

TD8-Couples de variables aléatoires

Exercice 5.

1. Remarquons que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$[G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] = \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j \right].$$

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in [G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] &\Leftrightarrow \begin{cases} G_1(\omega) + G_2(\omega) = i \\ G_1(\omega) - G_2(\omega) = j \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2G_1(\omega) = i+j \\ G_1(\omega) - G_2(\omega) = j \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$P([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = P\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right).$$

Or, comme G_1 suit une loi géométrique de paramètre p , $G_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc, pour les entiers i et j tels que $\frac{i+j}{2} \notin \mathbb{N}^*$, on a forcément :

$$P([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = P\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right) = 0.$$

Par exemple,

$$P([G_1 + G_2 = 2, G_1 - G_2 = 1]) = P\left(\left[G_1 = \frac{3}{2}, G_1 - G_2 = 1\right]\right) = 0$$

car $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$.

D'autre part, montrons que

- (a) $P([G_1 + G_2 = 2]) \neq 0$;
- (b) $P([G_1 - G_2 = 1]) \neq 0$.

(a) Montrons que $P([G_1 + G_2 = 2]) \neq 0$. Comme $G_1(\Omega) = G_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on voit que

$$[G_1 + G_2 = 2] = [G_1 = 1, G_2 = 1]$$

donc

$$P([G_1 + G_2 = 2]) = P([G_1 = 1, G_2 = 1]).$$

Les variables aléatoires G_1 et G_2 étant indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ on a

$$\begin{aligned} P([G_1 + G_2 = 2]) &= P([G_1 = 1, G_2 = 1]) \\ &= P([G_1 = 1]) \cdot P([G_2 = 1]) \\ &= p^2 \\ &> 0 \quad \text{car } p > 0. \end{aligned}$$

(b) Montrons que $P([G_1 - G_2 = 1]) \neq 0$. On voit que

$$[G_1 - G_2 = 1] \supset [G_1 = 2, G_2 = 1]$$

donc

$$P([G_1 + G_2 = 2]) \geq P([G_1 = 2, G_2 = 1]).$$

Les variables aléatoires G_1 et G_2 étant indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$ on a donc

$$\begin{aligned} P([G_1 + G_2 = 2]) &\geq P([G_1 = 2, G_2 = 1]) \\ &\geq P([G_1 = 2]) \cdot P([G_2 = 1]) \\ &= p^2(1-p) \\ &> 0 \quad \text{car } 0 < p < 1. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P([G_1 + G_2 = 2]) \cdot P([G_1 - G_2 = 1]) \neq 0 = P([G_1 + G_2 = 2, G_1 - G_2 = 1]).$$

Les variables aléatoires $G_1 - G_2$ et $G_1 + G_2$ ne sont pas indépendantes.

Remarque 1 (Loi de $G_1 - G_2$). On a $(G_1 - G_2)(\Omega) = \mathbb{Z}$. En effet, soit $j \in \mathbb{Z}$. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements

$([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_1 - G_2 = j, G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([k - G_2 = j, G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j, G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \quad \text{car } G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont indépendantes}
 \end{aligned}$$

Or, $G_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $P([G_2 = k - j]) = 0$ pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k - j \leq 0$ c'est-à-dire pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq j$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \geq j+1}}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k])
 \end{aligned}$$

(a) Si $j \geq 0$, alors $\mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[$ est l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à $j+1$ donc

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1} p(1-p)^{k-1} \\
 &= p^2 \sum_{k=j+1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\
 &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2}
 \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $\ell = k - j$. Donc

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2} \\
 &= p^2 (1-p)^{j-2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell} \\
 &= p^2 (1-p)^{j-2} \left(\frac{1}{1 - (1-p)^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :

$$P([G_1 - G_2 = j]) = \frac{p(1-p)^j}{2-p}$$

(b) Si $j < 0$, alors $j+1 \leq 0$ donc $\mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[= \mathbb{N}^*$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1} p(1-p)^{k-1} \\
 &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \left(\frac{1}{1 - (1-p)^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :

$$P([G_1 - G_2 = j]) = \frac{p}{(2-p)(1-p)^j}$$

2. On va commencer par étudier la loi de A . On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement $S = \ll \text{le tireur touche deux fois la cible} \gg$. Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a

$$\begin{aligned}
 P(S) &= P([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
 &= P([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}]) P([\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\
 &= p^2
 \end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable A compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi A suit une loi $\mathcal{B}(n, p^2)$.

