

DM0 : Correction

Exercice 1

Partie A : étude d'une première fonction

1. En tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} donc par composition, la fonction d est dérivable sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in] -1, +\infty[$ on a :

$$d'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \times e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}.$$

En particulier, pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $d'(x) > 0$. Ainsi d est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.

2. Par opération sur les limites, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

Ainsi, par composition des limites on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} d(x) = 0.$$

De même, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 1} e^y = e.$$

Ainsi, par composition des limites on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = e.$$

3. D'après les questions précédentes, la fonction d est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} d(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = e$ donc pour tout $x > -1$ on a

$$0 < d(x) < e.$$

4. (a) Il faut importer la bibliothèque numpy avec, par exemple, la commande :

```
import numpy as np
```

(b)

```
def d(x):  
    return np.exp(x/(x+1))
```

- (c) Il faut importer la bibliothèque matplotlib.pyplot avec, par exemple, la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

(d)

```
x=np.linspace(0,10,100)  
plt.plot(x,d(x))  
plt.show()
```

Partie B : étude d'une deuxième fonction

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f est définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \quad f(x) = x+1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

5. (a) En tant que quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $] -1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, la fonction exponentielle est deux fois dérivable sur \mathbb{R} donc par composition, la fonction d est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$. En tant que somme de fonctions deux fois dérivables sur $] -1, +\infty[$, la fonction f est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in] -1, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 - d'(x) = 1 - \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}$$

et

$$f''(x) = - \left(\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4} - \frac{2e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^3} \right) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}.$$

(b) On effectue le changement de variable $y = \frac{1}{x+1}$:

$$\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} = y^2 e^{y(\frac{1}{y}-1)} = e y^2 e^{-y}.$$

Quand x tend vers -1 par valeurs supérieures, y tend vers $+\infty$ et, par croissance comparée on sait que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 e^{-y} = 0.$$

Ainsi, par composition des limites on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} e y^2 e^{-y} = 0.$$

Finalement on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = 1.$$

D'autre part, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$ et, par continuité de la fonction exponentielle en 1, que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$. Ainsi par opération sur les limites on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1 - e \times 0 = 1.$$

(c) D'après la question 5.(a), le signe de $f''(x)$ est le signe de $2x+1$. On obtient alors :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f'	1		1

6. On a : $f'(-\frac{1}{2}) = 1 - 4e^{-1} < 0$.

D'après la question précédente, la fonction f' est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et continue sur cet intervalle. De plus, $0 \in [f(-\frac{1}{2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. On vérifie directement que $f'(0) = 0$ avec l'expression de f' déterminée à la question 5.(a). Ainsi, 0 est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$ dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.

De même, la fonction f' est strictement décroissante et continue sur $] -1, -\frac{1}{2}]$. De plus, $0 \in [f(-\frac{1}{2}), \lim_{x \rightarrow -1} f'(x)]$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution dans $] -1, -\frac{1}{2}]$. On notera α cette solution.

7. (a) D'après les questions précédentes on a :

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$		
Variations de f'	1	0	0	1	

On en déduit donc le tableau de signe de f' puis les variations de f :

x	-1	α	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
Variations de f				

(b) D'après la question 2, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{\frac{x}{x+1}} = 0.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 + 1 - 0 = 0.$$

Toujours d'après la question 2, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e.$$

On en déduit donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Partie C : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n).$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n > 0$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 \in]0, +\infty[$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que : $u_n > 0$. Or f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a donc :

$$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 - e^{\frac{u_n}{u_{n+1}}}.$$

Or, d'après la question précédente $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ est strictement positif donc par croissance stricte de la fonction exponentielle :

$$e^{\frac{u_n}{u_{n+1}}} > e^0 = 1$$

En particulier : $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ceci étant vérifié pour tout entier naturel n , on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

10. D'après les deux questions précédentes, on sait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0). D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc.

Exercice 2

Partie A

1. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in E &\iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 3x \\ x - y + 5z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y - 2z \\ &\iff (x, y, z) = (y - 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 1, 0), (-2, 0, 1)). \end{aligned}$$

Ainsi : $E = \text{Vect}((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$. En particulier, E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

(b) On a bien :

$$2 \times 1 + (-1) - 2 \times (-1) = 3 \times 1 \text{ et } 1 - (-1) + 5 \times (-1) = 3 \times (-1).$$

Ainsi $(1, -1, -1)$ appartient à E .

