Examen la Didactica Matematicii,

Anul II, Domeniul Matematică, 10.06.2024

Partea I - teorie

I. Ce înseamnă a fi creativ la Matematică?

Barem de corectare şi notare:

- Definiția creativității **(0,25p)**
- Câteva idei **(0,25p)**
- Ce înseamnă a fi creativ la Matematică **(1,00p)**

Conceptul de creativitate a apărut pe piața de idei, în Psihologia cognitivă, la sfârșitul sec. XIX și începutul sec. XX, când prin introducerea lui se dorea înlocuirea unor concepte mai vechi, ca:

- *nou,*
- *noutate,*
- *invenție,*
- *inovație,*

concepte considerate, atunci, învechite, perimate, depășite moral. În cei peste 100 de ani care au trecut de la apariția lui, conceptul de creativitate a cunoscut o dezvoltare fără precedent, ajungându-se la peste 120 de „*definiții*". A apărut şi o ştiinţă care-l studiază:

- *euristica*.

Toate „*definițiile*" conceptului de creativitate prezintă, într-un fel sau altul, faptul că el desemnează capacitatea gândirii umane de a crea, în plan ideatic sau material, produse / probleme / idei cu elemente de noutate, fie pentru persoana în cauză, fie pentru societate. Procesul de realizare a acestor produse / probleme / idei se numeşte *proces de creaţie*, iar rezultatul acestui proces se numeşte *produs de creaţie*.

Totalitatea proceselor psihice ale unei persoane, care concură la formarea şi dezvoltarea creativității, formează *capacitatea de creaţie*, sau *potenţialul creativ* al persoanei respective.

Psihologia cognitivă şi Euristica, au arătat că fiecare dintre noi dispunem de un potenţial creativ general / capacitate de creaţie generală, nenul(ă), dar şi de anumite capacități / creativităţi specifice:

- *matematice,*
- *lingvistice,*
- *muzicale,*
- *artistice,*
- *sportive,* etc.

Ca și în cazul inteligenței, și în cazul creativității, ansamblul creativităților specifice nu este neaparat egal cu creativitatea generală.

Câteva idei, de reținut:

- Omul dotat cu inteligenţă creatoare concepe ideile ca planuri de acţiune şi nu ca reflectări ale realităţii obiective. Din această perspectivă s-a născut ideea unei realităţi „*metaculturale*” (David Bidney), spre care tind să se îndrepte atitudinile valorizatoare individuale. Deosebirile dintre oameni ar fi de natură participativă.
- S-ar putea spune că actul de creaţie autentică se retrage într-o altă sferă, care este rezervată unui grup restrâns de oameni, iar creaţia „*masivă*” inhibă funcţia critică a culturii, făcând apel la senzaţional şi cucerindu-şi un public imens, de fapt un consumator uriaş, care nu mai doreşte să aprecieze efortul intelectual, erudiţia, pentru că nu mai are nici timp, nici disponibilitatea şi este satisfăcut de ceea ce i se oferă din abundenţă. Noua civilizaţie aparţine loisir-urilor degradate (adică a folosirii neraţionale a timpului, contrar voinţei şi obiceiurilor individuale) şi domniei pseudo-individualităţii.
- În momentul în care personalităţile creatoare nu mai pot crea şi nu mai pot conduce masele, dispare elanul vital, iar civilizaţia moare prin sinucidere.
- Întreaga evoluţie a omenirii, deci şi a lumii matematice, are ca sursă emitentă acea caracteristică a performanţelor minţii omului de a inventa, de a descoperi, deci de a realiza un produs nou (pentru el sau societate, în plan material sau ideal), original şi valoros.

Fiind o formă superioară a gândirii umane, activitatea creatoare este de o mare diversitate: de la ştiinţă şi artă, până la tehnică, organizare şi conducere a diverselor activităţi, fiind un fenomen deosebit de complex. Până în secolul XIX s-a crezut că facultatea gândirii de a crea este un dar divin, rezervat unor privilegiaţi ai soartei, că munca nu are nici un rol în actul creaţiei şi aceasta pentru că ştiinţa nu a fost în stare să dea explicaţii despre actul creaţiei. Ideile conform cărora o persoană, sau alta, este născută creatoare sau necreatoare (sau într-o situație în care nu (se) poate face nimic) au fost o frână importantă în dezvoltarea şi folosirea potenţialului creativ uman, cu toate că oamenii de ştiinţă au recunoscut că:

- „*Inspiraţia este 99% transpiraţie*.” (Edison),
- „*Întâmplarea favorizează în ştiinţă pe cei pregătiţi.*” (Pasteur)

sau

- „*Ce este invenţia? Sfârşitul căutării.*” (Goethe)

S-a făcut astfel simţită nevoia ca Psihologia şi Euristica (ştiinţa care studiază creativitatea – vezi mai sus!) să intervină şi să explice natura şi fazele procesului de producere a ideilor noi, factorii obiectivi şi subiectivi ai creativităţii.

Dintre toate aptitudinile speciale, cu rol deosebit în activitatea creatoare, foarte strâns corelată cu coeficientul de inteligenţă şi activitatea gândirii, dar fără a se identifica cu aceasta, este aptitudinea pentru Matematică, în formarea căreia intervin, în mod egal, cele două categorii de factori:

- *ereditari*

şi

- *de mediu*.

Aptitudinea pentru Matematică reprezintă capacitatea gândirii matematice de a generaliza rapid şi extensiv (formarea asociaţiilor generalizate), de a realiza rapid o prescurtare a procesului de raţionalizare şi a sistemului de operaţii, de comutare rapidă de la raţionamentul direct la cel invers (de a realiza asociaţii reversibile), vizualizarea relaţiilor spaţiale.

Dezvoltarea aptitudinilor matematice obişnuite se face pe baza activităţii intense şi organizate de asimilare a cunoştinţelor matematice.

Se pot pune următoarele întrebări:

- *Ce înseamnă să fii creativ în învăţământ matematic*?
- *În ce domenii ale învăţământului matematic se poate manifesta creativitatea*?
- *Este creativitatea o cerinţă importantă pentru succesul reformei în învăţământ*? *Dar în particular în învăţământul matematic*?
- *Cum putem contribui, ca profesor de Matematică, la dezvoltarea unui climat de creativitate în şcoală*?

În procesul de predare - învăţare a Matematicii spunem că un elev este creativ dacă este satisfăcută (cel puţin) una din următoarele condiţii:

- *produsul gândirii sale are un element de noutate fie pentru el, fie pentru societate, ceea ce la Matematică se concretizează în*:
  - o noţiune matematică,
  - o teoremă,
  - un algoritm de rezolvare a unui anumit tip de probleme sau o nouă metodă de rezolvare pentru un tip de probleme (deci gândirea găseşte o metodă de rezolvare a unei probleme care nu a fost prezentată de profesor la clasă şi nici în manual, sau găseşte singur soluţie pentru o problemă care nu intră în nici o tipologie din cele prezentate până atunci de profesor),
  - o teorie matematică necunoscută,
  - un nou sistem axiomatic,
  - un exemplu deosebit sau un contra - exemplu,
  - descoperirea unei erori,
  - rezolvarea sau punerea unei probleme deschise,
  - formularea de conjecturi sau transformarea unei conjecturi în teoreme,
  - o noutate în organizarea Matematicii,
  - o aplicaţie neaşteptată a unei teorii matematice cunoscute,
  - un mijloc tehnic de instruire mai deosebit;
- *gândirea este neconvenţională*, în sensul că respinge sau modifică unele idei acceptate până

atunci;

- *gândirea izvorăşte dintr-o puternică motivare şi persistenţă*, adică ocupă un timp suficient de îndelungat şi se desfăşoară la o tensiune înaltă;
- *gândirea prelucrează sau rezolvă probleme care au fost puse de la început în termeni vagi, insuficient definiţi*, astfel încât gândirea formulează clar problema sau o reformulează.

Se cuvine aici să precizăm ce este aceea o conjectură şi ce este o problemă deschisă.

Este bine ştiut că încă de la începuturile sale, Matematica a creat şi s-a dezvoltat prin probleme, ajungând astăzi să vorbim de Universul matematic care domină întreaga cunoaştere şi care a dus la civilizaţia actuală. Volumul şi calitatea cunoştinţelor matematice la începutul mileniului III sunt impresionante şi cresc întru-un ritm rapid: se estimează că în ultimii 25 de ani, numărul teoremelor (demonstrate) creşte cu 1.000.000 pe an. Dar numărul problemelor ce se nasc anual este de câteva sute de mii: o parte îşi primesc rezolvarea (devin fie teoreme, fie probleme închise), iar o bună parte rămân probleme deschise (cele ce nu au fost rezolvate). Desigur că nu orice problemă nerezolvată capătă statutul de conjectură. Se consideră probleme deschise în Matematica ştiinţă, acele probleme de excepţie, nobile, provocatoare care pot declanşa teorii sau chiar ramuri noi în Universul matematic. Existenţa problemelor deschise asigură corectarea (individuală sau sub formă instituţionalizată) şi progresul în Matematică. Propoziţiile logice din Matematică care au fost demonstrate (dovedite) sunt desemnate prin termenii:

- *lemă*,
- *propoziţie*,
- *teoremă*

sau

- *corolar*,

iar cele ce nu sunt încă demonstrate (din diverse motive) prin termenii:

- *axiomă*,
- *postulat*,
- *problemă*,
- *ipoteză*

şi

- *conjectură*.

