

Notes pour les leçon de physique

Table des matières

LP1 : Gravitation	8
1 Références	8
1.1 Bibliographie	8
1.2 Expériences	8
2 Notes	8
2.1 Champ de gravité	9
2.2 Dynamique terrestre	10
2.3 Dynamique du système solaire	12
LP2 : Loi de conservation en dynamique	13
3 Références	13
3.1 Bibliographie	13
3.2 Expériences	13
4 Notes	13
4.1 Loi de conservation	13
4.2 Application aux collisions	15
4.3 Expérience de Rutherford	15
LP3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux	18
5 Références	18
5.1 Bibliographie	18
5.2 Expériences	18
6 Notes	18
6.1 Notion de viscosité	19
6.2 Écoulement de Poiseuille	20
LP4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide	24
7 Références	24
7.1 Bibliographie	24
7.2 Expériences	24

8	Notes	24
8.1	Dynamique d'un écoulement parfait	25
8.2	Écoulements permanents	27
 LP5 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides		30
9	Références	30
9.1	Bibliographie	30
9.2	Expériences	30
10	Notes	30
10.1	Tension superficielle	30
10.2	Interfaces statiques	32
 LP6 : Premier principe de la thermodynamique		35
11	Références	35
11.1	Bibliographie	35
11.2	Expériences	35
12	Notes	35
12.1	Énergie d'un système	35
12.2	Expérience de Joule	36
12.3	Premier principe	37
12.4	Applications	38
 LP7 : Transition de phase		40
13	Références	40
13.1	Bibliographie	40
13.2	Expériences	40
14	Notes	41
14.1	Transition de phase continue	41
14.2	Transition de phase discontinue	43
 LP8 : Phénomènes de transport		46
15	Références	46
15.1	Bibliographie	46
15.2	Expériences	46
16	Notes	46
16.1	Processus irréversibles	47
16.2	Transport diffusif	48

16.3 Transport convectif	50
LP9 : Conversion de puissance électromécanique	52
17 Références	52
17.1 Bibliographie	52
17.2 Expériences	52
18 Notes	52
18.1 Principes de la conversion	53
18.2 Principe d'une machine synchrone	54
18.3 Machine synchrone réelle	55
LP10 : Induction électromagnétique	59
19 Références	59
19.1 Bibliographie	59
19.2 Expériences	59
20 Notes	59
20.1 Loi de l'induction	60
20.2 Cas d'un circuit immobile dans un champ variable	61
20.3 Circuit mobile dans un champ stationnaire	61
LP11 : Rétroaction et oscillations	63
21 Références	63
21.1 Bibliographie	63
21.2 Expériences	63
22 Notes	63
22.1 Système bouclé	64
22.2 Stabilité d'un système linéaire	65
22.3 Oscillateurs	68
LP 12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale	70
23 Références	70
23.1 Bibliographie	70
23.2 Expériences	70
24 Notes	70
24.1 Analyse spectrale	71
24.2 Filtrage analogique	72
24.3 Signaux numériques	74

LP13 : Ondes progressives, ondes stationnaires	76
25 Références	76
25.1 Bibliographie	76
25.2 Expériences	76
26 Notes	76
26.1 Propagation d'une onde	76
26.2 Solutions progressives	78
26.3 Solutions stationnaires	79
LP14 : Ondes acoustiques	82
27 Références	82
27.1 Bibliographie	82
27.2 Expériences	82
28 Notes	82
28.1 Propagation dans un fluide	82
28.2 Aspects énergétique	85
28.3 Validité des approximations	85
LP15 : Propagation guidée des ondes	87
29 Références	87
29.1 Bibliographie	87
29.2 Expériences	87
30 Notes	87
30.1 Ondes acoustiques dans un guide rectangulaire	88
30.2 Dispersion acoustique dans un guide cylindrique	90
30.3 Ondes électromagnétiques	91
LP16 : Microscopies optiques	93
31 Références	93
31.1 Bibliographie	93
31.2 Expériences	93
32 Notes	93
32.1 Microscope composé	93
32.2 Contraste et résolution	94
32.3 Microscope à contraste de phase	96
LP17 : Interférences à deux ondes en optique	97

33 Références	97
33.1 Bibliographie	97
33.2 Expériences	97
34 Notes	97
34.1 Superposition de deux ondes lumineuses	98
34.2 Figure d'interférence	99
34.3 Trous d'Young	99
 LP18 : Interférences à division d'amplitude	 101
35 Références	101
35.1 Bibliographie	101
35.2 Expériences	101
36 Notes	101
36.1 L'interféromètre de Michelson	102
36.2 Applications	103
 LP19 : Diffraction de Fraunhofer	 105
37 Références	105
37.1 Bibliographie	105
37.2 Expériences	105
38 Notes	105
38.1 Phénomène de diffraction optique	105
38.2 Diffraction d'une fente rectangulaire	107
38.3 Diffraction par une ouverture circulaire	107
 LP20 : Diffraction par des structures périodiques	 109
39 Références	109
39.1 Bibliographie	109
39.2 Expériences	109
40 Notes	109
40.1 Diffraction par un réseau	110
40.2 Diffraction par un cristal	112
 LP21 : Absorption et émission de la lumière	 113
41 Références	113
41.1 Bibliographie	113
41.2 Expériences	113

42 Notes	113
42.1 Phénomènes d'absorption et d'émission	114
42.2 Absorption et émission de photon	114
42.3 Laser	116
 LP22 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques	 118
43 Références	118
43.1 Bibliographie	118
43.2 Expériences	118
44 Notes	118
44.1 Milieu ferromagnétique	119
44.2 Application : le transformateur	120
44.3 Milieu doux, milieu dur	121
 LP23 : Mécanismes de la conduction électriques dans les solides	 123
45 Références	123
45.1 Bibliographie	123
45.2 Expériences	123
46 Notes	123
46.1 Gaz d'électrons libres classique	124
46.2 Gaz d'électrons libres quantique	125
46.3 Gaz d'électrons quasi-libres	127
 LP24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique	 129
47 Références	129
47.1 Bibliographie	129
47.2 Expériences	129
48 Notes	129
48.1 Oscillateur harmonique amorti en régime forcé	130
48.2 Caractérisation de la résonance d'un RLC	131
48.3 Cavité optique	132
 LP25 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités	 134
49 Références	134
49.1 Bibliographie	134
49.2 Expériences	134
50 Notes	134

50.1 Oscillateurs linéaires	135
50.2 Oscillateurs non-linéaires	136
LP26 : Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley.	140
51 Références	140
51.1 Bibliographie	140
51.2 Expériences	140
52 Notes	140
52.1 Principe de relativité	140
52.2 Changement de référentiel relativiste	142
52.3 Conséquences physiques	144
LP27 : Effet tunnel ; radioactivité alpha.	148
53 Références	148
53.1 Bibliographie	148
53.2 Expériences	148
54 Notes	148
54.1 Effet tunnel	149
54.2 Radioactivité alpha	152

LP1 : Gravitation

1 Références

1.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1 PC/PC**, Dunod
- *Mécanique : fondements et applications*, J.-P. Pérez
- *Mécanique classique*, Goldstein
- *Mécanique*, Landau

1.2 Expériences

1.2.1 Mesure de g avec un pendule pesant

Matériel :

- 1 pendule pesant
- 1 module sysam pour interfacier le pendule
- les câbles pour alimenter le module et le brancher sur un PC

Remarques : Bien discuter de pourquoi on peut considérer le pendule comme simple, avec une erreur faible si la masse du pendule pesant est grande devant celle du tube rigide

2 Notes

Niveau : Licence

Pré-requis :

- électrostatique,
- mécanique du point,
- potentiel central,
- référentiel non-galiléen
- transformée de Fourier

Introduction

Newton a introduit la force de pesanteur en 1687 pour expliquer la mécanique céleste → [slide historique Newton](#)

Définition force gravitationnelle :

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u} = m_1 \mathbf{\Gamma}$$

où le champ de gravité $\mathbf{\Gamma}$ est introduit par analogie avec la force de Coulomb et le champ électrique :

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{u} = q_1 \mathbf{E}$$

2min

2.1 Champ de gravité

2.1.1 Équation du champ

Analogie avec l'électrostatique, on remplace $1/4\pi\epsilon_0$ par $-G$ pour trouver les équations du champs de gravité

Électrique	Gravité
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = -4\pi\rho_m$
$\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\nabla \wedge \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$
$\mathbf{E} = -\nabla\phi_e$	$\mathbf{\Gamma} = -\nabla\Phi$
$\mathcal{E}_{elec} = q\phi_e$	$\mathcal{E}_{grav} = m\Phi$

La masse joue le rôle de “charge” de gravité

On a les même équations linéaires que pour le champ électrique, on a donc aussi un principe de superposition des solutions \rightarrow très pratique pour simplifier la résolution de problèmes complexes !

4min

Comme en électrostatique on a un théorème de Gauss gravitationnel :

$$\iint_{\Sigma} d^2x \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = \iiint_V d^3x (-4\pi G)\rho_m = -4\pi G M_{int}$$

Pour une boule uniforme on retrouve la solution en $1/r^2$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}(r) &= -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r \\ \mathbf{F}(r) &= m\mathbf{\Gamma}(r) = -G\frac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r\end{aligned}$$

7 min

2.1.2 Différence avec l'électrostatique

Les charges électriques peuvent être positives ou négatives (phénomène d'écrantage avec formation de systèmes neutres), tandis que les masses sont uniquement positives (accumulation des effets).

La force gravitationnelle est toujours attractive, alors que la force électrostatique peut être répulsives.

La gravité finit par dominer, notamment aux échelles macroscopiques (\gtrsim m).

On va regarder l'énergie

— d'un objet de 1 kg à la surface de la Terre : $|m\Phi| = \frac{GM_T}{R_T}$

— d'une mole de charge à un rayon terrestre d'une autre mole de charge : $|q\phi_e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_T} (\mathcal{N}_a e)^2$

Si on compare les deux termes

$$\frac{|m\Phi|}{|q\phi_e|} \sim GM_T \frac{4\pi\epsilon_0}{(\mathcal{N}_a e)^2} \sim 7.10^{-11} \cdot 2.10^{30} \frac{12 \cdot 9.10^{-12}}{40.10^{46} \cdot 4.10^{-38}} \sim 10^{20} \cdot \frac{100.10^{-12}}{160.10^8} \sim 1$$

Sachant qu'une mole d'eau ça représente un dé à coudre : la force électrostatique est beaucoup plus forte. Mais à cause de l'écrantage sur Terre on ne la ressent pas, contrairement aux forces de gravitation. On va maintenant s'intéresser à la description de cette force sur Terre.

12 min

2.2 Dynamique terrestre

2.2.1 Champ de pesanteur terrestre

→ Slide de présentation du référentiel héliocentrique \mathcal{S} et du référentiel terrestre \mathcal{T} avec les conventions des axes et angles

On fait trois hypothèses :

— $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$ (pas d'inclinaison)

— $\frac{d\Omega}{dt} = \mathbf{0}$ (rotation constante)

— Terre sphérique $\Rightarrow \Phi_T = -\frac{GM_T}{r}$ (pas d'aplatissement à l'équateur)

→ Slide avec rappel expression accélération dans référentiel non-galiléen Étude du mouvement d'un point M à la surface de la Terre :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathcal{T}}(M) &= \mathbf{\Gamma}_T(M) + \mathbf{\Gamma}_a - \mathbf{a}_{ie} - \mathbf{a}_{ic} \\ \mathbf{a}_{ie} &= \mathbf{a}_{\mathcal{S}}(T) - \Omega^2 \mathbf{HM} \end{aligned}$$

Le terme de Coriolis est négligeable pour des mouvements usuels. OdG :

$$\begin{aligned} \Omega &\sim 7.10^5 \text{ s}^{-1} \\ |\mathbf{HM}| &\sim R_T \sim 3,4.10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

donc pour $v \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$

$$\begin{aligned} |2\Omega \wedge \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(M)| &\sim 10^{-4} \text{ m.s}^{-2} \\ &\ll |\Omega^2 \mathbf{HM}| \sim 3.10^{-2} \text{ m.s}^{-2} \end{aligned}$$

→ on va donc négliger \mathbf{a}_{ie} ici.

Si on effectue le PFD dans le référentiel héliocentrique (considéré galiléen) : $M_T \mathbf{a}_{\mathcal{S}}(T) = M_T \mathbf{\Gamma}_a(T)$, on obtient finalement l'accélération d'un objet à la surface de la Terre :

$$\mathbf{a}_{\mathcal{T}}(M) = \underbrace{\mathbf{\Gamma}_T(M) + \Omega^2 \mathbf{HM}}_{\text{terme de pesanteur } \mathbf{g}} + \underbrace{\mathbf{\Gamma}_a(M) - \mathbf{\Gamma}_a(T)}_{\text{terme de marée}}$$

Définition de l'accélération de pesanteur :

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \mathbf{e}_r + \Omega^2 \mathbf{HM}$$

Au premier ordre, dans le référentiel du laboratoire :

$$\mathbf{g} \simeq -\left(\frac{GM_T}{R_T^2} - \Omega^2 R_T \sin^2 \theta\right) \mathbf{e}_z$$

22min

2.2.2 Mesure de g

Pour un pendule simple dans le cadre des petites oscillations :

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \sin \theta \simeq \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Mesure de la période du pendule en enregistrant sa trajectoire avec synchronie et en regardant sa transformée de fourier $10T = (13,2 \pm 0,1) \text{ s} \Rightarrow T = (1,32 \pm 0,01) \text{ s}$
sachant que $l = (44,5 \pm 0,1) \text{ cm}$, on trouve $g = (10,1 \pm 0,1) \text{ m.s}^{-2}$

Sachant qu'à Paris ($\theta = \pi/2 - 48,51^\circ$) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. → Variation de g de l'équateur aux pôles
29min

2.2.3 Terme de marée (note : peut sauter pour gagner du temps)

Revenons sur le terme de marée

$$\Gamma_a(M) - \Gamma(T) = \sum_p \Gamma_p(M) - \Gamma_p(T)$$

indice p pour "planète" (citation : « Et là dans les planètes, j'inclus le Soleil »)

On peut calculer pour un astre le terme de marée

Schéma pour convention : \mathbf{d} vecteur entre T et centre de la planète p et λ angle entre \mathbf{TM} et \mathbf{d}

$$\Gamma_p(M) - \Gamma_p(T) \simeq \frac{GM_p}{d^3} \left(\mathbf{r} - 3 \cos(\lambda) \frac{\mathbf{d}}{d} r \right)$$

Sur Terre, deux astres vont contribuer principalement (Lune et Soleil) :

$$10^3 \frac{M_S}{d_S^3} \simeq 0,590 \xrightarrow{\times 2,17} 10^3 \frac{M_L}{d_L^3} \simeq 1,29$$

On a deux configurations : morte-eaux (Soleil et Lune perpendiculaire) et vive-eaux (Soleil et Lune aligné) → illustration des marées de vives-eaux et de mortes-eaux

33min30s

Maintenant qu'on a étudié la Terre, on peut étudier le système solaire dans son ensemble.

2.3 Dynamique du système solaire

2.3.1 Modélisation

Comme la masse du Soleil représente 99,85% de la masse du système solaire, on va considérer uniquement le champ gravitationnel généré par le Soleil, modélisé par une distribution de masse sphérique

$$\Phi_S = -\frac{GM_S}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

C'est-à-dire que l'on néglige le mouvement de rotation du soleil et les interactions entre les planètes (la distance entre elle étant grande, hypothèse assez bien vérifiée en général).

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

pour une planète de masse m . On a vu que les solutions sont des trajectoires coniques → **graphe du potentiel central et représentation des coniques**

Ces trajectoires sont caractérisées par :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \phi} \text{ avec } e = \sqrt{\frac{2L^2 E}{m\alpha^2} + 1} \text{ et } p = \frac{L^2}{m\alpha}$$

36min

2.3.2 Loi de Kepler

→ **énoncé des lois de Kepler**

- Première loi : si $E < 0$, trajectoire elliptique dont l'un des foyers est le Soleil. Et $\dot{L} = 0 \Rightarrow$ mouvement plan.
- Seconde loi : si on regarde l'aire balayée on a une quantité conservée $dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi \Rightarrow \dot{S} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\phi} = \frac{L}{2m}$ (car $L = m r^2 \dot{\phi}$)
- Troisième loi : par ailleurs l'aire d'une ellipse est $S = \pi ab$ et $T = S/\dot{S}$. Donc $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$. Si on connaît T , on peut retrouver a car ce rapport ne dépend que du Soleil.

La troisième loi est très pratique, car c'est très facile de mesurer la période d'oscillation d'un astre, et donc de remonter à son demi grand-axe si l'on connaît la masse du Soleil où le rapport pour une autre planète du système solaire.

Conclusion

Au cours de cette leçon on a introduit le champ de gravité et on a vu comment l'utiliser pour comprendre la dynamique terrestre et celle du système solaire, avec très peu d'efforts en se basant sur des résultats connus d'électrostatique.

Ouverture : gravimétrie, relativité générale...

LP2 : Loi de conservation en dynamique

3 Références

3.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1*, Dunod
- *Mécanique : fondements et applications*, Pérez
- *Mécanique classique*, Goldstein
- *Mécanique*, Landau

3.2 Expériences

3.2.1 Mobile autoporteur

Matériel :

- 1 set de mobiles autoporteur
- 1 niveau à bulle
- 1 camera usb
- Câbles pour tout brancher

Remarques : Penser à quantifier les frottements fluides en préparation

4 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- principe fondamental de la dynamique
- référentiel galiléen
- impulsion, moment cinétique, énergie
- force de pesanteur et électrostatique

Introduction

On a vu le principal fondamental de la dynamique qui permet de décrire la dynamique d'un système soumis à des forces extérieures. Maintenant on va étudier comment ce principe mène à des lois de conservations dans certaines situations.

Dans toute cette leçon on va supposer que l'on se trouve dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .

4.1 Loi de conservation

4.1.1 Conservation de l'impulsion

Si on considère un système isolé ou pseudo-isolé, le principe fondamental de la dynamique nous dit que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$$

donc dans cette situation l'impulsion se conserve

$$\mathbf{p} = \text{cste}$$

→ Vidéo illustrant ce principe

Cette loi de conservation est associée à une symétrie par translation dans l'espace → espace homogène.

4.1.2 Conservation du moment cinétique

Regardons la dérivée du moment cinétique

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{r} \wedge \sum \mathbf{F}_{ext} \\ &= \sum \mathbf{M}_{ext}\end{aligned}$$

c'est le **théorème du moment cinétique**.

Pour un système isolé ou pseudo-isolé, le moment cinétique se conserve. Mais c'est aussi le cas pour un système non-isolé soumis à une force centrale, en effet dans ce cas

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = F \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

et donc

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

on a bien conservation du moment cinétique.

→ vidéo roue de vélo tenue et tournée

Cette fois c'est une symétrie par rotation dans l'espace qui est associée à la conservation de \mathbf{L} → espace isotrope.

4.1.3 Conservation de l'énergie mécanique

Regardons la dérivée de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}\frac{dE_c}{dt} &= m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{\delta W}{dt} = P \\ \iff dE_c &= \delta W\end{aligned}$$

c'est le **théorème de l'énergie cinétique**

L'énergie mécanique est par définition $E_m = E_c + E_p$, donc pour un système isolé ou pseudo-isolé

$$dE_c = 0, E_p = 0 \text{ et } \frac{dE_m}{dt} = 0.$$

Pour un système soumis à des forces conservatives

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\text{grad } E_p \\ \iff dE_p &= -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\delta W\end{aligned}$$

et donc on a encore $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Pour résumer dans le cas d'un système isolé, pseudo-isolé, ou soumis à des forces conservatives, le travail est nul et l'énergie mécanique est donc conservée.

La conservation de l'énergie est associée à l'invariance par translation dans le temps.

On va maintenant étudier un cas pratique d'utilisation de ces lois de conservation : les collisions.

4.2 Application aux collisions

Collision : interaction localisée en temps et en espace entre une ou plusieurs particules

Ici on va considérer les états initiaux et finaux, en ignorant les états intermédiaires.

4.2.1 Choc élastique

Choc élastique : système identique avant et après collision, c'est-à-dire avec même nombre et nature de particules.

On considère toujours le système constitué de toutes les particules. Si les particules sont soumises à une énergie potentielle nulle quand elles n'interagissent pas, ce système est pseudo-isolé (principe action/réaction).

Donc l'énergie mécanique et l'impulsion se conservent. Comme de plus le choc est élastique, on a

$$\sum_i \mathbf{p}_i = \sum_f \mathbf{p}_f$$

Et on a donc conservation de l'énergie cinétique

$$\sum_i E_{ci} = \sum_f E_{cf}$$

4.2.2 Vérification expérimentale pour deux mobiles

Le système que l'on va considérer est constitué de deux mobiles repérés par leurs centres de masse A et B. On va supposer que les frottements statiques et fluides sont négligeables.

Dans ce cadre, on a deux forces extérieures qui se compensent sur les mobiles : la pesanteur et la réaction du support. Donc le système $\{A, B\}$ est pseudo-isolé et si l'on a un choc élastique entre les deux mobiles, on a donc conservation de l'énergie cinétique.

Vérifions cette conservation expérimentalement.

On a ici deux mobiles auto-porteur sur coussin d'air, pour rendre les frottements solides négligeables. En préparation on a aussi pu vérifier que les frottements fluides jouent un rôle négligeable sur les échelles de temps considérées.

Ici pour mesurer l'impulsion et l'énergie cinétique, on va utiliser une caméra, ce qui permettra de capter la position des mobiles à chaque instants. [Lancement d'un mobile et de l'acquisition. Exploitation de la vidéo. Mesure de \$\mathbf{p}\$ et de \$E_c\$. Vérification de leur conservation.](#)

Étudions maintenant un exemple un peu plus complexe de collision avec l'expérience de Rutherford.

4.3 Expérience de Rutherford

4.3.1 Description de l'expérience

Cette expérience consiste à bombarder une feuille d'or avec des particules α , qui sont des noyaux d'hélium. Ces particules α sont chargées positivement et elles vont donc interagir si une passe à proximité

d'un noyau d'or, elles vont entrer en collision. [schéma noyaux + α]

Les particules α et les noyaux vont se repousser au travers de la loi de Coulomb

$$\mathbf{F}_{\alpha \rightarrow o} = \frac{Z_o Z_\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_{\alpha \rightarrow o}$$

où o désigne un noyau d'or, Z_o est le numéro atomique d'un atome d'or, Z_α d'une particule α et r^2 la distance entre les deux.

Ce que l'on observe expérimentalement, c'est que les particules α vont être déviées de leur trajectoires rectiligne, certaines pouvant être rétro-diffusées par la feuille d'or. [ajout trajectoires sur le schéma]

Regardons comment les lois de conservation déjà énoncées permettent d'estimer la taille d'un noyau d'or

4.3.2 Ordre de grandeur de la taille d'un noyau d'or

On va se placer dans le référentiel du centre de masse entre une particule α et un noyau d'or. On va introduire la masse réduite

$$\mu = \frac{m_o m_\alpha}{m_o + m_\alpha}$$

Ici $m_o = 197m_p$ et $m_\alpha = 4m_p$ avec $m_p \sim 2 \cdot 10^{-27}$ kg, soit $\mu \sim 7 \cdot 10^{-27}$ kg.

L'énergie mécanique se conserve et certaines particules α sont rétro-diffusées. Cela veut dire que l'énergie cinétique est exactement compensée par l'énergie potentielle pendant la collision à une certaine distance a_0 du noyau

$$\begin{aligned} E_c^{col} &= E_p^{col} \\ \iff a_0 &= \frac{Z_o Z_\alpha e^2}{2\pi\epsilon_0 \mu v^2} \end{aligned}$$

Dans l'expérience de Rutherford, $v \sim 2 \cdot 10^7$ m.s⁻¹ ($e \sim 2 \cdot 10^{-19}$ C), soit $a_0 \sim 2 \cdot 10^{-15}$ m.

On voit qu'on trouve le bon ordre de grandeur pour la taille d'un noyau atomique, avec très peu d'informations et un calcul très simple!

4.3.3 Diffusion par un centre de force (peut sauter)

Le système $\{or + \alpha\}$ est uniquement soumis à des forces centrales, donc le moment cinétique est conservée. En coordonnée sphérique, on a

$$\begin{cases} \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \\ \mathbf{p} = \mu(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi = \text{cste}$$

Comme \mathbf{L} est conservée, \mathbf{r} et \mathbf{p} sont compris dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{L} \rightarrow$ on peut décrire le mouvement uniquement avec r et θ !

En fait on peut résoudre ce problème de manière exacte et montrer qu'on a des trajectoires hyperboliques.

Conclusion

Finalement on a vu pendant cette leçon quelques loi de conservation en dynamique et comment les appliquer pour traiter les collisions entre des particules permet de simplifier grandement les problèmes étudiés.

On a vu que ces lois sont associées à des symétries continues. En fait il existe le théorème de Noether qui relie toute symétrie continue à une grandeur conservée.

LP3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux

5 Références

5.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit
- *Ce que disent les fluides*, Guyon-Hulin-Petit
- *Hydrodynamique*, Landau
- *La mécanique des fluides*, Salin et Martin

5.2 Expériences

5.2.1 Mesure de la viscosité d'un fluide

Matériel :

- 1 kit Poiseuille
- 1 chronomètre
- 1 cristalliseur
- 1 éprouvette graduée
- 1 bidon d'eau distillée

Remarques : Il faut faire la mesure en contrôlant le débit de sortie, avec des petits débits sinon Δh est impossible à mesurer

6 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- statique des fluides
- équation d'Euler
- particule de fluide
- équation de diffusion

Introduction

Le modèle du fluide parfait n'explique pas tous les phénomènes observables dans un fluide. Notamment il ne permet pas de rendre compte des forces de frottements que l'on ressent dans un fluide. Il ne permet pas non plus de comprendre pourquoi deux fluides de densité équivalente comme l'eau et le miel s'écoulent de manière si différente. → **slide avec nageur et cycliste + eau et miel.**

Pour décrire les fluides réels, on va introduire la notion de viscosité, en commençant par un l'étude d'un écoulement simple.

6.1 Notion de viscosité

6.1.1 Mise en évidence

Regardons l'écoulement d'un fluide entre deux plaques, l'une mobile de vitesse $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$ et l'autre immobile, on parle alors **d'écoulement de cisaillement**. → **Schéma de l'écoulement**. En régime stationnaire on observe que le profil de vitesse du fluide varie linéairement selon y de 0 à v_0

$$v_x(y) = v_0 \frac{y}{a}$$

On voit que le mouvement de la plaque entraîne le fluide et que le fluide "accroche" aux deux parois : **sa vitesse aux bords est fixée par la vitesse des parois**

$$\mathbf{v}_{\text{fluide}} = \mathbf{v}_{\text{paroi}} \quad (6.1.1)$$

On peut construire une loi phénoménologique pour comprendre ce mouvement. Une particule de fluide est soumise à une force F_x qui est d'autant plus grande que la différence de vitesse entre les plaques est grande, F_x dépend donc linéairement du gradient de vitesse. Par ailleurs cette force est d'autant plus grande que la particule de fluide a une grande surface Σ en contact avec ce qui la met en mouvement, F_x dépend donc linéairement de Σ . Enfin cette force dépend du fluide étudié, on va donc introduire une constante η pour en prendre compte.

Finalement on a

$$F_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \Sigma \Rightarrow \frac{F_x}{\Sigma} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

le rapport F_x/Σ est appelé **contrainte de cisaillement**.

La constante η est appelée **viscosité dynamique** : dimensionnellement c'est une pression seconde, son unité SI est le Pa.s, et son unité historique est le Poiseuille $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa.s}$. → **différents ordre de grandeur pour η** . On voit que η varie sur plusieurs ordre de grandeurs dans les liquides ou les gaz.

Regardons maintenant comment on peut mettre à jour l'équation d'Euler pour prendre en compte la viscosité.

6.1.2 Équation de Navier-Stokes

Faisons le bilan sur un petit élément de volume d'une particule de fluide [schéma de la particule de fluide]

$$\begin{aligned} dF_x &= dF_x(y + dy) - dF_x(y) \\ &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right) d\Sigma \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \underbrace{dy d\Sigma}_{dV} \end{aligned}$$

On a donc une densité de force volumique $f_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, que l'on va généraliser à trois dimensions

$$\mathbf{f} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1.2)$$

où ∇^2 est le Laplacien.

On peut donc écrire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en ajoutant cette force à l'équation d'Euler

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1.3)$$

On voit que si $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{g} + 1/\rho \nabla p = 0$, on a une équation de diffusion pour la vitesse du fluide

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1.4)$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la **viscosité cinématique**, dimensionnellement c'est un coefficient de diffusion (distance sur un temps au carré) et son unité SI est le m.s^{-2} . → **Ordre de grandeur de ν** . Cette fois ν est pratiquement constant pour les liquides et pour les gaz !

En fait ν décrit le transport de quantité de mouvement microscopique par les particules qui composent le fluide, alors que η décrit les propriétés macroscopique du fluide. On voit donc que la viscosité entraîne une dissipation de l'énergie, l'équation de diffusion étant reliée à une création d'entropie.

Dans l'équation de Navier-Stokes qui décrit un fluide réel, on a donc un terme convectif et un terme diffusif [les souligner], on va maintenant chercher à quantifier quand est-ce que l'un domine sur l'autre pour un écoulement donné.

6.1.3 Nombre de Reynolds

Pour cela on va utiliser le nombre de Reynolds qui compare ces deux termes

$$Re = \frac{|\text{terme convectif}|}{|\text{terme diffusif/visqueux}|} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{v}|}$$

en introduisant une longueur caractéristique de l'écoulement L et la vitesse moyenne du fluide U

$$Re = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad (6.1.5)$$

→ **Ordre de grandeur de Re pour des situations de la vie courante**. On a quatre situations

1. $Re < 1$: régime diffusif ou visqueux. L'évolution du fluide est alors linéaire et respecte la réversibilité mécanique → **vidéo qui illustre cette réversibilité** ;
2. $Re > 1$: régime convectif ou inertiel. L'évolution du fluide est non-linéaire ;
3. $Re < Re_c$: écoulement laminaire ;
4. $Re > Re_c$: écoulement turbulent.

→ **Écoulement dans un cylindre en fonction de Re** . C'est important de noter que même à haut Reynolds, l'écoulement du fluide peut quand même être laminaire. Le passage du régime laminaire au régime turbulent ne sera pas abordé ici.

23 min

On va maintenant étudier un exemple d'écoulement important de par ses applications en ingénierie.

6.2 Écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille consiste en l'étude d'écoulement parallèle dû à des différences de pression. Voyons d'abord comment on peut mesurer la viscosité grâce à cet écoulement.

6.2.1 Mesure de la viscosité

On a ici un vase de Mariotte qui va nous permettre d'avoir un débit constant tant que le niveau de l'eau est au dessus du bas du tube. L'eau s'écoule au travers d'un tube cylindrique de rayon r , maintenu par une gaine rectangulaire.

On a la **loi de Hagen-Poiseuille** qui relie le débit et la différence de pression entre deux points de l'écoulement

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi r^4} D_v \quad (6.2.1)$$

où D_v est le débit et L la longueur qui sépare les deux points où l'on mesure la pression. Attention cette relation n'est valable qu'en régime stationnaire !

Pour mesurer le débit on va relever le volume qui s'écoule pendant 20 s et pour mesurer Δp on va mesurer la différence de hauteur à deux points de notre écoulement, car selon l'axe vertical on a l'équation classique de la statique des fluides

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

Réalisation de la mesure de D_v et de Δh . Ajustement de la relation linéaire. Déduction de η . Calcul de Re pour chaque points mesurés. Note : pour $\Delta h = 1,8$ cm, on s'attend à $D_v = 0.95$ mL.s⁻¹.

On trouve le bon ordre de grandeur pour la viscosité de l'eau. Par ailleurs on voit que Re est très grand dans cette écoulement, mais on est quand même en régime laminaire grâce à sa géométrie. On s'attend à un régime turbulent pour $Re \gtrsim 2000$.

Plutôt qu'avec un tel dispositif, la mesure de la viscosité se fait en général avec des viscosimètre. Un exemple classique est le viscosimètre de Couette → schéma du viscosimètre de Couette, qui consiste à faire tourner le cylindre extérieur et à mesurer le couple nécessaire pour empêcher la rotation du cylindre intérieur, et donc d'en déduire η .

Regardons maintenant comment on peut retrouver les propriétés de cet écoulement théoriquement.

6.2.2 Écoulement entre deux plans parallèles (peut/doit sauter)

On va considérer le régime stationnaire. [Schéma de l'écoulement].

De par la géométrie de l'écoulement, on a un champ de vitesse selon x qui varie selon y : $\mathbf{v} = v_x(y)\mathbf{e}_x$.

Cela implique que le terme convectif est nul, car $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v_x(y)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$, on a donc l'équation suivante selon \mathbf{e}_x :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dp}{dx} &= \eta \frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} \end{aligned}$$

cette dernière égalité est possible uniquement si les deux termes sont constants, soit

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

On détermine les constantes C_1 et C_2 grâce aux conditions aux limites $v_x(0) = v_x(a) = 0$

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 a + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} a$$

Au final on a un profil de vitesse parabolique qui est maximal au centre des deux plans

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y-a)y \quad (6.2.2)$$

On va retrouver le même type de profil pour un cylindre.

6.2.3 Écoulement dans un cylindre

On va chercher à étudier le régime stationnaire de l'écoulement et on va se placer dans le cadre d'un cylindre infini. Cela revient à considérer que l'on est loin des extrémités du cylindre, on ne s'intéresse pas à la mise en place de l'écoulement. [Schéma de l'écoulement.]

De par la symétrie par rotation autour et de translation le long de l'axe \mathbf{e}_x , on va supposer que le champs de vitesse ne seules la composante v_x de la vitesse suivant l'axe est non-nulle, et qu'elle ne dépend que de r . Cela implique que le terme convectif est nul, car $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v_x(r) \frac{\partial v_x}{\partial x}(r) \mathbf{e}_x = 0$.

On a donc un jeu trois équations

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \cos \theta \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g \sin \theta \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x(r) \end{aligned}$$

On voit que l'effet de la pesanteur est d'établir dans la section du tube un gradient de pression hydrostatique sans influence sur l'écoulement. Le gradient de pression selon x doit donc être constant et on notera $-\partial p / \partial x = K = \Delta p / L$.

En exprimant le Laplacien en coordonnée cylindrique, on trouve une équation que l'on peut intégrer simplement

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r}(r) \right) &= -\frac{K}{\eta} \\ \Rightarrow r \frac{\partial v_x}{\partial r}(r) &= -\frac{K}{\eta} \frac{r^2}{2} + C_1 \\ \Rightarrow v_x(r) &= -\frac{K}{2\eta} \frac{r^2}{2} + C_2 \end{aligned}$$

la constante C_1 est nulle car $\frac{\partial v_x}{\partial r}$ doit rester bornée quand r tends vers 0.

En utilisant la condition au limite que $v_x(R) = 0$, on trouve que

$$C = \frac{K}{4\eta} R^2$$

et comme $K = \Delta p / L$

$$v_x(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (6.2.3)$$

On trouve un profil parabolique pour la vitesse, avec une vitesse maximale au centre du cylindre [tracer profil sur le schéma]. Pour calculer le débit, il suffit d'intégrer ce profil de vitesse sur la section

du cylindre, soit

$$\begin{aligned} D_v &= \frac{\Delta p}{4\eta L} \int_0^R dr \, 2\pi r (R^2 - r^2) \\ &= \frac{\Delta p}{2\eta L} \pi \left(\frac{R^2}{2} R^2 - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\Delta p}{8\eta L} \pi R^4 \end{aligned}$$

on retrouve la bien la loi de Hagen-Poiseuille, qui relie le débit à la différence de pression.

En dehors de sa relation linéaire avec la différence de pression, c'est intéressant de remarquer que le débit dépend de r^4 et non de r^2 comme on peut le rencontrer usuellement (dans un circuit électrique par exemple). Cette différence implique que si on prend 1 tuyau cylindrique de section R et 4 tuyaux de section $R/2$, leur débit total sera 4 fois plus petit que celui du grand tuyau ! Cette différence est lié à la condition de vitesse nulle sur les parois, qui fait que le fluide est à l'arrêt sur toute la surface du tuyau et implique que les forces de frottements visqueuses augmentent fortement quand la taille des tuyaux diminue.

Conclusion

Dans cette leçon on a introduit la notion de viscosité et on a vu comment elle permettait de décrire l'écoulement de fluide réel. En introduisant le nombre de Reynolds on a vu que les écoulements avaient plusieurs régimes aux propriétés très différentes.

L'étude de l'écoulement de Poiseuille nous a montré l'importance de la viscosité et des conditions aux limites quand on étudie un écoulement.

Enfin dans une prochaine leçon on pourra parler de la notion de couche limite, qui permet de faire le lien entre fluides parfaits et fluides visqueux.

LP4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

7 Références

7.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit
- *Ce que disent les fluides*, Guyon-Hulin-Petit
- *Hydrodynamique*, Landau
- *La mécanique des fluides*, Salin et Martin

7.2 Expériences

7.2.1 Mesure de la densité de l'air

Matériel :

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| — 1 sonde de Pitot | — 2 noix |
| — 1 soufflerie | — 1 pince deux doigts |
| — 1 anémomètre | — 1 multimètre |
| — 2 pieds | |

Remarques : À Montrouge on surestime la densité $\rho \simeq 1,5$ au lieu de $\simeq 1,2$... Pour l'anémomètre, en prendre un qui peut moyenner la vitesse ou se placer loin de possibles courants d'air. L'idée c'est de faire 4-5 mesures à haute vitesse et une à basse vitesse en leçon.

8 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- | | |
|-----------------|-------------------|
| — mécanique | — loi de Joule |
| — hydrostatique | — thermodynamique |

Introduction

La dynamique des fluides étudie le mouvement des gaz et des liquides, regardés à une échelle macroscopique. À cette échelle, on va considérer que les fluides sont des milieux continus, c'est-à-dire qu'un élément de volume infinitésimal est supposé suffisamment grand pour être à l'équilibre thermodynamique.

[peut sauter] Pour préciser cette idée, on va introduire la notion d'échelle mésoscopique.

Échelle mésoscopique : échelle de longueur l qui est grande devant l'échelle microscopique λ et petite devant l'échelle macroscopique L : $\lambda \ll l \ll L$. Ordre de grandeur : $\lambda \sim 10^{-9}$ m, $l \sim 10^{-6}$ μ m, $L \gtrsim 10^{-2}$ cm.

