Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. **a.** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

   b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

   b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

   c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X = n]) \quad \text{puis} \quad P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

   d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

   b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

   c. En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

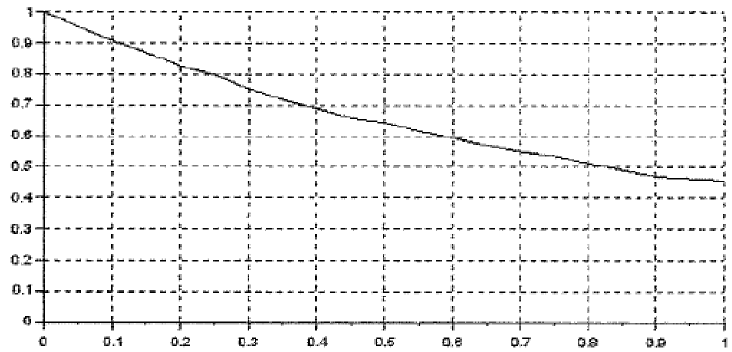
   a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

   b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1/N
        end
    end
endfunction
```

---

c. On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. **a.** Montrer : $P([X \leqslant Y]) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n])\, P([Y \geqslant n])$.

b. Déduire des résultats précédents : $P([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3}\right).$$

Partie A

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f. L'application f est-elle injective ?

   (c) En déduire, sans utiliser l'algorithme du pivot de Gauss, le rang de f. L'application f est-elle surjective ?

   (d) Calculer f^2 puis f^3.

2. Soit g un endomorphisme de E vérifiant

$$g(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3).$$

   Montrer que $g = f$.

3. Soient $e'_1 = (-1,-1,1)$, $e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$.
   (c) (Bonus) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe un endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

1. Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a\, e'_1$.
   (b) Montrer que $g(e'_2) - a\, e'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b\, e'_1 + a\, e'_2$.
   (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a\, e'_2 + b\, e'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - a\, e'_3 - b\, e'_2$ appartient au noyau de f.
   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que :
$$g(e'_1) = ae'_1 \quad ; \quad g(e'_2) = be'_1 + ae'_2 \quad ; \quad g(e'_3) = ae'_3 + be'_2 + ce'_1.$$
3. Calculer $g^2(e'_1)$, $g^2(e'_2)$, $g^2(e'_3)$ en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $g \circ g = f$, obtenir une contradiction.

Exercice 3

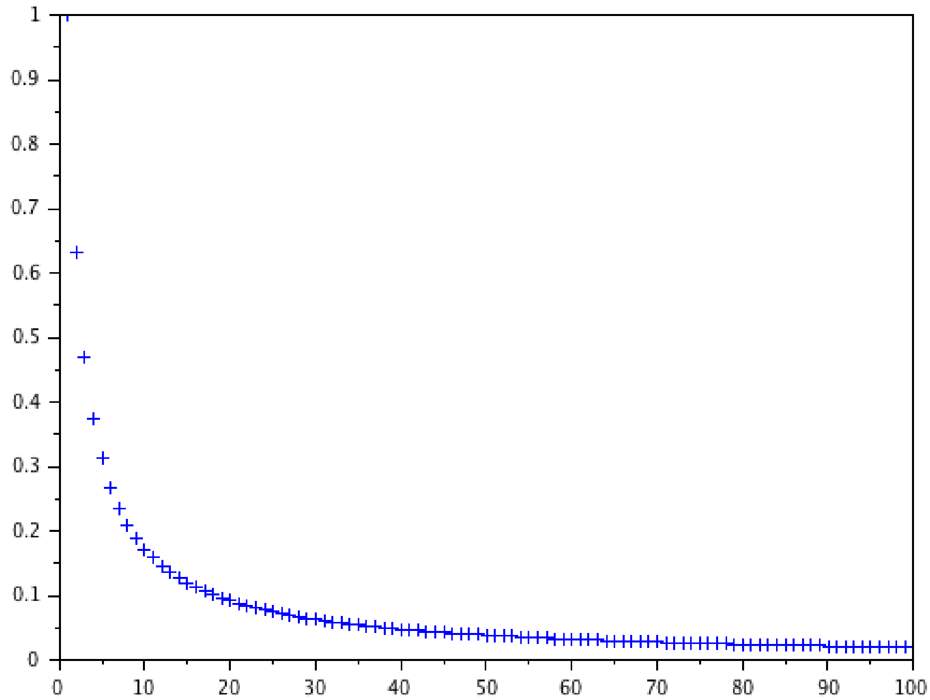
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

I - Une loi exponentielle et une suite

1. **Une loi exponentielle**.
   Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Donner une densité de X et rappeler la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X.
   (b) Redémontrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F définie pour tout réel x par :
$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
2. **Étude d'une suite**.
   On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = \mathrm{F}(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.
   Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n > 0$.
   (c) Recopier et compléter le programme SCILAB suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
        U(n+1) = _________________
end
plot(U,"+")
```

