Chapitre 1 : Suites récurrentes

1 Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On s'intéresse aux suites définies par la **relation de récurrence**

$$\left\{\begin{array}{c} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right. .$$

L'étude d'une telle suite suit à peu près toujours le même plan :

1. **Étudier la fonction** f. Pour rappel, cela consiste en général à :
   (a) justifier qu'elle est dérivable **puis** calculer sa dérivée,
   (b) étudier le signe de la dérivée,
   (c) en déduire les variations de f.
2. **Vérifier que la suite est bien définie** : cela signifie vérifier que tous les termes de la suite peuvent être calculés ou, plus précisément que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient bien à l'ensemble de définition de f.
3. Étudier la monotonie et la convergence.

2 Vérifier qu'une suite récurrente est bien définie

Exemple 1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

est-elle bien définie ?

Méthode 1

En général, pour montrer qu'une suite définie par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, on procède par récurrence.

1. Si J est un intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f tel que $f(J) \subset J$ et $u_0 \in J$ alors on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
   Un tel intervalle est appelé un intervalle **stable par** f.
2. En général dans les concours, l'intervalle stable vous est donné et on vous demande de vérifier que tous les termes de la suites sont dedans (par récurrence).

Exemple 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

1. *Montrons par récurrence la propriété suivante : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n > 0$ ».*

2. *Dans l'hérédité, on a utilisé le fait si $u_n > 0$ alors $\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > 0$.*

Test 1 (*Voir la solution.*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

1. *Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par :*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{2-x}$$

est strictement croissante.

2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 < u_n < 1$.*
3. *Que peut-on dire de l'intervalle $]0,1[$?*

3 Étude de la monotonie

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Méthode 2

Lorsque f est **croissante sur un intervalle J contenant tous les termes de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on montre par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone :

- si $u_0 < u_1$ elle est croissante ,
- si $u_1 < u_0$ elle est décroissante.

Remarque 1

Quand f est décroissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone en général ! Cependant on peut montrer, mais c'est ***hors-programme****, que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires.*

Démonstration : cette preuve sera à refaire au cas par cas dans chaque exercice sur les suites récurrentes !

■

Exemple 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}.$$

On note f *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par :*

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \frac{x}{2-x}.$$

D'après le test 1, f *est strictement croissante et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est défini et* $u_n \in]0,1[$.
Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

Méthode 3

1. Pour étudier les variations d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence on peut appliquer la méthode donnée dans la preuve de la proposition 2.
2. On peut aussi étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. En effet, pour tout entier naturel n on a :
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Exemple 4

On reprend l'exemple précédent.

1. *Montrer que*

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) - x < 0.$$

2. *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

4 Étude de convergence

Définition 1 (Point fixe d'une application)

Soit $f : E \to E$ une application d'un ensemble E dans lui-même et soit $\ell \in E$. On dit que ℓ est **un point fixe de** f si $f(\ell) = \ell$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs réelles et considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.
En particulier, si f est continue sur I et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in I$, ℓ est nécessairement un point fixe de f.

Démonstration :

■

Méthode 4

Soit f une fonction continue, pour déterminer les éventuelles limites finies d'une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à f :

1. on commence par chercher les points fixes de f en résolvant l'équation $f(x) = x$ soit par une méthode directe, soit en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$ (on pourra penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ou de la bijection) ;
2. à ce stade **on ne sait toujours pas si la suite converge** ;
3. si on sait que la suite est monotone et majorée/minorée, on peut utiliser le théorème de convergence monotone pour justifier l'existence de la limite ; si f possède plusieurs points fixes, il faut alors identifier lequel est la limite ;
4. dans certains cas, on peut montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en montrant que f n'a pas de point fixe ou qu'il est impossible que la suite convergence vers les éventuels points fixes identifiés.

Exemple 5

On reprend toujours le même exemple.

1. *Déterminer les points fixes de f.*

2. *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et identifier sa limite.*

On peut aussi étudier la convergence à l'aide de **l'inégalité des accroissements finis** :

Théorème 2 (Inégalité des accroissements finis v2)

Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Supposons qu'il existe un réel k tel que $\forall u \in]a,b[, |f'(u)| \leqslant k$. Alors

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

Méthode 5

On suppose que f vérifie les hypothèses de ce théorème sur un intervalle J contenant tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $\ell \in J$ est un point fixe de f.

- D'après l'inégalité des accroissement finis on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|.$$

- On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|.$$

- **Si** $|k| < 1$, on en déduit par le théorème d'encadrement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Test 2 (*Voir la solution.*)

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [-1,+\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x+1}.$$

1. *Déterminer les points fixes de f. Montrer que f possède un unique point fixe dans $[0,2]$ que l'on notera ℓ.*
2. *Justifier que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.*
3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

   (a) *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [0,2]$.*

   (b) *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.*

   (c) *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. En déduire la convergence de la suite.*
4. (a) *Écrire une fonction en Python qui, prenant en argument un entier n, renvoie la valeur de u_n.*

   (b) *Écrire un programme en Python prenant en argument un réel* epsilon *et renvoyant une valeur approchée de ℓ à* epsilon *près.*

5 Objectifs

1. Savoir montrer que les termes d'une suite définie par récurrence sont bien définis, appartiennent à un intervalle donné.
2. Savoir exploiter la croissance de f ou le signe de $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence.
3. Connaître la définition d'un point fixe et le théorème 1.
4. Savoir déterminer les points fixes d'une fonction f en résolvant l'équation $f(x) = x$ ou en étudiant $x \mapsto f(x) - x$ (étude de signe, utilisation du théorème de la bijection ...)
5. Savoir étudier la convergence d'une suite définie par récurrence (à l'aide du théorème de convergence monotone, en utilisant les points fixes ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis par exemple)