Chapitre 6 : Correction des tests

Test 1 (*Voir solution.*)

1. *Montrer que :* $\forall n > 1$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. *Montrer que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Test 2 (*Voir solution.*)

Montrer, à l'aide d'un télescopage, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Test 3 (*Voir solution.*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.
3. *Montrer que* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *n'est pas majorée et en déduire la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Test 4 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Test 5 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+7}{2^n n!}$ *et, le cas échéant, calculer sa somme.*

Test 6 (*Voir solution.*)

On considère la série $\sum \frac{n^2}{3^n}$.

1. *Montrer que le série est convergente et calculer sa somme.*
2. *Avec une boucle* for, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un entier naturel* n *et qui renvoie la somme partielle d'indice* n *de la série.*
3. *Avec une boucle* while, *écrire une fonction Scilab qui prend un argument un réel* $e > 0$ *et qui renvoie l'indice à partir duquel la somme partielle atteint sa limite à* e *près.*
4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Si* $U = [u_0, \dots, u_n]$ *que renvoie* $sum(U)$ *? et* $cumsum(U)$ *?*

Test 7 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Test 8 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} (n^{27} + 2n^3)3^{-n}$.

Test 9 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
2. $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$.
3. $\sum \frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$.

Test 10 (*Voir solution.*)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$.

1 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Comme $n(n-1) \leqslant n^2$, on a :*
$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \geqslant \frac{1}{n^2}.$$
Ainsi : $\forall n > 1\,, \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. *Soit $n \geqslant 1$. Avec la question précédente, on peut écrire :*
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{d'après la question précédente,}\\ &\leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad \text{par télescopage,}\\ &\leqslant 2.\end{aligned}$$
Cela montre que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est majorée.*
3. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a*
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$
donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est croissante. De plus, elle est majorée donc elle converge. Ainsi la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

Pour tout $n \geqslant 1$, on a
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n.$$
Par conséquent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1).$$
Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a*
$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Or, pour tout $k \leqslant 2n$, on a $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ donc
$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}(2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $\mathrm{S}_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$ » et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.*
   - ⋆ Initialisation *: $\mathrm{S}_{2^1} = \mathrm{S}_2 \geqslant 0$. La propriété $\mathscr{P}(1)$ est donc vraie.*
   - ⋆ Hérédité *: supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Comme $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a :*
   $$\mathrm{S}_{2^{n+1}} \geqslant \mathrm{S}_{2^n} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$
   La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - ⋆ Conclusion *: d'après le principe de récurrence :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{S}_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$$

3. *D'après la question précédente* $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *n'est pas majorée.*
   Montrons qu'elle est croissante. Soit $n\in\mathbb{N}^*$*. Alors*

$$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{n+1}\geqslant 0.$$

   Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_{n+1}-S_n\geqslant 0$.
   La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ *est donc croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle diverge donc vers* $+\infty$*. La série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ *est donc divergente.*

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n\in\mathbb{N}$*. On a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)+k}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées seconde et première de raison $\frac{1}{2}$*, donc toutes deux convergentes. Ainsi* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}$ *est convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{4\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=6.$$

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

Soit $n\in\mathbb{N}$*. On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+7}{2^k k!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k(k-1)!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}+7\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Or la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ *converge vers* $e^{\frac{1}{2}}$ *donc la série* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+7}{2^n n!}$ *et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+7}{2^n n!}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+7e^{\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *En procédant comme au test 4, on montre que la série est convergente et que sa somme vaut* $\frac{3}{2}$.
2. *Avec une boucle* for

```
function s =somme(n)
   s=0
   for i=0:n
        s=s+i^2/3^i
endfunction
```

3. *Avec une boucle* while

```
function n =indice(e)
   n=0
   s=0
   while abs(s-3/2)>e
        s=s+n^2/3^n
        n=n+1
endfunction
```

4. La commande cum(U) renvoie la valeur de $u_0+...+u_n$ (la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$).
La commande cumsum(U) renvoie la liste des sommes partielles d'indices 0 à n de la série $\sum u_n$.