(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

(e) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(f) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

(g) À l'aide de la question 2(a), montrer successivement que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

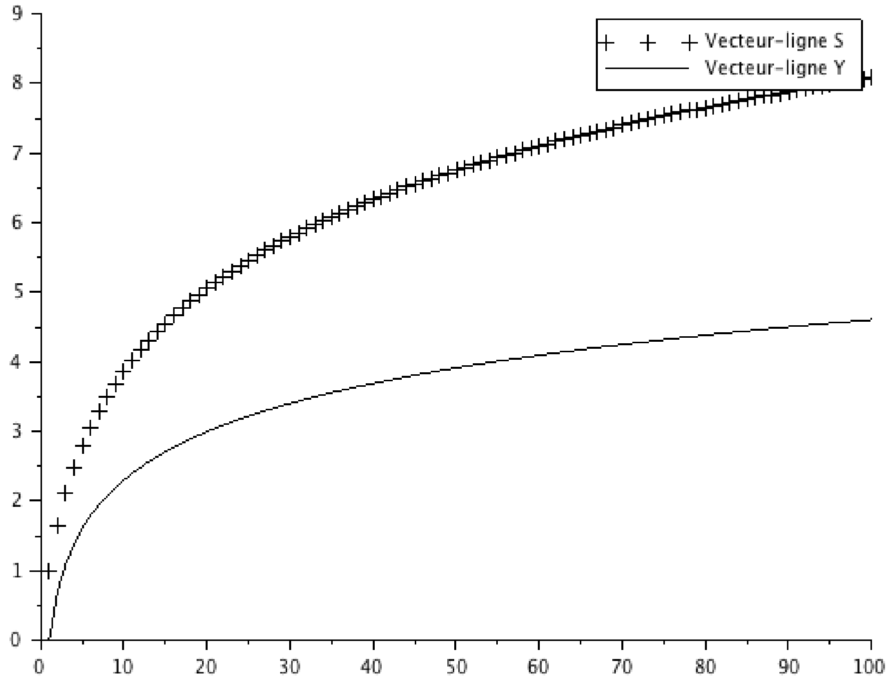
(h) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

(i) On modifie le programme écrit en question 2(c) en remplaçant la dernière ligne par :

```
X = 1: 100
S = cumsum(U)
Y = log(X)
plot2d(X,S)
plot2d(X,Y)
```

Le programme ci-dessus permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Que représente le vecteur-ligne S ?
Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série de terme général u_n ?

(j) A l'aide de la question 2(h), établir la nature de la série de terme général u_n.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. **Étude de la fonction** g.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   (b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
   (c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.
2. **Étude de variables aléatoires**.
   (a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

   (b) Montrer que pour tout réel x,

$$\mathrm{G}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (c) Justifier que G est de classer $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $\mathrm{A} > 0$, montrer que

$$\int_0^{\mathrm{A}} t g(t)\,dt = -\mathrm{A}^2 e^{-\mathrm{A}} + 2\int_0^{\mathrm{A}} g(t)\,dt.$$

   (e) En déduire que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \text{ et } \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2. Calculer I_0 et I_1
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_{n+2} + 2\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n$
   (b) En déduire I_2
   (c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
a=1/2
b= log(2) - 1/2
for k=2: n
    aux = a
    a=-----
    b=------
end
disp (b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{I}_n = n\mathrm{J}_{n-1} - \frac{1}{2}$
6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+1}$ en fonction de n.
   (b) En déduire la valeur de J_1.
7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
 n=input ('donnez une valeur pour n: ')
 J=log (2)
 for k=1: n-1
     J=------
 end
I=-----
disp(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{J}_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$
9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
   (c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$
    (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n?
11. On se propose, malgré 1'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.
    (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

(c) Montrer alors que $\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.
   a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$
   b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$
   c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$