ln(x)\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Ainsi : $l(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} l(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

8. Soit $x > 0$. On a :

$$m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}.$$

Par équivalent usuel en $+\infty$ on a : $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc par passage à l'inverse :

$$m(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

9.
- En 0^+ : par équivalent usuel on a :

$$x+1 \underset{x\to 0^+}{\sim} 1.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en 0^+ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = -\ln(x)\left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right).$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x}{\ln(x)} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) = +\infty$.

- En $+\infty$: par équivalent usuel on a :

$$x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

En factorisant le numérateur par le terme dominant en $+\infty$ on obtient :

$$\forall x > 0, \quad x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1.$$

Donc

$$x - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} n(x) = 1$.

Exercice 3.

- On va montrer :

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x+2}\ln(x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

D'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 1$$

donc : $\sqrt{x}+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$. Par compatibilité avec le quotient, on obtient :

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(x).$$

D'autre part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} = 1.$$

Donc : $\sqrt{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ et $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. Par produit :

$$\sqrt{x+2}\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

- En divisant membre à membre l'inégalité de l'énoncé par $\sqrt{x}\ln(x)$ on obtient, pour tout $x \geq 4$:

$$\frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} \leq \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{\sqrt{x}\ln(x)}.$$

Or, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1.$$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}\ln(x)} = 1.$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\ln(x).$$

Exercice 4.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 donc, d'après la formule de Taylor-Young, f possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}.$$

Ainsi :

$$f(0) = \ln(2) \quad ; \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad f''(0) = -\frac{1}{4}.$$

Finalement :

$$f(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 2 donc, d'après la formule de Taylor-Young, g possède un DL d'ordre 2 en 2 donné par :

$$g(x) = g(2) + g'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \underset{x\to 2}{o}((x-2)^2).$$

Pour tout x au voisinage de 2 on a :

$$g'(x) = 2xe^{x^2-1} \quad \text{et} \quad g''(x) = (2+4x^2)e^{x^2-1}.$$

Ainsi :

$$g(2) = e^3 \quad ; \quad g'(2) = 4e^3 \quad ; \quad g''(2) = 18e^3.$$

Finalement :

$$g(x) = e^3 + 4e^3(x-2) + 9e^3(x-2)^2 + \underset{x\to 2}{o}((x-2)^2).$$

Exercice 5.

1. D'après les DL usuels, on a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Par conséquent :

$$a(x) = -x + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi, a possède un DL d'ordre 2 en 0.

2. D'après les DL usuels, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
b(x) = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x} &= \frac{\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x} \\
&= \frac{x}{2}+\frac{1}{x}\times \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\
&= \frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x}\times x^2) \\
&= \frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x)
\end{aligned}
$$

Ainsi, b possède un DL d'ordre 1 en 0 donné par :

$$b(x) = \frac{x}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x).$$

3. D'après les DL usuels, on a :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
c(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= \frac{x}{2}+\frac{5}{8}x^2+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= \frac{x}{2}+\frac{5}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}
$$

Ainsi, c possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$c(x) = \frac{x}{2}+\frac{5}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

4. On remarque que :

$$d(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}-1.$$

Donc par DL usuel :

$$d(x) = 1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1 = \frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi, d possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$d(x) = \frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Exercice 6. D'après les DL usuels, on a :

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
e^x-1-\ln(1+x) &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)-1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= x^2+\underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2)-\underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on obtient :

$$e^x-1-\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

Par compatibilité des équivalents avec le passage au quotient on obtient :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Exercice 7.

1. Par opération sur les fonctions continues, f est continue en tout point $x \in]0,+\infty[$ différent de 1.
   Montrons que f est continue en 1 : il s'agit de montrer que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

   Pour tout $x \neq 1$, posons $u = x-1$. Quand x tend vers 1, u tend vers 0 et :

$$f(x) = \frac{(u+3)u}{(u+1)\ln(1+u)}.$$

   Or, par équivalent usuel en 0 on a :

$$(u+3)u \underset{u\to 0}{\sim} 3u \quad ; \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u \quad ; \quad u+1 \underset{u\to 0}{\sim} 1.$$

   Ainsi, par compatibilité des équivalents avec le produit et quotient :

$$\frac{(u+3)u}{(u+1)\ln(1+u)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{3u}{u} = 3.$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{u\to 0} \frac{(u+3)u}{(u+1)\ln(1+u)} = 3 = f(1).$$

Ainsi f est continue en 1.
Finalement, f est continue sur $]0,+\infty[$.

