SEMINAR D.M. 12

2.36 Toate specialitățile (restanțe, 2007)

I. Fie A$\in\mathcal{M}_{3,2}$(**R**) şi B$\in\mathcal{M}_{2,3}$(**R**). Să se calculeze det(BA), dacă:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

***Rezolvare*:** Din egalitatea (i) rezultă că:

$$(A\cdot B)^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Atunci:

$$\text{rang}((A\cdot B)^2)=2=\text{rang}(A\cdot(B\cdot A)\cdot A)\le\text{rang}(B\cdot A)\le 2, \tag{2}$$

ultima inegalitate de la (2) are loc, deoarece B·A$\in\mathcal{M}_{2,2}$(**R**). Deci,

$$\text{rang }(B\cdot A)=2, \tag{3}$$

și, astfel, matricea BA este inversabilă. Pe de altă parte,

$$(A\cdot B)^3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Deci, din egalitățile (i), (1) și (4), rezultă că:

$$(A\cdot B)^3-3(A\cdot B)^2+2(A\cdot B)=0. \tag{5}$$

Înmulțim egalitatea (5) cu B, din stânga și cu A, din dreapta și obținem:

$$B\cdot A\cdot B\cdot A\cdot B\cdot A\cdot B\cdot A\text{-}B\cdot A\cdot B\cdot A\cdot B\cdot A+2\cdot B\cdot A\cdot B\cdot A=0,$$

adică:

$$(B\cdot A)^4-3\cdot(B\cdot A)^3+2\cdot(B\cdot A)^2=0. \tag{6}$$

Această ultimă egalitate o înmulțim cu $(B\cdot A)^{-2}$ și obținem:

$$(B\cdot A)^2-3\cdot(B\cdot A)+2\cdot I_2=0. \tag{7}$$

Dar, din Teorema lui Cayley - Hamilton pentru matrici de ordinul 2, știm că:

$$(B\cdot A)^2-\text{tr}(B\cdot A)\cdot(B\cdot A)+\det(B\cdot A)\cdot I_2=0. \tag{8}$$

Notăm:

tr(B·A)=t și det(B·A)=d.

Cu aceste notații, egalitatea (8) devine:

$$(B\cdot A)^2-t\cdot(B\cdot A)+d\cdot I_2=0. \qquad (9)$$

Din egalitățile (7) și (9) rezultă că:

$$(t-3)\cdot(B\cdot A)=(d-2)\cdot I_2. \qquad (10)$$

Acum, din egalitatea (10), rezultă că: dacă $d\neq 2$, atunci $t\neq 3$ și:

$$B\cdot A=\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2. \qquad (11)$$

Atunci,

$$(A\cdot B)^2=A\cdot(B\cdot A)\cdot B$$

$$=A\cdot\frac{d-2}{t-3}\cdot I_2\cdot B=\frac{d-2}{t-3}\cdot A\cdot B. \qquad (12)$$

Acum, din egalitățile (i), (1) și (12) rezultă că:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{d-2}{t-3} \\ -1=\dfrac{d-2}{t-3} \end{cases},$$

ceea ce este imposibil. Rezultă că:

$d=2$ și $t=3$.

Altfel: Fie $p_{A\cdot B}(t)$ și $p_{B\cdot A}(t)$ polinoamele caracteristice ale matricelor $A\cdot B$, respectiv $B\cdot A$. Atunci avem următoarea relație valabilă pentru orice t număr complex:

$$p_{A\cdot B}(t)=t\cdot p_{B\cdot A}(t). \qquad (13)$$

Se calculează ușor polinomul caracteristic al matricei AB:

$$p_{A\cdot B}(t)=\det(A\cdot B-t\cdot I_3)=-t^3+3\cdot t^2-2\cdot t. \qquad (14)$$

Din cele două relații obținem:

$$p_{B\cdot A}(t)=-t^2+3\cdot t-2. \qquad (15)$$

Valorile proprii ale matricei $B\cdot A$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic, deci 1 și 2. Cum $\det(B\cdot A)$ este egal cu produsul valorilor proprii ale matricei $B\cdot A$ obținem că:

$$\det(B\cdot A)=2.$$

II. Fie H ortocentru triunghiului ascuţitunghic ABC. Pe semidreptele (HA, (HB şi (HC se consideră punctele D, E şi F astfel încât:

HD=BC, HE=AC şi HF=AB.

Să se arate că:

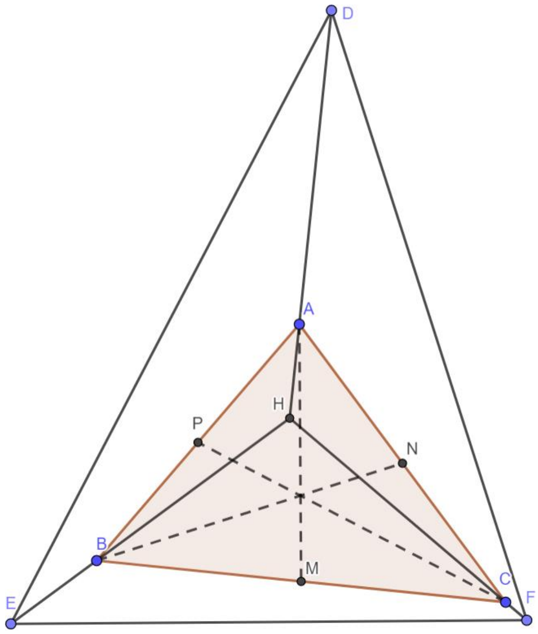
a) dacă M, N şi P sunt mijloacele laturilor [BC], [CA], respectiv [AB], atunci:

DE=2CP, EF=2AM și DF=2BN.

b) H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

***Rezolvare*:** Putem folosi oricare din figurile de mai jos. Din ipoteză și din Teorema cosinusului aplicată în triunghiul ABC, obținem:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos(\sphericalangle ABC)=HE^2+DH^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle ABC). \quad (1)$$



Aceeași teorema a cosinusului, aplicată în triunghiul DEH, ne dă egalitatea:

$$DE^2=HE^2+HD^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle DHE). \quad (2)$$

Aplicând teorema medianei în triunghiul ABC și ținând cont de ipoteză, obținem:

$$4\cdot PC^2=2\cdot AC^2+2\cdot BC^2-AB^2=2\cdot HE^2+2\cdot HD^2-AB^2. \quad (3)$$

Avem de arătat că:

$$DE=2\cdot CP, \qquad EF=2\cdot AM \qquad \text{și} \qquad FD=2\cdot BN. \quad (ii)$$

