Chapitre 4 : Familles de vecteurs

1 Familles génératrices

Définition 1 (Famille génératrice)

Soit E un espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est **génératrice** de E si :
$$\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$
Cela signifie que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.
2. Plus généralement, une famille non vide $\mathscr{F}$ (possiblement infinie) de vecteurs de E est **génératrice** de E si :
$$\forall u \in \mathrm{E},\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathscr{F}^n,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$
Cela signifie que tout élément de E est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{F}$.

Exemple 1

1. *La famille* $((1,0),(0,1))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$. *En effet,*
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$
2. *La famille formée des matrices suivantes :*
$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. *En effet,*
$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot \mathrm{E}_{1,1} + b \cdot \mathrm{E}_{1,2} + c \cdot \mathrm{E}_{2,1} + d \cdot \mathrm{E}_{2,2}$$
3. *La famille* $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \dots, \mathrm{X}^n, \dots)$ *est génératrice de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. *En effet,*
$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \exists n \in \mathbb{N},\ \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \textit{tels que} \quad \mathrm{P} = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \dots + a_n \mathrm{X}^n.$$
Ainsi, tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $(\mathrm{X}^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Méthode 1

1. *Pour déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel, on utilisera les méthodes vues au paragraphe 2.2 du chapitre précédent ("Sous-espace engendré").*
2. *Pour vérifier si une famille donnée* $(u_1, \dots, u_n)$ *est génératrice de* E, *on considère un vecteur* $u \in \mathrm{E}$ *quelconque et on cherche des scalaires* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *tels que*
$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$
La famille est alors génératrice si et seulement si le système linéaire ainsi obtenu a des solutions quel que soit $u \in \mathrm{E}$.

Exemple 2

Montrons que la famille $((2,1),(1,1),(0,1))$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On cherche* $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(x,y) = \lambda(2,1) + \mu(1,1) + \gamma(0,1)$. *Cela revient à résoudre le système*
$$(\mathrm{S}) : \begin{cases} 2\lambda + \mu = x \\ \lambda + \mu + \gamma = y \end{cases}$$
L'ensemble des solutions de ce système est
$$\{(\lambda, x - 2\lambda, y - x + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

En particulier, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y)=\lambda(2,1)+\mu(1,1)+\gamma(0,1)$. En prenant par exemple $\lambda=0$, on a

$$(x,y)=0\cdot(2,1)+x\cdot(1,1)+(y-x)\cdot(0,1).$$

Test 1 (***Voir solution.***)

La famille (u,v,w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$, où

$$u=(1,2,3)\ ,\ v=(0,-1,-2)\ ,\ w=(2,3,8)\ ?$$

Proposition 1

On ne change pas le caractère générateur d'une famille en

- changeant l'ordre des vecteurs,
- en ajoutant à cette famille des nouveaux vecteurs,
- en multipliant un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
- retirant de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres

Remarque 1

Comparer avec la proposition 7 du chapitre précédent.

Test 2 (***Voir solution.***)

On admet que la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. En déduire, à l'aide de la proposition précédente, que $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2 Familles libres

Définition 2 (Famille libre/liée)

Soient E un espace vectoriel. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

- Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs de E est dite **libre** si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\quad \lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=0_E\Longrightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$$

- Plus généralement, une famille non vide $\mathscr{F}$ (possiblement infinie) de vecteurs de E est dite **libre** si toute sous-famille finie (non vide) de $\mathscr{F}$ est libre au sens défini ci-dessus.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Remarque 2

1. *Autrement dit, une famille est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs est la combinaison triviale.*
2. *Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille libre, on dit que les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont **linéairement indépendants**.*

Méthode 2

Pour déterminer si une famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$ est libre ou liée, on cherche les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que

$$\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n=0_E.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire homogène d'inconnues $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Il y a deux cas possibles :

1. *le système a pour unique solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)$, la famille est alors libre ;*
2. *le système admet une infinité de solutions, la famille est alors liée.*

Exemple 3

1. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *on considère la famille* $((2,1,4),(6,3,1),(-2,-1,7))$. *Déterminons si cette famille est libre ou liée.*
   Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. *On a*

$$\lambda_1(2,1,4)+\lambda_2(6,3,1)+\lambda_3(-2,-1,7)=0_{\mathbb{R}^3}\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2\lambda_1&+&6\lambda_2&-&2\lambda_3&=&0\\\lambda_1&+&3\lambda_2&-&\lambda_3&=&0\\4\lambda_1&+&\lambda_2&+&7\lambda_3&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}\lambda_1&+&3\lambda_2&-&\lambda_3&=&0\\&&-11\lambda_2&+&11\lambda_3&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1&=&-2\lambda_2\\\lambda_3&=&\lambda_2\end{array}\right.$$