Dans cette leçon on va voir s'intéresser principalement aux fluides dit parfaits.

Écoulement parfait : si l'évolution du fluide se fait de manière adiabatique et réversible. Cela revient à négliger les effets de diffusion thermique et de quantité de mouvement au sein du fluide.

Regardons comment on peut utiliser la mécanique pour caractériser le mouvement de tels fluides.

8.1 Dynamique d'un écoulement parfait

8.1.1 Bilan des forces

On va considérer un fluide incompressible de densité ρ soumis à un champs de pesanteur \mathbf{g} . Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur un volume V fixe du fluide de masse m et de surface Σ [schéma du volume]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) &= \mathbf{F}_{\text{pesanteur}} + \mathbf{F}_{\text{pression}} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho \mathbf{v} &= \int_V d^3r \rho \mathbf{g} - \int_{\Sigma} d\mathbf{S} p \end{aligned}$$

où \mathbf{v} est la vitesse d'un élément de volume infinitésimal du fluide, que l'on va appeler **particule de fluide**. p est la pression mécanique qui s'exerce au sein du fluide.

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on peut transformer l'intégrale surfacique sur la pression en intégrale volumique soit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho \mathbf{v} &= \int_V d^3r (\rho \mathbf{g} - \nabla p) \\ \Rightarrow \int_V d^3r \rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} &= \int_V d^3r (\rho \mathbf{g} - \nabla p) \quad \text{car } V \text{ est fixe et } \rho \text{ constante} \\ \Rightarrow \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad \text{car } V \text{ est quelconque} \end{aligned}$$

on voit que sur une particule de fluide, il y a deux type de forces volumiques qui s'exercent [les souligner dans l'équation] :

- des forces extérieures, ici la gravité $\rho \mathbf{g}$;
- des forces internes, ici de pression $-\nabla p$.

Il ne nous reste plus qu'à exprimer l'accélération $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ de la particule de fluide pour trouver l'équation qui caractérise la dynamique du fluide.

8.1.2 Équation d'Euler

Ici l'ensemble des vitesses des particules de fluide de position \mathbf{r} à l'instant t définit un champs de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. On adopte ici une description **eulérienne** du mouvement d'un fluide, où il est décrit globalement pour chaque point fixe \mathbf{r} , sans chercher à suivre une particule de fluide particulière.

La variation de la vitesse d'une particule de fluide \mathbf{v} a donc deux origine :

1. une due à la variation explicite de \mathbf{v} au cours du temps ;
2. une due à l'exploration du champ de vitesse par la particule, qui est non nulle uniquement si le champ n'est pas uniforme.

Entre deux positions infiniment proches $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (\delta x, \delta y, \delta z)$, on peut effectuer un développement limité pour trouver la variation du champ de vitesse

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t_1) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \delta z$$

l'accélération de la particule de fluide est donc

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

soit en notation vectorielle

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (8.1.1)$$

le second terme est nommée **terme convectif**.

En combinant cette expression de l'accélération avec le bilan des forces effectués précédemment, on trouve l'**équation d'Euler**

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (8.1.2)$$

C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, mais à cause du terme convectif c'est une équation non-linéaire en général, ce qui la rend impossible à résoudre en dehors de certaines géométries simples.

Pour complètement caractériser un fluide parfait il nous manque une dernière équation.

8.1.3 Conservation de la masse

En effet pour caractériser complètement un fluide parfait incompressible, il faut déterminer les trois composantes du champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ et le champ de pression $p(\mathbf{r}, t)$. Il faut donc quatre équations, dont trois sont fournies par l'équation d'Euler. La dernière est fournie par la conservation de la masse. En effet si on considère encore une fois un volume V de surface Σ , la conservation de la masse impose que le flux de masse sortant du volume sera égal à la variation de masse dans le volume

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ \Leftrightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Comme l'incompressibilité implique que $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$, on voit que le champ de vitesse vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8.1.3)$$

Avec cette dernière équation et l'équation d'Euler on peut donc complètement caractériser l'évolution d'un fluide parfait incompressible.

Nous allons voir maintenant comment on peut utiliser l'équation d'Euler pour étudier les écoulements permanents.

8.2 Écoulements permanents

Dans tout ce qui suit on va considéré un écoulement parfait et incompressible en régime stationnaire. Avant de commencer on va avoir besoin de la notion de ligne de courant.

Ligne de courant : ligne qui en tout point est tangente au champs de vitesse à ce point.

8.2.1 Relation de Bernoulli

Si on considère que l'on est en régime stationnaire avec $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, l'équation d'Euler devient

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

or un résultat d'analyse vectoriel nous dit que l'on peut réécrire le terme convectif comme

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

soit, en se plaçant dans un repère où $\mathbf{g} = \nabla gz$,

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho} p - gz \right) + (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Intégrons ce terme le long du ligne de courant qui va de A à B d'élément infinitésimal $d\mathbf{l}$ [schéma de la ligne de courant]

$$\int_A^B d\mathbf{l} \cdot \left[\nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho} p - gz \right) + (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \right] = 0$$

comme $d\mathbf{l}$ est parallèle à \mathbf{v} par définition, le second terme est nul et donc

$$\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_A^2 + p_A - \rho gz_A = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_B^2 + p_B - \rho gz_B \iff \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p - \rho gz = cste \quad (8.2.1)$$

C'est la **relation de Bernoulli**, qui traduit la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant. En effet $\rho \mathbf{v}^2/2$ correspond à une densité d'énergie cinétique, p à l'énergie volumique due aux forces de pression et ρgz à la densité d'énergie potentielle. Ce n'est pas étonnant d'avoir une telle conservation, car par hypothèse dans un fluide parfait on a négligé toutes les sources de dissipation d'énergie (diffusion de la température ou de la quantité de mouvement).

Comme tous les termes de cette relation sont par ailleurs homogènes à des pressions, on parle parfois de pression dynamique pour désigner $\rho v^2/2$.

On voit que dans le cas d'un fluide stationnaire où $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ on retrouve la loi de l'hydrostatique $\Delta p = \rho g \Delta z$.

On va maintenant chercher à vérifier expérimentalement cette relation et s'en servir pour déterminer la densité de l'air ambiant.

8.2.2 Mesure de la densité de l'air

Pour cela on va utiliser une soufflerie qui permet de générer un écoulement d'air permanent. En mesurant la différence de vitesse et de pression entre deux points de l'écoulement, on va pouvoir remonter à la densité de l'air.

Pour mesurer la vitesse de l'écoulement on va utiliser un anémomètre à fil chaud : il est composé d'un fil métallique traversé par un courant électrique, ce qui va l'échauffer. Le courant d'air va refroidir le fil, ce qui va entraîner une baisse de la résistance interne du fil, ce qui va mener à une baisse de la tension, ce qui permet de remonter à la vitesse de l'écoulement. → **anémomètre à fil chaud**

Pour mesurer la différence de pression entre deux points de l'écoulement on va utiliser un tube de Pitot, qui permet de relier Δp à la vitesse du fluide → **tube de Pitot**

[Noter au tableau :] Pour un fluide parfait la composante normale de la vitesse est continue à la traversée d'une interface, donc le bout du tube de Pitot correspond à un point d'arrêt de vitesse nulle, appelée **point de stagnation**.

[schéma de la mesure] Comme le trou latéral où l'on mesure la vitesse est à la même hauteur, Bernoulli donne

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_B = p_A \quad \Longleftrightarrow \quad v^2 = 2 \frac{p_A - p_B}{\rho}$$

on s'attend donc à une relation linéaire entre la différence de pression et la vitesse au carrée. Comme A est un point de stagnation, p_A est parfois appelée pression de stagnation.

Mesure de v et de Δp pour un petit v . Ajustement de $v^2 = A\Delta p$, avec $A = 2/\rho$. $\rho_{air} \simeq 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ et ici on trouve typiquement $\rho = 1,5 \pm 0,2 \text{ kg.m}^{-3}$.

Il faudrait trouver quelque chose d'intelligent à dire sur cette différence... Peut-être dû à la non-idéalité du fluide ? En vrai il y a une (petite) couche limite où le modèle ne tient pas, ce qui pourrait expliquer cet écart.

Regardons un autre effet dû à la relation de Bernoulli.

8.2.3 Effet Venturi

On considère une conduite de section S_1 avec un rétrécissement local, de section $S_2 < S_1$, avant de revenir à la section initiale S_1 [faire schéma de la conduite].

Comme l'écoulement est incompressible le volume se conserve et le débit volumique aussi, on doit donc avoir

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

et donc $v_2 > v_1$, la vitesse est plus élevée au niveau du rétrécissement. Par ailleurs la relation de Bernoulli donne, pour une ligne de courant au centre de la conduite [faire schéma de la ligne]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 &= \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \\ \Longleftrightarrow p_1 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

et donc comme $v_2 > v_1$, $p_1 > p_2$: le rétrécissement s'accompagne d'une diminution de la pression dans le fluide.

Ce effet est exploité notamment dans les trompes à eau utilisées en chimie pour créer une forte dépression.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment décrire la dynamique d'un fluide parfait incompressible, à l'aide du théorème fondamental de la dynamique qui donne l'équation d'Euler.

Cette équation est non-linéaire et très difficile à résoudre en dehors de quelques cas simple. Toutefois dans le cas du régime permanent on peut établir la relation de Bernoulli, qui est vraie le long d'une

ligne de courant. Elle permet de remonter à la vitesse où à la pression d'un fluide et permet d'expliquer certains effets, comme l'effet Venturi.

Mais pour complètement décrire la dynamique des fluides, il manque un élément essentiel : **la viscosité**

→ animation fluide visqueux et pas visqueux

LP5 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

9 Références

9.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Thermodynamique*, DGLR
- *Thermodynamique - fondements et applications*, Pérez
- *Hydrodynamique physique*, Guyon-Hulin-Petit

9.2 Expériences

9.2.1 Mesure du coefficient de tension superficielle

Matériel :

- 1 kit de mesure par arrachement
- 1 mini support élévateur boy
- 1 cristalliseur
- 1 bidon d'eau distillée
- 1 pissette d'éthanol

Remarques : Nettoyer la lame avant la mesure, prendre le temps de laisser le système se stabiliser pour éviter les oscillations qui risquent de faire décrocher la lame métallique trop tôt, équilibrer lentement le système

10 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- mécanique
- thermodynamique
- statique des fluides

Introduction

Jusqu'ici on a toujours négligé les effets de surfaces dans nos études thermodynamiques. Dans cette leçon on va voir comment on peut les modéliser et expliquer certains phénomènes, comme la formation de goutte d'eau à la surface d'une feuille. → **Gouttes d'eau sur une feuille.**

Pour ça on va introduire la notion de **tension superficielle**.

10.1 Tension superficielle

10.1.1 Mise en évidence

On peut mettre en évidence la présence d'une nouvelle force avec un dispositif très simple. Ici on a un support rectangulaire avec un fil au milieu, que je trempe dans de l'eau savonneuse. Initialement on a

deux bulles et le fil a une certaine position, si j'en perce une, on voit que le fil s'est déplacé. **Prise en main du support et perçage d'une des deux bulles, ne pas hésiter à le faire deux fois pour bien montrer le mouvement du fil**

[Faire un schéma du cadre et de la force exercée] La lame de savon exerce une force de tension sur la corde, colinéaire à la normale de la corde et proportionnelle à la longueur L de la corde et à un certain coefficient γ

$$\mathbf{T} = 2\gamma L \mathbf{n} \quad (10.1.1)$$

ici on a un facteur 2 car on a deux interfaces entre l'air et la lame de savon.

$\gamma > 0$ est le **coefficient de tension superficielle**, on voit qu'il est homogène à une force par unité de longueur, on l'exprime en général en mN.m^{-1} .

On va maintenant chercher à comprendre pourquoi cette force est tangentielle à la surface du fluide.

10.1.2 Origine microscopique

Un fluide est une phase condensée composée de nombreuses molécules en interaction. Il y a deux types d'interaction que les molécules exercent entre elles :

- des forces attractives à longue portée
- des forces répulsives à courte portée

C'est cette différence de portée qui est à l'origine des forces de tension.

→ **schéma avec les forces que le fluide exerce sur lui-même**. Si on regarde les forces qu'une partie du fluide exerce sur une autre partie du fluide, dans le coeur du liquide les forces répulsives et attractives se compensent, alors que quand on s'approche de l'interface les composantes tangentielles ne se compensent plus. C'est parce qu'on a moins de molécule à l'interface qui exercent des forces de répulsion, alors les forces attractives restent similaire du fait de leur longue portée.

Maintenant qu'on a compris qualitativement pourquoi on avait une force tangentielle à la surface, on va l'étudier d'un point de vue énergétique, ce qui nous sera très utile par la suite.

10.1.3 Point de vue énergétique

Si on regarde le travail que la corde fournit à lame de savon quand elle se déplace d'une longueur infinitésimale dl \mathbf{e}_x [ajouter \mathbf{e}_x de sens opposé à \mathbf{n} sur le schéma], on a

$$\delta W = -dl \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x = 2\gamma L dl = \gamma d\Sigma \quad (10.1.2)$$

où $d\Sigma$ est la variation infinitésimale de la surface de la lame de savon.

On voit que si on diminue la surface, $d\Sigma < 0 \Rightarrow \delta W < 0$: la lame de savon cède de l'énergie à la corde. Inversement si on augmente la surface, $\delta W > 0$: la corde doit fournir de l'énergie à la lame de savon (possible si on tire sur la corde).

On peut donc réinterpréter γ comme étant l'énergie nécessaire pour agrandir la surface du fluide. γ est bien homogène à une énergie par unité de surface, qu'on peut exprimer en mJ.m^{-2} .

Regardons maintenant comment on peut mesurer ce coefficient de tension superficielle.

10.1.4 Mesure de γ

On va mesurer γ par arrachement, ici on a une lame attaché à une tige, dont le poids est équilibré par un contre-poids, de sorte que initialement le système lame + contre poids est à l'équilibre, comme indiqué par cette marque blanche. Maintenant je vais mettre la lame en contact avec de l'eau distillée,

de sorte que celle-ci exerce une force de tension, ce qui va déséquilibrer notre pendule. À l'aide d'une vis on va pouvoir déplacer cette chaînette pour ajouter du poids et rééquilibrer notre système. Réalisation du rééquilibrage en allant doucement.

[Schéma de la force sur la lame]. La force qui s'exerce sur la lame est $2\gamma L \cos \theta$ (on a deux côté), ici la lame est telle que $\theta \simeq 0$, donc à l'équilibre on a $2\gamma L = mg$, soit

$$\gamma = m \frac{g}{2L}$$

La longueur de la lame vaut $L = 4,905$ cm, de sorte que $g/2L = 10^{-2} \text{ s}^{-2}$. Donc en multipliant la masse mesurée en milligramme par 10, on a directement γ en mN.m^{-1} . Ici $\gamma \simeq 72 \pm 1 \text{ mN.m}^{-1}$ et $\gamma_{\text{eau}}(T = 20^\circ \text{ C}) = 72,8 \text{ mN.m}^{-1}$. On retrouve la bonne valeur pour γ .

Pour un liquide l'eau a un coefficient de tension superficielle élevée, c'est dû aux liaisons hydrogènes qui le structurent → **ordre de grandeur pour différents liquides**.

Maintenant que l'on est armé de cette notion de tension superficielle, on va chercher à comprendre comment avec une approche thermodynamique on peut expliquer la forme que prennent des bulles de savon dans l'air ou des gouttes d'eau sur un support.

10.2 Interfaces statiques

10.2.1 Surpression dans une bulle

On va étudier d'un point de vue thermodynamique une bulle de savon dans de l'air à une température T_0 et une pression p_0

[Schéma d'une bulle de savon, avec T_a, p pour l'air dans la bulle, T_b pour le film de savon]. Comme on est à pression et à température fixée, le potentiel thermodynamique pertinent est l'enthalpie libre ici

$$dG = dU + p_0 dV - T_0 dS$$

ici l'énergie interne est la somme de l'énergie du film de savon et de l'air dans la bulle

$$dU = dU_a + dU_b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} dU_a = T_a dS_a - p dV \\ dU_b = T_b dS_b + \gamma d\Sigma \end{cases}$$

donc, comme $dS = dS_a + dS_b$,

$$dG = (T_a - T_0) dS_a + (T_b - T_0) dS_b + (p_0 - p) dV + \gamma d\Sigma \quad (10.2.1)$$

On voit que pour minimiser dG il faut minimiser la surface, or la structure 3D qui minimise la surface pour un volume donné est une sphère. On a donc

$$\begin{cases} V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV = 4\pi R^2 dR \\ \Sigma = 2 \times 4\pi R^2 \Rightarrow d\Sigma = 16\pi R dR \end{cases}$$

et

$$dG = (T_a - T_0) dS_a + (T_b - T_0) dS_b + [(p_0 - p)4\pi R^2 + 16\pi\gamma R] dR \quad (10.2.2)$$

À l'équilibre $dG = 0$, ce qui implique que les termes devant chaque différentielle s'annulent et donc

$$\begin{cases} T_a = T_b = T_0 \\ p_0 - p = -\frac{16\pi\gamma R}{4\pi R^2} \Rightarrow p - p_0 = \frac{4\gamma}{R} \end{cases} \quad (10.2.3)$$

On pouvait s'attendre au premier résultats, mais le premier est plus surprenant : la pression à l'intérieur de la bulle est plus élevée qu'à l'extérieur et que cette différence augmente quand la taille de la bulle diminue.

En fait pour une surface de courbure quelconque $C = 1/R_1 + 1/R_2$ [schéma avec R_1, R_2], on a la formule de Laplace

$$\Delta p = \gamma C \quad (10.2.4)$$

On voit que si la différence de pression est nulle, alors la courbure sera nulle. On peut le réaliser facilement, ici j'ai deux cercles que je trempe dans une solution d'eau savonneuse. Si je met en contact les deux cercles et que je perce le centre, $\Delta p = 0$ car on a la pression atmosphérique des deux côtés. On a alors une hyperbole, avec $R_1 = R_2$.

Maintenant qu'on a compris la physique d'une bulle de savon, étudions la forme des gouttes d'eau sur un support solide.

10.2.2 Forme d'une goutte d'eau

On va considérer ici une goutte posée sur un support solide en contact avec un gaz. On a donc trois interface avec trois coefficient de tension superficielle différents. [Schéma de la goutte avec g, l, s et $\gamma_{sl}, \gamma_{sg}, \gamma_{lg}$]

Ici la goutte forme un angle θ avec le support solide. En faisant un bilan des forces selon l'axe horizontal, on peut montrer que

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{sl} - \gamma_{sg}}{\gamma_{lg}} \quad (10.2.5)$$

c'est la loi de Young-Dupré.

On voit qu'on a deux situations

- $\gamma_{sl} - \gamma_{sg} < 0 \Rightarrow \theta > \pi$, on a donc une goutte plutôt arrondi [schéma avec la forme de la goutte]
- $\gamma_{sl} - \gamma_{sg} > 0 \Rightarrow \theta < \pi$, on a donc une goutte plutôt aplati [schéma de la forme de la goutte]

il est intéressant de noter que la forme de la goutte (convexe ou concave) ne dépend pas de γ_{lg} et dépend uniquement de la différence d'énergie entre le fait de former une interface solide/gaz et solide/liquide. Pour quantifier l'étalement d'un liquide, on va introduire un nouveau paramètre.

10.2.3 Mouillage

On introduit le paramètre d'étalement, qui compare la différence d'énergie par unité de surface entre une situation avec une interface solide/gaz et une interface solide/liquide/gaz

$$S = E_{sl} - E_{slg} = \gamma_{sl} - \gamma_{sg} - \gamma_{lg} \quad (10.2.6)$$

On a encore deux situations

- $S \geq 0$ l'interface solide/liquide est défavorable d'un point de vue énergétique, et donc le liquide va s'étaler : on parle de **mouillage total**
- $S < 0$ cette fois c'est l'inverse et le liquide ne s'étalera pas : on parle de **mouillage partiel**

Si on revient à la géométrie de la goutte, comme $S + \gamma_{lg} = \gamma_{sl} - \gamma_{sg}$

$$\cos \theta = \frac{S}{\gamma_{lg}} + 1 \iff S = \gamma_{lg}(\cos \theta - 1)$$

on voit que les deux situations sont cohérentes : goutte aplati = plutôt mouillant, goutte arrondi = plutôt non-mouillant.

Conclusion

On a vu pendant cette leçon la notion nouvelle de tension superficielle et on a vu comment cette notion permettait d'expliquer la forme des bulles de savon ou des gouttes d'eau sur un support solide. → [slide feuille et gouttes d'eau](#)

Finalement on voit qu'on est en mesure d'expliquer la forme des gouttes d'eau sur une feuille, ici on est dans une situation de mouillage partiel, avec des gouttes plutôt arrondie.

Enfin on pourrait parler de la compétition entre gravité et tension de surface, avec les phénomènes de capillarité.

LP6 : Premier principe de la thermodynamique

11 Références

11.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PCSI*, Dunod
- *Thermodynamique*, DGLR
- *Thermodynamique - fondements et applications*, Pérez

11.2 Expériences

11.2.1 Expérience de Joule

Matériel :

- 1 expérience de Joule
- 2 Boy
- 1 poids de 5 kg
- 1 thermocouple

Remarques : Il faut enrouler 2 fois la corde (2 tour autour du cylindre) et retirer le thermocouple lorsque l'on tourne

12 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- mécanique
- système thermodynamique
- variables d'états, extensivité, intensivité
- transformation thermodynamique
- chaleur, travail, capacité thermique
- modèle du gaz parfait

Introduction

On a vu que la thermodynamique est la science des corps macroscopiques, constitués d'une multitude de particules. Jusqu'ici on a considéré l'énergie en mécanique du point et on a vu qu'on pouvait avoir des échanges d'énergie sous forme de travail.

Quand on passe à des systèmes macroscopiques, on voit un phénomène qu'on ne peut expliquer par la mécanique apparaître : sous l'action d'un travail mécanique les corps s'échauffent → https://www.youtube.com/watch?v=HpMzS5Z0_XA.

Dans cette leçon on va voir comment la thermodynamique nous permet d'expliquer ce phénomène en terme de transfert d'énergie par **chaleur**. Commençons par introduire le concept *d'énergie interne* et d'énergie d'un système, avant de parler du premier principe.

12.1 Énergie d'un système

Dans tous ce qui suit on va considérer un système thermodynamique Σ .

12.1.1 Énergie interne

Si on se place dans un référentiel où Σ est au repos, c'est-à-dire sans mouvement de matière macroscopique, alors l'énergie résiduelle de Σ est son énergie interne U .

L'énergie interne de U du système Σ est la valeur moyenne de l'énergie totale des particules microscopique qui constituent Σ . Soit

$$U = \langle E_{micro} \rangle = \left\langle \left(\sum_i E_{c,i} + E_p \right) \right\rangle \quad (12.1.1)$$

où $E_{c,i}$ est l'énergie cinétique d'une particule i et E_p est l'énergie potentielle d'interaction des particules de Σ . Comme toute énergie, U se mesure en joules J.

L'énergie interne est une **fonction d'état** du système et dépend des variables d'états T, P, V, N :

$$U = U(T, P, V, N) \quad (12.1.2)$$

C'est une fonction d'état **extensive**, puisque si on ajoute des particules on augmente sa valeur. Elle est aussi **additive** pour des systèmes non couplés, de par sa définition. Soit

$$U_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = U_{\Sigma_1} + U_{\Sigma_2}$$

12.1.2 Énergie totale

L'énergie E de Σ est la somme de son énergie interne et de son énergie macroscopique

$$E = U + E_{macro} = U + E_c + E_{p,ext} \quad (12.1.3)$$

l'énergie macroscopique est la somme de l'énergie cinétique associé à un mouvement macroscopique et d'une éventuelle énergie d'interaction avec un système extérieur, en général la gravité.

On voit que E est définie à une constante additive près, ce qui n'est pas gênant puisque ce qui est important en thermodynamique ce sont les variations d'énergie entre deux états.

On va voir maintenant une expérience historique qui va permettre de voir ce qu'est le premier principe.

12.2 Expérience de Joule

12.2.1 Principe

On va réaliser l'expérience de Joule, qui a servi à mettre en évidence l'équivalence entre travail et chaleur.

L'idée de cette expérience c'est de chauffer un cylindre métallique en lui appliquant des forces de frottements solides au travers d'une corde. En remplissant ce cylindre d'eau et en mesurant l'échauffement de l'eau, on va pouvoir comparer le travail fourni au cylindre et la chaleur dégagée.

Notre système thermodynamique Σ sera constitué du cylindre métallique et de l'eau qu'il contient, c'est un système fermé à volume constant. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

[schéma du dispositif mécanique avec les axes]. Si on fait le bilan mécanique des forces qui s'exerce sur la corde, on a trois forces : la force de pesanteur $\mathbf{P} = -Mg\mathbf{e}_x$, redirigée par la poulie considérée comme parfaite ici, la force de tension du ressort $\mathbf{T} = k(l - l_0)\mathbf{e}_x$ et la force de frottement du cylindre $\mathbf{f} = -f\mathbf{e}_x$.

À l'équilibre mécanique

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} \\ \Longleftrightarrow -Mg + k(l - l_0) - f &= 0 \\ \Longleftrightarrow f &= k(l - l_0) - Mg\end{aligned}$$

donc le cylindre subit une force de frottement $-f = Mg - k(l - l_0)$ de la part de la corde.

Si maintenant on vient tourner le dispositif, la corde va parcourir une distance $\Delta l = 2\pi RN$, où R est le rayon du cylindre et N le nombre de tour effectué. La corde va donc transmettre un travail au cylindre

$$W = (Mg - k(l - l_0))2\pi RN$$

L'échauffement de l'eau est dû à un transfert de chaleur

$$Q = m_{\Sigma} c_{eau} \Delta T$$

où ici on ne distingue pas la capacité thermique de l'eau et du cylindre, mais le constructeur donne directement l'équivalence en masse d'eau du cylindre

$$m' = m_{cyl} \frac{c_{cyl}}{c_{eau}}$$

et donc $m_{\Sigma} = m_{eau} + m'$.

La question que l'on va se poser c'est : est-ce que $Q = W$?

12.2.2 Mesure de W et de Q

Présentation du dispositif, on débranche le thermocouple puis on effectue les tours. Une fois réalisé $N = 100$ tours, on branche le thermocouple et on mesure la température, ce qui permet d'obtenir ΔT .

Pour $M = 5$ kg, $N = 100$, $\Delta T = 3,0$, $m_{eau} = 48,5$ g, $m' = 11$ g, $R = 24$ mm et $c_{eau}^{tab} = 4,180$ J.K⁻¹, on trouve

$$\begin{cases} W = 740 \pm 15 \text{ J} \\ Q = 746 \pm 25 \text{ J} \end{cases}$$

On voit qu'avec nos incertitudes, le travail reçu W par le système est égal à la chaleur reçue Q ! C'est dû au premier principe de la thermodynamique.

12.3 Premier principe

12.3.1 Énoncé

Au cours d'une transformation thermodynamique quelconque d'un **système fermé** Σ , sa variation d'énergie est égale à la somme des échanges d'énergie mécanique et thermique

$$\Delta E = Q + W.$$

Ce principe exprime la **conservation de l'énergie**.

Il est important de noter que la chaleur Q et le travail W sont algébriques, avec comme convention qu'elles sont positives si le système reçoit de l'énergie de l'extérieur.

12.3.2 Forme usuelle

La plupart du temps, on va considérer des systèmes qui sont soumis à des interaction potentielle macroscopiques constantes. Comme on travaille en général avec des systèmes au repos, on écrira presque toujours le premier principe en terme de variation de l'énergie interne

$$\Delta U = Q + W \iff dU = \delta W + \delta Q \quad (12.3.1)$$

Une remarque importante : cette équation est reliée à une transformation particulière. ΔU ne dépend pas du chemin suivi car c'est une variable d'état, mais en revanche Q et W dépendent du chemin suivi pour effectuer la transformation ! On ne notera donc jamais ΔQ ou ΔW et de même δW et δQ ne sont pas des formes différentielles en général.

Regardons maintenant quelques applications du premier principe.

12.4 Applications

12.4.1 Échauffement d'un gaz par compression

Quand on soumet un gaz parfait à une compression adiabatique ($Q = 0$), sa variation d'énergie est

$$\Delta U = W$$

or pour un gaz parfait U ne dépend que de la température, car on n'a pas d'interaction entre les particules. Donc $\Delta U = C_V \Delta T$ même si $\Delta V \neq 0$.

Et comme $W = -P\Delta V$, on voit que la diminution du volume entraîne une augmentation de la température

$$\Delta T = \frac{-P}{C_V} \Delta V$$

cette augmentation peut être très importante et permettre d'enflammer un matériau → <https://youtu.be/4qe1Ueifekg?t=147>, c'est ce principe qui sert à allumer les moteurs diesel par exemple.

On voit que lors d'une détente au contraire la température va diminuer, c'est cet effet qui est utilisé dans les réfrigérateurs ou les climatiseurs.

12.4.2 Mesure de la capacité thermique

Si on travaille à volume constant (transformation isochore) et qu'on note W' le travail des forces autres que celles de pression

$$\Delta U = Q + W' = C_V \Delta T \iff dU = C_V dT = \delta W' + \delta Q \quad (12.4.1)$$

où C_V est le coefficient calorimétrique à volume constant, aussi appelé **capacité thermique à volume constant**, exprimé en J.K^{-1} , et

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (12.4.2)$$

On a déjà vu que physiquement C_V représente l'énergie nécessaire à fournir à un système pour augmenter sa température de 1 degré.

Ici on voit que si on fournit un travail W' à un système dans une enceinte adiabatique, avec donc $Q = 0$, le travail fourni sera directement relié à une élévation de la température

$$\Delta T = \frac{W'}{C_V}$$

Donc plus un système a une capacité thermique élevée et plus il sera dur de l'échauffer. Comme C_V est une grandeur extensive de par sa définition, on travaille plus souvent avec la capacité thermique massique, qui est indépendante de la taille du système étudié.

L'eau a une capacité thermique assez élevée quand on la compare à d'autres liquides → c_m pour différents liquides, ce qui en fait un excellent moyen de transport de l'énergie thermique, car à masse égale c'est un des liquides qui peut stocker le plus d'énergie (en plus d'être présent abondamment).

Conclusion

Dans cette leçon on a vu le premier principe de la thermodynamique, qui est un principe de conservation de l'énergie.

Ce principe permet de comprendre pourquoi un corps s'échauffe quand il reçoit du travail de l'extérieur et on a vu quelques applications.

Mais ce principe n'est pas suffisant pour comprendre pourquoi certains phénomènes ne se produisent que dans un seul sens, comme par exemple pourquoi un ballon ne se gonfle jamais spontanément. Pour ça il va falloir introduire le second principe de la thermodynamique, qui permet de comprendre le sens d'évolution des transformations.

LP7 : Transition de phase

13 Références

13.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1*, Dunod
- *Thermodynamique*, DGLR
- *Thermodynamique - fondements et applications*, Pérez
- *Physique des transitions de phase*, Papon

13.2 Expériences

13.2.1 Mesure de la chaleur latente de l'azote

Matériel :

- | | |
|--|--|
| — 1 cuve d'azote liquide | — 1 balance |
| — 1 thermoplongeur (résistance) | — 1 vase Dewar et son support |
| — 1 transfo pour alimenter le thermoplongeur | — N supports, noix et pinces deux doigts |

Remarques : Il faut faire attention à ce que la résistance soit suffisamment immergée, il faut mesurer la variation de masse à vide. Pour la mesure, faire 6 mesures de la masse à 10 secondes d'intervalles.

13.2.2 Mesure de la température de fusion de l'étain

Matériel :

- | | |
|---------------------|--|
| — 1 réchaud | — 1 module sysam pour interfacer le thermocouple |
| — 1 creuset d'étain | — les câbles pour alimenter le module et le brancher sur un PC |
| — 1 thermocouple | |

Remarques : Attention à bien gratter la couche d'oxyde si on veut voir la surfusion de l'étain. Ce que l'on regarde c'est la courbe de refroidissement.

13.2.3 Mesure de la température de Curie

Matériel :

- | | |
|------------------------------|----------------------|
| — 1 bec Meker | — 1 pince en bois |
| — 1 kit température de Curie | — N supports et noix |
| — 1 thermocouple | |

Remarques : Pour une introduction qualitative et une mesure rapide de la température. Penser à recoller l'aimant après refroidissement

14 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- thermodynamique (potentiels, principes, types de transformations)
- magnétisme (ferromagnétisme, paramagnétisme, notion de spin)

Introduction

Dans cette leçon on va chercher à comprendre comment un même corps peut passer d'un état à un autre, par exemple comment de l'étain solide peut devenir liquide. Mais commençons par définir quelques termes.

Phase : Milieu dans lequel les grandeurs physiques varient de manière continue.

Transition de phase : passage d'une phase à une autre suite à la variation d'un paramètre extérieur, typiquement la température ou la pression.

Une approche thermodynamique macroscopique va nous permettre de développer un cadre théorique unifié, alors que d'un point de vue microscopique les phénomènes étudiés se décomposent en une multitude de mécanismes.

Avant de commencer, je vais d'abord lancer une manipulation sur laquelle on reviendra plus tard [mise en place du thermocouple et lancement du refroidissement de l'étain](#).

On va voir qu'il existe deux types de transition de phase : celle qui sont dites continue, que nous étudierons en premier et celle qui sont dites discontinue, que nous étudierons en second.

14.1 Transition de phase continue

Commençons par étudier une transition de phase continue de première importance : la transition ferro/para-magnétique.

14.1.1 Description du phénomène

On a ici un aimant collé à un barreau ferromagnétique, regardons ce qui se passe quand le barreau est chauffé. [Chauffage du barreau à l'aide du Bec Meker, mesure de la température de Curie](#)

On voit que passé une certaine température, appelée **température critique**, le barreau perd son aimantation et qu'elle revient si sa température redescend. [Démonstration en recollant l'aimant](#).

En notant M le moment magnétique et T_c la température critique on a deux situations

$$\begin{cases} T < T_c \Rightarrow M \neq 0 \\ T \geq T_c \Rightarrow M = 0 \end{cases} \quad (14.1.1)$$

En fait si on mesurait l'aimantation du barreau, on verrait qu'elle varie continuellement jusqu'à s'annuler. C'est pour cela que l'on parle de transition de phase continue. Comme M est non-nul dans la phase ferromagnétique et nulle dans la phase paramagnétique, on dit que c'est un **paramètre d'ordre** de la transition.

On voit pourquoi comprendre cette transition est important : comme les matériaux ferromagnétique sont à la base de toute la conversion de puissance électromécanique moderne et il est essentiel de caractériser pour quelle température on risque de perdre l'aimantation.

Regardons comment on peut modéliser ce type de transition.

14.1.2 Modèle de Landau

Ici on travaille à pression et à température fixée, donc le potentiel thermodynamique qui détermine la stabilité du système est l'enthalpie libre G , qui dépend de P, T et M . Comme on travaille à pression constante, on va considérer uniquement les variations de G selon la température et l'aimantation. De plus comme M est nulle à la température critique et que c'est un paramètre continu, on peut effectuer un développement limité de G autour de la température critique

$$G(T, M) = G_0(T) + \alpha(T)M + a(T)M^2 + \beta(T)M^3 + b(T)M^4 \quad (14.1.2)$$

On va supposer que le matériau est isotrope, de sorte que $G(T, M) = G(T, -M)$, ce qui implique que $\alpha(T) = \beta(T) = 0$. Les conditions de stabilités sont

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_T = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial M^2} \right|_T \geq 0$$

soit

$$M(a(T) + 2b(T)M^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = \pm \sqrt{\frac{-a(T)}{2b(T)}} \end{cases}$$

le premier cas correspond à $T \geq T_c$ et le second à $T < T_c$ d'après les résultats expérimentaux.

La seconde condition donne le signe de $a(T)$ pour chaque cas

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial M^2} \right|_T = 2a(T) + 12b(T)M = \begin{cases} 2a(T) & \text{pour } M = M_1 \\ -4a(T) & \text{pour } M = M_2 \end{cases}$$

donc $a(T) > 0$ pour $T \geq T_c$ et $a(T) < 0$ pour $T < T_c$. En admettant que $a(T)$ soit continue, au voisinage de la température critique on a

$$a(T) = a_0(T_c - T)$$

avec $a_0 > 0$, ce qui donne le bon comportement pour a et assure la continuité de M en $T = T_c$. En notant $b_0 = b(T_c) > 0$ dont le signe est imposé par l'existence de M_2 , on obtient

$$M = \pm \sqrt{\frac{a_0}{2b_0}}(T - T_c)^{1/2} \quad (14.1.3)$$

→ graphe de M et de G pour les deux cas.

Regardons comment l'entropie évolue lors de cette transition.

14.1.3 Évolution de l'entropie

Si on regarde l'entropie pour la phase ferromagnétique en négligeant les termes d'ordres M^4

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T} = -\frac{\partial G_0}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{a_0^2}{2b_0}(T - T_c)^2 \right) = S_0 + \frac{a_0^2}{b_0}(T - T_c)$$

on voit qu'à la température critique $S = S_0$, sa valeur pour la phase paramagnétique. La transition se fait donc à entropie constante.

Par contre si on regarde la capacité thermique à pression constante pour la phase ferromagnétique

$$C_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = C_{p0} + T \frac{a_0^2}{b_0}$$

alors que dans la phase paramagnétique

$$C_p = C_{p0}$$

donc à la température critique on a une discontinuité de la capacité thermique.

En fait c'est une propriété générale des transitions de phase continue : les dérivées premières du potentiel thermodynamique sont continues, alors que celles d'ordre supérieure peuvent être discontinues (ici celle d'ordre 2). C'est pourquoi on parle aussi de **transition de phase du 2^e ordre**.

14.1.4 Universalité (peut sauter)

Au voisinage du point critique on a trouvé que le paramètre d'ordre dépend de la température selon une loi de puissance

$$M \propto (T_c - T)^\beta$$

où $\beta = 1/2$ (0,33 expérimentalement) est un exposant critique. en fait pour les transition du 2^e ordre, ce comportement est commun à toute une classe de transition, c'est pourquoi on parle d'universalité et de classe d'universalité.

Par exemple la transition ferro/para-magnétique est dans la même classe d'universalité que la transition liquide/gaz, et elles ont donc les même comportement en loi de puissance au voisinage du point critique.