Termenul de *conjectură* a apărut ultimul, introdus de D. Hilbert, în formularea celor 23 de probleme supuse spre rezolvare comunităţii internaţionale a matematicienilor la al II - lea „*Congres internaţional al matematicienilor*” din 1900 de la Paris. Primele probleme deschise din istoria Matematicii au apărut în Antichitatea greacă:

- *cuadratura cercului* (-435 autor Artemon din Clazomene),
- *duplicarea cubului* (-430 autor Hippocrate din Chios)

şi

- *trisecţiunea unghiului* (-425 autor Hippias din Elis).

Rezolvarea lor s-a făcut de-abia în secolul al XIX - lea.

Cuvântul conjectură provine de la latinescul *conjectura*, care înseamnă ipoteză, prezumţie, opinie bazată pe aparenţe. În mod obişnuit, prin conjectură se înţelegere orice explicaţie presupusă a unui fenomen (eveniment) constituită fără certitudine şi în afara oricărei dovezi (probe), plecând de la aparenţă sau presupuneri. În acord cu Hilbert (autorul termenului de conjectură), se înţelege prin conjectură acea problemă deschisă care poate furniza arhitectura unei teorii în Matematică (sau o direcţie nouă) sau avansarea unui nou domeniu.

Așadar, termenul de „*conjectură*” înseamnă, în Matematică, presupunere, ipoteză, în sensul unei afirmații nedemonstrate, care poate fi adevarată cu o probabilitate destul de mare (spre exemplu, este adevarată în mai multe cazuri particulare, ca în cazul inducției incomplete); *o conjectură* este o propoziţie matematică, corect constituită, dar la care nu se cunoaşte valoarea de adevăr; altfel spus o conjectură este o propoziţie matematică, corectă din punct de vedere logic, dar care nu este nici adevărată, nici falsă, în logica bivalentă. Aritmetica şi apoi Teoria numerelor au produs cele mai multe şi subtile conjecturi în Matematică. **De exemplu,** Pierre Fermat (părintele Teoriei numerelor) a produs 48 conjecturi (trei s-au dovedit false), care au reprezentat probleme de cercetare pentru mulţi matematicieni (Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, etc).

Astfel, în Teoria numerelor; cea mai cunoscută conjectură, din acest domeniu, fiind (celebra conjectură) a lui Goldbach (1742):

- „*Orice număr natural par, mai mare sau egal cu 4, se poate scrie ca suma a două numere prime, nu neaparat distincte*”.

În 1742, matematicianul Christian Goldbach, într-o scrisoare trimisă marelui matematician al vremii Leonard Euler (1707–1783), îi propune să arate că orice număr par mai mare decât 6 este suma a două numere prime. **De exemplu:**

12=5 +7, 18=5+13=7+11, … .

Nici până azi această problemă nu a fost rezolvată (pozitiv sau negativ), devenind astfel pentru Istoria Matematicii ipoteza (conjectura) lui Goldbach. De această conjectură, pe parcursul a peste 250 ani, s-a ocupat o serie de mari matematicieni:

- Gauss,
- Dirichlet,
- Kummer,
- Hardy,
- Littlewood,
- Papachristas.

În 2000, editura Faber&Faber a oferit un premiu de 1.000.000 de dolari pentru rezolvarea conjecturii lui Goldbach.

Se observă că această propoziţie este corectă din punct de vedere logic. Dacă am afirma că ea este adevărată, ar trebui să avem la dispoziţie o demonstraţie în acest sens, dar până acum nu există aşa ceva. Deci, nu putem afirma acest lucru. Dacă am afirma că propoziţia aceasta este falsă, ar trebui să găsim un contra - exemplu, care să invalideze enunţul; adică ar trebui să găsim un număr par, mai mare decât 4, care să nu poată fi scris ca suma a două numere prime. Dar nici acest contra - exemplu nu există, încă. În concluzie: putem spune că propoziţia de mai sus, în logica aristotelică, nu este nici adevărată, nici falsă; ea este, deci, o conjectură.

Iată și alte câteva conjecturi din Teoria numerelor (care pot fi înţelese de orice absolvent de liceu, ceea ce nu înseamnă că au şi rezolvare elementară):

1) Înţelegem prin *număr prim Mersenne*, numărul prim de forma:

$M_n=2^n-1.$

De exemplu:

$2^2-1=3;$ $2^3-1=7;$ $2^5-1=31;$ $2^7-1=127;$ … .

Până azi se cunosc numai 37 de numere prime Mersenne (care sunt din ce în ce mai mari, obţinute cu supercalculatorul). Cel mai mare număr prim Mersenne obţinut în 1997 (în Anglia de Gordon Spence) este $M_{2976221}$ care are 895.932 cifre. Întrebarea este:

- *Există o infinitate de numere prime Mersenne*?

2) Se înţelege prin *număr perfect*, un număr natural egal cu suma divizorilor săi (suma părţilor sale alicate) mai puţin el însuşi. **De exemplu:**

$6=1+2+3;$ $28=1+2+4+7+14;$ … .

S-a conjecturat că orice număr perfect este par (această afirmaţie este încă nedemonstrată). La fel nu se ştie dacă există o infinitate de numere perfecte.

3) Înţelegem prin *număr prim Fermat*, numărul:

$F_n=2^{2^n}+1,$

cu $n\in\mathbf{N}$, care este prim. Fermat a arătat că F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sunt prime şi a conjecturat că oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, F_n este prim. Euler a arătat că F_5 nu este prim deoarece:

$F_5=641\cdot6700417.$

Nu se ştie nici până azi dacă există o infinitate de numere prime Fermat şi nici dacă există o infinitate de numere Fermat compuse. Importanţa numerelor prime Fermat a fost arătată de Gauss, demonstrând proprietatea că se pot construi cu rigla şi compasul numai poligoanele regulate cu n laturi, unde:

$N=2^k\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k,$

iar numerele p_1, p_2, …, p_k, sunt numere prime Fermat, distincte.

4) Două numere naturale *a* şi *b* se zic *prietene* (*amice*) dacă suma părţilor alicate ale unuia este egală cu celălalt. **De exemplu:**

$a=220$ şi $b=284$.

(Într-adevăr,

$220=2^2\cdot5\cdot11$ și $284=2^2\cdot71$,

deci,

$|\mathcal{D}(220)|=3\cdot2\cdot2=12$ și $|\mathcal{D}(284)|=3\cdot2=6$.

Un calcul simplu ne arată că:

$\mathcal{D}(220)=\{1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110,220\}$,

$\mathcal{D}(284)=\{1,2,4,71,142,284\}$,

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

și

$1+2+4+71+142=220$.)

Nu se ştie dacă există o infinitate de perechi de numere amice. Mai general, trei numere naturale *a, b, c* se zic *sociabile*, dacă:

$b=\sigma(a)$, $c=\sigma(b)$, $a=\sigma(c)$,

unde $\sigma(n)$ este suma părţilor alicate a numărului natural *n*. Un exemplu de numere sociabile sunt:

a=1.945.330.728.960; b=2.324.196.638.729; c=2.615.631.953.920.

Nu se ştie dacă există o infinitate de triplete sociabile.

5) Numerele prime *p, q* se zic *gemene*, dacă:

$|p-q|=2$.

De exemplu:

(3;5); (5;7); (17;19); (29;31); … .

Nu se ştie dacă există o infinitate de numere prime gemene.

6) Pentru orice număr natural, nenul, n, există un număr prim p, astfel încât:

$n^2<p<(n+1)^2$?

7) Există o infinitate de numere prime p, de forma:

$p=n^2+1$?

8) Se cuvine să menționăm, aici, și următoarea propoziție, numită „*conjectura lui Andrica*”:

- „*Dacă* $(p_n)_{n\geq1}$, *este șirul numerelor prime, atunci, pentru orice* $n\in\mathbf{N}^*$, *avem*:

  $\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}\in(0,1)$.”

9) Tot în acest context merită să facem şi următoarea precizare: se ştie că în manuscrisele lui Fermat a fost găsit următorul enunţ:

- „*Pentru orice n, mai mare sau egal cu 4, ecuaţia* $x^n+y^n=z^n$ *nu are nici o soluţie în mulţimea numerelor întregi*”.