Prima egalitate de la (ii) este echivalentă cu:

$$DE^2=4\cdot PC^2. \quad (4)$$

În baza egalităților (2) și (3), egalitatea (4) este echivalentă cu:

$$HE^2+HD^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle DHE)=2\cdot HE^2+2\cdot HD^2-AB^2. \quad (5)$$

Acum, ținând cont de a doua egalitate de la (1), egalitatea (5) devine:

$$HE^2+HD^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle DHE)=HE^2+HD^2+2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle ACB). \quad (6)$$

Așadar, egalitatea (6) are loc, exact dacă:

$$-\cos(\sphericalangle DHE)=\cos(\sphericalangle ACB), \quad (7)$$

ceea ce este adevărat exact dacă:

$$m(\sphericalangle ACB)+m(\sphericalangle DHE)=180°. \quad (8)$$

Notăm cu A′ piciorul perpendicularei din A pe BC și cu B′ piciorul perpendicularei din B pe AC. Atunci, egalitatea (10) este echivalentă cu:

$$m(\sphericalangle ACB)+m(\sphericalangle D'HE')=180°. \qquad (9)$$

relație care este adevărată deoarece patrulaterul CB′HA′ este inscriptibil. Deci, prima egalitate de la (5) are loc. Celelalte două egalități, de la (5), se demonstrează analog.

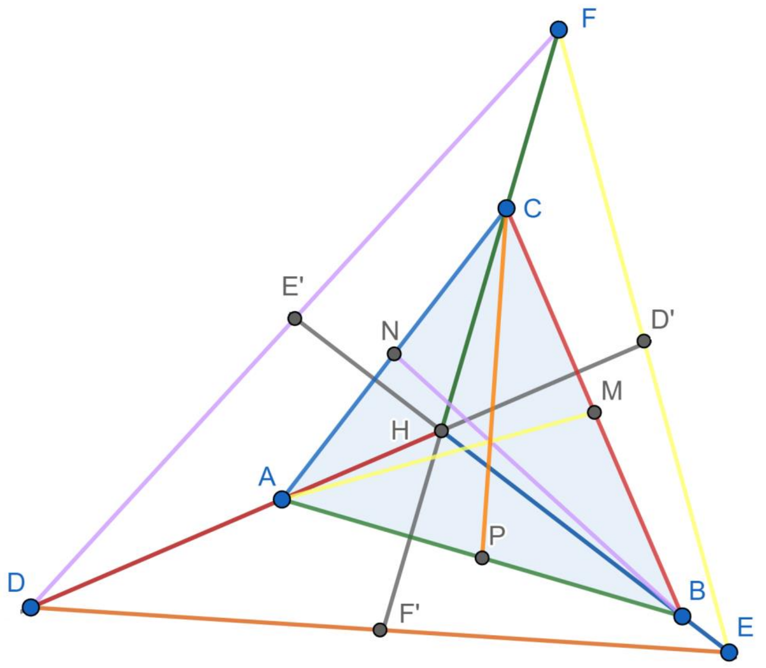
***Altfel*:** Utilizăm oricare din figurile de mai jos. Din egalitățile (1), (2) și (i), obținem:

$$\begin{aligned} DE^2 &= HE^2+HD^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(\sphericalangle DHE)\\ &= HE^2+HD^2-2\cdot DH\cdot HE\cdot\cos(180°-\sphericalangle A).\\ &= BC^2+AC^2+2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle A)\\ &= BC^2+AC^2+BC^2+AC^2-AB^2\\ &= 4\cdot PC^2. \end{aligned}$$

Analog obținem că:

$$EF^2=4\cdot AM^2 \qquad \text{și} \qquad DF^2=4\cdot BN^2.$$

b) În triunghiul DEF fie DD′, EE′ și FF′ mediane, cu $D'\in EF$, $E'\in FD$ și $F'\in DE$. Atunci, HD′, HE′ și HF′ sunt mediane în triunghiurile EHF, DHF, respectiv DHE. Deci, H este centrul de greutate al triunghjiului DEF exact dacă este intersecția medianelor acestui triunghi. Conform Teoremei medianei și celor arătate la punctul a),



$$FF'^2 = \frac{2\cdot(DF^2+FE^2)-DE^2}{4}$$

$$= \frac{2\cdot(4\cdot BN^2+4\cdot AM^2)-4\cdot PC^2}{4}$$

$$= \frac{2\cdot(4\cdot BN^2+4\cdot AM^2)-4\cdot PC^2}{4}$$

$$=2\cdot(BN^2+AM^2)-PC^2$$

$$=2\cdot\left(\frac{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}{4}+\frac{2\cdot(a^2+c^2)-b^2}{4}\right)-\frac{2\cdot(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$= \frac{9\cdot c^2}{4}. \qquad (10)$$

