

Binarna Stabla

Slajdovi sa predavanja¹

© Goodrich, Tamassia, Goldwasser

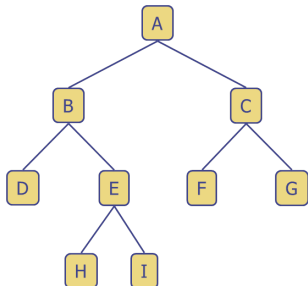
Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2022.

¹Po uzoru na materijale sa: <https://github.com/mbranko/asp-slajdovi>

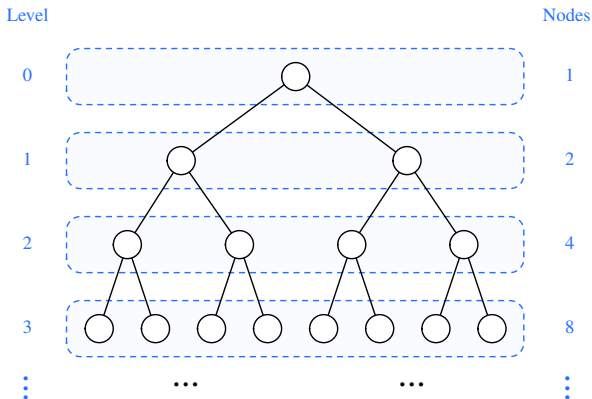
Binarno stablo

- stablo za koje važi:
 - svaki čvor ima najviše dvoje dece
 - svako dete je označeno kao **levo dete** ili **desno dete**
 - levo dete po redosledu prethodi desnom detetu
- levo podstablo – levo dete kao koren
- desno podstablo – desno dete kao koren
- **pravilno** binarno stablo: svaki čvor ima 0 ili 2 deteta

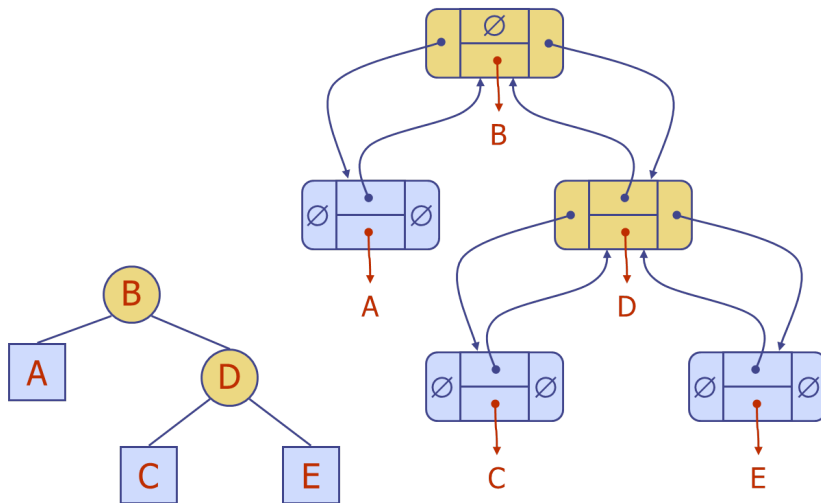


Osobine binarnog stabla

- nivo stabla d ima najviše 2^d čvorova
- broj čvorova po nivou raste eksponencijalno

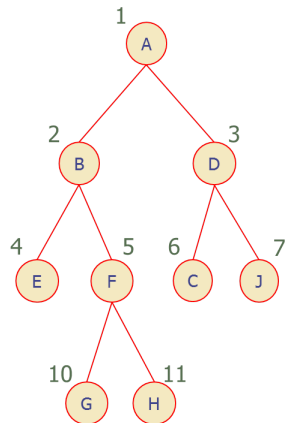


Binarno stablo u memoriji / čvorovi i reference



Binarno stablo u memoriji / pomoću niza

- **rang** čvora:
 - $\text{rang}(\text{root}) = 1$
 - za levo dete:
 $\text{rang}(\text{node}) = 2 \cdot \text{rang}(\text{parent})$
 - za desno dete:
 $\text{rang}(\text{node}) = 2 \cdot \text{rang}(\text{parent}) + 1$
- čvor v se smešta u $A[\text{rang}(v)]$



Obilazak binarnog stabla / inorder

inorder(n)

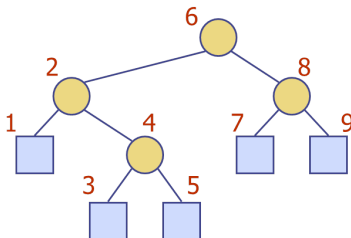
if n ima levo dete **then**

 inorder(levo dete)

 obradi(n)

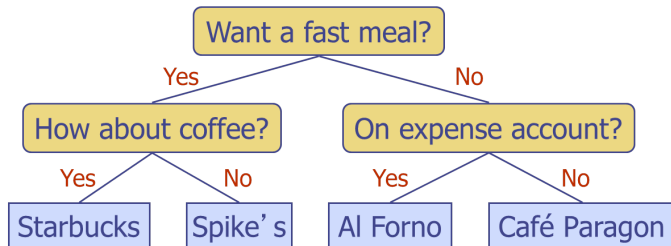
if n ima desno dete **then**

 inorder(desno dete)



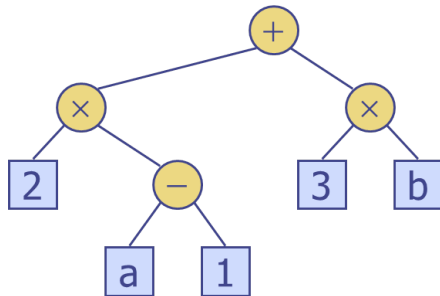
Stabla odlučivanja

- binarno stablo strukturirano prema procesu odlučivanja
- unutrašnji čvorovi – pitanja sa da/ne odgovorima
- listovi – odluke
- primer: gde za večeru?



Stablo aritmetičkih izraza

- binarno stablo kreirano na osnovu aritmetičkog izraza
- unutrašnji čvorovi – operatori
- listovi – operandi
- primer: $2 * (a - 1) + 3 * b$

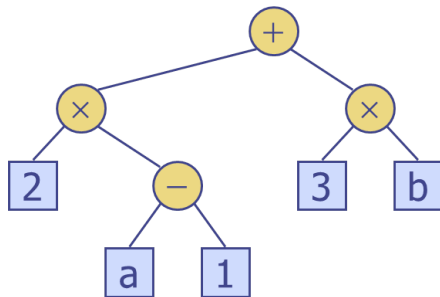


Ispisivanje aritmetičkih izraza

- specijalni slučaj **inorder** obilaska

`printExpr(n)`

```
if n ima levo dete then
    print("(")
    printExpr(levo dete)
print(n)
if n ima desno dete then
    printExpr(desno dete)
print(")")
```