Acest enunţ este cunoscut sub numele de *Marea teoremă a lui Fermat*, cu toate că, se pare că, Fermat nu a dat nici o demonstraţie acestui enunţ, sau cel puţin aşa ceva nu s-a găsit în manuscrisele sale. Ba mai mult, până în 1993, nu s-a dat o demonstraţie a acestei „*teoreme*” şi nici nu s-a găsit nici un contra - exemplu, care să infirme enunţul lui Fermat; adică nu s-a găsit nici un număr natural n, mai mare sau egal cu 4, pentru care ecuaţia de mai sus să aibă, cel puţin o soluţie. În 1993 matematicianul englez Andrew Whiles a demonstrat că această propoziţie a lui Fermat este adevărată. Aşadar, acesta este un caz în care o conjectură este transformată în teoremă. (???)

Iată acum şi două conjecturi celebre din Geometrie:

10) În corespondenţa dintre astronomul şi geometrul Johannes Kepler (1571–1630) şi matematicianul britanic Thomas Harriot (1560–1621) s-a născut aşa-zisa *conjectură a lui Kepler*, care constă în aranjarea unor sfere de aceeaşi rază într-un spaţiu închis astfel încât să optimizeze ocuparea acestuia. Este exact ceea ce vedem cum sunt aşezate portocalele, roşiile etc. pe tarabe în piaţă. Kepler a conjecturat că aşezarea optimă (din mai multe posibile) a sferelor este a *reţelei centrate* (în care fiecare sferă este înconjurată de 12 sfere împărţite în două straturi paralele cuprinzând fiecare câte 6 sfere tangente unei sfere oarecare). În primul strat se înconjoară o sferă cu alte 6 sfere tangente (se obţine o aşa zisă stea hexagonală), apoi al doilea strat format din sfere aşezate în spaţiile goale ale primului strat şi aşa mai departe. S-a constatat că această aşezare ocupă 74% din spaţiul de împachetare. O altă aşezare a sferelor este când al doilea strat se aşează peste primul astfel încât sferele să fie tangente încât să formeze o reţea pătratică. În acest caz se ocupă 53% din spaţiul de aranjare. Kepler a analizat o serie de configuraţii de aşezare a sferelor şi a ajuns la concluzia (fără demonstraţie), care a rămas sub numele de conjectura lui Kepler, că aşezarea în straturi de reţea hexagonală este optimă.

De această conjectură s-au ocupat în decursul veacurilor mulţi matematicieni celebri, însă fără succes. În anii 1990, matematicianul Thomas Hale de la Universitatea Pittsburg (SUA) a publicat o serie de lucrări legate de această conjectură, culminând în 1997 cu un articol de 250 pagini publicat în Annals of Mathematics, în care conjectura este demonstrată în proporţie de 99% cu ajutorul calculatorului.

> „*Verdictul experților a fost că soluția pare să funcționeze, dar ei nu aveau timpul și energia necesare pentru a verifica totul într-o manieră extinsă*”,

a spus Henry Cohn, editor al revistei Forum of Mathematics, Pi.

> „*Demonstrația a fost publicată în 2005 și nu au fost identificate erori ireparabile, însă aceea era o situație nesatisfăcătoare, deoarece soluția părea să se afle dincolo de posibilitatea comunității de matematicieni de a opera o verificare extinsă a teoriei*”,

a adăugat Henry Cohn, care este și cercetător la Microsoft Research New England din Cambridge, Massachusetts.

„Pentru a remedia această situație și pentru a demonstra certitudinea, profesorul Hales a apelat la computere, folosind tehnici de verificare formale. El și echipa lui de colaboratori au scris întreaga soluție, cu detalii extraordinare, folosind logica strict formală, pe care un program computerizat a verificat-o apoi cu o rigoare perfectă. Acest studiu este rezultatul analizei lor complete”,

a explicat profesorul Cohn, conform Agerpres.

Noul studiu nu doar că a rezolvat o problemă de Matematică veche de trei secole, ci reprezintă și un pas uriaș făcut în domeniul verificărilor computerizate ale unor demonstrații matematice complexe, au precizat specialiștii de la Cambridge University Press, cea mai veche tipografie universitară din lume.

Deci demonstrația lui Hale nu este o demonstraţie completă (iată cum folosind calculatorul în scop demonstrativ, obţinem grade de demonstraţie în Matematică).

Nemulţumit, Hale a lansat *Proiectul flyspeck* pentru a da o demonstraţie formală completă a conjecturii - vezi **www.math.pitt.edu/thales/flyspeck.**

11) O altă conjectură geometrică este *conjectura (ipoteza) punctelor*, care a fost trecută de curând în rândul teoremelor (problemelor rezolvate). Fie:

$M=\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$

o mulţime de n (cu $n\geq 4$) puncte distincte necoliniare, care determină mulţimea de drepte:

$\Delta=\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}$.

Să se arate că, oricare ar fi aşezarea celor n puncte, există întotdeauna drepte în Δ, care conţin numai două puncte din M. Această problemă (al cărei autor nu-l cunosc) a rămas nerezolvată peste 40 de ani. Nu de mult ea a fost rezolvată folosind un minim de cunoştinţe de Geometrie, care se obţin în şcoala gimnazială.

Un raţionament foarte simplu arată că:

$$n\leq k\leq \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Rezolvarea acestei conjecturi este integral rezolvată în Simion Singh: „*Marea teoremă a lui Fermat*” (Ed. Humanitas, Bucureşti, 1998).

Conjecturile au reprezentat şi reprezintă în continuare căi prin care Matematica se dezvoltă alături de metodele reprezentate de programele de cercetare (cercetarea pe bază de program), cum sunt:

- *programul de la Erlangen* (pentru Geometrie),
- *programul lui Hilbert*

sau

- *programul Langlands*.

În 1844, matematicianul Eugène Charles Catalan a lansat conjectura care-i poartă numele, conform căreia ecuaţia:

$x^y - z^t = 1$

are singura soluţie:

$x=3$; $y=2$; $z=2$; $t=3$.

Această conjectură a fost tranşată de matematicianul german (de origine română) Preda Mihăilescu, în anul 2002, de când a devenit Teorema lui Mihăilescu.

Numim *problemă deschisă* o problemă matematică, corect constituită, care nu are o soluţie generală, decât câteva soluţii particulare. **De exemplu:**

a) „*Să se stabilească legea de distribuire a numerelor prime printre numerele naturale*";

b) „*Să se determine toate grupurile neizomorfe de un anumit ordin n*";

c) „*Să se determine toate numerele naturale n pentru care n!+1 este pătrat perfect*" (1876, H. Brocard);

d) „*Să se determine în ce condiţii o funcţie* $f : D \to \mathbf{R}$ *care are Proprietatea lui Darboux pe D este (şi) continuă pe D*";

e) „*Să se stabilească în ce condiţii suma a două funcţii cu Proprietatea lui Darboux are, la rândul ei această proprietate*";

f) „*Se consideră n puncte* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *pe un cerc de centru O şi rază R, M – mijlocul unuia din arcele subântinse de linia frântă şi N – piciorul perpendicularei duse din M pe linia frântă. Să se stabilească în ce condiţii punctul N este mijlocul liniei frânte*".

Referitor la aceste probleme deschise, trebuie să facem aici câteva precizări:

A) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, există n numere naturale consecutive compuse, deci printre care nu se află niciun număr prim.

Într-adevăr, numerele:

$(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$, ..., $(n+1)!+(n+1)$,

sunt n numere compuse.

B) Dacă n este un număr natural nenul și notăm cu n_g – numărul grupurilor neizomorfe, de ordinul n, sunt cunoscute și utilizate următoarele rezultate:

n	$\mathbf{n_g}$	**n**	$\mathbf{n_g}$	**n**	$\mathbf{n_g}$	**n**	$\mathbf{n_g}$
1	**1**	**5**	**1**	**9**	**2**	**13**	**1**
2	**1**	**6**	**2**	**10**	**2**	**14**	**2**
3	**1**	**7**	**1**	**11**	**1**	**15**	**1**
4	**2**	**8**	**5**	**12**	**5**	**16**	**14**

C) Pentru ipoteza lui Brocard se cunosc soluțiile:

(4,5), (5,11) și (7,71).

D) Dacă f : D → **R** este o funcție cu proprietatea lui Darboux, atunci, dacă f:

- este injectivă,

sau

- este strict monotonă,

sau

- are limite laterale finite în fiecare punct din D,

  rezultă că ea este și continuă pe D.

