TD15-Convergence et approximation

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer l'inégalité suivante pour tout $a > 0$:

$$P(|X-\lambda| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a^2}.$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

On admet que $E(X) = \frac{3}{2}$ et $V(X) = \frac{11}{12}$.

1. *Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour X.*
2. *En déduire que $P(X \geq 3) \leq \frac{11}{27}$.*

Exercice 3

Soit $x > 0$. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. *Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.*

Exercice 4

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé, strictement positive et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $T_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. *Donner l'espérance de T_n.*
2. *Soit $t > 0$.*
   (a) *Justifier que pour tout $n > t$, $[T_n < t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$.*
   (b) *En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n < t)$.*
   (c) *Montrer que l'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [T_k < t]$ est de probabilité nulle.*

Exercice 5

Soit θ, ε des réels strictement positifs et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. *Établir : $P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) = P(e^{n\theta\overline{X}_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$.*
2. *Déduire : $P(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n\left(\ln(pe^\theta + q) - \theta(p+\varepsilon)\right)}$.*

Exercice 6

1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$.*
   (a) *Montrer que $(\max(X_1,\ldots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.*
   (b) *Montrer que $(\min(X_1,\ldots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.*
2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(e^{-1})$.*
3. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.*

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *exprimer* F_{X_n} *en fonction la fonction de répartition* Φ *d'une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
2. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = 1$ *si* $t > 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = 0$ *si* $t < 0$.
3. *En déduire que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une loi certaine.*

Exercice 8

On considère trois variables aléatoires X, Y *et* Z *mutuellement indépendantes et suivant toutes les trois la loi binomiale* $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$.
On pose $R = \frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

1. *Quelle est la loi de* $X + Y + Z$?
2. *Soit* Φ *la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi* $\mathcal{N}(0,1)$. *On donne* $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \simeq 0,86$. *Donner une valeur approchée de* $P(R \geq 4)$.

Exercice 9

On considère 1000 *variables aléatoires* $T_1, \ldots, T_{1000}$ *définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *suivant toutes la même loi, indépendantes, ayant une espérance égale à* 3 *et une variance égale à* $\frac{1}{2}$. *On pose* $S = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} T_i$.
On note Φ *la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée* $\Phi(\sqrt{5}) \simeq 0,978$. *Donner une valeur approchée de* $P(2,95 < S \leq 3,05)$.

Exercice 10

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre* 1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad u_n = e^{-n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n^i}{i!}.$$

1. *Donner la loi de* S_n, *son espérance et sa variance.*
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *exprimer* u_n *à l'aide de la variable* S_n.
3. *En déduire, en appliquant le théorème central limite, que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *possède une limite et la déterminer.*