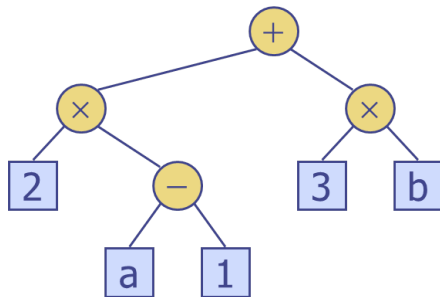
Izračunavanje aritmetičkih izraza

- specijalni slučaj **postorder** obilaska

$\text{evalExpr}(n)$

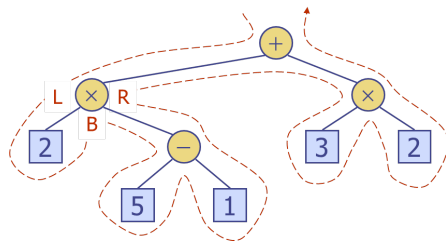
```

if  $n$  je list then
  return  $n.\text{element}$ 
else
   $x \leftarrow \text{evalExpr}(n.\text{left})$ 
   $y \leftarrow \text{evalExpr}(n.\text{right})$ 
   $\diamond \leftarrow$  operator u  $n$ 
  return  $x \diamond y$ 
  
```



Ojlerov obilazak stabla

- opšti postupak za obilazak stabla
- preorder, inorder, postorder su specijalni slučajevi
- posmatramo grane stabla kao zidove koji uvek moraju da nam budu sa leve strane prilikom kretanja
- svaki čvor se poseti tri puta
 - sa leve strane (preorder)
 - sa donje strane (inorder)
 - sa desne strane (postorder)



Mape sa poretkom

- postoji relacija poretka nad ključevima
- elementi se skladište prema vrednosti ključa
- pretrage „najbliži sused“ (nearest neighbor):
 - nađi element sa najvećim ključem manjim ili jednakim k
 - nađi element sa najmanjim ključem većim ili jednakim k

Binarna pretraga

- binarna pretraga može da pronade „najbližeg suseda“ za mapu sa poretком implementiranu pomoću niza koji je sortiran po ključu
 - u svakom koraku prepolovi se broj kandidata
 - radi u $O(\log n)$ vremenu
- primer: nađi 7

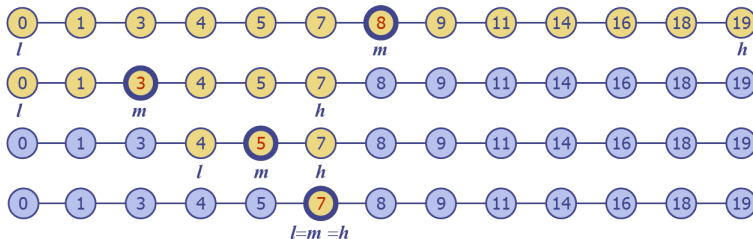


Tabela pretrage

- tabela pretrage je mapa sa poretком implementirana pomoću sortiranog niza
 - eksterni komparator za ključeve
- performanse:
 - binarna pretraga je $O(\log n)$
 - dodavanje je $O(n)$
 - uklanjanje je $O(n)$
- radi efikasno samo za mali broj elemenata ili tamo gde je pretraga česta a izmene retke (npr. provera kreditne kartice)

Sortirana mapa ATP

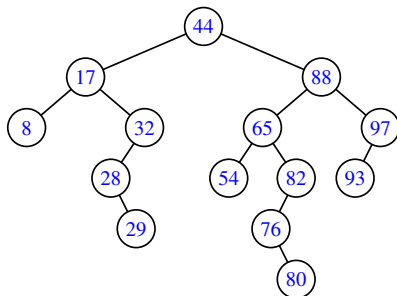
- standardne operacije mape

$M[k]$	vraća vrednost v za ključ k u mapi M ; implementira je <code>__getitem__</code>
$M[k]=v$	dodaje novi element (k, v) u M ili menja postojeći; implementira je <code>__setitem__</code>
<code>del M[k]</code>	uklanja element sa ključem k iz M ; implementira je <code>__delitem__</code>

- dodatne funkcionalnosti
 - sortiran redosled prilikom iteracije
 - nađi veće: `find_gt(k)`
 - nađi u opsegu: `find_range(start, stop)`

Binarno stablo pretrage

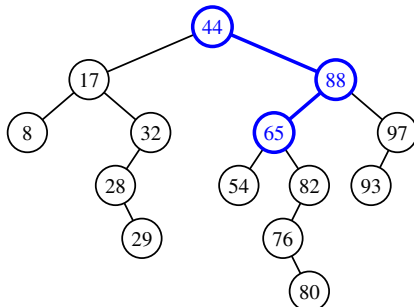
- **binarno stablo pretrage** je binarno stablo koje čuva (k, v) parove u čvorovima p tako da važi:
 - ključevi koji se nalaze u **levom** podstablu od p su **manji** od k
 - ključevi koji se nalaze u **desnom** podstablu od p su **veći** od k
- listovi ne čuvaju elemente, reference na listove mogu biti None
- inorder obilazak: ključevi u rastućem redosledu



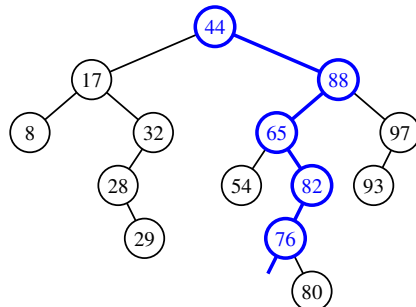
Pretraga u binarnom stablu

- tražimo ključ k polazeći od korena
- idemo levo ako je k manji od tekućeg čvora
- idemo desno ako je k veći od tekućeg čvora
- ako dođemo do lista, k nije nađen

Tražimo 65



Tražimo 68



Pretraga u binarnom stablu

TreeSearch(T, p, k)

if $k = p.key$ **then**

return p

{**pronađen**}

else if $k < p.key \wedge T.left(p) \neq None$ **then**

return **TreeSearch**($T, T.left(p), k$)

{**levo podstablo**}

else if $k > p.key \wedge T.right(p) \neq None$ **then**

return **TreeSearch**($T, T.right(p), k$)

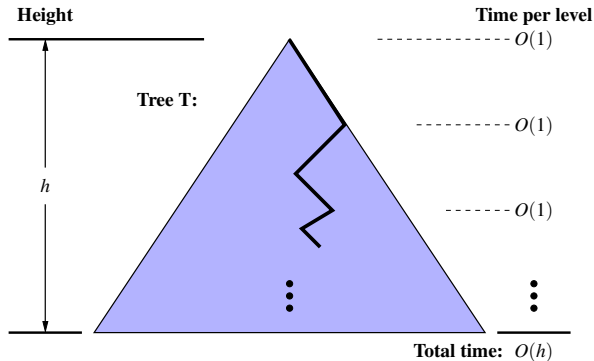
{**desno podstablo**}

return $None$

{**nije pronađen**}

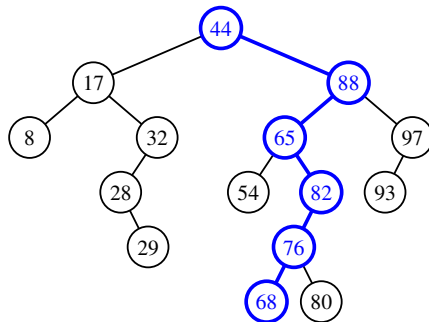
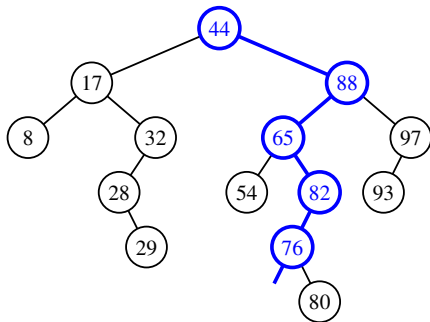
Performanse pretrage u binarnom stablu

