TD1-Études de suites

Exercice 1.

1. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur son ensemble de définition. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3(1-x)^2 + 1.$$
Étudions le signe de la dérivée : soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{3} \geq (1-x)^2 \iff -\sqrt{\frac{1}{3}} \leq 1 - x \leq \sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$\iff x \in \left[1 - \sqrt{\frac{1}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$$
avec égalité si et seulement si $x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $x = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$.
On en déduit :

x	$-\infty$	0	$1-\sqrt{\frac{1}{3}}$	1	$1+\sqrt{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	1 ↘		↗ 1		↘	$-\infty$

Enfin, en remarquant que
$$f\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} > 0,$$
le tableau de variation de f permet de conclure que :
$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) \in]0,1[. \qquad (*)$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \in]0,1[$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
- *Initialisation* : comme $u_0 = 0.4$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in]0,1[$. D'après $(*)$, on a donc :
$$u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[.$$
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0,1[.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n < 1$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = (1-u_n)^3 > 0.$$
Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

2. D'après la question 1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et d'après la question 2, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
On sait par ailleurs que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc ℓ est un point fixe de f. Déterminons les points fixes de f. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(x) = x \iff (1-x)^3 = 0 \iff x = 1.$$
L'unique point fixe de f est donc 1.
Par conséquent, $\ell = 1$.

Exercice 2.

1. La fonction f est strictement croissante car la fonction exponentielle l'est.
2. On va étudier la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$ et montrer qu'elle s'annule une unique fois. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1.$$
On en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, on peut conclure que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x \geq 0 \quad \text{avec égalité si et seulement si } x = 0.$$
L'équation $f(x) = x$ possède donc comme unique solution 0.
3. Par définition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$$
d'après la question précédente. Donc $u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
En particulier[1] :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = u_0 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante d'après le théorème de la limite monotone soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, ℓ est un point fixe de f. Or, d'après la question 2, 0 est l'unique point fixe de f. Par conséquent $\ell = 0$.
D'autre part, on sait que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n.$$
Donc, en passant à la limite dans cette inégalité on obtient :
$$1 \leq \ell = 0.$$
Ceci est une contradiction. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers une limite finie.
Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

1. On peut aussi répondre à cette question en procédant par récurrence.

Exercice 3.

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$
On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	||	$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n > 0$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et strictement positif. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de f. Par conséquent, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus, d'après le tableau de variations, on a :
   $$u_{n+1} = f(u_n) \geq 2 > 0.$$
   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n > 0.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$
Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

4. Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = 0.$$

Par conséquent, f ne possède pas de point fixe.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ. Pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_n.$$

Donc, par passage à la limite on obtient :

$$1 \leq \ell.$$

En particulier, $\ell \in]0, +\infty[$ et, f étant continue sur $]0, +\infty[$, ℓ est un point fixe de f. Cela contredit le fait que f ne possède pas de point fixe.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

5.
```
n = input("Entrer la valeur de n :")
u = 1
for k in range(n):
    u = u+1/u
print(u)
```

Exercice 4.

1. D'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables, la fonctions φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{\left(x \times \frac{1}{x} + \ln(x)\right) \times x - (x\ln(x) - 1)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0.$$

Ainsi, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Par croissance comparée on sait que : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Donc par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.$$

- On a

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Ainsi :

x	0	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	‖	$+$
Variations de φ	$-\infty$	$+\infty$

2. La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ (et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante). En particulier, comme $0 \in \varphi(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$, il possède un unique antécédent par φ. Ainsi, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution, notée α.
Par ailleurs,

$$\varphi(1) = -1 < 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(e) = \frac{e-1}{e}.$$