14.1.5 Effet d'un champ magnétique extérieur

On voit sur le graphe de G que pour passer de la phase paramagnétique à ferromagnétique, il y a eu un déplacement continu du minimum de l'enthalpie libre.

Une fois dans cet état ferromagnétique, si on impose un champs magnétique B de sens opposé à l'aimantation, un terme linéaire en $-BM$ sera ajouté à l'enthalpie libre et l'aimantation la plus stable d'un point de vue thermodynamique sera de signe opposée → **graphe de G avec un champ**.

Le système devra alors effectuer une transition de phase pour passer dans l'autre état d'aimantation, mais cette fois cela nécessite de surpasser une barrière d'enthalpie libre et on voit que le système peut exister dans deux états à la fois : un état $+M$ métastable et un état $-M$ stable.

Ce type de transition est une **transition de phase discontinue** et on va voir maintenant quelques une de ses propriétés.

14.2 Transition de phase discontinue

On va chercher à caractériser la transition de l'étain solide en étain liquide.

14.2.1 Description du phénomène

Ici on a un creuset contenant de l'étain pur chauffé par un réchaud, de sorte que l'étain était initialement liquide. Au début de la leçon j'y ai inséré un thermocouple, en prenant soin de gratter la couche d'oxyde à la surface de l'étain pour qu'il y ait le moins d'impuretés possible qui pénètrent dedans.

Ici on a la courbe de refroidissement de l'étain, on voit que la température décroît d'abord linéairement, avant d'atteindre un palier, pour finir par décroître de manière monotone jusqu'à la température ambiante.

En fait ce palier correspond à la température de changement d'état de l'étain, ici sa **température de fusion**, pendant laquelle il se **solidifie** en passant de l'état liquide à solide. [Mesure de \$T_f\$, comparaison avec la valeur tabulé.](#)

[Si on voit la métastabilité :] Ce qui est intéressant, c'est que l'on voit que l'étain descend à une température plus basse que T_f avant de remonter et d'atteindre ce palier. C'est parce qu'on a eu un retard à la transition à cause de la barrière d'enthalpie libre, l'état liquide a continué d'exister de manière metastable pendant une courte période, comme l'aurait fait l'aimantation d'un milieu ferromagnétique soumis à un champs magnétique.

Pour représenter ces différentes phases on utilise souvent un diagramme de phase.

14.2.2 Diagramme de phase

Dans ce digramme, on représente les domaines de température et de pression où les phases sont les plus stables, chaque domaine étant délimité par des lignes où les deux phases peuvent coexister si les deux phases sont séparées par des transitions discontinues. → [Diagramme de phase de l'eau partiel, on voit qu'on a un point critique au delà duquel la transition liquide/gaz devient continue et un point triple où la phase liquide et solide peuvent coexister \(donner \$T\$ et \$p\$](#)

Regardons comment on peut décrire ce phénomène avec la thermodynamique.

14.2.3 Équilibre entre deux phases

Si on regarde l'étain, à chaque instant le système est composé de n_S molécules solides et de n_L molécules liquides. Comme la pression et la température sont fixées, le potentiel pertinent est toujours l'enthalpie libre

$$dG(T, p, n_L, n_S) = \mu_L dn_L + \mu_S dn_S$$

pour que l'évolution soit spontanée, on doit avoir $dG \leq 0$ et comme $dn = 0$ car le système est fermé, $dn_S = -dn_L$ et on a la condition d'évolution

$$(\mu_S - \mu_L)dn_S \leq 0$$

Donc en fonction du signe des potentiels chimiques le système évolue vers la phase liquide ou solide

- $\mu_S < \mu_L \Rightarrow dn_S > 0$: le système se solidifie ;
- $\mu_S > \mu_L \Rightarrow dn_S < 0$: le système se liquéfie ;
- $\mu_S = \mu_L \Rightarrow dn_S = 0$: le système est à l'équilibre entre les deux phases, ce qui est caractéristique de ce type de transition.

On retiendra que le système évolue toujours vers la phase qui a le potentiel chimique le plus faible. Si on dérive la condition d'équilibre par la température, on va pouvoir déterminer la pente de la courbe séparant les deux phases

$$\begin{aligned} \mu_S(T, P) &= \mu_L(T, P) \\ \Rightarrow \frac{\partial \mu_S}{\partial T} + \frac{\partial \mu_S}{\partial P} \frac{dP}{dT} &= \frac{\partial \mu_L}{\partial T} + \frac{\partial \mu_L}{\partial P} \frac{dP}{dT} \end{aligned}$$

or

$$d\mu = -sdT + vdP$$

où s et v sont l'entropie et le volume molaire. Donc

$$\begin{aligned} -s_S + v_S \frac{dP}{dT} &= -s_L + v_L \frac{dP}{dT} \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{dT}(v_S - v_L) &= s_S - s_L \\ \Rightarrow \frac{dP}{dT} &= \frac{s_S - s_L}{v_S - v_L} \end{aligned}$$

En définissant la chaleur latente $L_v = T(s_L - s_S)$, on obtient la **formule de Clapeyron**

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L_v}{T(v_L - v_S)}$$

cette chaleur latente correspond à l'énergie nécessaire à fournir par mole pour que le changement d'état ait lieu.

On voit que si le volume de la phase liquide est plus grand que celui de la phase solide, alors la pente de $P(T)$ le long de l'équilibre des phases sera positive. Pour l'eau, la phase liquide est plus dense que la phase solide et donc la pente est négative.

Contrairement aux transition de phase continue, ici on a une discontinuité de l'entropie, qui est une dérivée première de μ . C'est pourquoi on parle aussi de **transition de phase du 1^{er} ordre**.

Il est intéressant de remarquer que si $s_S - s_L \rightarrow 0$, on retrouve une transition continue du 2^e ordre → [retour sur le diagramme de phase de l'eau](#). Au dessus de ce point critique la distinction entre phase liquide et gazeuse n'a plus de sens et on parle de **fluide supercritique**.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment caractériser d'un point de vue thermodynamique les transitions de phases, qui sont de deux types → [tableau avec les deux types de transitions](#)

On retiendra que la présence de métastabilité est caractéristique du premier ordre et que les changements d'états des corps pur sont très majoritairement du premier ordre.

Un autre exemple important de transition du second ordre est la transition supra-conductrice : pour certains matériaux, en dessous d'une température critique la résistance électrique devient nulle et la conduction électrique se fait sans perte.

Ces matériaux supra-conducteurs permettent donc de générer de forts champs magnétiques, ce qui est à la base de la technologie des IRM par exemple → [IRM](#).

LP8 : Phénomènes de transport

15 Références

15.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1 PC/PC**, Dunod
- *Cours de Physique théorique - Mécanique des fluides*, Landau
- *Thermodynamique*, DGLR
- *Thermodynamique - fondements et applications*, Pérez

15.2 Expériences

15.2.1 Mesure de la conductivité du cuivre

Matériel :

- 1 Barreau de cuivre avec système de refroidissement et résistance
- 2 thermocouples
- N câbles banane
- 1 Alimentation ± 12 V contrôlable

Remarques : Attention à faire l'expérience après avoir introduit l'équation de la chaleur (régime stationnaire de celle-ci)

15.2.2 Mise en évidence qualitative des différences de conductivité

Matériel :

- 1 support élévateur Boy
- 1 ensemble de 5 barre + récipient en alu
- 1 bouilloire

Remarques : Le papier change de couleur au dessus de 40°C

16 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- thermodynamique
- équation de Navier-Stokes
- échelle mésoscopique
- transformée de Fourier

Introduction

Jusqu'ici en thermodynamique on a étudié des systèmes à l'équilibre. Maintenant on va se demander comment on pourrait expliquer les phénomènes de transports

Phénomène de transport : transport d'une quantité macroscopique extensive et conservée par des particules microscopiques.

Exemples : énergie u ; masse m ; quantité de mouvement \mathbf{p}

Ici on étudie des flux, donc on a nécessairement un système hors-équilibre

2min

16.1 Processus irréversibles

16.1.1 Hypothèses

On va faire principalement deux hypothèses pour pouvoir continuer à utiliser les outils développés en thermodynamique

Équilibre thermodynamique local (ETL) : tout volume mésoscopique de notre système macroscopique peut être considéré comme étant à l'équilibre thermodynamique.

On peut ainsi définir des champs tels que $T(\mathbf{r}, t)$; $u(\mathbf{r}, t)$; $\rho(\mathbf{r}, t)$

5min

Perturbation de faible amplitude de sorte que l'on puisse considérer des réponses linéaires

Remarques :

- l'hypothèse des faibles perturbations est très bien vérifiée dans la vie de tous les jours
- l'hypothèse de l'ETL revient à découpler une échelle de temps microscopique rapide et une échelle macroscopique lente

6min30

16.1.2 Grandeurs conservées

On considère un volume V entouré par une surface Σ et on s'intéresse à la variation d'une grandeur physique quelconque F au sein de ce volume.

On note $f(\mathbf{r}, t)$ la densité locale de la grandeur considérée, la conservation de F nous donne alors :

$$\underbrace{\int_V d^3r \frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{variation au sein du volume}} + \underbrace{\int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_f}_{\text{flux entrant et sortant}} = 0$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient ainsi l'équation de conservation locale :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0 \quad (16.1.1)$$

On a quelques exemples de comment cette équation de conservation locale s'exprime pour différentes quantités → **Diapo avec exemples d'équation de conservation locale**

10min15

16.1.3 Réponse linéaire

Ici on va raisonner de manière phénoménologique pour en déduire la forme des réponses du système à une perturbation.

Si on impose un gradient de température, un courant d'énergie se formera de sorte à minimiser ce gradient :

$$\mathbf{j}_u = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (16.1.2)$$

où λ est la conductivité thermique en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, qui caractérise la réponse linéaire. C'est la loi (empirique) de Fourier.

Ici le signe est imposé par le second principe, le flux thermique se fait du chaud vers le froid.

Si on impose un gradient de concentration, on obtient un flux massique, décrit par la loi de Fick :

$$\mathbf{j}_m = -\rho D_m \nabla c_m(\mathbf{r}, t) \quad (16.1.3)$$

où D_m est le coefficient de diffusion en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

Un dernier exemple est la loi d'Ohm locale, si on impose une variation de potentiel électrique on va avoir apparition d'un courant électrique :

$$\mathbf{j}_e = -\sigma \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (16.1.4)$$

où σ est la conductivité en électrique en S.m^{-1} .

→ Diapo avec des ordres de grandeur de λ , D_m et σ .

14min30

Si assez de temps : on peut faire l'expérience qualitative avec les barreaux métalliques pour mettre en évidence que λ varie

16.1.4 Types de transport

On a trois grand types de transport

- Conduction : mouvement microscopique → contient les effets de diffusion
- Convection : mouvement macroscopique (au sein d'un fluide)
- Radiation : flux de photons

On va se concentrer sur la diffusion et la convection thermique, on ne parlera pas de radiation. Notamment, on va chercher à comprendre quel est le phénomène dominant. → Vidéos sur la différence entre diffusion et convection : goutte d'encre dans de la gélatine (diffusion) versus dans l'eau (convection)

18min30

16.2 Transport diffusif

16.2.1 Équation de diffusion

Pour un état condensée on peut écrire :

$$du = cdT \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

En combinant la loi de Fourier et la conservation de l'énergie, on obtient donc l'équation de diffusion :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla^2 T = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \nabla^2 T \quad (16.2.1)$$

où $D_{th} = \frac{\lambda}{c\rho}$ est le coefficient de diffusion thermique, $[D] = L^2 T^{-1} (m.s^{-1})$.

→ Diapo avec schéma du système considéré

Cette équation n'est pas invariante par renversement du temps \Rightarrow la diffusion est un processus irréversible (création d'entropie)

20min45

En régime stationnaire, on va voir qu'on peut facilement remonter à la conductivité thermique λ

16.2.2 Mesure de la conductivité thermique

Expérience du barreau de cuivre : on chauffe (par effet Joule) un coté du barreau de cuivre en maintenant l'autre côté à température ambiante. On mesure alors le gradient de température qui permet de remonter au flux thermique. En utilisant l'expression de la puissance dégagée par la résistance, on a accès au coefficient de diffusion.

En effet si $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ et que l'on chauffe avec une résistance, l'équation de Fourier implique que $\nabla T = cste$ et

$$\begin{cases} -\lambda \nabla T(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_u \\ \mathcal{P} = \mathbf{j}_u \cdot \mathbf{S} \end{cases} \Rightarrow \lambda \frac{T_2 - T_1}{l} = \frac{\mathcal{P}}{S} \Rightarrow \lambda = \frac{\mathcal{P} l}{S \Delta T}$$

où $\mathcal{P} = UI$ est la puissance dégagée par la résistance (hypothèse forte que l'on n'a pas de pertes ici...)

Durée : 6min

16.2.3 Propriétés de la diffusion

On peut résoudre cette équation pour un système infini et T qui varie selon une dimension, avec comme condition initiale $T(x, 0) = T_0 \delta(x)$, en prenant la transformée de Fourier puis son inverse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}(k, t)}{\partial t} &= -k^2 D_{th} \tilde{T}(k, t) \\ \Rightarrow \tilde{T}(k, t) &= \tilde{T}_0 e^{-k^2 D_{th} t} \\ \Rightarrow T(x, t) &= \int dk \tilde{T}_0 e^{-ikx} e^{-k^2 D_{th} t} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{D_{th} t}} \tilde{T}_0 e^{-x^2/4D_{th} t} = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi D_{th} t}} e^{-x^2/4D_{th} t} \end{aligned}$$

On obtient une gaussienne qui s'étale au cours du temps (schéma au tableau). On a alors une longueur caractéristique de la diffusion $L \sim \sqrt{D_{th} t}$. Donc la diffusion est de plus en plus lente. Cette longueur proportionnelle à \sqrt{t} est caractéristique de la diffusion, même si on ne peut pas toujours définir une longueur caractéristique.

C'est important de voir qu'on a une situation très différente avec des ondes par exemple : dans ce cas la vitesse de propagation est indépendante du temps.

Maintenant que l'on a étudié en détail la diffusion, on va s'intéresser à la convection.

33min30

16.3 Transport convectif

16.3.1 Équation de convection

On parlera de convection quand les particules microscopiques qui transportent la quantité étudiée évoluent dans un fluide, donc dans des milieux liquides ou gazeux.

Par analogie avec l'équation de Navier-Stokes [la noter au tableau] qui contient un terme diffusif et un terme convectif [les souligner], on va ajouter un terme de convection à l'équation de la chaleur.

Comme le fluide est en mouvement, en plus du courant dû au gradient de température, on va ajouter un courant dû au mouvement du fluide à la loi de Fourier, soit dans un milieu condensé

$$\mathbf{j}_u = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t) + \rho c T \mathbf{v}$$

comme l'écoulement est incompressible $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et donc la conservation de l'énergie donne

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla T}_{\text{convection}} \right) = \underbrace{D_{th} \nabla^2 T}_{\text{diffusion}} \quad (16.3.1)$$

Ce terme de convection est dû au mouvement macroscopique du fluide, et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ est la vitesse locale du fluide.

Toujours par analogie avec Navier-Stokes, on va se demander quand est-ce que la convection domine la diffusion.

36min30

16.3.2 Loi de similitudes

Pour le déterminer, on va introduire le nombre de Péclet qui compare les termes diffusifs et convectifs, de manière analogue au nombre de Reynolds

$$Pe = \frac{|\mathbf{v} \cdot \nabla T|}{|D_{th} \nabla^2 T|} = \frac{UL}{D_{th}}$$

On a deux situations :

- $Pe \gg 1$ la convection domine
- $Pe \ll 1$ la diffusion domine

Ordre de grandeur pour l'eau : $D_{th} \sim 0,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (dans expérience de paillasse avec de l'eau, convection toujours dominante)

Cas du touillage du café [donner directement Pe] : $U \sim 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $L \sim 0,01 \text{ m} \Rightarrow Pe \sim 10^2 \gg 1$

41min15

Conclusion

En conclusion on a pu étudier dans cette leçon les phénomènes de transports, en détaillant la diffusion et en s'intéressant à quand la convection domine celle-ci.

On a vu que la diffusion ne domine qu'aux petites échelles dans des liquides. Elle joue notamment un rôle essentiel en biologie.

LP9 : Conversion de puissance électromécanique

17 Références

17.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PSI/PSI**, Dunod
- *Électromagnétisme*, Pérez
- *Électromagnétisme : Milieux, structures et énergie*, Rax
- *Électromagnétisme 3*, BFR
- *Magnétisme : statique, induction et milieux*, Garing
- *Le fameux poly de Jeremy, version moteur*, Montrouge, Neveu

17.2 Expériences

17.2.1 Réalisation d'un moteur synchrone

Matériel :

- 1 kit moteur synchrone (3 bobines + noyaux de fer + aiguille boussole)
- 1 fourche optique
- 2 oscilloscopes
- 1 transformateur triphasé
- 1 séparateur triphasé - monophasé
- 1 bobine
- N câbles bananes (sécurisés si possible)

Remarques : Attention la fréquence du transfo triphasé est indicatrice... Pour mesurer la fréquence du transfo il faut passer les 3 phases dans une bobine et regarder la FFT de la tension induite (utiliser l'option qui donne x de y_{max} sur l'oscilloscope).

18 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- électromagnétisme
- induction
- triphasé
- milieux ferromagnétique
- électrocinétique
- mécanique
- machine thermique

Introduction

Le phénomène d'induction électromagnétique met en évidence que l'on peut convertir de l'énergie mécanique en énergie électromagnétique et réciproquement.

Cette conversion d'énergie est à la base de notre société moderne et on va présenter les grands concepts qui permettent de réaliser cette conversion, avant de détailler un exemple précis.

18.1 Principes de la conversion

Commençons par définir quelques termes.

Moteur : conversion de puissance électromagnétique en mécanique.

Générateur : conversion de puissance mécanique en électromagnétique.

Convertisseur : système qui est soit un moteur, soit un générateur.

18.1.1 Bilan d'énergie

On va étudier d'un point de vue thermodynamique un convertisseur.

Considérons un convertisseur basé sur la rotation, composé d'un noyau magnétique statique et d'un noyau magnétique mobile → **schéma convertisseur rotatif**. L'énergie du système U sera la somme de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c de la partie mobile et de l'énergie électromagnétique \mathcal{E}_{em} stockée dans ses composantes, soit lors d'une transformation élémentaire du système

$$dU = d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_{em} = \delta W + \delta Q$$

où δW est le travail et δQ la chaleur fournie au système → **échange d'énergie lors de l'évolution du système**. Le travail reçu est égal à la somme d'un travail électrique $\delta W_e = \delta W_{em} + \delta W_J$ et mécanique $\delta W_{m_{ext}}$. Par ailleurs la variation de l'énergie cinétique de la partie mobile est la somme du travail mécanique extérieur, du travail mécanique fourni par la partie fixe et du travail des frottements

$$d\mathcal{E}_c = \delta W_{m_{ext}} + \delta W_m - \delta W_f$$

et les transferts de chaleur sont simplement due au frottements et à l'effet joule

$$\delta Q = -\delta W_J - \delta W_f$$

soit

$$\begin{aligned} \delta W_{m_{ext}} + \delta W_m - \delta W_f + d\mathcal{E}_{em} &= \delta W_{em} + \delta W_J + \delta W_{m_{ext}} - \delta W_J - \delta W_f \\ \iff \delta W_{em} &= d\mathcal{E}_{em} + \delta W_m \end{aligned} \quad (18.1.1)$$

l'énergie fournie par la source électrique se retrouve stockée dans le matériau magnétique et convertie sous forme de travail mécanique.

18.1.2 Couple électromagnétique

Ici le schéma électrique de la partie statique sera simplement une bobine traversé par un flux ϕ produisant une f.e.m. e en série avec une résistance, soit

$$u = Ri + \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \delta W_e = u i dt = Ri^2 dt + i d\phi$$

le premier terme correspond à W_J et le second à W_{em} . Par ailleurs ici $d\mathcal{E}_{em}$ est stockée sous forme magnétique, soit en notant L l'inductance du circuit

$$d\mathcal{E}_{em} = d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}i^2 dL + L i di.$$

Pour la partie mobile, sa rotation autour de l'axe \mathbf{e}_z est caractérisée par le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_z$. Cette rotation est due au travail du couple Γ_{em} , tel que $\delta W_m = \Gamma_{em} d\theta$. Ce couple qui traduit la

conversion d'énergie électromagnétique en énergie mécanique est appelé **couple électromagnétique**. Par ailleurs la rotation de la partie mobile va entraîner une modification de l'inductance, qui dépend donc de θ , soit $dL = \frac{dL}{d\theta}d\theta$.

Si on reprend le bilan d'énergie on a donc

$$\begin{cases} id\phi = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{d\theta}d\theta + Lidi + \Gamma_{em}d\theta \\ d\phi = d(L(\theta)i) = i \frac{dL}{d\theta}d\theta + Ldi \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{em} = \frac{1}{2}i^2 \frac{dL}{d\theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta} \right)_i$$

on admettra que ce résultat se généralise pour des systèmes plus complexes. On peut démontrer de la même façon que pour un système avec une partie mobile en translation selon x , on a une **force électromagnétique**

$$F_{em} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial x} \right)_i$$

On va maintenant étudier la machine synchrone, qui est un exemple de convertisseur électromagnétique réversible, fonctionnant en moteur ou en générateur.

18.2 Principe d'une machine synchrone

Une machine synchrone est composée d'un circuit magnétique en deux parties, avec un **stator** fixe et un **rotor** mobile qui peut entrer en rotation. Le stator et le rotor sont séparés par un entrefer. → [photo de moteur synchrone](#)

18.2.1 Modèle simplifié

On va commencer par étudier un modèle simple pour illustrer le principe du moteur. Dans ce modèle le stator est composé de trois bobines identiques avec un matériau ferromagnétique idéal (linéaire avec $\mu_r = +\infty$) et le rotor est composé d'un aimant permanent de moment magnétique \mathbf{M} et lui aussi idéal [montrer les composants sur la paillasse].

Comme le champ magnétique est canalisé par une barre ferromagnétique idéale, le champ produit par les bobines sera radial. Ici la première bobine forme un angle α avec l'axe \mathbf{e}_r et les deux autres sont tournés de 120° et 240° par rapport à cet axe, de sorte que le champ statorique total est

$$\mathbf{B}_s = k \left(i_1(t) \cos(\alpha) + i_2(t) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + i_3(t) \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \mathbf{e}_r$$

avec k un facteur qui dépend de la géométrie de la bobine et i_p le courant qui parcourt la bobine p . Si on alimente les bobines en triphasé avec

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}I_s \cos(\omega t) \\ i_2(t) = \sqrt{2}I_s \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) = \sqrt{2}I_s \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

soit, en notant $a = e^{-2i\pi/3}$ et en projetant sur \mathbf{e}_r

$$\begin{aligned}
B_s &= \sqrt{2}I_s k \left(\cos(\omega t) \cos(\alpha) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}I_s k}{2} \left(3 \cos(\omega t - \alpha) + \cos(\omega t + \alpha) + \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{8\pi}{3}\right) \right) \\
&= \frac{3I_s k}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \alpha) + \frac{I_s k}{2\sqrt{2}} \left(e^{i(\omega t + \alpha)}(1 + a^2 + a) + e^{-i(\omega t + \alpha)}(1 + a^{-2} + a^{-1}) \right) \\
&= K_s I_s \cos(\omega t - \alpha)
\end{aligned}$$

le stator produit donc un **champ tournant**.

18.2.2 Couple et synchronisme

Si le moment magnétique tourne avec une vitesse angulaire ω_0 par rapport à l'axe \mathbf{e}_z , l'angle entre le moment et le champ sera donc $\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t + \alpha$, et le couple exercé par le champ sur l'aimant selon l'axe \mathbf{e}_z sera donc

$$\Gamma_z = MK_s I_s \sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha) \Rightarrow \langle \Gamma_z \rangle = MK_s I_s \sin(\alpha)$$

uniquement si $\omega = \omega_0$. On voit que pour que le couple soit non nul, il faut que l'aimant tourne à la même vitesse que le champ, d'où le nom de moteur synchrone.

On va maintenant vérifier ça expérimentalement : on a ici une alimentation triphasée qui alimente trois bobines tournées de 120° par rapport aux autres, avec ici une aiguille de boussole comme aimant permanent. Pour mesurer la fréquence de la phase, on va passer les trois phases dans une bobine, ce qui va générer une tension par induction. On mesure cette tension à l'oscilloscope et en utilisant une FFT on va peut mesurer ω . Pour mesurer la fréquence de rotation de l'aimant, on va utiliser une fourche optique, qui va émettre un signal électrique à chaque passage de l'aiguille. En mesurant le temps entre 10 pics et en divisant par deux (l'aiguille passe deux fois lors d'un tour), on peut remonter à ω_0 . Finalement on voit bien que $\omega = \omega_0$.

Regardons maintenant la structure d'une machine réelle.

18.3 Machine synchrone réelle

18.3.1 Structure

Dans une machine réelle, le stator est composé par un ensemble de bobines dans un milieu ferromagnétique et le rotor par une bobine alimentée par un courant permanent I_r et insérée dans un milieu ferromagnétique.

Hypothèses :

- le stator et le rotor sont composés d'un matériau magnétique linéaire avec $\mu_r \gg 1$;
- l'entrefer à une épaisseur constante e , on parle de machine à **pôles lisses** ;
- la machine est composé de quatre circuits électriques, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ sur le stator et \mathcal{R} sur le rotor.

\mathcal{R} est appelé **circuit inducteur** et les circuits bobinés sur le stator sont appelés **circuits induits**.

On va regarder le champ \mathbf{B} généré par le rotor et le stator dans l'entrefer pour en déduire l'énergie électromagnétique emmagasiné par la machine.

18.3.2 Champs statorique et rotorique

Pour que chaque circuit statorique traversé par un courant i_p produise un champ de la forme $B_p = k i_p \cos \theta$, il va falloir qu'ils soient composés de plusieurs bobines. En effet, pour une bobine parcourue d'un courant $i \rightarrow$ schéma machine avec \mathcal{C} et θ

$$\oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H} = \begin{cases} i \\ H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = \frac{2B(\theta)e}{\mu_0} \end{cases} \Rightarrow B(\theta) = \frac{\mu_0 i}{2e}$$

car H est nulle dans le milieu magnétique. Par symétrie, $B(\theta) = -B(\theta + \pi)$ et on obtient donc un champ en créneau \rightarrow champ B , puis en ajoutant deux bobine en $+\pi/3$ et $-\pi/3$. Si on rajoute deux bobines décalés on aura le même champ en créneau mais décalé, on voit que les variations du champ se rapprochent d'un cosinus. Il "suffit" donc de placer n bobines espacées de π/n pour que chaque circuit crée un champ variant en $\cos \theta$. En alimentant les trois circuits en triphasé, on peut ainsi créer un champ statorique tournant comme précédemment

$$\mathbf{B}_s(\theta) = K_s I_s \cos(\omega t - \theta) \mathbf{e}_r \quad (18.3.1)$$

Pour le champ rotorique, la bobine est alimenté par une intensité constante I_r , mais elle est en rotation autour de l'axe \mathbf{e}_z avec un angle $\theta_r(t)$, soit

$$\mathbf{B}_r(\theta) = K_r I_r \cos(\theta_r - \theta) \mathbf{e}_r$$

avec donc un champ total

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_s \quad (18.3.2)$$

Calculons maintenant l'énergie et le couple de cette machine.

18.3.3 Bilan d'énergie et couple

Comme le champ est nul dans les milieux magnétiques, l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la machine est due au champ \mathbf{B} crée dans l'entrefer

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{em} &= \int_V d^3r \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{rle}{2\mu_0} (B_s^2 + B_r^2 + 2B_s B_r) \end{aligned}$$

avec r le rayon du rotor, $e \ll r$ l'entrefer et l la longueur de la machine selon z . Les deux premier termes de l'intégrale sont simplement des constantes par rapport à θ_r et correspondent à l'énergie emmagasinée dans le stator et le rotor respectivement [les entourer]. Le dernier terme est l'énergie de couplage entre le stator et le rotor, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{em} &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_r + \frac{rle}{\mu_0} K_r I_r K_s I_s \int_0^{2\pi} d\theta \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r - \theta) \\ &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_r + \frac{rle}{2\mu_0} K_r I_r K_s I_s \int_0^{2\pi} d\theta (\cos(\omega t - \theta_r) + \cos(\omega t + \theta_r - 2\theta)) \\ &= \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_r + \frac{\pi rle}{\mu_0} K_r I_r K_s I_s \cos(\omega t - \theta_r) \end{aligned}$$

et donc le couple électromagnétique exercé sur le rotor est

$$\Gamma_{em} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r} \right)_{I_s, I_r} = \frac{\pi rle}{\mu_0} K_r I_r K_s I_s \sin(\omega t - \theta_r(t)) \quad (18.3.3)$$

18.3.4 Régime et points de fonctionnement

Pour que le couple moyen au cours du temps soit non nul, il faut donc que le terme dans le sinus soit égal à un angle constant

$$\omega_t - \theta_r(t) = \alpha \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \quad (18.3.4)$$

on voit qu'on retrouve la condition de synchronisme déjà énoncée et dans ce cas

$$\langle \Gamma \rangle = \Gamma_{max} \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \Gamma_{max} = \frac{V}{2\mu_0} K_r I_r K_s I_s \quad (18.3.5)$$

où $V = 2\pi r l e$ est le volume de l'entrefer.

On voit qu'en augmentant les dimensions de la machine, on augmente aussi son couple maximal. Toutefois les champs sont inversement proportionnel à e , donc il faut que l'entrefer soit le plus fin possible pour augmenter le couple maximal.

Si on trace $\Gamma_{em}(\alpha)$, on voit qu'on a deux régimes de fonctionnement [schéma de Γ] :

- moteur pour $\alpha \in [0, \pi[$, le champ rotorique est en retard par rapport au champ statorique, qui l'entraîne ;
- alternateur pour $\alpha \in]-\pi, 0]$, l'inverse.

Si on impose un couple résistant, le moteur a deux point de fonctionnement [les ajouter sur le schéma]. Le premier est stable, car si le rotor ralenti, α va augmenter et le couple aussi, ce qui permettra au rotor de rattraper son retard. Le second est instable, car si le rotor ralenti, cette fois l'augmentation du retard entraîne une diminution du couple, ce qui va entraîner l'arrêt du rotor.

On voit que si on augmente le couple résistant, on va finir par dépasser le couple maximal et le moteur va finir par s'arrêter : on parle de **décrochage**. Par ailleurs au démarrage, le retard et le couple moyen sont nuls : il faut que le rotor accroche au champ statorique pour vaincre le couple résistant. Pour régler ce problème, on peut démarrer le moteur doucement pour que $\dot{\theta}_r \approx \omega$, ou alors utiliser un système extérieur qui lance le rotor.

18.3.5 Bilan de puissance et rendement

Comme le rotor est synchronisé avec le champ statorique, le flux qui le traverse est constant et il n'y a pas de tension induite. En revanche le champ rotorique change constamment pour le stator et les variations de son flux vont donc y induire une tension, appelée **force contre-électromotrice fcem**. En effectuant un bilan de puissance, on peut montrer que la puissance absorbée par les fcem induites dans les circuits statoriques sera exactement égale à la puissance mécanique fournie

$$\mathcal{P}_{meca} = \mathcal{P}_{fcem} \quad (18.3.6)$$

La puissance utile finale récupérée sera simplement la puissance électrique fournie, moins la puissance perdue par effet joule et par frottement → **schéma bilan de puissance dans le moteur**

$$\mathcal{P}_{elec} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{meca} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_u \quad (18.3.7)$$

et on peut alors définir le rendement

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{elec}} = 1 - \frac{\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_f}{\mathcal{P}_{elec}} \quad (18.3.8)$$

Contrairement à une machine thermique, il n'y a pas de limite théorique au rendement, qui est souvent supérieur à 95% pour les moteurs les plus efficaces (contre 30 – 40% pour des machine thermiques...).

En fait pour prendre en compte toutes les pertes, il faut aussi tenir compte des pertes fer dans le milieu magnétique lors de la conversion, ce qui ajoute un terme \mathcal{P}_{fer} au bilan de puissance, soit

$$\eta = 1 - \frac{\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{fer} + \mathcal{P}_f}{\mathcal{P}_{elec}} \quad (18.3.9)$$

Conclusion

Dans cette leçon on a vu le principe de la conversion de puissance électromécanique. On a étudié en détail la machine synchrone, qui peut fonctionner en moteur ou en générateur.

Il existe d'autres types de machine réversible, comme le moteur à courant continu ou le moteur asynchrone.

LP10 : Induction électromagnétique

19 Références

19.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1 PCSI*, Dunod
- *Électromagnétisme : Milieux, structures et énergie*, Rax
- *Électromagnétisme*, Pérez
- *Électromagnétisme 3*, BFR
- *Magnétisme : statique, induction et milieux*, Garing

19.2 Expériences

19.2.1 Mise en évidence de l'induction

Matériel :

- 1 bobine circulaire suspendue
- 1 aimant permanent
- 1 oscilloscope
- N câbles BNC
- N câbles banane

Remarques : On peut mettre en évidence l'origine vectorielle en changeant l'angle d'attaque de l'aimant

19.2.2 Mesure de l'inductance d'une bobine

Matériel :

- 3 bobines avec différentes valeurs de L
- 1 boîte à décade de résistance
- 1 boîte à décade de capacité
- 1 GBF keysight (interfaçable)
- 1 oscilloscope
- N câbles BNC
- N câbles banane

Remarques : On peut mesurer L avec un diagramme de Bode en mesurant la fréquence de coupure d'un circuit RL, ou en ajustant la phase d'un RLC avec arctan, ou en mesurant la fréquence de résonance d'un RLC

20 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- électrocinétique
- magnétisme
- fonction de transfert et diagramme de Bode
- force de Laplace

Introduction

Au cours du 18ème siècle les physicien-nes ont mis en évidence le phénomène d'induction → quelques dates

Expérience qualitative avec un aimant qu'on approche d'une bobine en visualisant la tension à ses bornes sur un oscilloscope

2min30

20.1 Loi de l'induction

20.1.1 Loi de Lenz

C'est une loi empirique : Tout système électromagnétique soumis à une force extérieure réagit de manière à s'y opposer

4min

20.1.2 Flux magnétique

On introduit le flux de \mathbf{B} à travers une surface Σ

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.1.1)$$

8min

son unité est le Weber W

Même si le flux est un scalaire, son origine vient de termes vectoriels, qui détermine son signe et son intensité

On a une loi de conservation du flux magnétique ce qui implique deux choses :

⇒ le flux à travers une surface fermée est nul

⇒ Φ dépend uniquement du contour de Σ (et donc du circuit)

10min

20.1.3 Loi de Faraday

Dans un circuit subissant une variation de flux, on a apparition d'un potentiel électrique que l'on appelle force électromotrice (f.e.m). Attention ce n'est pas une force contrairement à ce qu'indique son nom !

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{en V}) \quad (20.1.2)$$

$$\Rightarrow e = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (20.1.3)$$

On a deux types d'induction car le flux peut varier de deux façon :

— de Neumann : circuit fixe dans un champ variable

— de Lorentz : circuit mobile dans un champ stationnaire

13min45

20.2 Cas d'un circuit immobile dans un champ variable

20.2.1 Auto-induction

Si on regarde une bobine de N spires et de longueur l

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0 \frac{N}{l} i \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \Phi_{\text{spire}} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \mu_0 \frac{NS}{l} i \\ \Rightarrow \Phi_{\text{bobine}} &= N \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} i\end{aligned}$$

On peut introduire une grandeur L telle que $\Phi = Li$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l} \quad (20.2.1)$$

L est le coefficient d'auto-induction, en H.

18min

Loi de Faraday

$$\Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (20.2.2)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad (u_L = -e) \quad (20.2.3)$$

20min45

20.2.2 Mesure de l'inductance propre

Mesure de L à l'aide de la fréquence de coupure d'un circuit RL

Objectif : vérifier la loi en $N^2 \rightarrow$ **slide fonction de transfert avec diagramme de Bode**

Lancement diagramme de Bode avec interface python (23min30). Transfert des données sur qtiplot (25min45). Tracé du diagramme et mesure de f_c sur la courbe (27min).

$$f_c = 1130 \pm 20 \text{ Hz} \quad 29min30 \quad (20.2.4)$$

ajustement de $L = AN^n$

$$n = 2,04 \pm 0,07 \quad (20.2.5)$$

20.3 Circuit mobile dans un champ stationnaire

Manipulation qualitative en approchant la bobine de l'aimant

20.3.1 Rail de Laplace

Ici le champ est constant, mais la surface du circuit varie en fonction de la position $x(t)$ du rail

$$\Phi = S \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = Bl_0 x(t)$$

35min45

Loi de Faraday $e = \frac{d\Phi}{dt} = -Bl_0 v(t)$

Résistance R du circuit $i = e/R = -Bl_0 v/R$

On effectue le bilan des forces sur le rail \rightarrow force de Laplace

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \int_{\text{barreau}} i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = il_0 B \mathbf{e}_x \quad (20.3.1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{L}} = -\frac{B^2 l_0^2}{R} \mathbf{v} \quad (20.3.2)$$

on trouve un terme de type frottement fluide qui freine le barreau

38min45

\rightarrow slide schéma microphone

Conclusion

\rightarrow slide conclusion générale

\rightarrow slide transformateur

LP11 : Rétroaction et oscillations

21 Références

21.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1 PSI*, Dunod
- *Électronique - fondements et applications*, Pérez
- *Le fameux poly de Jeremy, version électronique*, Montrouge, Neveu

21.2 Expériences

21.2.1 Amplificateur non-inverseur

Matériel :

- | | |
|----------------------------------|-------------------|
| — 2 résistances AOIP | — 1 GBF |
| — 1 boîte à décade de résistance | — 1 AO (ALI) |
| — 2 boîtes à décade de capacité | — N câble BNC |
| — 1 alimentation ± 12 V | — N câbles banane |
| — 1 oscilloscope | |

21.2.2 Oscillateur à pont de Wien

Matériel :

- | | |
|----------------------------------|-------------------|
| — 3 résistances AOIP | — 1 oscilloscope |
| — 1 boîte à décade de résistance | — 1 AO (ALI) |
| — 2 boîtes à décade de capacité | — N câble BNC |
| — 1 alimentation ± 12 V | — N câbles banane |

Remarques : Bien séparer la partie amplification et filtre pour faciliter l'explication

22 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| — filtres linéaires | — oscillateur harmonique amorti |
| — fonction de transfert | — série de Fourier |
| — ALI, théorème de Millman | |

Introduction

On va s'intéresser dans cette leçon à différents systèmes qui sont soumis à des signaux d'entrée et émettent des signaux de sortie.

