1.2.5 Organizarea conţinutului secvenţei de predare - învăţare la Matematică

Prin predarea Matematicii în şcoală înţelegem în mod curent *transmiterea de cunoştinţe matematice şi prezentarea de tehnici de muncă* cu aceste cunoştinţe.

Cunoştinţele matematice sunt informaţii ştiinţifice condensate - sub formă de:

- *reprezentări,*
- *noţiuni,*
- *principii,*
- *propoziţii matematice*:
  - *observaţii,*
  - *propoziţii,*
  - *leme,*
  - *teoreme,*
  - *corolare,*
  - *consecinţe,*
- *reguli de deducţie,* etc.

Informaţia esenţială despre o clasă de obiecte sau fenomene matematice este rezumată în noţiunile matematice, care sunt cuceriri ale activităţii cognitive şi practice ale omului în decursul procesului istoric. Definiţiile matematice selectează, din conţinutul noţiunilor, câteva note esenţiale, considerate a fi necesare şi suficiente pentru conturarea noţiunilor. Noţiunea matematică este o abstracţiune, în timp ce reprezentarea ei, în plan sau spaţiu, este o imagine figurală având un anumit grad de schematizare. Adesea, omul asociază noţiunilor, nu neaparat matematice, anumite imagini, ca şi în Geometrie, ceea ce conduce la formarea de concepte figurale. Şi la elevi întâlnim sistematic asemenea construcţii mintale în învăţarea Matematicii.

În predarea cunoştinţelor matematice se porneşte fie de la exemple şi / sau fapte concrete, pentru a se ajunge - prin analiză, sinteză şi generalizare - la definiţia noţiunii, sau la enunţul unei teoreme (aceasta este calea inductivă); fie că se introduc iniţial definiţii ori descrieri concise, care se ilustrează apoi cu ajutorul datelor concrete (aceasta fiind calea deductivă).

De exemplu:

1) *Prezentare inductivă*:

a) La introducerea fracţiilor se porneşte de la 1 - care reprezintă întregul, $\frac{1}{2}$ - jumătatea, $\frac{1}{3}$ - treimea, $\frac{1}{4}$ - sfertul, etc. ..., pentru a se ajunge la $\frac{1}{n}$, care este a n-a parte dintr-un întreg.

b) Considerăm o piramidă triunghiulară cu toate muchiile laterale congruente. Atunci observăm că înălţimea ei „*cade*” în centrul cercului circumscris triunghiului de la bază. Aceeaşi proprietate o are şi o piramidă patrulateră sau pentagonală. Din modul de demonstrare a acestui fapt, deducem că, în general, o piramidă care are toate muchiile laterale congruente are baza un poligon inscriptibil, iar înălţimea ei „*cade*” în centrul cercului circumscris bazei.

c) Cerem elevilor să calculeze limitele următoarelor şiruri:

i) $a_n=\dfrac{(2n)!}{n^n}$,

ii) $b_n=\dfrac{2^n\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$,

iii) $c_n=\dfrac{(n!)^2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$.

***Rezolvare*: i)** Calculăm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot(2\cdot n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{2\cdot(2\cdot n+1)}{3}>n.$$

Deci:

$$a_n>2\cdot(n-1)!\to\infty.$$

ii) De asemenea, calculăm:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{2\cdot n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\frac{2\cdot n+2}{2\cdot n+1}=1+\frac{1}{2\cdot n+1}.$$

Deci,

$$\frac{b_{n+1}}{b_1}>\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot n+1}\right)>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n+1}$$

$$=\gamma_{2\cdot n+1}+\ln(2\cdot n+1)-\frac{1}{2}\cdot(\gamma_n+\ln n)=\gamma_{2\cdot n+1}-\frac{1}{2}\cdot\gamma_n+\ln\frac{2\cdot n+1}{\sqrt{n}}.$$

