Ecuații și inecuații

Saturday, December 11, 2021 10:22 AM

1. Fie ecuaţia $x^2+ax+3=0$ cu soluţiile pozitive x_1 şi x_2 astfel încât $x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geometrică (în această ordine). Atunci valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ poate fi

$\boxed{A}$ $2\sqrt{3}$; $\boxed{B}$ $-2\sqrt{3}$; $\boxed{C}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{D}$ $-\sqrt{3}$.

Rezolvare $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1>0$, $x_2>0$ și $x_1^2, x_2, 1$ progresie geometrică

$x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geom. $\Leftrightarrow$ $x_2 = \sqrt{x_1^2 \cdot 1}$ $\Leftrightarrow$ $x_2 = |x_1|$ $\Leftrightarrow$ $x_2 = x_1$ $(x_1>0)$

$\Leftrightarrow$ $\Delta = a^2-12=0$ $\Leftrightarrow$ $a^2=12$ $\Leftrightarrow$ $a \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.

Deci, $\Delta=0$, atunci $x_1 = x_2 = -\frac{a}{2}$ $(x_1+x_2=-a$ și $x_1=x_2)$

$x_1>0, x_2>0 \Leftrightarrow a<0$

Concluzie: Singura valoare a parametrului pt. ca sol ec. să satisfacă ip. dat este $a=-2\sqrt{3}$. Deci, răspunsul corect este $\boxed{B}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și ecuația $x^2-2ax+1=0$. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ec.

Să se arate că:

(i) $sgn(Re(x_1)) = sgn(Re(x_2)) = sgn(a)$

(ii) dacă $|a| \le 1$ atunci $|x_1| = |x_2| = 1$.

(iii) dacă $|a|>1$ atunci $|x_1|>1$ și $|x_2|<1$.

Notații

$Re(z) = Re(\alpha + i\beta) = \alpha$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$sgn(a) = \begin{cases} -1, & a<0 \\ 0, & a=0 \\ 1, & a>0 \end{cases}$

Rezolvare $x_1+x_2=2a$, $x_1x_2=1$, $\Delta' = a^2-1$

$\Delta'>0 \Leftrightarrow a^2-1>0 \Leftrightarrow a^2>1 \Leftrightarrow |a|>1$

$\Delta'=0 \Leftrightarrow |a|=1$

$\Delta'<0 \Leftrightarrow |a|<1$.

Caz. 1 $|a|>1$ $\Delta'>0$, adică $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 \ne x_2$ $\Rightarrow$ $Re(x_1)=x_1$ și $Re(x_2)=x_2$

din rel. lui Viète deducem imediat că $sgn(x_1) = sgn(x_2) = sgn(a)$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow |x_1|\cdot|x_2| = 1 \Rightarrow |x_2| = \frac{1}{|x_1|} \\ |x_1| \ne |x_2| \end{array}\right\} \Rightarrow |x_1|>1 \text{ și } |x_2|<1.$$

(un. nr. e supraunitar, celălalt e subunitar)

Caz.2. $|a|=1$ $\Delta'=0$, adică $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $Re(x_1) = Re(x_2) = x_1 = x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = a \Rightarrow (i)$ și $|x_1| = |x_2| = |a| = 1$.

Caz 3. $|a| < 1$ $\quad \Delta' < 0$, adică $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0$.

$Re(x_1) = Re(x_2) = \alpha$, $\quad x_1 + x_2 = 2\alpha = 2a \Rightarrow \alpha = a \Rightarrow (i)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| = 1 \\ x_2 = \overline{x_1} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \end{array}\right\} \Rightarrow |x_1| = |x_2| = 1.$$

Fie $\alpha \neq 1$ o rădăcină a ecuației $z^3 = 1$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A $|\alpha| = 1$.

B $1 + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.

C $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$.