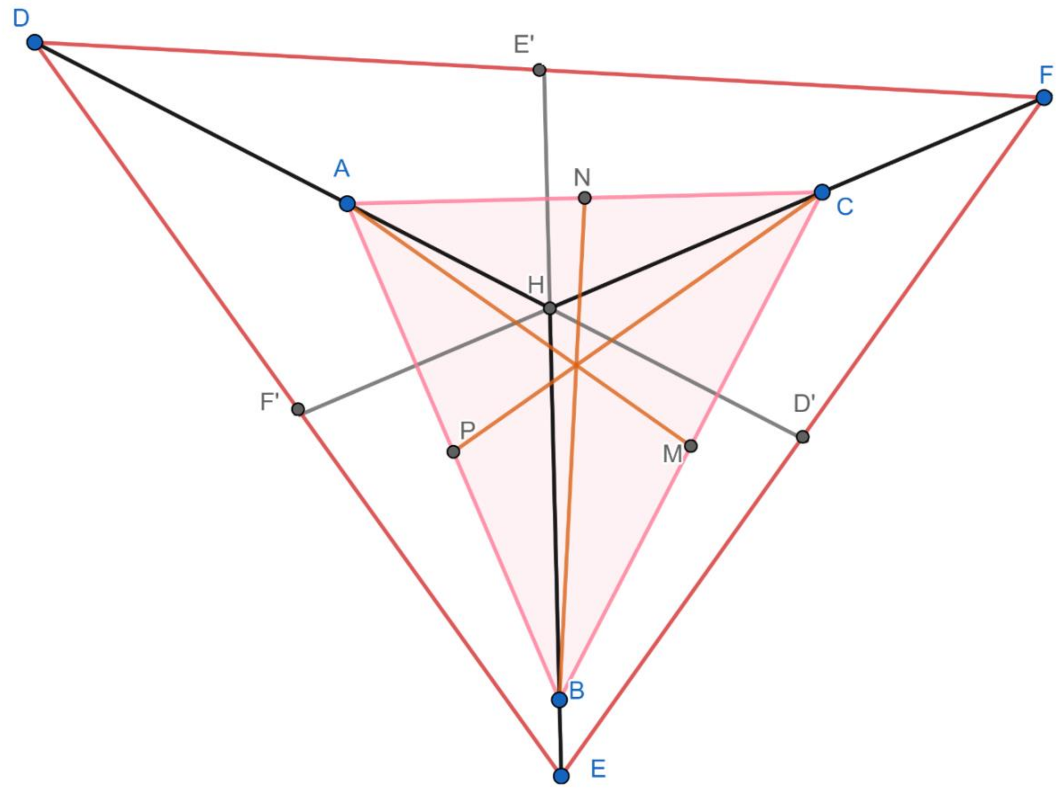
Pe de altă parte,

$$HF'^2 = \frac{2\cdot(HD^2+HE^2)-DE^2}{4}$$

$$= \frac{2\cdot(a^2+b^2)-4\cdot PC^2}{4}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2}-\frac{2\cdot(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$= \frac{c^2}{4}. \qquad (11)$$



Din egalitățile (10) și (11) rezultă că:

$$FH+HF'=FF',$$

ceea ce arată că $H\in FF'$. Analog se arată că $H\in DD'$ și $H\in EE'$. Deci, H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

***Altfel*: a)** Folosim figura de mai jos. Arătăm că:

$$DE=2\cdot CP.$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC; astfel obținem:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot \cos(\sphericalangle ACB). \tag{12}$$

Folosind ipoteza, avem:

$$AB^2=HE^2+HD^2-2\cdot HD\cdot HE\cdot \cos(\sphericalangle ACB). \tag{13}$$

Aplicâm teorema cosinusului în triunghiul DEH; obținem astfel:

$$DE^2=HE^2+HD^2-2\cdot HE\cdot HD\cdot \cos(\sphericalangle DHE). \tag{14}$$

Aplicând teorema medianei în triunghiul ABC, avem:

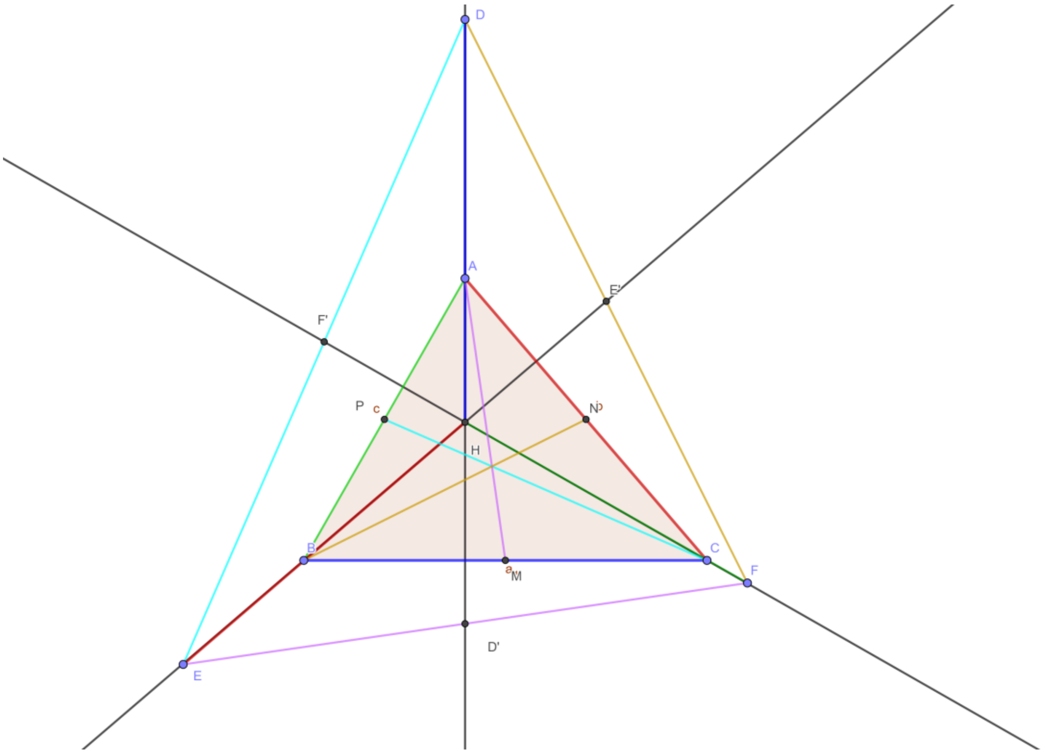
$$4\cdot PC^2=2\cdot(AC^2+BC^2)-AB^2. \tag{15}$$

Folosind ipoteza, obținem:

$4 \cdot PC^2 = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HD^2 - AB^2.$ (16)

Folosind egalitățiile (14) și (16) avem:

$DE^2 = 4 \cdot PC^2$ exact dacă $HE^2 + HD^2 - 2 \cdot HE \cdot HD \cdot \cos(\sphericalangle DHE) = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HD^2 - AB^2.$



Folosind (13) avem:

$$HE^2 + HD^2 - 2 \cdot HE \cdot HD \cdot \cos(\sphericalangle DHE) = HE^2 + HD^2 + 2 \cdot HD \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle ACB). \quad (17)$$

Egalitatea (17) are loc dacă:

$-\cos(\sphericalangle DHE) = \cos(\sphericalangle ACB)$ adică: $\cos(\sphericalangle ACB) + \cos(\sphericalangle DHE) = 0,$

ceea ce este adevărat doar dacă:

$$m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle DHE) = 180°. \quad (18)$$

Atunci, din egalitățile (14) și (18), obținem:

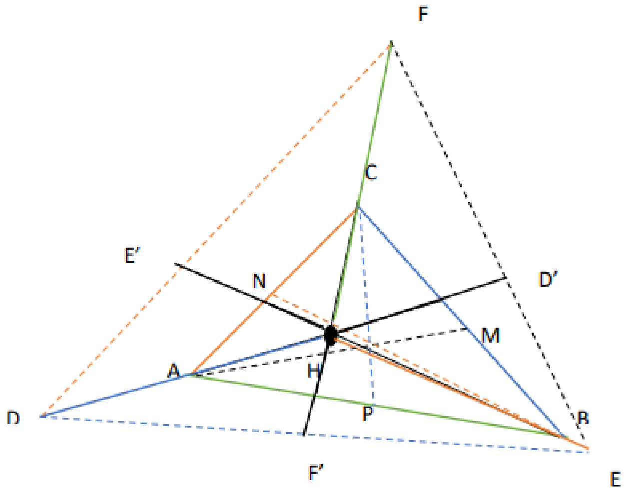
$$DE^2 = HE^2 + HD^2 - 2 \cdot HE \cdot HD \cdot \cos(\sphericalangle DHE) = HE^2 + HD^2 + 2 \cdot HE \cdot HD \cdot \cos(\sphericalangle ACB).$$

Folosind teorema cosinusului avem:

$$DE^2 = BC^2 + AC^2 + BC^2 + AC^2 - AB^2 = 4 \cdot PC^2,$$

deci, are loc prima egalitate de la (ii). Analog, se demonstrează și celelalte două egalități.