Aşadar,

$$b_n>\gamma_{2\cdot n-1}-\frac{1}{2}\cdot\gamma_{n-1}+\ln\frac{2\cdot n-1}{\sqrt{n-1}}\to\infty.$$

Aici,

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

care este un şir convergent la γ – constanta lui Euler.

iii) În fine, şi aici, calculăm:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+1)^2}{2\cdot(2\cdot n+1)}>\frac{n}{4}.$$

Deci,

$$\frac{c_{n+1}}{c_1}>\frac{n!}{4^n}.$$

Aşadar,

$$c_n>\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)!}{4^{n-1}}.$$

Deoarece şirul $\dfrac{(n-1)!}{4^{n-1}}$ este crescător (pentru n>4) şi nemărginit, rezultă că $c_n\to\infty$.

Aşadar, calculând, în fiecare caz în parte, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se observă că aceasta este strict mai mare decât 1. Putem deduce de aici următoarea teoremă:

Teorema 1: *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există (în $\overline{R}$) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in(1,\infty)\cup\{\infty\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.*

2) *Prezentare deductivă*:

a) Definim noţiunea de funcţie injectivă şi apoi cerem elevilor să arate că următoarele funcţii sunt injective:

i) $f(x)=x+5$, $x\in\mathbf{R}$;

ii) $f(x)=x^3+3\cdot x-1$, $x\in\mathbf{R}$;

iii) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\in(-1,1)$.

b) La introducerea elementelor fundamentale de Geometrie, se poate proceda astfel: mai întâi acestea se definesc, fie şi numai intuitiv, iar apoi se prezintă exemple concrete de astfel de elemente.

c) Prezentăm mai întâi următoarea teoremă:

Teorema 2: *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\in(0,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.*

Apoi cerem elevilor să demonstreze (folosind această teoremă) că următoarele şiruri au limita 0:

i) $x_n=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3\cdot n+1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot 17\cdot\ldots\cdot(5\cdot n+2)}$,

ii) $y_n=\frac{2^n\cdot(n!)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$,

iii) $z_n=\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$.

***Rezolvare*: i)** Observăm că:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{3\cdot n+4}{5\cdot n+7}\to\frac{3}{5}\in(0,1).$$ Rezultă că, conform Teoremei 2, că $x_n\to 0$.

ii) De asemenea:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{n+1}{2\cdot n+1}\to\frac{1}{2}\in(0,1).$$ Rezultă că, conform Teoremei 2, că $y_n\to 0$.

iii) În fine,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{n+1}{2\cdot(2\cdot n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{e}{4}\in(0,1).$$ Rezultă că, conform Teoremei 2, că $z_n\to 0$.

Adeseori cele două procedee alternează, se imbină în diferite moduri.

De exemplu:

a) Se prezintă inductiv noţiunea de fracţie şi apoi deductiv pe cel de fracţie subunitară, respectiv fracţie supraunitară.

b) Din teorema: „*Orice suprafaţă poligonală convexă cu n laturi se poate descompune în n-2 suprafeţe triunghiulare*”, $(n \in \mathbf{N},\ n \geq 3)$, deducem (în mod deductiv) suma unghiurilor interioare unui patrulater, pentagon, hexagon, etc., pentru ca apoi, inductiv, să obţinem (pornind de la triunghi, patrulater, pentagon, etc.) suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex cu n laturi.

c) Combinăm exemplele 1)c) şi 2)c) de mai sus (nu are importanţă ordinea).

Prezintă interes în acest context al predării cunoştinţelor matematice următoarele aspecte:

- *aportul informaţional al exemplelor şi contra - exemplelor* prezentate,
- *articularea lor în anumite secvenţe de instruire,*
- *alternanţa între enunţurile teoretice şi exemple / contra - exemple,*
- *rolul schemelor*,

respectiv

- *al modelelor,*

în actul didactic.