Par croissance stricte de φ^{-1}, on a donc

$$1 < \alpha < e$$

et a fortiori $\alpha \in [1, e]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n > \alpha$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = e$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après ce qui précède.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et strictement supérieur à α. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de φ. Par conséquent, $u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n$ est bien défini. De plus, on a, par hypothèse de récurrence et croissance stricte de φ :

$$u_{n+1} = \varphi(u_n) + u_n > \varphi(\alpha) + \alpha = \alpha.$$

     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n > \alpha.$$

4. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$L \geq \alpha > 0.$$

Or, $x \mapsto \varphi(x) + x$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc L est un point fixe de $x \mapsto \varphi(x) + x$.
Soit $x > 0$.

$$\varphi(x) + x = x \iff \varphi(x) = 0 \iff x = \alpha.$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L nécessairement $L = \alpha$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) + u_n - u_n = \varphi(u_n).$$

Or, $u_n > \alpha$ donc par croissance de φ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) > \varphi(\alpha) = 0.$$

Donc $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
La suite est donc croissante.

6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, d'après le théorème de la limite monotone soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L. Alors, d'après la question 4, $L = \alpha$. Or, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel n on a :

$$u_0 \leq u_n.$$

Par passage à la limite on obtient :

$$u_0 \leq \alpha.$$

Cela contredit la question 3.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 5.

1. En tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

De plus,

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Or

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est continue sur $]0, 1[$ (car dérivable) et strictement décroissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]0, 1[$ sur $f(]0, 1[) =]1, +\infty[$. En particulier, comme $2 \in f(]0, 1[)$, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution dans $]0, 1[$, notée a.
De même, l'équation $f(x) = 2$ possède une unique solution dans $]1, +\infty[$, notée b.
Finalement, comme $f(1) \neq 2$, les solutions de l'équation $f(x) = 2$ dans $]0, +\infty[$ sont a et b et on a bien :

$$0 < a < 1 < b.$$

3. Comme f est strictement croissante et continue sur $[1, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, la restriction de f à $[1, +\infty[$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$ et sa bijection réciproque g est continue et strictement croissante.
Or,

$$f(2) = 2 - \ln(2) \leq 2 = f(b) \leq f(4) = 4 - 2\ln(2).$$

Donc, par croissance de g :

$$2 = g(f(2)) \leq b = g(2) \leq 4 = g(f(4)).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n \geq b$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 4$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la question précédente.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et strictement supérieur à b. En particulier, ln est défini en u_n.
   Par conséquent, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini.
   De plus, par hypothèse de récurrence et croissance de ln on a :

$$\ln(u_n) \geq \ln(b).$$

   Donc, comme $b - \ln(b) = 2$ on obtient :

$$u_{n+1} = \ln(u_n) + 2 = \ln(u_n) + b - \ln(b) \geq b.$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq b.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - f(u_n).$$

Or, d'après la question 4 et la croissance de f sur $[b, +\infty[$ on a

$$f(u_n) \geq f(b) = 2.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} - u_n = 2 - f(u_n) \leq 0.$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
La suite est donc décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par b donc, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq b.$$

Par passage à la limite, on obtient : $\ell \geq b$.
Soit h la fonction définie sur $[b, +\infty[$ par

$$\forall x \in [b, +\infty[, \quad h(x) = \ln(x) + 2.$$

La fonction h étant continue sur $[b, +\infty[$, ℓ est un point fixe de h.
Étudions les points fixes de h. Soit $x \geq b$.

$$h(x) = x \iff \ln(x) + 2 = x \iff x - \ln(x) = 2 \iff f(x) = 2.$$

Ainsi, l'unique point fixe de h est b.
Donc $\ell = b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b.

6. (a) La fonction h est continue sur $[b, +\infty[$, dérivable sur $]b, +\infty[$ et pour tout $x \in]b, +\infty[$ on a

$$0 \leq h'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2, \quad x \geq y \Rightarrow 0 \leq h(x) - h(y) \leq \frac{1}{2}(x - y).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité avec $x = u_n$ et $y = b$ on obtient

$$0 \leq h(u_n) - h(b) \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

Or, $u_{n+1} = h(u_n)$ et $h(b) = b$ donc

$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : comme $u_0 = 4$ et $b \in [2, 4]$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  D'après la question précédente, on a

$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$$

  et par hypothèse de récurrence, on a

$$0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

  Par conséquent,

$$0 \leq u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

7. (a)

```
import numpy as np
def suite(n):
    u = 4
    for k in range(n):
        u = np.log(u)+2
    return u
```

(b)

```
def valeur_approchee(epsilon)
    n = 0
    while 1/2^(n-1) > epsilon:
        n =n+1
    return suite(n)
```

Exercice 6.