Altfel: Folosim figura de mai jos.



Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC și, ținând cont de ipoteză, obținem

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ACB) = HE^2 + DH^2 - 2 \cdot HE \cdot DH \cdot \cos(\sphericalangle ACB) \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ABC) = HF^2 + DH^2 - 2 \cdot HF \cdot DH \cdot \cos(\sphericalangle ABC) \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle CAB) = HF^2 + HE^2 - 2 \cdot HF \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle CAB) \end{cases} (*)$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul DEH, EFH, respectiv FDH și obținem:

$$\begin{cases} DE^2 = HE^2 + HD^2 - 2 \cdot DH \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle DHE) \\ EF^2 = HE^2 + HF^2 - 2 \cdot HF \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle FHE) \\ DF^2 = DH^2 + HF^2 - 2 \cdot DH \cdot HF \cdot \cos(\sphericalangle DHF) \end{cases} (**)$$

Aplicăm teorema medianei în triunghiul ABC și, ținând cont de ipoteză, obținem:

$$\begin{cases} 4 \cdot PC^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BC^2 - AB^2 = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HD^2 - AB^2 \\ 4 \cdot AM^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot AB^2 - BC^2 = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HF^2 - BC^2 \\ 4 \cdot BN^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2 = 2 \cdot HF^2 + 2 \cdot HD^2 - AC^2 \end{cases} (***)$$

Notăm cu A′, B′, C′ picioarele perpendicularelor duse din A pe BC, B pe AC, respeciv C pe AB.

Atunci avem următoarele echivalențe:

$$DE = 2 \cdot CP \Leftrightarrow DE^2 = 4 \cdot PC^2 \xLeftrightarrow{(**),(***)}$$

$$HE^2 + HD^2 - 2 \cdot DH \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle DHE) = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HD^2 - AB^2$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} HE^2 + HD^2 - 2 \cdot DH \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle DHE) = HE^2 + DH^2 + 2 \cdot HE \cdot DH \cdot \cos(\sphericalangle ACB)$$

$$\Leftrightarrow -\cos(\sphericalangle DHE) = \cos(\sphericalangle ACB).$$

Rezultă că:

$$m(\sphericalangle DHE) + m(\sphericalangle ACB) = 180°, \quad \text{deci:} \quad m(\sphericalangle D'HE') + m(\sphericalangle ACB) = 180°;$$

ultima egalitate fiind adevărată deoarece CB'HA' este patrulater inscriptibil. Pe de altă parte:

$$EF = 2 \cdot AM \Leftrightarrow EF^2 = 4 \cdot AM^2$$

$$\xLeftrightarrow{(**),(***)} HE^2 + HF^2 - 2 \cdot HF \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle FHE) = 2 \cdot HE^2 + 2 \cdot HF^2 - BC^2$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} HE^2 + HF^2 - 2 \cdot HF \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle FHE) = HF^2 + HE^2 + 2 \cdot HF \cdot HE \cdot \cos(\sphericalangle CAB) \Leftrightarrow$$

$$-\cos(\sphericalangle FHE) = \cos(\sphericalangle CAB).$$

Rezultă că:

$$m(\sphericalangle FHE) + m(\sphericalangle CAB) = 180°; \quad \text{deci:} \quad m(\sphericalangle F'HE') + m(\sphericalangle CAB) = 180°;$$

ultima egalitate fiind adevărată deoarece AB’HC’ este patrulater inscriptibil.

$$DF = 2 \cdot BN \Leftrightarrow DF^2 = 4 \cdot BN^2$$

$$\overset{(**),(***)}{\Longleftrightarrow} DH^2 + HF^2 - 2 \cdot DH \cdot HF \cdot \cos(\sphericalangle DHF) = 2 \cdot HF^2 + 2 \cdot HD^2 - AC^2$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} DH^2 + HF^2 - 2 \cdot DH \cdot HF \cdot \cos(\sphericalangle DHF) = DH^2 + HF^2 + 2 \cdot DH \cdot HF \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$$

$$\Leftrightarrow -\cos(\sphericalangle DHF) = \cos(\sphericalangle ABC).$$

Rezultă că:

$$m(\sphericalangle DHF) + m(\sphericalangle ABC) = 180°; \quad \text{deci:} \quad m(\sphericalangle D'HF') + m(\sphericalangle ABC) = 180°;$$

ultima egalitate fiind adevărată deoarece BC’HA’ este patrulater inscriptibil.

b) Observăm că în triunghiul DEF, $D' \in EF, E' \in DF, F' \in DE$ și DD’, EE’, FF’ sunt mediane. De asemenea, HD’, HE’, HF’ sunt mediane în EHF, DHF, respectiv DHE. H este centru de greutate al triunghiului DEF dacă și numai dacă H este intersecția medianelor triunghiului DEF. Folosind rezultatele de la puctul a) și aplicând teorema medianei în triunghiul DEF, obținem:

$$FF'^2 = \frac{2 \cdot (DF^2 + FE^2) - DE^2}{4} = \frac{2 \cdot (4 \cdot BN^2 + 4 \cdot AM^2) - 4 \cdot PC^2}{4}$$

$$= 2 \cdot (BN^2 + 2 \cdot AM^2) - PC^2$$

$$= 2\left(\frac{2 \cdot (b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2 \cdot (a^2+c^2)-b^2}{4}\right) - \frac{2 \cdot (a^2+b^2)-c^2}{4} = \frac{9 \cdot c^2}{4}.$$

Rezultă că:

$$FF' = \frac{3 \cdot c}{2}.$$

Analog obținem și egalitățile:

$$EE' = \frac{3 \cdot b}{2}, \quad \text{și} \quad DD' = \frac{3 \cdot a}{2}$$

Pe de altă parte,

$$HF'^2 = \frac{2 \cdot (HD^2 + HE^2) - DE^2}{4} = \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - 4 \cdot PC^2}{4}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

Rezultă că:

$$HF' = \frac{c}{2}.$$

Analog obținem egalitățile,

$$HE' = \frac{b}{2}\,, \qquad\qquad HD' = \frac{a}{2}$$

Conform celor de mai sus,

$$FH + HF' = FF', \qquad EH + HE' = EE', \qquad DH + HD' = DD'\,.$$

În concluzie, H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

***Altfel*:** Folosim figura de mai jos.

a) Pe semidreapta (CP se consideră punctul C′ astfel încât:

CP=PC′.