E) Dacă f, g : D → R sunt două funcții cu proprietatea lui Darboux, atunci, dacă f și g:

- admit primitive pe D,

sau

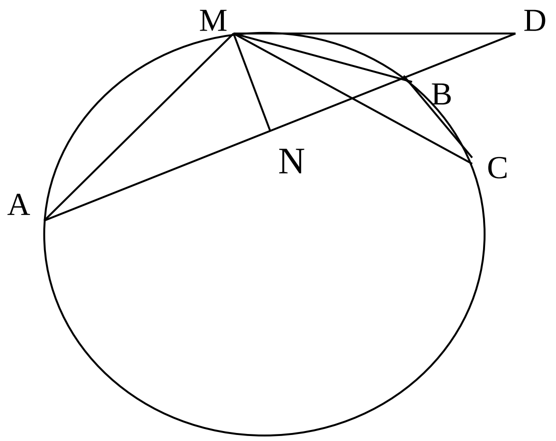
- sunt continue pe D,

sau

- sunt de prima clasă Baire pe D și mulțimile lor de discontinuitate sunt disjuncte,

  rezultă că funcția f+g are și ea proprietatea lui Darboux pe D.

F) Dacă punctele A și B aparțin cercului de centru O și rază R și M este mijlocul arcului AB, iar N este piciorul perpendicularei din M pe AB, atunci N este mijlocul segmentului [AB]. Acest rezultat este cunoscut în literatura domeniului sub numele de *Teorema lui Arhimede* și se demonstrează foarte ușor, la nivel gimnazial. Considerăm, acum, tot un cerc de centru O și rază R și trei puncte: A, B și C, pe acest cerc. Fie M mijlocul arcului subântins de linia frântă ABC (deci, M este mijlocul arcului ABC) și N proiecția lui M pe această linie frântă. Deci, N poate coincide cu B sau să fie în interiorul unuia din segmentele (AB), respectiv (BC). Vezi figura de mai jos.



Prelungim segmentul [AB] cu segmentul:

[BD]≡[BC].

Atunci triunghiurile MBC și MBD sunt congurente (după cazul LUL). Rezultă că:

MC=MD.

Dar,

MC=MA.

Deci,

MA=MD

și, astfel, triunghiul AMD este isoscel. Rezultă că MN este și mediană în acest triunghi și, astfel,

AN=ND.

Dar,

ND=NB+BD=NB+BC.

Așadar, punctul N este mijlocul linie frânte ABC.

Acest rezultat este cunoscut în literatura de specialitate, ca fiind *Teorema lui Al-Biruni*. Mohamed Al-Biruni a fost profesor de Matematică la Universitatea din Kiat, la sfârșitul primului mileniu și începutul celui de al doilea. Kiatul este un vechi oraș din lumea arabă, situat, conform documentelor vremii, la aproximativ 1000 de km, Nord-Est, de vechiul așazământ al Edenului, actualmente pe teritoriul Uzbekistanului. În anul 999 el avea, deja, 22 de demonstrații ale acestui rezultat și mai dă încă una, dar precizează că acest rezultat nu-i aparține. Mai precizăm și faptul că tot Al-Biruni, în anul 997, dă prima demonstrație a Teoremei sinusului, un alt rezultat care, zice el că, nu este al lui.

Oricărei probleme i se poate asocia o întrebare, care o conturează şi îi dă o direcţie de soluţionare. Cvasi-echivalenţa dintre punerea şi soluţionarea unei probleme, semnalată adesea de marii gânditori, nu înseamnă că întrebarea dispune de un răspuns gata pregătit, căruia numai proclamarea îi lipseşte, ci că truda de a pune bine problema (întrebarea) este în bună măsură şi truda de a o rezolva (de a răspunde) în cadrul referenţial stabilit.

„*Adevăratele mari probleme nu sunt puse decât atunci când sunt rezolvate*",
afirma Bergson.

Se ştie că dacă n este număr prim, atunci, abstracţie făcând de un izomorfism, există un singur grup G, de ordin n. În iunie 1992, în AMM, J. Dieter a demonstrat că reciproca acestei afirmații este falsă, mai precis el a arătat că:

- „*Dacă* $n \in \mathbf{N}^*$, *există un singur grup G, de ordin n dacă și numai dacă*:

  $(n,\phi(n))=1,$ (∗)

  unde ϕ *este funcția indicator al lui Euler.*"

Acesta este un exemplu mai deosebit, în care propoziția reciprocă asociată unei teoreme directe este falsă; deci teorema directă nu are reciprocă. Se verifică imediat că numărul 15 este primul număr compus pentru care egalitatea (∗) are loc; vezi (și) tabelul de mai sus.

Găsim probleme deschise în majoritatea domeniilor Matematicii:

- Analiză matematică,

- Geometrie,
- Topologie etc.,

propuse de diverşi matematicieni (multe le poartă numele):

- *ipoteza lui Riemann,*
- *ipoteza continuului,*
- *ipoteza lui Poincaré,*
- *ipoteza (conjectura) lui Kepler,*
- *conjectura lui Bieberbach* (Al n-lea coeficient din seria de puteri a unei funcții univalente nu trebuie să fie mai mare decât n. Cu alte cuvinte, dacă:

  $f(z)=a_0+a_1\cdot z+a_2\cdot z^2+...+a_n\cdot z^n+...$

  este o aplicație conformă a unui disc unitate pe orice domeniu și $a_0=0$ și $a_1=1$, atunci $|a_n|\leq n\cdot|a_1|$. În termeni mai tehnici, „*extremitatea geometrică implică extremitatea metrică*”. O formulare alternativă este că $|a_j|\leq j$, pentru orice funcție Schlicht f (Krantz 1999, p. 150).), etc.

În anul 2000, Institutul matematic Clay (USA) a lansat în cadrul unei Conferinţe aniversare a centenarului congresului internaţional al matematicienilor din 1900, un număr de 7 probleme (numite problemele mileniului trei, „*Millennium Problems in Mathematics*”) spre rezolvare, fiecare problemă este cotată cu un premiu de 1.000.000 de dolari. Printre aceste probleme se află şi celebra ipoteză a lui Riemann (1859), care vizează distribuţia numerelor prime. Distribuţia numerelor prime în rândul celorlalte numere nu urmează un tipar regulat. Totuşi, Bernard Riemann a observat că frecvenţa numerelor prime este foarte apropiată de rezultatele furnizate de o funcţie complexă, denumită *funcţia zeta Riemann*.

Ipoteza problemei afirmă că toate soluţiile ecuaţiei:

$\zeta(s)=0$

urmează o anumită linie dreaptă verticală, potrivit Clay Mathematics Institute; adică funcţia:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

unde $s\in\mathbf{C}$, are zerourile în **C** situate pe drepte:

$$s=\frac{1}{2}+b\cdot i,$$

cu $b\in\mathbf{R}$. Această conjectură reprezintă cea mai importantă şi dificilă problemă a Matematicii contemporane. Înainte de a muri, Hilbert a fost întrebat, dacă ar învia după 500 de ani, ce întrebare ar pune, şi el a răspuns:

- *Dacă a fost rezolvată ipoteza lui Riemann*?

Deşi matematicienii au demonstrat că teorema se verifică pentru primele 10 miliarde de soluţii, abia în 2015 a fost găsită o dovadă care explică distribuţia numerelor prime dincolo de acea limită.

Ipoteza lui Riemann este una din cele mai importante probleme din Matematica contemporană, în principal pentru că s-a demonstrat că un mare număr de alte rezultate importante sunt adevărate, dacă ipoteza Riemann este adevărată. Majoritatea matematicienilor cred că ipoteza Riemann este adevărată. (J. E. Littlewood și Atle Selberg sunt sceptici. Scepticismul lui Selberg, rezultă din tinerețea sa. Într-o lucrare din 1989, el a sugerat că există o clasă mai largă de funcții, *clasa Selberg*, pentru care această ipoteză este valabilă.) Așa cum am precizat mai sus, a fost oferit un premiu de 1.000.000 de dolari de către Institutul Matematic Clay pentru prima demonstrație corectă a acestei ipoteze.

Și totuși, Mediafax, a anunțat în 19 noiembrie 2015, că profesorul nigerian Opeyemi Enoch a rezolvat ipoteza Riemann şi că, astfel, ar putea să câştige pentru această reuşită un premiu de 1 milion de dolari, potrivit dailymail.co.uk.

Deocamdată, Clay Mathematical Institute nici nu a confirmat, nici nu a infirmat faptul că profesorul Enoch a rezolvat în mod oficial această problemă, spunând doar că nu face comentarii la adresa numeroaselor soluţii care îi sunt propuse în mod constant pentru „*Millennium Problems in Mathematics*”.

În urma acestui răspuns, mai mulţi crici au afirmat deja că ştirea despre rezolvarea ipotezei Riemann reprezintă o farsă.

Profesorul Enoch, care predă la Universitatea Federală Oye Ekiti (FUOYE) din Nigeria, a declarat pentru BBC că a fost motivat în decizia sa de a rezolva această problemă veche de 156 de ani de studenţii săi.