(c) D'après la question 1.(a), la famille $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est une famille génératrice de E . De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. La famille $((1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ est libre et génératrice de E , c'est donc une base de E .

2. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, -1, -1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $((1, -1, -1), (1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille libre.

(b) On sait que \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel de dimension 3 et que la famille $((1, -1, -1), (1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une famille libre de \mathbb{R}^3 formée de trois vecteurs. C'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

(c) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1(1, -1, -1) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(-1, 0, 1) = (1, 2, 3) &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(1, 2, 3) = 2(1, -1, -1) + 4(1, 1, 0) + 5(-1, 0, 1).$$

Partie B

3. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} Y = PX &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 = y_2 \\ -x_1 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_2 - x_3 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \quad \left(\text{en faisant } \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right) \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_3 = 2x_2 - y_1 - y_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_2 + x_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. On trouve :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie C

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $P^{-1}A = D_1P^{-1}$ et $P^{-1}B = D_2P^{-1}$ alors on a :

$$\begin{aligned}
Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} = P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\
&= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\
&= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\
&= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} &= Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ \frac{1}{2}b_{n+1} \\ \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2} b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3} c_{n+1} + \frac{1}{3} c_n \end{cases}$$

7. Un calcul donne :

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

8. D'après les questions 2 et 3.

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ et de premiers termes $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{9}{4}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Ainsi :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a + b \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $a_0 = 2$ et $a_1 = 1$ alors :

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ a-\frac{b}{2} &= 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a &= \frac{4}{3} \\ b &= \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

- La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $b_1 = 1$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

On vérifie que cette expression est aussi valable pour $n = 0$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

- La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ et de premiers termes $c_0 = 1$ et $c_1 = -1$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\frac{16}{9}$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = 1$. Ainsi :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a + b \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $c_0 = 1$ et $c_1 = -1$ alors :

$$\begin{cases} a + b &= 1 \\ a - \frac{b}{3} &= -1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a &= -\frac{1}{2} \\ b &= \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n - c_n \\ -a_n + b_n \\ -a_n + c_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \alpha_n &= \frac{11}{6} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \beta_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \\ \gamma_n &= -\frac{11}{6} - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n. \end{cases}$$

Exercice 3

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $(S = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ le crabe a avancé à l'instant i puis est retourné en 0 à l'instant k . Ainsi $(S = k)$ est réalisé si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $(Y_i = i)$ et $(Y_k = 0)$ sont réalisés. Donc

$$(S = k) = (Y_k = 0) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} (Y_i = i).$$

- La variable aléatoire Y_1 prend la valeur 0 avec probabilité $1 - p$ et la valeur 1 avec probabilité p . Ainsi, Y_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées (les événements par lesquels on conditionne étant bien de probabilités non nulles), on a :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(Y_1 = 1)P(Y_1 = 1)(Y_2 = 2) \dots P(Y_1 = 1) \cap \dots \cap (Y_{k-2} = k-2)(Y_{k-1} = k-1) \\ &\quad \times P(Y_1 = 1) \cap \dots \cap (Y_{k-1} = k-1)(Y_k = 0) \\ &= p \times p \times \dots \times p \times (1 - p) \\ &= p^{k-1}(1 - p). \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S = k) = p^{k-1}(1 - p)$.

On reconnaît que S suit la loi géométrique de paramètre $(1 - p)$.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
 - Initialisation* : d'après l'énoncé, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, il est évident que $Y_{n+1}(\Omega) \subset \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ car le mobile ne peut pas avancer de plus de $n+1$ en $n+1$ instants. Soit $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ et montrons que $P(Y_{n+1} = k) > 0$.

- Si $k = 0$ alors on a :

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = 0) &\geq P(Y_{n+1} = 0, Y_n = 0) = P(Y_n = 0)(Y_{n+1} = 0)P(Y_n = 0) \\ &= (1 - p)P(Y_n = 0) > 0 \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

- Si $k \geq 1$ alors on a :

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = k) &\geq P(Y_{n+1} = k, Y_n = k-1) \\ &= P_{(Y_n = k-1)}(Y_{n+1} = k)P(Y_n = k-1) \\ &= pP(Y_n = k) > 0 \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi : $\forall k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $P(Y_{n+1} = k) > 0$.