Deci, AC′BC este paralelogram. Se arată ușor că:

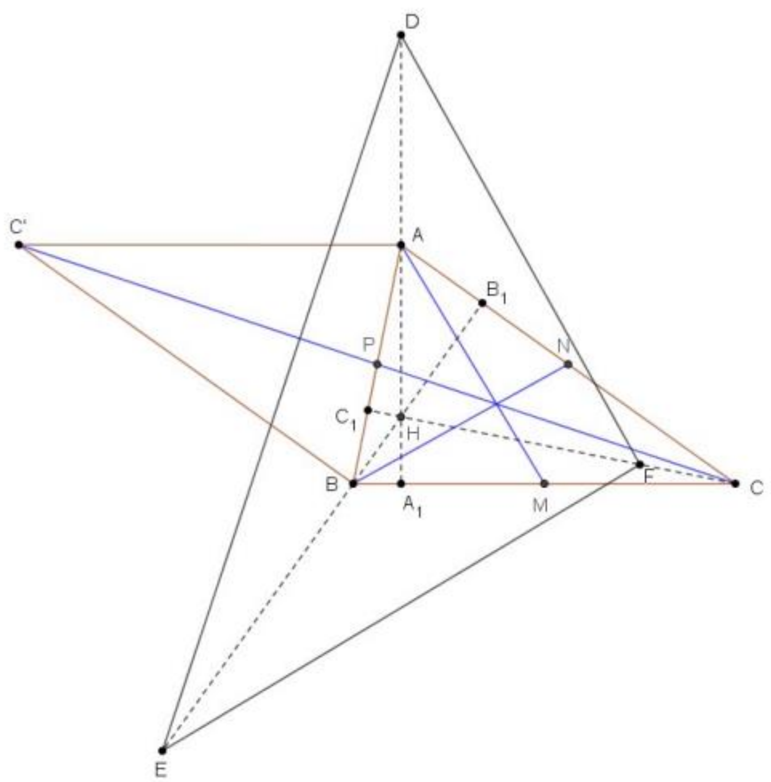
ΔBCC′≡ΔHDE,

de rezultă

2·CP=CC′=DE.

Analog se obțin celelalte relații.

b) Se raționează ca și mai sus.



III. Să se determine numărul real a∈(2,+∞) astfel încât:

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+ax^2+x^4}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$

***Rezolvare*:** Considerăm funcția:

$f_a : [0,1] \to R$, unde, pentru orice $x\in[0,1]$, $f_a(x)=\frac{1-x^2}{1+a\cdot x^2+x^4}$. (1)

Observăm că dacă, a, $b\in(2,+\infty)$ și a<b, atunci, pentru orice $x\in[0,1]$, $f_a(x)>f_b(x)$. Deci, aplicația:

$g : (2,+\infty) \to \mathbf{R}$, unde, pentru orice $a\in(2,+\infty)$: $g(a)=\int_0^1 f_a(x)\cdot dx$ (2)

este descrescătoare. Rezultă că ecuația:

$$g(a)=\frac{\pi}{8} \tag{i}$$

are o singură soluție. Pe de altă parte,

$$1+a\cdot x^2+x^4=\left(x^2+\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cdot\left(x^2+\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right), \tag{3}$$

iar, dacă:

$$\frac{1-x^2}{1+a\cdot x^2+x^4}=\frac{A\cdot x+B}{x^2+\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}+\frac{C\cdot x+D}{x^2+\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}}, \tag{4}$$

Atunci, din egalitățile (3) și (4), rezultă:

A=C=0 și $\begin{cases} B=-\dfrac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}+1}{2} \\ D=\dfrac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}-1}{2} \end{cases}$. (5)

Atunci, din egalitățile (1), (2) și (5), rezultă că:

$$g(a)=\int_0^1 f_a(x)\cdot dx$$

$$=-\frac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}+1}{2}\cdot\int_0^1\frac{dx}{x^2+\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}+\frac{\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}-1}{2}\cdot\int_0^1\frac{dx}{x^2+\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}}\cdot\int_0^1\frac{dx}{x^2+\left(\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}}\cdot\int_0^1\frac{dx}{x^2+\left(\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\left(\frac{2\cdot x}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\left(\frac{2\cdot x}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-2}}\cdot\left[\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}}\right)-\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\frac{\sqrt{a-2}}{2}. \qquad (6)$$

Aici am aplicat formula:

$$\text{arctgx-arctgy=arctg}\left(\frac{x-y}{1+x\cdot y}\right),$$

valabilă pentru orice x și y reali. Acum, din egalitățile de la (6), ecuația (i) devine:

$$\frac{1}{\sqrt{a-2}}\cdot\text{arctg}\frac{\sqrt{a-2}}{2}=\frac{\pi}{8},$$

care are soluția unică:

a=6.

2.37 Toate specialitățile (sesiune, 2008)

I.a) Să se demonstreze că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$$0\le\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx\le\frac{1}{2n+1}.$$

b) Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ are loc identitatea:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+\frac{x^{2n}}{1+x}.$$

c) Să se demonstreze că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

***Rezolvare*: a)** Inegalitatea (i) se verifică imediat, deoarece, pentru orice $x\in(0,1)$,

$$\frac{x^{2\cdot n}}{1+x}\leq x^{2\cdot n}. \tag{1}$$

b) Egalitatea (ii) se verifică direct.

c) Integrând, pe intervalul [0,1] egalitatea de la punctul 2), obținem:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}+\int_0^1\frac{x^{2\cdot n}}{1+x}\cdot dx\,. \tag{2}$$

Dar, trecând la limită în inegalitatea (i), obținem că:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2\cdot n}}{1+x}\cdot dx=0. \tag{3}$$

Acum, trecând la limită în egalitatea (i), dar ținând cont de egalitatea (2), obținem egalitatea din enunț.

***Altfel*:** Știm că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c, \tag{4}$$

unde c este constnta lui Euler. Dacă:

$$c_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}, \tag{5}$$

atunci:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}=c_{2\cdot n}-c_n+\ln 2. \tag{6}$$

Trecând la limită în egalitatea (6), ținând cont de egalitățile (4) și (5), obținem (iii), din enunț.