Si la sortie dépend uniquement de l'entrée, elle peut présenter l'inconvénient de ne pas être conforme aux attentes de l'utilisateur du système. Par exemple si on veut chauffer un four à une température précise, indiquer une température de chauffe n'est pas suffisant.

Pour pallier ce problème on va introduire le concept de *rétroaction* ou de *système bouclé*.

22.1 Système bouclé

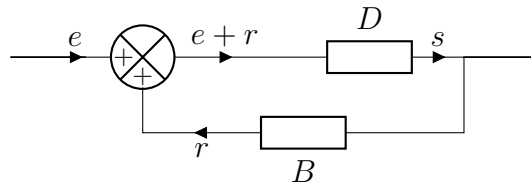
Rétroaction : c'est quand le signal de sortie est utilisé pour modifier le signal d'entrée

Si on relie la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée, on va pouvoir ajuster l'entrée pour contrôler finement la sortie à tout instant. On dit alors que le système est *asservi* au travers d'une rétroaction. Si on revient à l'exemple du four, si on ajoute un thermomètre on peut mesurer la température et changer la puissance délivrée par le four pour avoir une température constante.

En pratique on va formaliser ce concept pour des systèmes linéaires, avec une représentation symbolique à base de schéma bloc.

22.1.1 Schéma bloc

Le signal d'entrée e passe par une chaîne directe D et émet un signal de sortie $s = De$ [schéma direct]. Pour réaliser une rétroaction, on va ajouter une chaîne de bouclage de signal $r = Bs$ [ajout chaîne retour], que l'on va comparer avec le signal d'entrée pour en produire un nouveau $e + r$ [ajout comparateur].



Soit

$$s = D(e + r) = D(e + Bs) \implies s = \frac{D}{1 - DB}e$$

Notes :

- tous les système bouclé comportent ses trois éléments : chaîne direct, bouclage et comparateur
- toutes les grandeurs peuvent être complexe ici, mais on ne le note pas explicitement pour ne pas alourdir les notations.
- les signaux d'entrée et de sortie ne sont pas nécessairement de même nature !

On a ici le facteur d'amplification en boucle fermé $s = H_f e$

$$H_f = \frac{D}{1 - DB} \quad (22.1.1)$$

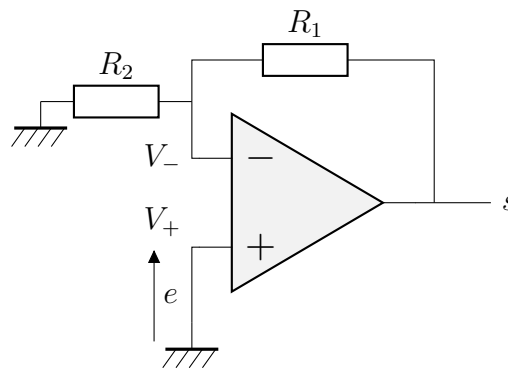
Le produit DB est appelé facteur d'amplification en boucle ouverte et on le note H_o . On peut souligner deux cas particuliers qui arrivent couramment :

- $|H_o| \gg 1$, dans ce cas $s \approx -\frac{1}{B}e$. C'est-à-dire que le signal de sortie dépend uniquement de la chaîne de bouclage, si $|B| \gg |D|^{-1}$. On peut donc totalement s'affranchir des imperfections de la chaîne directe et sans connaissance sur celle-ci. Exemple : moteur inconnu, mais on peut contrôler la vitesse avec un asservissement efficace.
- $|H_o| = 1$, dans ce cas $|H_f|$ diverge. Physiquement cela veut dire qu'un signal de sortie peut être émis sans signal d'entrée, sous l'effet d'une simple fluctuation. On reviendra sur cette situation plus tard.

Comme exemple assez simple de rétroaction, on va utiliser un montage amplificateur non-inverseur.

22.1.2 Exemple : amplificateur non-inverseur

Ici la rétroaction sert à amplifier le signal d'entrée → schéma électrique + équivalent en schéma bloc.
[Note : dans la plupart des livres, R_1 et R_2 sont inversés par rapport à mon choix]



Une application du théorème de Millman permet de calculer H_f simplement

$$\begin{aligned}
 V_- &= \frac{s/R_1 + 0/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{1}{1 + R_1/R_2} s \\
 V_+ &= e \\
 \Rightarrow \frac{s}{e} &= 1 + \frac{R_1}{R_2}
 \end{aligned}$$

Présentation rapide du circuit, démonstration qualitative de l'amplification

Maintenant qu'on a vu la rétroaction, on va se demander dans quelle situation elle mène à des systèmes stables.

22.2 Stabilité d'un système linéaire

Ici on va s'intéresser de manière générale à la stabilité d'un système dont l'entrée et la sortie sont reliés par une équation différentielle linéaire.

Cette partie est donc assez théorique, mais servira de base pour la suivante. Qu'est-ce que la stabilité ?

Déf : Un système est dit stable si après toute perturbation son signal de sortie reste borné autour de son signal d'équilibre.

Ou autrement en terme plus "électronique"

Déf : Si à toute entrée finie correspond une sortie finie quand t tends vers l'infini.

On va chercher à établir un critère mathématique à partir de cette définition.

22.2.1 Critère de stabilité

On va chercher des solutions de la forme $s(t) = ae^{-\omega t}$. Comme ω est complexe, notre définition de la stabilité implique que $Re(\omega) > 0$

Système d'ordre 1 :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = 0 \Rightarrow -\omega\tau + 1 = 0 \Rightarrow \omega = 1/\tau$$

Donc le système est stable si $\tau > 0$

Système d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s &= 0 \\ \Rightarrow \omega^2 - \omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

On a un discriminant caractéristique $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$. Il y a trois cas possibles :

1. $Q^2 = 1/4 \Rightarrow \Delta = 0$: racine double $\omega = \omega_0/2Q$
2. $Q^2 < 1/4 \Rightarrow \Delta > 0$: deux racines réelles $\omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$
3. $Q^2 > 1/4 \Rightarrow \Delta < 0$: deux racines complexes $\omega_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm i\sqrt{4Q^2 - 1}\right)$

En supposant $\omega_0 > 0$ par convention, la condition de stabilité impose que $Q > 0$. Dans le cas 1 on a un système stable amorti, dans le cas 2 un système stable sur-amorti, dans le cas 3 un système oscillant amorti.

On voit que pour les système d'ordre 1 et 2, la stabilité implique que tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe.

Maintenant on va se demander comment traduire ce critère pour des systèmes bouclés

22.2.2 Cas des systèmes bouclés

Pour un système bouclé, on a

$$s = H_f e \iff (1 - H_o)s = D e$$

En général $(1 - H_o)$ est un opérateur linéaire d'ordre 1 ou 2 et en le mettant sous forme canonique, on peut établir facilement la stabilité du système en utilisant les résultats établis précédemment.

Un cas particulier va nous intéresser : celui où l'entrée est nulle et où on veut que la sortie soit non-nulle à une certaine fréquence ω . Dans ce cas il faut que

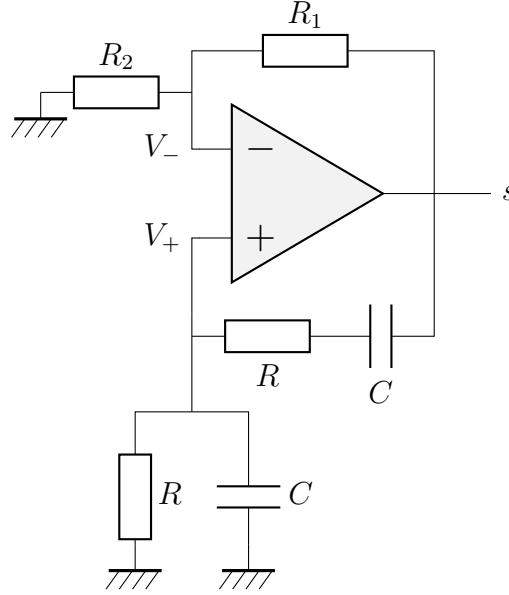
$$1 - H_o(\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H_o(\omega)| = 1 \\ \arg(H_o(\omega)) = 0 \end{cases} \quad (22.2.1)$$

c'est le **critère de Barkhausen**, que l'on admettra ici.

En pratique pour que les oscillations s'installent, il faut être légèrement au dessus du critère de Barkhausen $|H_o(\omega)| = 1 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$.

22.2.3 Exemple : montage à pont de Wien

On va étudier ici un montage composé d'un amplificateur et d'un filtre de Wien. On va se demander quand est-ce qu'un signal de sortie va apparaître malgré l'absence de signal d'entrée.



On a déjà calculé la fonction de transfert de la chaîne directe

$$D(\omega) = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (22.2.2)$$

Pour la chaîne de retour on peut faire le calcul facilement avec le théorème de Millman

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{s}{R + 1/i\omega C} + 0/R + 0 \cdot i\omega C}{\frac{1}{R + 1/i\omega C} + 1/R + i\omega C} s \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R + 1/i\omega C}{R} + (1/i\omega C + R)i\omega C} s \\ &= \frac{1}{1 + 1 - \frac{i}{\omega RC} + 1 + i\omega RC} s \end{aligned}$$

Soit en posant $\omega_0 = RC$:

$$r = \frac{1}{3 + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} s = B(\omega)s \quad (22.2.3)$$

En utilisant le critère de Barkhausen on va pouvoir établir deux conditions pour l'établissement d'un signal de sortie

$$1 - D(\omega)B(\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |D(\omega)B(\omega)| = 1 \\ \arg(D(\omega)B(\omega)) = 0 \end{cases}$$

La seconde condition implique que $\omega = \omega_0$, et la première que

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \left(\frac{1}{9 + (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}\right)^{1/2} = 1 \iff 1 + \frac{R_1}{R_2} = 3$$

Au final on voit qu'on aura un signal dont la fréquence est celle du filtre de Wien, si on respecte la condition que $R_1 = 2R_2$.

Réalisation expérimentale du pont de Wien, connexion du filtre au montage amplificateur non-inverseur. Vérification du critère que $R_1 \geq 2R_2$. Mesure de la fréquence propre de l'oscillateur. Discussion autour de la mise en place des oscillations.

Finalement on voit qu'on a réalisé un oscillateur de fréquence ω_0 ! Présentons quelques caractéristiques des oscillateurs.

22.3 Oscillateurs

Un oscillateur est un système dont l'évolution présente des variations alternativement croissantes et décroissantes de l'une de ses grandeurs caractéristiques. En électronique, les grandeurs concernées sont des courants ou des tensions.

Oscillateurs : système avec un comportement périodique.

22.3.1 Types d'oscillateurs

Un oscillateur s'amortit lorsque, en moyenne, la puissance dissipée est supérieure à la puissance des sources en régime libre.

Trois méthodes permettent d'entretenir les oscillations d'un circuit :

1. en ajoutant une source d'énergie externe, l'oscillateur forcé obtenu oscille à la fréquence de cette source
2. en faisant varier périodiquement un paramètre du circuit pour entretenir l'oscillation
3. en insérant un dipôle actif dans le circuit. L'oscillateur est alors dit auto-entretenu.

→ schéma des types d'oscillateurs.

Ici on s'intéresse au cas des oscillateur auto-entretenu, dit système auto-oscillant, qui sont les plus couramment utilisés.

22.3.2 Système auto-oscillant

Un exemple de tel système est l'oscillateur à pont de Wien que l'on vient de réaliser. On peut toujours modéliser ces oscillateur comme un système bouclé composé d'une **amplification** et d'un **filtre**.

Un autre exemple bien connu de tel oscillateur est le laser, dans le cas d'un He-Ne la cavité optique (Fabry-Pérot) joue un rôle équivalent à l'amplificateur opérationnel en renvoyant le signal lumineux amplifié dans le milieu amplificateur, mais il remplit aussi la fonction de filtre.

Pour de tel système on distingue trois types d'oscillations :

1. les oscillations sinusoïdale ou harmonique $s(t) = s_m \cos(\omega_0 t + \phi)$
2. les oscillations quasi-sinusoïdale, qui possèdent des harmoniques de faibles amplitudes
3. les oscillations à relaxation, qui sont riches en harmoniques (signal carré, triangulaire, etc.)

→ type d'oscillations

Ici pour l'oscillateur à pont de Wien, on est dans un cas d'oscillation quasi-sinusoïdale à cause du faible facteur de qualité du filtre ($Q = 1/3$). Démonstration qualitative en augmentant R_1 , ce qui entraîne l'apparition d'harmoniques.

Conclusion

En conclusion on a vu au cours de cette leçon le principe général de rétroaction, que l'on retrouve dans plusieurs domaines de la physique. Les rétroaction peuvent servir à réaliser des asservissements, que l'on a juste évoqué, ou bien des oscillateurs.

Les oscillateurs sont de nos jours essentiels en électronique, vu qu'ils sont à la base de toute nos unité de calculs numériques, les processeurs ayant besoin d'horloges régulières pour effectuer des calculs.

LP 12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale

23 Références

23.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, MP/MP**, Dunod
- *Électronique : fondements et applications*, Pérez
- *Le fameux poly de Jeremy, version électronique*, Montrouge, Neveu

23.2 Expériences

23.2.1 Filtrage d'un signal carré par filtre de Wien

Matériel :

- 1 oscilloscope
- 1 GBF keysight
- 2 boîte à décade à résistance
- 2 boîte à décade à capacité
- N câbles banane, BNC/banane, BNC

Remarques : On va réaliser un filtre passe-bande avec un filtre de Wien (cf leçon 11), pour sélectionner une fréquence d'un signal carré

24 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- onde harmonique
- pont diviseur de tension
- électronique en régime sinusoïdal

Introduction

On va s'intéresser dans cette leçon à la notion de signal et de comment on peut le traiter. Définissons un peu de ce dont on va parler

Signal : variation d'une quantité physique qui comporte une information d'intérêt.

→ Exemples : bruit d'une enceinte, température d'une pièce

Traitement d'un signal : transformation du signal, pour en faciliter l'analyse ou le transport.

Dans cette leçon on va surtout s'intéresser à l'étude de signaux $s(t)$ qui varient dans le temps. Pour ça on va introduire la notion d'**analyse spectrale**, en étudiant d'abord les signaux périodiques.

24.1 Analyse spectrale

24.1.1 Signaux périodiques

Tout signal périodique de fréquence f peut être recomposé par la superposition de signaux harmoniques et de fréquence multiple $0, f, 2f, \dots$, que l'on peut écrire comme

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (24.1.1)$$

où $\omega = 2\pi f$. a_0 est la valeur moyenne du signal sur une période T , qu'on appelle souvent décalage (*offset*)

$$a_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt s(t) \quad (24.1.2)$$

a_1, b_1 sont les composantes fondamentales. Les a_n, b_n pour $n > 1$ sont les harmoniques. La donnée de tous ces coefficients est le spectre du signal.

Cette somme est appelée **développement en série de Fourier** du signal $s(t)$. Il est souvent plus commode de calculer sa forme complexe avant de revenir à sa forme réelle

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) \quad (24.1.3)$$

où $c_0 = a_0$ et

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T dt s(t) \exp(-in\omega t) \quad (24.1.4)$$

Les c_n sont les **coefficients de Fourier complexes** de $s(t)$.

24.1.2 Exemple d'un signal carré

Regardons l'exemple d'une fonction créneau périodique telle que [schéma au tableau]

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, T/2] \text{ modulo } T \\ -1 & \text{si } t \in [T/2, T] \text{ modulo } T \end{cases}$$

On peut calculer facilement ses coefficients de Fourier complexes

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} dt e^{-in\omega t} - \frac{1}{T} \int_{T/2}^T dt e^{-in\omega t} \\ &= \frac{\omega}{2\pi - in\omega} \left(1 - \exp\left(-in\omega \frac{2\pi}{2\omega}\right) - 1 + \exp\left(in\omega \frac{2\pi}{2\omega}\right) \right) \\ &= \frac{2i}{2i\pi n} \sin(\pi n) \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \end{aligned}$$

et trivialement $c_0 = 0$. Donc $b_n = 0$ et

$$\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{1}{\pi(2p+1)} \end{cases}$$

Soit au final

$$s(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)\pi} \quad (24.1.5)$$

On voit que le signal ne comporte que des harmoniques pour n impairs et que leurs amplitudes diminuent faiblement en $1/n$, on a donc un signal très riche en harmonique. [Tracer l'allure des a_n]

En fait on peut voir avec un code python qu'il faut ajouter un très grand nombre d'harmoniques pour arriver à reproduire correctement un signal carré. → **Utilisation et explication d'un code python pour tracer $s(t)$ en ajoutant 1, 5, 10, 100, 1000 harmoniques**

Le fondamental et les premières harmoniques contiennent la forme générale du signal. Les harmoniques élevées contiennent les détails fins et les discontinuités éventuelles du signal.

Intéressons nous maintenant aux signaux non-périodiques.

24.1.3 Signaux non-périodiques

Pour étudier des signaux quelconque on va introduire **la transformée de Fourier** du signal

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{i\omega t} \quad (24.1.6)$$

Cette transformée n'est pas au programme, mais nous utiliserons deux de ses propriétés :

1. La transformée de Fourier d'un signal harmonique est une fonction nulle partout sauf à la fréquence du signal. Donc la transformée de Fourier d'un signal quelconque aura des pics d'intensité pour toutes les fréquences présentes dans le signal, on dit qu'elle permet de déterminer le spectre d'un signal.
2. Une autre propriété intéressante est que $\frac{ds(t)}{dt} \rightarrow i\omega s(\omega)$ quand on passe dans l'espace de Fourier, on retrouve donc des impédances complexes identiques en Fourier et en régime sinusoïdal.

Intéressons-nous à comment on peut traiter un signal en le filtrant.

24.2 Filtrage analogique

24.2.1 Concept d'un filtre linéaire

On parle de filtre linéaire quand un système qui reçoit un signal d'entrée $e(t)$ émet un signal de sortie $s(t)$ tel que

$$\sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k}{dt^k} s(t) = \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k}{dt^k} e(t) \quad (24.2.1)$$

où m et n sont des entiers positifs ou nuls tels que $m \geq n$ (condition de causalité) et les a_n, b_n sont des constantes.

m est **l'ordre du filtre**, ici on se limitera à $m = 1, 2$.

Regardons comment on représente un tel filtre.

24.2.2 Fonction de transfert et diagramme de Bode

Si on passe en Fourier, l'équation d'un filtre linéaire quelconque devient

$$\sum_{k=0}^n b_k (i\omega)^k s(\omega) = \sum_{k=0}^m a_k (i\omega)^k e(\omega)$$

On va donc introduire la fonction de transfert qui relie la sortie à l'entrée

$$H(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^m a_k (i\omega)^k} \quad (24.2.2)$$

on voit que le calcul de la fonction de transfert est équivalent à la donnée de l'équation différentielle qui régit le système étudié, en remplaçant les dérivées par $i\omega$ et inversement.

Pour représenter cette fonction de transfert, on va tracer le **gain** en décibel et la **phase** du système pour une gamme de pulsation en échelle logarithmique

$$G_{dB} = 20 \log(|H(\omega)|) \quad (24.2.3)$$

$$\varphi = \arg(H(\omega)) \quad (24.2.4)$$

Ces deux diagrammes tracé simultanément sont ce qu'on appelle un **diagramme de Bode** → **exemple diagramme de φ et de G_{dB}** .

Dans de tels diagrammes une chute de 3 dB correspond à une division par deux de l'amplitude du signal, on se sert donc de cette chute pour définir le type de filtre. On a quatre types de filtres possible → **diagrammes de Bode pour chaque type**

1. passe-bas : au delà de la fréquence de coupure le gain tends vers 0
2. passe-haut : en dessous de la fréquence de coupure le gain tends vers 0
3. passe-bande : en dehors d'une bande de fréquence le gain tends vers 0
4. coupe-bande : dans une bande de fréquence le gain tends vers 0

Pour que tout ça soit un peu plus concret, on va maintenant étudier deux filtres simples et les appliquer sur le signal carré étudié précédemment.

24.2.3 Exemple d'un filtre passe-bas (peut sauter)

Prenons un circuit RC $Z_R = R$ et $Z_C = 1/i\omega C$ en Fourier [schéma du circuit], comme on a un pont diviseur de tension, la fonction de transfert est simplement

$$H(\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

On voit que $\lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega) = 1$, alors que $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = 0$: on a bien un filtre passe-bas, le gain s'effondre pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure $\omega_c = 1/RC$.

Réalisation du diagramme de Bode du filtre (ou démonstration sur l'oscilloscope avec la wobulation ?), mesure de ω_c . Démonstration de l'effet sur un signal carré (on perd les basses fréquences donc on s'attend à perdre la forme du signal → si ω_c est suffisamment élevée on trouve un signal carré.

Étudions maintenant l'effet d'un filtre passe-bande.

24.2.4 Exemple d'un filtre passe-bande (peut sauter)

On va utiliser un filtre de Wien, dont la fonction de transfert est

$$H(\omega) = \frac{1}{3 + i \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où $Q = 1/3$ est le facteur de qualité et ω_0 est la fréquence de résonance.

On voit que $H(\omega)$ tends vers 0 si ω tends vers 0 ou $+\infty$, et qu'il prend sa valeur maximale à la fréquence de résonance $H(\omega_0) = 1/3$. Le facteur de qualité contrôle la force de la décroissance autour de la résonance.

Démonstration de l'effet sur un signal carré \rightarrow on s'attend à pouvoir retrouver un signal sinusoïdal en se mettant la fréquence fondamentale, mais ici le filtre a un facteur de qualité trop faible.

Dans cette partie on a étudié des filtres et des signaux analogiques, mais l'oscilloscope lui nous fournit un signal numérique. On va maintenant se demander comment décrire les signaux numériques.

24.3 Signaux numériques

24.3.1 Concepts et intérêts

Le principe de la numérisation d'un signal est de passer d'un signal analogique continu à une représentation numérique discrétisée, encodée dans une base binaire.

Les avantages sont multiples :

- le signal peut être stocké et réutilisé ;
- la représentation binaire immunise face aux petites perturbations du signal ;
- le signal peut être transformé numériquement de manière programmable et non-destructive.

En pratique un signal numérique est composé de *bit* qui peuvent prendre deux valeurs (0 ou 1), qui physiquement correspondent à deux tensions prédéfinies. Avec plusieurs bits on peut représenter un nombre en le décomposant sur dans la base 2, par exemple $25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 11001$, il faut donc 5 bits pour coder ce nombre.

Sans rentrer dans les détails technique, on peut encoder de la même manière un nombre réel. Plus on l'encode sur un grand de bits et plus on aura une grande précision.

Un signal est une succession continue de nombre réels, en le numérisant on ne va garder qu'un nombre de points fini, on dit qu'on va **l'échantillonner**.

24.3.2 Échantillonnage du signal

L'échantillonnage est l'opération de mesurer un signal en capturant des valeurs à intervalles réguliers. Si on regarde un signal sinusoïdal [schéma du signal], on voit qu'en fonction de la fréquence du signal on aura un échantillonnage plus ou moins fidèle. Si par exemple la fréquence d'échantillonnage est la même que la fréquence du signal, on va reconstruire un signal continu !

Ici on va admettre **le théorème de Nyquist-Shannon** : Un signal est correctement représenté à partir d'un échantillon, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale de son spectre.

On peut le formuler en terme de **critère de Shannon** : $f_e > 2f_{max}$.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment étudier des signaux à l'aide de l'analyse de Fourier et notamment la notion importante de spectre d'un signal.

On a vu le concept général de filtres linéaires et comment on pouvait filtrer un signal électronique pour le transformer.

Finalement on a abordé la notion de signal numérique, on a rapidement vu l'intérêt de la numérisation et l'importance du choix de la fréquence d'échantillonnage.

Dans une prochaine leçon on va pouvoir aborder l'étude du spectre d'un signal échantillonné, en utilisant l'algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT).

LP13 : Ondes progressives, ondes stationnaires

25 Références

25.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1 PSI/PSI**, Dunod
- *Physique tout-en-1 PC/PC**, Dunod
- *Mécanique : fondements et applications*, Perez
- *Optique : fondements et applications*, Perez

25.2 Expériences

25.2.1 Mesure de la vitesse propagation dans un câble coaxial

Matériel :

- 1 câble coaxial de 100 m
- 1 LCR-mètre
- 1 oscilloscope
- 1 GBF

Remarques :

26 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- physique des ondes (1ère année)
- électronique
- électromagnétisme

Introduction

Jusqu'ici on a étudié de manière descriptive les ondes et certains phénomènes qui y sont liés, comme les interférences. Dans cette leçon on va chercher à expliquer comment des ondes se forment et surtout comment elles se propagent. On va commencer par étudier un exemple pratique avec le câble coaxial.

26.1 Propagation d'une onde

26.1.1 Le câble coaxial

Un câble coaxial est formé d'un conducteur extérieur, la gaine, relié à la masse et d'un conducteur interne, l'âme. Les deux sont séparés par un isolant et c'est l'âme qui transmet le signal électrique. → **schéma du câble et du circuit le modélisant.**

La gaine est en général composé de fils de cuivre tressés, on peut donc modéliser le câble coaxial comme étant une bobine en parallèle d'un condensateur. Pour s'affranchir de la longueur du câble, on va le modéliser comme étant une succession continu d'inductance et de capacité. C'est-à-dire qu'une

longueur infinitésimale de câble dx aura une inductance linéique λ et une capacité linéique γ . Dans ce modèle on néglige les pertes et on n'a donc aucun élément résistif.

26.1.2 Équation de d'Alembert

Si on applique la loi des mailles on obtient une première équation qui relie intensité et tension

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x + dx, t) + \lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \\ \Leftrightarrow \frac{u(x, t) - u(x + dx, t)}{dx} &= \lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \\ \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

et en appliquant la loi des noeuds on obtient une seconde équation qui relie i et u

$$\begin{aligned} i(x, t) &= i(x + dx, t) + \gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t) \\ \Leftrightarrow \frac{i(x, t) - i(x + dx, t)}{dx} &= \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t) \\ \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) &= \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

On a deux équations couplées, si on les combine

$$\begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = \gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \end{cases} \Rightarrow -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

on obtient une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (26.1.1)$$

c'est l'équation de d'Alembert.

On voit que c'est le couplage entre la tension et l'intensité qui génère la propagation d'une onde électrique.

Regardons les propriétés de cette équation de propagation.

26.1.3 Propriétés de l'équation de propagation

La forme générale en 3 dimension de l'équation de d'Alembert pour une grandeur ψ est

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

c'est une équation aux dérivées partielles et elle modélise le phénomène de propagation de la quantité ψ à travers le temps et l'espace.

On peut faire quelques observations sur cette équation :

- elle couple l'espace et le temps ;

- elle est symétrique par inversion du temps et les solutions sont donc réversibles, ce qui est lié à l'absence d'amortissement ;
- elle est linéaire en ψ , donc on va pouvoir superposer les solutions comme en électromagnétisme ;
- la constante c que l'on appellera célérité est positive et a la dimension d'une vitesse : elle représente la vitesse de propagation de l'onde (on reviendra sur cette notion après)

Avant d'étudier les solutions de cette équation, regardons comment on peut mesurer la célérité pour un câble coaxial.

26.1.4 Mesure de la célérité

Pour le câble coaxial la célérité est $c = 1/\sqrt{\lambda\gamma}$.

Ici on a mesuré au LCR-mètre la valeur de l'inductance et de la capacité linéique, ce qui nous donne une valeur de c que l'on va vérifier en mesurant le temps de propagation de l'onde dans le câble.

Typiquement $\lambda \simeq 0,25 \mu\text{H.m}^{-1}$ et $\gamma = 100 \text{ nF.m}^{-1}$, soit $c \simeq 2.10^8$.

Mesure de la vitesse de propagation de l'onde dans le câble coaxial, on mesure le temps de propagation et on divise par 2 fois la longueur

Étudions maintenant la forme des solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

26.2 Solutions progressives

On étudie l'équation unidimensionnelle pour une grandeur oscillante ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) = 0$$

26.2.1 Ondes progressives

On admettra ici que toute fonctions de la forme $F(x - ct)$ ou $G(x + ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert. Ce sont des ondes progressives se propageant à la vitesse c , sans atténuation ni déformation.

- $F(x - ct)$ représente une solution qui se propage dans le sens positif de l'axe x ;
- $G(x + ct)$ représente une solution qui se propage dans le sens négatif de l'axe x .

De par sa linéarité, toute superposition de solutions de l'équation de d'Alembert est aussi solution, donc la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert est

$$\psi(x, t) = G(x + ct) + F(x - ct) \quad (26.2.1)$$

26.2.2 Ondes progressives harmoniques

Une onde est dite **progressive harmonique** quand G et F sont **sinusoïdales**. À 1 dimension une équation progressive harmonique s'écrit sous la forme

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (26.2.2)$$

ψ_0 et φ_0 sont l'amplitude et la phase de l'onde. Avec cette notation, ω est la **pulsation de l'onde** en rad.s^{-1} , k est la norme du **vecteur d'onde** qui décrit la direction de propagation et la fréquence spatiale, en rad.m^{-1} . Ces grandeurs sont reliés à la fréquence f et à la longueur d'onde λ

$$\omega = 2\pi f \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (26.2.3)$$

La pulsation temporelle ω est toujours positive, mais la pulsation spatiale k est algébrique et dépend du sens de propagation de l'onde ($k > 0$ pour le sens positif de l'axe x).

26.2.3 Équation de dispersion

Pour que la forme précédente soit solution de l'équation de propagation, la pulsation spatiale et temporelle doivent être reliés par une **équation de dispersion** caractéristique de l'équation de d'Alembert, en effet

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) &= k\psi_0 \frac{\partial}{\partial x} \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = -k^2 \psi(x, t) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) &= -\omega^2 \psi(x, t)\end{aligned}$$

donc

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \psi(x, t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (26.2.4)$$

On voit qu'on a deux solutions $k = \pm\omega/c$, qui correspondent aux deux sens de propagation possible.

L'équation de dispersion relie la pulsation spatiale k et temporelle ω pour une onde qui vérifie l'équation de propagation.

Cette relation permet de calculer la vitesse de phase de l'onde.

26.2.4 Vitesse de phase

La vitesse de phase est la vitesse à laquelle une onde progressive harmonique se propage

$$v_\varphi = \left| \frac{\omega}{k} \right| \quad (26.2.5)$$

Pour une onde décrite par l'équation de d'Alembert, $v_\varphi = c$ et les ondes se déplacent toutes à la même vitesse, quelque soit leur fréquence.

On voit que si l'équation de dispersion relie non-linéairement ω et k , la vitesse de propagation de l'onde dépendra de la fréquence de celle-ci.

Si on considère une onde composée d'une superposition d'ondes progressives harmoniques initialement superposées, on aura donc une dispersion des composantes de l'onde au fur et à mesure de sa propagation, d'où le nom de la relation qui relie ω et k .

On va maintenant s'intéresser à un type particulier de solutions de l'équation de propagation, celui des ondes stationnaires.

26.3 Solutions stationnaires

26.3.1 Onde stationnaire

Si on superpose deux ondes progressives harmoniques de même amplitude, phase et fréquence, mais de vecteur d'onde opposé

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \psi_0(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) \\ &= 2\psi_0 \cos(\omega t) \cos(kx)\end{aligned}$$

on voit qu'on a découplé la dimension spatiale et temporelle : on n'a plus de propagation, l'onde est stationnaire.

La forme générale d'une onde stationnaire est

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \phi) \quad (26.3.1)$$

avec $k = \omega/c$.

On voit que les ondes stationnaires et les ondes progressives sont deux types de solutions pour l'équation de d'Alembert et que l'une mène à l'autre. On parle de **base de solutions**, toute solution de l'équation de d'Alembert peut être décomposée sur la base stationnaire ou progressive. En fonction du problème étudié l'une des deux solutions sera plus pratique que l'autre.

Pour comprendre le contenu physique d'une onde stationnaire, on va maintenant étudier une corde vibrante.

26.3.2 Corde vibrante

Pour une corde de longueur L , de tension T_0 et de masse linéique μ , c'est le couplage entre le déplacement y et la tension T de la corde qui donne naissance à des oscillations. La propagation du déplacement y est décrite par l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, avec une célérité

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (26.3.2)$$

Si la corde est fixée à ses extrémités, la base de solution la plus pratique est celle des ondes stationnaires $y(x, t) = \cos(\omega t + \varphi) (A \cos(kx) + B \sin(kx))$

On a deux conditions aux limites

$$\begin{cases} y(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ y(L, t) = \cos(\omega t + \varphi) (A \cos(kL) + B \sin(kL)) = 0 \end{cases}$$

donc $A = 0$ et $\sin(kL) = 0$, soit

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (26.3.3)$$

On voit que les conditions aux limites impliquent que la pulsation de l'onde est quantifiée.

Les fréquences sont donc toutes des multiples d'une fréquence appelée **fréquence fondamentale**

$$f_n = n f_0 \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{c}{2L}$$

les fréquences $f_n, n > 1$ sont appelées des harmoniques.

Les solutions particulières sont donc de la forme

$$y_n(x, t) = C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right). \quad (26.3.4)$$

Ce sont les modes propres, les ω_n étant les pulsations propres.

On remarque que plus la corde est grande, plus la fréquence fondamentale est basse et le son est grave.

C'est pour cela qu'un violon a un son plus aigu qu'un violoncelle. → **Premiers modes de la corde.**

En fait une solution générale sera une somme de tous les modes propres, la corde vibrant dans une superposition de plusieurs modes

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

la valeur des coefficients C_n étant déterminés par les conditions initiales, c'est-à-dire comment la corde est perturbée.

Conclusion

Finalement on a vu pendant cette leçon comment la propagation des ondes pouvait être décrite par l'équation de d'Alembert. Cette équation a deux bases de solutions : des ondes stationnaires ou des ondes progressives. Toute solution de l'équation est une superposition de ces deux types d'ondes. Les conditions aux limites vont quantifier l'onde, qui ne pourra exister que dans certains modes, la solution générale étant une superposition de ces modes.

LP14 : Ondes acoustiques

27 Références

27.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Thermodynamique*, DGLR
- *Thermodynamique - fondements et applications*, Pérez

27.2 Expériences

27.2.1 Mesure de la vitesse du son

Matériel :

- | | |
|----------------------|------------------------------------|
| — 1 quartz émetteur | — 2 pieds sur rail pour les quartz |
| — 1 quartz récepteur | — 1 rail optique |
| — 1 oscilloscope | — 2 câbles BNC/banane |
| — 1 GBF GX-320 | — N câbles banane |

Remarques : Attention à l'alignement des piézoélectrique, utiliser un rail optique permet de mesurer plus précisément la distance entre les deux. Il faut discuter la forme du signal et comment on choisit le point de mesure.

28 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- | | |
|------------------------------------|-------------------|
| — équation de d'Alembert | — hydrodynamique |
| — ondes progressives/stationnaires | — thermodynamique |

Introduction

Dans cette leçon on va chercher à comprendre qu'est-ce que c'est le son et comment il se propage.

Onde acoustique : onde de compression longitudinale qui se propage dans un milieu matériel.

Domaine acoustique : gamme de fréquence détectable avec des oreilles humaines : entre 20 Hz et 20 kHz.

28.1 Propagation dans un fluide

28.1.1 Approximations

Pour décrire une onde acoustique on va considérer trois champs : la vitesse du fluide $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, la pression dans le fluide $P(\mathbf{r}, t)$ et la densité du fluide $\rho(\mathbf{r}, t)$.

L'évolution de la première est décrite par la dynamique des fluides, celle de la seconde par l'équation d'état du fluide et pour la dernière c'est la conservation de la masse.

On va supposer que le fluide est initialement au repos et qu'il est soumis à de faibles perturbations, de sortes que

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) & |\mathbf{v}_1| = v_1 \ll c \\ P(\mathbf{r}, t) &= P_0 + P_1(\mathbf{r}, t) & P_1 \ll P_0 \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \underset{\text{repos}}{\rho_0} + \underset{\text{onde}}{\rho_1(\mathbf{r}, t)} & \rho_1 \ll \rho_0\end{aligned}$$

où c est une vitesse caractéristique que l'on précisera plus tard. P_1 est appelée la surpression, pour bien la distinguer de la pression d'équilibre du fluide. À partir de maintenant on va omettre les dépendances explicites en position et en temps pour alléger les écritures.

Une dernière hypothèse que l'on va faire est que l'on peut négliger les effets de diffusion thermique et de viscosité pour décrire l'onde acoustique, ce qui revient à considérer que l'évolution du fluide est adiabatique et réversible : **c'est l'approximation isentropique.**

Pour trouver l'équation de propagation, on va maintenant linéariser les équations constitutives du fluide en ne gardant que les termes d'ordre 1 et en négligeant les effets de la gravité : **c'est l'approximation acoustique.**

28.1.2 Équation de propagation

Commençons par linéariser l'équation d'Euler (on néglige la viscosité)

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{ordre 2}} \right) &= -\nabla P \\ \Rightarrow (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\nabla P_0 - \nabla P_1 \\ \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\nabla P_1\end{aligned}$$

car P_0 est indépendant de la position et que $\rho_1 \partial_t \mathbf{v}_1$ est d'ordre 2.

Puis l'équation de conservation de la masse

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \rho) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_1(\rho_0 + \rho_1)) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1\end{aligned}$$

Il manque une dernière équation pour pouvoir caractériser l'évolution de \mathbf{v}_1, P_1 et ρ_1 séparément. Comme on a fait l'hypothèse que l'évolution était isentropique, on va utiliser le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_S$$

or P_1 et ρ_1 sont des infiniment petits, on peut donc réécrire cette équation

$$\begin{aligned}\rho \chi_S &\simeq \frac{\rho_1}{P_1} \\ \Rightarrow \rho_0 \chi_S P_1 &= \rho_1\end{aligned}$$

En combinant ces trois équations on peut trouver l'équation de propagation de la surpression

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} &= -\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \\ &= \rho_0 \frac{\nabla^2 P_1}{\rho_0} \\ \Rightarrow \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} &= \nabla^2 P_1\end{aligned}$$

soit en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P_1 = 0 \quad (28.1.1)$$

la propagation de la surpression est décrite par l'équation de d'Alembert. Les ondes acoustiques sont donc le résultats du couplage entre la surpression et les variations du champ de vitesses. → **Ordre de grandeur de c pour différents fluides**

Regardons comment s'exprime la célérité de l'onde dans un gaz.

