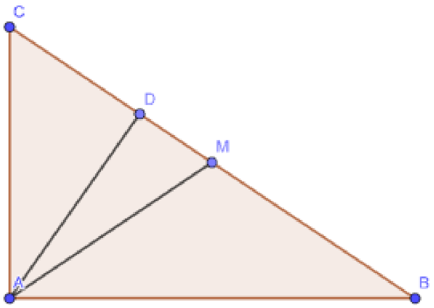
SEMINAR D.M. 2

1.7 Specialitatea Matematică - Fizică (sesiune, 2001)

I. Compuneţi o problemă în care să scoateţi în evidenţă interpretarea geometrică a inegalităţii dintre media aritmetică şi cea geometrică.

***Rezolvare*: 1)** Vezi rezolvarea Problemei I din Setul 1. / 2.1.

2) Considerăm figura de mai jos, în care ABC este un triunghi dreptunghic în A, AD este înălțime, iar AM este mediană. Atunci, conform figurii de mai jos:



AD≤AM ceea ce este echivalent cu: $2\cdot\sqrt{BD\cdot CD}\leq BD+CD$.

II. Rezolvaţi, cel mult la nivelul clasei a VII - a, următoarea problemă: „*Determinaţi numărul submulţimilor cu câte 7 elemente ale unei mulţimi cu 10 elemente*”.

***Rezolvare*:** Pentru simplificarea notațiilor vom nota submulțimea noastră cu:

A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Fiecărei submulțimi cu câte 7 elemente îi corespunde o submulțime cu 3 elemente și invers. Deci numărul submulțimilor cu 7 elemente este egal cu numărul submulțimilor cu 3 elemente (ceea ce eu ca profesor știu din formula combinărilor complementeare), pe care le pot determina mai ușor:

{1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,2,7}, {1,2,8}, {1,2,9}, {1,2,10}; - 8 submulțimi

{1,3,4}, {1,3,5}, {1,3,6}, {1,3,7}, {1,3,8}, {1,3,9}, {1,3,10}; - 7 submulțimi

{1,4,5}, {1,4,6}, {1,4,7}, {1,4,8}, {1,4,9}, {1,4,10}; - 6 submulțimi

{1,5,6}, {1,5,7}, {1,5,8}, {1,5,9}, {1,5,10}; - 5 submulțimi

{1,6,7}, {1,6,8}, {1,6,9}, {1,6,10}; - 4 submulțimi

{1,7,8}, {1,7,9}, {1,7,10}; - 3 submulțimi

{1,8,9}, {1,8,10}; - 2 submulțimi

{1,9,10};	- 1 submulțime
Total submulțimi cu 1 pe prima poziție:	- 36 submulțimi
{2,3,4}, {2,3,5}, {2,3,6}, {2,3,7}, {2,3,8}, {2,3,9}, {2,3,10};	- 7 submulțimi
{2,4,5}, {2,4,5}, {2,4,7}, {2,4,8}, {2,4,9}, {2,4,10};	- 6 submulțimi
{2,5,6}, {2,5,7}, {2,5,8}, {2,5,9}, {2,5,10};	- 5 submulțimi
{2,6,7}, {2,6,8}, {2,6,9}, {2,6,10};	- 4 submulțimi
{2,7,8}, {2,7,9}, {2,7,10};	- 3 submulțimi
{2,8,9}, {2,8,10};	- 2 submulțimi
{2,9,10};	- 1 submulțime
Total submulțimi cu 2 pe prima poziție:	- 28 submulțimi
{3,4,5}, {3,4,6}, {3,4,7}, {3,4,8}, {3,4,9}, {3,4,10};	- 6 submulțimi
{3,5,5}, {3,5,7}, {3,5,8}, {3,5,9}, {3,5,10};	- 5 submulțimi
{3,6,7}, {3,6,8}, {3,6,9}, {3,6,10};	- 4 submulțimi
{3,7,8}, {3,7,9}, {3,7,10};	- 3 submulțimi
{3,8,9}, {3,8,10};	- 2 submulțimi
{3,9,10};	- 1 submulțime
Total submulțimi cu 3 pe prima poziție:	- 21 submulțimi
{4,5,6}, {4,5,7}, {4,5,8}, {4,6,9}, {4,8,10};	- 5 submulțimi
{4,6,7}, {4,6,8}, {4,6,9}, {4,7,10};	- 4 submulțimi
{4,7,8}, {4,7,9}, {4,7,10};	- 3 submulțimi
{4,8,9}, {4,8,10};	- 2 submulțimi
{4,9,10};	- 1 submulțime
Total submulțimi cu 4 pe prima poziție:	- 15 submulțimi
{5,6,7}, {5,6,8}, {5,6,9}, {5,6,10};	- 4 submulțimi
{5,7,8}, {5,7,9}, {5,7,10};	- 3 submulțimi
{5,8,9}, {5,8,10};	- 2 submulțimi
{5,9,10};	- 1 submulțime
Total submulțimi cu 5 pe prima poziție:	- 10 submulțimi

{6,7,8}, {6,7,9}, {6,7,10}; - 3 submulţimi

{6,8,9}, {6,8,10}; - 2 submulţimi

{6,9,10}; - 1 submulţime

Total submulţimi cu 6 pe prima poziţie: - 6 submulţimi

{7,8,9}, {7,8,10}; - 2 submulţimi

{7,9,10}; - 1 submulţime

Total submulţimi cu 7 pe prima poziţie: - 3 submulţimi

{8,9,10}; - 1 submulţime

Total submulţimi cu 8 pe prima poziţie: - 1 submulţime

Total submulţimi cu 3 elemente = 120 = C_{10}^{3}.

III. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)\cdot dx. \qquad \text{(i)}$$

Rezolvare: Folosim Lema de la Exerciţiul II din Setul 1. / 2.6. şi, astfel:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}x)\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\right)\cdot dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}x}\right)\cdot dx=\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}-I. \qquad (1)$$

Deci,

$$I=\frac{\pi}{8}\cdot\ln 2.$$

1.8 Specialitatea Matematică (restanţe, 2001)

I. Rezolvaţi în două moduri următorul exerciţiu: „*Este numărul* $\sqrt{2000!+1}$ *un număr raţional*?”

Rezolvare: Desigur că $\sqrt{2000!+1}\in\mathbf{Q}$ exact dacă $\sqrt{2000!+1}\in\mathbf{N}$ – vezi demonstraţia de la exercițiul următor. Așadar, presupunem că există $k \in \mathbf{N}$, astfel încât:

$$2000!+1=k^2. \qquad (1)$$

Pentru că 2003 este un număr prim, conform Teoremei lui Wilson,

$$2002!+1=\mathcal{M}_{2003}. \qquad (2)$$

Înmulțind egalitatea (1) cu $2001\cdot 2002$, obținem că:

$$2002!+2001\cdot 2002=2001\cdot 2002\cdot k^2. \qquad (3)$$

Scufundând egalitatea (3) în corpul $\mathbf{Z}_{2003}$, obținem că:

$$\overline{2}\cdot \overline{k}^2=\overline{1}. \qquad (4)$$

Dar, ordinul lui $\overline{2}$ în grupul ciclic $(\mathbf{Z}^*_{2003},\cdot)$ este 286. Rezultă că ordinul lui $\overline{k}$ în același grup este 572, care nu este divizor al numărului 2002 ($=|\mathbf{Z}^*_{2003}|$). De fapt,

$$\overline{2}^{\,143}=-\overline{1},$$

de unde va rezulta, ținând cont de egalitatea (4), că:

$$\overline{k}^{286}=-\overline{1}.$$

***Altfel*:** Egalitatea (4) este echivalentă cu:

$$\overline{k}^2=\overline{1002}, \qquad (5)$$

ceea ce arată că 1002 este un rest pătratic în corpul $\mathbf{Z}_{2003}$. Atunci, înmulțind egalitatea (5) cu $\overline{4}$, sau egalitatea (4) cu $\overline{2}$, obținem că:

$$\overline{4}\cdot \overline{k}^2=\overline{2}, \qquad (6)$$

ceea ce arată că (și) 2 este rest pătratic în același corp. Dar, utilizând simbolul lui Legendre, în corpul $\mathbf{Z}_p$ are loc egalitatea:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \qquad (7)$$

adică, 2 este rest pătratic exact dacă:

$$p^2-1=\mathcal{M}_{16}.$$

ori, în cazul nostru,

$$2003^2-1=\mathcal{M}_{16}+8,$$

ceea ce arată că egalitatea (6) nu are loc în corpul $\mathbf{Z}_{2003}$.

***Observație*:** Botolvare Pierre Berri Jean Baptiste Henri Brocard (1845 - I922) matematician francez, propune determinarea valorilor lui n și m pentru care:

$$n!+1=m^2. \qquad (8)$$

Această problemă a fost abordată de către Henri Brocard în repetate rânduri în cadrul unor articole din anii 1876 și 1885, iar ulterior de către matematicianul indian Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920) în anul 1913. Perechile de numere care verifică problema lui Brocard se numesc numerre Brown. Până în present s-au obținut trei astfel de perechi:

(4,5), (5,11) și (7,71).

De asemenea, precizăm că s-a demonstrat că egalitatea (8) nu are soluții în intervalul $[8,10^9]$.

1.9 Specialitatea Matematică - Fizică (restanțe, 2001)

I. Să se stabilească dacă numărul $\sqrt{2000!-1}$ este sau nu un număr rațional.

***Rezolvare*:** Presupunem că există o fracție rațională ireductibilă $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}_+^*$ astfel încât:

$$\sqrt{2000!-1} = \frac{p}{q}. \tag{1}$$

Atunci rezultă că:

$$q^2 \cdot (2000!-1) = p^2. \tag{2}$$

Din egalitatea (2) rezultă că orice divizor prim al lui q este și divizor (prim) al lui p, ceea ce înseamnă că fracția $\frac{p}{q}$ este reductibilă – contradicție cu presupunerea făcută mai sus. Deci q=1 și egalitatea (1) devine:

$$\sqrt{2000!-1} = p, \tag{1′}$$

iar egalitatea (2) devine:

$$2000!-1 = p^2. \tag{2′}$$

Deoarece 2000!-1 este impar, rezultă că p este impar. Mai mult, 2000!-1 este $\mathcal{M}_8$-1, iar dacă:

$p=2\cdot n+1$, atunci: $p^2=\mathcal{M}_8+1$;

deci, egalitatea (2′) nu poate avea loc. Sau, cu un astfel de p ca mai sus, din egalitatea (2′) rezultă:

$$1\cdot 3\cdot 4\cdot \cdots \cdot 1999\cdot 2000 = 2\cdot n^2+2\cdot n+1,$$

ceea ce este imposibil. În consecință numărul $\sqrt{2000!-1}$ nu este rațional.

***Altfel*:** Ultimele două cifre ale numărului 2001!-1 sunt 99, ceea ce arată că acest număr nu poate fi pătrat perfect. Într-adevăr, dacă:

$$100\cdot k+99 = \overline{ab}^{\,2} = (10\cdot a+b)^2 = 100\cdot a^2+20\cdot a\cdot b+b^2, \tag{3}$$

atunci:

$99=20\cdot a\cdot b+b^2$ și $b=3$,

caz în care:

$2\cdot a=3$,

ceea ce este imposibil.