GradAnca_15_01_2022

GradAnca...

Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2022

15 ianuarie 2022 Lect. dr. Anca GRAD

Reprezentări grafice ale funcţiilor

A. Asimptote - breviar teoretic

Fie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$.
Observaţie: Asimptotele ataşate oricărei funcţii se determină analizând limitele funcţiei f în punctele de acumulare ale domeniului de definiţie, care nu aparţin domeniului, deci din mulţimea

$$D'\backslash D.$$

Reamintim definiţia mulţimii punctelor de acumulare

$$D' = \Big\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D \backslash \{x_0\} \neq \emptyset \Big\}.$$

O submulţime V a lui $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$ este vecinătate a lui x_0 (deci $\in \mathcal{V}(x_0)$) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R} \qquad \exists\ r > 0$ astfel încât $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$;
- $x_0 = \infty \quad \exists r > 0$ astfel încât $(r, \infty] \subseteq V$;
- $x_0 = -\infty \quad \exists r > 0$ astfel încât $[-\infty, -r) \subseteq V$;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru $\pm\infty$), obţinem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulţimi. Astfel

$$\text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D\backslash\{x_0\} \neq \emptyset$$
$$\infty \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset$$
$$-\infty \in D' \iff \quad \forall r > 0, \quad [-\infty, r) \cap D \neq \emptyset$$

Observaţie:

- Dacă D este nemărginită inferior, atunci $-\infty \in D'$.
- Dacă D este nemărginită superior, atunci $\infty \in D'$.
- Dacă $x_0 \in D$, dar **nu este punct izolat** atunci $x_0 \in D'$, deci $D\backslash IzoD \subset D'$.
- De cele mai multe ori, chiar şi pentru mulţimi mărginite, $D'\backslash D \neq \emptyset$.
- Fie $a < b \in \mathbb{R}$. Atunci
  - dacă $(a, b] \in D$, atunci $a \in D'\backslash D$;
  - dacă $[a, b) \in D$, atunci $b \in D'\backslash D$;
  - dacă $(a, b) \in D$, atunci $a, b \in D'\backslash D$.

Studiind limitele funcţiei f către ∞ şi respectiv $-\infty$ putem obţine în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcţiei f. Astfel, diferenţiem:

- **Asimptote orizontale**
  - Dacă D este nemărginită inferior (deci $-\infty \in D'$), se verifică existenţa
    $$a := \lim_{x\to-\infty} f(x).$$
    Dacă $\exists a \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie
    $$y = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$
    este **asimptota orizontală către $-\infty$** a funcţiei f.
  - Dacă D este nemărginită superior (deci $\infty \in D'$), se verifică existenţa
    $$b := \lim_{x\to\infty} f(x).$$
    Dacă $\exists b \in \mathbb{R}$, atunci dreapta de ecuaţie
    $$y = b = \lim_{x\to\infty} f(x)$$
    este **asimptota orizontală** către ∞ a funcţiei f.
- **Asimptote oblice** (se verifică existenţa lor doar atunci când nu există cele orizontale)
  - Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim_{x\to-\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm
    $$m := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
    Dacă $m \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$
    $$n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right).$$
    Atunci, dreapta de ecuaţie
    $$y = mx + n$$
    este **asimptota oblică către $-\infty$** a funcţiei f.
  - Dacă D este nemărginită inferior şi $\lim_{x\to\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$, analizăm
    $$m' := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
    Dacă $m' \in \mathbb{R}$, verificăm dacă există în $\mathbb{R}$
    $$n' = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m'x\right).$$
    Atunci, dreapta de ecuaţie
    $$y = m'x + n'$$
    este **asimptota oblică către ∞** a funcţiei f.

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate fie în mulţimea

$$\left(D'\backslash D\right) \cap \mathbb{R},$$

fie în pucte din D, dar în care funţia are o schimbare de formulă (de exemplu la interseţia a două ramuri).

