

À rendre le 04/01/2022

Exercice 1

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Faces obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a. Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

- b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; puis en fonction du nombre n de Faces obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
- b. Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
- c. En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$P([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P([X = n]) \quad \text{puis} \quad P([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
- b. Déterminer, pour tout n de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
- c. En déduire la loi de V .
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
5. Que vaut $\text{Cov}(U, V)$? En déduire $\text{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces alors obtenus;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Faces alors obtenus;
- Le joueur A gagne si son nombre de Faces obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. Simulation informatique

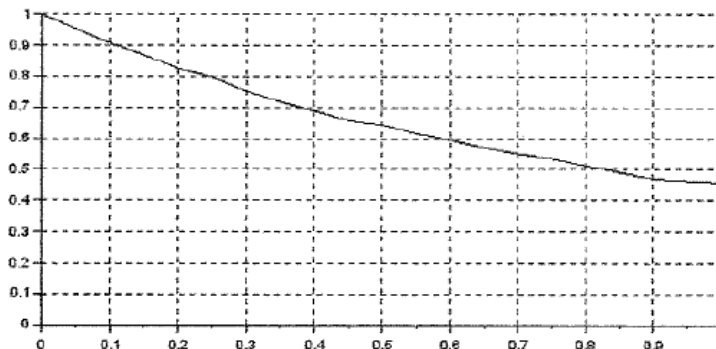
- a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X .
- b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```

1. function r = mystere(p)
2.     r = 0
3.     N = 10^4
4.     for k = 1:N
5.         x = simule_X()
6.         y = simule_Y(p)
7.         if x <= y then
8.             r = r + 1/N
9.         end
10.    end
11. endfunction

```

- c. On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. Étude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

- Reconnaître la loi de Z et préciser son(s) paramètre(s), son espérance et sa variance.
 - Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
 - Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P([Y \geq n]) = (1 - p)^n$.
8. a. Montrer : $P([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n]) P([Y \geq n])$.
- b. Déduire des résultats précédents : $P([X \leq Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}$.
- c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z)) = \left(\frac{-x+2y+z}{3}, \frac{-x-y-2z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right).$$

Partie A

- Montrer que f est un endomorphisme de E.
 - Déterminer une base et la dimension du noyau de f . L'application f est-elle injective?
 - En déduire, sans utiliser l'algorithme du pivot de Gauss, le rang de f . L'application f est-elle surjective?
 - Calculer f^2 puis f^3 .
- Soit g un endomorphisme de E vérifiant

$$g(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + e_3) \quad ; \quad g(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3).$$

Montrer que $g = f$.

3. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
- Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
 - Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$.
 - Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe un endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

- Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
- Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a e'_1$.
 - Montrer que $g(e'_2) - a e'_2$ appartient aussi au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2$.
 - Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a e'_2 + b e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2$ appartient au noyau de f .
 - En déduire qu'il existe un réel c tel que :

$$g(e'_1) = a e'_1 \quad ; \quad g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2 \quad ; \quad g(e'_3) = a e'_3 + b e'_2 + c e'_1.$$

- En déduire la matrice de g dans la base \mathcal{B}' puis la matrice de $g \circ g$ dans la base \mathcal{B}' .
 - Conclure.
3.
 - Avec la question 3.(d), calculer $g^2(e'_1)$, $g^2(e'_2)$, $g^2(e'_3)$ en fonction de a , b et c
 - En déduire la matrice de $g \circ g$ dans la base \mathcal{B}' d'une autre façon.

Exercice 3

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

I - Une loi exponentielle et une suite

1. Une loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

- Donner une densité de X et rappeler la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X .
- Redémontrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

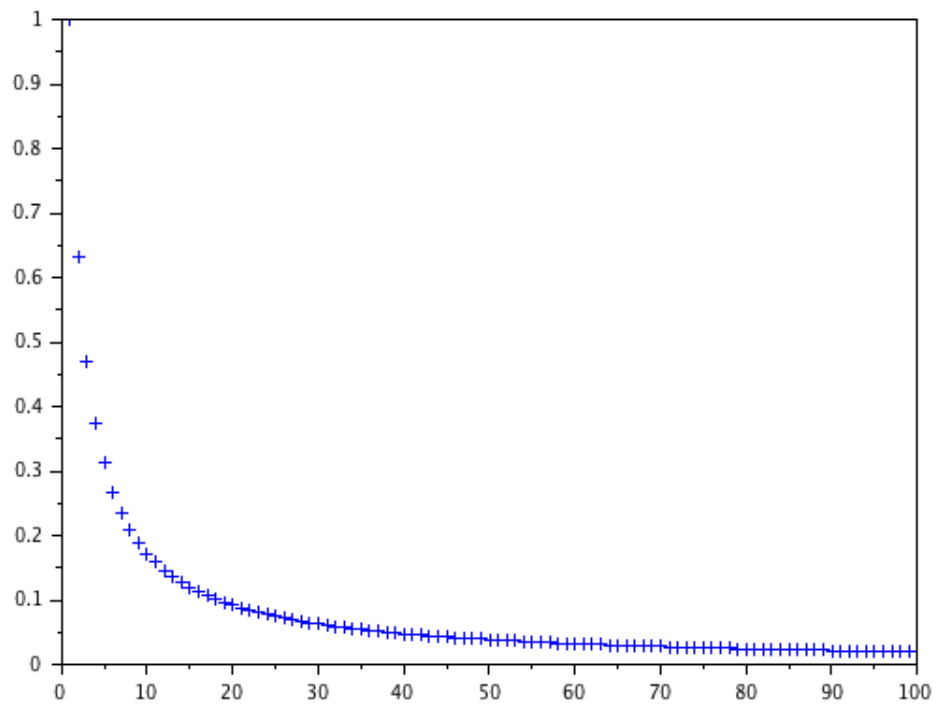
2. Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = F(u_n)$.

- Montrer que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$.
Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.
- Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n > 0$.
- Recopier et compléter le programme SCILAB suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$:

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
    U(n+1) = _____
end
plot(U, "+")
```