1. $u_1 = f(u_0) = \frac{7}{16}$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sa limite est un point fixe de f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $$f(x) = x \iff x^2 - x + \frac{3}{16} = 0.$$
   Le discriminant Δ de cette équation vaut :
   $$\Delta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$
   L'équation possède donc deux solutions
   $$x_1 = \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$
   Ainsi, les points fixes de f sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.
   Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sa limite est soit $\frac{1}{4}$ soit $\frac{3}{4}$.
3. La fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{7}{16}\right]$ donc $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{7}{16}\right)\right]$.
   Comme $f(0) = \frac{3}{16} \geq 0$ et $f\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{97}{16^2} \leq \frac{7}{16}$, on a bien $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$.

   Comme f est défini sur $\mathbb{R}$, il est clair que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.donc
     $$u_{n+1} = f(u_n) \in f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right].$$
     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right].$$
4. La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{7}{16}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{7}{16}\right[$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{7}{16}\right[$ on a
   $$|f'(x)| = |2x| \leq \frac{7}{8}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
   $$\forall (x,y) \in \left[0, \frac{7}{16}\right]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{7}{8}|x-y|.$$
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'inégalité avec $x = u_n$ et $y = \frac{1}{4}$ on obtient
   $$\left|f(u_n) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|.$$
   Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ donc
   $$\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|.$$
   Ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|.$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{7}{16}$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_1 = \frac{7}{16}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     D'après la question précédente, on sait que :
     $$\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right|$$
     et par hypothèse de récurrence, on a
     $$\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{7}{16}.$$
     Par conséquent,
     $$\left|u_{n+1} - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{7}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{7}{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^{n}\frac{7}{16}.$$
     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n - \frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\frac{7}{16}.$$

6. Comme $0 \leq \frac{7}{8} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ donc par encadrement,
$$\lim_{n \to +\infty} \left| u_n - \frac{1}{4} \right| = 0.$$
Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

Exercice 7.

1. La fonction f est la composée $h \circ g$ des fonctions
   - g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = x + 1$, dérivable sur $]-1, +\infty[$ et telle que $g(]-1, +\infty[) =]0, +\infty[$;
   - $h = \frac{3}{2} \ln$ définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

   Par le théorème de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} > 0.$$
   Ainsi f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1, 2]$ par
$$\forall x \in [1, 2], \quad g(x) = f(x) - x.$$
   En tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, 2]$, g est dérivable sur $[1, 2]$ et
$$\forall x \in [1, 2], \quad g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1 - 2x}{2(x+1)} < 0.$$
   Ainsi g est strictement décroissante sur $[1, 2]$. Comme g est aussi continue sur $[1, 2]$, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $g([1, 2]) = [g(2), g(1)]$.
   Or,
$$g(1) = \frac{3}{2} \ln(2) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(8) - \ln(e^2)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8}{e^2}\right) > 0$$
   et
$$g(2) = \frac{3}{2} \ln(3) - 2 = \frac{1}{2}(\ln(27) - \ln(e^4)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{27}{e^4}\right) < 0.$$
   Ainsi, $0 \in g([1, 2]) = [g(2), g(1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $[1, 2]$.
   Finalement, comme pour tout $x \in [1, 2]$, $\quad g(x) = 0 \iff f(x) = x$, l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[1, 2]$ que l'on note α.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n est bien défini et $u_n \geq \alpha$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : comme $u_0 = 3$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et supérieur à α. En particulier u_n appartient à l'ensemble de définition de f. Par conséquent, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus, par croissance de f et hypothèse de récurrence, on a :
$$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(\alpha) = \alpha.$$
     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq \alpha.$$
4. Soit $x \geq 1$. Alors $x + 1 \geq 2$ donc
$$0 \leq f'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} \leq \frac{3}{4}.$$
   Ainsi
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$
5. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a
$$0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :
$$\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, \quad x \geq y \Rightarrow 0 \leq f(x) - f(y) \leq \frac{3}{4}(x - y).$$
   Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité avec $x = u_n$ et $y = \alpha$ on obtient
$$0 \leq f(u_n) - f(\alpha) \leq \frac{3}{4}(u_n - b).$$
   Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc
$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha).$$
   Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha).$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha)$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- *Initialisation* : $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.
- *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  D'après la première partie de la question, on sait que :