- u svakom rekurzivnom pozivu spuštamo se za jedan nivo u stablu
- testiranje u okviru jednog nivoa je $O(1)$
- ukupan broj testova je $O(h)$, gde je h visina stabla



Dodavanje u stablo

- dodajemo element (k, v)
- prvo tražimo k
- ako k nije u stablu, došli smo do lista gde treba dodati čvor
- primer: dodajemo 68



Dodavanje u stablo

TreeInsert(T, k, v)

$p \leftarrow \text{TreeSearch}(T, T.\text{root}, k)$

if $k = p.\text{key}$ **then**

$p.\text{value} \leftarrow v$

{ako već postoji zameni vrednost}

else if $k < p.\text{key}$ **then**

$p.\text{add_left}(k, v)$

{dodaj levo dete}

else

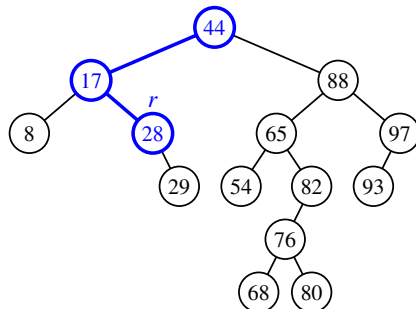
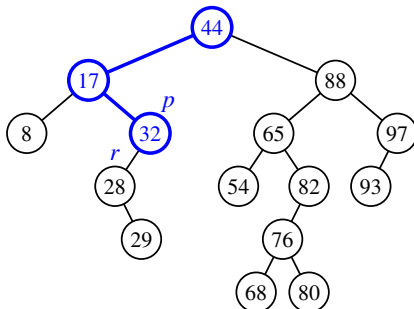
$p.\text{add_right}(k, v)$

{dodaj desno dete}

- dodaje se uvek u list

Uklanjanje iz stabla

- uklanjamo element sa ključem k
- prvo nađemo p koji sadrži k
- ako p ima **najviše jedno** dete
- njegovo dete r vežemo u stablo umesto njega
- primer: uklanjamo 32

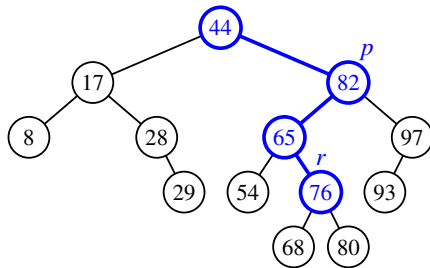
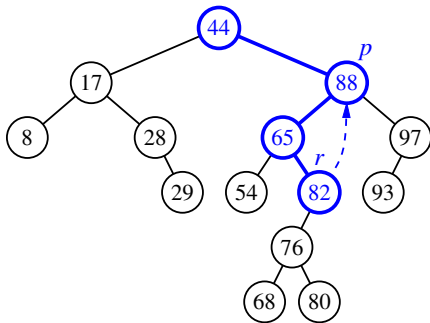


Uklanjanje iz stabla

- ako p ima **dva** deteta
 - nađemo čvor r čiji ključ neposredno prethodi p – to je „najdesniji“ čvor u njegovom levom podstablu
 - vežemo r na mesto p ; pošto r neposredno prethodi p po vrednosti ključa, svi elementi u desnom podstablu od p su veći od r i svi elementi u levom podstablu od p su manji od r
 - treba još obrisati stari r – pošto je to „najdesniji“ element, on nema desno dete, pa se može obrisati po prethodnom algoritmu

Uklanjanje iz stabla

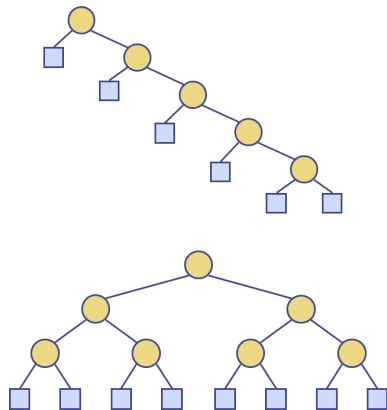
- ako p ima **dva** deteta
- primer: uklanjamo 88



Performanse binarnog stabla pretrage

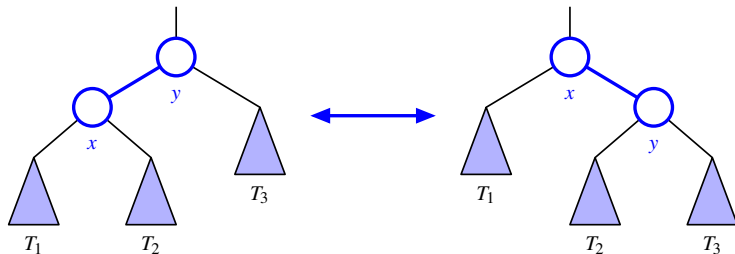
- zauzeće memorije je $O(n)$
- pretraga, dodavanje i uklanjanje su $O(h)$
- visina stabla h je $O(\log n) \leq h \leq O(n)$

- balansirano stablo ima bolje performanse



Balansiranje binarnog stabla

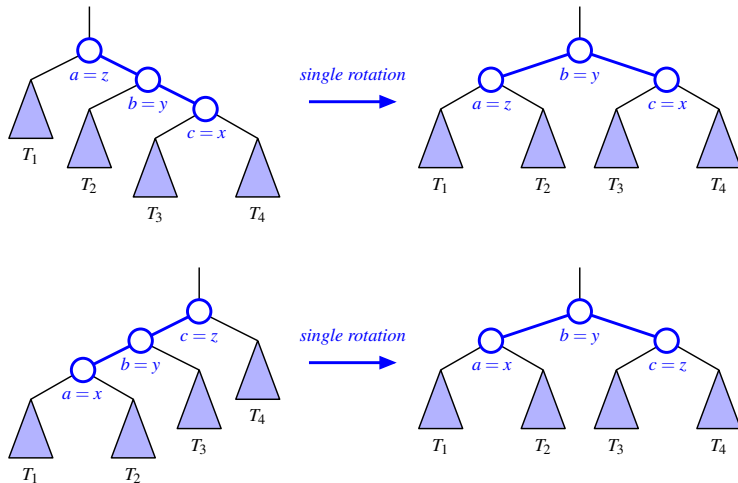
- osnovna operacija za balansiranje je **rotacija**
- „rotiramo“ dete i njegovog roditelja
- tom prilikom i podstabla menjaju mesta
- jedna rotacija traje $O(1)$



