# ECE2-Colle 19

**16/03/22**

## 1 Fonctions numériques de deux variables réelles

**Généralités :** fonctions numériques de deux variables, exemple des fonctions polynomiales. Applications partielles. Représentation graphique, ligne de niveau.

**À partir de maintenant, toutes les fonctions seront définies sur $\mathbb{R}^2$.**

**Continuité :** distance euclidienne, propriétés de la distance euclidienne. Continuité en un point, continuité sur $\mathbb{R}^2$, opérations sur les fonctions continues, composition avec une fonction continue d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

**Fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ :** dérivées partielles d'ordre 1 en un point, fonctions dérivées partielles d'ordre 1. Fonction de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, opérations sur les fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, composition avec une fonction de classe $C^1$ d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ implique continue sur $\mathbb{R}^2$. Gradient, DL d'ordre 1 au voisinage d'un point.

**Fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ :** dérivées partielles d'ordre 2 en un point, fonctions dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, opérations sur les fonctions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, composition avec une fonction de classe $C^2$ d'une variable réelle. Exemple de référence : les fonctions polynomiales de deux variables sont de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ implique classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Lemme de Schwarz, Hessienne, DL d'ordre 2 au voisinage d'un point.

**Topologie de $\mathbb{R}^2$ :** boules ouvertes/fermées, ensembles ouverts/fermés. Exemples d'ensembles ouverts : boules ouvertes, $\mathbb{R}^2$, $\emptyset$, $]a,b[\times]c,d[$. Exemples d'ensembles fermés : boules fermées, $\mathbb{R}^2$, $\emptyset$, $[a,b]\times[c,d]$. Ensemble borné. Exemple d'ensembles bornés : les boules sont bornées.

**La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme.**

**Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ :** fonction continue sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ; fonction de classe $C^1$ / $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Extension des résultats des parties précédentes à ces fonctions.

**Extrema** : minimum/maximum local/global. Une fonction continue sur une partie fermée et bornée admet un maximum et un minimum sur cette partie. Condition nécessaire d'existence d'un extremum sur un ouvert : le gradient s'annule. Définition de point critique. Condition suffisante d'existence d'un extremum en un point critique sur un ouvert : étude des valeurs propres de la hessienne. Définition de point selle.

## 2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir justifier la continuité, le caractère $C^1$ ou $C^2$ d'une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 1, le gradient d'une fonction de deux variables.
3. Savoir calculer les dérivées partielles d'ordre 2, la hessienne d'une fonction de deux variables.
4. Savoir déterminer les points critiques.
5. Savoir déterminer la nature des points critiques (minimum/maximum local, point selle, indéterminé) en étudiant le spectre de la matrice hessienne.

## 3 Questions de cours

- Définitions : gradient, hessienne, minimum/maximum local ou global.
- Propositions : théorème de Schwarz, condition nécessaire d'existence d'un extremum, condition suffisante d'existence d'un extremum.