   Donc l'ensemble des solutions de ce système est $\{(-2t,t,t)\ t\in\mathbb{R}\}$. *La famille est donc liée (en prenant par exemple* $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$*).*

2. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *montrons que la famille* $((1,2),(2,3))$ *est libre.*
   Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. *On a*

$$\lambda(1,2)+\mu(2,3)=0_{\mathbb{R}^2}\iff\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda&+&2\mu&=&0\\2\lambda&+&3\mu&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcl}\lambda&+&2\mu&=&0\\&&-\mu&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda&=&0\\\mu&=&0\end{array}\right.$$

   La famille est donc libre.

3. *La famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est libre. En effet, pour toute sous-famille finie* $(X^{n_1},\dots,X^{n_p})$ *on a*

$$\lambda_1X^{n_1}+\dots+\lambda_pX^{n_p}=0\Longrightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_p=0.$$

Test 3 (*Voir solution.*)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. *Dans* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, *la famille*

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

2. *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *la famille constituée des matrices*

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

3. *Dans* $\mathbb{R}[X]$ *la famille*

$$(X^2-X+1\ ,\ 2X^2-X+3\ ,\ -X^2+X-1)$$

Proposition 2

- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
- Si on ajoute un vecteur à une famille liée, elle reste liée.

Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $u=\lambda v$ ou $v=\lambda u$.

Proposition 3

- Une famille constituée d'un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille constituée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
- On ne change pas le caractère libre d'une famille en changeant l'ordre des vecteurs, en retirant un vecteur à la famille, un multipliant un vecteur par un scalaire **non nul**, en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

Proposition 4

Une famille de polynômes **non nuls** de degrés **distincts** est libre. Une telle famille est appelée une famille **échelonnée** de polynômes.

⚠Une famille qui n'est pas échelonnée peut-être libre ou liée selon les cas!

Test 4 (***Voir solution.***)

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. $(X+1, X+2)$
2. $(X+1, 2X+2)$

3 Bases

3.1 Définition

Définition 3 (Base)

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice.

Remarque 3

Si $(u_1, \dots, u_p)$ *est libre alors c'est une base de l'espace* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemple 4

1. *D'après l'exemple 1 et le test 3, la famille ci-dessous est une base de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

2. *D'après les exemples 1 et 3, la famille* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$.
3. *Montrons que la famille* (e_1, e_2, e_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *où*

$$e_1 = (1,0,1)\ ,\ e_2 = (0,1,1)\ ,\ e_3 = (1,1,0).$$

- *Montrons que la famille est génératrice. Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) &\iff \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & & & + & \gamma & = & x\\ & & \mu & + & \gamma & = & y\\ \lambda & + & \mu & & & = & z\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & & + & \gamma & = & x\\ & \mu & + & \gamma & = & y\\ & \mu & - & \gamma & = & z-x\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{cccccc} \lambda & & + & \gamma & = & x\\ & \mu & + & \gamma & = & y\\ & & & 2\mu & = & z-x+y\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=\frac{x-y+z}{2}e_1+\frac{z-x+y}{2}e_2+\frac{y-z+x}{2}e_3\in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$$

- *Montrons que la famille est libre. Soit* $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathrm{R}^3$. *On a*

$$\lambda e_1+\mu e_2+\gamma e_3=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & & & + & \gamma & = & 0\\ & & \mu & + & \gamma & = & 0\\ \lambda & + & \mu & & & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & & & + & \gamma & = & 0\\ & & \mu & + & \gamma & = & 0\\ & & \mu & - & \gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\lambda & = & 0\\ \gamma & = & 0\\ \mu & = & 0\end{array}\right.$$

- *On peut aussi remarquer que le calcul réalisé pour montrer que la famille est génératrice implique que pour tout* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *il existe un unique triplet* $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathrm{R}^3$ *tel que* $(x,y,z)=\lambda e_1+\mu e_2+\gamma e_3$ *et que ce triplet est donnée par*

$$(\lambda,\mu,\gamma)=\left(\frac{x-y+z}{2},\frac{z-x+y}{2},\frac{y-z+x}{2}\right).$$

  En particulier, pour $(x,y,z)=(0,0,0)$, *l'unique triplet tel que* $\lambda e_1+\mu e_2+\gamma e_3=0$ *est*

$$(\lambda,\mu,\gamma)=\left(\frac{0-0+0}{2},\frac{0-0+0}{2},\frac{0-0+0}{2}\right)=(0,0,0).$$

  La famille est donc libre.

