Chapitre 14 : Systèmes différentiels

1 Tests

Test 1 (*Voir solution.*)

On reprend le système

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

de l'exemple 1.

1. *Résoudre ce système à l'aide de la méthode 1.*
2. *Comparer avec l'exemple 1.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Résoudre le système

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases}.$$

Test 3 (*Voir solution.*)

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 *suivante :*

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

1. *Soit y une solution de cette équation. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $Y' = AY$.*
2. *Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.*
3. *En déduire les solutions du système $Y' = AY$ puis les solutions de $y'' - y' - 2y = 0$.*

Test 4 (*Voir solution.*)

1. *Déterminer les états d'équilibre du système du test 1.*
2. *Déterminer les états d'équilibre du système du test 2.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit A la matrice de l'exemple précédent. Montrer :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\} \quad ; \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

2 Correction

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

On reprend le système

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

de l'exemple 1.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Le système s'écrit sous forme matricielle :*

$$Y' = AY.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff (-1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \qquad \iff \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *On a :*

$$AX = -X \iff \begin{cases} x & + & 2y & = & -x \\ 2x & + & y & = & -y \end{cases} \iff y = -x.$$

Ainsi $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. *De même :*

$$AX = 3X \iff \begin{cases} x & + & 2y & = & 3x \\ 2x & + & y & = & 3y \end{cases} \iff x = y.$$

Ainsi $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *on a :*

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *avec* y_1 *et* y_2 *deux fonctions et posons* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = P^{-1}Y$. *Alors on a :*

$$Y' = AY \iff X' = DX.$$

Or, on a :

$$X' = DX \iff \begin{cases} x_1' & = & -x_1 \\ x_2' & = & 3x_2 \end{cases} \iff \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \begin{cases} x_1(t) & = & ce^{-t} \\ x_2(t) & = & de^{3t} \end{cases}.$$

Donc les solutions (y_1, y_2) *du système initial sont les couples pour lesquels il existe* $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ *tel que pour tout réel* t *:*

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} ce^{-t} \\ de^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce^{-t} + de^{3t} \\ -ce^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

2. *On remarque que* $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et donc :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1 - y_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce sont les fonctions introduites dans l'exemple 1.

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{c} y_1' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 - y_3 \end{array}\right. .$$

Soient y_1, y_2 et y_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$(y_1, y_2, y_3) \text{ solution du système } \iff Y' = AY$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $A^3 = A$ donc $x^3 - x = x(x^2-1)$ est un polynôme annulateur de A. On a donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 0, 1\}.$$

- *La matrice A a deux colonnes identiques et la troisième n'est pas colinéaire aux autres donc A est de rang 2. Ainsi 0 est bien une valeur propre et, d'après le théorème du rang $E_0(A)$ est de dimension $3-2=1$. On vérifie facilement :*

  $$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- *Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :*

  $$AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & x \\ & & & - & z & = & y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & -y \\ -x & - & y & - & z & = & 0. \end{array}\right.$$

  $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -y \\ x & = & 0 \end{array}\right.$$

  Ainsi 1 est bien valeur propre et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- *Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :*

  $$AX = -X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -x \\ & & & - & z & = & -y \\ -2x & - & 2y & - & z & = & -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & y \\ x & = & -y. \end{array}\right.$$

  Ainsi -1 est bien valeur propre et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

On pose alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $X(t) = P^{-1}Y(t)$ et on a :

$$\begin{aligned} Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y &\iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\iff \left(P^{-1}Y\right)' = DP^{-1}Y \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &\iff X' = DX. \end{aligned}$$

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$X' = DX \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & -x_1 \\ x_2' & = & 0 \\ x_3' & = & x_3. \end{array} \right. \iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ x_2(t) & = & c_2 \\ x_3(t) & = & c_3 e^t \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ P^{-1}Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 \\ c_3 e^t \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 \\ c_3 e^t \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + c_2 \\ c_1 e^{-t} - c_2 - c_3 e^t \\ c_1 e^{-t} + c_3 e^t \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & -c_1 e^{-t} + c_2 \\ y_2(t) & = & c_1 e^{-t} - c_2 - c_3 e^t \\ y_3(t) & = & c_1 e^{-t} + c_3 e^t. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

1. On a :
$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$
Donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1. \end{aligned}$$
Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   - On a :
   $$X \in E_{-1}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & -x \\ 2x & + & y & = & -y \end{array} \right. \iff y = -x.$$
   Ainsi $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
   - De même :
   $$X \in E_2(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & y & = & 2x \\ 2x & + & y & = & 2y \end{array} \right. \iff y = 2x.$$
   Ainsi $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

En posant $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ on a :

$$A = PDP^{-1}.$$

3. *Soit y un fonction deux fois dérivable et posons $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. On a alors, en posant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = P^{-1}Y(t)$:*

$$\begin{aligned} Y' = AY \iff Y' = PDP^{-1}Y &\iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\iff \left(P^{-1}Y\right)' = DP^{-1}Y \quad \textit{par linéarité de la dérivation} \\ &\iff X' = DX. \end{aligned}$$

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$X' = DX \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & -x_1 \\ x_2' & = & 2x_2 \end{array} \right. \iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ x_2(t) & = & c_2 e^{2t}. \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ P^{-1}Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

Les solutions de $y'' - y' - 2y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \ , \ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit (y_1, y_2) un état d'équilibre. Alors les fonctions y_1 et y_2 sont constantes donc il existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = c_1 \quad \textit{et} \quad y_2(t) = c_2.$$

On a donc :

$$Y' = AY \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff c_1 = c_2 = 0.$$

Ainsi le seul état d'équilibre est $(0, 0)$.

2. *Soit (y_1, y_2, y_3) un état d'équilibre. Alors les fonctions y_1, y_2 et y_3 sont constantes donc il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = c_1 \quad ; \quad y_3(t) = c_3 \quad \textit{et} \quad y_2(t) = c_2.$$

On a donc :

$$Y' = AY \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les états d'équilibre sont les $(c, -c, 0)$, $c \in \mathbb{R}$.

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

On rappelle que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff A - \lambda I_2 \textit{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 3 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 2\}$. *Soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- *On a :*

$$X \in E_0(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \iff y = 3x.$$

Ainsi $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

- *De même :*

$$X \in E_2(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 2x \\ 3x & - & y & = & 2y \end{array} \right. \iff y = x.$$

Ainsi $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.