13 noiembrie 2021 Conf. dr. Cosmin Pelea

Combinatorică

Programa şcolară ne pune cel mai adesea în situaţia de a număra pentru o mulţime finită nevidă A:

-(sub)mulţimi finite de elemente din A,

-(sub)mulţimi ordonate finite de elemente din A,

-sisteme ordonate finite de elemente din A.

Să începem cu ultimele dintre ele. Un *sistem ordonat finit de elemente din* A este un element $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ al produsului cartezian $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ mulţimi}}$ $(k \in \mathbb{N})$. O simplă schimbare de reprezentare — eliminarea parantezelor şi a virgulelor — conduce la scrierea

$$a_1 a_2 \ldots a_k,$$

care justifică denumirea de *cuvânt de lungime* k *peste* A sau *cuvânt cu elemente din* A pe care o preferăm celei de mai sus. Numărul k se numeşte *lungimea cuvântului*, iar elementele $a_1, \ldots, a_k$ se numesc *componentele cuvântului*. Pentru două cuvinte $a_1 a_2 \ldots a_k$ şi $b_1 b_2 \ldots b_s$,

$$a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_s \;\Leftrightarrow\; k = s \text{ şi } a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Cuvântul vid (peste A) este singurul cuvânt (peste A) care are lungimea 0.

Observaţiile 1 *i) Subliniem câteva deosebiri esenţiale între mulţime şi cuvânt:*
a) Într-o mulţime, ordinea în care scriem elementele nu contează, pe când în cuvânt ordinea componentelor este importantă.
b) Elementele unei mulţimi sunt distincte, în timp ce componentele unui cuvânt pot să coincidă.
ii) Dacă A *are* n *elemente (scriem* $|A| = n$*), atunci numărul cuvintelor de lungime* k *peste* A *este*

$$|A^k| = n^k \;\; (k, n \in \mathbb{N},\; n \neq 0).$$

Acest număr este egal cu numărul funcţiilor de la $\{1, \ldots, k\}$ *la* A *(şi, printr-o generalizare simplă, şi cu numărul funcţiilor de la o mulţime cu* k *elemente la o mulţime cu* n *elemente).*

O submulţime finită a mulţimii nevide A în care elementele sunt aranjate într-o anumită ordine se numeşte *submulţime ordonată a mulţimii* A. Dacă evidenţiem ordinea prin numerotarea elementelor, o submulţime ordonată cu k elemente din A $(k \in \mathbb{N})$ este un sistem ordonat $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ cu toate componentele distincte, adică un cuvânt $a_1 a_2 \ldots a_k$ (peste A) care are componentele distincte.

Definiţia 2 *Fie* A *o mulţime cu* $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *şi fie* $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. *Submulţimile ordonate de* k *elemente ale lui* A *se numesc aranjamente de* n *(elemente) luate câte* k.

Observaţia 3 *Două aranjamente de* n *luate câte* k *se deosebesc prin natura elementelor lor sau prin ordinea elementelor lor (sau ambele).*

Notaţia 4 *Notăm cu* A_n^k *numărul aranjamentelor de* n *luate câte* k.

Observaţia 5 *Dacă* $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ *atunci*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Cum pentru un alfabet vid se poate forma un singur cuvânt, cuvântul vid, iar acesta nu are componente care să se repete, putem scrie $A_0^0 = 1$. *Aşadar,* $A_n^0 = 1$ *chiar şi atunci când* $n = 0$.

Definiţia 6 *Fie A o mulţime finită (nevidă) cu $|A| = n$. Se numeşte permutare a mulţimii A sau permutare de n elemente orice mulţime ordonată (cuvânt cu componentele distincte) care se poate forma cu toate cele n elemente ale mulţimii A. Cu alte cuvinte, o permutare de n elemente este un aranjament de n elemente luate câte n.*

Observaţia 7 *Două permutări de n elemente se deosebesc doar prin ordinea elementelor lor.*

Notaţia 8 *Notăm cu P_n numărul permutărilor mulţimii A cu n elemente.*

Observaţia 9 *Ţinând cont de definiţia permutărilor, $P_n = A_n^n$. Aşadar,*

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 10 *Pentru o mulţime (nevidă) A cu n elemente, submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, unde $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$, se numesc combinări de n (elemente) luate câte k.*