- *La famille est donc génératrice et libre, c'est une base.*

Méthode 3

1. *Pour montrer qu'une famille donnée est une base, on montre qu'elle est génératrice et libre.*
2. *Pour trouver une base d'un espace vectoriel, on trouve une famille génératrice (voir chapitre précédent) puis on cherche à savoir si cette famille est libre ou liée :*
   - *si elle est libre, c'est donc une base;*
   - *si elle est liée, un vecteur est combinaison linéaire des autres : d'après la proposition 1 la famille obtenue en retirant ce vecteur est toujours génératrice. Si cette nouvelle famille est libre, on a gagné, sinon on peut encore enlever un vecteur pour trouver une famille génératrice plus petite. Si le processus s'arrête, on tombe sur une famille libre et génératrice.*

Exemple 5

Dans $\mathbb{R}^3$, *on considère*

$$u=(2,1,1)\ ,\ v=(1,-1,3)\ ,\ w=(4,5,-3).$$

Déterminons une base de $\mathrm{E}=\mathrm{Vect}(u,v,w)$.
La famille (u,v,w) *est génératrice de* E. *Déterminons si cette famille est libre ou liée : soit* $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. *Alors*

$$\lambda u+\mu v+\gamma=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}2\lambda & + & \mu & + & 4\gamma & = & 0\\ \lambda & - & \mu & + & 5\gamma & = & 0\\ \lambda & + & 3\mu & - & 3\gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & - & \mu & + & 5\gamma & = & 0\\ & & 3\mu & - & 6\gamma & = & 0\\ & & 4\mu & - & 8\gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\lambda & = & -3\gamma\\ \mu & = & 2\gamma\end{array}\right.$$

Donc, en prenant $(\lambda,\mu,\gamma)=(-3,2,1)$ *on voit que* $-3u+2v+w$ *ou encore* $w=u-2v$. *Par conséquent, la famille* (u,v) *est encore génératrice de* E. *De plus, c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi,* (u,v) *est une base de* E.

Test 5 (*Voir solution.*)

1. *Soit* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. *Montrer que c'est une espace vectoriel et trouver en une base.*
2. *Soient*
$$P_0 = (X-1)(X+1)\ ,\ P_1 = (X+1)(X-2)\ ,\ P_2 = (X-1)(X-2).$$
Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

3.2 Coordonnées dans une base

Remarque 4

Soit E *un espace vectoriel et* $(u_1, \ldots, u_p)$ *une famille de vecteurs de* E.

1. *Si* $(u_1, \ldots, u_p)$ *est génératrice tout vecteur* $u \in E$ *s'écrit* d'au moins *une façon comme combinaison linéaire de* $u_1, \ldots, u_p$.
2. *Si* $(u_1, \ldots, u_p)$ *est libre tout vecteur* $u \in E$ *s'écrit* d'au plus *une façon comme combinaison linéaire de* $u_1, \ldots, u_p$.
En effet, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\ \forall (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$,
$$\begin{aligned} u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_p u_p &\Longrightarrow (\lambda_1 - \mu_1) u_1 + \cdots + (\lambda_p - \mu_p) u_p = 0_E \\ &\Longrightarrow \lambda_1 - \mu_1 = \cdots = \lambda_p - \mu_p = 0 \\ &\Longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \end{aligned}$$

Définition 4 (Proposition/Définition : coordonnées dans une base)

Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de E. Pour tout $u \in E$, il existe un unique p-uplet de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$
Les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$.

Remarque 5

Dans l'exemple 4, on a rencontré un exemple de base contenant une infinité d'éléments. Dans ce cas, tout élément s'écrit d'une unique façon comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la base et on peut encore parler de coordonnées.

