Chapitre 15- Variables aléatoires à densité

Dans tout ce chapitre, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Les variables aléatoires considérées seront définies sur cet espace probabilisé.

1 Variables aléatoire à densité

1.1 Fonctions de répartition et densités

Définition 1 (Fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple 1

Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminons sa fonction de répartition.

Définition 2 (Variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X est une variable aléatoire **à densité** si sa fonction de répartition F_X est :

- continue sur $\mathbb{R}$,
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Méthode 1 (*Montrer qu'un variable aléatoire est à densité*)

Étant donnée une variable aléatoire X, pour montrer qu'il s'agit d'une variable à densité :

- *on calcule sa fonction de répartition,*
- *on vérifie si elle satisfait les conditions de la définition 2.*

Exemple 2

Soit X *une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrons que X *est une variable à densité.*

1. *Montrons que* F_X *est continue.*

2. *Montrons que* F_X *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Définition 3 (Densité)

Soit X une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On appelle **densité de** X toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives telle que $f = F'_X$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Remarque 1

*On parle de **la** fonction de répartition car elle est unique mais d'**une** densité car il n'y a pas unicité.*

Exemple 3

On reprend la variable aléatoire de l'exemple précédent. Déterminons une densité de X.

Test 1 (*Voir solution.*)

Soit X *une variable aléatoire de fonction de répartition donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que X *est à densité et déterminer une densité.*

Proposition 1

Soit X une variable réelle à densité et f une densité de X. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Plus généralement, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$ on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Conséquences 1

Une variable aléatoire à densité est caractérisée par la donnée d'une densité.

Remarque 2

Une densité de probabilité est une fonction possédant un nombre fini de points de discontinuité. Dans ce cours, on ne rencontrera que des densités ayant des limites finies à gauche et à droite en tout point de discontinuité de sort qu'il fait sens de parler d'intégrale dans ce contexte. La proposition ci-dessus implique en particulier que les intégrales impropres qui apparaissent sont convergentes.

Théorème 1 (Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité)

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Remarque 3

La réciproque de ce théorème est bien évidemment vraie puisque la fonction de répartition F *d'une variable aléatoire réelle* X *est toujours croissante sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Méthode 2 (*Montrer qu'une fonction est la fonction de répartition d'une variable à densité*)

Le théorème 1 permet de montrer qu'une fonction est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Ici, la question est un peu différente de la question de la méthode précédente : on ne sait pas si la fonction est une fonction de répartition !

Exemple 4

Soit F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & si\ -1 \leqslant x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & si\ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & si\ x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrons que F *est la fonction de répartition d'une variable à densité.*

1. *Montrons que* F *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *Montrons que* F *est croissante sur* $\mathbb{R}$.

3. *On a bien* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4. *Montrons que* F *est de classe* C^1 *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Ainsi F *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.*

Théorème 2 (Caractérisation des densités)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est positive,
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Alors la fonction f est la densité d'une variable aléatoire X. Dans ce cas, la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Méthode 3 (***Montrer qu'une fonction est une densité d'une variable à densité***)

Le théorème 2 permet de montrer qu'une fonction est la densité d'une variable aléatoire à densité.

Exemple 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ e^{-x} & si\ x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. *Montrons que f est une densité d'une variable aléatoire* X.

2. *Déterminons la fonction de répartition de* X.

Proposition 2

Si f est une densité de probabilité, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe C^1 en tout point où f est continue. En un tel point x, $F'(x) = f(x)$.
Plus généralement, si f est continue à droite (resp. à gauche) en x, F est dérivable à droite (resp. à gauche) en x.

Test 2 (*Voir solution.*)

Montrer que la fonction f suivante est une densité d'une variable aléatoire X *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Déterminer la fonction de répartition de X.

Test 3 (*Voir solution.*)

Montrer que la fonction F *suivante est la fonction de répartition d'une variable aléatoire* X *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Déterminer une densité de X.

1.2 Moments d'une variable à densité

Définition 4 (Espérance/moments d'une variable aléatoire à densité)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à densité dont on note f une densité de X.