***Altfel*:** Folosim identitatea lui Botez-Catalan:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+n}. \tag{7}$$

Deci,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\ln(1+x)\cdot dx=\ln 2.$$

II. Să se rezolve în **Z** ecuaţia:

$x^3-y^3=999.$

***Rezolvare*:** Observăm că x>y, deci există $a\in\mathbf{N}^*$, astfel încât:

$x=y+a.$ (1)

Acum, ecuația devine:

$a\cdot(3\cdot y^2+3\cdot a\cdot y+a^2)=999.$ (2)

Din egalitatea (2) deducem că numerele întregi a și $3\cdot y^2+3\cdot a\cdot y+a^2$ sunt divizori complementari ai numărului 999. Ba mai mult,

$a=3\cdot b,$ (3)

cu $b\in\mathbf{N}^*$. Deci, egalitatea (2) devine:

$b\cdot(y^2+3\cdot b\cdot y+3\cdot b^2)=111.$ (4)

Rezultă că:

$(b,y^2+3\cdot b\cdot y+3\cdot b^2)\in\{(1,111),(3,37),(37,3),(111,1)\}.$

Deci avem următoarele posibilități:

$$\begin{cases} b=1 \\ y^2+3\cdot y+3=111 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b=3 \\ y^2+9\cdot y+27=37 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b=37 \\ y^2+111\cdot y+4107=3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b=111 \\ y^2+333\cdot y+36963=1 \end{cases}.$$

Conform egalității (3), din prima posibilitate, obținem că:

$$\begin{cases} a=3 \\ x=-9 \\ y=-12 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} a=3 \\ x=12 \\ y=9 \end{cases},$$

iar din a doua posibilitate obținem că:

$$\begin{cases} a=9 \\ x=-1 \\ y=-10 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} a=9 \\ x=10 \\ y=1 \end{cases},$$

Din celelalte două posibilități nu obținem nimic convenabil.

III. Se consideră, în plan, două puncte distincte A şi B. Folosind doar o riglă negradată şi un compas, să se determine un punct $P\in(AB)$ astfel încât:

$$\frac{AB}{AP}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

***Rezolvare*:** Etapele construcției sunt:

1) Considerăm un segment:

$AB=2\cdot a$.

2) Construim simetricul lui A față de B, pe care îl notăm cu C. Punctul B devine mijlocul segmentului [AC].

3) Cu aceeași deschizătură a compasului, dar mai mare decât $2\cdot a$, și cu vârful compasului în A, respectiv C, descriem două arce de cerc.

4) Determinăm punctele de intersecție ale celor două arce construite anterior și le notăm cu D și E.

5) Unim punctele D și E și determinăm, astfel, mediatoarea segmentului [AC].

6) Judecând analog ca și la etapele 3), 4) și 5), determinăm punctul F – mijlocul sermentului [AB].

7) Pe semidreapta (BE, cu vârful compasului în B și deschizătura egală cu BF, determinăm punctul G. Astfel,

$BG=a$.

8) Unim punctul A cu punctul G și obținem, astfel, triunghiul dreptunghic ABG, în care:

$AG=a\cdot\sqrt{5}$.

9) Cu vârful compasului în punctul G și cu deschiderea egală cu BG, determinăm, pe segmentul [AG], punctul H, astfel că:

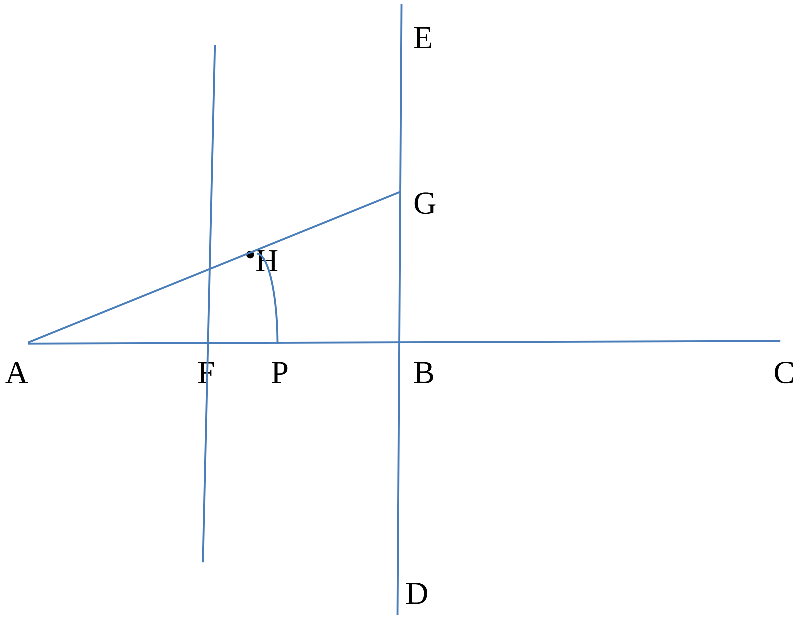
$AH=a\cdot(\sqrt{5}-1)$.

10) Cu vârful compasului în punctul A și cu deschiderea egală cu AH, determinăm, pe segmentul [AB], punctul P, astfel că:

$AP=a\cdot(\sqrt{5}-1)$.

Punctul P este cel căutat; într-adevăr,

$$\frac{AB}{AP}=\frac{2\cdot a}{a\cdot(\sqrt{5}-1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Altfel**:** În B ridicăm o perpendiculară și apoi desenăm un cerc de diametru AB, astfel încât cercul să fie tangent dreptei AB în punctul B. Fie O centrul cercului. Trasăm semidreapta AO, care intersectează cercul în punctele F și G. Construim un arc de cerc (cerc) cu centrul în A și de rază AF, astfel încât arcul de cerc (cercul) intersectează AB în punctul P. Punctul P împarte segmentul AB în raportul cerut.

