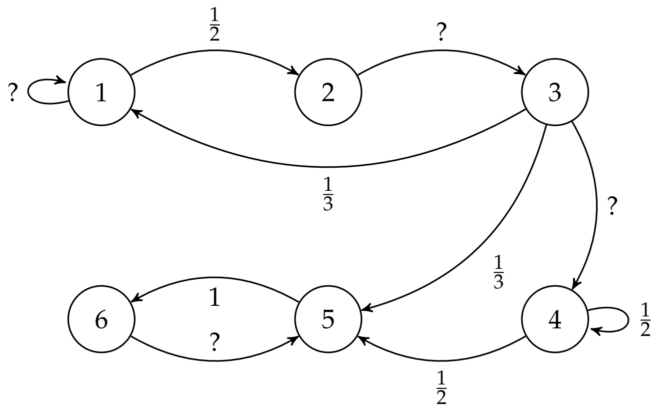
TD19-Chaînes de Markov

1 Graphes probabilistes

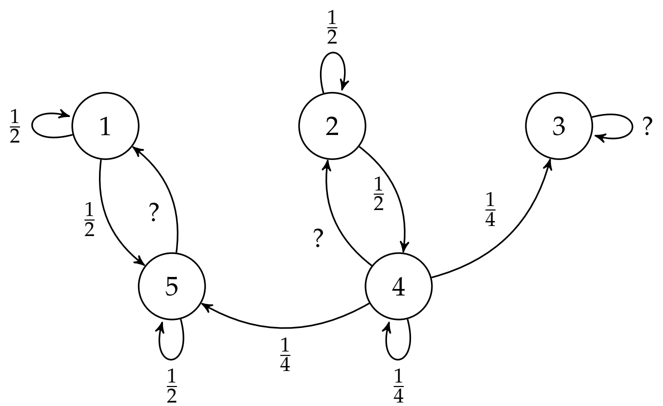
Exercice 1

Compléter chacun des deux graphes pour en faire des graphes probabilistes puis donner leur matrice de transition.

1.



2.



Exercice 2

Compléter chaque matrice pour en faire une matrice stochastique puis donner le graphe probabiliste associé.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & ? \\ \frac{1}{6} & 0 & ? \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & ? \end{pmatrix}$.

2. $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & ? & \frac{3}{8} \\ ? & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & ? & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & ? \end{pmatrix}$.

2 Chaînes de Markov

Exercice 3 (*Être ou ne pas être markovien*)

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = Y_n + Y_{n-1}.$$

1. *Calculer $P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 0)$ et $P_{[X_2=1]}(X_3 = 0)$.*
2. *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une chaîne de Markov ?*

Exercice 4 (*Être ou ne pas être markovien*)

On dispose de deux pièces, une non pipée, et une qui est truquée et est Face des deux côtés. On commence par en choisir une des deux au hasard (de manière uniforme) et ensuite on lance celle-là une infinité de fois.

1. *On observe Face au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?*
2. *On observe Pile au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?*
3. *On observe Pile au $(n-1)$-ième lancer et Face au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?*
4. *La suite des résultats des lancers obtenus forme-t-elle une chaîne de Markov ?*

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $\{1,2,3\}$ *dont la matrice de transition est :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le graphe de cette chaîne de Markov.*
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *déterminer* $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)$, $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3)$.
3. *Dans cette question, on suppose que* X_0 *suit la loi uniforme sur* $\{1,2,3\}$.
   (a) *Calculer* $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 1)$.
   (b) *Déterminer la loi de* X_2.

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov à valeurs dans* $\{1,2,3\}$ *dont la matrice de transition est la suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & ? \\ \frac{1}{3} & ? & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & ? \end{pmatrix}.$$

1. *Compléter la matrice* P *puis dessiner le graphe associé.*
2. *Peut-on aller de l'état 1 à l'état 2 en une étape ? en deux étapes ?*
3. *On suppose que* X_0 *suit la loi certaine de paramètre* 1. *Calculer* $P(X_2 = 1, X_3 = 1)$ *et* $P(X_2 = 1, X_3 = 2)$.
4. *Déterminer les états stables de la chaîne.*

Exercice 7 (*Après la pluie, le beau temps*)

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut soit neiger soit pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. *Modéliser cette situation à l'aide d'une chaîne de Markov à valeurs dans* $\{1,2,3\}$ *(1 désignera le beau temps, 2 la neige et 3 la pluie) dont on précisera la matrice de transition.*
2. *Dessiner le graphe associé.*
3. *Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?*

Exercice 8

Marguerite la vache s'ennuie un peu dans son pré. Pour passer le temps, elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.