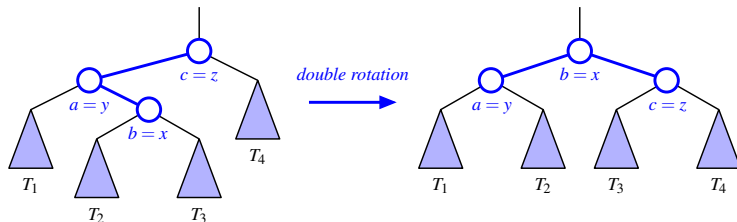
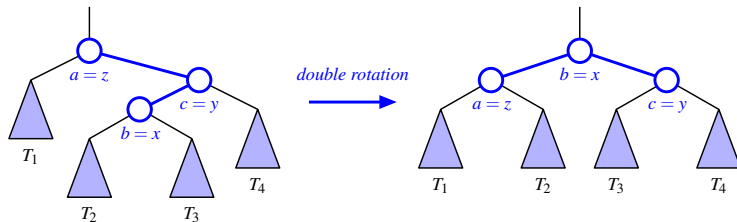
Balansiranje binarnog stabla

- kompozitna operacija „**restrukturiranje tri čvora**“ (tri-node restructuring)
- posmatraju se čvor, njegovo dete i unuče
- cilj je da se skрати putanja od čvora do unučeta
- četiri moguća rasporeda čvorova
 - prva dva traže jednu rotaciju
 - druga dva traže dve rotacije

Restrukturiranje sa jednom rotacijom

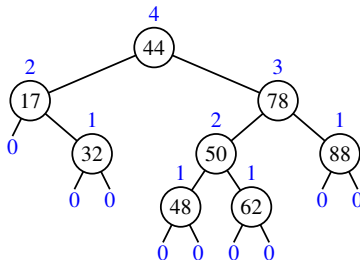


Restrukturiranje sa dve rotacije



AVL stablo

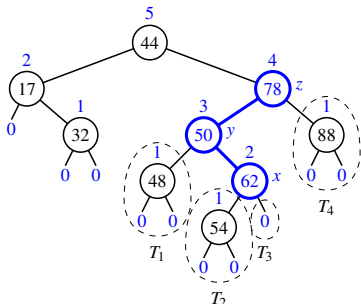
- autori: G.M. **Adelson-Velskii** i E. **Landis**
- visina podstabla: broj čvorova na najdužoj putanji od korena do lista
- visina čvora = visina podstabla sa njim kao korenom
- **AVL stablo** je binarno stablo koje ima dodatnu osobinu:
 - za svaki čvor u stablu, visine njegove dece razlikuju se najviše za 1
- visina AVL stabla sa n čvorova je $O(\log n)$



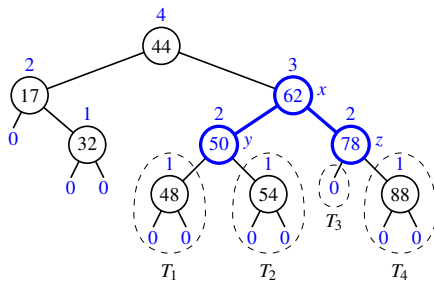
AVL stablo: dodavanje

- stablo u koje dodajemo novi čvor je AVL stablo
- dodavanje se vrši isto kao kod binarnog stabla – u list
- dodavanje može da naruši balansiranost
- čvorovi koji mogu biti disbalansirani su samo preci novog čvora
- primer: dodajemo čvor 54

pre balansiranja

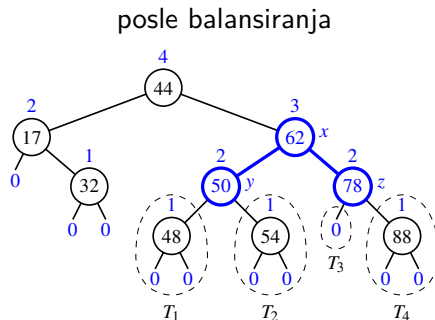
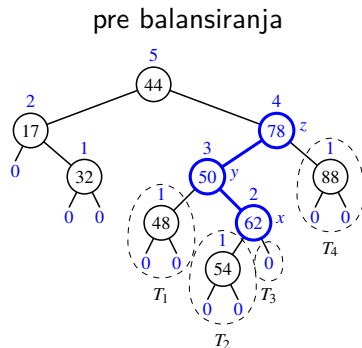


posle balansiranja

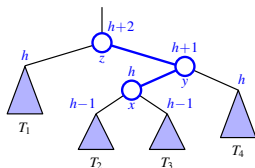


AVL stablo: dodavanje

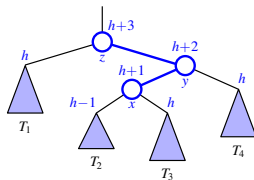
- „search-and-repair“ strategija
- z – prvi nebalansirani čvor polazeći od p na koji smo naišli
- radimo **trinode restructuring** za z



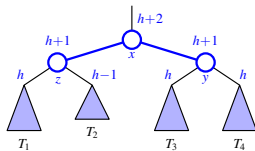
AVL stablo: dodavanje



pre dodavanja:



dodavanje u T_3 remeti balans u z :

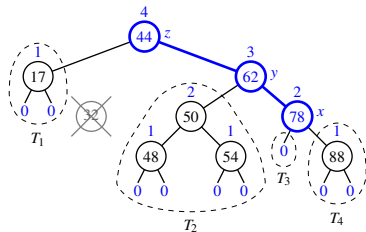


nakon restrukturiranja:

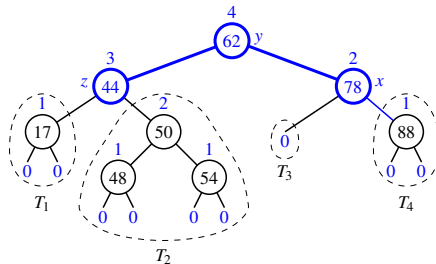
AVL stablo: uklanjanje

- uklanjanjem se može narušiti balans AVL stabla
- i ovde radimo restrukturiranje posle uklanjanja
- primer: uklanjamo 32

pre balansiranja, koren nije balansiran



posle balansiranja (jedna rotacija)



AVL stablo: performanse

- jedno restrukturiranje je $O(1)$
- pretraga je $O(\log n)$ – visina stabla je $O(\log n)$
- dodavanje je $O(\log n)$
 - pronalaženje mesta je $O(\log n)$
 - restrukturiranje uz stablo je $O(\log n)$
- uklanjanje je $O(\log n)$
 - pronalaženje mesta je $O(\log n)$
 - restrukturiranje uz stablo je $O(\log n)$

Splay stablo

- **splay**: „rašireno“
- ne nameće logaritamsko ograničenje na visinu
- **splaying**: „širenje“ stabla prilikom dodavanja, uklanjanja i **pretrage**
- ideja: da češće korišćeni elementi budu bliže korenu