28.1.3 Mesure de la célérité dans un gaz

On va supposer que le gaz est parfait, dans ce cas en utilisant la loi de Laplace et la loi des gaz parfait on peut démontrer que

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

où γ est le rapport des capacité thermique à pression et volume fixé.

Dans le cas de l'air atmosphérique, $\gamma = 7/5 = 1,4$, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$, $T_0 = 293 \text{ K}$ et comme l'air est composé à 20% de dioxygène et à 80% de diazote, $M = 29.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$. On trouve $c = 343 \text{ m.s}^{-1}$. Regardons si on peut vérifier ce résultat expérimentalement. On a ici deux piézoélectrique, qui se dilatent quand ils sont soumis à une tension électrique, ou qui émettent une tension électrique quand ils sont dilatés. Un des piézoélectrique est alimenté par un GBF, il va donc vibrer et générer une onde acoustique. Le second va recevoir cette onde acoustique et générer une tension, que l'on va mesurer avec cet oscilloscope.

Ici on envoi un signal sinusoïdal de la forme $\cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda)$, donc le signal reçu sera en phase si la distance parcouru par l'onde est un multiple de la longueur d'onde. L'émetteur est en x_e et on place le récepteur en x_r , de sorte que le signal soit en opposition de phase pour faciliter la visualisation. On décale ensuite le récepteur de 10 longueurs d'onde en $x_{r,10}$, de sorte que

$$\begin{cases} x_e = x_r - \frac{n}{2}\lambda \\ x_e = x_{r,10} - \left(\frac{n}{2} + 10\right)\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{x_{r,10} - x_r}{10}$$

ce qui permet de calculer la célérité de l'onde

$$c_s = \lambda\nu \quad (28.1.2)$$

On voit que l'on mesure une célérité tout à fait cohérente avec notre modélisation ! Regardons maintenant comment l'onde sonore transporte de l'énergie.

28.2 Aspects énergétique

28.2.1 Densité de courant énergétique

Le sens et la direction du transport de puissance sont décrits par le vecteur densité de courant énergétique acoustique, noté $\mathbf{\Pi}$. Ce vecteur est défini telle que la puissance qui traverse une surface est [schéma avec surface et vecteurs]

$$dP = \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{\Sigma}$$

on voit que la dimension du vecteur densité de courant énergétique acoustique est une puissance par une surface, qu'on exprime en W.m^{-2} : $\mathbf{\Pi}$ est une puissance surfacique.

La puissance transmise à un petit élément de surface est simplement le produit scalaire de la vitesse du fluide et de la force de pression

$$dP = P_1 d\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{v}_1$$

donc

$$\mathbf{\Pi} = P_1 \mathbf{v}_1 \quad (28.2.1)$$

Grâce à ce vecteur, on va pouvoir définir l'intensité sonore.

28.2.2 Intensité sonore

L'**intensité sonore** est simplement la moyenne temporelle de la norme du vecteur densité de courant énergétique

$$I = \langle |\mathbf{\Pi}| \rangle \quad (28.2.2)$$

Comme l'oreille humaine ne perçoit qu'une sensation sonore multipliée par 2 quand l'intensité est multipliée par 10, on dit qu'elle se comporte comme un détecteur logarithmique et on va introduire le **niveau sonore** en décibel

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{min}} \right) \quad \text{où} \quad I_{min} = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2} \quad (28.2.3)$$

I_{min} est fixé conventionnellement et correspond à un seuil d'audibilité moyen de l'oreille humaine. → **ordre de grandeur de l'intensité pour différents son avec le seuil de douleur.**

Le minimum d'audition varie d'un individu à un autre et il varie aussi en fonction de la fréquence, l'oreille humaine étant plus sensible aux hautes fréquences (son aigu) qu'aux basses (son grave) → **allure du seuil d'audition humaine.** C'est pour cela qu'on a défini le domaine acoustique comme variant de 20 Hz à 20 kHz.

Les sons au delà de 20 kHz sont appelés des ultrasons, les chauves-souris s'en servent notamment pour s'orienter.

28.3 Validité des approximations

28.3.1 Approximation acoustique

Si on considère une onde plane progressive monochromatique

$$\begin{cases} P_1(\mathbf{r}, t) = P e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \end{cases}$$

comme $\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{P}{\omega \rho_0} \mathbf{k}$, et que $\langle \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle = 1/2$ l'intensité sonore est

$$I = \frac{P^2}{2\rho_0 c} \Rightarrow I_{dB} = 10 \log \left(\frac{P^2}{2\rho_0 c I_{min}} \right)$$

soit

$$\begin{cases} P = \sqrt{2\rho_0 c I_{min} \cdot 10^{I_{dB}/10}} \\ v = \frac{P}{c\rho_0} \end{cases}$$

Pour une onde dans de l'air atmosphérique de densité $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ et de célérité $c = 343 \text{ m.s}^{-1}$ à température ambiante, on trouve que P et v sont effectivement toujours très faible devant la pression atmosphérique et la célérité du son \rightarrow **valeur de v et de P de 10 à 120 dB.**

28.3.2 Approximation isentropique

De même si on compare l'énergie transportée par une onde sonore de fréquence f et de longueur d'onde λ sur une période temporelle

$$U = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \sim \rho c f T$$

et celle transportée par transfert thermique sur une période spatiale

$$Q = \kappa \nabla^2 T \sim \kappa \frac{T}{\lambda^2}$$

en introduisant le coefficient de diffusion thermique $D_{th} = \kappa/\rho c$ on trouve

$$\frac{Q}{U} \sim \frac{\kappa}{\rho c} \frac{1}{f \lambda^2} \sim \frac{D_{th} f}{c^2}$$

Dans l'air atmosphérique, $D_{th} \sim 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, donc pour $f \sim 20 \text{ kHz}$, $Q/U \sim 10^{-6}$. Le transfert thermique est donc totalement négligeable et on a bien une évolution adiabatique du fluide.

On peut mener le même raisonnement en comparant l'accélération du fluide et le terme de frottement visqueux ce qui donne

$$\frac{f}{a} \sim \frac{\nu v_1}{\lambda^2} \frac{1}{v_1 f} \sim \frac{\nu f}{c^2} \quad (28.3.1)$$

comme $\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f/a \sim 10^{-7}$. Les forces visqueuses sont donc complètement négligeable et on a bien une évolution réversible du fluide.

Conclusion

On a vu dans cette leçon comment on pouvait décrire le son comme une onde acoustique, en linéarisant les équations constitutives du fluide qui transporte le son. L'onde est dû au couplage entre les variations de la vitesse du fluide et les variations de la surpression.

On a aussi pu vérifier que pour tout le domaine audible, les hypothèses utilisées sont très bien vérifiées. On peut utiliser ces ondes pour caractériser les instruments sonores.

LP15 : Propagation guidée des ondes

29 Références

29.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1*, Dunod
- *Électromagnétisme 2*, Feynman
- *Électromagnétisme 2*, Faroux, Renault
- *Ondes acoustiques*, Chaigne
- *Vibrations, propagation, diffusion*, Soutif
- *BUP*, n° 742

29.2 Expériences

29.2.1 Mesure de la vitesse de groupe

Matériel :

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| — 2 tubes PVC de 2m | — 1 GBF GX-320 |
| — 1 quartz émetteur | — 2 pieds pour les quartz |
| — 1 quartz récepteur | — N câbles banane |
| — 1 oscilloscope | — N câbles BNC/banane |

Remarques : Discuter de pourquoi on excite plusieurs modes : paquet d'onde carré \Rightarrow enveloppe qui comporte plusieurs modes. Pour la mesure de la vitesse de groupe, mesurer au préalable le décalage entre émission et réception en sinusoïdal, puis mesurer la vitesse au centre des groupes

29.2.2 Mise en évidence de l'atténuation

Matériel : cf. expérience précédente

Remarques : Expérience qualitative pour montrer l'atténuation, due à la sphéricité des ondes $\psi(r) \propto e^{ikr}/r$. La manipulation peut être rendue quantitative en utilisant un rail optique, il faut prendre les pieds adaptés dans ce cas, mais ça risque de faire long...

30 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| — onde plane progressive harmonique | — onde acoustique |
| — analyse de Fourier, paquet d'onde | — onde électromagnétique |
| — milieu dispersif | — propagation dans un câble coaxial |

Introduction

Si on regarde une onde émise par une source, la conservation de l'énergie impose que l'amplitude de l'onde s'atténue au fur et à mesure de la distance parcourue. On peut le voir en regardant une onde acoustique émise par un micro à 40 kHz, si on éloigne le micro qui mesure l'onde émise, on voit que l'amplitude décroît. [Démonstration qualitative de l'atténuation en écartant le récepteur de l'émetteur.](#)

Par ailleurs l'onde est émise selon une certaine direction et on ne contrôle pas là où elle va aller que grossièrement en bougeant l'émetteur.

Si on veut pouvoir transmettre des signaux sur de longues distances avec des ondes, ces deux problèmes sont rédhibitoire et c'est pour les pallier que l'on va étudier la propagation guidée d'ondes.

Guide d'onde : dispositifs permettant de guider une onde en imposant des conditions aux limites selon certaines directions.

Un exemple simple d'un tel dispositif est simplement un tuyau cylindrique : si on l'ajoute on voit que le signal reçu gagne en intensité. [Démonstration qualitative en ajoutant le tuyau.](#)

On va maintenant regarder ce qu'implique la présence d'un guide d'onde pour des ondes acoustiques.

30.1 Ondes acoustiques dans un guide rectangulaire

30.1.1 Équation de propagation (version complète)

On va considérer une onde acoustique caractérisée par la surpression $p(\mathbf{r}, t)$ et la vitesse du fluide $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, qui se propage dans un guide rectangulaire creux [schéma du guide d'axe z , avec une largeur l selon x et une hauteur h selon y]. Dans l'air la surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (30.1.1)$$

où c_s est la vitesse du son dans l'air.

On va chercher une solution de la forme

$$p(\mathbf{r}, t) = \chi(x)\gamma(y)\zeta(z)e^{i\omega t}$$

ce qui va nous permettre d'exprimer des équations différentielles séparées pour χ , γ et ζ à partir de l'équation de d'Alembert, en y injectant cette forme de p

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{c_s^2} &= 0 \\ \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= k^2 - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \end{aligned}$$

en notant $k = \omega^2/c_s^2$. Comme les deux termes de cette équation ne dépendent pas de la même variable, cette égalité n'est possible que si ces termes sont égaux à une constante homogène au carré d'un vecteur d'onde, que l'on notera $-k_x^2$. Soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= -k_x^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} &= k_x^2 - k^2 + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} = -k_y^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} &= -k_x^2 - k_y^2 + k^2 = -k_z^2 \end{aligned}$$

On a trois équations d'oscillateurs harmoniques, avec trois constantes k_x , k_y et k_z à déterminer, reliées par la relation

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} = 0 \quad (30.1.2)$$

30.1.2 Modes et fréquences de coupure

Une solution générale est de la forme $\chi(x) = x_1 e^{ik_x x} + x_2 e^{-ik_x x}$. Les parois du guide impliquent que la composante normale de la vitesse y est nulle, or d'après l'équation de Navier-Stokes linéarisée

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla p \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{en } x = 0, l \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{en } y = 0, h \end{cases}$$

où ρ_0 est la densité du fluide au repos. Donc on a deux relations pour χ

$$\begin{cases} x = 0 : & x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_0 \\ x = l : & x_0 (e^{ik_x l} - e^{-ik_x l}) = 0 \Rightarrow \sin(k_x l) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$k_{x,n} = \frac{\pi n}{l} \quad \text{et} \quad \chi(x) = 2x_0 \cos(k_{x,n} x) \quad (30.1.3)$$

De même on peut montrer que

$$k_{y,m} = \frac{\pi m}{h} \quad \text{et} \quad \gamma(x) = 2y_0 \cos(k_{y,m} y) \quad (30.1.4)$$

et

$$k_{z,m,n} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \quad (30.1.5)$$

on voit que les conditions aux limites donnent naissances à des modes de propagations et que la propagation dans le guide est dispersives : la solution générale est une superposition de plusieurs modes.

Par ailleurs on voit apparaître une fréquence de coupure

$$\nu_c = \frac{c_s}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{l}\right)^2 + \left(\frac{m}{h}\right)^2} \quad (30.1.6)$$

telle que

- si $\nu > \nu_c$, alors $k_{z,m,n}$ sera réel et le mode se propagera
- si $\nu < \nu_c$, alors $k_{z,m,n}$ sera imaginaire et le mode sera évanescente
- si $\nu = \nu_c$, alors $k_{z,m,n}$ sera nul et le mode sera stationnaire.

Le mode fondamental $(0,0)$ se propage toujours dans le guide, et la fréquence des modes plus élevées ne fait que diminuer.

On peut donner une interprétation qualitative à cette fréquence de coupure : pour le mode $(1,0)$, $\nu_c = c_s/2l$, soit $\lambda_c = 2l$. Donc si on diminue la fréquence, la longueur d'onde dépassera 2 fois la largeur du guide et la perturbation sera réfléchiée sur le guide. **On voit donc qu'un guide de petite taille laissera donc moins de modes se propager.**

Regardons maintenant ce que donne la propagation d'ondes acoustiques dans un guide cylindrique.

30.2 Dispersion acoustique dans un guide cylindrique

30.2.1 Modes et dispersion

On va considérer un guide cylindrique d'axe z , de rayon r et de diamètre d . On pourrait mener la même étude que précédemment, ce qui nous amènerait à des solutions plus compliquées pour $p(r, \theta, z, t)$, avec des fonctions de Bessel de première espèce, dont la forme a peu d'intérêt. Ce qui est important, c'est que les résultats physiques du guide rectangulaire sont conservés, avec des modes (m, n) de propagation, mais avec une relation de dispersion et des fréquences de coupures modifiées.

Les conditions aux limites du guide cylindrique vont faire apparaître des modes de propagation caractérisés par la relation de dispersion

$$k_{z,m,n} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{\mu_{m,n}}{r}\right)^2} \quad (30.2.1)$$

où $\mu_{m,n}$ sont les zéros de la *dérivée* de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m . Donc la fonction de coupure sera cette fois

$$\nu_c = \frac{\mu_{m,n}}{2\pi r} c_s \quad \text{avec} \quad \nu_{c,0,1} = \frac{3,83}{2\pi r} c_s \quad (30.2.2)$$

pour le mode le plus bas, ce qui donne en terme de longueur d'onde

$$\lambda_c = \frac{2\pi r}{\mu_{m,n}} \quad \text{avec} \quad \lambda_{c,1,1} = 1.64r \quad (30.2.3)$$

Comme pour le guide rectangulaire, on a une dispersion des modes de vibrations dans le guide. Chaque mode a une vitesse de groupe, en notant $k = k_{z,m,n}$ pour simplifier

$$\begin{aligned} k dk &= \frac{\omega}{c_s^2} d\omega \\ \Rightarrow v_g &= \frac{d\omega}{dk} = c_s^2 \frac{k}{\omega} \\ &= c_s^2 \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 - \left(\frac{\mu_{m,n}}{r}\right)^2} \\ &= c_s \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_{m,n} c_s}{2\pi \nu r}\right)^2} \end{aligned} \quad (30.2.4)$$

On a $\mu_{0,0} = 0$, soit $v_g = c_s = 343 \text{ m.s}^{-1}$: on a une onde plane pour le mode fondamental. Plus les modes sont élevés, plus leurs vitesses diminuent, inversement la vitesse des modes tend vers c_s si ω tends vers l'infini.

On va maintenant vérifier la théorie développée, en mesurant la différence de vitesse de groupe entre deux modes d'un paquet d'onde.

30.2.2 Mesure de la vitesse de groupe

On va envoyer un paquet d'onde composé de ~ 40 périodes d'un sinus et on prend un tube de petite taille pour ne sélectionner que les premier modes de vibrations. Ici on a un système linéaire et il faut donc que le signal comporte les fréquences des modes que l'on veut exciter, ce que permet le paquet d'onde qui est très riche spectralement.

On mesure les temps vol des deux modes entre le signal émis par le GBF et le maximum du paquet d'onde reçu par le récepteur. On retranche un temps de montée du système, caractéristique des piézoélectriques mesuré en préparation en collant l'émetteur et le récepteur. On vérifie bien que $\Delta v_g = 67,5 \pm 6 \text{ m.s}^{-1}$ est égal à la valeur calculée théoriquement $\Delta v_{g,theo} = 67,4 \text{ m.s}^{-1}$.

On va maintenant s'intéresser aux ondes électromagnétiques.

30.3 Ondes électromagnétiques

30.3.1 Du câble coaxial au guide creux

En électronique on est habitué à utiliser des câbles métalliques pour propager des ondes électromagnétiques à basses fréquences. À plus haute fréquence, on préfère utiliser des câble coaxial, pour limiter les pertes radiatives et les effets inductifs entre les câbles.

Par ailleurs on a tou-tes déjà expérimenté qu'à plus haute fréquence, les ondes lumineuses se propagent aux travers de tube métalliques creux.

En fait on peut décrire les tubes métalliques creux de manières analogues à ce que l'on a fait pour les ondes acoustiques et on retrouvera les mêmes phénomènes physiques, avec des relations de dispersions et des fréquences de coupures analogues.

Toutefois il y a une différence de taille avec l'acoustique : les ondes sont maintenant due au couplage entre les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} qui sont des grandeurs vectorielles ! La polarisation des ondes va jouer ici un rôle essentiel.

30.3.2 Mode de transmission

Dans le vide, \mathbf{E} et \mathbf{B} sont perpendiculaires au sens de propagation [schéma trièdre avec \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{k}]. On parle de mode **transverse électromagnétique** ou TEM. Est-ce qu'on peut avoir un tel mode dans un guide ?

Prenons $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$, $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y$, alors

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \nabla V(x, y)\end{aligned}$$

or si le guide est creux, comme pour un guide acoustique, on ne peut pas avoir de gradient du potentiel à l'intérieur du guide et il est donc impossible d'avoir un mode TEM. En revanche pour un câble coaxial la présence d'un fil conducteur au centre du guide permet d'avoir une variation de potentiel dans le guide et donc un mode TEM.

Pour les guides métalliques creux, on aura donc uniquement des modes transverse électrique $\text{TE}_{m,n}$ ou transverse magnétique $\text{TM}_{m,n} \rightarrow \text{mode TE}_{1,0}$. Par ailleurs on aura une fréquence de coupure analogue à celle acoustique, en remplaçant c_s par $c \rightarrow \text{sur slide}$

$$\nu_c = \frac{\mu_{m,n}}{2\pi r} c \quad \text{et} \quad \lambda_c = \frac{2\pi r}{\mu_{m,n}} \quad (\text{cylindrique}) \quad (30.3.1)$$

$$\nu_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}} \quad (\text{rectangulaire}) \quad (30.3.2)$$

30.3.3 Fibre optique

Un exemple très important de guidage d'onde est celui de la fibre optique, qui est un guide d'onde cylindrique → **principe fibre**

On a vu que plus le guide est large et plus on aura une fréquence de coupure élevée, avec plusieurs modes qui peuvent se propager et vont être dispersés lors de leur propagation dans le guide. L'information est envoyée sous forme de paquet lumineux, donc au-delà d'une certaine distance cette dispersion des modes va entraîner une perte du signal. Pour le transport d'information sur de longues distances, il faut donc privilégier des fibres monomode aux coeurs très fins → **fibre multi ou monomode**

Conclusion

Dans cette leçon on a étudié le phénomène de propagation guidée des ondes et on a vu son intérêt et quelques exemples d'applications.

On a vu que la propagation dans un guide d'onde était dispersive et donnait naissance à des modes de propagations, définis par les conditions aux limites du guide. Les modes se propagent si la fréquence de l'onde est supérieure à une fréquence de coupure, qui est dépendante de la géométrie du guide.

Par ailleurs on a vu que dans le cadre d'ondes électromagnétiques, on avait des modes transverse magnétique magnétique ou transverse électrique et qu'il était impossible d'avoir un mode transverse électromagnétique pour un guide creux.

Finalement on a vu l'exemple de la fibre optique, qui permet de transporter de l'information rapidement et à haut débit.

30.3.4 Équation de propagation (version “bon sens physique”)

On va considérer une onde acoustique caractérisée par la surpression $p(\mathbf{r}, t)$ et la vitesse du fluide $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, qui se propage dans un guide rectangulaire creux [schéma du guide d'axe z , avec une largeur l selon x et une hauteur h selon y]. Dans l'air la surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (30.3.3)$$

où c_s est la vitesse du son dans l'air.

On a vu qu'avec un guide cylindrique, l'onde se propageait selon l'axe z , on va donc chercher des solutions progressives selon z

$$p(\mathbf{r}, t) = \pi(x, y) e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$$

et on va considérer que l'onde est stationnaire selon x et y , à cause des parois qui la confine, soit

$$\pi(x, y) = p_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$

avec k_x , k_y et k_z des constantes à déterminer, qui sont reliées par la relation de dispersion

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = -k_x^2 \pi \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} = -k_y^2 \pi \\ \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -k_z^2 p \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\omega^2 p \end{cases} \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} = 0 \quad (30.3.4)$$

LP16 : Microscopies optiques

31 Références

31.1 Bibliographie

— *Physique tout-en-1*, Dunod

31.2 Expériences

31.2.1 Mesure du grossissement commercial

Matériel :

- | | |
|----------------------|------------------------|
| — 1 microscope | — 1 mire millimétrique |
| — 1 lampe LED | — 1 écran |
| — 1 condenseur 12 cm | — N pieds et supports |
| — 1 diaphragme | |

Remarques : ??

32 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|-----------------------|---------------|
| — optique géométrique | — diffraction |
| — optique ondulatoire | |

Introduction

Le microscope permet d'observer l'infiniment petit, ce qui en fait un des outil d'observation les plus répandu dans les laboratoires. Ici on va surtout s'intéresser au microscopes optiques, qui permettent d'observer un objet à l'aide de la lumière qu'il diffuse ou émet.

32.1 Microscope composé

32.1.1 Principe

Le microscope composé est constitué de deux lentilles : l'objectif et l'oculaire, représentés par des lentilles minces L_1 et L_2 . Son principe de fonctionnement est que l'objectif L_1 donne une image A_1B_1 de l'objet AB dans le plan focal de l'oculaire L_2 , f'_1 et f_2 étant séparé par une distance Δ dont l'ordre de grandeur typique est de 16 cm. Ainsi l'image finale $A_\infty B_\infty$ sera formé à l'infini et pourra être observée sans accommodation et donc sans fatigue oculaire. [réaliser le schéma et tracé les lignes du rayon lumineux]

Regardons quelques caractéristiques de ce microscope, en commençant par sont grossissement.

32.1.2 Grossissement

Le grossissement G est défini comme étant le rapport de l'angle d'observation à la sortie du microscope et l'angle d'observation si l'objet était vu à l'oeil à une distance d . Le grossissement G mesure le rapport des tailles des images rétinienne lorsque l'objet est vu respectivement à travers le microscope et à l'oeil nu.

Si d est égal au punctum proximum $d_{pp} = 25$ cm d'un oeil moyen, on parle de **grossissement commercial**

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (32.1.1)$$

avec dans la limite des petits angles [faire schéma d'un oeil qui regarde un objet AB]

$$\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{d_{pp}}$$

Pour un microscope donné, on peut mesurer le grossissement simplement en faisant l'image d'un objet de taille connu et en mesurant l'angle d'observation α' . Ici on a un microscope commercial typique, en réalisant l'image d'un mire millimétrique, on va pouvoir remonter au grossissement commercial. On réalise l'image à l'infini de l'objet et on mesure l'écart entre l'oculaire et l'écran, et entre deux mire pour remonter à α' .

Pour construire un microscope avec un grossissement donné, on peut exprimer G_c uniquement en fonction des caractéristiques propre du microscope. En effet

$$\alpha' \simeq \tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2}$$

or en utilisant le théorème de Thalès avec les triangles $O_1 H F'_1$ et $F'_1 A_1 B_1$ [les souligner sur le schéma]

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 H}} &= \frac{\overline{F'_1 A_1}}{\overline{O_1 F'_1}} \iff \overline{A_1 B_1} = \overline{AB} \frac{\Delta}{f'_1} \\ &\Rightarrow \alpha' = \frac{\overline{AB} \Delta}{f'_1 f'_2} \end{aligned}$$

donc

$$G_c = \frac{\Delta d_{pp}}{f'_1 f'_2} \quad (32.1.2)$$

On voit qu'on a tout intérêt à prendre des lentilles de focale courtes, pour minimiser le dénominateur et maximiser l'écart entre les focales des lentilles Δ .

En pratique ce qui va limiter les observations réalisable avec un microscope est sa résolution.

32.2 Contraste et résolution

32.2.1 Résolution

Le pouvoir de résolution est la distance minimale devant exister entre deux points A et B pour que leurs images soient séparées. En théorie cette distance est définie en utilisant le critère de Rayleigh et sa valeur est imposée par le phénomène de diffraction → tâche d'Airy et critère de Rayleigh

$$AB_{min} = \frac{1,22\lambda}{n \sin u} \quad (32.2.1)$$

avec u le demi-angle d'ouverture du faisceau incident [l'ajouter sur le schéma], n l'indice du milieu et λ la longueur d'onde utilisée dans le vide.

Démonstration facultative : En effet le diamètre de la tâche principale d'Airy dans le plan image intermédiaire vaut

$$A_1 B_{1,min} = 1,22 \frac{\lambda_{1,n_1}}{u_1} \simeq \frac{1,22\lambda}{n_1 \sin u_1}$$

en utilisant la relation d'Abbe $AB n \sin u = A_1 B_1 n_1 \sin u_1$, on retrouve bien la distance minimale

$$AB_{min} = A_1 B_{1,min} \frac{n_1 \sin u_1}{n \sin u} = \frac{1,22\lambda}{n \sin u}$$

Le dénominateur est souvent appelé **l'ouverture numérique**

$$\omega = n \sin u \quad (32.2.2)$$

plus elle est grande et plus on pourra séparer des objets de petite taille.

En pratique l'ouverture numérique est limité par la distance qui existe entre l'objet, coincé dans une plaque de verre, et la lentille [schéma lentille sphérique et lame de verre]. Pour augmenter le demi-angle d'ouverture, on peut utiliser des **objectifs à immersion**, où l'air est remplacé par un liquide d'indice optique similaire à celui du verre, typiquement de l'huile, ce qui agrandit le demi-angle d'ouverture [schéma lentille sphérique, lame de verre et huile].

Un autre facteur limitant la résolution sont les aberrations chromatiques, car l'indice optique suit la loi de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (32.2.3)$$

et les images formées pour les différentes couleurs seront donc décalés et rendra l'image floue → **aberration chromatique**. Pour le corriger on utilise deux types d'objectifs

1. les **achromatiques** qui corrigent l'aberration chromatique pour deux couleurs, typiquement le bleu et le rouge, qui correspondent aux maximum de sensibilité d'un oeil moyen ;
2. les **apochromatiques** qui corrigent l'aberration chromatique pour trois couleurs.

Les seconds sont composés de plus de lentilles et sont donc plus chers.

Enfin la dernière pièce essentielle d'un microscope optique est l'éclairement des échantillons.

32.2.2 Contraste

Si on utilise simplement une lampe avec un condenseur pour éclairer un échantillon, l'éclairage ne sera pas uniforme et en plus l'image du filament sera superposée à celle de l'échantillon si on l'utilise en transmission. On aura donc un mauvais contraste.

Éclairage de Köhler

Pour régler ces deux soucis on peut utiliser un **éclairage de Köhler** → **concept éclairage de Köhler**, qui va permettre d'éclairer de manière homogène tout l'échantillon. Cet éclairage peut aussi bien servir en transmission qu'en réflexion, c'est à dire avec un échantillon transparent ou opaque respectivement → **éclairage transmission et réflexion**.

Éclairage à fond noir

Pour regarder des échantillons transparents en transmission, une autre méthode est celle du **fond noir**, où on va utiliser un cache pour bloquer les rayons directs, les rayons indirect étant focalisé avec un

condenseur sur l'échantillon. La lumière captée sera alors uniquement celle transmise par l'échantillon, ce qui permet de gagner en contraste. → **image éclairage Köhler et fond noir**.

On va voir maintenant un exemple de microscope optique qui permet d'augmenter le contraste pour des échantillons fins.

32.3 Microscope à contraste de phase

32.3.1 Principe

L'idée du microscope à contraste de phase est d'améliorer le contraste lors de la formation d'une image par transmission d'échantillon fin. Pour ça on va réaliser un éclairage à fond noir et introduire une lame de phase qui va agir uniquement sur les rayons émis. Les interférences entre l'onde diffusée E_d par l'échantillon et l'onde incidente d'éclairement E_i vont alors augmenter le contraste. → **principe du microscope**

Si on modélise simplement l'onde incidente comme une onde plane avec un déphasage φ induit par la lame de phase

$$E_i = E_0 e^{i(\omega t + i\varphi)}$$

et l'onde diffusée comme la même onde avec un déphasage $\delta\phi(\mathbf{r}) \ll 1$ induit par l'échantillon

$$E_d = E_0 e^{i(\omega t + \delta\phi(\mathbf{r}))} \simeq E_0 e^{i(\omega t)} (1 + i\delta\phi(\mathbf{r}))$$

on voit que l'onde totale vaut

$$E = E_0 e^{i(\omega t)} [e^{i\varphi} + 1 + i\delta\phi(\mathbf{r})]$$

le déphasage dans la lame de phase vaut $\varphi = 2\pi ne/\lambda$, où n est l'indice optique de la lame, e son épaisseur et λ la longueur d'onde de E_i . Si $e = \lambda/4n$, alors $\varphi = \pi/2$ et

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{\omega t} [1 + i(1 + \delta\phi(\mathbf{r}))] \\ \Rightarrow I &= |E_0|^2 (1 + 1 + 2\delta\phi(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r})^2) \\ &\simeq 2|E_0|^2 (1 + \delta\phi(\mathbf{r})) \end{aligned}$$

on voit qu'on a transformé une différence de phase en différence d'amplitude. Plus la différence de phase induite entre deux points par l'échantillon est grande et plus le contraste sera grand. → **comparaison photo avec et sans contraste de phase**

Conclusion

Dans cette leçon on a vu le principe de base d'un microscope. On a vu comment calculer et mesurer son grossissement, mais aussi comment on pouvait améliorer sa résolution ou son contraste.

Finalement on a vu un exemple de microscope qui permet d'améliorer grandement le contraste d'objets fins et transparent, le microscope à contraste de phase.

Il existe bien d'autre type de microscopie optique (à fluorescence, à polarisation, point par point), mais pour pouvoir descendre jusqu'au échelles nanométrique, il faut utiliser encore d'autre type de microscopes qui ne se base pas sur la lumière. L'exemple le plus célèbre est le microscope à effet tunnel.

LP17 : Interférences à deux ondes en optique

33 Références

33.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Optique : fondements et applications*, Pérez
- *Optique - Une approche expérimentale et pratique*, Houard
- *Optique expérimentale*, Sextant

33.2 Expériences

33.2.1 Fentes d'Young

Matériel :

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| — 1 laser | — 1 caméra CCD |
| — 1 quartz iode | — 2 lentilles de 15-20 cm |
| — 1 fente réglable | — N pieds et supports |
| — 1 bi-fente d'Young | |

Remarques : Bien faire attention à quelle hauteur se trouve la barrette CCD

34 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| — optique géométrique | — onde électromagnétique |
| — onde (OPPH) | |

Introduction

On a vu que la lumière était une onde électromagnétique et non de simple rayons lumineux. Ici on va voir en quoi cette nature ondulatoire de la lumière donne lieu à un nouveau phénomène : celui d'interférence.

Interférence : on dit qu'il y a interférence si l'intensité résultant de la superposition d'au moins deux ondes n'est pas la somme des intensités associées à chacune des ondes prises séparément.

34.1 Superposition de deux ondes lumineuses

34.1.1 Intensité d'une onde lumineuse

On va représenter la lumière par une onde plane progressive harmonique (OPPH) de polarisation quelconque $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \cos(\omega t - \phi(\mathbf{r}, t))$. Dans ce cas le vecteur de Poynting est simplement

$$\mathbf{\Pi} = c \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}$$

On va définir l'intensité lumineuse comme étant la norme du vecteur de Poynting

$$I_l = |\mathbf{\Pi}| = c \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = K |\mathbf{E}|^2$$

Par ailleurs les capteurs que l'on utilise couramment ont un certain temps de réponse τ_R qui est grand devant la période T des ondes lumineuses, donc l'intensité captée sera une moyenne temporelle de l'intensité lumineuse

$$I = \langle I_l \rangle = K \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \quad (34.1.1)$$

comme ce qui va nous intéresser ce seront les variations relative de cette intensité, on posera par la suite que $K = 1$. C'est la définition opticienne de l'intensité.

Ici on a considéré une polarisation quelconque, mais comme on est souvent dans le cas où les ondes considérées ont des polarisation quasi-identique, on ne tiendra plus compte du caractère vectoriel de \mathbf{E} par la suite (**approximation scalaire**).

34.1.2 Terme d'interférence

On va considérer la superposition de deux ondes plane progressive harmonique en complexe $\psi_i(\mathbf{r}, t) = E_i e^{i(\omega_i t - \phi_i(\mathbf{r}, t))}$.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t) = E_1 e^{i(\omega_1 t - \phi_1(\mathbf{r}, t))} + E_2 e^{i(\omega_2 t - \phi_2(\mathbf{r}, t))}$$

Soit

$$\begin{aligned} I &= \langle (E_1 e^{i(\omega_1 t - \phi_1)} + E_2 e^{i(\omega_2 t - \phi_2)}) (E_1 e^{-i(\omega_1 t - \phi_1)} + E_2 e^{-i(\omega_2 t - \phi_2)}) \rangle \\ &= \langle E_1^2 + E_2^2 + E_1 E_2 (e^{i((\omega_1 - \omega_2)t - (\phi_1 - \phi_2))} + e^{-i((\omega_1 - \omega_2)t - (\phi_1 - \phi_2))}) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - (\phi_1 - \phi_2)] \rangle \end{aligned}$$

avec $I_i = E_i^2$. Le dernier terme est le terme d'interférence, on voit qu'il y a deux conditions pour que la moyenne temporelle soit non-nulle :

1. $\omega_1 = \omega_2$
2. $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ est indépendante du temps

Si ces deux conditions sont remplies on dira que **les ondes sont cohérentes**. Attardons nous sur la dernière condition.

34.1.3 Cohérence des ondes

En règle général la phase de l'onde sera la somme d'un terme lié à sa propagation et d'un second terme lié à son émission :

$$\phi_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} + \phi_{0i}(t)$$

où ϕ_{0i} est une phase aléatoire, variant dans le temps, propre à la source de l'onde i .
Comme $k_1 = k_2 = k$ pour répondre à la première condition, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\mathbf{r}, t) &= k(\hat{\mathbf{k}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_2) \cdot \mathbf{r} + (\phi_{01}(t) - \phi_{02}(t)) \\ &= k\delta(\mathbf{r}) + \Delta\phi_0(t)\end{aligned}\quad (34.1.2)$$

où $\delta(\mathbf{r})$ est la différence de marche, qui ne dépend que de la position où l'on regarde l'onde. $\Delta\phi$ sera indépendante du temps si $\Delta\phi_0(t) = 0$, ce qui est possible uniquement si l'on utilise une seule source que l'on divise, de par la nature aléatoire des ϕ_{0i} .

Par la suite on va considérer que les deux ondes sont cohérentes entre elle.

34.2 Figure d'interférence

34.2.1 Interférence constructive et destructive

On a vu que deux ondes cohérentes donnaient

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(\mathbf{r})\right) \quad (34.2.1)$$

où par définition $k = 2\pi/\lambda$.

On voit que si $\delta(\mathbf{r}) = n\lambda$, on aura des **interférences constructives**, avec une intensité maximale

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (34.2.2)$$

Au contraire si $\delta(\mathbf{r}) = n\lambda/2$, on aura des **interférences destructives**, avec une intensité minimale

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (34.2.3)$$

→ figure d'interférence avec I_{max}, I_{min} . on parle de **franges d'interférences**.

Les interférences ne changent pas la quantité d'énergie transportée par l'onde lumineuse, mais modifie la répartition spatiale de cette énergie.

34.2.2 Contraste

Pour quantifier la différence de luminosité entre une frange sombre et une frange lumineuse, on utilise le contraste :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \quad (34.2.4)$$

Si $I_1 = I_2$, $C = 1$ et le contraste est maximal.

Intéressons-nous maintenant à un cas concret d'interférence.

34.3 Trous d'Young

34.3.1 Dispositif

[Schéma du dispositif, a distance entre les fentes, D entre l'écran et les fentes, écran selon x].

Dans ce cas la différence de marche est, dans la limite des petits angles, $\delta(\mathbf{r}) = xa/D$. Soit

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi xa}{\lambda D}\right) \right] \quad (34.3.1)$$

Les maxima sont repérés par $x_n = n\lambda D/a$

34.3.2 Interfrange

La distance entre deux maxima ou minima est appelée l'interfrange

$$d_i = x_{n+1} - x_n = (n+1 - n) \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a} \quad (34.3.2)$$

On voit que la mesure de l'interfrange permet de remonter aux propriétés de l'onde si l'on connaît a et D . C'est ce que nous allons maintenant mesurer.

34.3.3 Mesure de la longueur d'onde d'un laser

Réaliser l'alignement en direct Utiliser un laser pour la luminosité Mesure de l'interfrange avec des curseurs Estimation de λ .

34.3.4 Retour sur la cohérence

Précédemment on a vu qu'on devait avoir des sources qui émettent en phase pour avoir des figures d'interférences. Pour chaque source, seule une certaine extension spatiale émet de manière cohérente [schéma]. On parle ici de **cohérence spatiale** : si on agrandit la taille de notre source on va perdre les interférences. On ne peut pas le visualiser avec un laser car c'est une source très cohérente, mais c'est possible avec une lumière blanche ou spectrale.

Démonstration en agrandissant la source pour de la lumière visible.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment définir l'intensité d'une onde lumineuse, et comment sa nature ondulatoire menait à un nouveau type de phénomène que l'on n'avait pas rencontré en optique géométrique : les interférences.

On a vu que deux ondes ne peuvent interférer que si elles sont cohérentes entre elles, c'est à dire avec un déphasage constant au cours du temps.

Finalement on voit que les interférences peuvent permettre de remonter à des informations sur la source utilisée, et en utilisant des dispositifs plus complexes on peut réaliser de la spectroscopie.