Étudions maintenant la loi de B . On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement $S = \ll \text{le tireur touche exactement une fois la cible} \gg$. Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a

$$\begin{aligned} P(S) &= P([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{rater la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &\quad + P([\text{rater la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}]) P([\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &= p(1-p) + (1-p)p \\ &= 2p(1-p) \end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable B compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi B suit une loi $\mathcal{B}(n, 2p(1-p))$.

Or, les événements $[A = n]$ et $[B = 1]$ sont incompatibles car il n'y a que n tireurs. Donc

$$P([A = n, B = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$P([A = n]) = p^{2n} \quad \text{et} \quad P([B = 1]) = n2p(1-p)(1-2p(1-p))^{n-1}.$$

Comme $p \in]0, 1[$, on obtient donc

$$P([A = n]) \neq 0 \quad \text{et} \quad P([B = 1]) \neq 0$$

et par conséquent,

$$P([A = n]) P([B = 1]) \neq P([A = n, B = 1]).$$

Ainsi A et B ne sont pas indépendantes.

Exercice 6. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Par indépendance, on a

$$P([X = i, Y = j]) = P([X = i]) P([Y = j]) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}.$$

Exercice 8. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On procède par récurrence. Soit \mathcal{P}_n :

« pour toutes X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$ on a $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p) \gg$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, \mathcal{P}_n est vraie.

- Initialisation : le cas $n = 2$ est un résultat de cours.
- Hérédité : supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain $n \geq 2$ et montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. Soient X_1, \dots, X_{n+1} des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. On pose $Y = X_1 + \dots + X_n$.

(a) Montrons que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes. On sait que X_1, \dots, X_{n+1} sont mutuellement indépendantes donc

$$\forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_{n+1}(\Omega), P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n+1} P([X_k = x_k]).$$

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événement $([X_{n+1} = x_{n+1}])_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)}$ on trouve donc :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) &= \sum_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)} P\left(\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) \cap [X_{n+1} = x_{n+1}]\right) \\ &= \sum_{x \in X_{n+1}(\Omega)} \prod_{k=1}^{n+1} P([X_k = x_k]) \\ &= \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]) \sum_{x \in X_{n+1}(\Omega)} P([X_{n+1} = x_{n+1}]) \\ &= \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]). \end{aligned}$$

Cela montre que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

Ainsi X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

- (b) D'après l'hypothèse de récurrence, Y suit donc une loi $\mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p)$.
- (c) D'après le lemme des coalitions, Y et X_{n+1} sont indépendantes.
- (d) D'après \mathcal{P}_2 , on a donc

$$X_1 + \dots + X_{n+1} = Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n + k_{n+1}, p).$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, \mathcal{P}_n est vraie.

2. Même preuve que pour la question précédente.

Exercice 9. 1. On a $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ on a

$$\begin{aligned}
 P([X + Y = n]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i, X + Y = n]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X = i, Y = n - i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} P([X = i, Y = n - i]) \quad \text{car } P([X = i, Y = n - i]) = 0 \text{ si } n \leq i \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} P([X = i]) P([Y = n - i]) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{n-i-1} \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent une loi } \mathcal{G}(p) \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1+n-i-1} \\
 &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.
 \end{aligned}$$

2. (a) Posons $V = \min(X, Y)$. Alors $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$V(\omega) > k \iff \min(X(\omega), Y(\omega)) > k \iff X(\omega) > k \text{ et } Y(\omega) > k.$$

Donc

$$[V > k] = [X > k] \cap [Y > k].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P([\min(X, Y) > k]) &= P([X > k] \cap [Y > k]) \\
 &= P([X > k]) P([Y > k]) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \right) \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} \right) \\
 &= p^2 \left(\sum_{\ell=k}^{+\infty} (1-p)^\ell \right)^2 \\
 &= (1-p)^{2k}
 \end{aligned}$$

- On a donc :

$$P([\min(X, Y) = 1]) = 1 - P([\min(X, Y) > 1]) = 1 - (1-p)^2$$

et, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
 P([\min(X, Y) = k]) &= P([\min(X, Y) > k-1]) - P([\min(X, Y) > k]) \\
 &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} \\
 &= (1-p)^{2(k-1)}(1 - (1-p)^2).
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\min(X, Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$.