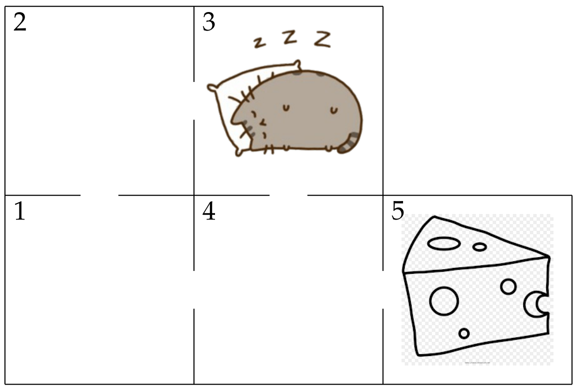
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* X_n *la variable aléatoire valant* 1 *si le* n*-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et* 2 *sinon.*

1. *Expliquer pourquoi* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition* M *et dessiner le graphe associé.*
2. (a) *Déterminer l'unique état stable de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) *Diagonaliser* M *et en déduire pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'expression de* M^n.
   (c) *En déduire que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers l'état stable.*
   (d) *Quelle est la proportion de camion sur cette route ?*

3 Pour aller plus loin

Exercice 9 (*Le chat et la souris*)

Une souris se balade au hasard dans une maison à la recherche de nourriture.
Si, à l'instant n, *elle se trouve dans une pièce vide alors elle choisit une pièce adjacente au hasard (selon une loi uniforme) et s'y rend à l'instant* $n+1$.
Si elle est à l'instant n *dans une pièce où se trouve de la nourriture (un fromage par exemple), elle y reste.*
Mais attention ! Si par malheur elle rentre dans une pièce où se trouve un chat, elle se fait manger (et on considère donc qu'elle reste dans cette pièce).
Heureusement pour la souris, le chat est confortablement installé pour sa sieste et reste donc toujours dans la même pièce. Le plan de la maison est donné ci-dessous.



1. (a) *Modéliser cette situation par une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $E = \{1,2,3,4,5\}$. *On précisera sa matrice de transition* M *et son graphe.*
   (b) *Déterminer la loi de* X_3.
   (c) *Déterminer les états stables de la chaîne.*
2. *Soient* $n \geq 0$ *et* $r \geq 1$ *deux entiers. Soient* $(i_0, \ldots, i_n) \in E^{n+1}$ *et* $(j_{n+1}, \ldots, j_{n+r}) \in E^r$ *tels que :* $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$.

Montrer :

$$\begin{aligned}P_{[X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n]}(X_{n+1}=j_{n+1},\ldots,X_{n+r}=j_{n+r}) &= P_{[X_n=i_n]}(X_{n+1}=j_{n+1},\ldots,X_{n+r}=j_{n+r})\\ &= P_{[X_0=i_n]}(X_1=j_{n+1},\ldots,X_r=j_{n+r})\\ &= m_{i_n,j_{n+1}}m_{j_{n+1},j_{n+2}}\ldots m_{j_{n+r-1},j_{n+r}}.\end{aligned}$$

Cette relation s'appelle la ***propriété de Markov faible****.*

3. *On note T_5 la variable aléatoire définie par :*

$$T_5 = \inf\{n \geq 0\ ;\ X_n = 5\}.$$

La variable aléatoire T_5 représente le temps que la souris met pour atteindre le fromage.
Pour tout $i \in E$ on note

$$u_i = P_{[X_0=i]}(T_5 < +\infty).$$

Ainsi u_i est la probabilité que la souris atteigne le fromage en partant de la pièce n°i.

(a) *Calculer u_5 et u_3.*

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :*

$$[T_5 = n] = \bigcup_{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\{1,2,3,4\}^n} [X_0 = x_0,\ldots,X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 5].$$

(c) *En déduire que pour tout $n \geq 2$ et tout $(i,j) \in E^2$ on a :*

$$P_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5 = n) = P_{[X_0=j]}(T_5 = n-1).$$

(d) *En déduire que $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est solution du système :*

$$\left\{\begin{array}{lcc} u_1 &=& \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4\\ u_2 &=& \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3\\ u_3 &=& 0\\ u_4 &=& \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_5\\ u_5 &=& 1.\end{array}\right.$$

(e) *Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.*