

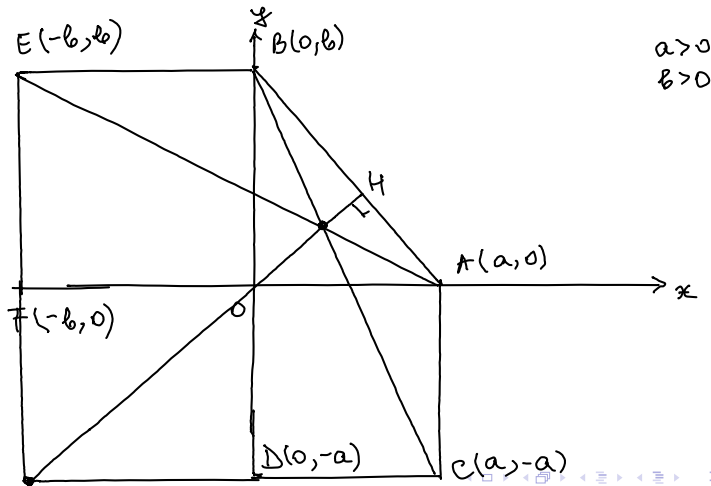
Geometrie Analitică

Dr.Veronica Oana Nechita

Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca

12 martie 2022

1. Pe catetele OA și OB ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior pătratele $OACD$ și $OBEF$. Să se demonstreze că dreptele EF , CD se intersectează într-un punct situat pe înălțimea OH ; la fel dreptele AE , BC .



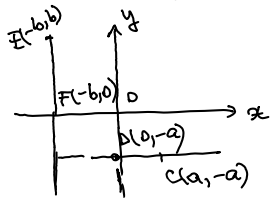
$A(a, 0)$, $B(0, b)$, $E(-b, b)$, $F(-b, 0)$, $C(a, -a)$, $D(0, -a)$
 $O(0, 0)$

⊙ OH , EF , CD concurgente

$$\left. \begin{aligned} OH \perp AB &\Leftrightarrow m_{OH} \cdot m_{AB} = -1 \\ m_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{OH} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{a}{b}$$

$$OH: y - y_0 = m_{OH}(x - x_0)$$

$$OH: y = \frac{a}{b}x \Leftrightarrow OH: by = ax \Leftrightarrow OH: ax - by = 0$$



$$EF: x = -b \Leftrightarrow EF: x + b = 0$$

$$CD: y = -a \Leftrightarrow CD: y + a = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} ax - by &= 0 \\ x + b &= 0 \\ y + a &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -ab + ab &= 0 \\ x &= -b \\ y &= -a \end{aligned} \right. \Rightarrow M(-b, -a)$$

① AE, BC, OH concurențe

$$OH: ax - by = 0$$

$$AE: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow AE: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ -b & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AE: ab - by - bx - ay = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow AE: bx + (a+b)y - ab = 0$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow BC: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC: bx + ay - ab + ax = 0$$

$$\Leftrightarrow BC: (a+b)x + ay - ab = 0$$

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a+b & a & -ab \end{pmatrix}$$

cele 3 drepte sunt concurente $\Leftrightarrow \text{rang } \overline{A} = 2$

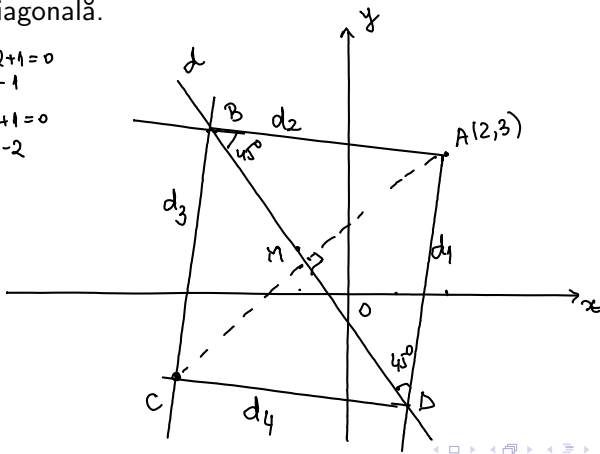
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a+b & a & -ab \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a+b & -ab \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , A'' \quad L_1 = L_3$$

2. Față de un sistem de coordonate carteziane ortogonale se consideră dreapta d de ecuație $3x + 2y + 1 = 0$ și punctul $A(2, 3)$. Să se determine ecuațiile a două drepte d_1 și d_2 care trec prin A și fac cu dreapta d un unghi de 45° . Să se scrie apoi ecuațiile a două drepte, care împreună cu d_1, d_2 formează un pătrat, în care dreapta d să fie diagonală.