Les dispositifs à division du front d'onde, comme les trous d'Young, ont une cohérence spatiale limitée, ce qui fait qu'ils ne sont plus utilisés de nos jours. On préfère utiliser des dispositifs à division d'amplitude.

LP18 : Interférences à division d'amplitude

35 Références

35.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Optique : fondements et applications*, Pérez
- *Optique - Une approche expérimentale et pratique*, Houard
- *Optique expérimentale*, Sextant

35.2 Expériences

35.2.1 Mesure du doublet du sodium

Matériel :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| — 1 Michelson | — 1 support pour la lentille |
| — 1 lentille de longue focale | — 2 supports Boy |
| — 1 laser | — 1 écran |
| — 1 lampe à sodium | — N pieds et supports |
| — 1 lentille de focale ~ 5 mm | |

Remarques : Attention à la lecture des distances sur le Michelson...

36 Notes

niveau : CPGE

pré-requis :

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| — optique géométrique | — interférences (trou d'Young) |
|-----------------------|--------------------------------|

Introduction

On a vu précédemment le concept d'interférence et on l'a illustré avec les trous d'Young, qui est un dispositif à division du front d'onde (on crée deux sources à partir d'une seule et on les fait interférer). En pratique ce type de dispositif a un contraste limité par sa cohérence spatiale et ne permet de regarder que quelques ordres d'interférences.

Ici on va étudier un dispositif à division d'amplitude : l'interféromètre de Michelson (souvent abrégé en Michelson). Comme on le verra, il permet de former des franges très brillantes et de regarder des grandes différences de marches (ordre élevé).

36.1 L'interféromètre de Michelson

36.1.1 Principe de l'instrument

L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 , et d'une lame de verre à face parallèle, appelée lame séparatrice S_p . → [Schéma du Michelson](#) La face de la lame tournée vers le miroir M_2 est traitée pour réfléchir 50% de l'intensité lumineuse incidente.

Un faisceau lumineux incident d'intensité I_0 émis par une source S arrive sur la lame S_p avec un angle d'incidence moyen $\simeq 45^\circ$. Ce faisceau se divise en deux au niveau de la lame, donnant un faisceau transmis et un réfléchi de même intensité $I_0/2$ (d'où le nom du dispositif).

Les deux faisceaux parcourent alors un chemin optique différent, dépendant de la position et de l'orientation des deux miroirs, ce qui va mener à la formation d'une figure d'interférence en sortie du dispositif. On peut faire varier cette figure d'interférence en jouant sur des vis qui permettent de régler la position et l'inclinaison des miroirs. [démonstration qualitative avec le Michelson ?](#)

36.1.2 La compensatrice (peut sauter)

Sur le trajet entre le miroir M_2 et la séparatrice, on ajoute une lame compensatrice pour.. compenser l'astigmatisme induit par la lame séparatrice.

En effet le rayon lumineux qui passe par le miroir M_2 ne traversera qu'une seule fois la séparatrice, alors que celui qui passe par le miroir M_1 la traversera trois fois. [dessiner sur un schéma les trois traversées, 1 à l'aller et 2 au retour]

Si on veut pouvoir travailler en lumière blanche, il faut donc ajouter une lame de même indice de réfraction sur le trajet du faisceau qui passe en M_2 , de sorte que toutes les longueurs d'onde suivent le même trajet.

36.1.3 Configuration lame d'air

Si les deux miroirs sont perpendiculaires, on est en configuration **lame d'air**. En effet ici tout se passe comme si le déphasage était induit par la traversée d'une lame d'air d'épaisseur e .

Dans ce cas la différence de marche se calcule facilement avec un peu de trigonométrie [faire schéma] :

$$\begin{aligned}\delta &= (I_2 I_1) + (I_1 K) - (I_2 H) \\ &= \frac{e}{\cos \theta_i} + \frac{e}{\cos \theta_i} - (I_2 K) \sin \theta_i \\ &= \frac{2e}{\cos \theta_i} - 2e \tan \theta_i \sin \theta_i \\ &= \frac{2e}{\cos \theta_i} (1 - \sin^2 \theta_i) \\ &= 2e \cos \theta_i\end{aligned}$$

L'intensité vaut

$$I(\mathbf{r}) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e \cos \theta_i}{\lambda} \right) \right] \quad (36.1.1)$$

Dans cette configuration les franges sont localisées à l'infini et forment des anneaux d'égale inclinaison θ_i [schéma des hyperboloïde (fig. 8.21 du Houard) ?]. Si on a une source étendue, les anneaux formés à l'infini par les différents points source se superposent (la figure ne dépend que de θ_i , on a donc un gain de luminosité sans perte de contraste).

On dit que la longueur de cohérence spatiale du Michelson réglé en lame d'air est infinie.

36.1.4 Configuration coin d'air

S'il y a un angle entre les deux miroirs, on est en configuration **coin d'air**. Dans ce cas tout se passe comme si le déphasage était induit par la traversée d'un coin d'air.

On ne va pas étudier ce cas en détail, mais notons quand même les différences avec la configuration lame d'air :

- la figure d'interférence est cette fois composée de franges d'égale épaisseur.
- pour une source étendue, les franges sont localisées "sur" le miroir M_2
- on dit que la longueur de cohérence spatiale est nulle

Voyons maintenant comment on peut utiliser un interféromètre de Michelson.

36.2 Applications

36.2.1 Spectroscopie - lame d'air

On se place en configuration lame d'air et on va étudier le sodium, qui possède deux raies d'émission proche dans le jaune

$$\begin{cases} \lambda_1 = 589,00 \text{ nm} \\ \lambda_2 = 589,59 \text{ nm} \end{cases} \Rightarrow \Delta\lambda = 0,59 \text{ nm}$$

Ici on a deux ondes incohérentes, donc on somme leur intensité (en utilisant $k = 2\pi/\lambda$)

$$\begin{aligned} I &= I(\lambda_1) + I(\lambda_2) \\ &= I_1(1 + \cos(k_1\delta)) + I_2(1 + \cos(k_2\delta)) \end{aligned}$$

on va supposer que les deux ondes sont de même amplitude $I_1 \simeq I_2 \simeq I_0$

$$\begin{aligned} I &= I_0(2 + \cos(k_1\delta) + \cos(k_2\delta)) \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}(k_1 + k_2)\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}(k_1 - k_2)\right) \right] \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\delta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\right) \right] \\ &= 2I_0 \left[1 + \underbrace{\cos(4\pi e\lambda_0)}_{\text{interférence}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi e\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)}_{\text{battement}} \right] \end{aligned}$$

car $\delta = 2e$ si $\theta_1 \simeq 0$ et $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_0$.

On voit qu'on a un terme d'interférence et un terme de battement de fréquence plus élevée. Quand ce terme s'annule on perd les interférences, soit

$$\frac{2\pi e\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \iff e_n = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Entre deux disparition des franges on a donc parcouru une distance

$$d = e_{n+1} - e_n = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2d}$$

Réalisation du chariotage (recherche d'une extinction puis d'une autre). Mesure de d sur le verrier (on s'attend à $d \approx 291 \mu\text{m}$). Calcul de $\Delta\lambda$ et de son incertitude $\delta\Delta\lambda = \Delta\lambda\delta d/d$

On voit que l'interféromètre de Michelson permet de faire des mesures très fine !

36.2.2 Mesure de défauts - coin d'air

Dans la configuration coin d'air, on peut mesurer facilement les défauts sur une surface plane. Chaque défaut entraîne une variation locale du déphasage qui peut se mesurer facilement sur la figure d'interférence. On peut alors remonter aux dimensions des défauts. En utilisant un laser on peut mesurer des défauts aussi petit qu'un centième de longueur d'onde !

Conclusion

Dans cette leçon on a vu que contrairement au dispositif à division du front d'onde, les dispositifs à division d'amplitude, illustré par le Michelson, permettait d'obtenir un meilleur contraste et de mesurer des ordres beaucoup plus élevés, ce qui permet des mesures très fines.

Ici on a illustré le Michelson en faisant de la spectroscopie, mais dans la pratique pour ce genre d'application on préfère utiliser un dispositif à N ondes comme un Fabry-Pérot. Ce type de dispositif permet d'avoir une finesse bien plus grande pour les franges, et donc de mesurer des différences de longueur d'onde bien plus petite. On peut par exemple mesurer la structure hyperfine du doublet du sodium soumis à un champ magnétique.

LP19 : Diffraction de Fraunhofer

37 Références

37.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Optique : fondements et applications*, Pérez
- *Optique - Une approche expérimentale et pratique*, Houard
- *Optique expérimentale*, Sextant

37.2 Expériences

37.2.1 Diffraction par une fente

Matériel :

- | | |
|-----------------|------------------------|
| — 1 laser He-Ne | — 1 diaphragme |
| — 1 camera CCD | — 2 lentilles de 20 cm |
| — 1 fente | — 1 écran |
| — 1 lampe QI | — N pieds et supports |

Remarques : Attention à l'alignement vertical des lentilles, régler leur hauteur à l'avance pour n'avoir qu'à les aligner horizontalement devant le jury

38 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|--|--------------------------|
| — physique ondulatoire (onde sphérique et plane) | — interférences |
| | — transformée de Fourier |

Introduction

Dans cette leçon on va étudier comment le modèle des ondes lumineuses scalaires permet de décrire un phénomène nouveau : la diffraction.

38.1 Phénomène de diffraction optique

38.1.1 Principe de Huygens-Fresnel

→ Définition du principe en français par Fresnel (1818) : « l'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. On dit que ces vibrations *interfèrent* pour former la vibration au point considéré. [Réalisation du schéma central pour la leçon, avec $S(O_0, x_0, y_0)$, $P(O, x, y)$ et $M(O_1, x_1, y_1)$. Tracé de OM et OP.]

38.1.2 Diffraction par un objet plan

Chaque point de la surface diffractante contribue à l'amplitude selon

$$d\psi(M) = \frac{e^{ik|\mathbf{PM}|}}{|\mathbf{PM}|} \psi_0(P) dS$$

où $dS = dx dy t(x, y)$, avec t une fonction de transmission qui détaille la géométrie de la surface Σ .
[Ajout de $t(x, y)$ et Σ sur la figure]

Donc pour toute la surface

$$\psi(M) = \iint_{\Sigma} dx dy t(x, y) \psi_0(P) \frac{e^{ik|\mathbf{PM}|}}{|\mathbf{PM}|} \quad (38.1.1)$$

Calculons $|\mathbf{PM}|$

$$\begin{aligned} |\mathbf{PM}| &= \sqrt{(\mathbf{OM} - \mathbf{OP})^2} \\ &= D \left(1 - 2 \frac{\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OP}}{D^2} + \left(\frac{r}{D} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

avec $D = |\mathbf{OM}|$ et $r = |\mathbf{OP}|$. Et [ajout des angles sur le schéma]

$$\mathbf{OM} \cdot \mathbf{OP} = xD \sin \alpha + yD \sin \beta$$

On se place dans **l'approximation paraxiale** (Gauss) : $D \gg r, x_1, y_1$. Au premier ordre en x, y on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{PM}|} &\simeq \frac{1}{D} \\ e^{ik|\mathbf{PM}|} &\simeq e^{ikD} e^{-ik(x\alpha + y\beta)} e^{ikr^2/2D} \end{aligned}$$

Pour le terme d'amplitude on ne garde que le terme en $1/D$ car il domine, mais pour la phase comme $k \sim 10^7$ il faut garder le terme en $kr^2/2D$.

Pour le négliger on se place dans **l'approximation de champ lointain** (Fraunhofer) : $D \gg kr^2$. C'est important de bien distinguer l'hypothèse paraxiale et de champ lointain, car on peut être dans l'une sans être dans l'autre. La première indique qu'on considère des objets proche de l'axe optique. La seconde qu'on place la source et l'image à l'infini par rapport à l'objet diffractant.

Finalement on peut développer de la même manière l'amplitude de la source en P :

$$\psi_0(P) = \frac{e^{ik|\mathbf{SP}|}}{|\mathbf{SP}|} \simeq \frac{e^{ikd}}{d} e^{ik(x\alpha_0 + y\beta_0)}$$

avec $d = |\mathbf{OS}|$, ce qui permet d'obtenir l'amplitude de l'onde diffractée

$$\psi(M) = \tilde{\psi}_0 \iint_{\Sigma} dx dy t(x, y) e^{-ikx(\alpha - \alpha_0)} e^{-iky(\beta - \beta_0)} \quad (38.1.2)$$

où dans $\tilde{\psi}_0$ on a inclut les termes d'amplitudes constants et les termes de phases qui n'interviennent pas dans l'intensité de l'onde.

On reconnaît ici la transformée de Fourier de la fonction de transmission :

$$\psi(M) = \tilde{\psi}_0 TF[t(x, y)] \quad (38.1.3)$$

Ce résultat permet de calculer très facilement la figure de diffraction de structures complexes en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.

Regardons maintenant comment étudier la diffraction expérimentalement.

38.1.3 Réalisation expérimentale

Commençons par quantifier dans quel cadre on se trouve dans un “champ lointain”. Ici $k = 2\pi/\lambda$. Donc

$$\frac{kr^2}{2D}, \frac{kr^2}{2d} \ll 1 \iff D, d \gg \frac{\pi r^2}{\lambda}$$

Pour un laser He-Ne $\lambda \sim 600$ nm et si $r \sim 1$ mm,

$$D, d \gg 5 \text{ m}$$

En pratique pour que la source et l’image soient à l’infini, on réalise un montage où place la source et l’écran aux foyers de deux lentilles [schéma double lentille]

Dans ce cas $\beta_0 = \alpha_0 = 0$ et $\alpha = x_1/f'$, $\beta = y_1/f'$, soit

$$\psi(M) = \tilde{\psi}_0 \iint_{\Sigma} dx dy t(x, y) e^{-ikx x_1/f'_1} e^{-iky y_1/f'_1} \quad (38.1.4)$$

Nous allons maintenant étudier un exemple concret de diffraction.

38.2 Diffraction d’une fente rectangulaire

38.2.1 Figure de diffraction

[Schéma de la fente avec a et b]

$$t(x, y) = \begin{cases} 1/ab & \text{pour } x \in [-a/2, a/2], y \in [-b/2, b/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le calcul n’est pas très compliqué et donne directement

$$\psi(M) = \tilde{\psi}_0 \text{sinc}\left(\frac{\pi a x_1}{\lambda f'_1}\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b y_1}{\lambda f'_1}\right) \quad (38.2.1)$$

si la fente est très fine, $b \gg a$, le terme dominant sera le premier (c’est un sinus cardinal, donc plus l’argument est petit et plus il est grand) \rightarrow ici on va observer une série de frange de largeur variables (différent des interférences donc)

Intéressant de noter que la figure de diffraction ne dépend pas de la position de l’objet diffracté !

Expérimentalement on mesure $I = |\psi(M)|^2 \rightarrow$ **tracé de sinc²**.

38.2.2 Mesure de la largeur de la fente

Alignement des lentilles. Enregistrement de la figure de diffraction pour un laser. Exploitation des données (ajustement de sinc²). Par ajustement on trouve que $a/\lambda f'_1 = 9,36 \pm 2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$, donc $a = 118 \pm 6 \mu\text{m}$ (constructeur $a = 100 \pm 1 \mu\text{m}$)

38.3 Diffraction par une ouverture circulaire

38.3.1 Tâche d’Airy

\rightarrow **Tâche d’Airy et formule de son rayon**

38.3.2 Limitation de la résolution

→ Critère de Rayleigh

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment traiter la diffraction d'une onde scalaire monochromatique, dans l'approximation de Fraunhofer, c'est-à-dire des champs lointain. Ce phénomène est d'autant plus présent que l'on considère des objets de petites dimensions.

Il joue un rôle majeur en optique, car bien souvent la diffraction est le facteur limitant principal de la résolution des instruments optiques, quand on veut regarder des objets de petites dimensions ou très lointains.

LP20 : Diffraction par des structures périodiques

39 Références

39.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Optique : fondements et applications*, Pérez
- *Optique - Une approche expérimentale et pratique*, Houard
- *Optique expérimentale*, Sextant
- *Physique des solides*, Ashcroft & Mermin

39.2 Expériences

39.2.1 Mesure du pas d'un réseau

Matériel :

- | | |
|--------------------------------|-----------------------|
| — 1 réseau par transmission | — 1 diaphragme |
| — 1 lentille de 20 cm | — 1 écran |
| — 1 lampe à mercure | — 1 mètre |
| — 1 alimentation pour la lampe | — N pieds et supports |
| — 1 fente | |

Remarques : Attention les réseaux sont blazés en général (ordre 1 plus lumineux)

40 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| — diffraction de Fraunhofer | — interférences à N ondes |
| — transformée de Fourier | — structure cristalline |

Introduction

La diffraction de Fraunhofer relie la géométrie de l'objet diffractant et la figure de diffraction. On va se servir de ces informations pour acquérir des informations sur une source ou sur un objet diffractant.

- spectre si l'objet diffractant est connu
- structure de l'objet diffractant si la source est connue

40.1 Diffraction par un réseau

40.1.1 Types de réseaux

Il y a deux types de réseaux : par transmission ou par réflexion. [Montrer le réseau à transmission et les réflexion sur un CD → aile de papillon](#)

Ici on va principalement étudier les réseaux en transmission, car ils sont plus simple à présenter expérimentalement.

40.1.2 Relation fondamentale des réseaux

On va étudier un réseau constitué de N fines fentes, qui vont jouer le rôle de sources secondaires. [Schéma d'un réseau à fente avec les grandeur importantes].

On va chercher à calculer le déphasage entre deux fentes consécutives pour une source monochromatique :

$$\Delta\phi = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{a}$$

ces deux sources sont cohérentes si $\Delta\phi = 2\pi m$. Ici $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x$. Or comme on le voit sur la figure

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{a} = \frac{2\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

où λ est la longueur d'onde de la source. Finalement on obtient la relation fondamentale des réseaux

$$a(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda \quad (40.1.1)$$

Ici m est un entier, on aura donc m angles avec une figure cohérentes.

On voit qu'avec cette formule on peut remonter au pas du réseau a en mesurant l'angle entre deux ordres

$$\sin\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \Rightarrow a = \frac{m\lambda}{\sin\theta_m}$$

[Schéma du dispositif et de ce que l'on va mesurer]. Ici $\sin\theta_m = L/d$, donc

$$a = \frac{m\lambda L}{d} \quad (40.1.2)$$

[Alignement du système optique.](#) Explication que l'on se met en condition de Fraunhofer (source à l'infini et image à l'infini). Ici on mesure entre l'ordre 0 et l'ordre 1 donc $m = 1$. Pour $L = 90,8 \pm 0,2$ cm et $d = 5,0 \pm 0,1$ cm, on trouve $a = 9,9 \pm 0,2$ μm . Le constructeur nous dit que $a = 10$ μm . On retrouve bien la valeur attendue.

On va maintenant chercher à comprendre pourquoi la figure de diffraction du réseau est composé de traits verticaux, en calculant l'intensité de l'onde diffractée.

40.1.3 Intensité de l'onde diffractée

Pour une fente de largeur ϵ , on sait que

$$\hat{t}_\epsilon(u) = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx e^{-2i\pi ux} = \epsilon \text{sinc}(\pi u \epsilon)$$

Ici on pose $u = (\sin\theta - \sin\theta_0)/\lambda$.

Si on regarde l'amplitude générée par toutes les fentes on a [faire schéma des N fentes]

$$\Psi = \int dx t(x) e^{-2i\pi ux}$$

$$\text{avec } t(x) = \sum_{m=0}^{N-1} t_\epsilon(x - x_m)$$

En posant $X = x - x_m$, et comme $x_m = ma$, on va pouvoir se ramener à l'intégrale d'une fente

$$\begin{aligned} \Psi &= \int dX t_\epsilon(X) e^{-2i\pi uX} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi ux_m} \\ &= \hat{t}_\epsilon(u) \sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi uma} \\ &= \hat{t}_\epsilon(u) \frac{1 - e^{-2i\pi Nau}}{1 - e^{-2i\pi au}} = \hat{t}_\epsilon(u) \frac{\sin(N\pi ua)}{\sin(\pi ua)} \end{aligned}$$

Soit

$$\Psi = \epsilon \operatorname{sinc}(\pi u \epsilon) \frac{\sin(N\pi ua)}{\sin(\pi ua)}$$

ce qui nous donne directement l'intensité $I = \Psi \Psi^*$

$$I(u) = N^2 \epsilon^2 \operatorname{sinc}^2(\pi u \epsilon) \left(\frac{\sin(N\pi ua)}{N \sin(\pi ua)} \right)^2 \quad (40.1.3)$$

On voit qu'on a trois fonctions périodiques avec trois fréquences spatiales. Comme $\epsilon < a$, la fréquence du sinus cardinal est la plus petite et représente donc l'enveloppe du signal. Quand $u = n/\pi a$, le sinus du dénominateur s'annule et l'intensité est maximale. Enfin le dernier sinus est responsable de petite oscillations très rapide de faibles amplitudes [Tracé de la figure d'interférence]. C'est pour ça qu'avec un réseau on a des pics espacé de manière régulière.

L'intensité est le produit de deux facteur [les souligner] :

- un de structure qui dépend de la structure des composants du réseau (géométrie de la fente)
- un de forme qui dépend de la forme macroscopique du réseau (nombre de fentes)

c'est une propriété générale des figures de diffraction obtenue par des structure périodiques.

40.1.4 Propriétés du réseau

En général on utilise un réseau pour faire de l'analyse spectroscopique. Dans cette situation on va définir deux nombres qui vont nous permettre de quantifier la qualité du réseau, c'est-à-dire sa capacité à résoudre des spectres aux raies resserrées.

Le premier est le **pouvoir dispersif** D , qui va déterminer à quelle point le réseau sépare les différentes longueurs d'onde en fonction de l'ordre

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos \theta} \approx \frac{m}{a} \quad (40.1.4)$$

Cette résolution dépend du pas du réseau. Plus le réseau a un petit pas et plus il sépare efficacement les différentes longueur d'onde aux ordres élevées. **Démonstration avec un réseau avec plus de trait**

par mm. En pratique on se limite aux ordres faibles, car sinon on a des risques de recouvrement entre ordres et on cherche donc à avoir a le plus petit possible. Pour que le maximum d'intensité soit centré sur un ordre $m = 1, 2$ et non sur l'ordre 0, on va utiliser des réseaux blazés, dont la structure introduit un déphasage qui décentre le sinus cardinal de la figure de diffraction [schéma sinus cardinal décentré]. Le second est la **résolution intrinsèque** R , qui va déterminer à quelle point le réseau peut séparer des raies d'émission proche en longueur d'onde. On dit que deux longueurs d'ondes voisines λ et $\lambda + \delta\lambda$ sont considérées comme séparées si le maximum du pic de diffraction pour $\lambda + \delta\lambda$ est plus loin que le minimum du pic de diffraction pour λ (critère de Rayleigh). À partir de cette définition on peut calculer R

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN \quad (40.1.5)$$

Donc plus le réseau est composé d'un grand nombre de fentes et plus il va pouvoir séparer efficacement des raies proche en longueur d'onde. **Démonstration de l'augmentation de la résolution avec même pas a mais nombre de fente plus élevé.** Sinon on aurait superposition des deux raies et le signal serait brouillé.

On voit donc qu'un réseau est d'autant plus utile qu'il comporte de très nombreuses fentes et qu'elles sont faiblement espacées. Les meilleurs réseaux tridimensionnels que l'on retrouve dans la nature sont les cristaux, composés

40.2 Diffraction par un cristal

40.2.1 Principe

On va chercher à étudier la structure d'un cristal à 3 dimensions \rightarrow on passe d'un réseau selon une dimension à 3 réseaux.

Le cristal est composé d'atomes disposés régulièrement. On va considérer la réflexion par deux plans consécutifs. On trouve la loi de Bragg, similaire à celle des réseaux \rightarrow **diffraction de Bragg**.

Dans un cristal la distance moyenne entre deux plans est de l'ordre de l'angström, on doit donc avoir une longueur d'onde de type rayon X pour pouvoir observer des figures d'interférences.

40.2.2 Réalisation pratique

On va donc éclairer un cristal par un faisceau de rayon X \rightarrow **schéma dispositif**, en répétant la procédure pour différents angles on pourra remonter à la structure interne du cristal.

\rightarrow **figure de diffraction d'un cristal cubique**

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment la diffraction par des structures périodiques pouvait servir à étudier des sources lumineuses ou à déterminer la structure interne d'un objet.

On a étudié en détail la diffraction par un réseau plan et parlé du principe de la diffraction par un cristal.

Finalement c'est important de noter que l'on peut étudier d'autres systèmes que des cristaux parfaits \rightarrow **figure de diffraction de l'ADN cristallisé**.

LP21 : Absorption et émission de la lumière

41 Références

41.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Optique*, Pérez
- *Optique physique*, Taillet
- *Spectroscopie optique*, Biémont

41.2 Expériences

41.2.1 Mesure du spectre d'absorption de la rhodamine

Matériel :

- | | |
|-------------------------------------|----------------------|
| — 1 cuve à rhodamine | — 1 source LED |
| — 1 cuve à éthanol | — 1 condenseur 12 cm |
| — 1 fibre optique avec spectromètre | — 1 diaphragme |
| — 2 lentilles de 20 cm | |

Remarques : On fait l'image à l'infini du diaphragme pour éclairer de manière homogène la rhodamine et ensuite on fait l'image de la lumière sortante sur la fibre. Dans spectrasuite : faire le noir sans la source lumineuse directe (caché par un morceau de carton), puis faire le blanc avec la cuve contenant le solvant (éthanol) et enfin en cliquer sur A ou T. Le logiciel donne directement le spectre d'absorbance ou de transmittance, il faut faire un **clic droit** pour insérer un curseur, sa position se lit en bas de la fenêtre. Pour que cela soit plus visuel, on peut faire apparaître le spectre lumineux dans les options.

42 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|---|--|
| — thermodynamique | — densité d'énergie électromagnétique |
| — spectre du corps noir (loi de Planck) | — quantification des niveaux atomiques |

Introduction

Dans cette leçon on va chercher à comprendre comment la matière peut absorber et émettre de la lumière. On va d'abord caractériser ces phénomènes à notre échelle, puis étudier un modèle microscopique simple qui permet d'en comprendre certaines caractéristiques.

42.1 Phénomènes d'absorption et d'émission

42.1.1 Mise en évidence

On a vu précédemment comment un rayonnement électromagnétique en équilibre thermique avec un corps menait à un spectre caractéristique d'émission : le spectre du corps noir.

Si on regarde une lumière blanche, elle est composée d'un spectre continu, comme on peut le voir avec un prisme **démonstration qualitative**. Cette décomposition du spectre est liée à la différence d'indice optique entre les différentes longueurs d'ondes, car $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$.

Si maintenant on vient rajouter une cuve contenant des molécules de rhodamine B → **représentation de la molécule**. On voit qu'une des longueurs d'onde est atténuée : la lumière a été absorbée par la molécule **démonstration qualitative toujours avec le prisme**.

On va maintenant mesurer quantitativement le spectre de la rhodamine.

42.1.2 Mesure du spectre de la rhodamine

Pour le mesurer, on va utiliser un spectromètre éclairé par une fibre optique. On a ici deux tailles possibles pour le rayon de la fibre optique :

- la plus petite est moins dispersive (et donc plus précise), avec une luminosité plus faible ;
- la plus grande est plus dispersive, mais offre une meilleure luminosité.

Ici la fibre optique de plus large rayon est mieux adaptée, car c'est la luminosité qui va être limitante. **Réalisation des alignements de la source, de la cuve et de la fibre. Réalisation du noir et du blanc. Acquisition du spectre de la rhodamine. Mesure de λ_{max}** . On voit que le spectre mesuré correspond au spectre attendu : https://www.aatbio.com/absorbance-uv-visible-spectrum-graph-viewer/rhodamine_b et on retrouve bien $\lambda_{max} = 541$ nm. Ce résultat nous permet de comprendre la couleur de la rhodamine : on voit la couleur complémentaire de celle absorbée, c'est-à-dire du magenta ici → **roue des couleurs avec longueur d'onde**

Maintenant qu'on a étudié expérimentalement le phénomène, on va chercher à le comprendre d'un point de vue microscopique avec un modèle simple.

42.2 Absorption et émission de photon

42.2.1 Système étudié

On va considérer un système composé de $N \gg 1$ atomes identiques, en interaction avec un onde électromagnétique. Ici on va étudier un modèle phénoménologique en effectuant un **bilan détaillé de population** entre deux niveaux d'énergie de l'atome $E_a < E_b$. L'onde lumineuse est caractérisée par sa densité d'énergie spectrale $u(\nu)$ et on va considérer qu'elle est non-monochromatique avec un spectre large, de sorte que $u(\nu)$ est constant pour les fréquences étudiées (typiquement le spectre lumineux).

42.2.2 Coefficients d'Einstein

Pour effectuer le bilan détaillé de population, Einstein proposa qu'il y avait trois processus qui entrait en jeu à l'origine d'émission ou d'absorption de photon, chacun associé à un taux de transition entre les deux niveaux d'énergie.

Émission spontanée : [faire schéma avec E_a , E_b et $h\nu_0$]

$$\left. \frac{dN_a}{dt} \right|_{sp} = A_{b \rightarrow a} N_b \quad (42.2.1)$$

l'atome a un taux de transition $A_{b \rightarrow a}$, indépendant du flux lumineux, de retomber dans le niveau de plus basse énergie en émettant un photon d'énergie $h\nu$. Il est important de noter que l'origine de ce phénomène ne peut s'expliquer qu'avec la quantique, en classique les niveaux d'énergies auraient une durée de vie infini. Ici on admettra que le photon émis a une fréquence (proche de ν_0), direction, polarisation et une phase aléatoire.

Absorption : [schéma]

$$\left. \frac{dN_a}{dt} \right|_{ab} = -B_{a \rightarrow b} N_a u(\nu) \quad (42.2.2)$$

en interagissant avec l'onde électromagnétique, l'atome a un taux de transition $B_{a \rightarrow b} u(\nu)$ de monter dans le niveau de plus haute énergie en absorbant un photon d'énergie $h\nu$.

Émission stimulée : [schéma]

$$\left. \frac{dN_a}{dt} \right|_{st} = B_{b \rightarrow a} N_b u(\nu) \quad (42.2.3)$$

l'atome a un taux de transition $B_{b \rightarrow a} u(\nu)$ de retomber dans le niveau de plus basse énergie, en émettant un photon dans le même état que le photon incident d'énergie $h\nu$. Ce photon émis a donc même phase, fréquence, impulsion et polarisation le photon incident.

Au final, l'évolution de la population dans le niveau a est

$$\frac{dN_a}{dt} = A_{b \rightarrow a} N_b + (B_{b \rightarrow a} N_b - B_{a \rightarrow b} N_a) u(\nu) = -\frac{dN_b}{dt} \quad (42.2.4)$$

Regardons ce que cela donne à l'équilibre thermique.

42.2.3 Équilibre thermique

À l'équilibre on est en régime permanent et donc $\frac{dN_a}{dt} = 0$, soit

$$\begin{aligned} A_{b \rightarrow a} N_b + (B_{b \rightarrow a} N_b - B_{a \rightarrow b} N_a) u(\nu) &= 0 \\ \Leftrightarrow u(\nu) &= \frac{-A_{b \rightarrow a} N_b}{B_{b \rightarrow a} N_b - B_{a \rightarrow b} N_a} \\ \Leftrightarrow u(\nu) &= \frac{A_{b \rightarrow a}}{B_{b \rightarrow a}} \frac{1}{\frac{N_a}{N_b} \frac{B_{a \rightarrow b}}{B_{b \rightarrow a}} - 1} \end{aligned}$$

Or à l'équilibre thermique on sait que la population des niveaux d'énergie suit la loi de Boltzmann et que la densité d'énergie est décrit par la loi de Planck

$$\begin{cases} N_a \propto e^{-E_a/k_B T} & \text{et} & N_b \propto N e^{-E_b/k_B T} \\ u(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \end{cases} \quad (42.2.5)$$

donc

$$\frac{N_a}{N_b} = e^{(E_b - E_a)/k_B T}$$

et d'après le modèle d'Einstein

$$u(\nu) = \frac{A_{b \rightarrow a}}{B_{b \rightarrow a}} \frac{1}{e^{(E_b - E_a)/k_B T} \frac{B_{a \rightarrow b}}{B_{a \rightarrow b}} - 1}$$

on voit que ce modèle est cohérent avec la loi de Planck si

$$\begin{cases} B_{b \rightarrow a} = B_{a \rightarrow b} = B \\ A_{b \rightarrow a} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B \\ E_b - E_a = h\nu \end{cases} \quad (42.2.6)$$

Il est intéressant de remarquer que sans l'émission stimulée, on ne retrouve pas le -1 au dénominateur de la loi de Planck : c'est pour cela que historiquement Einstein l'a introduit dans son modèle.

Regardons maintenant comment ce modèle phénoménologique permet de comprendre le fonctionnement d'un laser.

42.3 Laser

42.3.1 Concepts et problèmes

Le principe d'un laser c'est d'avoir un faisceau lumineux monochromatique et puissant. Pour cela on va placer dans une cavité optique composé de miroirs un milieu amplificateur constitué d'atomes [faire un schéma du principe].

Si on fait le bilan de la population de photons dans le faisceau, d'après le modèle d'Einstein elle suit la même loi que celle de la population d'atomes dans l'état a . Pour former un faisceau lumineux directionnel l'émission spontanée joue un rôle négligeable, car elle émet dans des directions aléatoires, donc en notant n la population de photon

$$\frac{dn}{dt} = (N_b - N_a)Bu(\nu) \quad (42.3.1)$$

on voit que pour qu'il y ait amplification il faut que $N_b > N_a$, mais à l'équilibre thermique les milieux les plus énergétiques sont les moins peuplés. Donc comme $E_b > E_a$, on a toujours $N_b < N_a$ [entourer ou réécrire Boltzmann]. Les photons ont donc plus de chance d'être absorbés que d'être émis par le milieu et le faisceau va s'atténuer.

Pour réaliser un laser, il faut donc réaliser une inversion de population : on parle de pompage.

42.3.2 Principe du pompage

Le principe du pompage optique est d'exciter le système dans un niveau d'énergie E_c proche de E_b et que la transition entre E_c et E_b se fasse de manière non-radiative.

Si on prend l'exemple du laser Hélium-Néon \rightarrow He-Ne, le pompage amène l'hélium depuis son état fondamental vers un état d'énergie E_c . Comme ce niveau est proche du niveau E_b du néon, au cours d'une collision avec l'hélium, le néon pourra se retrouver dans cet état excité, sans absorber de photon. Le néon pourra alors émettre de manière stimulé un photon.

42.3.3 Rôle de la cavité optique

La cavité optique joue ici deux rôles

1. augmenter l'amplification en permettant au faisceau d'effectuer plusieurs aller-retour.
2. sélectionner des modes de vibrations spécifiques par interférences.

En effet la cavité se comporte comme un interféromètre de Fabry-Perot : il y aura donc des modes de vibrations très fins qui seront sélectionnés, l'intensité des autres étant diminués par interférences destructives → **enveloppe gaussienne et modes de vibration** Ils seront d'autant plus fin que les miroirs sont de bonne qualité.

On voit que le laser est en fait un oscillateur optique, que l'on peut modéliser avec une boucle de rétroaction composé du milieu amplificateur (boucle direct amplificatrice) et de la cavité qui fait office de filtre (boucle de retour filtrante).

Conclusion

Dans cette leçon on a étudié le phénomène d'absorption et d'émission de la lumière par la matière. On a vu que le modèle phénoménologique d'Einstein permettait de le décrire et de faire le lien avec la loi de Planck.

Finalement on a pu expliquer dans les grandes lignes le fonctionnement d'un laser.

Toutefois le modèle d'Einstein ne permet pas de comprendre pourquoi certaines transitions sont interdites dans les atomes, pour cela il faut utiliser la mécanique quantique.

LP22 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

43 Références

43.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PSI/PSI**, Dunod
- *Électromagnétisme 4*, BFR
- *Électromagnétisme 2*, Feynman
- *Électromagnétisme*, Pérez
- *Électromagnétisme : Milieux, structures et énergie*, Rax
- *Le fameux poly de Jeremy, version électronique*, Montrouge, Neveu

43.2 Expériences

43.2.1 Courbe d'hystérésis d'un fer doux

Matériel :

- | | |
|---|---|
| — 1 oscilloscope | — 2 bobines + noyau de fer (transfo Leybolds) |
| — 1 transformateur 220-110V de puissance réglable | — N câbles banane de sécurité |
| | — 2 câbles BNC/banane |

Remarques : On peut “durcir” le milieu ferromagnétique en enroulant un câble banane pour simuler des pertes par courant induit. Dans ce cas on peut connecter le câble à un ampèremètre pour mesurer le courant induit. Il faut faire attention à ne pas trop monter en puissance, car sinon le câble peut fondre...

44 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|---|----------------------------|
| — électromagnétisme dans un milieu magnétique | — relations de passages |
| | — électrocinétique et ARQS |

Introduction

On peut facilement créer un champ magnétique en faisant circuler un courant dans une bobine. Si on ajoute un noyau de fer au centre de la bobine, le champ augmente considérablement, parce que le fer est ferromagnétique.

Ferromagnétisme : propriétés qu'ont certains corps de s'aimanter fortement sous l'effet d'un champs extérieur et de conserver cette aimantation en champ nul.

Dans cette leçon on va chercher à expliquer les propriétés des corps ferromagnétique et de montrer quelques une de leur applications importantes.

Hypothèses : dans tout ce qui suit, les corps sont supposés homogène et isotrope et on se place dans l'ARQS.

44.1 Milieu ferromagnétique

44.1.1 Aimantation et non-linéarité

Rappels : dans un milieu magnétique, on définit l'excitation magnétique $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, où \mathbf{M} est la densité de moment magnétique, l'aimantation en A.m^{-1} . Les sources de \mathbf{H} sont les courants électriques imposés par les champs extérieurs, tandis que les sources de \mathbf{B} sont les courants électrique et l'aimantation, il est donc plus commode de travailler avec \mathbf{H} dans un milieu magnétique. On peut relier l'aimantation à l'excitation magnétique

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

avec $\mu = \mu_0 \mu_r$ et $\mu_r = 1 + \chi_m$. Jusqu'ici on a traité le cas des milieux linéaires, mais pour les milieux ferromagnétique ces relations sont non-linéaires $\chi_m \equiv \chi_m(\mathbf{H})$ et $\mu_r \equiv \mu_r(\mathbf{H})$. $\rightarrow \mu_r$ pour quelques milieux ferro purs et alliages

Ces valeurs élevées de μ_r ont une conséquence direct : les milieux ferromagnétique canalisent les lignes du champ magnétique.