În fapt, aceste puncte sunt de obicei(dar nu numai) capetele reale ale intervalelor deschise incluse în D. Fiecare astfel de punct trebuie analizat în parte. Astfel, pentru fiecare

$$x_0 \in \left(D'\backslash D\right) \cap \mathbb{R},$$

se analizează limitele laterale ale lui f în x_0.

  - Dacă
$$\exists \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x_0) \in \{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x = x_0$$
este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcţiei f.
  - Dacă
$$\exists \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x_0) \in \{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x = x_0$$
este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcţiei f.
  - Dacă
$$\exists \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \in \{\pm\infty\}.$$
atunci dreapta de ecuaţie
$$x = x_0$$
este **asimptotă verticală** la graficul funcţiei f.

B. Algoritm de abordare al graficului unei funcţii

I. Analiza lui D şi a lui D'

1. Determinarea mulţimii de definiţie.
2. Studiul **parităţii** (simetrie faţă de axa Oy), **imparităţii** (simetria faţă de origine) şi al **periodicităţii**.
3. Intersecţia cu axele de coordonate.
4. Determinarea mulţimii de acumulare şi studierea asimptotelor.
5. Mulţimea de continuitate $C \subseteq D$.

II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate $D_1 \subset D$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate f'.
3. Studierea pentru ficare punct $x_0 \in C \backslash D_1$ a derivatelor laterale la stânga şi la dreapta şi detereminarea
   - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, şi cel puţin una e finită.
   - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite şi diferite.
4. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f'(x) = 0$.
5. Studierea monotoniei şi a punctelor de extrem ale f prin analizarea tabelului de variaţie funcţiei.

III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulţimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2, $D_2 \subset D_1$.
2. Calcularea valorilor funcţiei derivate de ordinul 2, f''.
3. Determinarea soluţiilor reale ale ecuaţiei $f''(x) = 0$.
4. Stabilirea
   - **intervalelor de convexitate**, când $f''(x) \geq 0$;
   - **intervalelor de concavitate**, când $f''(x) \leq 0$;
   - **punctelor de inflexiune** în care derivata de oridinul 2 are o schimbare de semn.

C. Tabelul de variaţie

Tabelul se structurează pe patru linii:

Linia 1 cuprinde **valorile remarcabile ale lui** x : mulţimea de definiţie D, evidenţierea punctelor din $D \backslash D'$, intersecţia cu axele de coordonate, soluţiile reale ale ecuaţilor $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ şi $f"(x) = 0$, etc.

Linia 2 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f', şi semnului acestei derivate.

Linia 3 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** $f"$, şi semnului acestei derivate de ordin 2.

Linia 4 este dedicată **valorilor remarcabile ale lui** f, şi monotoniei acesteia.

D. Aplicaţii

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \frac{1+x}{e^{|x-1|}}, \forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Dreapta de ecuaţie $y = 2$ este asimptotă vertifcală la graficul funcţiei f.
$\boxed{\text{B}}$ Funcţia f nu are asimptote orizonatale.
$\boxed{\text{C}}$ Punctul de coordonate $(1, 2)$ este un punct de întoarcere al graficului funcţiei f.
$\boxed{\text{D}}$ Ecuaţia $f(x) = 1$ are exact două soluţii reale.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este fals deoarece asimptotele verticale au ecuaţii de forma $x =$ constantă. Verificând clasic existenţa asimptotelor verticale, constată că existenaţ lor se pune doar în punctul $a = 1$. Deoarece $\lim_{x\to} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$, funţia nu are asimptote verticale.

$\boxed{\text{B}}$. Această proprietate este fals. Constatăm că

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x),$$

deci dreapta de ecuaţie $y = 0$ este o asimptotă orizontală la atât la stânga cât şi la dreapta graficului funţiei f.