(b) Posons $U = \max(X, Y)$. Alors $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$U(\omega) \leq k \iff \max(X(\omega), Y(\omega)) \leq k \iff X(\omega) \leq k \text{ et } Y(\omega) \leq k.$$

Donc

$$[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P([\max(X, Y) \leq k]) &= P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \\
 &= P([X \leq k]) P([Y \leq k]) \quad \text{par indépendance} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^k p(1-p)^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1} \right) \\
 &= p^2 \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (1-p)^\ell \right)^2 \\
 &= (1 - (1-p)^k)^2
 \end{aligned}$$

- On a donc :

$$P([\max(X, Y) = 1]) = p^2$$

et, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
 P([\max(X, Y) = k]) &= P([\max(X, Y) \leq k]) - P([\max(X, Y) \leq k-1]) \\
 &= (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2 \\
 &= p(1-p)^{k-1}(2 - (2-p)(1-p)^{k-1}).
 \end{aligned}$$

3. Comme X et Y possèdent une espérance, $X + Y$ aussi et par linéarité on a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{p}.$$

De plus, $\min(X, Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$ donc possède une espérance et

$$E(\min(X, Y)) = \frac{1}{1 - (1-p)^2}.$$

Pour justifier l'existence et calculer l'espérance de $\max(X, Y)$ on peut procéder de plusieurs façons.

- Méthode 1 : on remarque que $\max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$ donc $\max(X, Y) = X + Y - \min(X, Y)$. Ainsi, comme on vient de voir que $X + Y$ et $\min(X, Y)$ possèdent une espérance, $\max(X, Y)$ aussi et par linéarité on a

$$E(\max(X, Y)) = E(X + Y) - E(\min(X, Y)) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{1 - p}{p(2 - p)}$$

- Méthode 2 : on connaît la loi de $U = \max(X, Y)$. Par définition, U possède une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} kP([U = k])$ est absolument convergente. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} kP([U = k]) &= k \left((1 - (1 - p)^k)^2 - (1 - (1 - p)^{k-1})^2 \right) \\ &= k \left((1 - p)^{2k} - (1 - p)^{2(k-1)} + 2(1 - p)^{k-1} - 2(1 - p)^k \right) \\ &= k(1 - p)^{2(k-1)} \left((1 - p)^2 - 1 \right) + 2pk(1 - p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k \geq 1} kP([U = k])$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées premières $\sum_{k \geq 1} k(1 - p)^{2(k-1)}$ et $\sum_{k \geq 1} k(1 - p)^{(k-1)}$ de raison respective $(1 - p)^2$ et $(1 - p)$. Comme $|1 - p| < 1$ et $|(1 - p)^2| < 1$, ces séries convergent et par conséquent, $\sum_{k \geq 1} kP([U = k])$ converge aussi. Ainsi, U possède une espérance et

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP([U = k]) \\ &= \left((1 - p)^2 - 1 \right) \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{2(k-1)} + 2p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} \\ &= \left((1 - p)^2 - 1 \right) \times \frac{1}{1 - (1 - p)^2} + 2p \times \frac{1}{1 - (1 - p)} \\ &= -\frac{1}{1 - (1 - p)^2} + \frac{2}{p} \end{aligned}$$

Exercice 11. 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P([X > n]) &= 1 - P([X \leq n]) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n [X = i]\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n P([X = i]) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n p_1(1 - p_1)^{i-1} \\ &= 1 - p_1 \frac{1 - (1 - p_1)^n}{p_1} \\ &= (1 - p_1)^n. \end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que, $P([Y > n]) = (1 - p_2)^n$ par un calcul similaire à celui de la question précédente. Or, $[U > n] = [X > n] \cap [Y > n]$ donc

$$\begin{aligned} P([U > n]) &= P([X > n] \cap [Y > n]) \\ &= P([X > n]) P([Y > n]) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n. \end{aligned}$$

- (c) On voit facilement que $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} P([U = n]) &= F_U(n) - F_U(n - 1) = (1 - P([U > n])) - (1 - P([U > n - 1])) \\ &= P([U > n - 1]) - P([U > n]) \\ &= (1 - p_1)^{n-1} (1 - p_2)^{n-1} - (1 - p_1)^n (1 - p_2)^n \\ &= ((1 - p_1)(1 - p_2))^{n-1} (1 - (1 - p_1)(1 - p_2)). \end{aligned}$$

Ainsi, U suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P([V \leq n]) &= P([X \leq n] \cap [Y \leq n]) \\ &= P([X \leq n]) P([Y \leq n]) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - P([X > n])) (1 - P([Y > n])) \\ &= (1 - (1 - p_1)^n) (1 - (1 - p_2)^n) \end{aligned}$$