Par conséquent, $Y_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, la famille $(Y_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales on obtient alors :

$$\begin{aligned} P(Y_n = 0) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{(Y_{n-1}=k)}(Y_n = 0)P(Y_{n-1} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)P(Y_{n-1} = k) \\ &= (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_{n-1} = k) \\ &= 1-p. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 0) = 1-p$.

3. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Toujours d'après la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(Y_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^n P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1} = k)P(Y_n = i).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a :

$$P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1} = k) = \begin{cases} p & \text{si } i = k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^n P_{(Y_n=i)}(Y_{n+1} = k)P(Y_n = i) \\ &= pP(Y_n = k-1). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(Y_{n+1} = k) = pP(Y_n = k-1).$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P(Y_n = k) = p^k(1-p)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : d'après la question 1.(b), $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n non nul et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Y_n = \ell) = p^\ell(1-p).$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Si $k \geq 1$ alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence avec $\ell = k-1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ on a :

$$P(Y_{n+1} = k) = pP(Y_n = k-1) = p \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p).$$

- Si $k = 0$, on a déjà vu en 2.(b) que

$$P(Y_{n+1} = 0) = 1-p = p^0(1-p).$$

Ainsi, on a montré :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(Y_{n+1} = k) = p^k(1-p).$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Y_n = k) = p^k(1-p).$$

Par ailleurs, puisque pour tout entier naturel non nul n on a $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ alors, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(Y_n = n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(Y_n = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) = 1 - (1-p) \frac{1-p^n}{1-p} = p^n.$$

(c) Découle de la question précédente.

4. (a) Soit $n \geq 2$. On considère la fonction f définie sur $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout $x \in [0, 1[$ on a :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}.$$

D'autre part, on sait que pour tout $x \in [0, 1[$ on a :

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Donc en dérivant, on trouve :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1-x) + 1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

- (b) Soit $n \geq 2$. Le support de Y_n est fini (on a vu que c'est $\llbracket 0, n \rrbracket$). Donc Y_n possède une espérance et :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^n kP(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} kp^k(1-p) + nP(Y_n = n) \\ &= p(1-p) \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \\ &= p(1-p) \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + np^n \\ &= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n(1-p)}{1-p} \\ &= \frac{p - p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p(1-p^n)}{1-p}. \end{aligned}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire Y_{n+1} est à support fini donc Y_{n+1}^2 possède une espérance et d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}^2) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(Y_{n+1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(Y_{n+1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p P(Y_n = k-1) \quad \text{d'après 3.(a),} \\ &= p \sum_{i=0}^n (i+1)^2 P(Y_n = i) \quad \text{en posant } i = k-1, \\ &= p \left(\sum_{i=0}^n i^2 P(Y_n = i) + 2 \sum_{i=0}^n i P(Y_n = i) + \sum_{i=0}^n P(Y_n = i) \right) \\ &= p (E(Y_n^2) + 2E(Y_n) + 1). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p(E(Y_n^2) + 2E(Y_n) + 1) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= p(u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} + 2E(Y_n) + 1) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= pu_n - (2n-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} + 2pE(Y_n) + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
 &= pu_n + 2\frac{p^{n+2}}{1-p} + p + 2pE(Y_n).
 \end{aligned}$$

Or $E(Y_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$ d'après 4.(b) donc :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= pu_n + \frac{2p^{n+2} + 2p^2(1-p^n) + p(1-p)}{1-p} \\
 &= pu_n + \frac{p^2 + p}{1-p} \\
 &= pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}.
 \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = p \frac{1+p-2p^n}{(1-p)^2}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(Y_n^2) = p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme Y_n est à support fini, elle possède une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
 V(Y_n) &= E(Y_n^2) - E(Y_n)^2 \\
 &= p \times \frac{1+p-(2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{p(1-(2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1})}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{p(1-(2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})}{(1-p)^2}.
 \end{aligned}$$