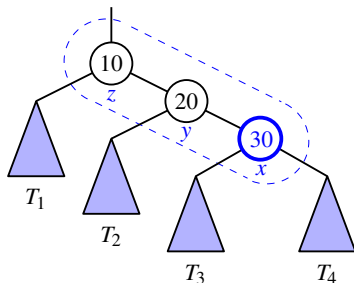
Splaying

- čvor x se premešta u koren nizom restrukturiranja
- operacije restrukturiranja zavise od položaja x , y (roditelja) i z (dede, ako postoji)
- postoje tri slučaja:
 - zig-zig
 - zig-zag
 - zig

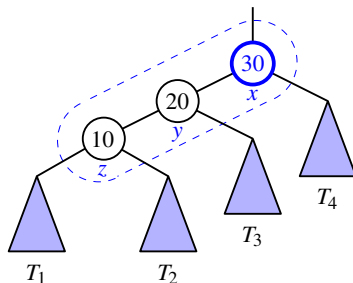
Splaying: zig-zig

- x i y su
 - obojica levo dete svog roditelja ili
 - obojica desno dete svog roditelja
- x postaje koren, y njegovo dete, z njegovo unuče

pre zig-zig

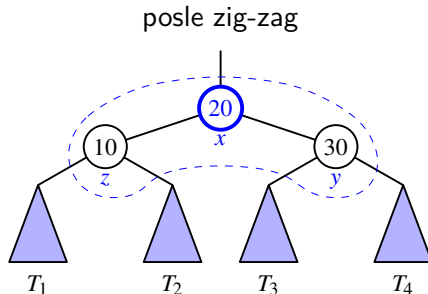
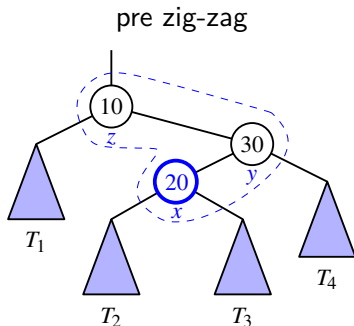


posle zig-zig



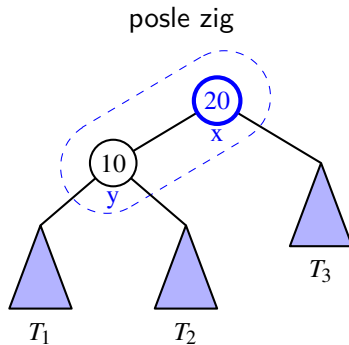
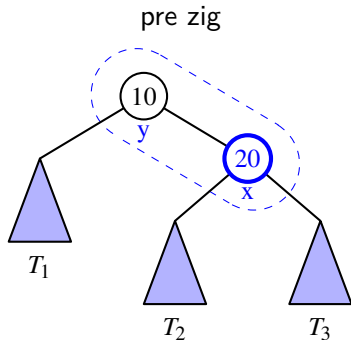
Splaying: zig-zag

- x i y
 - prvi je levo dete a drugi je desno dete, ili
 - prvi je desno dete a drugi je levo dete
- x postaje koren, y i z njegova deca



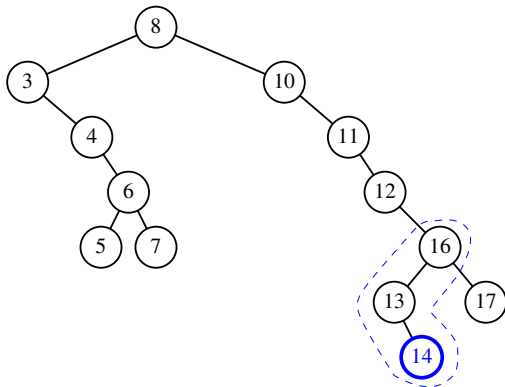
Splaying: zig

- x ima roditelja y ali nema dedu z :
- x postaje koren, y njegovo dete



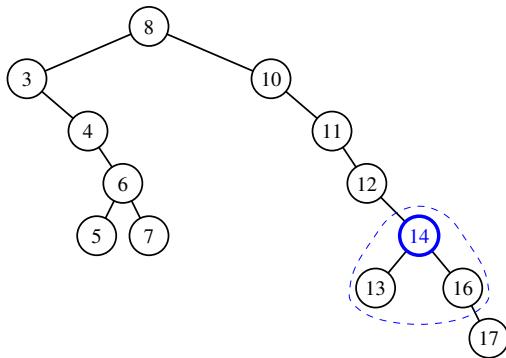
Splaying: primer ₁

- zig-zig, zig-zag i zig primenjujemo sve dok x ne postane koren
- primer: dodajemo 14
- na 14 se primenjuje zig-zag (jer 14 je desno dete a 13 je levo dete)



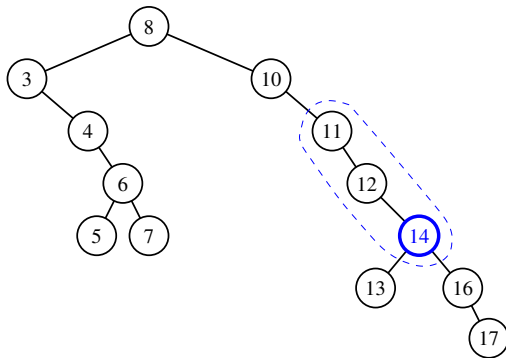
Splaying: primer ₂

- posle primenjenog zig-zag stanje je



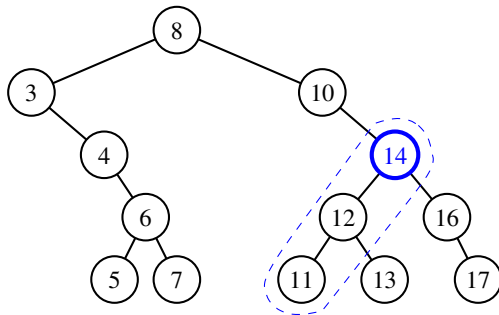
Splaying: primer ₃

- sada može da se primeni zig-zig



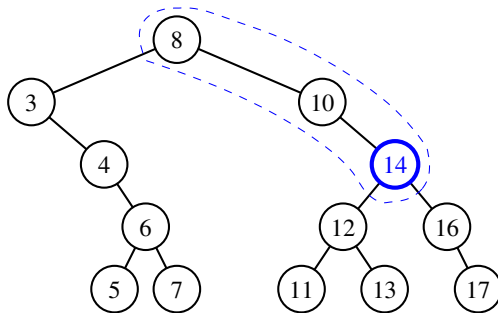
Splaying: primer ₄

- nakon primene zig-zig



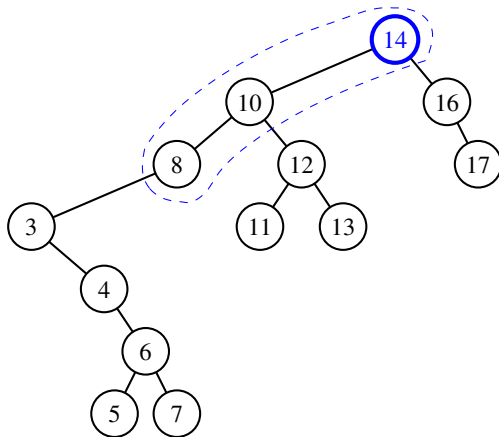
Splaying: primer 5

- sada može ponovo zig-zig



Splaying: primer ₆

- nakon drugog zig-zig



Splay stablo: performanse

- zig-zig, zig-zag i zig su $O(1)$
- splaying čvora p je $O(d)$ gde je d dubina čvora p
- tj. isto koliko je potrebno i za navigaciju od korena do p