Profesorul nigerian a prezentat soluţia sa, pe 11 noiembrie, la International Conference on Mathematics and Computer Science din Viena, precizează site-ul nigerian de ştiri Vanguard.

În trecut, Opeyemi Enoch a realizat designul pentru un prototip de siloz pentru fermierii săraci, iar în prezent lucrează la un proiect care vizează protejarea conductelor de petrol împotriva actelor de vandalism şi la implementarea unei abordări matematice care să diminueze problemele generate de încălzirea globală.

Tot aici, amintim și conjectura lui Poincaré (sau și „*ipoteza lui Poincaré*”), prima dată enunțată de matematicianul francez Henri Poincaré în 1904, care afirmă că,

> „*dacă într-un spațiu tridimensional închis și nemărginit (cufundat într-un spațiu 4-dimensional) toate „cercurile” bidimensionale pot fi micșorate topografic până ce devin un punct, atunci acest spațiu tridimensional este echivalent din punct de vedere topologic (homeomorf) cu o „sferă” 3-dimensională*”.

Este interesant că problemele analoge referitoare la un spațiu închis cu 2 dimensiuni, sau și cu 4 sau chiar și mai multe dimensiuni au fost demonstrate încă de mai demult.

Rusul Grigorij (Grisha) Jakovlevič Perelman a fost singurul om care a reușit să rezolve una dintre cele șapte „*Probleme ale Mileniului*”, amintite mai sus, dovedind Conjectura Poincaré și care a refuzat premiul de un milion de dolari care i-a fost acordat de Clay Mathematics Institute pentru această descoperire.

Demonstrația matematicianului rus Grigori Perelman, din anul 2002, s-a situat pe primul loc în topul celor mai importante descoperiri matematice, alcătuit de prestigioasa revistă *Science*, la 22 decembrie 2006. Enigmaticul savant rus a făcut senzație nu numai pentru că a rezolvat o problemă care i-a pasionat pe specialiști vreme de aproape un secol, dar și pentru că în 2006 a refuzat *Medalia Fields*, un premiu în Matematică echivalent cu premiul Nobel, fiind prima persoană din lume care a făcut acest lucru.

Perelman a refuzat în anul 2010 și recompensa de un milion de dolari pe care *Clay Mathematics Institute* din Cambridge, Massachusetts a oferit-o pentru rezolvarea Conjecturii lui Poincaré, afirmân că:

„*Pentru mine este complet irelevantă, pentru că dacă soluția este cea corectă, nu este nevoie de nicio altă recunoaștere*”.

În finalul acestei secțiuni precizăm și faptul că sunt și conjecturi sau probleme deschise care sunt acceptate și ca fiind adevărate și ca fiind false. **De exemplu,** Problema 1 a lui Davis Hilbert, prezentată la Congresul mondial al matematicienilor de la Paris, din 1900:

„*Dacă $A \subset R$ este o mulţime infinită, atunci să se arate că există fie o bijecţie $A \to \mathbf{N}$, fie o bijecţie $A \to \mathbf{R}$*”.

Cu alte cuvinte, problema poate fi reformulată astfel:

„*Există un cardinal strict intermediar între cardinalele mulţimilor **N** şi **R***?

Aceasta este cunoscută ca *problema continuului*. În 1963, Paul Cohen a arătat că rezultatul nu se poate obţine din sistemul de axiome Zermelo - Fraenkel al Teoriei mulţimilor. Cu alte cuvinte, există o Matematică care acceptă ipoteza continuului şi o alta care nu o acceptă, ambele fiind viabile, problema continuului fiind, astfel, închisă – vezi K. Gödel. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*. Princeton University Press, Princeton, 1940.

II. Principiul stimulării şi dezvoltării motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii.

Barem de corectare și notare:

- Punerea problemei **(0,25p)**
- Prezentarea / descrierea aspectelor didactice ... **(1,25p)**

Inteligenţa unui elev, este pusă în funcţiune şi orientată spre învăţarea Matematicii de factorii emotiv - activi şi motivaţionali ai personalităţii. Ca orice activitate umană, învăţarea Matematicii se desfăşoară într-un „*câmp motivaţional*”, care ar fi bine să fie cât mai optim, mai ales pentru că Matematica reprezintă, din păcate pentru mulţi elevi, o disciplină aridă, greu de pătruns şi pentru că realitatea ne arată ponderea (relativ) ridicată a motivaţiei extrinseci, pentru învăţarea acestei discipline şcolare, la un număr mare de elevi din cadrul fiecărei clase. De aceea, profesorul de Matematică trebuie să cultive la elevi dragostea, pasiunea pentru Matematică, adică adevărata motivaţie cognitivă pentru această disciplină şcolară, care odată constituită nu mai cunoaşte saturaţie.

Acest principiu se impune, în activitatea de predare - învăţare a Matematicii, ca o necesitate pentru a găsi căile de trecere de la motivaţia extrinsecă la cea intrinsecă, pentru evitarea demotivării învăţării acestei discipline şcolare, pentru trecerea de la motivaţia nemijlocită la motivaţia socială a învăţării Matematicii, pentru cristalizarea intereselor profesionale în interrelaţie cu motivaţia cognitivă, intrinsecă şi cu aptitudinile şi deprinderile cu gradul cel mai mare de funcţionalitate.

Pentru creşterea eficienţei procesului de predare - învăţare a Matematicii, considerăm utile următoarele aspecte didactice care contribuie la dezvoltarea motivaţiei învăţării acestei disipline şcolare.

1. *Acceptarea unui punct de vedere realist privind aspectele reale ale funcţionalităţii motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii*. Orice profesor trebuie să accepte ideea că motivaţia extrinsecă şi intrinsecă (înţelegând aici ansamblul lor) pot duce - prin întrepătrunderea lor - la creşterea randamentului şcolar al elevilor, inclusiv la Matematică. De aceea profesorul de Matematică trebuie să-şi propună drept scop fundamental al activităţii sale creşterea la maxim a motivaţiei intrinseci a elevilor pentru învăţarea Matematicii, dar el trebuie să recunoască rolul important al diferitrelor forme ale motivaţiei extrinseci ale acestora pentru această disciplină şcolară, precum şi al trebuinţei de autoafirmare, a trebuinţei de performanţă, cumulată cu nivelul lor de aspiraţie; toate acestea putând influenţa în bine calitatea învăţării Matematicii.

2. *Evaluarea motivelor învăţării Matematicii*. În cazul în care unui elev nu i se poate capta atenţia şi interesul în orele obişnuite de Matematică, cu procedeele obişnuite de motivare extrinsecă, profesorul trebuie să detecteze şi să evalueze cât mai exact structura şi funcţionalitatea sistemului motivaţional, al emoţiilor şi sentimentelor cognitive ale elevului respectiv faţă de Matematică, conjugându-le cu sarcinile didactice. Astfel, el va trebui să creeze situaţii de predare - învăţare în cadrul cărora elevii respectivi să trăiască sentimental succesul, care apoi devine factor motivaţional, căci succesul şi performanţele obţinute pot deveni surse pentru motivarea învăţării Matematicii.

3. *Dezvoltarea impulsului cognitiv pentru Matematică*, pe baza stimulării şi orientării trebuinţei de activism şi a trebuinţei de explorare, paralel cu stimularea şi dezvoltarea emoţiilor şi sentimentelor cognitive, cum ar fi:

- *curiozitate,*
- *mirare,*
- *îndoială,*
- *întrebare,*
- *bucuria descoperirii adevărului*, etc.

Se pune, deci, în alţi termeni, problema trecerii de la curiozitatea perceptivă, care este o simplă prelungire a reflexului înnăscut de orientare şi a trebuinţei de explorare, la curiozitatea epistemică, adică la nevoia devenită intrinsecă, automată, de a şti, de a cunoaşte Matematică, de a descoperi adevărurile matematice. În acest sens, în cadrul tuturor activităţilor din învăţământul matematic, se recomandă apelarea la „*surpriză*”, la noutate, la contrast, crearea unor situaţii didactice care să producă „*disonanţa cognitivă*”. În acest mod se captează atenţia elevului şi se trezeşte interesul acestuia pentru studiul Matematicii, clădindu-se, mai întâi, atracţiile şi preferinţele pentru o anumită temă din programa şcolară. Captarea atenţiei elevilor se leagă de motivaţia sarcinii, de motivaţia pe termen scurt, în cadrul secvenţelor de instruire, iar trezirea, stimularea şi dezvoltarea interesului cognitiv pentru Matematică se leagă şi de motivaţia socială, pe termen lung, ea fiind şi expresia măiestriei didactice a profesorului.

Motivaţia optimă scurtează timpul necesar învăţării, inclusiv la elevii cu ritm mai lent, la care prin activitatea proceselor cognitive se antrenează şi ritmul învăţării.