2. Il s'agit de montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ possède une limite quand x tend vers 1.
Soit $x \neq 1$, $x > 0$. Alors, en posant $u = x-1$, on a :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{u(u+3)-3(u+1)\ln(u+1)}{u(u+1)\ln(u+1)}.$$

Quand x tend vers 1, u tend vers 0 et de plus :

$$\ln(u+1) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2).$$

Donc :

$$u(u+3)-3(u+1)\ln(u+1) = u(u+3)-3(u+1)\left(u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)\right).$$

Or : $\underset{u\to 0}{o}(u^2) = u \times \underset{u\to 0}{o}(u)$ donc :

$$\begin{aligned}
u(u+3)-3(u+1)\ln(u+1) &= u(u+3)-3(u+1)\left(u - \frac{u^2}{2} + u\times\underset{u\to 0}{o}(u)\right) \\
&= u\left(u+3-3(u+1)\left(1-\frac{u}{2}+\underset{u\to 0}{o}(u)\right)\right) \\
&= u\left(-\frac{1}{2}u + \underbrace{\frac{3}{2}u^2 - 3(u+1)\times\underset{u\to 0}{o}(u)}_{=\underset{u\to 0}{o}(u)}\right) \\
&= u\left(-\frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{u\left(-\frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u)\right)}{u(u+1)\ln(u+1)} = \frac{-\frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u)}{(u+1)\ln(u+1)}.$$

Par la caractérisation de la relation d'équivalence, on a :

$$-\frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u) \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{1}{2u}.$$

Par équivalents usuels et produit :

$$(u+1)\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} 1\times u.$$

Finalement, par quotient :

$$\frac{u(u+3)-3(u+1)\ln(u+1)}{u(u+1)\ln(u+1)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}u}{u} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit alors :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{u\to 0}\frac{u(u+3)-3(u+1)\ln(u+1)}{u(u+1)\ln(u+1)} = -\frac{1}{2}.$$

La fonction f est donc dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 8.

1. On veut montrer que g possède une limite finie en 0.
On sait que :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2).$$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} -4x = 0$ donc on en déduit :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}\times 2x - \frac{1}{8}\times(2x)^2 + \underset{x\to 0}{o}((2x)^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \frac{1}{2}\times(-4x) - \frac{1}{8}\times(-4x)^2 + \underset{x\to 0}{o}((-4x)^2) = 1 - 2x - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On en déduit donc[1] :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - (1 - 2x - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))}{x} \\
&= \frac{3x + \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x} \\
&= 3 + \frac{3}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x) \\
&= 3 + \underset{x\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 3$.
La fonction g est donc prolongeable par continuité en 0 en posant : $g(0) = 3$.

1. On pouvait aussi utiliser la formule de Taylor-Young pour obtenir le DL du numérateur.

2. D'après la question précédente, le prolongement de g possède un DL d'ordre 1 en 0 donc est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{3}{2}$.

Exercice 9.

On va chercher un DL d'ordre 2 de f au voisinage de 0.

- **Méthode 1 : par la formule de Taylor-Young.** La fonction f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de 0. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. D'après la formule de Taylor-Young, f possède donc un DL d'ordre 2 au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \times (1+x) - \sqrt{1-x}}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-(1+x) - 2\sqrt{1-x}^2}{2\sqrt{1-x}(1+x)^2} \\ &= \frac{-(1+x) - 2(1-x)}{2\sqrt{1-x}(1+x)^2} \\ &= \frac{x-3}{2\sqrt{1-x}(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f'(0) = -\frac{3}{2}$.
Puis, pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{1-x}(1+x)^2 - 2(x-3) \times \left(\frac{-(1+x)^2}{2\sqrt{1-x}} + 2(1+x)\sqrt{1-x}\right)}{4(1-x)(1+x)^4}.$$

Ainsi $f''(0) = \frac{11}{4}$.
Finalement, on obtient le DL suivant :

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

- **Méthode 2 : en manipulant les DL.** On connaît les DL usuels suivant :

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2))(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \frac{x}{2}(x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) - \frac{1}{8}x^2(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &\quad + \underset{x\to 0}{o}(x^2)(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient le DL suivant :

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On déduit du DL que la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f à pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation réduite $y = 1 - \frac{3}{2}x$. De plus, comme $\frac{11}{8} > 0$, au voisinage du point d'abscisse 0, $\mathcal{C}$ est située au dessus de sa tangente.