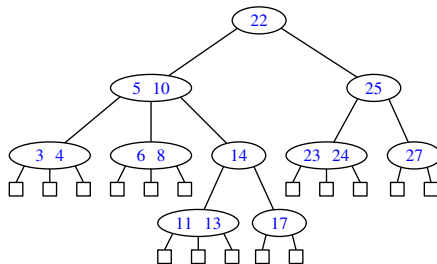
- u najgorem slučaju, pretraga, dodavanje i uklanjanje su $O(h)$ gde je h visina stabla
- stablo nije balansirano \Rightarrow može biti $h = n$
- \Rightarrow slabe performanse u najgorem slučaju

Splay stablo: performanse

- za **amortizovane** operacije vreme je $O(\log n)$
- a za često tražene podatke pretraga je i **brža od** $O(\log n)$

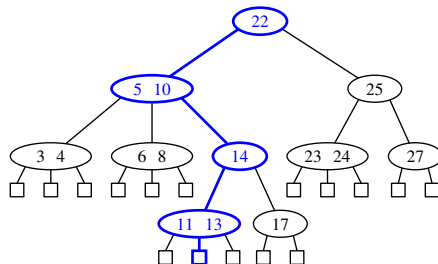
n-arno stablo

- neka je w čvor stabla; ako w ima d dece zovemo ga d -čvor
- **n-arno stablo pretrage** ima sledeće osobine:
 - svaki unutrašnji čvor ima bar dva deteta, tj. svaki je d -čvor za $d \geq 2$
 - svaki unutrašnji d -čvor sa decom c_1, c_2, \dots, c_d čuva $d - 1$ parova $(k_1, v_1), \dots, (k_{d-1}, v_{d-1})$
 - za $k_0 = -\infty, k_d = +\infty$ važi: za svaki element (k, v) iz podstabla od w kome je koren c_i važi da je $k_{i-1} \leq k \leq k_i$



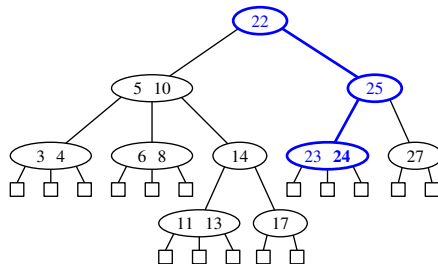
Pretraga u n-arnom stablu

- tražimo ključ k polazeći od korena
- u čvoru w poredimo k sa ključevima k_1, \dots, k_{d-1}
 - ako je $k = k_i$ za neko $1 \leq i \leq d-1$ pronašli smo ključ
 - inače nastavljamo pretragu od deteta c_i tako da je $k_{i-1} < k < k_i$
- ako smo došli do lista pretraga je neuspešna
- primer: tražimo $k = 12$ (neuspešna)



Pretraga u n-arnom stablu

- primer: tražimo $k = 24$ (uspešna)

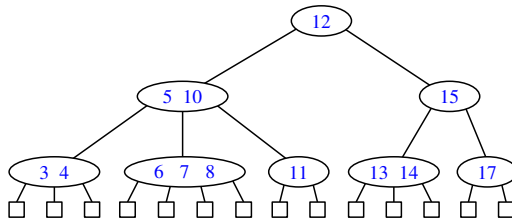


Pretraga u n-arnom stablu

- pretraga unutar čvora?
- treba nam **sekundarna struktura podataka**
 - binarna pretraga po nizu je $O(\log d)$
 - sortirana mapa
- pretraga u stablu je $O(h \log d_{\max})$

(2,4) stablo

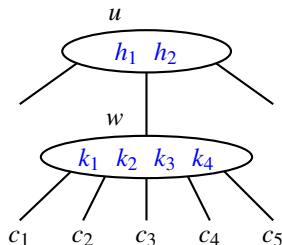
- (2,4) stablo je n -arno stablo sa dve osobine
 - unutrašnji čvor ima najviše 4 deteta
 - svi listovi imaju istu dubinu



- svaki čvor ima 2, 3 ili 4 deteta
- visina stabla od n elemenata je $O(\log n)$

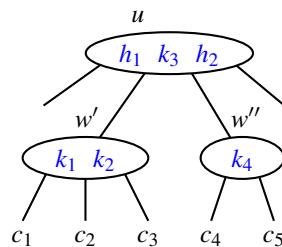
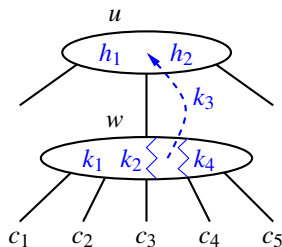
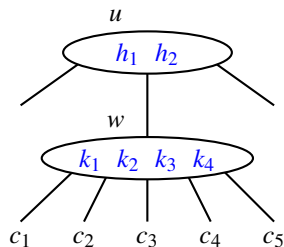
(2,4) stablo: dodavanje

- prvo tražimo ključ k
- neuspešna pretraga se završava u listu
- dodamo k u roditelja w tog lista
- (**prelivanje**, **overflow**): ako je taj roditelj bio 4-čvor, sada je 5-čvor; moramo ga podeliti (**split**):



(2,4) stablo: dodavanje

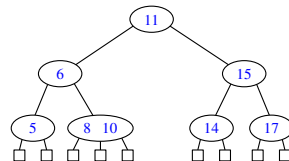
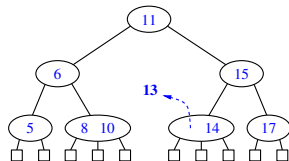
- podela čvora w prilikom preliivanja na w' i w''
- w' je 3-čvor sa decom c_1, c_2, c_3 i ključevima k_1, k_2
- w'' je 2-čvor sa decom c_4, c_5 i ključem k_4
- ključ k_3 se penje u roditelja od w ; ako je w koren, napravi novi čvor



podela može biti kaskadna!