  $$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha)$$

  et par hypothèse de récurrence, on a

  $$0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha).$$

  Par conséquent,

  $$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{3}{4}(u_n - \alpha) \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha).$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : par le principe de récurrence

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - \alpha \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \alpha).$$

6. Comme $0 \leq \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - \alpha) = 0$.

   Par encadrement, on a donc

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0$$

   c'est-à-dire

   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

Exercice 8.

1. D'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions de classe C^3, la fonction φ est de classe C^3 sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$ on a

   $$\varphi'(x) = e^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = e^x - \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5} e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Comme $\varphi''' > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $\varphi''(1) = 0$, on trouve :

x	0		1		$+\infty$
Variations de φ''		↗	0	↗	
Signe de $\varphi''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de φ'		↘	e	↗	

   En particulier,

   $$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) \geq \varphi'(1) = e.$$

3. En effectuant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on obtient, par composition des limites et croissance comparée :

   $$\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

   Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

4. - $\forall x > 0$, $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}$.

     Or par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. Donc

     $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

   - $\forall x > 0$, $\varphi(x) = e^x \left(1 - x e^{-x} e^{\frac{1}{x}}\right)$.

     Or par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. Donc

     $$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

5. Soit $x \geq 3$. D'après la question 2, on a

   $$\forall t \in [3, x], \quad \varphi'(t) \geq e.$$

   En intégrant [2] membre à membre sur $[3, x]$, on obtient par croissance de l'intégrale :

   $$\varphi(x) - \varphi(3) = \int_3^x \varphi'(t) dt \geq \int_3^x e dt = ex - 3e.$$

2. On peut aussi étudier la fonction $x \mapsto \varphi(x) - ex$.

Ainsi,

$$\varphi(x) \geq ex + \varphi(3) - 3e \geq ex.$$

Donc

$$\forall x \geq 3, \quad \varphi(x) \geq ex.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « u_n existe et $u_n \geq 3e^n$ » et montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   - *Initialisation* : $\mathcal{P}(0)$ est trivialement vraie.
   - *Hérédité* : supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, u_n existe et : $u_n \geq 3e^n$.
     En particulier, u_n appartient à l'ensemble de définition de φ donc $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est bien défini. Par la question précédente, on obtient aussi :

     $$u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e \times u_n \geq e \times 3e^n = 3e^{n+1}.$$

     Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion* : par le principe de récurrence

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n \geq 3e^n.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geq 3$, on a, d'après la question 5 :

   $$u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n) - u_n \geq eu_n - u_n = (e-1)u_n > 0.$$

   Donc $u_{n+1} > u_n$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
   La suite est donc strictement croissante.
   D'après la question précédente, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3e^n = +\infty$, par comparaison on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

8.

```
import numpy as np
u=3
n=0
while u <= 10^3:
    n = n+1
    u = np.exp(u)-u*np.exp(1/u)
print(n)
```

9. Pour tout entier naturel n, d'après la question 6, on a :

   $$0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3e^n} = \frac{1}{3}(e^{-1})^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} (e^{-1})^n = \frac{1}{3} \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Donc la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.