$\boxed{\text{C}}$ Această proprietate este fals. Costatăm că funţia f este contină în punctul 1 deoarece

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = 2 = \lim_{x\downarrow 1} f(x).$$

Ea este derivabilă pe $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty)$. Constatăm că:

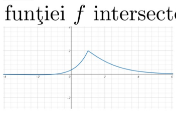
$$\lim_{x\uparrow 1} f'(x) = \lim_{x\uparrow 1}(2 + x)e^{x-1} = 3 \in \mathbb{R}$$

şi

$$\lim_{x\downarrow 1} f'(x) = \lim_{x\downarrow 1} -xe^{1-x} = -1 \in \mathbb{R}.$$

Deoarece ambele limite laterale există şi sunt finite, punctul $(1, f(1)) = (1, 2)$ este un punct unghiular, nu un punct de întoarcere.

$\boxed{\text{D}}$ Această afrimaţie este adevărată deoarece analizând graficul funţiei, constatăm că graficul funţiei f intersectează dreapta de ecuaţie $y = 1$ în două puncte.



2. Fie funcţia f definită prin $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \ln x$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Domeniul de definiţie al funcţiei f este $\mathbb{R}^*$.
$\boxed{\text{B}}$ Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală la graficul funţiei f.
$\boxed{\text{C}}$ Funcţia f nu are puncte unghiulare.
$\boxed{\text{D}}$ Punctul $(1, 4)$ este un punct de extrem global al funţiei f.

Răspuns:

$\boxed{\text{A}}$ **falsă**; $\boxed{\text{B}}$ **falsă**; $\boxed{\text{C}}$**adevărată**; $\boxed{\text{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este falsă deoarece func tia logaritm este definită pe $(0, \infty)$. Celelalte componente fiind polinomiale, sunt definite pe $\mathbb{R}$. De aceea domeniul acestei funţii este $(0, \infty)$.

$\boxed{\text{B}}$. Această proprietate este fals. Constatăm că

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - 9\frac{\ln x}{x^3}\right).$$

Deoarece $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$, constatăm că

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

deci funţi a nu are asimptotă orizontală.

$\boxed{\text{C}}$. Această proprietate este adevărată, deoarece problema existenţei punctelor unghiulare se pune în acele puncte în care funţia este continuă, dar nu este derivabilă. Funţia f este derivabilă pe întreg domeniul de definiţie.

$\boxed{\text{D}}$ Această proprietate este adevărată. Funţia f este de două ori derivabilă pe întreg domeniul de definiţie. Deoarece derivata de ordinul întâi

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \frac{9}{x} = \frac{3}{x}(x^3 + 2x^2 - 3) = \frac{3}{x}(x - 1)(x^2 + 3x + 3)$$

are ca singură soluţie reală $x = 1$. Din moment ce ecuaţia $x^2 + 3x + 3 = 0$ nu are solu ctii reale, semnul funţiei f este determinat doar de $(x-1)$. Constatăm astfel că f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, \infty)$, deci $(1, 4)$ este un punct de minim global al funţiei f.

E. Aplicaţii ample

a) Reprezentaţi grafic funcţiile definite prin:

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2;$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3};$
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x};$
4. $f(x) = \dfrac{|1 + x|}{1 + |x|};$
5. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2 \ln x - 1}{x^2};$
7. $f(x) = \dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}.$
8. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in (-\infty, 0) \\ 1 & x = 0 \\ \cos x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \\ \sin x & x \in (0, \infty) \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) Analizând reprezentarea grafică, prin discuţie după parametrul $m \in \mathbb{R}$, stabiliţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei

$$f(x) = m,$$

pentru funcţiile 1, 6 şi 7 de la subpunctul a). Indicaţie: translataţi graficul de-a lungul axei Oy.

Ex1: $f(x) = \ln(x - 4x + 5)$

I $(0, \infty)$ - dom. logaritm

$x^2 - 4x + 5 = 0$, $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - 4x + 5 > 0$ $\Rightarrow$ $D = \mathbb{R}$

$D' = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$

↳ as. orz. sau oblice.