În actul predării profesorul trebuie să facă distincţie între exemplele care ilustrează nemijlocit o noţiune sau o legitate matematică, având valoare de prototip şi exemplele de contrast, de diferenţiere sau contra - exemplele, care relevă prin opoziţie ceea ce nu constituie sau nu aparţine unui anumit concept.

De exemplu:

a) Se prezintă exemple de funcţii surjective şi exemple de funcţii care nu sunt surjective.

b) Se prezintă exemple de pătrate şi exemple de patrulatere care nu sunt pătrate;

c) Se prezintă exemple de şiruri convergente monotone şi / sau nemonotone.

Explicarea procesului de gândire matematică la elevi apare mult înlesnită dacă se ia ca proces de bază percepţia, cu cele două subprocese fundamentale ale sale. Astfel, primul proces care are loc în gândirea elevului sesizează generalul, esenţialul din obiectele / fenomenele prezentate, în timp ce al doilea proces reflectă individualul, fiind imaginea unui obiect particular. Această opţiune în prezentarea conceptului de gândire matematică impune alegerea exemplelor şi contra - exemplelor corespunzătoare unei anumite situaţii.

Cantonarea noţiunilor în exemple - prototip folosite la lecţie va duce la îngustarea conţinutului noţiunilor ce se formează la elevi. Astfel, la Geometrie, mulţi elevi concep o înălţime a triunghiului ca fiind întotdeauna interioară acestuia şi sunt derutaţi în faţa unui triunghi având un unghi obtuz, la care înălţimile corespunzătoare unghiurilor ascuţite sunt în afara triunghiului. De asemenea,

- triunghiul dreptunghic nu este recunoscut de unii elevi decât într-o anumită aşezare standard - cu unghiul drept la bază („*jos în stânga*”) (vezi Fig. 1);
- rombul este recunoscut numai dacă este aşezat pe unul din vârfuri (şi nu pe una din laturi) (vezi Fig. 2);

- ➢ până în clasa a VII-a, o parte din elevi sunt convinşi că cercul are numai două diametre, ca şi în Fig. 3.

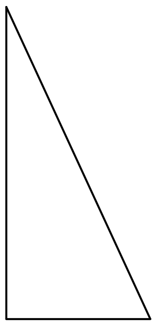


Fig. 1

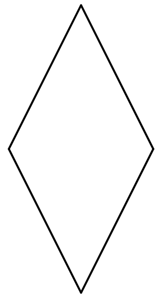


Fig. 2

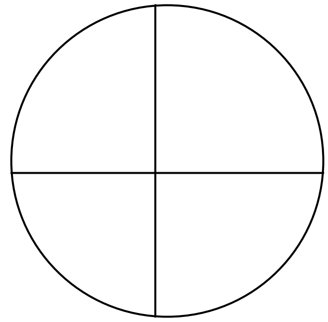


Fig. 3

Tot în acest context amintim (şi) faptul că mulţi elevi de liceu confundă funcţiile cu proprietatea lui Darboux, deci şi a cele care admit primitive, cu cele continue. Această ultimă afirmaţie o justificăm astfel: în fiecare an cer studenţilor să rezolve următoarele exerciţii, sau asemănătoare acestora:

Exerciţiul 1: *Se consideră funcţia f :* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, dată de legea:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea parametrului real a, astfel încât funcţia f să admită primitive pe ***R****.*

În general, din păcate cu foarte rare excepţii, întâlnesc următoarea rezolvare:

„*Impunem condiţia asupra funcţiei f să fie continuă în punctul x=0. În acest caz, f va fi continuă pe* ***R****, a=2 şi f admite primitive*”.