De asemenea, predarea Matematicii în absenţa motivaţiei elevilor pentru această disciplină, ridică o serie de probleme, ca de altfel şi predarea în cazul „*demotivării*”, a stingerii interesului cognitiv al elevilor pentru Matematică. În aceste condiţii, măiestria didactică a profesorului îşi spune cuvântul, profesorul bun fiind capabil de a stârni curiozitatea elevilor prin „*elemente - surpriză*” incluse în demersul didactic. Astfel, **de exemplu,** un elev poate să nu arate nici o atracţie, nici un impuls cognitiv pentru însuşirea unor cunoştinţe de Algebră, dar el poate fi intrigat de un paradox logic, de o contradicţie vizibilă, sau de o problemă mai deosebită, de la care să se plece în învăţarea Algebrei. **De exemplu:**

A) *Paradox logic*: Pentru a scoate în evidenţă un paradox matematic, considerăm următoarea problemă:

„*Un prieten de-al meu are doi copii, dintre care cel puţin unul este băiat. Care este probabilitatea ca şi celălalt copil să fie tot băiat?*”

***Rezolvare*:** Gândind superficial am fi tentaţi să afirmăm că probabilitatea cerută este $\frac{1}{2}$, căci şansa de a fi băiat este egală cu aceea de a fi fată. Paradoxul este că, în realitate, dacă un copil este băiat, există trei variante posibile: BB, BF, respectiv FB, fiecare variantă posibilă având aceeaşi probabilitate: $\frac{1}{3}$. Remarcăm faptul că dacă enunţul ar conţine precizarea: *cel mai mic, sau cel mai mare, sau ..., este băiat,* atunci într-adevăr, probabilitatea cerută ar fi fost $\frac{1}{2}$, căci în acest caz variantele posibile ar fi fost BB şi BF (sau FB).

B) *O contradicţie vizibilă*:

$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)}=i\cdot i=i^2=-1.$

C) *O problemă deosebită*:

„*Să se calculeze suma primelor 300 de zecimale exacte ale numărului:*

$(\sqrt{2}-1)^{1000}$."

***Rezolvare*:** Avem inegalitățile:

$$(\sqrt{2}-1)^{1000}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{100}=\left(\frac{1}{1024}\right)^{100}<\left(\frac{1}{1000}\right)^{100}=10^{-300}.$$

Sau:

„*Fie M mulţimea tuturor matricilor de ordin $m\times n$, a căror elemente sunt –1 sau 1, şi care au proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie, respectiv fiecare coloană este –1. Să se determine numărul de elemente al mulţimii M.*"

***Rezolvare*:** Fie M mulțimea din enunț și:

$$H=\{A^*\in\mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(Z)\mid A^*=(a_{ij}),\text{ unde } a_{ij}\in\{-1,1\}\}.$$

Atunci,

$$|H|=|\{f:\{1,2,...,m-1\}\times\{1,2,...,n-1\}\to\{-1,1\}\}|=2^{(m-1)\cdot(n-1)}. \qquad (1)$$

Vom arăta că:

$$|M|=|N|. \qquad (2)$$

Mai întâi, observăm că dacă, pentru orice $i=\overline{1,n}$, notăm cu P_{li} produsul elementelor de pe linia i a matricii A (deci, $P_{li}=a_{i1}\cdot a_{i2}\cdot\ldots\cdot a_{im}$) și, pentru orice $j=\overline{1,m}$, notăm cu P_{cj} produsul elementelor de pe coloana j a matricii A (deci, $P_{cj}=a_{1j}\cdot a_{2j}\cdot\ldots\cdot a_{jn}$), atunci produsul P al tuturor elementelor elementelor matricii A este:

$$P=\prod_{i=1}^{n}P_{li}=(-1)^n=\prod_{j=1}^{m}P_{cj}=(-1)^m.$$

Deci, numerele m și n au aceeași paritate. Acum, considerăm funcția:

$$F:M\to H,$$

unde, pentru orice matrice $A\in M$,

$$F(A)=A^*\in H,$$

iar A^* este matricea obținută din matricea A prin suprimarea liniei a n-a și coloanei a m-a. Acum, considerăm funcția:

$$G:H\to M,$$

care la fiecare matrice $A^*\in H$ îi asociază matricea $A\in M$, prin adăugarea unei linii (a n-a) și a unei coloane (a m-a), astfel:

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m-2} & a_{1m-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m-2} & a_{2m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & a_{n-22} & \cdots & a_{n-2m-2} & a_{n-2m-1} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1m-2} & a_{n-1m-1} \end{pmatrix} \mapsto A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m-2} & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m-2} & a_{2m-1} & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & a_{n-22} & \cdots & a_{n-2m-2} & a_{n-2m-1} & a_{n-2m} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1m-2} & a_{n-1m-1} & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm-2} & a_{nm-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

unde ultima linie și ultima coloană a matricii A se completează în felul următor:

- Dacă produsul elementelor de pe linia 1 a matricii A^* este 1, atunci a_{1m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{1m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe linia 2 a matricii A^* este 1, atunci a_{2m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{2m}=1.
- $\cdots$
- Dacă produsul elementelor de pe linia n-2 a matricii A^* este 1, atunci a_{n-2m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n-2m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe linia n-1 a matricii A^* este 1, atunci a_{n-1m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n-1m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana 1 a matricii A^* este 1, atunci a_{n1}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n1}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana 2 a matricii A^* este 1, atunci a_{n2}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n2}=1.
- $\cdots$
- Dacă produsul elementelor de pe coloana m-2 a matricii A^* este 1, atunci a_{nm-2}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{nm-2}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana m-1 a matricii A^* este 1, atunci a_{nm-1}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{nm-1}=1.

Deci, elementele a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{n-1m} de pe coloana a m-a a matricii A și elementele a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm-1} de pe linia a n-a a matricii A sunt bine de determinate. Mai trebuie să arătăm că și elementul a_{nm} de la intersecția liniei a n-a a matricii A cu coloana a m-a (a matricii A) este (și el) bine determinat. Mai întâi observăm că produsul tuturor elementelor primelor n-1 linii ale noii matrici A este $(-1)^{n-1}$, iar produsul tuturor elementelor primelor m-1 coloane ale noii matrici A este $(-1)^{m-1}$. Deoarece m și n au aceeași paritate, rezultă că produsul tuturor elementelor primelor n-1 linii ale noii matrici A este același cu produsul tuturor elementelor primelor m-1 coloane ale noii matrici A, și anume acest produs este:

$$(-1)^{m-1}=(-1)^{n-1}.$$

Această egalitate arată că, dacă P^* este produsul tuturor elementelor matricii A^*, atunci:

$$P^*\cdot a_{n1}\cdot a_{n2}\cdot\ldots\cdot a_{nm-1}=P^*\cdot a_{1m}\cdot a_{2m}\cdot\ldots\cdot a_{n-1m},$$

de unde rezultă că:

$a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \ldots \cdot a_{nm-1} = a_{1m} \cdot a_{2m} \cdot \ldots \cdot a_{n-1m}$,

adică, a_{mn} este (și el) bine determinat. În final, din modul de definire a celor două funcții, concluzionăm că ele sunt inverse una alteia, adică sunt bijecții și astfel, egalitatea (2) are loc. Conform egalităților (2) și (1),

$|M|=2^{(n-1)\cdot(m-1)}$.

4. *Punerea în funcţiune a unui nivel adecvat al motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii.* Cercetările din Didactica Matematicii au demonstrat forţa mobilizatoare şi eficienţa optimumului motivaţional în învăţarea Matematicii, care diferă de la o persoană la alta, în funcţie de particularităţile tipului de sistem nervos, de echilibrul temperamental şi emotiv, de capacităţile cognitive ale elevilor, toate acestea fiind raportate la dificultatea percepută sau anticipată a sarcinilor de învăţare a acestora. Optimumul motivaţional se leagă şi de trebuinţa de performanţă şi nivelul de aspiraţie al elevului, de capacitatea sa de autocunoaştere şi de evaluarea adecvată a dificultăţilor reale ale sarcinilor didactice. S-a constatat că în cazul anumitor elevi, supramotivarea poate avea aceleaşi efecte neadecvate ca şi submotivarea, şi anume apariţia descurajării şi a demobilizării la primul eşec; ba mai mult, unii elevi se pot demobiliza chiar după primul mare succes. Nivelurile foarte înalte ale impulsului cognitiv pentru Matematică pot inhiba (uneori) însuşirea cunoştinţelor matematice, deoarece „*punerea sub presiune*" a elevului care întâmpină, **de exemplu**, dificultăţi în rezolvarea unei probleme, va crea acestuia o stare anxiogenă. De fapt, probabilitatea supramobilizării este, în general, mai mare la elevii al căror comportament se caracterizează printr-un nivel ridicat de anxietate. De asemenea, s-a constat că stabilirea unor obiective operaţionale precise, posibil de atins, mai curând decât simplele îndemnuri generale adresate elevilor de a „*face tot ce pot*", sau mai mult decât „*controlul aversiv*", sunt utile pentru mobilizarea adecvată a elevilor care dispun de un nivel scăzut de motivaţie pentru învăţarea Matematicii.