Observaţia 11 *Două combinări de n luate câte k se deosebesc prin natura elementelor lor.*

Notaţia 12 *Notăm cu C_n^k numărul combinărilor de n luate câte k.*

Observaţia 13 *Dacă $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ atunci*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n).$$

Chiar şi când $A = \emptyset$ există o singură submulţime cu 0 elemente a mulţimii A, prin urmare putem scrie $C_n^0 = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Enunţuri

1. a) În câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, 3, \dots 14\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă (o poziţie de) rang par?
b) În câte moduri pot fi aşezaţi 7 băieţi şi 7 fete pe un rând cu 14 de scaune astfel încât să nu avem 2 vecini de acelaşi sex?

2. În câte moduri se pot împărţi 6 creioane de culori diferite la 10 copii de vârste diferite în aşa fel încât fiecare copil să primească cel mult un creion? Dar dacă cel mai mic dintre copii primeşte neapărat un creion?

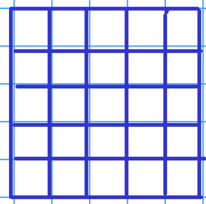
3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. În plan sunt date n puncte astfel încât oricare 3 dintre ele sunt necoliniare.
a) Câte linii poligonale cu 4 segmente având vârfurile în aceste puncte se pot construi?
b) Prin câte segmente se pot uni aceste puncte? ← formăm subm. cu 2 elem. dintre cele n
c) Câte triunghiuri diferite cu vârfurile în aceste puncte există? ← — " — 3 elem. — " —

4. Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 3$. În plan sunt date n puncte dintre care, în afară de k puncte care sunt situate pe o aceeaşi dreaptă, oricare 3 puncte sunt necoliniare.
a) Prin câte drepte se pot uni aceste puncte?
b) Câte triunghiuri diferite cu vârfurile în aceste puncte există?

5. Considerăm cifrele 0, 1, 2, 3, 4 şi 5. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
a) Câte numere de 8 cifre pot fi formate cu aceste cifre? Câte dintre acestea sunt pare?
b) Câte numere pot fi formate cu toate aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare exact o dată? Câte dintre acestea sunt pare?
c) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare o singură dată? Câte dintre acestea sunt pare?
d) Câte numere pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră apare cel mult o dată? Câte dintre acestea sunt pare?
e) Câte numere de 4 cifre pot fi formate cu aceste cifre astfel încât în fiecare număr fiecare cifră este strict mai mică (respectiv mai mare) decât precedenta? Câte dintre acestea sunt pare?

6. Să se determine numărul legilor de compoziţie ce pot fi definite pe o mulţime M cu 4 elemente. Câte dintre acestea sunt comutative? Câte legi de compoziţie admit element neutru? Să se generalizeze la o mulţime cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). (acasă).

Indicații și schițe ale soluțiilor:



A forma un cuvânt de lungime k peste A revine la a distribui elem. din A în k căsuțe:

1) a) — Considerăm nr. pare; le permutăm pe pozițiile pare în $7!$ moduri. Pentru fiecare perm. a nr. pare, perm. nr. impare pe pozițiile rămase (impare) în $7!$ moduri. $\Longrightarrow$ nr. căutat este $7!\cdot 7! = \dots$

b) $7!\cdot 7!$ moduri de aranjare dacă începem cu un băiat

— " — " — " — " — fată $\Big\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ răsp. este $2\cdot 7!\cdot 7!$

2) Distribuirea celor 6 creioane corespunde formării unei submulț. ord. cu 6 elemente din mulțimea copiilor $\Longrightarrow$ nr. căutat este $A_{10}^{6} = \dots$

În cazul în care celui mai mic copil îi dăm neapărat un creion

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $6\cdot \underline{\underline{A_9^5}} = \dots$

3) a) Linie poligonală care nu e închisă

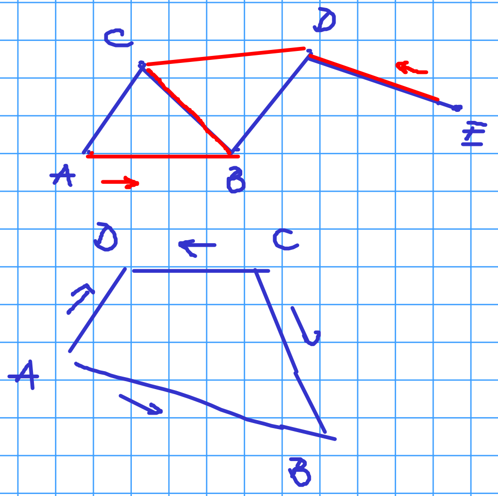
R: $\frac{1}{2}\cdot A_n^5$.