Desigur că, din punct de vedere al modului de raţionament, „*soluţia*” de mai sus este greşită, căci pentru ca o funcţie să admită primitive pe un interval nu trebuie ca ea să fie (neaparat) continuă pe acel interval. Ca să îi conving pe studenţi de acest lucru, le cer să rezolve şi următorul exerciţiu:

Exerciţiul 2: *Se consideră funcţia g :* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, dată de legea:*

$$g(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ b, x = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea parametrului real b, astfel încât funcţia g să admită primitive pe ***R****.*

La această a doua problemă, deoarece funcţia g nu poate fi continuă, pentru nici o valoare a lui $b\in\mathbf{R}$, majoritatea studenţilor observând că g nu are nici măcar limită în punctul 0, nu dau nici o rezolvare.

În concordanţă cu a 8 - a „*poruncă*” a lui G. Polya, soluţiile corecte sunt următoarele:

Rezolvarea Exerciţiului 1: Considerăm funcţiile:

h, k : **R** → **R**,

unde:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, x \neq 0\\ 2, x=0\end{cases} \qquad \text{şi} \qquad k(x)=\begin{cases}0, x \neq 0\\ a-2, x=0\end{cases}.$$

Atunci

f=h+k

şi h admite primitive, deoarece este continuă. Rezultă că funcția f admite primitive pe **R** dacă şi numai dacă funcția k admite primitive pe **R**; (aici desigur că profesorul trebuie să ştie că mulţimea funcţiilor care admit primitive pe un interval este un spaţiu vectorial real). În acest caz, funcția k are proprietatea lui Darboux pe **R**, deci Imk este un interval. Deoarece:

Imk={0, a-2},

rezultă că:

a=2

este singura soluţie a exerciţiului.

Rezolvarea Exerciţiului 2: Procedăm ca şi la Exerciţiul 1), considerăm funcţiile:

p, q : **R** → **R**,

unde:

$$p(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, \qquad \text{iar} \qquad q(x)=\begin{cases}0, x \neq 0\\ b, x=0\end{cases}.$$

În acest caz,

g=p+q,

unde p admite primitive, chiar dacă nu este continuă. Raţionând ca şi mai sus obţinem soluţia:

b=0.

Se impune aici o observaţie: în general elevii / studenţii ştiu că:

„*o funcţie*

$f : I \to \boldsymbol{R}$

are proprietatea lui Darboux pe un interval I dacă şi numai dacă transformă orice subinterval J al lui I tot într-un interval”.

Dacă, însă, nu se cunoaşte faptul că în afirmaţia precedentă f(J) poate fi şi un interval degenerat, adică o mulţime formată dintr-un singur punct, atunci se poate ajunge la următoarea contradicţie: elevii / studenţii observă că:

a=2, respectiv b=0

sunt soluţii ale celor două exerciţii, dar urmând logica expusă de noi, observă că nu există nici o valoare a lui a, respectiv b, pentru care Imk, respectiv Imq să fie intervale; deci cele două exerciţii nu au nici o soluţie, şi totuşi au soluţiile prezentate mai sus.

În toate cazurile mai sus menţionate, cuprinderea în conţinutul noţiunii a unor elemente figurale şi neesenţiale, este consecinţa ilustrării noţiunilor respective printr-un material intuitiv prea puţin diversificat, pentru a înlesni separarea aspectelor esenţiale de cele neesenţiale. Pe de altă parte, limitarea gândirii elevilor la un singur model sau raţionament este datorată lipsei unui număr corespunzător de exerciţii, exemple şi contra - exemple (care pot fi considerate şi ca şi exerciţii). Pentru însuşirea cât mai temeinică a noţiunilor prezentate, profesorul trebuie să stăpânească forme succesive de exemple - prototip şi contra - exemple, pentru a introduce aceleaşi noţiuni pe trepte diferite de complexitate, complicând progresiv aspectul lor intuitiv.

De exemplu,

- Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, neinversabile, astfel încât $f \circ f = f$?
- Există funcții $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, neinversabile, astfel încât $g \circ g \neq g$, dar $g \circ g \circ g = g$?

Răspuns: Da, există astfel de funcții.