• paritatea $f(-x) = \ln(x^2 + 4x + 5) \neq f(x)$, $\neq -f(x)$ $\Rightarrow$ nu e nici pară nici impară

• periodicitate $\nexists$

• $\cap$ axele de coordonate: $\cap Oy$ $x=0 \Rightarrow \ln(5) \Rightarrow (0, \ln(5)) \in G_f$

$\cap Ox$ $y=f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x^2-4x+5)=0 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0$

$\Rightarrow (2,0) \in G_f$

. Asimptotele:

• $\infty \in D'$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(x^2-4x+5) = \infty$ $\quad \nexists$ asimptote orizontale

$-\infty \in D'$ $\quad$ $-\infty$ $\quad$ $-\infty$ $\quad$ ∞ $\quad$ nici către $-\infty$

nici către $+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-4x+5)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x-4}{x^2-4x+5}}{1} =$$

$\exists \in \mathbb{R}$ $$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-1)}{x^2-2x+5} = 0 \; ? \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \nexists$ as. oblică $\boxed{\text{către } +\infty}$

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) - 0\cdot x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \; \boxed{\notin \mathbb{R}}$$

analog $\boxed{-\infty}$

• $\boxed{\text{verticale}}$ → nu se studiază pt. această funcție deoarece $D' \setminus D \cap \mathbb{R} = \phi$

$C = \mathbb{R}$

II $\boxed{D_1 = \mathbb{R}}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$

$\boxed{f'(x)=0} \Leftrightarrow 2x-4=0 \quad \boxed{x=2}$

puncte critice

III $D_2 = \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f''(x) = 2\cdot \frac{x^2-4x+5-(2x-4)\cdot(x-2)}{(x^2-4x+5)^2} =$

$$= 2\cdot \frac{x^2-4x+5-2x^2+8x-8}{\ldots} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^2-4x+5-2x^2+8x-8}{(x^2-4x+5)^2} =$$

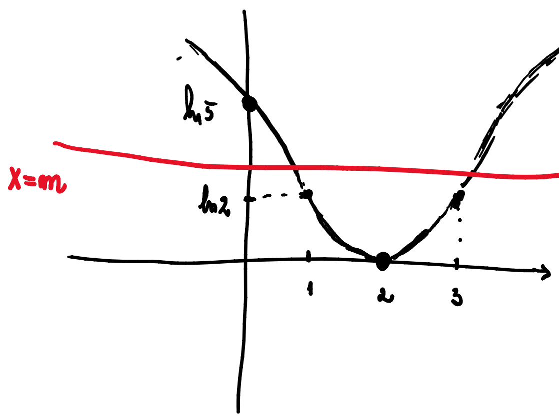
$$= 2 \cdot \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2} = -2 \cdot \frac{x^2-4x+3}{(x^2-4x+5)^2}$$

$f''(x)=0 \quad (x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)=0 \Leftrightarrow$ $x=1$ sau $x=3$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f'		- - -	-	- -	-	- -	0	+ +	+	+ +	+
f	∞	$\searrow$	$\ln(5)$	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	∞
f''		- -	-	- -	0	+ +	+	+ +	0	- -	-

puncte de inflexiune

$(1, \ln 2)$, $(3, \ln 2)$



$(0,2) \rightarrow$ punct de minim global

Câte soluții are ecuația $f(x)=m$, $m \in \mathbb{R}$

• discuție după valorile lui m.

• $m=0 \Rightarrow$ o singură soluție $x=2$

• $m>0 \Rightarrow \exists$ două soluții reale

• $m<0 \Rightarrow \nexists$ nicio soluție reală

$\ln(x^2-4x+5)=7$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5=e^7 \ldots$

Exemplul 2:

$f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$

I) $D = \mathbb{R} \Rightarrow D' = \overline{\mathbb{R}}$ → se justifică studiul as. or + ob.