- On dit que X possède un **moment d'ordre r** si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt$ converge absolument. On note alors
$$m_r(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt.$$
- Sous réserve d'existence, le moment d'ordre 1 est appelé l'**espérance** de X et noté E(X).

Exemple 6

Soit X *une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

1. *Montrons que* X *admet une espérance.*

2. *La variable aléatoire* X *possède-t-elle un moment d'ordre 2 ?*

Test 4 (*Voir solution.*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On admet que f est une densité de probabilité et on considère une variable aléatoire à densité X de densité f. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Le cas échéant, la calculer.

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance)

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires réelles à densité définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ possédant une espérance.
Alors $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ admet une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)$.

Théorème 3 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire à densité et soit f une densité de X nulle en dehors d'un intervalle $]a, b[$ (avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).
Si g est une fonction continue sur $]a, b[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) alors la variable aléatoire $g(\mathrm{X})$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t) f(t) dt$ converge absolument. Dans ce cas :

$$\mathrm{E}(g(\mathrm{X})) = \int_a^b g(t) f(t) dt.$$

Remarque 4

En particulier, X possède un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si X^r possède une espérance. Dans ce cas

$$m_r(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^r).$$

Exemple 7

Soit X une variable à densité dont une densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$. La variable e^{X} possède-t-elle une espérance ?

Test 5 (*Voir solution.*)

Soit X *une variable à densité dont une densité est donnée par la fonction f définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable $\frac{1}{1+e^{-X}}$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Définition 5 (Variance/écart-type d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.

- On dit que X possède une variance si X possède une espérance et si $(X - E(X))$ possède un moment d'ordre 2. On appelle alors **variance de** X et on note V(X) le réel définie par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

- Lorsque X possède une variance, on appelle **écart-type** et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Proposition 4 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire à densité possédant une espérance. Alors X possède une variance si et seulement si X possède un moment d'ordre 2. Dans ce cas, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 8

Soit X *une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

On a vu à l'exemple 6 que X *ne possède pas de moment d'ordre 2.*

Proposition 5

Soit X une variable aléatoire à densité possédant une variance. Alors pour tous réels a et b, la variable aléatoire $a\mathrm{X}+b$ possède une variance et

$$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X}).$$

Définition 6 (Variable aléatoire centrée/réduite)

Soit X une variable aléatoire à densité.

- On dit que X est **centrée** si X possède une espérance nulle.
- On dit que X est **réduite** si X possède une variance égale à 1.

Exemple 9

Soit X *une variable à densité possédant une variance non nulle. On pose* $\mathrm{X}^* = \frac{\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\sigma(\mathrm{X})}$.

1. *La variable* X^* *est centrée.*

2. *La variable* X^* *est réduite.*

On dit que X^* ***est la variable aléatoire centrée réduite associée à*** X.

2 Lois usuelles à densité

2.1 Lois uniformes

Lois uniformes

Soit $a < b$ deux nombres réels.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Test 6 (*Voir solution.*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ *avec* $a < b$ *deux réels. Montrer que* X *possède une variance et que cette variance vaut* $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Proposition 6

Soient $a < b$ deux nombres réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \iff a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b]).$$

Test 7 (*Voir solution.*)

Démontrer la proposition.

2.2 Lois normales

Loi normale centrée réduite

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$E(X) = 0 \quad ; \quad V(X) = 1.$$

Proposition 7

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

En particulier, $F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque 5

On ne sait pas exprimer la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.

Lois normales

Soit μ et $\sigma > 0$ deux réels.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale de paramètres** μ **et** σ^2 et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$E(X) = \mu \quad ; \quad V(X) = \sigma^2.$$

Proposition 8

Soient μ, σ, a et b des nombres réels tels que : $\sigma > 0$ et $a \neq 0$. Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Test 8 (*Voir solution.*)

Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. *Démontrer le cas particulier suivant :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \iff \sigma X + \mu \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Remarque 6

De manière équivalente (μ, $\sigma > 0$ *des réels) :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

2.3 Lois exponentielles

Lois exponentielles

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi **exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Test 9 (***Voir solution.***)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que X possède une variance et que cette variance vaut $\frac{1}{\lambda^2}$.