De exemplu, funcțiile:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{, dacă } x \in Q \\ \sqrt{2}, & \text{dacă } x \notin Q \end{cases}$$

și

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{, dacă } x \notin Q \\ \sqrt{2}, & \text{dacă } x \in Q \end{cases},$$

satisfac la cerințele de mai sus.

Un loc recunoscut în introducerea noţiunilor matematice în şcoală îl au modelele, schemele, decupajele din realitate, toate acestea fiind privite ca „*reprezentări figurale ale cunoştinţelor matematice*” şi întrunind cel puţin două note definitorii:

a) *caracterul figural*, adică utilizarea de forme şi dimensiuni, în prezentarea noţiunilor,

b) *caracterul generalizat*, în sensul de a reda însuşiri valabile pentru o întreagă categorie de obiecte sau fenomene matematice.

Schemele, modelele, machetele şi decupajele din realitate, utilizate în predarea – învăţarea Matematicii, întruchipează abstractul în formă concretă, înlesnind, astfel, desprinderea unor elemente esenţiale ale obiectelor studiate, fapt care conduce la o lărgire a câmpului de penetrare obişnuit al elevului.

Însuşirea noţiunilor noi nu se face pe un fond vid de cunoştinţe (vechi), ci presupune stăpânirea unor reprezentări sau noţiuni anterioare (numite „*noţiuni ancoră*”), care să ofere premise pentru însuşirea noilor cunoştinţe.

De exemplu:

i) asimilarea noţiunii de funcţie inversabilă presupune cunoaşterea şi stăpânirea noţiunilor de:

- *mulţime,*
- *funcţie,*
- *funcţie injectivă,*
- *funcţie surjectivă,*

- *funcţie bijectivă,*
- *compunerea funcţiilor,*
- *funcţie identică a unei mulţimi*;

ii) pentru asimilarea noţiunii de pătrat trebuie cunoscute următoarele noţiuni:
- *segment de dreaptă,*
- *linie frântă,*
- *unghi,*
- *patrulater,*
- *paralelogram,*
- *unghi drept,*
- *drepte paralele,*
- *drepte perpendiculare,*
- *dreptunghi (sau romb)*;

iii) pentru însuşirea conceptului de şir convergent trebuie cunoscute următoarele concepte:
- *şir de numere reale,*
- *şir monoton,*
- *margine inferioară*

şi
- *margine superioară a unui şir,*
- *şir mărginit,*
- *limită a unui şir*.

Un anumit C.N.M., un set de noţiuni matematice, pot fi asimilate de o parte din elevi, şi mai de timpuriu, dar aceasta cere un efort şi un timp mult prea mare pentru asimilarea lor, în sensul că relaţia dintre efortul depus de elevi pentru însuşirea lor şi rezultatul aşteptat de la ei, nu mai este liniară. Învăţarea prematură a Matematicii este însoţită adesea de şanse mari de eşec, de unde rezultă, apoi, în replică, atitudinea negativă, a elevilor, faţă de Matematică.

O noţiune matematică se consideră accesibilă unei clase de elevi, când întruneşte cel puţin 66% reuşită în primul test de verificare. Aici prin „*reuşită*" înţelegem răspunsuri corecte la întrebări sau probleme de nivel cel mult mediu. Când procentul de reuşită este mai mic, apar semne de întrebare, în sensul că:

sau
- *transmiterea mesajelor nu s-a făcut cum trebuie,*

sau
- *receptarea lor a fost defectuoasă*,

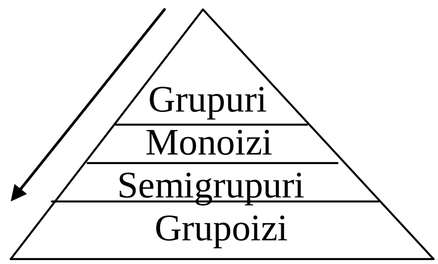
sau
- *factorii pertubatori au afectat foarte tare procesul comunicării,*

iar când acest procent este de cel puţin 80%, atunci se poate afirma că introducerea noţiunii respective este o reuşită.