↳ $\nexists$ as. verticale

• $f(-x) = \sin(-x)\sin(-2x) = (-\sin x)(-\sin 2x) = \sin x \sin 2x = f(x)$ → funcție pară

• (?) periodicitatea

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)\cdot\sin[2(x+2\pi)] = \sin x \cdot \sin(2x+4\pi) = \sin x \sin 2x = f(x)$$

$\Rightarrow 2\pi$ este perioada funcției noastre

→ ajunge să repr. gf. funcție pe $\boxed{[0, 2\pi]}$.

A

• $\cap Oy$ $\boxed{x=0}$ $f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \in G_f$.

• $\cap Ox$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin 2x = 0\end{array}\right.$ $\boxed{\text{pe } A}$

• $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = \pi$ sau $x = 2\pi$

• $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$ sau $2x = \pi$ sau $2x = 2\pi$

$2x = 3\pi$ sau $2x = 4\pi$

$x = 0$ sau $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \pi$ sau $x = \frac{3\pi}{2}$ sau $x = 2\pi$

$\Rightarrow (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), (2\pi, 0)$ sunt punctele de intersecție cu axa Ox

• Asimptote or. sau oblice

• $\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{\lim_{x\to\infty} \sin x \cdot \sin 2x}$ $\nexists$

(Heine)

Caracterizarea cu șiruri a limitelor de funcții:

• $\left.\begin{array}{l} f: D \to \mathbb{R} \\ a \in D' \end{array}\right\}$ $\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall (a_n) \subseteq D\setminus\{a\}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

să $\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n)$

$a \in D$ $\quad$ $n \to \infty$

• Se folosește pt. a dem. $\not\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, astfel:

arătăm $\exists$ 2 șiruri $(a_n), (b_n) \subseteq D \setminus \{a\}$

a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

? $\lim\limits_{x \to \infty} \sin(x) \cdot \sin(2x)$ $\qquad$? (a_n) cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $\qquad$ $n \to \infty$

$a_n := 2\pi n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad f(a_n) = \sin(2n\pi)\sin(4n\pi) =$

$= 0 \cdot 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ $\quad \neq$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$b_n := \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \qquad f(b_n) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6} + 4n\pi\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \boxed{\not\exists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x \cdot \sin(2x)}$

$\to$ pt. $(-\infty)$ analog

$\boxed{C = \mathbb{R}}$

II $D_1 = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = (\sin x \cdot \sin 2x)' = \cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot (2\cos 2x) =$

$= \cos x \sin 2x + 2 \cdot \sin x \cos 2x$

$\cos x = \cos(2x - x) = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \sin x$

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ $\quad | -$

$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}(-\sin x + 3\sin 3x) = \frac{1}{2}(3\sin 3x - \sin x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin 3x - \sin x = 0$?

$f'(x)=0 \iff 3\sin 3x - \sin x = 0$

$\downarrow$

$[3\sin x - 4\sin^3 x]$

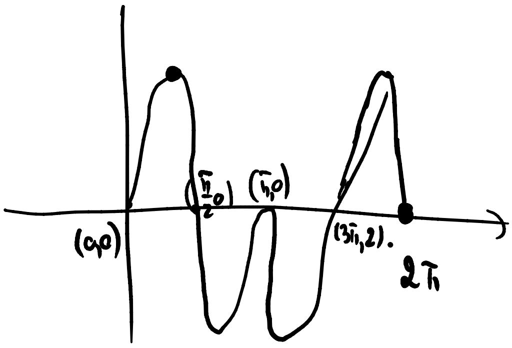
$\iff 9\sin x - 12\sin^3 x - \sin x = 0$

$\Downarrow$ 0, $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\pi + \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, 2π sol.

$\to$ min

$\to$ max



$\boxed{f(x)=m}$ $m \in [\quad]$ $\exists\, \infty$ de soluții

$\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}, 0{,}77\right)$

$\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sim 0{,}77\right.$