Méthode 4

Étant donnée une base $(u_1, \ldots, u_p)$ *et un vecteur* u *pour trouver les coordonnées de* u *dans cette base on cherche à trouver l'unique solution* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *de* $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$. *Cela revient à résoudre un système.*

Exemple 6

1. *D'après l'exemple 4, la famille*
$$e_1 = (1,0,1)\ ,\ e_2 = (0,1,1)\ ,\ e_3 = (1,1,0)$$
est une base de $\mathbb{R}^3$ *et, pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$$(x,y,z) = \frac{x-y+z}{2} e_1 + \frac{z-x+y}{2} e_2 + \frac{y-z+x}{2} e_3.$$
Les coordonnées de (x,y,z) *dans cette base sont donc* $\left(\frac{x-y+z}{2}, \frac{z-x+y}{2}, \frac{y-z+x}{2}\right)$
2. *Dans* $R_3[X]$, *la famille* $(1, X, X^2, X^3)$ *est une base car elle est génératrice (d'après un exemple précédent) et libre car échelonnée.*
Les coordonnées de $2X^2 + 1$ *dans cette base sont* $(1,0,2,0)$.

Test 6 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}^3$, *on considère la famille* $\mathscr{B} = ((1,2,-1), (-1,0,2), (1,1,1))$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer les coordonnées de* $(1,2,3)$ *dans cette base.*
3. *Soient* x, y, z *trois réels. Déterminer les coordonnées de* (x,y,z) *dans cette base*

Test 7 (*Voir solution.*)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$*, on considère la famille* $\mathscr{B} = (X^2+1, X+1, 1)$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Déterminer les coordonnées de* $4X^2+3X+5$ *dans cette base.*

3.3 Base canonique

Certains espaces vectoriels possèdent, de part leur définition, une base naturelle appelée **base canonique** dans laquelle les cordonnées sont particulièrement simples à lire.
Soient $n, p \in \mathbb{R}^*$

1. **Base canonique de** $\mathbb{R}^n$.
   La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille constituée des vecteurs
   $$e_1 = (1,0,\dots,0)\ ,\ e_2 = (0,1,0,\dots,0)\ ,\ \dots\ ,\ e_n = (0,\dots,0,1).$$
   Les coordonnées d'un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base canonique sont $(x_1,\dots,x_n)$ car :
   $$(x_1,\dots,x_n) = (x_1,0,\dots,0)+\cdots+(0,\dots,0,x_n) = x_1e_1+\cdots+x_ne_n$$
2. **Base canonique de** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1.
   Les coordonnées d'une matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$ dans la base canonique sont $(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.
   Par exemple, pour $n = p = 2$ la base canonique est la base de l'exemple 4 et les coordonnées de $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ sont $(1,3,-1,2)$ car
   $$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = E_{1,1}+3E_{1,2}-E_{2,1}+2E_{2,2}$$
3. **Base canonique de** $\mathbb{R}_n[X]$.
   La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
   Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X+\cdots+a_nX^n$ dans la base canonique sont $(a_0,\dots,a_n)$.
4. **Base canonique de** $\mathbb{R}[X]$.
   La base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$.
   Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X+\cdots+a_nX^n$ dans la base canonique sont $(a_0,\dots,a_n,0,\dots)$.

4 Objectifs

1. Savoir montrer qu'une famille est génératrice (voir chapitre précédent).
2. Avoir compris et connaître par coeur les définitions de *famille génératrice, famille libre, base.*
3. Savoir montrer qu'une famille est libre ou liée.
4. Savoir montrer qu'une famille est une base.
5. Savoir exhiber une base d'un espace vectoriel donné.
6. Avoir compris la notion de coordonnées dans une base.
7. Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

5 Correction des tests

Correction du test 1 (*Retour à l'énoncer.*)

La famille (u,v,w) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$, où

$$u=(1,2,3)\ ,\ v=(0,-1,-2)\ ,\ w=(2,3,8)\ ?$$

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y,z)=\lambda u+\mu v+\gamma w$. Cela revient à résoudre le système

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ 2\lambda & - & \mu & + & 3\gamma & = & y\\ 3\lambda & - & 2\mu & + & 8\gamma & = & z\end{array}\right.$$

Or,

$$(S)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ & - & \mu & - & \gamma & = & y-2x\\ & - & 2\mu & + & 2\gamma & = & z-3x\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & & & + & 2\gamma & = & x\\ & & \mu & + & \gamma & = & 2x-y\\ & & & & 4\gamma & = & x-2y+z\end{array}\right.$$