3 Exemples de transferts

Méthode 4

Une variable aléatoire à densité X étant donnée, une question très fréquente consiste à déterminer la loi d'une variable aléatoire Y fonction de X (par exemple, $Y = aX + b$ ou $Y = X^2, \ldots$).
Pour cela la méthode consiste souvent à déterminer la fonction de répartition de Y.

1. *On détermine si Y est discrète ou non : si c'est le cas on détermine $Y(\Omega)$ et on calcule $P(Y = k)$ pour tout $k \in Y(\Omega)$.*
2. *Sinon, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on détermine $P(Y \leqslant t)$ à l'aide F_X en essayant d'écrire $[Y \leqslant t]$ sous la forme $[X \in I]$.*
3. *On peut ensuite chercher à vérifier si F_Y est la fonction de répartition d'une variable à densité et, le cas échéant, calculer une densité de Y.*

*Noter que, contrairement au cas discret, une variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité **n'est pas nécessairement à densité**.*

Toutes les étapes des raisonnements suivants doivent être comprises et vous devez savoir les reproduire sur des exemples.

- ► **Transformations affines d'une variable aléatoire à densité.**

Exemple 10

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$. On va montrer que $Y = aX + b$ est à densité et déterminer une densité de Y.

1. *Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y.*

2. *Montrons que* Y *est une variable à densité.*

3. *Déterminons une densité de* Y *en fonction de* f.

Test 10 (***Voir solution.***)

Soit X *une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction* f *définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que $3X - 1$ *est une variable à densité et en déterminer une densité.*

► **Exponentielle d'une variable aléatoire à densité.**

Exemple 11

Soit X *une variable aléatoire à densité de densité* f. *On va montrer que* $Y = e^X$ *est à densité et déterminer une densité de* Y.

1. *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y.

2. *Montrons que* Y *est une variable à densité.*

3. *Déterminons une densité de* Y *en fonction de* f*.*

Test 11 (*Voir solution.*)

Soit X *une variable aléatoire de loi* $\mathscr{E}(2)$*. Déterminer la loi de* $Y = e^X$*.*

► **Carré d'une variable aléatoire à densité.**

Exemple 12

Soit X *une variable aléatoire à densité de densité* f*. On pose* $Y = X^2$*.*
On va montrer que Y *est à densité et déterminer une densité de* Y*.*

1. *Déterminons la fonction de répartition* F_Y *de* Y*.*

2. *Montrons que* Y *est une variable à densité.*

3. *Déterminons une densité de* Y *en fonction de* f.

Test 12 (*Voir solution.*)

Soit X *suivant une loi uniforme sur* $[-1,1]$. *Déterminer la loi de* X^2.

- **Une transformation usuelle.**

Exemple 13

Soit X *suivant une loi uniforme sur* $[0,1[$ *et soit* $\lambda > 0$. *On pose* $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$. *Déterminons la loi de* Y.
On pose $h : [0,1[\to \mathbb{R}$ *définie par* $h(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$.

1. *Déterminons* $h([0,1[)$.

2. *Déterminons la fonction de répartition de* Y

3. *Déterminer la loi de* Y.

- **Valeur absolue d'une variable aléatoire à densité.**

Test 13 (*Voir solution.*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. *On pose* $Y = |X|$. *Montrer que* Y *est une variable à densité et déterminer une densité de* Y.

- **Partie entière d'une variable aléatoire à densité.**

Voir TD.

4 Objectifs

1. Savoir justifier qu'une variable aléatoire est/n'est pas à densité.
2. Savoir montrer qu'une fonction donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité. Savoir montrer qu'une fonction donnée est une densité d'une variable à densité.
3. Sur des exemples simples, savoir déterminer la fonction de répartition, une densité de fonctions d'une variable aléatoire à densité.
4. Savoir déterminer si une variable aléatoire à densité possède une espérance, un moment d'ordre r $(r \in \mathbb{N}^*)$ à partir de la définition.
5. Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas une espérance à l'aide du théorème de transfert et le cas échéant, la calculer.
6. Savoir montrer qu'une fonction d'une variable aléatoire à densité possède/ne possède pas de variance et le cas échéant, la calculer.