5. *Dezvoltarea motivaţiei cognitive a elevilor pentru Matematică*, pentru ca aceştia să atingă competenţele gândirii logico - matematice şi să utilizeze, ori de câte ori este posibil, strategiile de raţionament matematic (operaţional - formal). Nu este de ajuns să ştim dacă un elev a atins, sau nu, nivelul competenţelor de raţionament formal, ci trebuie să ştim şi dacă el posedă motivaţia care să-l determine să utilizeze această competenţă. Rezultă că în activităţile didactice se impune, cu necesitate, un mediu instructiv - educativ de nuanţă formativă, care să stimuleze dezvoltarea motivaţiei cognitive şi a dorinţei şi voinţei elevilor de a stăpânii şi utiliza strategii de raţionament operaţional formal, convingându-i pe elevi că astăzi în activităţile profesionale se solicită tot mai mult asemenea competenţe.

6. *Utilizarea competiţiei, a întrecerilor - ca situaţii didactice motivogene în învăţarea Matematicii*. Aceste modalităţi se sprijină pe trebuinţa autoafirmării fiecărui elev, al unui grup, a colectivului clasei. Elevul poate fi determinat să intre în „*competiţie*" cu propriile sale realizări din trecut, cu anumite baremuri sau cu anumite etaloane ideale „*de perfecţiune*”. De mare utilitate, în acest sens, sunt întrecerile între clase, între şcoli, concursurile interjudeţene, olimpiadele, taberele judeţene sau naţionale de Matematică. Cercetările Didactici Matematicii recomandă utilizarea inteligentă a competiţiei între grupe omogene ale clasei, în condiţiile reprezentării unor sarcini de învăţare a căror natură este comună, dar diferă între ele prin numărul de cerinţe. De asemenea, practica şcolară a demonstrat că sunt utile şi întrecerile în care sarcinile didactice sunt prezentate sub forma unor teste de cunoştinţe care lasă libertatea alegerii de către elevi a unor itemi suplimentari, gradual mai dificili, mai complecşi, pe lângă itemii obligatorii. În aceste condiţii se antrenează şi se dezvoltă trebuinţele de performanţă şi nivelul de aspiraţie al elevilor, care sunt factori motivogeni puternici pentru învăţarea Matematicii.

7. *Dezvoltarea motivaţiei cognitive a elevilor pentru învăţarea Matematicii, în interrelaţie cu capacitatea acestora de trăire şi înţelegere a semnificaţiilor valorice (ştiinţifice, filosofice, morale, religioase, economice, estetice) ale cunoştinţelor matematice.* În procesul asimilării cunoştinţelor matematice, înţelegând principiile, legităţile şi explicaţiile ştiinţifice ale acestei discipline, elevii dobândesc treptat şi capacitatea de trăire şi înţelegere a semnificaţiilor valorice ale acestor cunoştinţe. În raport cu natura şi particularităţile cunoştinţelor asimilate, elevii devin capabili să-şi exprime opţiunile valorice:

- *ştiinţifice,*
- *filosofice,*
- *morale,* etc.,

despre aceste cunoştinţe. Acestea se sprijină pe motivaţia cognitivă a elevilor, dar şi pe capacitatea acestora de a sistematiza, abstractiza, generaliza şi utiliza cunoştinţele matematice însuşite.

III. Funcţiile mijloacelor tehnice de instruire la Matematică, în şcoală.

Barem de corectare şi notare:

- Prezentarea / descrierea funcţiilor **(1,50p)**

A vorbi despre locul şi rolul mijloacelor tehnice de instruire în procesul de predare - învăţare a Matematicii, înseamnă a lua în studiu şi funcţiile pe care acestea le îndeplinesc, în acest proces. Aceste funcţii sunt:

1. *Funcţia de comunicare*: Mijloacele tehnice de instruire, la Matematică, reprezintă instrumente de comunicare. Datorită lor profesorul dispune de facilităţi sporite pentru transmiterea cunoştinţelor, iar elevii beneficiază de posibilităţi, în plus, de receptare a unor conoştinţe mai cuprinzătoare. Se constituie astfel o cale mai economică de comunicare şi de însuşire a acestor cunoştinţe; o cantitate importantă de cunoştinţe este transmisă într-un timp foarte scurt şi în condiţii de eficienţă. Crescând densitatea de cunoştinţe, alături de economia de timp, se realizează o accelerare a muncii şcolare.

2. *Funcţia demonstrativă*: Această funcţie a mijloacelor tehnice derivă din faptul că ele asigură o bază perceptivă, concret senzorială mai bogată şi mai ilustrativă, în comparaţie cu mijloacele tradiţionale. Datorită dinamicii învăţământului matematic, procesul instructiv – educativ prin Matematică se desfăşoară adeseori în prezenţa a numeroase constângeri de structurare şi transmitere a mesajului, cum ar fi:

- *dorinţa profesorului de a prezenta*

sau

- *dorinţa elevului de a învăţa*

o anumită cantitate de cunoştinţe. Pentru a înlătura asemenea constângeri se recurge la substituirea obiectelor şi fenomenelor matematice prin altele mai accesibile, precum şi prin imagini (planşe, scheme, grafice), prin apelarea la mijloacele tehnice de instruire, căci ele prezintă avantajul comprimării sau decomprimării ritmului de desfăşurare a unui proces sau eveniment şi permit vizualizarea unor procese şi fenomene matematice ascunse observaţiei directe (**de exemplu:** comportarea unei funcţii în vecinătatea unui punct).

3. *Funcţia de motivare a învăţării şi de orientare a intereselor profesionale ale elevilor*: Imaginea audio - vizuală are o anumită încărcătură emoţională şi se adresează direct sensibilităţii elevului. Întotdeauna cele proiectate ori transmise audio - vizual stârnesc curiozitate, interes şi trebuinţă de a acţiona, creează momente de bună dispoziţie. Toate acestea contribuie la mobilizarea efortului elevului în procesul de predare - învăţare a Matematicii. De asemenea, prin intermediul mijloacelor tehnice elevii pot cunoaşte mai repede, mai bine şi mai mult despre diverse profesii, activităţi, preocupări, ceea ce contribuie şi la orientarea lor şcolară şi profesională.

4. *Funcţia formativă şi estetică*: Organizarea cronospaţială impusă pe care o pretinde comunicarea audio - vizuală obligă pe profesor la un plus de rigurozitate în sistematizarea cunoştinţelor, cu efecte benefice asupra structurilor cognitive ale elevilor. Elevii sunt exersaţi să analizeze, să comparare, să surprindă note esenţiale, ceea ce are drept efect sporirea capacităţilor de operare a proceselor gândirii. Pe lângă valenţele cognitive pe care le comportă fotografia, diapozitivul ori planşa, acestea angajează elevii în acte de percepere şi evaluare a esteticului raţionamentului matematic.

5. *Funcţia de evaluare a randamentului şcolar al elevilor*: Utilizarea unor dispozitive mecanice, electrice şi electronice în scopul de a verifica, evalua şi nota elevii nu reprezintă o noutate în aplicaţiile mijloacelor tehnice la procesul de instruire. Contribuţia acestora la optimizarea operaţiei de măsurare a progreselor şcolare este evidentă, cel puţin sub următoarele aspecte:

a) eliminarea factorilor perturbatori de natură subiectivă care intervin în verificare şi notare (efectul „*halo*”; influenţa preimaginii; efectul de ordine şi de contrast),x

b) amplificarea calităţilor diagnostice şi prognostice ale evaluării şi notării.

6. *Funcţia de şcolarizare substitutivă sau de realizare a învăţământului la / de la distanţă*: Această funcţie este îndeplinită, cu predilecţie, de televiziune şi de reţetele computerizate naţionale şi internaţionale. Învăţământul la distanţă răspunde unor cerinţe multiple de instruire şi educare.

Partea II - probleme

I. Fie m, n∈**N**, m≥2, n≥2. Să se calculeze suma:

$$E(m,n)=\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{m+1}{n}\right\}+\left\{\frac{m+2}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{m+n-1}{n}\right\}.$$

Rezolvare: Metoda 1: Din identitatea lui Hermite-Hadamard,

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[n\cdot x],$$

rezultă că, pentru $x=\frac{m}{n}$:

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{m+1}{n}\right]+\left[\frac{m+2}{n}\right]+\ldots+\left[\frac{m+n-1}{n}\right]=m,$$

de unde obținem că:

$$\frac{m}{n}-\left\{\frac{m}{n}\right\}+\frac{m+1}{n}-\left\{\frac{m+1}{n}\right\}+\frac{m+2}{n}-\left\{\frac{m+2}{n}\right\}+\ldots+\frac{m+n-1}{n}-\left\{\frac{m+n-1}{n}\right\}=m.$$

Deci, suma din enunț este egală cu $\frac{n-1}{2}$.