Donc le système possède des solutions pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi la famille est génératrice. Plus précisément, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$(x,y,z)=\frac{x+2y-z}{2}u+\frac{7x-2y-z}{4}v+\frac{x-2y+z}{4}w.$$

Correction du test 2 (*Retour à l'énoncer.*)

On sait que la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. De plus, le vecteur $(1,2,3)$ est combinaison des trois autres car

$$(1,2,3)=(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1).$$

Par conséquent, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est encore génératrice. En multipliant le premier vecteur par 2 et le troisième par 6, on en déduit que la famille $((2,0,0),(0,1,0),(0,0,6))$ est génératrice. Puis, en changeant l'ordre des vecteurs, on trouve que $((0,1,0),(2,0,0),(0,0,6))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Correction du test 3 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.*

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda & + & \mu & + & \gamma & = & 0\\ \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & 0\\ \lambda & & & & & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc}\lambda & & & = & 0\\ -\mu & + & \gamma & = & 0\\ & & 2\gamma & = & 0\end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\lambda & = & 0\\ \mu & = & 0\\ \gamma & = & 0\end{array}\right.$$

   La famille est donc libre.

2. *Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.*

$$a\cdot E_{1,1}+b\cdot E_{1,2}+c\cdot E_{2,1}+d\cdot E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow a=b=c=d=0.$$

   La famille est donc libre.

3. *On peut remarquer que*

$$1\cdot(X^2-X+1)+0\cdot(2X^2-X+3)+1\cdot(-X^2+X-1)=0$$

   donc la famille est liée.

Correction du test 4 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *Soient* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*. On a*

$$a(\mathrm{X}+1)+b(\mathrm{X}+2)=0 \iff (a+b)\mathrm{X}+a+2b=0 \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & + & 2b & = & 0 \end{array}\right. \iff a=b=0$$

La famille $(\mathrm{X}+1,\mathrm{X}+2)$ *est donc libre.*

2. *On remarque que* $2\mathrm{X}+2=2(\mathrm{X}+1)$*. Les vecteurs* $\mathrm{X}+1$ *et* $2\mathrm{X}+2$ *sont colinéaires et la famille* $(\mathrm{X}+1,2\mathrm{X}+2)$ *est donc liée.*

Correction du test 5 (*Retour à l'énoncer.*)

1. *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{F}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\right\} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x+z\right\} \\ &= \left\{(x,x+z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,1,0)+z(0,1,1),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,1,1)) \end{aligned}$$

La famille $((1,1,0),(0,1,1))$ *est donc génératrice de* F*. De plus, elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Ainsi* $((1,1,0),(0,1,1))$ *est une base de* F*. Montrer que c'est une espace vectoriel et trouver en une base.*

2.
   - *Montrons qu'elle est libre : soit* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *tel que* $a\cdot\mathrm{P}_0+b\cdot\mathrm{P}_1+c\cdot\mathrm{P}_2=0$*. On peut, comme on l'a fait dans les exemples précédents, identifier les coefficients de* $a\cdot\mathrm{P}_0+b\cdot\mathrm{P}_1+c\cdot\mathrm{P}_2$ *pour obtenir un système vérifié par* (a,b,c)*. Cependant, cette méthode est un peu longue et on va plutôt exploiter le fait qu'on connaît les racines des polynômes* P_0*,* P_1 *et* P_2*.*

     En évaluant en 1 *on a*

     $$0=a\cdot\mathrm{P}_0(1)+b\cdot\mathrm{P}_1(1)+c\cdot\mathrm{P}_2(1)=a\cdot0+b\cdot(-2)+c\cdot0=-2b \quad \textit{donc} \quad b=0.$$

     En évaluant en 2 *on a*

     $$0=a\cdot\mathrm{P}_0(2)+0\cdot\mathrm{P}_1(2)+c\cdot\mathrm{P}_2(2)=a\cdot3+0+c\cdot0=3a \quad \textit{donc} \quad a=0.$$

     En évaluant en 0 *on a*

     $$0=0\cdot\mathrm{P}_0(0)+0\cdot\mathrm{P}_1(0)+c\cdot\mathrm{P}_2(0)=0+0+c\cdot2=2c \quad \textit{donc} \quad c=0.$$

     Ainsi,

     $$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad a\cdot\mathrm{P}_0+b\cdot\mathrm{P}_1+c\cdot\mathrm{P}_2=0 \Longrightarrow a=b=c=0.$$

