

Inducție matematică

Demonstrați că următoarele propoziții sunt adevărate.

1. Într-un arhipelag cu 11 insule, distanțele dintre oricare două insule sunt distincte. Dacă locuitorii fiecărei insule vizitează doar insula cea mai apropiată, atunci există o insulă care nu este vizitată.

2. Există $x_1, x_2, \dots, x_{20} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_1 < x_2 < \dots < x_{20}$ și

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{20}} = 1.$$

3. Oricare 30 de pătrate pot fi tăiate în bucăți ce pot fi asamblate (fără suprapuneri sau spații goale) într-un pătrat.

4. Există un număr natural format din 40 cifre impare divizibil cu 5^{40} .

5. $T_{50} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $T_{50}(x) = \cos(50 \cdot \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, este o funcție polinomială.

6. Oricare ar fi P_1, P_2, \dots, P_{61} puncte pe un semicerc centrat în O și de rază 1,

$$\left| \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{61}} \right| \geq 1.$$

7. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, oricare ar fi $y_1, \dots, y_n > 0$, $\sqrt[n]{y_1 \cdot \dots \cdot y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $y_1 = \dots = y_n$.

Bibliografie

[1] <https://artofproblemsolving.com/>

[2] <https://cut-the-knot.org/>