xercice 10 : Déterminons un $DL_2(0)$ de f.

Méthode 1 (avec les DL usuels)

On remarque que $f(x) = \sqrt{1-x}\,(1+x)^{-1}$ $\forall x \in]-1,1[$

Or, comme

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

en faisant le changement de variable $u := -x$ on obtient, puisque $\lim\limits_{x\to 0} u = 0$:

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{8}(-x)^2 + \underset{x\to 0}{o}((-x)^2)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

De même

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Donc

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$
$$= 1 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)x + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$-\frac{1}{2}x\left(x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - \frac{1}{8}x^2\left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$
$$+ \underset{x\to 0}{o}(x^2)\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

Or on vérifie que :

$$-\frac{1}{2}x\left(x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2) \quad ; \quad -\frac{1}{8}x^2\left(-x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et $\underset{x\to 0}{o}(x^2)\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

Donc

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{= 4\,\underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$
$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Méthode 2 : f est de classe C^2 au voisinage de 0 en tant que quotient de fonctions de classe C^2 au voisinage de 0 dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'après la formule de Taylor, f possède un DL d'ordre 2 en 0 donné par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Or $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-(1+x)}{2\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}}{(1+x)^2} = \frac{-(1+x) - 2(\sqrt{1-x})^2}{2\sqrt{1-x}\,(1+x)^2}$$
$$= \frac{x-3}{2\sqrt{1-x}\,(1+x)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{1-x}\,(1+x)^2 - (x-3)\times 2\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}(1+x)^2 + 2(x+1)\sqrt{1-x}\right)}{\left(2\sqrt{1-x}\,(1+x)^2\right)^2}$$

Ainsi

$$f'(0) = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f''(0) = \frac{2-(-3)\times 2\times\left(-\frac{1}{2}+2\right)}{4}$$

$$= \frac{2+6\times\frac{3}{2}}{4} = \frac{11}{4}$$

Ainsi

$$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11/4}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

À l'aide de ce DL, on trouve que la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f a pour équation réduite

$$y = 1 - \frac{3}{2}x.$$

De plus comme $\frac{11}{8} > 0$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette tangente au voisinage de 0.