D Numărul $-\alpha$ este rădăcină a ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

Rezolvare. $z^3 = 1$ are 3 rădăcini în $\mathbb{C}$ $\quad x_1 = 1 \in \mathbb{R}$

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ $\quad \boxed{\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \quad \alpha^3 = 1}$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^3 = 1 \Rightarrow |\alpha^3| = 1 \Rightarrow |\alpha|^3 = 1 \\ |\alpha| \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha| = 1. \Rightarrow \boxed{A} \text{ e adevărat}$$

$1 + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{B}$ este falsă

$\alpha^{2021} = \alpha^{3 \cdot 673 + 2} = (\alpha^3)^{673} \cdot \alpha^2 = \alpha^2 = -\alpha - 1 \Rightarrow \boxed{C}$ este adevărată

$(-\alpha)^2 - (-\alpha) + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{D}$ este adev.

14. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmații sunt adevărate.

A Funcția f este derivabilă în punctul $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

B Funcția f are exact un punct de extrem local.

C Funcția f are cel puțin un punct de minim global.

D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$. $\Leftrightarrow f(5) < f(3)$ adev. pt. că $f|_{(0,\infty)}$ e strict descresc.

$\frac{1}{3}$

D $\sqrt{5}+\sqrt{7}<2\sqrt{3}$. $\Leftrightarrow$ $f(5) < f(3)$ adev. pt. că $f|_{(0,\infty)}$ ...

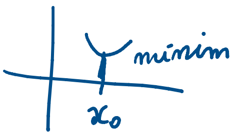
Res. $g(t) = t^{\frac{1}{3}}$ $\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcția putere cu exponent $\frac{1}{3}\in(0,1)$

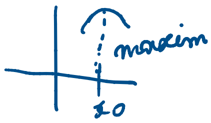
e continuă pe $\mathbb{R}$ și derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$g'(t) = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}, \qquad t\neq 0$$

$\boxed{A}$ este adevărată

Def $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, Sp. că f are un pct de minim în x_0 (local) atunci când $\exists$ o vecinătate a lui x_0, $V\in\mathcal{V}(x_0)$ a.î. $f(x_0)\leq f(x)$ $\forall x\in V$.





extrem : minim sau maxim

pt. B și C avem nevoie de tabelul de variație al lui f

x	$-\infty$		-2		-1		0		3	5	$+\infty$
f'		$+ + + +$	|	$+ +$	0	$- -$	|	$- - -$			$- - -$
f	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$			0

$f(x) = \sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{x}$

$f(0) = \sqrt[3]{2}$ $\qquad f(-1) = 2$

$f(-2) = \sqrt[3]{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(2+x)^2}+\sqrt[3]{(2+x)x}+\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2+x)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$f'(x) = 0$

$f'(x) > 0$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$. $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2+x)^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} \underset{\text{inversăm}}{\Leftrightarrow} (2+x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \underset{\text{ridicăm la p. a } 3^a}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (2+x)^2 = x^2 \Leftrightarrow (2+x)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (2+x-x)(2+x+x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=-1}$

ec. $f'(x) = 0$ are unica sol. $x=-1$, adică f are un singur punct critic, $x=-1$.

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ $\quad f'(x)>0 \Leftrightarrow (2+x)^{-\frac{2}{3}} > x^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$

inversăm ambii membrii (care sunt pozitivi) inversăm sensul inegalității

$\Leftrightarrow (2+x)^{+\frac{2}{3}} < x^{\frac{2}{3}} \underset{\text{ridicăm}}{\Leftrightarrow} (2+x)^2 < x^2 \Leftrightarrow 4(1+x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

ridicam
la a 3^a

<u>din tabel</u>: $0 < f(x) \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{B}$ este adevărată $\boxed{C}$ este falsă

2 este maximul lui f,
iar $x = -1$ este pct. de
maxim global (în
particular este și local)
0 este infimumul lui f,
dar nu se atinge, adică
f nu are pct. de minim