

5 Correction des tests

Correction du test 1 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et soit $Z = \max(X, Y)$.

On note F_Z la fonction de répartition de Z et F_X, F_Y celles de X et de Y .

- Soit $t \in \mathbb{R}$ et montrons que $[Z \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [Z \leq t] \iff Z(\omega) \leq t \iff \max(X(\omega), Y(\omega)) \leq t \iff X(\omega) \leq t \text{ et } Y(\omega) \leq t \iff \omega \in [X \leq t] \cap [Y \leq t].$$

Ainsi $[Z \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]$

- On en déduit, par indépendance, que pour tout réel t , $P([Z \leq t]) = P([X \leq t])P([Y \leq t])$.
- En d'autres termes,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t).$$

Correction du test 2 ([Retour à l'énoncé.](#))

Ici on sait que F_X est une fonction de répartition. Pour vérifier que c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, il s'agit de montrer que F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. Montrons que F_X est continue sur \mathbb{R} . F_X est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues et continue sur $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle. Étudions la continuité en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F_X(x).$$

Ainsi, F_X est continue en 0. Finalement, F_X est continue sur \mathbb{R} .

2. Montrons que F_X est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points. F_X est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$ en tant que composée de fonctions de classe C^1 sur ces intervalles. Ainsi, F_X est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0.

Ainsi, F_X est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X est à densité. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Donc, la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de X .

Correction du test 3 ([Retour à l'énoncé.](#))

Il s'agit de montrer que f est positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

1. Montrons que f est positive. Sur $]-\infty, -1[$ et sur $[1, +\infty[$, f est positive. De plus, pour tout $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1 + x \geq 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1 - x \geq 0$.

Ainsi, f est positive.

2. Montrons que f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il est évident que f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en $-1, 0$ et 1 .

3. Comme f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en $-1, 0$ et 1 , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est impropre en $-\infty, -1, 0, 1$ et $+\infty$.

- Étude de $\int_{-\infty}^{-1} f(t) dt$. Comme f est nulle sur $]-\infty, -1[$, on vérifie facilement que cette intégrale (doublement impropre) converge et vaut 0.

- Étude de $\int_{-1}^0 f(t) dt$. Comme f est prolongeable par continuité sur $[-1, 0]$ l'intégrale converge et

$$\int_{-1}^0 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t) dt = \frac{1}{2}.$$

- Étude de $\int_0^1 f(t)dt$. Comme f est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ l'intégrale converge et

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}.$$

- Étude de $\int_1^{+\infty} f(t)dt$. Comme f est nulle sur $[1, +\infty[$, on vérifie facilement que cette intégrale converge et vaut 0.

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire de densité f . Alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Correction du test 4 ([Retour à l'énoncé](#).)

Ici, on ne sait pas a priori que F est une fonction de répartition. Il s'agit donc de montrer que F est croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, F est continue sur \mathbb{R} , F est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points.

1. Montrons que F est croissante sur \mathbb{R} .

- F est croissante sur $]-\infty, 0[$ car la fonction exponentielle l'est,
- F est croissante sur $[0, +\infty[$ (en étudiant le signe de la dérivée sur $]0, +\infty[$),
- pour tout $x \in]-\infty, 0[$ et tout $y \in [0, +\infty[$ on a

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}e^{-y} = F(y).$$

Ainsi F est croissante sur \mathbb{R} .

2. Par limites usuelles, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

3. Montrons que F est continue sur \mathbb{R} . F est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car la fonction exponentielle est continue sur ces intervalles. De plus, F est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \frac{1}{2} = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x).$$

Ainsi F est continue sur \mathbb{R} .

4. F est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car la fonction exponentielle est de classe C^1 sur ces intervalles.

Ainsi F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X . Comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de X .

Correction du test 5 ([Retour à l'énoncé](#).)

D'après l'exemple ??, la fonction de répartition de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On note $Y = 3X - 1$

- Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y . Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$[Y \leq t] = [3X - 1 \leq t] = \left[X \leq \frac{t+1}{3} \right].$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P\left(X \leq \frac{t+1}{3}\right) = F_X\left(\frac{t+1}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ 1 - \frac{9}{(t+1)^2} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

- Montrons que Y est une variable à densité. La fonction F_Y est continue sur \mathbb{R} : elle est continue sur $] -\infty, 2[$ et sur $[2, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et elle est continue en 2 car

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} F_Y(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 2^+} F_Y(t) = F_Y(2).$$

Enfin, F_Y est de classe C^1 sauf éventuellement en 2. Ainsi, Y est à densité.