44.1.2 Canalisation du champs magnétique

Regardons ce qui se passe à l'interface entre un milieu ferromagnétique et de l'air [faire schéma ferro (1) et air (2)]. On a continuité des composantes tangentielles de l'excitation magnétique si aucun courant ne circule dans le matériau, or par définition

$$\left. \begin{array}{l} B_{T,\text{fer}} = \mu_0 \mu_r H_{T,\text{fer}} \\ B_{T,\text{air}} = \mu_0 H_{T,\text{air}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B_{T,\text{fer}}}{B_{T,\text{air}}} = \mu_r \gg 1$$

On voit qu'à l'interface la composante tangentielle du champs magnétique est pratiquement nulle dans l'air. Autrement dit les lignes de champs ont tendance à être tangentes aux interfaces dans le milieu ferromagnétique et plus resserrées. Le champs est donc nul dans l'air et canalisé dans le milieu ferromagnétique, tout comme une fibre optique canalise le champs électrique \rightarrow schéma du champ canalisé

Regardons maintenant ce qu'implique la non-linéarité de la susceptibilité magnétique quand H varie.

44.1.3 Cycle d'hystérésis

Si on enroule une bobine de N spires autour d'un tore ferromagnétique de section constante, le champs magnétique induit par le courant sera canalisé dans le milieu et on aura donc une relation linéaire entre le courant et l'excitation magnétique. En effet si on utilise le théorème d'Ampère sur un contour du tore de longueur l

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{j}_l \Rightarrow \oint_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{H} = \sum I_{\text{enlacé}} \Rightarrow Hl = NI$$

et donc H et I sont simplement proportionnels.

[Pendant la discussion on trace le graphique de $M(H)$] Si on part d'un matériau avec un champ et une aimantation nulle ($B = 0$, $M = 0$), et qu'on augmente le courant, M et B augmentent jusqu'à saturer. L'aimantation atteint sa valeur maximale M_{sat} . On trace ainsi la **courbe de première aimantation**.

Lorsqu'on diminue le courant après saturation, le milieu ne repasse pas par le même état ! M et B diminuent, mais pour un courant nul ils ont une valeur non nulle appelée **aimantation rémanente** M_r et **champs rémanent** B_r . Le matériau est donc aimanté : c'est devenu un aimant permanent.

Pour annuler l'aimantation et le champ, il faut imposer un courant négatif, jusqu'à atteindre l'excitation coercitive H_c (en toute rigueur cette valeur diffère légèrement pour M et B). Si on continue à diminuer le courant, on va de nouveau saturer le champ et l'aimantation. Lors de la remontée de H on va suivre un autre chemin, symétrique par rapport à la courbe $M = H$.

C'est ce qu'on appelle le phénomène **d'hystérésis**, qui vient du grec "être en retard" : à la remontée, l'aimantation n'est pas aussi forte qu'à la descente et est en "retard".

Regardons ce que cela donne pour un cas concret : le transformateur.

44.2 Application : le transformateur

44.2.1 Principe

Un transformateur se compose d'un circuit fermé, avec une carcasse ferromagnétique entouré par deux bobines, l'intérêt du milieu ferromagnétique étant de canaliser les lignes de champ magnétique → **schéma de principe du transformateur**. Le premier enroulement est appelé le **primaire** et reçoit l'énergie électrique, restitué par induction au second enroulement, appelé **secondaire**.

L'intérêt d'un tel montage est qu'il permet de changer de tension de travail, en travaillant avec deux bobines qui n'ont pas le même nombre de spires. C'est typiquement ce que l'on trouve dans les chargeurs de téléphone ou d'ordinateur, pour passer de 230 V à une tension adaptée à la recharge d'une batterie.

44.2.2 Dispositif expérimental

On va s'intéresser au cycle d'hystérésis qui se forme dans le milieu ferromagnétique. Pour ça, on va considérer le montage suivant → **montage électronique**. Dans ce montage on va mesurer deux tensions qui sont reliés linéairement à H et B , de sorte que sur le mode XY de l'oscilloscope on aura directement le cycle d'hystérésis de $B(H)$.

V_2 dans le second circuit est directement lié au flux généré à travers la bobine et va nous permettre de calculer V_Y

$$\begin{cases} V_2 = -n_2 S \frac{dB}{dt} \\ V_2 = R' i_2 + V_Y \end{cases}$$

où S est la section du fer, car il canalise le champ B , et n_2 le nombre de spires de la bobine. En régime sinusoïdal, $V_Y \sim i_2 / \omega C$, donc si $R'C \gg 1/\omega$ on peut négliger V_Y devant $R'i_2$, soit

$$i_2 \simeq \frac{V_2}{R'} = -\frac{n_2 S}{R'} \frac{dB}{dt}$$

et donc

$$\begin{aligned} V_Y &= \frac{1}{C} \int dt i_2 = -\frac{1}{C} \int dt \frac{n_2 S}{R'} \frac{dB}{dt} = -\frac{n_2 S}{R' C} B \\ \Rightarrow B &= -\frac{R' C}{n_2 S} V_Y \end{aligned} \quad (44.2.1)$$

Dans le premier circuit, on a déjà vu que $Hl = n_1 i_1 + n_2 i_2$, avec l la longueur du milieu ferromagnétique. Or $i_1 = V_X / R$ et $i_2 \simeq V_2 / R' \sim 0$, car $R' = 100 \text{ k}\Omega \gg R$, soit

$$H = \frac{n_1}{Rl} V_X \quad (44.2.2)$$

Finalement on peut mesurer l'excitation coercitive et le champ rémanent à l'oscilloscope.

44.2.3 Mesure du champ coercitif

Mesure de B_r sur Y et de H_c sur X en zoomant raisonnablement sur l'oscilloscope. Conversion de la tension en excitation/champ magnétique [prévoir un tableur pour le faire automatiquement]

On voit qu'on obtient un champ rémanent et coercitif plutôt faible, ce qui est lié à la petite taille du cycle d'hystérésis. On a donc un milieu ferromagnétique **doux**.

44.3 Milieu doux, milieu dur

44.3.1 Classification

L'aire de cette courbe permet de définir deux type limite de milieu ferromagnétique :

- les **dur** dont le cycle d'hystérésis est large et l'aire grande ;
- les **doux** dont le cycle d'hystérésis est étroit et l'aire faible.

→ **Courbe hystérésis des deux milieux**. Attention, leur dénomination n'a rien à voir avec des propriétés mécaniques !

On voit que les milieu dur ont un fort champ coercitif et qu'il est difficile de leur faire perdre leur aimantation : ils sont donc souvent utilisés pour faire des aimants permanents. Un exemple typique sont les alliages Alnico, composés de fer, d'aluminium, de nickel, de cobalt et de cuivre. Pour de tels matériaux on peut avoir $H_c \sim 10^5 \text{ A.m}^{-1}$ → **types de ferro dur**.

Pour comprendre l'intérêt des milieu doux, parlons d'abord des pertes énergétique dans un transformateur.

44.3.2 Pertes énergétiques

En fait on peut voir qualitativement l'effet des pertes en enroulant un câble autour du fer, ce qui va ajouter des pertes par effet Joule à cause du courant induit dans le câble. **Réalisation de l'enroulement avec un câble de sécurité relié à un ampèremètre** → le cycle doit s'élargir.

On voit que l'ajout de pertes par effet Joule augmente l'aire du cycle d'hystérésis. En fait on peut le calculer directement, en regardant la puissance moyenne transférée au milieu ferromagnétique par la première bobine

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{i}{T} \int_0^T dt V_1 i_1 = \frac{1}{T} \int_0^T dt n_1 S \frac{dB}{dt} \frac{Hl}{n_1} \\ &= 2\pi\omega Sl \int_0^T dt H \frac{dB}{dt} \\ &= 2\pi\omega V \int_0^T dB H \\ &= 2\pi\omega V A\end{aligned}$$

[faire un schéma où on représente $dB H$ pour montrer qu'on calcule bien l'aire du cycle] où $V = Sl$ est le volume du milieu ferromagnétique, A l'aire de la courbe d'hystérésis et ω la fréquence du signal électrique. Donc plus l'aire est petite et moins on aura de pertes en régime sinusoïdal.

On voit donc tout de suite l'intérêt des ferromagnétique doux : ils permettent de réaliser des transformateurs en minimisant les pertes énergétique.

Un exemple de milieu doux sont les permalloy, une famille d'alliage composés de fer, de nickel et de terres rares.

Il y a aussi des pertes liées aux courants de Foucault induit dans le milieu ferromagnétique. Il y a deux options principales pour limiter ses pertes :

- utiliser un matériau isolants mais magnétique, comme les ferrites ;
- “feuilletter” le milieu en intercalant des couches d'isolants aussi fine que possible avec des couches ferromagnétique : les courants induits sont diminués fortement sans impacter les propriétés magnétiques.

Ici par exemple le milieu ferromagnétique est feuilleté pour limiter ces pertes.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment caractérisé les milieu ferromagnétique et que contrairement aux autres milieux magnétique, le lien entre H et M, B était non-linéaire.

Cette non-linéarité se traduit par l'existence d'un cycle d'hystérésis, qui permet de comprendre pourquoi ces milieux peuvent rester aimanté même en absence de champs extérieur. L'aire de ce cycle permet de distinguer deux type de milieu ferromagnétique : les doux et et les dur.

Les premiers sont utiles en régime variable, car ils permettent de minimiser les pertes énergétiques, notamment pour construire des transformateurs ou des électroaimants, et plus généralement pour réaliser des circuits magnétiques.

Les seconds sont utiles pour réaliser des aimants permanents puissants.

LP23 : Mécanismes de la conduction électriques dans les solides

45 Références

45.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PSI/PSI**, Dunod
- *Physique du solide*, Ashcroft
- *Physique de l'état solide*, Kittel

45.2 Expériences

45.2.1 Mesure 4 points de la résistance du cuivre

Matériel :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------|
| — 1 fil de cuivre avec 4 points | — 1 générateur ± 12 V |
| — 1 cristalliseur | — 1 thermocouple |
| — N câbles banane | |
| — 2 multimètres | — 1 bouilloire |

Remarques : En préparation on peut faire la mesure dans l'eau qui se refroidit pour avoir plusieurs points

46 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|-----------------------------|--|
| — électrocinétique | — physique statistique (distributions de Maxwell-Boltzmann et Fermi-Dirac) |
| — électromagnétisme | — mécanique quantique (Schrödinger stationnaire) |
| — théorie cinétique des gaz | |

Introduction

Dans cette leçon on va chercher à comprendre les mécanismes de la conduction électrique, en se basant sur des modèles assez simples que l'on va enrichir au fur et à mesure pour mieux coller aux résultats expérimentaux.

Ce que l'on veut chercher à modéliser, c'est le transport de la charge dans un solide, et plus précisément dans un cristal, une structure périodique à trois dimensions. Ici le transport est induit par un champ électrique que l'on impose sur le solide, par exemple en imposant une tension sur un fil de cuivre.

Commençons par un premier modèle, qui peut sembler surprenant mais qui fonctionne relativement bien.

46.1 Gaz d'électrons libres classique

46.1.1 Modélisation

Initialement le cristal est un système neutre électriquement et on va supposer que le champs électrique extérieur induit une faible perturbation, de sorte que l'édifice reste globalement neutre.

Dans ce modèle, formulé par Drude, chaque atome du cristal va fournir Z électrons qui seront alors des porteurs de charge mobiles. Comme l'édifice est globalement neutre, ces électrons ne sont en moyenne soumis à aucune interaction électrostatique dû au cristal et ils se comportent donc comme les particules d'un gaz parfait classique. On les nomme des *électrons de conduction*.

Ces électrons sont tout de même immergé dans un cristal et ils vont parfois rentrer en collision avec les ions du cristal, ce qui sera modéliser avec un terme de dissipation d'énergie. Au final

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \underbrace{\frac{m_e}{\tau} \mathbf{v}}_{\text{collision}} = -e\mathbf{E} \quad (46.1.1)$$

où \mathbf{v} est la vitesse d'un électron, m_e la masse d'un électron, e la charge élémentaire, τ le temps caractéristique entre deux collision et \mathbf{E} le champs extérieur qui perturbe le solide.

Voyons quelle prédiction ce modèle fait pour la conductivité.

46.1.2 Expression de la conductivité

De manière générale la conductivité est le facteur de réponse linéaire du solide au champ extérieur

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}$$

avec σ en S.m^{-1} et ρ la résistivité en $\Omega.\text{m}^{-1}$.

Or ici le courant est lié à la densité électronique n et à la vitesse moyenne des électrons

$$\mathbf{j} = -en\langle\mathbf{v}\rangle$$

et en régime stationnaire

$$\langle\mathbf{v}\rangle = -\frac{e\tau}{m_e} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \mathbf{E}$$

Donc

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \quad (46.1.2)$$

Ici τ est lié au libre parcours moyen l et à la vitesse moyenne des électrons

$$\tau = \frac{l}{\langle v \rangle} \quad \text{et} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$$

donc plus la température est élevée, plus la conductivité sera faible et la résistance élevée. Regardons ce que cela donne pour du cuivre.

46.1.3 Mesure de la résistance du cuivre

On a ici un fil de cuivre immergé dans de l'eau pour en contrôler la température. En préparation on a pu réaliser une série de mesure de 100°C à 30°C et on va ici mesurer la résistance à 20°C. [Mesure de la résistance, ajout du point sur la courbe](#) On vérifie bien que σ décroît quand la température augmente. $\sigma_{cuivre}^{tab} = 59,6 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$.

Mais est-ce que l'on trouve des valeurs raisonnables pour le temps moyen entre deux collision et le libre parcours moyen ?

Pour un solide contenant \mathcal{N}_A atomes, la densité en électrons est

$$n = \mathcal{N}_A \frac{Z \rho_s}{M_s}$$

où ρ_s est la densité du solide et M_s la masse molaire de l'atome composant le solide. Pour le cuivre $Z = 1$, $\rho_{Cu} \sim 9 \text{ g.cm}^{-3}$ et $M_{Cu} \sim 64 \text{ g.mol}^{-1}$, soit

$$n \sim 6.10^{23} \frac{1 \times 9}{64} \sim 10^{22} \text{ électrons / cm}^3$$

et donc comme $\langle v \rangle \sim 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ à 20°C et que

$$\tau = \frac{m_e \sigma}{e^2 n} \sim 10^{-14} \text{ s}$$

on trouve que $l \sim 10^{-9} \text{ m}$ soit de l'ordre d'un Angström, ce n'est pas déraisonnable vu que c'est la taille typique d'un atome.

On a donc ici un modèle très simple pour décrire la conductivité d'un matériau conducteur et qui semble cohérent. Mais on est encore incapable de prédire pourquoi un matériau est conducteur ou isolant : voyons si on peut résoudre ce problème en remplaçant la description classique par une quantique.

46.2 Gaz d'électrons libres quantique

46.2.1 Modélisation

Ce modèle, proposé par Sommerfeld, est le même que celui de Drude, mais maintenant les électrons sont des fermions décrit par la mécanique quantique. On néglige donc toujours les interactions entre les ions et les électrons et les interactions entre électrons, ce qui donne l'équation de Schrödinger stationnaire suivante pour un électron

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi = E \psi$$

Ici le cristal va avoir pour effet de confiner les électrons, c'est-à-dire que la fonction d'onde sera nulle hors du cristal. Si on considère un solide cubique de côté L et de volume $V = L^3$, il sera souvent plus commode d'utiliser des conditions aux limites périodiques

$$\psi(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{L})$$

où $\mathbf{L} = (L, L, L)$. Elles sont équivalentes à celles où $\psi(\mathbf{L}) = 0$.

46.2.2 Quantification des niveaux d'énergie

Si on part d'une solution générale de la forme

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{avec} \quad |\mathbf{k}| = \frac{\sqrt{2m_e E}}{\hbar^2}$$

on voit que le confinement de l'électron va quantifier les niveaux d'énergie et le vecteur d'onde

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \\ k_y = \frac{2\pi n_y}{L} \\ k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \end{cases} \quad \text{avec} \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}^*$$

Comme les électrons sont des fermions, il ne peut y avoir qu'un électron par état. On voit donc que si on a N électrons, l'état de plus basse énergie du solide sera à une certaine énergie non-nulle appelée **énergie de Fermi**.

46.2.3 Niveau de Fermi (version leçon)

On se place à température nulle pour ne pas avoir à se préoccuper de la fonction de distribution des électrons. Comme N est immense et que l'énergie d'un électron est proportionnelle à k^2 , la région occupée par les électrons dans l'espace réciproque sera équivalent à celui d'une sphère de volume [faire schéma en 2D]

$$\frac{4}{3}\pi k_F^3 \quad \text{avec} \quad k_F = \frac{\sqrt{2m_e \mathcal{E}_F}}{\hbar^2}$$

le vecteur d'onde de Fermi. Le volume d'un état étant $2V/8\pi^3$ (2 à cause du spin), on a donc

$$\begin{aligned} N &= \frac{2V}{8\pi^3} \frac{4}{3}\pi k_F^3 \\ \iff n &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2} \mathcal{E}_F \right)^{3/2} \\ \iff \mathcal{E}_F &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3} \end{aligned}$$

où n est la densité électronique. L'énergie de Fermi varie non-linéairement avec la densité électronique.

46.2.4 Électrons de conduction

Comme on considère de faibles perturbations, les seuls électrons qui vont jouer un rôle dans le mécanisme de conduction sont ceux proche du niveau de Fermi [schéma d'une bande en 1D], car ce sont les seuls qui ne sont pas "bloqués" par les autres électrons. Regardons quelles sont leurs propriétés.

On peut définir une vitesse de Fermi

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e} (3\pi^2 n)^{1/3}$$

et une température de Fermi

$$T_F = \frac{\mathcal{E}_F}{k_B}$$

Pour les métaux usuels $n \sim 10^{28}$ électrons / m^3 , donc $v_F \sim 10^6$ m.s⁻¹, $\mathcal{E}_F \sim 10^{-19}$ J ~ 1 eV et $T_F \sim 10^4$ K.

On voit qu'un électron de conduction a une très forte agitation thermique et que pour ces électrons une température ambiante équivaut à une température nulle.

Maintenant qu'on a introduit l'énergie de Fermi, il ne nous manque plus qu'une pièce pour comprendre pourquoi certains matériaux sont conducteurs et d'autres isolants : il faut prendre en compte les interactions avec les ions.

46.3 Gaz d'électrons quasi-libres

On va considérer que les électrons de conduction sont soumis à une faible interaction périodique de la part des ions, à cause de l'écrantage dû aux électrons qui restent proche des ions du cristal, les **électrons de cœur**. On ne fera pas le calcul ici, mais cette faible interaction périodique peut être traité en utilisant des développements perturbatifs.

46.3.1 Structure de bande

Si on considère un cristal unidimensionnel de pas a , alors l'énergie qui varie comme $\sim k^2$ sera modifiée pour $k = \pm\pi/a$, on va voir apparaître des **bandes d'énergies interdites** [faire schéma au tableau].

Un résultat important est qu'une bande pleine ne peut pas participer au mécanisme de conduction. Les bandes qui sont situées sous le niveau de Fermi sont appelées **bande de valence**. Les bandes qui croisent le niveau de Fermi sont appelées **bande de conduction**.

On peut donc enfin classer les différents solides :

- si toutes les bandes possédant des électrons sont pleines, alors on a un isolant ;
- si une bande est partiellement remplie, alors on a un conducteur.

46.3.2 Semi-conducteurs

La différence entre l'énergie maximale des bandes de valence et l'énergie minimale de la bande de conduction est appelée **énergie de gap** E_g .

On voit que si la valeur de E_g est suffisamment petite, les électrons de valence pourront être excités thermiquement ou par des photons et devenir des électrons de conduction. On parle alors de **semi-conducteur**, car ce sont des matériaux dont la conduction dépend des conditions extérieures. Ce sont des matériaux extrêmement intéressants car on peut contrôler leur conduction, ils sont à la base de toute l'électronique moderne. → Différents ordre de grandeur de E_g

Prenons l'exemple du silicium pur. Son énergie de gap est $E_g = 1,12$ eV, soit

$$T_g = \frac{E_g}{k_B} = 1,3 \times 10^4 \text{ K} \quad \lambda_g = \frac{hc}{E_g} = 1,1 \times 10^3 \text{ nm}$$

on voit que s'il faut chauffer considérablement ce matériau pour en changer les propriétés de conduction, avec un peu de rayonnement dans le proche IR on peut facilement générer un courant. C'est pour cela qu'on utilise le silicium pour construire des panneaux solaires → **panneau solaire**

Le silicium pur est un semi-conducteur dit **intrinsèque**, mais on peut aussi modifier ces propriétés en ajoutant artificiellement des impuretés, on parle alors de **semi-conducteurs extrinsèques**.

46.3.3 Semi-conducteur extrinsèque

Il existe deux types de semi-conducteurs extrinsèques :

- les dopés N , où on augmente la densité en électrons en ajoutant des impuretés riches en électrons. Cela revient à rajouter une bande de valence artificielle près de la bande de conduction [schéma]
- les dopés P , où l'on rajoute des impuretés pauvres en électrons, ce qui revient à rajouter une bande de conduction artificielle près de la bande de valence [schéma].

Dans les deux cas, le dopage diminue l'énergie de gap E_g . Or pour un semi-conducteur intrinsèque la densité de porteurs de charge varie selon une loi de Boltzmann

$$n \propto e^{-E_g/k_B T}$$

diminuer E_g permet d'augmenter la densité et donc la conductivité du matériau.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment on pouvait modéliser simplement le phénomène de conduction dans les solides. On a compris comment on pouvait comprendre l'origine de la conduction d'un point de vue microscopique et pourquoi certains matériaux étaient conducteurs ou isolants.

Finalement on a discuté brièvement des semi-conducteurs intrinsèque et extrinsèque. Les semi-conducteurs P et N sont à la base de l'électronique moderne, car ils permettent de construire des diodes et surtout des transistors, qui sont les composants de bases des processeurs. → diode et transistors

46.3.4 Niveau de Fermi (version phy stat)

L'expression de k va nous permettre de calculer la densité d'état contenu dans un certain volume de l'espace réciproque, c'est-à-dire le nombre d'états accessibles par un électron.

Comme L est en générale très grande devant les quantité microscopique, cette densité est simplement un volume élémentaire d^3k divisé par le volume d'un état $(2\pi/L)^3$

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{k})d^3k &= \frac{2V}{8\pi^3}d^3k = \frac{V}{\pi^2}k^2dk \\ &= \frac{V}{\pi^2} \frac{2m_e}{\hbar^2} E \times \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{E}}dE \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}dE = \rho(E)dE\end{aligned}$$

Si on a N électrons dans le solide, on a donc

$$N = \int_0^{+\infty} dE f_{FD}(E) \rho(E)$$

à température nulle, la distribution de Fermi-Dirac sera nulle au dessus d'une énergie, appelée énergie de Fermi, de sorte que

$$\begin{aligned}N &= \int_0^{\mathcal{E}_F} dE \rho(E) = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}_F^{3/2} \\ \iff \mathcal{E}_F &= \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}\end{aligned}$$

où n est la densité électronique. L'énergie de Fermi varie non-linéairement avec la densité électronique.

LP24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

47 Références

47.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1*, PCSI, Dunod
- *Mécanique classique*, Goldstein
- *Mécanique*, Landau
- *Mécanique*, Pérez

47.2 Expériences

47.2.1 Étude de la résonance de deux micro piézoélectriques

Matériel :

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| — 1 quartz émetteur | — 1 oscilloscope |
| — 1 quartz récepteur | — 2 câbles BNC/banane |
| — 2 pieds pour les quartz | — N câbles banane |
| — 1 GBF GX-320 | |

Remarques : Pour une introduction qualitative du phénomène (attention on étudie la résonance du couple émetteur + récepteur)

48 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|------------------------------------|---------------------|
| — oscillateur harmonique et amorti | — régime sinusoïdal |
| — électrocinétique | |
| — filtres, fonction de transfert | — ALI |

Introduction

Présentation qualitative de deux quartz wobblés : on voit un maximum pour une certaine fréquence, c'est le phénomène de résonance

La résonance c'est quand la réponse d'un système soumis à une excitation périodique admet un maximum en fonction de la fréquence d'excitation.

Note : la fréquence peut être temporelle ou spatiale.

La résonance est présente dans de nombreux domaines, en acoustique, en mécanique, etc. → **instrument de musique, balançoire**

On va maintenant présenter quelques caractéristiques du phénomène de résonance, en commençant par une étude théorique pour des systèmes à un degré de liberté.

48.1 Oscillateur harmonique amorti en régime forcé

48.1.1 Système étudié

Comme oscillateur harmonique amorti, on va considérer un ressort soumis à des frottements fluides pour fixer les idées, c'est-à-dire

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = e$$
$$\Longleftrightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = e$$

où me une force extérieure, que l'on va considérer en régime sinusoïdal de la forme $e = e_0 e^{i\omega t}$. Ici on utilise les notations canonique, avec $\tau = m/\alpha$ le temps de relaxation du système et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la fréquence propre du système. On ne va pas s'intéresser au régime transitoire et on va considérer qu'on est en régime sinusoïdal forcé, de sorte que x oscille à la même fréquence que e , soit $x = x_0 e^{i\omega t}$ et

$$x_0 \left(-\omega^2 + i\omega \frac{1}{\tau} + \omega_0^2 \right) = e_0$$
$$\Rightarrow H_x(\omega) = \frac{x}{e} = \frac{1}{i\omega \frac{1}{\tau} + \omega_0^2 - \omega^2}$$

où H_x caractérise la réponse du système. On va chercher à déterminer si le système admet une réponse maximale et si oui pour quelle fréquence ω .

48.1.2 Résonance en position

Pour ça on va regarder l'amplitude de la fonction H_x

$$|H_x(\omega)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{\tau^2} + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right)^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{\frac{\omega_0}{\tau} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + (\tau\omega_0)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 \right)^{1/2}}$$
$$= \frac{\tau}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{u^2 + Q^2(1 - u^2)^2}}$$

où on a introduit la variable adimensionnée $u = \omega/\omega_0$ et le **facteur de qualité** $Q = \omega_0\tau$, qui est un nombre sans dimension dont nous discuterons le sens physique juste après. L'amplitude de $H_x(u)$ sera maximale si

$$\frac{d|H_x|}{du}(u) = 0 \Longleftrightarrow \frac{2u + 2Q^2(-2u)(1 - u^2)}{[u^2 + Q^2(1 - u^2)^2]^{3/2}} = 0$$
$$\Rightarrow u + 2Q^2(u^3 - u) = 0$$
$$\Rightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

donc on aura une résonance en position si

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (48.1.1)$$

ce qui n'est possible que si $Q > 1/\sqrt{2} \rightarrow$ **courbe de $|H_x(\omega)|$** .

On voit que plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance sera fine. On peut montrer que la largeur à mi-hauteur de la résonance est

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (48.1.2)$$

Par ailleurs $Q = \omega_0\tau = \sqrt{km}/\alpha$, donc dans la limite où on n'a pas de dissipation avec $\alpha = 0$, le facteur de qualité devient infini et le profil de H_x devient un simple pic. Inversement, plus l'amortissement est élevé et plus la fréquence propre et excitatrice s'écarte, avec une résonance large.

48.1.3 Résonance en vitesse

Pour la vitesse en régime sinusoïdal $v = i\omega x$ et donc en notant $H_v = v/e$

$$|H_v(u)| = \tau \frac{u}{\sqrt{u^2 + Q^2(1 - u^2)^2}} = \tau \frac{1}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{1}{u} - u\right)^2\right)^{1/2}}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{d|H_v|}{du}(u) = 0 &\Rightarrow 2Q^2 \left(\frac{1}{u} - u\right) \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

et donc on aura une résonance pour $\omega_0 = \omega$, dont l'existence cette fois ne dépend pas du facteur de qualité Q . Par contre Q contrôle toujours la finesse de la résonance \rightarrow **tracé de H_v et H_x** .

On a donc toujours une résonance en vitesse, mais pas toujours en position.

Regardons maintenant un équivalent électronique d'un tel système, en étudiant un circuit RLC.

48.2 Caractérisation de la résonance d'un RLC

48.2.1 Résonance en intensité et en tension

Pour un circuit RLC, si l'on regarde la tension aux borne de la résistance on a la fonction de transfert suivante [faire le schéma]

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{s}{e} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC + (i\omega)^2 LC} \\ &= \frac{RC}{\sqrt{LC}} \frac{1}{i\omega\sqrt{LC} - i\frac{1}{\omega\sqrt{LC}} + \frac{RC}{\sqrt{LC}}} \\ &= \frac{1}{1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

On voit qu'ici on a une résonance en intensité ($s = RI$), qui est équivalente à celle en vitesse pour un système mécanique. La largeur à mi-hauteur, c'est-à-dire la bande passante est

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

donc comme attendu, plus on diminue R (l'amortissement) et plus la résonance sera fine.

On pourrait montrer de même qu'en prenant la tension au borne du condensateur on aurait une résonance en tension équivalente à celle en position pour le système mécanique.

On va maintenant mesurer ω_0 et $\Delta\omega$ pour un circuit réel.

48.2.2 Mesure

On a ici un circuit RLC, avec une résistance, une bobine et une capacité variable. Pour mesurer ω_0 et $\Delta\omega$ on va effectuer une wobulation : le GBF va effectuer une rampe de fréquence, de 8 à 12 kHz, sur une 1 seconde. En voie 1 de l'oscilloscope on récupère la rampe de fréquence et en voie 2 la tension au borne de la résistance. Si on se met persistance infini et en mode XY, on voit apparaître la résonance et on peut en mesurer la largeur à mi-hauteur et la fréquence. Mesure de ω_0 et de $\Delta\omega$ à l'oscilloscope en mode XY. On voit que les valeurs mesurées sont cohérentes avec celle calculée en mesurant la valeur des composants au LCR-mètre.

Par ailleurs on peut vérifier que baisser la résistance ou la capacité augmente la finesse de la résonance, mais que changer l'inductance non.

On va maintenant s'intéresser à des systèmes physiques pour lesquels la résonance est lié à la fréquence spatiale : les cavités optiques.

Regardons comment évolue l'énergie d'un système résonant.

48.2.3 Aspects énergétiques

La puissance moyenne transmise au circuit est, comme $I = s/R = H(\omega)e/R$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P} \rangle &= \langle Ie \rangle = \mathbb{R}e \left(\frac{1}{2} I e^* \right) = \mathbb{R}e \left(\frac{1}{2R} H(\omega) e_0^2 \right) \\ &= \frac{e_0^2}{2R} \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}\end{aligned}$$

donc l'excitation transmettra un maximum de puissance au système autour de la résonance en ω_0 .

48.3 Cavité optique

48.3.1 Cavité Fabry-Perot

On va considérer une cavité simple constituée de deux miroirs parallèles → Calcul sur slide

Conclusion

48.3.2 Oscillateur à quartz (en cas de questions)

[prévoir une slide avec schéma électrique du quartz]

En utilisant les règles d'associations en série et en parallèle on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_q} &= i\omega C_p + \frac{1}{R_s + \frac{1}{i\omega C_s} + i\omega L_s} \\ &= \frac{i\omega(C_p + C_s) - \omega^2 C_p C_s R_s - i\omega^3 C_p C_s L_s}{1 + i\omega C_s R_s - \omega^2 C_s L_s} \\ &= i\omega(C_s + C_p) \frac{1 + i\omega \frac{C_p C_s R_s}{C_p + C_s} - \omega^2 \frac{C_p C_s L_s}{C_p C_s}}{1 + i\omega C_s R_s - \omega^2 C_s L_s}\end{aligned}$$

pour un oscillateur à quartz, $Q \sim 10^5$ et R_s est très faible, de sorte que

$$\begin{aligned}Z_q &\simeq \frac{1}{i\omega(C_s + C_p)} \frac{1 - \omega^2 C_s L_s}{1 - \omega^2 \frac{C_p C_s L_s}{C_p C_s}} \\ &= \frac{1}{i\omega(C_s + C_p)} \frac{1 - (\omega/\omega_s)^2}{1 - (\omega/\omega_p)^2}\end{aligned}$$

avec $\omega_s^2 = \frac{1}{C_s L_s}$ et $\omega_p^2 = \frac{C_p C_s}{C_p C_s L_s}$.

On voit qu'on a une intensité en courant (et donc une élongation) maximale pour $\omega = \omega_s$. Comme Q est élevé, la largeur de la résonance est très fine

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{1}{Q} \sim 10^{-5}$$

LP25 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

49 Références

49.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC**, Dunod
- *Mécanique classique*, Goldstein
- *Mécanique 2*, BFR (pour Borda)
- *Mécanique*, Landau
- *Mécanique*, Pérez
- *Phénomènes linéaires et non linéaires*, Bonvalet

49.2 Expériences

49.2.1 Vérification de la formule de Borda

Matériel :

- 1 pendule pesant interfaçable
- 1 module sysam pour interfacer le pendule
- les câbles pour alimenter le module et le brancher sur un PC

Remarques : Le code de Guillaume repère les zéro pour en déduire T et θ_0 , marche très bien pour vérifier la loi ! Attention à bien placer la vis perpendiculaire à l'axe de rotation du pendule.

50 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- mécanique du point
- oscillateur harmonique
- électronique (RLC, filtres, ALI)

Introduction

Les oscillateurs sont très répandus dans la nature et ils ont un rôle majeurs dans nos société moderne, de par leurs applications pratiques au sein de l'électronique. Mais qu'est-ce qu'un oscillateur ?

Oscillateurs : système avec un comportement périodique.

On va voir dans cette leçon différents outils pour étudier les oscillateurs linéaires et non-linéaires. Commençons par introduire quelques outils en illustrant avec l'exemple d'un oscillateur harmonique.

50.1 Oscillateurs linéaires

50.1.1 Oscillateur harmonique

L'équation d'un oscillateur harmonique en 3 dimensions est

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\omega_0^2 \mathbf{x} \end{cases}$$

On définit **l'espace des phases** comme l'ensemble des positions et de leurs dérivées. Ici l'espace est à 6 dimensions $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$.

On représente souvent l'espace des phases avec **un portrait de phase** où on trace les courbes paramétrique $(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t))$.

Ici on a en plus un **système linéaire** : les équations du mouvements sont des combinaisons linéaires des \mathbf{x} et des $\dot{\mathbf{x}}$.

Si on considère un oscillateur harmonique unidimensionnel, on obtient les équations paramétriques suivantes

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

on a l'équation d'un cercle de rayon A pour x et \dot{x}/ω_0 , où A dépend des conditions initiales

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 = A^2$$

Un exemple typique de système que l'on peut décrire avec un oscillateur harmonique est le pendule pesant, dans l'approximation des petits angles, avec $x = \theta \rightarrow$ **simulation pendule et portrait de phase**.

Ici le portrait de phase est très simple, mais donne déjà de nombreuses informations et indique

- la conservation de l'énergie mécanique, car les trajectoires sont périodiques ;
- la stabilité du système, car les trajectoires sont bornées ;
- la position d'équilibre stable, qui est le centre des trajectoires.

Les trajectoires sont parcourus dans le sens trigonométrique.

Pour un tel système l'énergie mécanique se conserve, en effet

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = (\ddot{x} + \omega_0^2 x) m \dot{x} = 0$$

On observe facilement que pour un pendule usuel, l'énergie mécanique ne se conserve pas **démonstration en lançant le pendule**. On peut le décrire en ajoutant un terme de dissipation d'énergie, ce qui donne l'équation d'un oscillateur amorti.

50.1.2 Oscillateur amorti

Cette fois l'équation du mouvement est

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v = \dot{x} \\ \dot{v} + \alpha v = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

où $\alpha \dot{x}$ est dans notre cas dû aux forces de frottements fluides.

Le système est maintenant plus compliqué à résoudre, mais on peut déjà extraire des informations en traçant son portrait de phase → **simulation pendule amorti**. On voit tout de suite apparaître un **point attracteur**, vers lequel la trajectoire converge, qui est un équilibre stable. Ce point attracteur indique aussi que l'énergie n'est pas conservée, les trajectoires n'étant plus périodique. Ces diagrammes montrent clairement le lien entre invariance par translation temporelle et conservation de l'énergie ! Si on regarde la variation temporelle de l'énergie mécanique du système, on voit que c'est le terme de frottement qui est responsable de la dissipation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right) = -m \alpha \dot{x}^2$$

ce terme est source d'irréversibilité.

50.1.3 Propriété des systèmes linéaires

Retenons quelques propriétés essentielles des oscillateurs linéaires

- le système oscille à une fréquence donnée, on parle d'harmonicité ;
- le système a une seule position d'équilibre ;
- la réponse est proportionnelle à l'excitation ;
- la fréquence d'oscillation est indépendante de l'amplitude d'oscillation.

Jusqu'ici on a étudié le pendule pesant en considérant uniquement les oscillations aux petits angles. Mais que se passe-t-il si on l'augmente l'angle initial ? Si on regarde le portrait de phase, on voit apparaître des non-linéarités → **portrait de phase pour 4 angles : rond, elliptique, séparatrice et de diffusion**. Ces non-linéarités sont visibles par la non sphéricité des trajectoires, qui dénotent la présence d'harmoniques, c'est-à-dire de plusieurs fréquences d'oscillations.

50.2 Oscillateurs non-linéaires

50.2.1 Pendule simple

On va modéliser le pendule pesant ici présent comme un pendule simple, ce qui revient à dire que le centre de gravité du pendule est pratiquement confondu avec celui de la masselotte.

Cette fois l'équation du mouvement est non-linéaire

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v = \dot{\theta} \\ \dot{v} = -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{cases}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Ici le mouvement est caractérisée par l'énergie mécanique, avec des états liés si $E_m < E_p$ ou de diffusion si $E_m > E_p$

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

[tracer E_p et indiquer les point d'équilibres stables et instables]. La stabilité des points d'équilibres est visible directement sur le portrait de phase, puisque dans un cas on a des trajectoires qui restent bornés (stable) et dans l'autre elles ne le sont plus (instable).

