(Matematika pro bakalářské studium na VŠE, Jindřich Klůfa - 2. Základy lineární algebry, 2.1. Aritmetické vektory a matice)

Marcel Štolc

Lineární kombinace

strana 30, cvičení 2. – Matematika pro bakalářské studium na VŠE, Jindřich Klůfa

c.)

Vyjádřete x jako lineární kombinaci x_1, x_2, x_3

$$x = (8, 3, 2),\ x_1 = (4, 1, 1),\ x_2 = (1, 1, -1),\ x_3 = (2, 0, 3)$$

- hledejme a, b, c splňující soustavu ve tvaru:

$$a\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\2\end{pmatrix}$$

- soustava rovnic

$$4a + b + 2c = 8$$

$$a + b = 3$$

$$a - b + 3c = 2$$

- maticový přepis

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\\2\end{pmatrix}$$

- rozšířená matice soustavy a její řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 2 & 8\\1 & 1 & 0 & 3\\1 & -1 & 3 & 2\end{array}\right)$$

prohoďme 1. a 2. řádek =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 3\\4 & 1 & 2 & 8\\1 & -1 & 3 & 2\end{array}\right)$$

(-4)×(1. řádek) + (2. řádek), (-1)×(1. řádek) + (3. řádek) =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 3\\0 & -3 & 2 & -4\\0 & -2 & 3 & -1\end{array}\right)$$

(-$\frac{2}{3}$)×(2. řádek) + (3. řádek) =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 3\\0 & -3 & 2 & -4\\0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3}\end{array}\right)$$

Výsledek

$$a = c = 1,\ b = 2$$

Výpočet hodnosti matice

strana 31, cvičení 4. – Matematika pro bakalářské studium na VŠE, Jindřich Klůfa

i.)

Určitě hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(-2)×(1. řádek) + (2. řádek), (-2)×(1. řádek) + (3. řádek), (-1)×(1. řádek) + (4. řádek) =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

prohoďme 2. a 4. řádek =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

(-1)×(2. řádek) + (4. řádek) =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)\times(3.\ \text{řádek}) + (4.\ \text{řádek}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek

Hodnost matice je 3

strana 31, cvičení 5. – Matematika pro bakalářské studium na VŠE, Jindřich Klůfa

g.)

Určitě hodnost matice vzhledem k reálnému parametru ξ

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \xi \\ 1 & \xi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & \xi \\ 1 & \xi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{prohoďme 1. a 3. řádek} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \xi & 1 \\ 2 & 2 & \xi \end{pmatrix}$$

$$(-1)\times(1.\ \text{řádek}) + (2.\ \text{řádek}),\ (-2)\times(1.\ \text{řádek}) + (3.\ \text{řádek}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \xi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi - 2 \end{pmatrix}$$

Výsledek

Pokud $\xi = 2$ nebo $\xi = 1$ je hodnost matice 2, jinak je hodnost matice 3

Stanovení lineární závislosti

strana 31, cvičení 6. – Matematika pro bakalářské studium na VŠE, Jindřich Klůfa

c.)

Pomocí hodnosti matice jistě, zda jsou vektory lineárně závislé nebo lineární nezávislé

$$x_1 = (1,0,2,3),\ x_2 = (-1,1,0,5),\ x_3 = (2,3,7,1)$$

- hledejme a, b, c splňující soustavu ve tvaru:

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\5\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\3\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- maticový přepis

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 3\\2 & 0 & 7\\3 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- rozšířená matice soustavy a její řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\2 & 0 & 7 & 0\\3 & 5 & 1 & 0\end{array}\right)$$

(-2)×(1. řádek) + (3. řádek), (-3)×(1. řádek) + (4. řádek) =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\0 & 2 & 3 & 0\\0 & 8 & -5 & 0\end{array}\right)$$

(-2)×(2. řádek) + (3. řádek), (-8)×(2. řádek) + (4. řádek) =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & -29 & 0\end{array}\right)$$

$(-\frac{29}{3})$×(3. řádek) + (4. řádek) =

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Výsledek

$$a = b = c = 0,$$

vektory x_1, x_2, x_3, jsou lineární nezávislé

a.)

Pomocí hodnosti matice určitě, pro které ξ a η jsou vektory lineárně závislé nebo lineárně závislé

$$x_1 = (4,0,2,2),\ x_2 = (\xi,1,3,\eta),\ x_3 = (2,0,1,1), x_4 = (1,\xi,0,2)$$

- hledejme a, b, c, d splňující soustavu ve tvaru:

$$a\begin{pmatrix}4\\0\\2\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\xi\\1\\3\\\eta\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\\xi\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- maticový přepis

$$\begin{pmatrix}4 & \xi & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & \xi\\2 & 3 & 1 & 0\\2 & \eta & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- rozšířená matice soustavy a její řešení by vedly ke komplikované řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & \xi & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & \xi & 0\\2 & 3 & 1 & 0 & 0\\2 & \eta & 1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

- úlohu lze řešit pomocí hodnosti matice, je nutné si uvědomit, že hodnost matice je rovna hodnosti transponované matice

$$h(\begin{pmatrix}4 & \xi & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & \xi\\2 & 3 & 1 & 0\\2 & \eta & 1 & 2\end{pmatrix}) = h(\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 2\\\xi & 1 & 3 & \eta\\2 & 0 & 1 & 1\\1 & \xi & 0 & 2\end{pmatrix})$$

- určeme hodnost transponované matice - pokud je rovná počtu parametrů, které hledáme, vektory jsou lineární nezávislé; pokud je menší než počet parametrů, které hledáme, vektory jsou lineární závislé

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & 2 & 2\\\xi & 1 & 3 & \eta\\2 & 0 & 1 & 1\\1 & \xi & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$(-\frac{1}{2})\times$(1. řádek) + (3. řádek)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ \xi & 1 & 3 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

prohoďme 2. a 4 řádek, pak 3. a 4. řádek

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \xi & 0 & 2 \\ \xi & 1 & 3 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek

Vektory x_1, x_2, x_3, x_4 jsou lineárně závislé pro ξ, $\eta \in R$

Symboly

- h() - hodnost