ECE2-Semaine 7

14/11/2022 au 18/11/2022

1 Cours

1.1 Intégration

Intégration sur un segment (rappels) : existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle, intégrale d'une fonction continue sur un segment, propriétés de l'intégrale, extension aux fonctions continues par morceaux. Techniques de calcul : primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable.

Intégrale impropre en $\pm\infty$: définition d'intégrale impropre d'une fonction continue sur $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$ (définition de convergence/ divergence) ; exemples de référence : critère de convergence des intégrales de Riemann en $+\infty$, convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ avec $\lambda > 0$. Intégrales doublement impropres en $-\infty$ et $+\infty$.

Convergence absolue : définition de la convergence absolue, une intégrale absolument convergente est convergente.

1.2 Séries

Rappels de première année : série numérique, notation $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, série convergente/divergente, somme d'une série convergente, télescopage. Si une série converge alors son terme général tend vers 0. Critère de convergence des séries géométriques (dérivées premières et secondes) et expression de la somme le cas échéant, convergence des séries exponentielles et expression de la somme.

Séries de Riemann : critère de convergence des séries de Riemann.

Séries à termes positifs : critère de comparaison des séries à termes positifs (majoration par le terme général d'une série convergente / minoration par le terme général d'une série divergente). Comparaison : critère de négligeabilité des séries à termes positifs; cas particulier de la comparaison avec une série de Riemann. Comparaison : critère d'équivalent des séries à termes positifs; cas particulier de la comparaison avec une série de Riemann.

Séries à termes quelconques : convergence absolue, la convergence absolue implique la convergence.

1.3 Variables aléatoires discrètes (révisions)

Généralités : variable aléatoire discrète, fonction de répartition, loi, loi de $g(X)$ pour X une variable aléatoire réelle discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Moments : espérance, linéarité de l'espérance, théorème de transfert. Moment d'ordre supérieur, variance, formule de Koenig-Huygens.

Lois usuelles : loi certaine, loi de Bernoulli, loi binomiale , loi uniforme , loi géométrique , loi de Poisson. Espérance et variance des lois usuelles. Expérience aléatoire de référence de la loi Bernoulli, binomiale , uniforme et géométrique.

2 Méthodes à maîtriser

1. Savoir calculer une intégrale sur un segment avec une intégration par parties, un changement de variable, une primitive.
2. Appliquer les techniques ci-dessus à l'étude d'intégrales impropres, doublement impropres.
3. Savoir étudier une fonction définie comme une intégrale à bornes variables.
4. Savoir étudier la nature d'une série en utilisant les outils connus sur les suites (suite des sommes partielles croissante majorée etc...), connaître les propriétés des opérations sur les séries (une somme de séries convergentes est convergente, ...), savoir reconnaître un télescopage, reconnaître les séries usuelles (programme d'ECE1).
5. Savoir calculer la somme d'une série en reconnaissant des séries usuelles.
6. Savoir déterminer la nature d'une série à termes positifs en utilisant les critères de comparaison (majoration/-minoration, négligeabilité ou équivalence), notamment en comparant avec des séries de Riemann.
7. Savoir montrer qu'une série à termes quelconques est convergente en utilisant la convergence absolue.

8. Connaître par coeur les lois usuelles : loi, espérance, variance.
9. Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète donnée.
10. Savoir justifier l'existence de l'espérance, la variance d'une variable donnée.
11. Savoir utiliser le théorème de transfert.

3 Questions de cours

- Calculer le rang d'une matrice ou d"une famille de vecteurs au choix de l'examinateur.
- Primitives usuelles, formule d'IPP, formule de changement de variable, intégrales impropres de référence.
- Séries de référence (géométriques, géométriques dérivées premières et secondes, exponentielles, Riemann). Critère de convergence des séries de Riemann.
- Théorème de Transfert, Formule Koenig-Huygens.
- Lois usuelles : loi, espérance, variance et expérience de référence.