Metoda 2: Prin inducție după m arătăm că suma este $\frac{n-1}{2}$. Pentru m=0,

$$\left\{\frac{0}{n}\right\}=0,\qquad \left\{\frac{1}{n}\right\}=\frac{1}{n},\qquad \left\{\frac{2}{n}\right\}=\frac{2}{n},\qquad \ldots,\qquad \left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\frac{n-1}{n}.$$

Rezultă că suma este egală cu $\frac{n-1}{2}$. Presupunem că:

$$E(m,n)=\frac{n-1}{2}.$$

Atunci,

$$E(m+1,n)=\left\{\frac{m+1}{n}\right\}+\left\{\frac{m+2}{n}\right\}+\left\{\frac{m+3}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{m+n-1}{n}\right\}+\left\{\frac{m+n}{n}\right\}$$

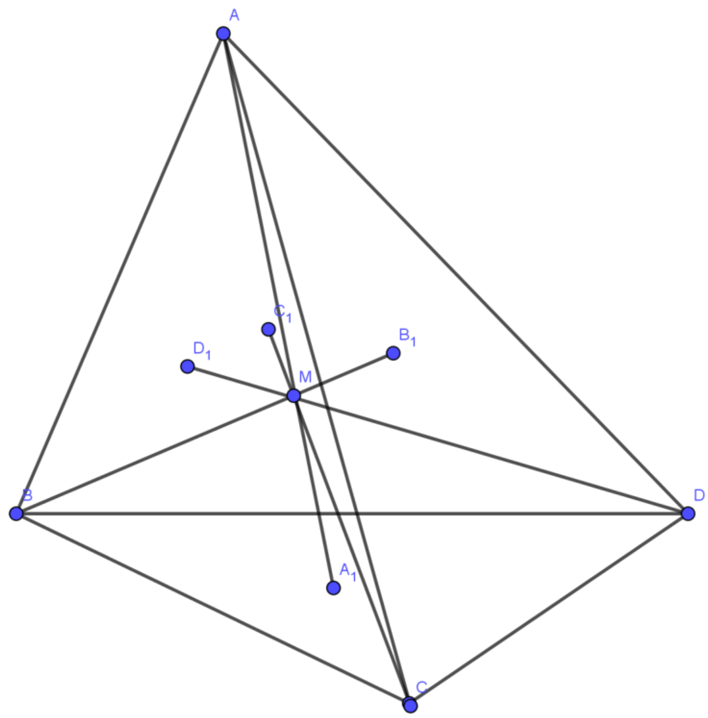
$$=\left\{\frac{m+1}{n}\right\}+\left\{\frac{m+2}{n}\right\}+\left\{\frac{m+3}{n}\right\}+\ldots+\left\{\frac{m+n-1}{n}\right\}+\left\{\frac{m}{n}+1\right\}$$

$$=E(m,n).$$

II. Fie M un punct interior piramidei triunghiulare ABCD şi $\{A_1\}=AM\cap(BCD)$, $\{B_1\}=BM\cap(ACD)$, $\{C_1\}=CM\cap(ABD)$, $\{D_1\}=DM\cap(ABC)$. Să se arate că:

$$\frac{MA_1}{MA}+\frac{MB_1}{MB}+\frac{MC_1}{MC}+\frac{MD_1}{MD}=\frac{4}{3} \text{ exact dacă } \frac{MA_1}{MA}=\frac{MB_1}{MB}=\frac{MC_1}{MC}=\frac{MD_1}{MD}=\frac{1}{3}.$$

***Rezolvare*:** Considerăm următoarea figură după datele din enunț:



Atunci:

$$\frac{MA_1}{MA}+\frac{MB_1}{MB}+\frac{MC_1}{MC}+\frac{MD_1}{MD}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{MA_1}{MA}+1+\frac{MB_1}{MB}+1+\frac{MC_1}{MC}+1+\frac{MD_1}{MD}+1=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA_1}{MA}+\frac{BB_1}{MB}+\frac{CC_1}{MC}+\frac{DD_1}{MD}=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA_1}{AA_1-MA_1}+\frac{BB_1}{BB_1-MB_1}+\frac{CC_1}{CC_1-MC_1}+\frac{DD_1}{DD_1-MD_1}=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(A,(BCD))}{d(A,(BCD))-d(M,(BCD))}+\frac{d(B,(ACD))}{d(B,(ACD))-d(M,(ACD))}+$$

$$\frac{d(C,(ABD))}{d(C,(ABD))-d(M,(ABD))}+\frac{d(D,(ABC))}{d(D,(ABC))-d(M,(ABC))}=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}-V_{MBCD}}+\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}-V_{MACD}}+\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}-V_{MABD}}+\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}-V_{MABC}}=\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot V_{ABCD}\cdot\left(\frac{1}{V_{ABCD}-V_{MBCD}}+\frac{1}{V_{ABCD}-V_{MACD}}+\frac{1}{V_{ABCD}-V_{MABD}}+\frac{1}{V_{ABCD}-V_{MABC}}\right)=16. \quad (1)$$

Dacă notăm:

$V=V_{ABCD}$, $V_1=V_{MBCD}$, $V_2=V_{MACD}$, $V_3=V_{MABD}$,

$V_4=V_{MABC}$,

atunci, egalitatea (1) devine:

$$[(V-V_1)+(V-V_2)+(V-V_3)+(V-V_4)]\cdot\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)=16, \ (2)$$

căci

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4.$$

Dar, din inegalitatea mediilor, rezultă că:

$$[(V-V_1)+(V-V_2)+(V-V_3)+(V-V_4)]\cdot\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)\geq 16. \ (3)$$

Deci, inegalitatea (3) devine egalitatea (2), ceea ce se întâmplă doar dacă:

$$(V-V_1)=(V-V_2)=(V-V_3)=(V-V_4) \Leftrightarrow V_1=V_2=V_3=V_4=\frac{V}{4}.$$

Conform celor demonstraste mai sus, ultimele egalități sunt echivalente cu:

$$\frac{d(A,(BCD))}{d(M,(BCD))}=\frac{d(B,(ACD))}{d(M,(ACD))}=\frac{d(C,(ABD))}{d(M,(ABD))}=\frac{d(D,(ABC))}{d(M,(ABC))}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA_1}{MA_1}=\frac{BB_1}{MB_1}=\frac{CC_1}{MC_1}=\frac{DD_1}{MD_1}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{BB_1-MB_1}{MB_1}=\frac{CC_1-MC_1}{MC_1}=\frac{DD_1-MD_1}{MD_1}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MA_1}=\frac{MB}{MB_1}=\frac{MC}{MC_1}=\frac{MD}{MD_1}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA_1}{MA}=\frac{MB_1}{MB}=\frac{MC_1}{MC}=\frac{MD_1}{MD}=\frac{1}{3}.$$

III. Fie funcția $f:[0,2]\to \mathbf{R}$, $f(x)=x^2\cdot[x^2]$.

a) Să se stabilească dacă f admite primitive pe [0,2].

b) Să se arate că f este integrabilă pe [0,2] și să se calculeze $\int_0^2 f(x)\cdot dx$.

***Rezolvare*: a)** Conform ipotezei,

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ dacă } x\in[0,1)\\ x^2, \text{ dacă } x\in\left[1,\sqrt{2}\right)\\ 2\cdot x^2, \text{ dacă } x\in\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right)\\ 3\cdot x^2, \text{ dacă } x\in\left[\sqrt{3},2\right)\\ 16, \text{ dacă } x=4\end{cases}.$$

Observăm că $\text{Im} f=\{0\}\cup[1,2)\cup[4,6)\cup[9,12)\cup\{16\}$; deci funcția f nu are Proprietatea lui Darboux, deci f nu admite primitive.

b) Conform punctului a), funcția f are un număr finit de puncte de discontinuitate pe [0,2], deci f este integrabilă pe acest interval. Pe de altă parte,

$$\int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^1 f(x)\cdot dx + \int_1^{\sqrt{2}} f(x)\cdot dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} f(x)\cdot dx + \int_{\sqrt{3}}^2 f(x)\cdot dx$$

$$= \int_0^1 0\cdot dx + \int_1^{\sqrt{2}} x^2\cdot dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\cdot x^2\cdot dx + \int_{\sqrt{3}}^2 3\cdot x^2\cdot dx$$

$$=8-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}-\sqrt{3}.$$