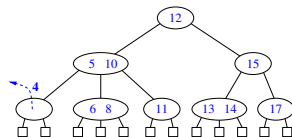
(2,4) stablo: uklanjanje

- prvi slučaj: uklanjanjem ključa ne narušavaju se osobine (2,4) stabla
- primer: uklanjamo 13

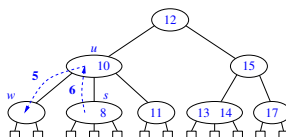


(2,4) stablo: uklanjanje

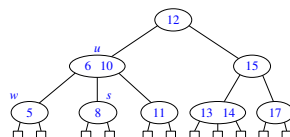
- drugi slučaj: uklanjanje iz w izaziva **underflow**
- da li je jedan od najbliže braće 3-čvor ili 4-čvor?
- radimo **transfer**:
 - premeštamo ključ iz brata u roditelja
 - ključ iz roditelja u w
- primer: uklanjamo 4



uklanjamo 4



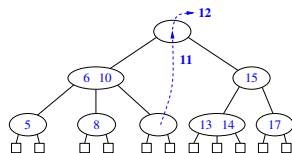
transfer



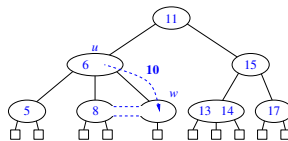
rezultat

(2,4) stablo: uklanjanje

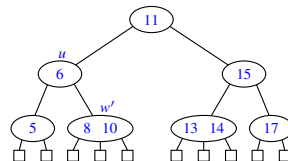
- treći slučaj: uklanjanje izaziva **underflow**
- nijedan od najbliže braće nije 3-čvor ili 4-čvor
- radimo **fuziju**:
 - spajamo w sa bratom
 - ključ iz roditelja spuštamo u spojeni čvor
- primer: uklanjamo 12



uklanjamo 12



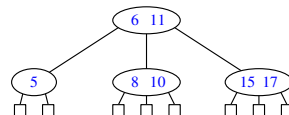
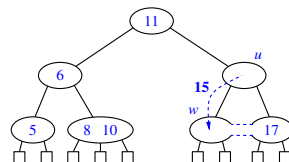
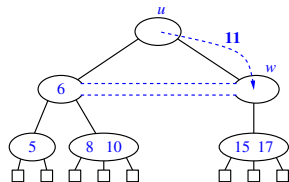
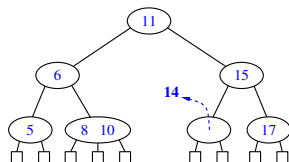
fuzija



rezultat

(2,4) stablo: uklanjanje

- fuzija može da propagira underflow
- ako se koren isprazni fuzijom, prosto se obriše



(2,4) stablo: primer dodavanja

- **53**, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- stablo je inicijalno prazno, kreiramo koren i dodajemo prvi ključ u njega

53

(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, **97**, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- 97 dodajemo u koren, ima mesta

53	97
----	----

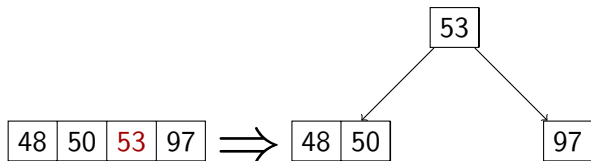
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, **50**, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- 50 dodajemo u koren, ima mesta

50	53	97
----	----	----

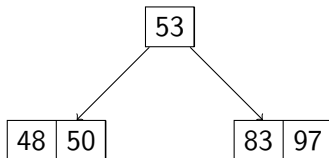
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, **48**, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- 48 dodajemo u koren, imamo prelivanje



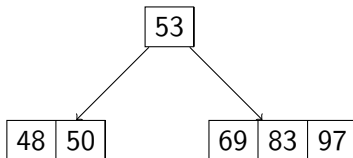
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, **83**, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- nakon prelivanja dodajemo 83, ima mesta



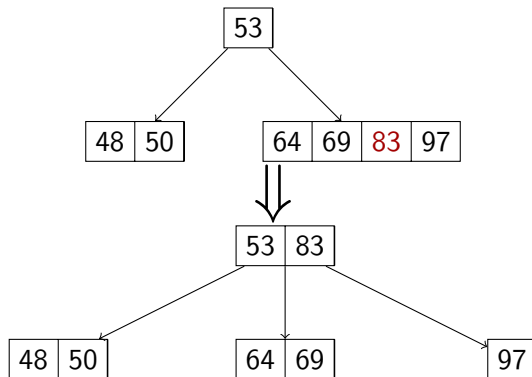
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, **69**, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 69, ima mesta



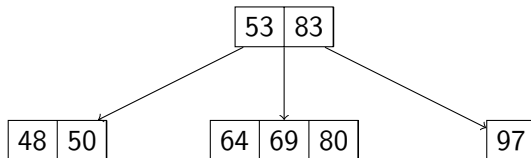
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, **64**, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 64, imamo prelivanje, 83 se penje u roditelja



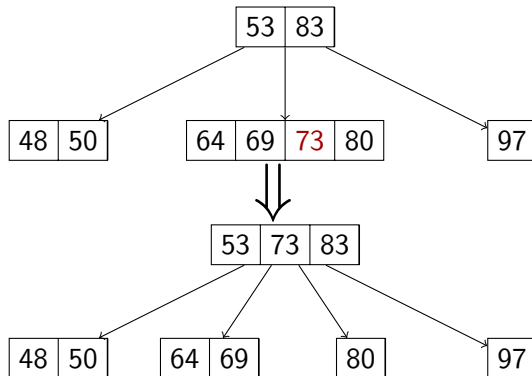
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, **80**, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 80, ima mesta



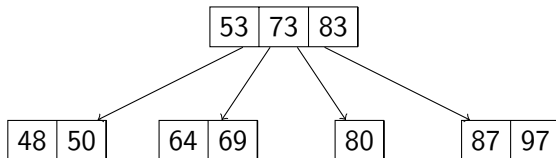
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, **73**, 87, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 73, imamo prelivanje, 73 se penje u roditelja, tamo ima mesta



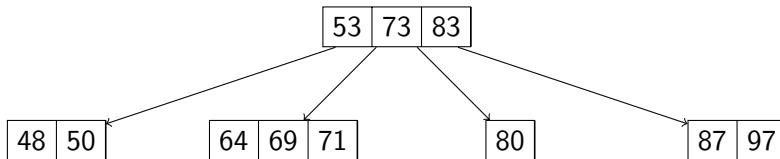
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, **87**, 71, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 87, ima mesta



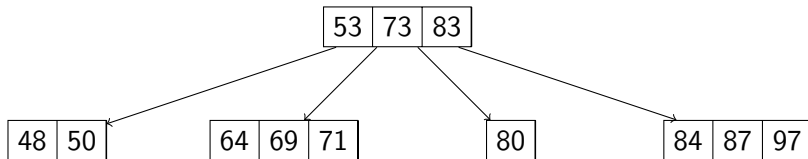
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, **71**, 84, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 71, ima mesta



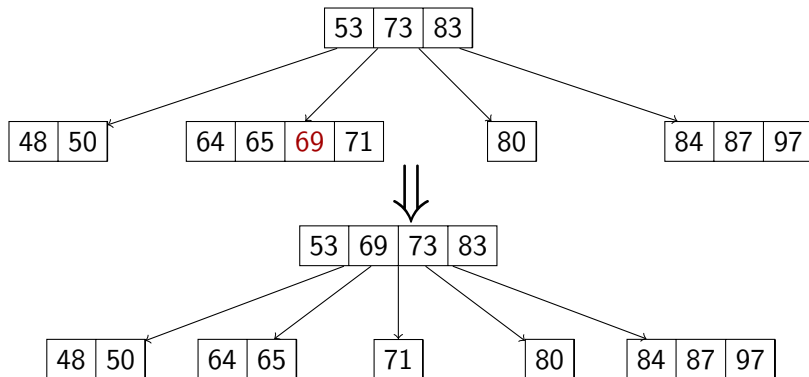
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, **84**, 65, 44, 18, 88
- dodajemo 84, ima mesta