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

1. Soit $n \geqslant 1$. Comme $n^2+\sqrt{n} \geqslant n^2$ alors, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a
$$\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Par suite;
$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Or, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ est convergente.
2. De même
$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n}.$$
Or, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann divergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3-1}}$ est divergente.

Correction du test 8 (*Retour à l'énoncer.*)

Par croissance comparée et opération sur les limites on a :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot(n^{27}+2n^3)3^{-n} = 0.$$
Donc : $(n^{27}+2n^3)3^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
De plus, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n^{27}+2n^3)3^{-n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geqslant 0}(n^{27}+2n^3)3^{-n}$ est convergente.

Correction du test 9 (*Retour à l'énoncer.*)

1. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, on a par équivalent usuel :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$
Or, les séries $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.
2. Pour tout $n \geqslant 0$ on a :
$$\frac{2^n-3^n}{2^n-4^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)}{4^n\left(\left(\frac{2}{4}\right)^n-1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$ donc $\frac{2^n-3^n}{2^n-4^n} \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
De plus, la série $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ est à termes positifs (pourquoi?). La série $\sum\left(\frac{3}{4}\right)^n$ est aussi à termes positifs et converge (série géométrique de raison $\frac{3}{4}$). Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{2^n-3^n}{2^n-4^n}$ est convergente.
3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$ on a :
$$\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n} = \frac{n^2}{e^n}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}.$$

De plus, par croissances comparées, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}$$

donc, par opérations sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}=1.$$

Cela montre que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}\sim\frac{n^2}{e^n}$.

(b) *De plus, toujours par croissance comparée,* $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\frac{n^2}{e^n}=0$ *donc* $\frac{n^2}{e^n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Les séries $\sum\frac{n^2}{e^n}$ *et* $\sum\frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série* $\sum\frac{n^2}{e^n}$ *converge.*

(c) *On a :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad e^n-n-2\ln n=e^n(1-ne^{-n}-2e^{-n}\ln n).$$

On en déduit par croissance comparée que :

$$\lim_{n\to+\infty}e^n-n-2\ln n=+\infty.$$

En particulier, $e^n-n-2\ln n$ *est positif pour tout* n *à partir d'un certain rang.*

(d) *Finalement, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que* $\sum\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}$ *converge.*

Remarque : *on peut remplacer les étapes (a) et (b) par le calcul suivant :*

$$n^2\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}=\frac{n^4}{e^n}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{1-\frac{n}{e^n}-2\frac{\ln n}{e^n}}$$

pour montrer, par croissance comparée, que $\frac{n^2-4}{e^n-n-2\ln n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *puis conclure par le critère de comparaison. Dans les deux cas, il convient de justifier soigneusement que la série est à termes positifs à partir d'un certain rang car ce n'est pas si évident.*

Correction du test 10 (*Retour à l'énoncer.*)

Montrons que la série est absolument convergente.
Soit $n\in\mathbb{N}$. *On a :*

$$\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}=\frac{(-1)^nn^5}{e^n}\frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+2n^{-2}+n^{-5})}{1+2e^{-n}}=1$ *donc :* $\dfrac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\sim\dfrac{(-1)^nn^5}{e^n}$.
Par compatibilité de la relation d'équivalence avec la valeur absolue, on obtient donc :

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|\sim\frac{n^5}{e^n}$$

puis :

$$n^2\cdot\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|\sim\frac{n^7}{e^n}.$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7}{e^n}=0$. *Donc :*

$$\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les séries $\sum\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ *et* $\sum\frac{1}{n^2}$ *sont à termes positifs et cette dernière est une série de Riemann convergente.*
Par comparaison, la série $\sum\left|\frac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}\right|$ *converge. Donc* $\sum\dfrac{(-1)^n(n^5+2n^3+1)}{e^n+2}$ *est absolument convergente.*
En particulier elle converge.