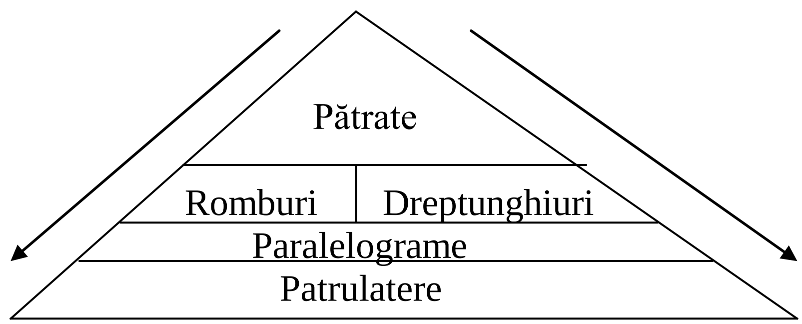
În sfârşit, procesul de comunicare, de transmitere a cunoştinţelor, de către profesor, nu se încheie cu dezvăluirea conţinutului noţiunilor - prin definiţii sau descrieri concise, etc. - ci presupune totodată şi încadrarea, situarea lor în *sistemul de noţiuni conexe*, şi desigur în conceptul care le înglobează. Secvenţele de predare se articulează astfel, formând *sisteme noţionale (informaţionale)*; rezultatul obţinut nu este un mozaic noţional (informaţional), ci o structură noţională (informaţională) cu o ierarhie bine definită, **de exemplu:** o structură cognitivă de tip piramidal sau circular.

Iată câteva exemple de acest fel de structuri:

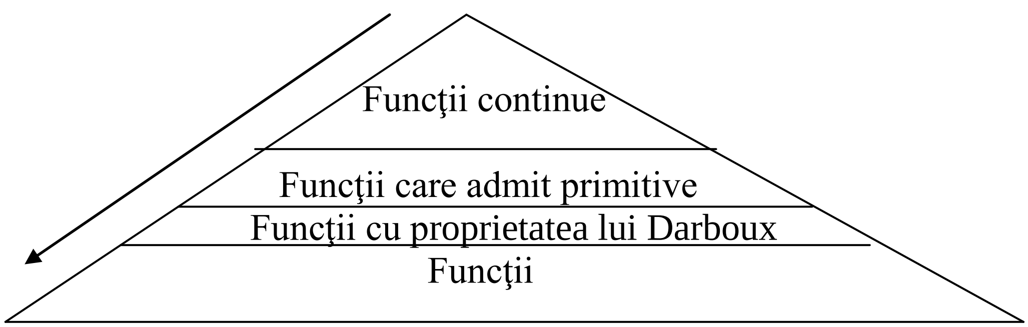
a)



b)



c)



Modul de articulare şi sistematizare a cunoştinţelor poate lua, astfel, forma încadrării într-o reţea semantică, adică într-o clasificare (taxonomie) bazată pe raporturi ierarhice, care de fapt exprimă şi „*direcţia*” de transmitere a proprietăţilor (în figurile de mai sus acesta este indicată prin săgeţi), menită să contureze în mintea elevului corelaţiile dintre cunoştinţe, căci o noţiune matematică capătă contururi precise numai în funcţie de toate elementele cărora ea le este opusă, în care este înglobată sau pe care ea le înglobează. Prin urmare, stăpânirea unei noţiuni matematice (atât de către profesor, cât şi de către elev), comportă situarea ei în complexul relaţiilor ierarhice, şi a relaţiilor pe orizontală. Corelaţiile dintre concepte îmbracă astfel forma aportului direct de informaţie, ca şi în definiţie (unde o noţiune se descrie prin intermediul altora), dar şi aspectul raporturilor de contrast, de diferenţiere sau opoziţie, când aportul informaţional apare în efectele de clarificare reciprocă, de delimitare precisă a conceptelor.