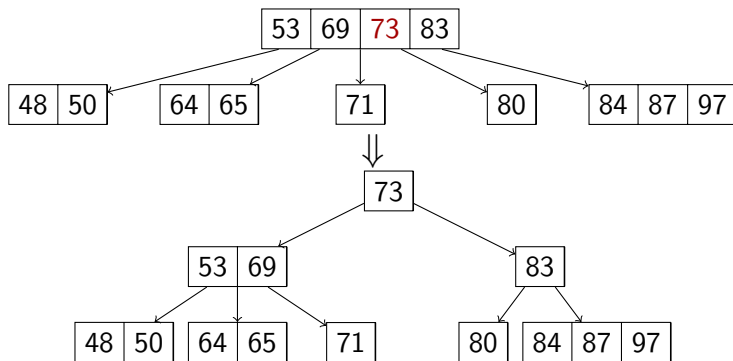
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, **65**, 44, 18, 88
- dodajemo 65, imamo preliivanje, 69 penjemo u roditelja



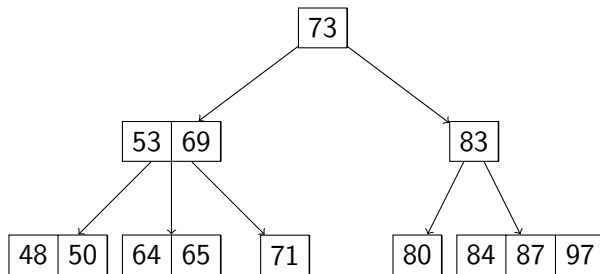
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, **65**, 44, 18, 88
- sada u korenu imamo prelivanje i pravimo novi koren



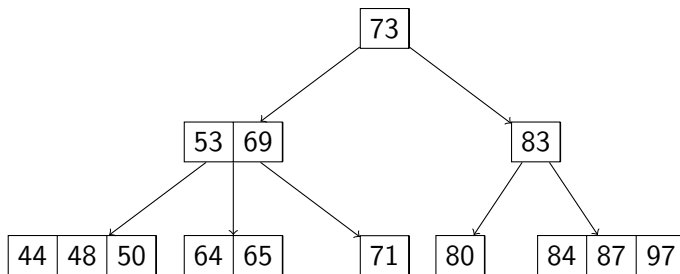
(2,4) stablo: primer dodavanja

- (2,4) stablo povećava broj nivoa kada se desi prelivanje u korenu
- raste „iz korena“ umesto „kroz listove“
- u prethodnom koraku je 73 postao novi koren nakon prelivanja



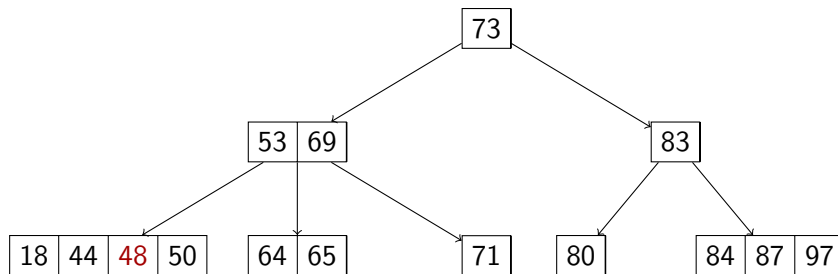
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, **44**, 18, 88
- dodajemo 44, ima mesta



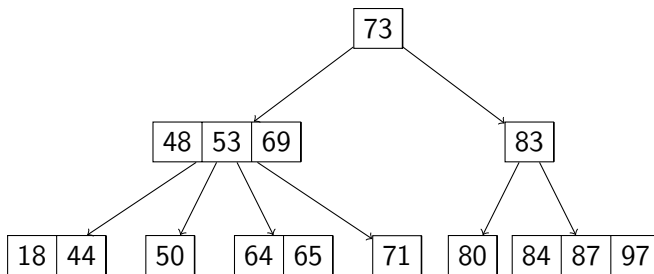
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, **18**, 88
- dodajemo 18, imamo preliivanje, 48 ide u roditelja



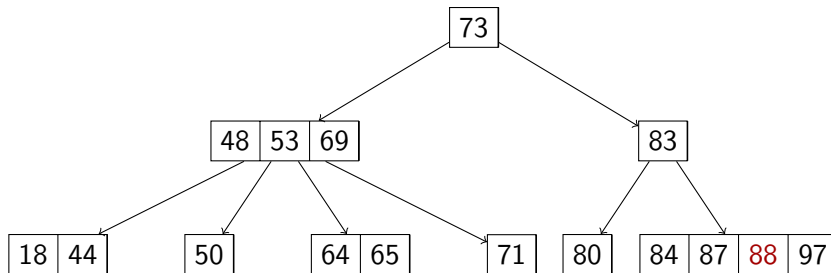
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, **18**, 88
- nakon prelivanja



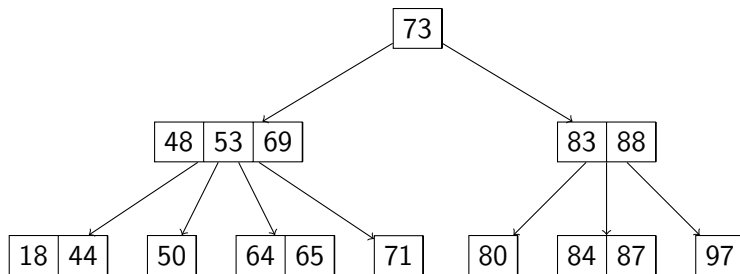
(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, **88**
- dodajemo 88, imamo prelivanje, 88 ide u roditelja



(2,4) stablo: primer dodavanja

- 53, 97, 50, 48, 83, 69, 64, 80, 73, 87, 71, 84, 65, 44, 18, **88**
- nakon prelivanja



(2,4) stablo: performanse

- **dodavanje** u (2,4) stablu sa n elemenata
 - visina stabla je $O(\log n)$
 - traženje ključa je $O(\log n)$
 - dodavanje novog ključa u čvor je $O(1)$
 - svaka podela čvora je $O(1)$
 - ukupan broj podela je $O(\log n)$
- \Rightarrow dodavanje je $O(\log n)$

(2,4) stablo: performanse

- **uklanjanje** u (2,4) stablu sa n elemenata
 - visina stabla je $O(\log n)$
 - traženje ključa je $O(\log n)$
 - uklanjanje ključa je $O(1)$
 - može da usledi $O(\log n)$ iza kojih je max 1 transfer
 - fuzija i transfer su $O(1)$
- \Rightarrow uklanjanje je $O(\log n)$