Demostrație**:** Considerăm că:

$$AB=n. \tag{1}$$

Din:

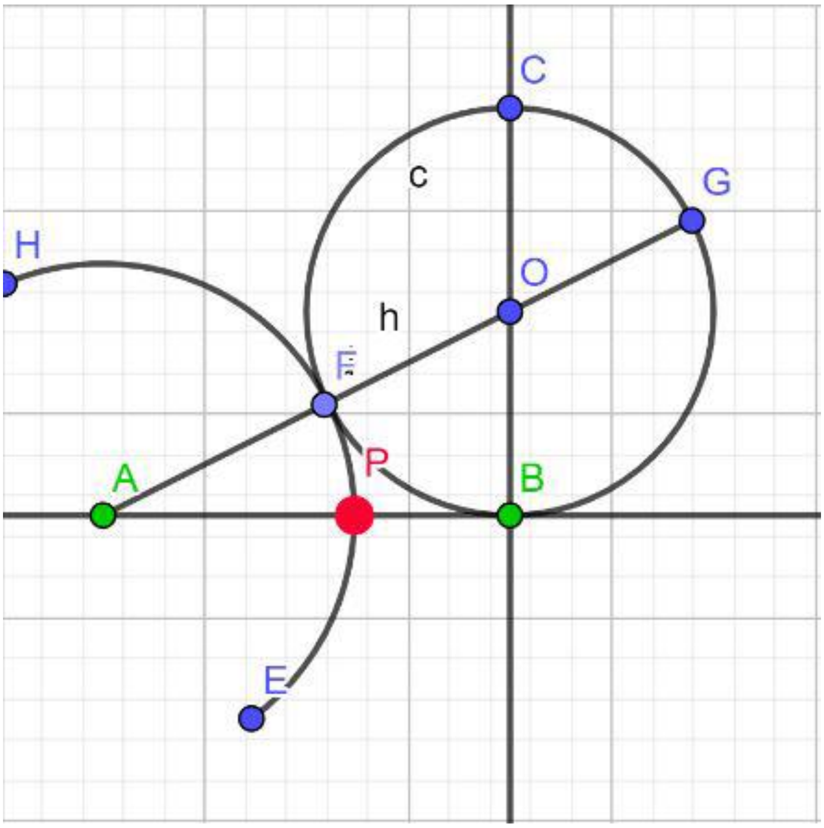
$$AB=BC$$

și (1), obținem că:

$$OF=\frac{n}{2}. \tag{2}$$

Din Teorema lui Pitagora în triunghiul OBA, avem că:

$$AO=\frac{n\cdot\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$



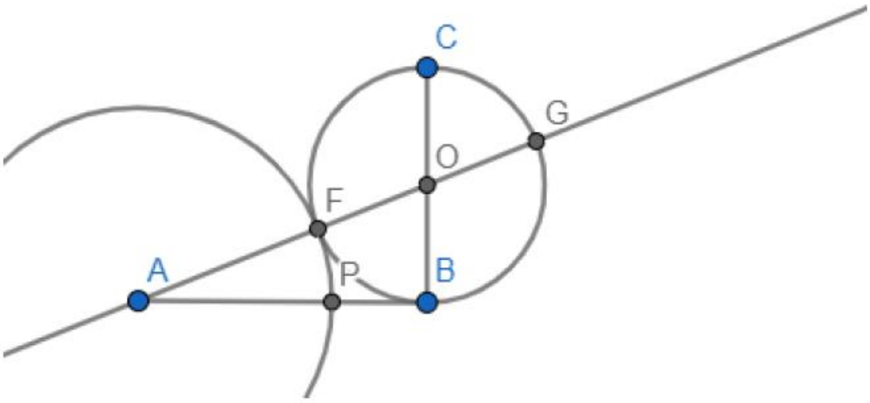
Deci,

$$AF=AO-OF=\frac{n\cdot\sqrt{5}}{2}-\frac{n}{2}=\frac{n\cdot(\sqrt{5}-1)}{2}=AP. \qquad (4)$$

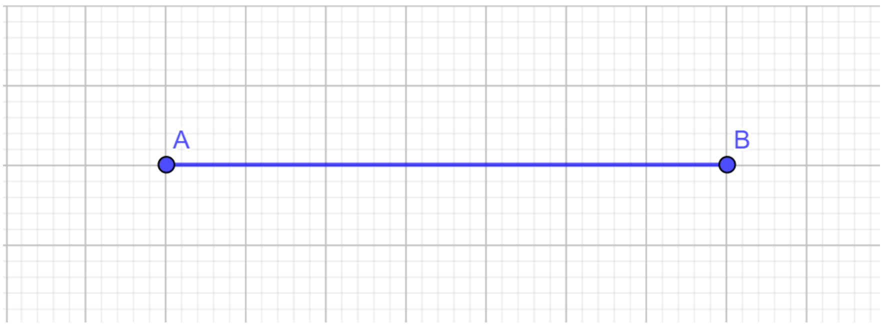
Și, astfel, din egalitățile (4), rezultă că:

$$\frac{AB}{AP}=\frac{2\cdot n}{n\cdot(\sqrt{5}-1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

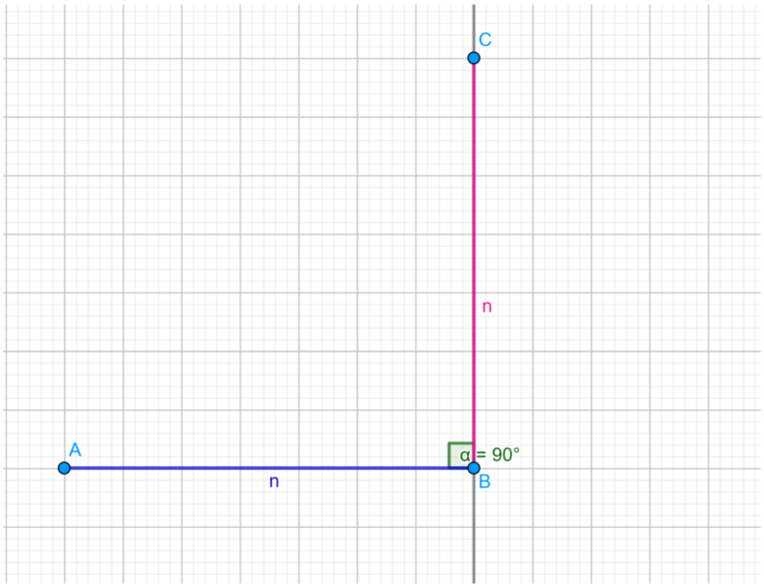
***Altfel*:** Aplicăm același raționament ca și mai sus, folosind figura de mai jos.