Linie poligonală închisă

R: $\frac{1}{2\cdot 4}\cdot A_n^4$

putem schimba ordinea de citire

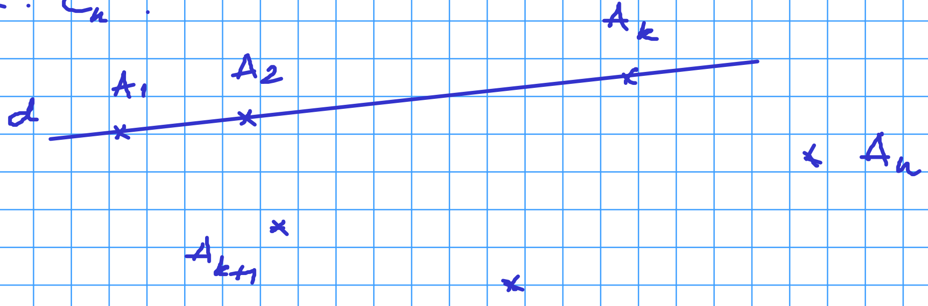
citim începând cu fiecare vârf



b) R: C_n^2.

c) R: C_n^3.

4).



a) $\underline{\underline{R}}$: $C_n^2 - C_k^2 + 1 = \ldots$ ← dreapta d.

∀ 2 pcte de pe d
determină aceeași dreaptă pe d

b) $\underline{\underline{R}}$: $C_n^3 - C_k^3 = \ldots$ ← ∀ 3 pcte de pe d nu formează Δ.

5. a) cuvânt ⟷ număr

Putem forma 6^8 cuvinte cu cele 6 cifre date. Dintre acestea sunt numere cu 8 cifre doar acelea care nu încep cu 0.

Cuvinte care încep cu 0 : 6^7 ←

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $6^8 - 6^7 = 5 \cdot 6^7$.

Dintre acestea sunt pare ...

- ultima cifră este 0, 2, 4 $\Longrightarrow$ $3 \cdot (6^7 - 6^6)$ numere.

b) Numărăm permutări. Nr. cuvintelor ce pot fi formate cu cerința din enunț = nr. perm. mulțimii A = 6!

Cuvinte care încep cu 0 : 5!

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $6! - 5!$

Dintre acestea sunt pare ...

- cu ultima cifră 0 : $5!$
- cu ultima cifră 2 sau 4 : $2(5! - 4!)$

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $5! + 2(5! - 4!)$.

c) Cuvinte de lungime 4 peste A cu comp. distincte → A_6^4

Cuvinte —"— —"— —"— —"— care încep cu 0 : A_5^3.

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $A_6^4 - A_5^3$.

Dintre acestea sunt pare ...

- cu 0 ultima cifră : A_5^3
- cu 2 sau 4 —"— —"— : $2 \cdot (A_5^3 - A_4^2)$

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $A_5^3 - 2(A_5^3 - A_4^2)$

d) Nr. cu 6 cifre : $A_6^6 - A_5^5 = 6! - 5!$

—"— 5 —"— : $A_6^5 - A_5^4$

⋮

—"— 1 —"— : 6 (0 convine)

Temă: ...

e) ... nr. mică decât precedenta ... (ordinea cifrelor în enunț/nr. este s. descrescătoare)

$\Longrightarrow$ nr. căutat este C_6^4.

Dintre acestea sunt pare ...

- cu 0 ultima cifră: C_5^3
- — " — 2 — " — " — : 1
- — " — 4 — " — " — : 0

$\Longrightarrow$ nr. căutat este $C_5^3 + 1$

Restul: temă

...