(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?

(e) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

(f) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

(g) À l'aide de la question 2(a), montrer successivement que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}.$$

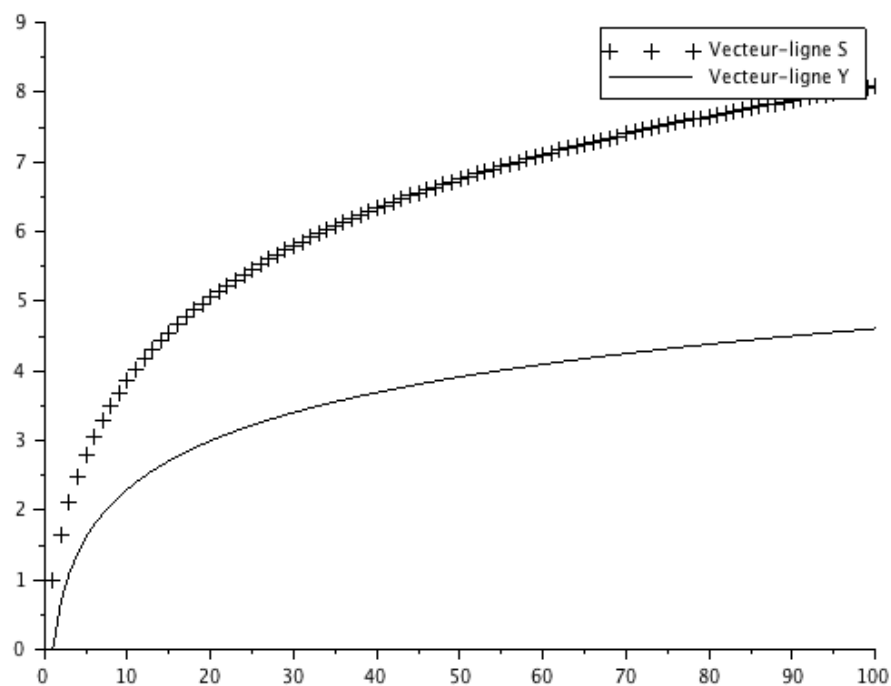
(h) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{n}.$$

(i) On modifie le programme écrit en question 2(c) en remplaçant la dernière ligne par :

```
X = 1: 100
S = cumsum(U)
Y = log(X)
plot2d(X,S)
plot2d(X,Y)
```

Le programme ci-dessus permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Que représente le vecteur-ligne S?

Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série de terme général u_n ?

(j) A l'aide de la question 2(h), établir la nature de la série de terme général u_n .

II - Une fonction

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Étude de la fonction g .

- Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0? Est-elle dérivable en 0?
- Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
- Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
- Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur \mathbb{R} .
On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.