     La famille est donc libre.
   - *Montrons qu'elle est génératrice. On va adopter la même méthode que ci-dessus. Soit* $\mathrm{P}=a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *et cherchons des réels* x*,* y*,* z *tels que*

     $$\mathrm{P}=x\cdot\mathrm{P}_0+y\cdot\mathrm{P}_1+z\cdot\mathrm{P}_2.$$

     En évaluant en 1*, on trouve*

     $$\mathrm{P}(1)=-2y \quad \textit{donc} \quad y=-\frac{1}{2}\mathrm{P}(1).$$

     En évaluant en -1*, on trouve*

     $$\mathrm{P}(-1)=2z \quad \textit{donc} \quad z=-\frac{1}{2}\mathrm{P}(-1)$$

     En évaluant en 2*, on trouve*

     $$\mathrm{P}(2)=3x \quad \textit{donc} \quad x=\frac{1}{3}\mathrm{P}(2)$$

     Les calculs précédents montrent que le polynôme

     $$\mathrm{P}-\left(\frac{1}{3}\mathrm{P}(2)\mathrm{P}_0-\frac{1}{2}\mathrm{P}(1)\mathrm{P}_1-\frac{1}{2}\mathrm{P}(-1)\mathrm{P}_2\right)$$

     possède trois racines distincts $(1, -1$ *et* $2)$*. Or il est de degré inférieur ou égal à* 2*, c'est donc le polynôme nul. Ainsi,*

     $$\mathrm{P}=\frac{1}{3}\mathrm{P}(2)\mathrm{P}_0-\frac{1}{2}\mathrm{P}(1)\mathrm{P}_1-\frac{1}{2}\mathrm{P}(-1)\mathrm{P}_2.$$

     Cela montre que tout polynôme est combinaison linéaire de $\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$*. La famille est donc génératrice de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$*.*
   - *La famille* $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ *est une famille libre et génératrice de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ *c'est donc une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$*.*

Correction du test 6 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans $\mathbb{R}^3$*, on considère la famille* $\mathscr{B} = ((1,2,-1),(-1,0,2),(1,1,1))$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

   - *Montrons que la famille est génératrice. Soient* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *et* $(\lambda,\mu\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,-1) + \mu(-1,0,2) + \gamma(1,1,1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ -\lambda & + & 2\mu & + & \gamma & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ \lambda & & & + & 3\gamma & = & z+2x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & \gamma & = & x \\ 2\lambda & & & + & \gamma & = & y \\ -5\lambda & & & & & = & z+2x-3y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & \frac{-3x+2y+z}{5} \\ \gamma & = & \frac{4x-y+2z}{5} \\ \lambda & = & \frac{3y-2x-z}{5} \end{array}\right.$$

   Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}^3$ *s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de* $\mathscr{B}$. *Donc la famille est génératrice.*

   - *Montrons que la famille est libre : en prenant* $(x,y,z) = (0,0,0)$*, le calcul précédent montre que la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est la combinaison triviale. La famille est donc libre.*
   - *La famille est libre et génératrice de* $\mathbb{R}^3$*, c'est donc une base. De plus, le calcul précédent montre que les coordonnées d'un vecteur* (x,y,z) *dans cette base sont*

$$\left(\frac{3y-2x-z}{5}, \frac{-3x+2y+z}{5}, \frac{4x-y+2z}{5}\right)$$

2. *En particulier, les coordonnées de* $(1,2,3)$ *dans cette base sont*

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

3. *Voir ci-dessus.*

Correction du test 7 (*Retour à l'énoncer.*)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$*, on considère la famille* $\mathscr{B} = (X^2+1, X+1, 1)$.

1. *La famille est échelonnée donc libre. De plus,*

$$\mathrm{Vect}(1, X+1, X^2+1) = \mathrm{Vect}(1, X+1-1, X^2+1-1) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

   et la famille est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. *Ainsi* $\mathscr{B}$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

2. *On cherche les réels a, b et c tels que*

$$4X^2+3X+5 = a(X^2+1) + b(X+1) + c.$$

   Or

$$4X^2+3X+5 = a(X^2+1)+b(X+1)+c \iff 4X^2+3X+5 = aX^2+bX+a+b+c$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 4 \\ b & = & 3 \\ a+b+c & = & 5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 4 \\ b & = & 3 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$

   Donc es coordonnées de $4X^2+3X+5$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *sont* $(4,3,-2)$.