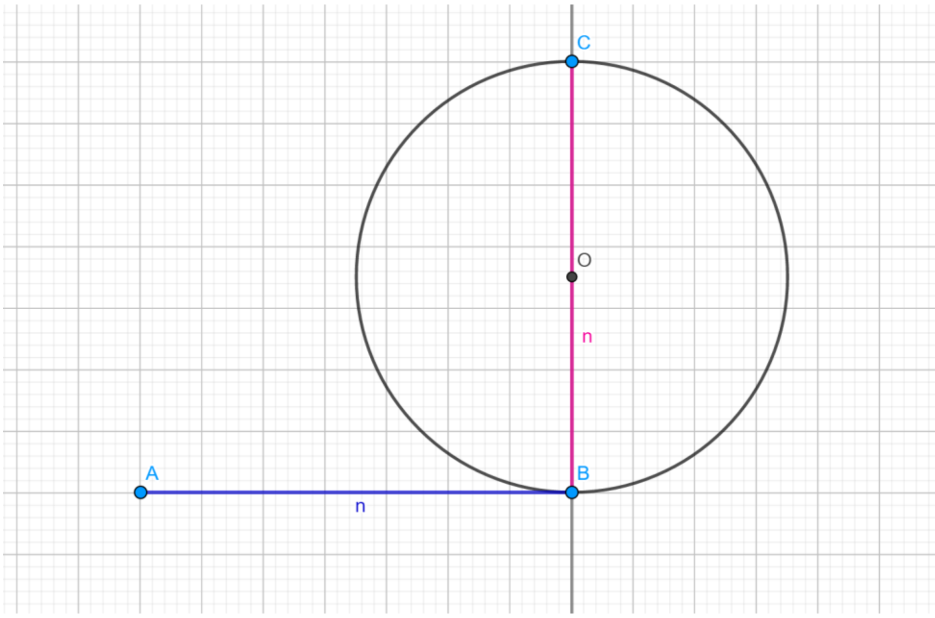
***Altfel*:** Folosim figurile de mai jos.



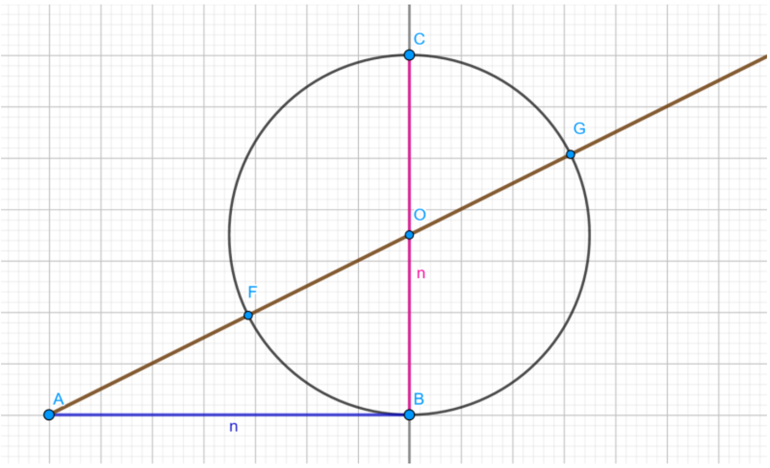
Construim segmental [BC] tot de lungime n astfel încât BC ⊥ AB în punctul B.



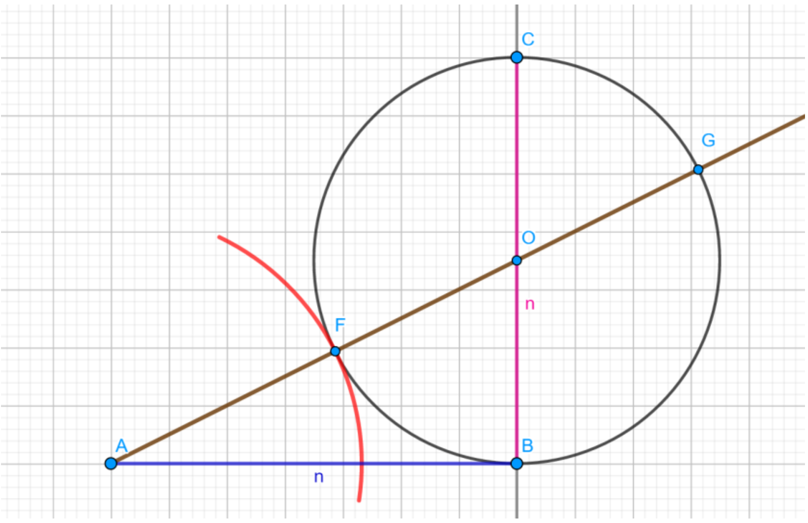
Construim un cerc de diametru BC cu centrul în O.



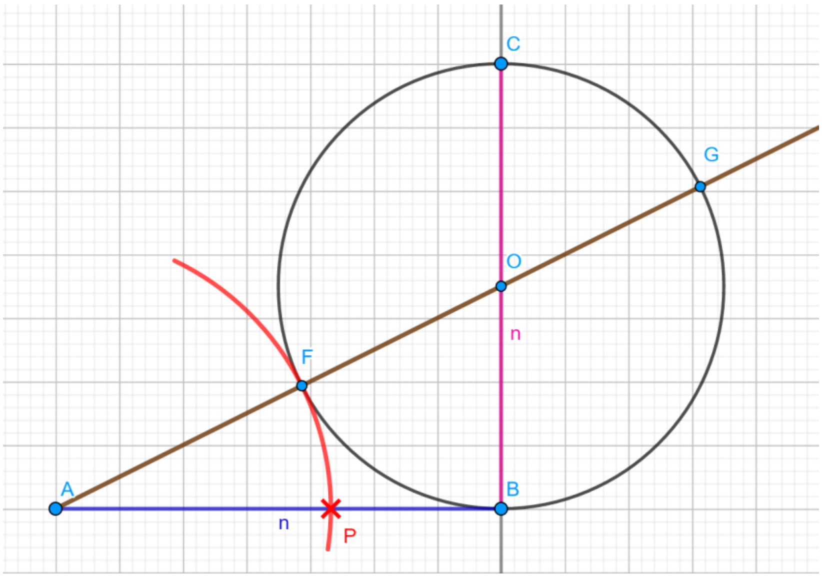
Apoi, construim AO astfel încât să intersecteze cercul în punctele F și G.



Construim arcul de cerc cu centrul în A și de rază AF.



La interesecția segmentului [AB] cu arcul de cerc se găsește punctul căutat.



Demonstrația acestui fapt este identică cu cea de mai sus.

Altfel: Folosim datele de mi sus, dar figura de mai jos. Atunci, etapele construcției sunt:

- În punctul B ridicăm o perpendiculară BC pe AB;
- Pe această perpendiculară construim un cerc de diametru:

  [BC] ≡ [AB];
- Din punctul A construim semidreapta [AO care va intersecta cercul în punctele F și Q;
- Vom construi un nou cerc, cu centru în A și de rază AF. Acesta se intersectează cu segmentul AB în punctul P. Punctul P, astfel obținut, este cel cerut.