Puis

$$P([V > n]) = 1 - P([V \leq n]) = 1 - (1 - (1 - p_1)^n)(1 - (1 - p_2)^n).$$

En posant $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$ on trouve

$$P([V > n]) = 1 - P([V \leq n]) = q_1^n + q_2^n - q_1^n q_2^n.$$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m nP(V = n) &= \sum_{n=1}^m n(F_V(n) - F_V(n-1)) \\
&= \sum_{n=1}^m n(P(V \leq n) - P(V \leq n-1)) \\
&= \sum_{n=1}^m n(P(V > n-1) - P(V > n)) \\
&= \sum_{n=1}^m nP(V > n-1) - \sum_{n=1}^m nP(V > n) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(V > k) - \sum_{n=1}^m nP(V > n)
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $k = n - 1$ dans la première somme. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m nP(V = n) &= \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(V > k) - \sum_{n=1}^m nP(V > n) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} kP(V > k) + \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k) - \sum_{n=1}^m nP(V > n) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} kP(V > k) + \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k) - \left(\sum_{n=1}^{m-1} nP(V > n) + mP(V > m) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k) - mP(V > m).
\end{aligned}$$

(c) L'existence de l'espérance de V est équivalente à la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$. Comme cette série est à termes positifs, V possède une espérance si et seulement si $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$ converge.

Or, d'après les questions précédentes, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m nP(V = n) &= \sum_{k=0}^{m-1} P(V > k) - mP(V > m) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (q_1^k + q_2^k - q_1^k q_2^k) - mP(V > m) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} q_1^k + \sum_{k=0}^{m-1} q_2^k - \sum_{k=0}^{m-1} (q_1 q_2)^k - m(q_1^m + q_2^m + (q_1 q_2)^m).
\end{aligned}$$

Comme $|q_1| < 1$, $|q_2| < 1$ et $|q_1 q_2| < 1$, les séries $\sum_{k \geq 0} q_1^k$, $\sum_{k \geq 0} q_2^k$ et $\sum_{k \geq 0} (q_1 q_2)^k$ convergent et ont pour somme $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ et $\frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$. De plus

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} m(q_1^m + q_2^m + (q_1 q_2)^m) = 0$$

donc finalement, la série $\sum_{n \geq 1} nP(V = n)$ converge. Ainsi, V possède une espérance et

$$E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(V = n) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

Exercice 12. Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

1. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P([Y + 1 = n]) = P([Y = n - 1]) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-(n-1)}.$$

Ainsi $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$. Du coup,

$$E(Y) = E(Y + 1 - 1) = E(Y + 1) - 1 = \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e - 1}$$

et

$$V(Y) = V(Y + 1) = \frac{e}{(e - 1)^2}.$$

2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1)Y$.

(a) T est un produit de variable aléatoire discrète donc c'est une variable aléatoire discrète. Comme $(2U - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- si $n > 0$ on a, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} + 0 \end{aligned}$$

car $-n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$ on a de même

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(T = 0, U = 1) + P(T = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0, U = 1) + P(Y = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0)P(U = 1) + P(Y = 0)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} \\ &= 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

- Si $n < 0$ on a de même

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^n \end{aligned}$$

car $n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Comme U et Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, $2U - 1$ et Y sont indépendantes. De plus, $2U - 1$ et Y possèdent une espérance. Donc T possède une espérance et

$$E(T) = E(2U - 1)E(Y) = 0.$$

(c) Comme $(2U - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ alors $((2U - 1)^2)(\Omega) = \{1\}$ donc

$$T^2 = (2U - 1)^2 Y^2 = Y^2.$$

Comme Y possède un moment d'ordre 2 et que $T^2 = Y^2$, T possède un moment d'ordre 2 aussi, donc une variance. Par la formule de Koenig-Huygens on a

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \frac{e + 1}{(e - 1)^2}$$

Exercice 14. 1. Soit $i \in [[1; n]]$. X_i suit une loi $\mathcal{B}(k, \frac{1}{n})$.

2. Soit $i \neq j$. On a $P(X_i = k, X_j = k) = 0$ car en k tirages on ne peut pas tirer k fois la boule i et k fois la boule j . Or, d'après la question précédente, $P(X_i = k)$ et $P(X_j = k)$ sont non nulles donc

$$P(X_i = k, X_j = k) \neq P(X_i = k)P(X_j = k).$$

Ainsi, les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes. Donc les variables X_1, \dots, X_n ne le sont pas.

3. Soit $(i, j) \in [[1; n]]^2$ tel que $i \neq j$.

(a) La variable $X_i + X_j$ compte le nombre de succès lorsqu'on répète k fois indépendantes l'expérience de Bernoulli de succès « avoir la boule i ou la boule j ». La probabilité de succès est $\frac{2}{n}$ donc $X_i + X_j$ suit une loi $\mathcal{B}(k, \frac{2}{n})$

(b) On sait que $V(X_i + X_j) = \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. D'autre part, on a

$$V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j) = 2 \times \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\text{Cov}(X_i, X_j).$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{k}{n^2}.$$