En régime non linéaire la période d'oscillation va dépendre de l'amplitude, ce que l'on peut démontrer en considérant la conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

au maximum le pendule atteindra un angle θ_0 avec une vitesse nulle, tel que $E_m = mgl(1 - \cos \theta_0)$ et donc

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2\frac{g}{l}(\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ \iff dt &= \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \\ \iff \frac{T}{4} &= \int_0^{\theta_0} d\theta \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \end{aligned}$$

pour calculer cette intégrale, on va d'abord utiliser que $\cos \theta = 1 - 2\sin^2 \theta/2$, ce qui donne $\cos \theta_0 - \cos \theta = 2(\sin^2 \theta/2 - \sin^2 \theta_0/2)$, on va poser $x = \sin \theta_0/2$, soit

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\theta_0} d\theta \frac{1}{\sqrt{x^2 - \sin^2 \theta/2}}$$

et on va effectuer un changement de variable

$$\begin{cases} \sin(\theta/2) = x \sin \varphi \\ \cos(\theta/2) d\theta = 2x \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

donc φ varie de 0 à $\pi/2$ et

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{2x \cos \varphi}{\cos(\theta/2) x \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta/2}} \\ &\simeq \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{2\omega_0} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \end{aligned}$$

où on a effectué un développement limité en x^2 , en développant

$$x^2 = \sin^2 \theta_0/2 = \frac{1 - \cos \theta_0}{2} \simeq \frac{\theta_0^2}{4}$$

on trouve finalement la formule de Borda

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (50.2.1)$$

On va enregistrer l'oscillation du pendule pendant 2 minutes, avant de traiter les données obtenues pour vérifier cette formule.

Résumons quelques propriétés essentielles des systèmes non-linéaires

- on perd l'harmonicité, on parle d'enrichissement spectral ;
- le système possède plusieurs positions d'équilibres ;
- la réponse n'est pas proportionnelle à l'excitation.

Regardons maintenant si la formule de Borda est bien vérifiée.

50.2.2 Vérification expérimentale de la formule de Borda

Ici on voit la trajectoire du pendule, qui s'amortit au cours du temps à cause des frottements de l'air. Comme cet amortissement est lent, on va découper la trajectoire en plusieurs portions, chaque portions correspondant à une amplitude maximale, avec donc une fréquence caractéristique différente. Exportation des données et mesure de la fréquence avec le code de guillaume. On exporte les points obtenus sur qtiplot pour effectuer un ajustement linéaire (ou alors directement sur python à voir) En traçant $T(\theta_0^2)$, on peut ajuster linéairement $T = a(1 + b\theta_0^2)$ avec $a = 2\pi\sqrt{l/g}$ et $b = 1/16$.

On voit qu'on vérifie bien la formule de Borda pour des angles pas trop grands, car ensuite la formule n'est plus valide.

On va maintenant étudier un type d'oscillateurs non-linéaires particulièrement important : les oscillateur entretenus.

50.2.3 Oscillateur entretenu

Ce sont des oscillateurs avec un terme d'amplification, dépendant de l'évolution du système

$$\ddot{x} + A(x)\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

un exemple de tel système est l'oscillateur à pont de Wien → schéma du pont de Wien. En utilisant le théorème de Millman on trouve

$$\begin{cases} V_+ = \frac{1}{1 + R_1/R_2} s \\ V_- = \frac{i\omega RC}{1 + 3i\omega RC - \omega^2(RC)^2} s \end{cases}$$

Pour un ALI parfait $V_+ = V_- = r$ et donc en posant $\omega_0 = 1/RC$

$$\begin{cases} \ddot{r} + 3\omega_0\dot{r} + \omega_0^2r = \omega_0\dot{s} \\ s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) r \end{cases}$$

Or l'ALI peut délivrer une tension maximale V_{sat} , donc si

$$|r| \geq \frac{V_{sat}}{1 + R_1/R_2} = r_c$$

alors $s = \pm V_{sat}$ et sa dérivée temporelle est nulle. On a donc deux régimes et

$$\ddot{r} + A(r)\omega_0\dot{r} + r = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A(r) = 2 - \frac{R_1}{R_2} & \text{si } |r| < r_c \\ A(r) = 3 & \text{si } |r| \geq r_c \end{cases}$$

On voit qu'on aura amplification de r si $R_1/R_2 \geq 2$. Dans ces conditions, en partant de $r = 0$, les petites fluctuation électroniques vont être amplifiées, jusqu'à ce que $|r| \geq r_c$. Alors r sera amorti jusqu'à ce que $|r| < r_c$. Le signal sera alors de nouveau amplifié et ainsi de suite.

Si on trace le portrait de phase de l'oscillateur à pont de Wien, on voit tout de suite ce comportement. La dernière courbe est un attracteur, car toutes les trajectoires y finissent, quelque soient les conditions initiales → tracé du portrait de phase de l'oscillateur à pont de Wien.

Conclusion

Dans cette leçon on a développé les notions d'espace des phases et de portrait de phase pour étudier un système.

Le portrait de phase permet de caractériser plusieurs propriétés importantes du système, sans avoir à en résoudre les équations du mouvement. Il permet notamment d'étudier la stabilité du système en fonction de ses conditions initiales.

De plus cet outil se révèle être particulièrement puissant pour étudier les systèmes chaotique, où l'évolution du système est extrêmement sensible aux conditions initiales et semble n'être régit par aucune loi → exemple trajectoire Hypérion.

LP26 : Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley.

51 Références

51.1 Bibliographie

- *Physique tout-en-1, PC/PC* ?*, Dunod
- *Électromagnétisme et relativité*, Raimond
- *Le cours de physique de Feynman*, Feynman
- *Théorie des champs*, Landau

51.2 Expériences

51.2.1 Présentation du Michelson (qualitatif)

Matériel :

- | | |
|------------------------------------|------------------------------|
| — 1 Michelson | — 1 support pour la lentille |
| — 1 laser | — 2 supports Boy |
| — 1 lampe à mercure | — 1 écran |
| — 1 lentille de focale ~ 5 mm | |

Remarques : L'idée c'est de montrer le Michelson et la configuration coin d'air

52 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| — Mécanique (référentiel galiléen) | — Interféromètre de Michelson |
| — Électromagnétisme | |

Introduction

On fait de la cinématique : on s'intéresse donc aux mouvements sans considérer leurs causes.

À la fin du XIX^e siècle la mécanique classique a rencontré un certains nombres de problèmes, qui ont mené à la création de la théorie de la relativité restreinte par Einstein. On va commencer par voir dans quels contextes la mécanique classique est mises en défaut, avant de voir comment les résoudre.

52.1 Principe de relativité

Commençons par énoncer le principe de relativité classique de Galilée :

Principe de relativité : dans tout référentiel galiléen, les lois de la mécanique sont les mêmes.

52.1.1 Relativité et électromagnétisme

Si on considère un référentiel \mathcal{R} et un second référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme par rapport aux premiers, tel que $O = O'$ pour $t = 0$, alors [schéma des référentiels]

$$\begin{array}{ll}\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t & \text{transformation de Galilée} \\ \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v} & \text{loi de composition des vitesses} \\ \mathbf{a}' = \mathbf{a} & \text{invariance de l'accélération} \\ t' = t & \text{invariance du temps}\end{array}$$

L'invariance des accélérations implique que le principe fondamental de la dynamique reste inchangé par changement de référentiel, comme attendu avec le principe de relativité.

On voit que ce principe implique que la vitesse est relative et dépendante du référentiel dans lequel on se trouve. Or, quand on étudie les équations de l'électromagnétisme dans le vide, on a une équation de d'Alembert avec une vitesse caractéristique c qui apparaît

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (52.1.1)$$

on peut donc légitimement se poser la question du référentiel dans lequel la lumière se propage à une vitesse c .

À la fin du XIX^e siècle le consensus scientifique s'oriente vers l'existence d'un référentiel privilégié où les ondes lumineuses se propagent à cette vitesse : l'éther. C'est pour prouver l'existence de ce référentiel que Michelson conçut son interféromètre.

52.1.2 Expérience de Michelson et Morley (1887)

L'expérience consiste à utiliser un interféromètre de Michelson en configuration coin d'air où on a des franges d'égales épaisseur, avec donc une même distance entre la séparatrice et les deux miroirs, comme ici. [Démonstration du coin d'air avec le Michelson.](#)

On se place dans le référentiel de l'éther. On considère que la Terre se déplace à une vitesse v par rapport à l'éther, selon l'axe d'un des miroirs de l'interféromètre. On peut alors calculer le temps que mettra la lumière à effectuer un aller-retour entre chacun des miroirs et la séparatrice. Pour le premier miroir M_1 [faire schéma des trois temps], parallèle à v

$$\begin{aligned}c\Delta t_A &= L + v\Delta t_A \Rightarrow \Delta t_A = \frac{l}{c - v} \\ c\Delta t_R &= L - v\Delta t_R \Rightarrow \Delta t_R = \frac{l}{c + v}\end{aligned}$$

donc le rayon lumineux met un temps

$$\begin{aligned}\Delta t_{AR,1} &= \Delta t_R + \Delta t_A \\ &= \left(\frac{1}{c + v} + \frac{1}{c - v}\right) L \\ &= \frac{2c}{c^2 - v^2} L = \gamma(v)^2 \frac{2L}{c}\end{aligned}$$

où on a noté $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Pour le second miroir [faire schéma du trajet du rayon et des trois positions $M_2 + S$]

$$\begin{aligned} c^2 \Delta t_A^2 &= v^2 \Delta t_A^2 + L^2 \\ \iff \Delta t_A^2 &= \frac{L^2}{c^2 - v^2} \\ \iff \Delta t_A &= \gamma(v) \frac{L}{c} \end{aligned}$$

et de même pour $\Delta t_R = \gamma(v)L/c$, donc

$$\Delta t_{AR,2} = \gamma(v) \frac{2L}{c}$$

La différence de phase induite entre les deux ondes serait donc

$$\delta = c(\Delta t_{AR,2} - \Delta t_{AR,1}) = 2L(\gamma(v) - \gamma(v)^2) \quad (52.1.2)$$

or comme la vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil est $v \sim 3.10^4 \text{ km.s}^{-1}$ et que $c \sim 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$, $v/c \sim 10^{-4}$ et on peut développer $\gamma(v)$ en série

$$\delta \simeq 2L \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) = L \frac{v^2}{c^2} \quad (52.1.3)$$

Pour s'affranchir du choix d'une orientation particulière pour l'interféromètre, Michelson et Morley ont choisi de faire pivoter les deux bras de l'interféromètre de 90° . Cette rotation inverse le rôle des deux miroirs, ce qui induit une différence de marche de $-\delta$. On s'attend donc à mesurer un décalage de $\Delta p = -\delta/\lambda$ interfranges en faisant pivoter l'interféromètre.

Pour leur expérience de 1887, Michelson et Morley avaient $L \simeq 10 \text{ m}$ et $\lambda \simeq 500 \text{ nm}$. Soit un décalage de $\Delta p \simeq 0,2$ interfranges. Or il ne mesurèrent qu'un décalage $\Delta p_{exp} = 0,01\dots$ c'est-à-dire rien.

Cette absence de décalage montre qu'il n'y a pas de référentiel privilégié et que la vitesse de la lumière est absolue! C'est en partant de ce principe qu'Einstein postulat sa théorie de la relativité restreinte en 1905.

52.1.3 Postulats d'Einstein

Sa théorie se base sur deux postulats

- le principe de relativité ;
- la vitesse de la lumière dans le vide c est invariante par changement de référentiel.

auquel il ajoute le “principe d'équivalence”, qui dit que l'on doit retrouver la mécanique classique pour des problèmes non-relativiste, quand $v \ll c$ (nous reviendrons sur cette condition plus tard).

On voit que le deuxième postulat renforce le statut du premier : il n'existe pas de référentiel “absolu”. Regardons quelle physique nouvelle se cache derrière le deuxième postulat.

52.2 Changement de référentiel relativiste

On a vu avec l'expérience de Michelson et Morley que la lumière ne suivait pas la loi de composition des vitesses et qu'elle était absolue. Et de même les équations de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes par une transformation de Galilée. Pour résoudre ces deux soucis on va introduire une nouvelle transformation pour passer d'un référentiel à un autre : la transformation de Lorentz.

52.2.1 Transformation de Lorentz

Pour simplifier les expressions mathématiques, on va considérer dans tout ce qui suit la même situations que dans la première partie, avec un référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme selon Ox par rapport à un référentiel \mathcal{R} , avec $O = O'$ à $t = 0$.

On va considérer les coordonnées d'un rayon lumineux émis à $t = 0$ en O [faire schéma], donc par définition comme c est absolu

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ct = 0 \\ x' - ct' = 0 \end{cases}$$

En supposant que la transformation qui relie les coordonnées dans les deux référentiels est linéaire

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ t' = g(x, t) \end{cases}$$

on a forcément que les deux termes sont reliés par une constante

$$(x - ct)\mu = x' - ct' \quad (52.2.1)$$

Si on considère un rayon lumineux dans l'autre sens, on aura une relation linéaire similaire avec une autre constante

$$(x + ct)\nu = x' + ct' \quad (52.2.2)$$

Si on effectue des combinaison linéaire avec ces deux équations on va pouvoir établir la forme de f et de g

$$\begin{cases} 2x' = x(\mu + \nu) + ct(\nu - \mu) \\ 2ct' = x(\nu - \mu) + ct(\nu + \mu) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma x + Bct \\ ct' = Bx + \gamma ct \end{cases}$$

où on a posé $\gamma = (\mu + \nu)/2$ et $B = (\nu - \mu)/2$. Pour déterminer γ et B regardons les coordonnées du point O' dans les deux référentiels

$$\begin{cases} x_{O'} = vt \\ x'_{O'} = \gamma x_{O'} + Bct = 0 \end{cases} \Rightarrow B = -\frac{v}{c}\gamma$$

soit, en notant $\beta = v/c$, $x' = \gamma(x - \beta ct)$. Par symétrie, on s'attend à ce que $\gamma = \gamma(v) = \gamma(-v)$ et que la transformée soit la même pour $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ en inversant simplement le signe de v

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)(x' + \beta ct) \\ &= \gamma(v)^2[(x - \beta ct) + \beta(ct - \beta x)] \\ &= \gamma(v)^2(1 - \beta^2)x \\ \Rightarrow \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

on reconnaît le facteur $\gamma(v)$ déjà rencontré : on l'appelle le **facteur de Lorentz**.

Dans ce cas la transformée de Lorentz s'exprime comme

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(v)(ct - \beta x) \end{cases} \quad (52.2.3)$$

avec

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (52.2.4)$$

le **facteur de Lorentz** que l'on a déjà rencontré et $\beta = v/c$. Note : à partir de maintenant on n'indiquera plus de manière explicite que γ dépend de v .

On voit que le temps et l'espace sont mélangés et que le temps n'est plus invariant ! Par ailleurs, si $v \ll c$, alors $\gamma \simeq 1$ et $\beta \simeq 0$: on retrouve la transformée de Galilée. En pratique γ est très proche de 1 tant qu'on ne dépasse pas le quart de la vitesse de la lumière \rightarrow **tracé de $\gamma(v/c)$** .

On voit aussi que c apparaît comme une vitesse limite : γ n'est plus réel si $v > c$.

52.2.2 Loi de composition des vitesses

Comme le temps et l'espace sont mélangés, la loi de composition des vitesses prend une forme plus complexe. Calculons les éléments de distance et de temps infinitésimaux, en notant $u = dx/dt$

$$\begin{cases} dx' = \gamma dx - \gamma \beta c dt = \gamma dx (1 - \beta c/u) \\ c dt' = \gamma c dt - \gamma \beta dx = \gamma dt (c - \beta u) \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} \frac{1 - \beta c/u}{1 - \beta u/c} \\ &= u \frac{1 - \beta c/u}{1 - \beta u/c} \end{aligned}$$

on voit que si $u = c$, alors on retrouve bien que $u' = c$: la vitesse de la lumière est bien invariante par changement de référentiel !

On a vu que l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel entraîne une symétrie entre l'espace et le temps, qui n'est plus absolu. On voit qu'en plus du temps, les notions de distances temporelle ou spatiale semblent ne plus être absolues non plus ! Regardons quelques résultats contre-intuitif qu'implique la relativité

52.3 Conséquences physiques

La première conséquence est la **contraction des longueurs**.

52.3.1 Contraction des longueurs

En fait cette conséquence permet de réconcilier la mesure de Michelson et Morley et la théorie, et c'est d'ailleurs pour ça que Lorentz introduisit la transformation qui porte son nom.

En effet si on considère que la distance entre le premier miroir et la séparatrice est contracté par le facteur de Lorentz γ , telle que $L' = L/\gamma$, alors

$$\Delta t_{AR,1} = \gamma^2 \frac{2L'}{c} = \gamma \frac{2L}{c} = \Delta t_{AR,2}$$

et on retrouve bien que le déphasage dû à la différence de parcours est cette fois nul.

En fait on peut définir la **longueur propre** L_0 d'un objet, comme étant sa longueur dans le référentiel où il est au repos. La longueur mesurée dans tout autre référentiel est toujours plus petite que L_0 .

En effet $L_0 = \Delta x$ est mesurée simultanément dans le référentiel \mathcal{R} , avec $c\Delta t = 0$, soit

$$\begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' - \beta c\Delta t') \\ 0 = \gamma(c\Delta t' - \beta\Delta x') \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \gamma(1 - \beta^2)\Delta x' = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

et donc $L = L_0/\gamma \leq L_0$.

A contrario, pour le temps on a le phénomène de **dilatation du temps**.

52.3.2 Dilatation du temps

Comme pour la longueur propre, on définit le **temps propre** τ d'un objet comme étant le temps mesuré dans le référentiel où il est au repos. Le temps mesuré dans tout autre référentiel est toujours plus grand que τ .

En effet $\tau = \Delta t$ est mesurée au même endroit dans le référentiel \mathcal{R} , avec $\Delta x = 0$, soit

$$T = \Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c) = \gamma\Delta t$$

et donc $T = \gamma\tau \geq \tau$.

On va étudier une expérience qui met en évidence cet effet.

52.3.3 Mesure de la vitesse d'un muon

Quand un rayon cosmique de haute énergie percute une particule de l'atmosphère, il va générer une gerbe de particules descendantes. Parmi ces particules se trouvent le muon, qui sont des particules instables qui se désintègrent spontanément en électrons, avec une durée de vie moyenne $\tau = 2,2 \pm 0,2 \mu\text{s}$, de sorte que la population des muons est

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

On l'a vu, cette formule est vraie dans le référentiel propre du muon. Dans le référentiel terrestre, on aurait $N(t) = N_0 e^{-t/T}$ avec $T = \gamma(v)\tau$ et v la vitesse du muon dans l'atmosphère.

En 1962 Frisch et Smith mesurèrent le facteur de Lorentz de ces muons atmosphériques. Ils mesurèrent le flux de muons en haut d'une montagne de 1910 m et proche du niveau de la mer à 3 m. Si les muons mettent un temps Δt pour parcourir cette distance, au niveau de la mer on s'attend à trouver

$$N_{\text{mer}} = N_{\text{mont}} e^{-\Delta t/\gamma(v)\tau}$$

soit

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\tau(\ln N_{\text{mont}} - \ln N_{\text{mer}})}$$

Ici on va utiliser leurs données pour remonter aussi à $\beta = v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$.

Dans leur expérience, Frisch et Smith mesurèrent $N_{\text{mont}} = 563 \pm 10$, $N_{\text{mer}} = 408 \pm 9$ et $\Delta t = 6,36 \pm 0,01 \mu\text{s}$, soit

$$\gamma = 8,9 \pm 0,2 \quad \text{et} \quad v \simeq 0.994 c \quad (52.3.1)$$

on voit que les muons ont une vitesse très proche de celle de la lumière !

Pour finir, on va maintenant parler un peu de comment repérer des événements en relativité.

52.3.4 Événement spatio-temporel

En relativité restreinte, le temps et l'espace deviennent indissociables : il faut maintenant raisonner en terme **d'événement spatio-temporel**.

Un **événement** E est un phénomène physique qui se produit dans un référentiel galiléen \mathcal{R} à un instant t et une position \mathbf{r} , qui sont ses **coordonnées spatio-temporelles**. On notera $E(t, \mathbf{r})$ un événement. En physique non-relativiste, comme le temps est identique dans tous les référentiels, il est très simple de déterminer quels événements sont antérieurs, simultanés ou postérieurs à un autre. Par exemple il n'est pas absurde de se demander si une éruption solaire a lieu en ce moment précis. En relativité, cette question est plus ambiguë et dépend du référentiel dans lequel on se trouve. Pour y répondre clairement il nous faut une "distance" spatio-temporelle invariante par changement de référentiel.

Regardons ce qui se passe si on soustrait le carré de cdt' au carré dx'

$$\begin{cases} dx'^2 = \gamma^2[dx^2 - 2\beta c dx dt + (\beta c dt)^2] \\ (cdt')^2 = \gamma^2[(cdt)^2 - 2\beta c dt dx + (\beta dx)^2] \end{cases} \Rightarrow (cdt')^2 - dx'^2 = \gamma^2(1 - \beta^2)[cdt^2 - dx^2]$$

et comme $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$, on voit qu'on a construit un invariant relativiste.

On définit l'**intervalle d'espace temps** comme étant

$$ds^2 = (cdt)^2 - (d^3\mathbf{x})^2 \quad (52.3.2)$$

cet intervalle est invariant et permet donc de calculer une "distance" entre deux événements qui sera bien identique dans tous les référentiels.

Si on prend deux événement $E_1(t_1, \mathbf{x}_1)$ et $E_2(t_2, \mathbf{x}_2)$, alors

$$\Delta s^2 = (ct_2 - ct_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2$$

le signe de l'intervalle permet de définir des relations de causalité entre les deux événements :

- $\Delta s^2 < 0$, alors $|\Delta \mathbf{x}| > c\Delta t$ et les deux événements ne peuvent pas être relié causalement. Aucun objet ne peut aller de E_1 à E_2 , puisqu'il faudrait qu'il aille plus vite que la lumière. On parle **d'intervalle de genre espace**. De plus cela implique que l'ordre temporel des événements dépend du référentiel choisi.
- $\Delta s^2 > 0$, alors $|\Delta \mathbf{x}| < c\Delta t$ et les deux événements peuvent être relié causalement. Les deux événements peuvent être les positions successives d'un objet se déplaçant à la vitesse $u = |\Delta \mathbf{x}|/\Delta t < c$. On parle **d'intervalle de genre temps**. Cela implique aussi que l'ordre des événements sera toujours le même dans tous les référentiels galiléen : si $\Delta t > 0$ l'événement E_1 précède l'événement E_2 et peut en être la cause et inversement si $\Delta t < 0$.
- $\Delta s^2 = 0$, alors $|\Delta \mathbf{x}| = c\Delta t$ et les deux événements peuvent être relié par uniquement par des rayons lumineux. E_1 et E_2 peuvent être les positions successives d'un rayon lumineux. On parle **d'intervalle de genre lumière**.

→ Cône de lumière d'un événement avec passé, futur et ailleurs.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu que le principe de relativité n'était pas suffisant pour décrire certains phénomènes, notamment l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel.

L'ajout de cette invariance implique que le temps et l'espace se mélange lors d'un changement de référentiel, pour des objets ayant une vitesse proche de celle de la lumière, dit relativiste.

Pour des objets relativiste de nombreux phénomènes nouveaux apparaissent : les longueurs se contractent et le temps se dilate. Il faut toujours raisonner en terme d'événement spatio-temporel, le temps et l'espace seul n'ayant plus de sens. On utilise un nouvel invariant, l'intervalle d'espace temps, pour classifier la causalité de deux événements.

Finalement dans une prochaine leçon on pourrait parler de dynamique relativiste.

LP27 : Effet tunnel ; radioactivité alpha.

53 Références

53.1 Bibliographie

- *Mécanique quantique I & II*, Cohen-Tannoudji
-
- *Poly de nucléaire*, Khan

53.2 Expériences

53.2.1 Propagation d'un paquet d'onde gaussien

Matériel :

- script python

Remarques : Faut trouver un script ok sur internet

53.2.2 Vérification de la loi de Geiger-Truc

Matériel :

- script python

Remarques : Faut extraire les données depuis le poly de Khan (ou de l'article)

54 Notes

niveau : Licence

pré-requis :

- | | |
|--|--|
| — équation de Schrödinger stationnaire | — paquet d'onde |
| — marche de potentiel 1D | — physique nucléaire (isotope, bilan de masse) |

Introduction

On a déjà vu qu'une marche de potentiel à une dimension menait à des comportements similaires à celui d'une interface en optique, avec des états stationnaires composés d'ondes planes incidentes, réfléchies et transmises. On avait interprété ce résultat en terme de probabilité de réflexion et de transmission d'une particule, représentée par un paquet d'onde construit à partir des états stationnaires. On va voir maintenant ce qui se passe quand on a une barrière de potentielle et comment on peut l'interpréter.

54.1 Effet tunnel

54.1.1 Barrière de potentiel

On considère une barrière de potentielle carrée, de largeur L et de hauteur V_0 . L'équation de Schrödinger stationnaire ici est

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (V(x) - E) \right) \varphi(x) = 0 \quad (54.1.1)$$

avec, en notant H la fonction de Heaviside,

$$V(x) = (H(x) - H(x - L))V_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } x \in [0, L] \\ 0 & \text{si } x > L \end{cases}$$

On va considérer que $E < V_0$. La barrière de potentiel définit 3 zones, avec deux vecteurs d'onde différent

— (1) et (3) : $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

— (2) : $\eta = \sqrt{k_0^2 - k^2} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$, avec $k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$

On va chercher des solutions de la forme

$$\varphi(x) = H(-x)\varphi_1(x) + (H(x) - H(x - L))\varphi_2(x) + H(x - L)\varphi_3(x)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = A(e^{ikx} + re^{-ikx}) \\ \varphi_2(x) = A(t'e^{\eta x} + r'e^{\eta x}) \\ \varphi_3(x) = Ate^{ik(x-L)} \end{cases}$$

c'est-à-dire avec une onde plane incidente et réfléchie dans la zone (1), une onde transmise et réfléchie amortie en (2) et une onde plane transmise en (3).

Pour calculer la valeur des coefficients r, r', t', t , on utilise le fait que la fonction d'onde doit être continue et que sa dérivée aussi, ce qui donne deux équations en $x = 0$

$$\begin{cases} (1) & 1 + r = t' + r' \\ (2) & ik(1 - r) = \eta(t' - r') \end{cases}$$

ce qui donne une relation simple reliant t' et r' en regardant $ik(1) + (2)$:

$$2ik = t'(\eta + ik) + r'(ik - \eta)$$

En utilisant la condition de continuité en $x = L$, on peut relier t', r' à t

$$\begin{cases} (3) & r'e^{-\eta L} + t'e^{\eta L} = t \\ (4) & \eta(t'e^{\eta L} - r'e^{-\eta L}) = ikt \end{cases}$$

Sommons $\eta(3)$ et (4) pour exprimer t'

$$2t'\eta e^{\eta L} = (ik + \eta)t \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{ik + \eta}{2\eta} e^{-\eta L} t$$

de même on somme $-\eta(3)$ et (4) pour exprimer r'

$$-2r'\eta e^{-\eta L} = (ik - \eta)t \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{ik - \eta}{-2\eta} e^{\eta L} t$$

Finalement on injecte les expression de t' et r' dans la première équation pour exprimer t

$$\begin{aligned} \frac{t}{2\eta} [(ik + \eta)^2 e^{-\eta L} - (ik - \eta)^2 e^{\eta L}] &= 2ik \\ \Leftrightarrow t [(-k^2 + 2ik\eta + \eta^2) e^{-\eta L} + (k^2 + 2i\eta - \eta^2) e^{\eta L}] &= 4ik\eta \\ \Leftrightarrow 2t [(k^2 - \eta^2) \sinh(\eta L) + 2ik\eta \cosh(\eta L)] &= 4ik\eta \end{aligned}$$

Soit

$$t = \frac{2ik\eta}{(k^2 - \eta^2) \sinh(\eta L) + 2ik\eta \cosh(\eta L)} \quad (54.1.2)$$

ce qui permet aussi d'exprimer les coefficients r' , t' et r .

→ Pour traiter le cas où $E > V_0$, il suffit de prendre $\eta = i\rho = i\sqrt{k^2 - k_0^2}$, et on a alors

$$t = \frac{2k\rho}{2k\rho \cos(\rho L) - i(k^2 + \rho^2) \sin(\rho L)}$$

Comme pour une marche de potentiel, on va interpréter t comme l'amplitude de l'onde transmise au travers de la barrière de potentiel et on va définir un coefficient de transmission, qui représente la probabilité pour une particule représentée par un paquet d'onde de franchir la barrière.

54.1.2 Coefficient de transmission

On définit le coefficient de transmission comme le carré de l'amplitude de l'onde incidente sur le carré de celle de l'onde transmise, soit

$$T = \left| \frac{At}{A} \right|^2 = |t|^2 \quad (54.1.3)$$

Ici on a donc, en utilisant que $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ pour passer de la première à la seconde ligne

$$\begin{aligned} T &= \frac{4k^2\eta^2}{(k^2 - \eta^2)^2 \sinh^2(\eta L) + 4k^2\eta^2 \cosh^2(\eta L)} \\ &= \frac{4k^2\eta^2}{[(k^2 - \eta^2)^2 + (2k\eta)^2] \sinh^2(\eta L) + 4k^2\eta^2} \\ &= \frac{4k^2\eta^2}{4k^2\eta^2 + (k^2 + \eta^2)^2 \sinh^2(\eta L)} \end{aligned}$$

En pratique on se trouve souvent dans la limite d'une barrière épaisse, avec $\eta L \gg 1$. Dans ce cas $\sinh(\eta L) \simeq e^{\eta L}$ et le premier terme du dénominateur devient négligeable, soit

$$T \simeq \frac{16k^2\eta^2}{(k^2 + \eta^2)^2} e^{-2\eta L} \quad (54.1.4)$$

ce qui montre clairement que la transmission d'un état stationnaire décroît exponentiellement quand la largeur L de la barrière devient grande devant η .

Contrairement au cas classique, la probabilité de franchir la barrière est donc non nulle pour une particule quantique! C'est dû au fait que dans la barrière la fonction d'onde est non-nulle, avec le comportement d'une onde évanescence qui s'atténue sur une longueur caractéristique $1/\eta$. Lorsque $l \lesssim 1/\eta$ la particule a une probabilité importante de franchir la barrière par **effet tunnel**.

Regardons le cas d'un proton dans un noyau. Dans ce cas $V_0 - E$ sera typiquement de l'ordre du méga électron volt (MeV), soit $V_0 - E \sim 10^6 \text{ eV} \sim 10^{-19} \cdot 10^6 \text{ J} \sim 10^{-13} \text{ J}$. La taille caractéristique de la barrière franchissable sera donc

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\eta} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_p(V_0 - E)}} \\ &\sim \frac{10^{-34}}{(4 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-13})^{1/2}} \\ &\sim 10^{-15} \text{ m} \end{aligned}$$

ce qui est typiquement la taille d'un noyau.

Pour bien comprendre ce qu'il se passe, regardons qualitativement le comportement d'un paquet d'onde à l'approche d'une barrière de potentiel.

54.1.3 Comportement d'un paquet d'onde

On a déjà vu que les états stationnaires en ondes planes sont non-normalisables et que pour représenter une particule quantique on utilisait un paquet d'onde normalisé.

Pour étudier la transmission d'une particule au travers de la barrière de potentiel, il faudrait ici composer avec 5 paquets d'onde, séparés en trois parties pour la fonction d'onde initiale [à l'oral uniquement]

1. un paquet d'onde incident pour $x < 0$
2. un paquet d'onde réfléchi pour $x < 0$
3. un paquet d'onde évanescence transmis pour $x \in [0, L]$
4. un paquet d'onde évanescence réfléchi pour $x \in [0, L]$
5. un paquet d'onde transmis pour $x > L$

Mathématiquement on obtient la fonction d'onde à un temps quelconque en multipliant chaque paquet par $e^{-iE(k)t/\hbar} = e^{-i\omega(k)t}$ et en intégrant sur k , soit [sur slide? Ou peut-être juste sauter...]

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= H(-x) \int_{k_0}^{+\infty} dk g(k) (e^{i(kx - \omega(k)t)} + r e^{-i(kx + \omega(k)t)}) \\ &\quad + (H(x) - H(x - L)) \int_{k_0}^{+\infty} dk g(k) (t' e^{\eta x - i\omega(k)t} + r' e^{-(\eta x + i\omega(k)t)}) \\ &\quad + H(x - L) \int_{k_0}^{+\infty} dk g(k) t e^{i(kx - \omega(k)t)} \end{aligned}$$

Si on regarde l'évolution temporelle d'une telle fonction d'onde on peut montrer que pour $t < 0$, seul le paquet d'onde incident est non nul et que pour $t > 0$ suffisamment grand on aura uniquement un paquet d'onde réfléchi et transmis de faible amplitude → **simulation d'un paquet arrivant sur la barrière**
<https://www.youtube.com/watch?v=JDA9ynX6j9A>.

Le rapport des probabilité de présence totale dans le paquet transmis et incident sera simplement le coefficient de transmission T calculé précédemment, qui correspond bien à la probabilité de franchir la barrière.

54.2 Radioactivité alpha

54.2.1 Phénomène

En fonction de leur nombre de proton et de neutron, les atomes peuvent se désintégrer selon plusieurs type de radioactivité → **radioactivité en fonction du nombre de proton et de neutron**. Ici on va s'intéresser à la radioactivité alpha, où un atome père se désintègre en un atome fils et une particule α , qui n'est autre qu'un noyau d'hélium



cette radioactivité concerne principalement les atomes massifs, car il faut qu'ils soient suffisamment gros pour que l'interaction électromagnétique "compense" l'interaction forte qui lie les noyaux.

Lors de sa formation la particule α aura une énergie cinétique

$$E_\alpha = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2$$

où M désigne la masse des particules. Typiquement $E_\alpha \sim 5$ MeV.

Regardons comment on peut modéliser cette désintégration avec la mécanique quantique.

54.2.2 Modèle de Gamow

Dans ce modèle proposé par Gamow, on va considérer qu'il y a une compétition entre deux types d'interaction dans le noyau

- une attractive à courte portée de très forte intensité (interaction forte) ;
- une répulsive de longue portée de faible intensité (interaction coulombienne).

Soit un potentiel de la forme [faire le schéma de $V(r)$ avec la zone forte et coulombienne], avec un potentiel coulombien

$$V(r, Z) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \sim 15 \text{ MeV} \quad (54.2.2)$$

On considère que la particule α est confinée par le potentiel générée par le noyau fils Y , de sorte qu'elle effectuera des aller-retour entre $r = 0$ et $r = R_Y$. À chaque aller-retour elle aura une certaine probabilité P de franchir la barrière de potentielle par effet tunnel en $r = R_\alpha$ avec une énergie $E_\alpha = V(R_\alpha)$.

Ici on va utiliser une approche simplifiée pour comprendre ce qu'il se passe qualitativement, en prenant une barrière carrée avec une certaine largeur $\Delta R = R_\alpha - R_Y$ et une hauteur $V_0 = V(R_Y)$ [faire le dessin du potentiel]. Alors

$$\begin{cases} \Delta R = R_\alpha - R_Y = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{E_\alpha} - \frac{1}{V_0} \right) \simeq \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E_\alpha} \\ \eta = \frac{\sqrt{2m_\alpha(V_0 - E_\alpha)}}{\hbar} \simeq \frac{\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}{\hbar} \end{cases} \Rightarrow \eta \Delta R \simeq b \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \gg 1$$

et la probabilité de franchir la barrière sera simplement le coefficient de transmission calculé plus tôt dans la limite de barrière large

$$P \sim e^{-2\eta\Delta R} = e^{-bZ/\sqrt{E_\alpha}} \quad (54.2.3)$$

Il est important de noter que ce calcul est bricolé pour donner un résultat cohérent avec un calcul plus rigoureux, il est donc principalement qualitatif... Toutefois il permet de caractériser la radioactivité α d'un isotope et on va pouvoir relier le temps de demi-vie d'un isotope avec la loi de Geiger-Nutall.

54.2.3 Loi de Geiger-Nuttall

Si on considère que la particule α effectue n aller-retour par unité de temps, sa probabilité de franchir la barrière de potentielle par unité de temps sera donc

$$\lambda = nP \quad (54.2.4)$$

Regardons comment évolue une population de N atomes X . Par définition

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (54.2.5)$$

en regardant l'évolution de la population on peut donc estimer le temps de demi-vie de l'atome X

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

et donc si on regarde le logarithme de $\tau_{1/2}$

$$\begin{aligned} \ln \tau_{1/2} &= \ln(\ln 2) - \ln(n) - \ln \left(e^{-bZ/\sqrt{E_\alpha}} \right) \\ &= a + b \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \end{aligned} \quad (54.2.6)$$

c'est la loi de Geiger-Nuttall.

Elle est très bien vérifiée pour différents isotopes → **figure poly de Khan**, et permet de remonter aux propriétés internes du noyau si on mesure E_α et $\tau_{1/2}$ (et qu'on utilise un modèle plus rigoureux).

Rappelons une dernière fois qu'ici le modèle qu'on a utilisé est qualitatif et sert principalement à faire ressortir la physique, plus complexe, sous-jacente à la radioactivité alpha.

Conclusion

Dans cette leçon on a vu comment calculer les états propres pour une barrière de potentielle et le coefficient de transmission T associé.

Contrairement au cas classique, si on considère une particule représentée par un paquet d'onde, elle aura une probabilité non nulle, égale à T , de franchir la barrière. On parle alors d'effet tunnel.

Finalement on a vu comment cet effet permettait d'expliquer sommairement, avec un modèle simple, la radioactivité alpha.

Liste des leçons

- LP1 : Gravitation
- LP2 : Loi de conservation en dynamique
- LP3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.
- LP4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide
- LP5 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides
- LP6 : Premier principe de la thermodynamique
- LP7 : Transition de phase
- LP8 : Phénomènes de transport
- LP9 : Conversion de puissance électromécanique
- LP10 : Induction électromagnétique
- LP11 : Rétroaction et oscillations
- LP12 : Traitement d'un signal. Étude spectrale
- LP13 : Ondes progressives, ondes stationnaires
- LP14 : Ondes acoustiques
- LP15 : Propagation guidée des ondes
- LP16 : Microscopies optiques
- LP17 : Interférences à deux ondes en optique
- LP18 : Interférences à division d'amplitude
- LP19 : Diffraction de Fraunhofer
- LP20 : Diffraction par des structures périodiques
- LP21 : Absorption et émission de la lumière
- LP22 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques
- LP23 : Mécanismes de la conduction électrique dans les solides
- LP24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique
- LP25 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités
- LP26 : Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley.
- LP27 : Effet tunnel ; radioactivité alpha.