- Déterminons une densité de Y . On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement en 2 :

$$F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Au final, la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{18}{(t+1)^3} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

est une densité de Y .

Correction du test 6 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(2)$. Déterminer la loi de $Y = e^X$.

- On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$. Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y . Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$[Y \leq t] = [e^X \leq t] = \begin{cases} [X \leq \ln(t)] & \text{si } t > 0 \\ \emptyset & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} P([X \leq \ln(t)]) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} F_X(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Or, comme X suit une loi exponentielle de paramètre 2, on a

$$F_X(\ln(t)) = \begin{cases} 1 - e^{-2\ln(t)} & \text{si } \ln(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \ln(t) < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

Donc finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

- Montrons que Y est une variable à densité.

La fonction F_Y est continue sur \mathbb{R} : elle est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et elle est continue en 1 car

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} F_Y(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 1^+} F_Y(t) = F_Y(1).$$

Enfin, F_Y est de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1. Ainsi, Y est à densité.

- Déterminons une densité de Y . On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf en 1 :

$$F'_Y(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

Au final, la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{2}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

est une densité de Y .

Correction du test 7 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit X suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de X^2 . On note $Y = X^2$.

- On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y . Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$[Y \leq t] = [X^2 \leq t] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < 0 \\ [-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}] & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P([-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}]) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

car X est à densité. Or comme X suit une loi uniforme sur $[-1, 1]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\sqrt{t}+1}{2} - \frac{-\sqrt{t}+1}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- Montrons que Y est une variable à densité. La fonction F_Y est continue sur \mathbb{R} (le vérifier!) et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1. Ainsi, Y est à densité.
- Déterminons une densité de Y . On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \quad F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Au final, la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus]0, 1] \end{cases}$$

est une densité de Y .

Correction du test 8 ([Retour à l'énoncé.](#))

- D'après le test ??, comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) = F_X(t)F_Y(t).$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$, on obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) = F_X(t)F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-at})(1 - e^{-bt}) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- (a) D'après l'exemple ??, comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_V(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)).$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$, on obtient finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_V(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- (b) F_V est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(a+b)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(a+b)$.

Correction du test 9 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = |X|$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y .

- On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Déterminons la fonction de répartition F_Y de Y . Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$[Y \leq t] = [|X| \leq t] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < 0 \\ [-t \leq X \leq t] & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ P([-t \leq X \leq t]) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X(t) - F_X(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

car X est à densité.

- Montrons que Y est une variable à densité.

La fonction F_Y est continue sur \mathbb{R}_+ car F_X est continue sur \mathbb{R} . Elle est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} F_Y(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_Y(t) = F_Y(0)$$

ce qui montre que F_Y est continue en 0.

Comme F_X de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de point, F_Y est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ sauf éventuellement en un nombre fini de point. De plus, F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$.

Ainsi, F_Y est aussi continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de point. Par conséquent, Y est une variable aléatoire à densité.

- Déterminons une densité de Y . On a, pour tout réel t sauf éventuellement un nombre fini

$$F'_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F'_X(t) + F'_X(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Comme X suit une loi normale centrée réduite, la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de Y .

Correction du test 10 ([Retour à l'énoncé.](#))

La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.

Comme $t \mapsto |tf(t)|$ est continue sur \mathbb{R} , l'intégrale est $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

Or

- $|tf(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}$,
- $t \mapsto |tf(t)|$ et $t \mapsto \frac{1}{\pi t}$ sont positives au voisinage de $+\infty$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t} dt$ est divergente d'après le critère de convergence des intégrales de Riemann en $+\infty$.

Donc d'après le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} |tf(t)|dt$ diverge.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ diverge et X ne possède donc pas d'espérance.

Correction du test 11 ([Retour à l'énoncé.](#))

Une densité de X est donnée par la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, d'après le théorème de transfert, la variable $\frac{1}{1+e^{-X}}$ possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ converge absolument. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ étant positive et continue sur $[0, +\infty[$, il suffit d'étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$, impropre en $+\infty$.

Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = -[\ln|1+e^{-x}|]_0^A = \ln(2) - \ln(1+e^{-A})$$

donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \ln(2)$.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ converge (absolument) donc $\frac{1}{1+e^{-X}}$ possède une espérance et

$$E\left(\frac{1}{1+e^{-X}}\right) = \ln(2).$$

Correction du test 12 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ avec $a < b$ deux réels. Une densité de X est donnée par la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après le théorème de transfert et la formule de Koenig-Huygens, X possède une variance si et seulement si $\int_a^b \frac{t^2}{b-a} dt$ converge absolument. Or, la fonction $t \mapsto \left| \frac{t^2}{b-a} \right|$ est continue sur $[a, b]$ donc l'intégrale ne possède pas d'impropriété! Ainsi X possède un moment d'ordre 2 donc une variance. La formule de Koenig-Huygens donne alors

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_a^b \frac{t^2}{b-a} dt - E(X)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(b^3 - a^3) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)} \\ &= \frac{4(b-a)(a^2 + ab + b^2) - 3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)} \\ &= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Correction du test 13 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soient $a < b$ deux nombres réels et X une variable aléatoire. On raisonne par double implication.

\Rightarrow Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et notons $Y = a + (b-a)X$. Rappelons que la fonction de répartition de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On va déterminer la fonction de répartition de Y . Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$[Y \leq t] = [a + (b-a)X \leq t] = \left[X \leq \frac{t-a}{b-a} \right] \quad \text{car } b-a > 0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = P\left(X \leq \frac{t-a}{b-a}\right) = F_X\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t-a}{b-a} < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } \frac{t-a}{b-a} \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } \frac{t-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

Or $\frac{t-a}{b-a} \in [0, 1]$ si et seulement si $t \in [a, b]$, $\frac{t-a}{b-a} < 0$ si et seulement si $t < a$ et $\frac{t-a}{b-a} > 1$ si et seulement si $t > b$.
Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, Y suit une loi uniforme sur $[a, b]$.

\Leftarrow On suppose que $Y = a + (b-a)X$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$. Sa fonction de répartition est donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$[X \leq t] = [a + (b-a)X \leq (b-a)t + a] = [Y \leq (b-a)t + a] \quad \text{car } b-a > 0.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P([X \leq t]) = F_Y((b-a)t + a) = \begin{cases} 0 & \text{si } (b-a)t + a < a \\ \frac{(b-a)t + a - a}{b-a} & \text{si } (b-a)t + a \in [a, b] \\ 1 & \text{si } (b-a)t + a > b \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Correction du test 14 ([Retour à l'énoncé.](#))

Soit $\mu, \sigma > 0$. Démontrer le cas particulier suivant :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \iff \sigma X + \mu \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

On raisonne par double implication.

\Rightarrow Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et notons $Y = \sigma X + \mu$. Rappelons que la fonction de répartition de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On va déterminer la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[Y \leq x] = [\sigma X + \mu \leq x] = \left[X \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \right] \quad \text{car } \sigma > 0.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = P\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = F_X\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{s - \mu}{\sigma}$ dans cette intégrale on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}} ds.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, Y suit une loi normale sur $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

\Leftarrow On suppose que $Y = \sigma X + \mu$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sa fonction de répartition est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}} ds$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$[X \leq x] = [\sigma X + \mu \leq \sigma x + \mu] = [Y \leq \sigma x + \mu] \quad \text{car } \sigma > 0.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F_Y(\sigma x + \mu) = \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}} ds.$$

En effectuant le changement de variable $t = \frac{s - \mu}{\sigma}$ dans cette intégrale on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s - \mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Correction du test 15 ([Retour à l'énoncé.](#))

Une densité de X est donnée par la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après le théorème de transfert et la formule de Koenig-Huygens, X possède une variance si et seulement si

$\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ converge absolument. Or, la fonction $t \mapsto \lambda t^2 e^{-\lambda t}$ est positive donc il suffit d'étudier si $\int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ converge. La seule impropriété de cette intégrale est en $+\infty$.

Soit $A \geq 0$. En intégrant par parties deux fois de suite

$$\begin{aligned}\int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-t^2 e^{-\lambda t} \right]_0^A + \int_0^A 2t e^{-\lambda t} dt \\ &= -A^2 e^{-\lambda A} + 2 \left(\left[-t \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^A + \int_0^A \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} dt \right) \\ &= -A^2 e^{-\lambda A} - 2 \frac{A e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^A \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cela montre que X possède un moment d'ordre 2 et que $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. La formule de Koenig-Huygens donne alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$