$$y = 1 \quad 3x + 2y + 1 = 0 \\ x = -1$$

$$x = 1 \quad 3x + 2y + 1 = 0 \\ y = -2$$



Ecuația unei drepte prin A : $y - y_A = m(x - x_A)$, $m \in \mathbb{R}$

$$\times y - 3 = m(x - 2), m \in \mathbb{R}$$

$$m(\hat{d}_1, d) = 45^\circ, m(\hat{d}_2, d) = 45^\circ$$

Unghiul dintre două drepte $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$

$$d: 3x + 2y + 1 = 0$$

$$d: 2y = -3x - 1$$

$$d: y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = -\frac{3}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{m + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}m} \right| \Leftrightarrow \left| m + \frac{3}{2} \right| = \left| 1 - \frac{3}{2}m \right|$$

$$\text{I} \quad m + \frac{3}{2} = -1 + \frac{3}{2}m \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}m - m$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = 5$$

$$d_1: y - 3 = 5(x - 2) \Leftrightarrow d_1: 5x - y - 7 = 0$$

$$\underline{I_1} \quad m + \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2}m \quad (\Rightarrow) \quad \frac{5}{2}m = -\frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) \quad m = -\frac{1}{5}$$

$$d_2: y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 2) \quad | \cdot 5$$

$$d_2: 5y - 15 = -x + 2$$

$$d_2: x + 5y - 17 = 0$$

$$d_1: 5x - y - 7 = 0$$

$$d_3 \parallel d_1 \Leftrightarrow m_{d_3} = m_{d_1} = 5$$

$$d_4 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_{d_4} = m_{d_2} = -\frac{1}{5}$$

$$\underline{MT} \quad d: 3x + 2y + 1 = 0, \quad m_d = -\frac{3}{2} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} d: 3x + 2y + 1 = 0 \\ m_d = -\frac{3}{2} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow m_{AC} = \frac{2}{3}$$

$$AC \perp d \Leftrightarrow m_{AC} \cdot m_d = -1$$

$$AC: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow AC: 2x - 3y + 5 = 0 \quad (+)$$

$$\{M\} = AC \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 \end{matrix} \Rightarrow 13x + 13 = 0$$

$$x = -1 \quad y = 1 \Rightarrow M(-1, 1)$$

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_M \Rightarrow x_C = 2x_M - x_A, \quad y_C = 2y_M - y_A$$

$$x_C = 2 \cdot (-1) - 2 = -4, \quad y_C = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow C(-4, -1)$$

$$d_3: y + 1 = 5(x + 4) \Leftrightarrow d_3: 5x - y + 19 = 0$$

$$d_4: y + 1 = -\frac{1}{5}(x + 4) \Leftrightarrow d_4: x + 5y + 9 = 0$$

$$M \cap \underline{d_2} \quad \{B\} = d_2 \cap d$$

$$\{B\} = d_1 \cap d$$

$$d_2 \cap d: \begin{cases} x + 5y - 17 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - 5y \\ 51 - 15y + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - 5y \\ -13y = -52 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(-3, 4)$$

$$d_1 \cap d = \{D\} \quad \begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 13 = 0 \\ y = 5x - 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow D(1, -2)$$

$$d_3: y - y_0 = m_{d_3}(x - x_0)$$

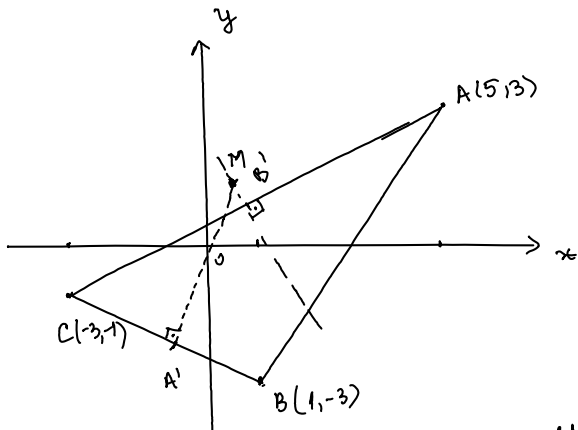
$$d_3: y - 4 = 5(x + 3) \Rightarrow d_3: 5x - y + 19 = 0$$

$$d_4: y - y_0 = m_{d_4}(x - x_0)$$

$$d_4: y + 2 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$

$$d_4: x + 5y + 9 = 0$$

3. Un triunghi are vârfurile $A(5, 3)$, $B(1, -3)$, $C(-3, -1)$. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris.



Centrul cercului circumscris triunghiului se află la intersecția mediatoarelor

Fie A' mijlocul $[BC] \Rightarrow x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2}, y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2}$
Metr. B' mijlocul $[AC]$

$$A'(-1, -2), B'(1, 1)$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1 - 3}{-3 - 5} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 + 3}{-3 - 1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

d_1 , mediatoarea segmentului $[BC] \Rightarrow$

$$d_1: y - y_{A'} = -\frac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_{A'}) \Rightarrow$$

$$d_1: y + 2 = 2(x + 1) \Rightarrow d_1: 2x - y = 0$$

d_2 mediatoarea segmentului $[AC] \Rightarrow$

$$d_2: y - y_{B'} = -\frac{1}{m_{AC}} (x - x_{B'}) \Rightarrow d_2: y - 1 = -2(x - 1)$$

$$d_2: 2x + y - 3 = 0$$

$$\{M\} = d_1 \cap d_2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Met II M-centrul cercului circumscris \Rightarrow

$$MA = MB = MC (=R) \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2$$

$$MA = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$M(x, y)$$

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 = (y+3)^2 = (x+3)^2 + (y+1)^2$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = (x+3)^2 + (y+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

MULT SUCCES LA
EXAMENE!