SEMINAR D.M. 9

2.26 Specialitatea Matematică – Fizică (sesiune, 2005)

La subiectele I, II, III şi IV.A stabiliţi valoarea de adevăr a tuturor variantelor de răspuns.

I. Se consideră numerele complexe a şi b astfel încât:

$|a|=|b|=|a-b|=1.$ (i)

1. Numerele a şi b verifică egalitatea:

a) $a^2+b^2=a\cdot b$ **b)** $a^2+b^2=3\cdot a\cdot b$

c) $a^2+a\cdot b+b^2=0$ **d)** $a^2+a\cdot b+b^2=1$.

2. Valoarea expresiei $|a^{2005}+b^{2005}|$ este:

a) $\sqrt{3}$ **b)** 1

c) 2^{2005} **d)** $\sqrt{3}+1$.

3. Dacă A şi B sunt imaginile numerelor a şi b în plan, iar punctul C este astfel situat încât AOBC este paralelogram, atunci aria lui AOBC este:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}$.

4. Dacă:

$M=\{z\in\mathbf{C} \mid a^2\cdot z^{2n}+a\cdot b\cdot z^n+b^2=0 \text{ şi } |z|=1\}$, (i)

atunci numărul de elemente ale lui M este:

a) 0 **b)** 1

c) n **d)** $2\cdot n$.

***Rezolvare*: 1.** Dacă numerele a şi b satisfac la egalităţile (i), atunci:

$$a\cdot\bar{a}=b\cdot\bar{b}=(a-b)\cdot(\bar{a}-\bar{b})=1. \quad (1)$$

Atunci, din egalităţile (1) rezultă:

$$a\cdot\bar{a}-a\cdot\bar{b}-b\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b}=1, \qquad \bar{a}=\frac{1}{a}, \qquad \text{şi} \qquad \bar{b}=\frac{1}{b}. \quad (2)$$

Din egalităţile de la (2) rezultă:

$a^2+b^2=a\cdot b$. (Varianta a)) (3)

***Altfel*:** Fie:

$$z=\frac{a}{b}. \quad (*)$$

Atunci, conform ipotezei,

$$|z|=1 \quad \text{și} \quad |z-1|=1. \tag{4}$$

Deci,

$$z=\cos t+i\cdot\sin t \quad \text{și} \quad (\cos t-1)^2+\sin^2 t=1. \tag{5}$$

Din a doua egalitate de la (5) rezultă că:

$$\cos t=\frac{1}{2}; \quad \text{deci} \quad t=\pm\frac{\pi}{3}. \tag{6}$$

Acum, din egalitățile (6), rezultă că:

$$z=\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{adică:} \quad z^3=-1 \tag{7}$$

și, astfel, obținem egalitatea (3).

2. Din cele prezentate mai sus, obținem că:

$$|a^{2005}+b^{2005}|=|b^{2005}|\cdot\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{2005}+1\right|=\left|\left(\frac{a}{b}\right)^{2005}+1\right|. \tag{8}$$

Dar,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+1=0, \quad \text{adică:} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3=-1,$$

de unde rezultă că:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2005}=\frac{a}{b}. \tag{9}$$

Din egalitățile (8), (9) și (1), rezultă că:

$$|a^{2005}+b^{2005}|=|a+b|. \tag{10}$$

Dar,

$$(a+b)^2=3\cdot a\cdot b. \tag{11}$$

Acum, din egalitățile (1), (10) și (11), rezultă că:

$$|a^{2005}+b^{2005}|=\sqrt{3}. \text{ (Varianta a))} \tag{12}$$

***Altfel*:** Conform ipotezei, numerele complexe 0, a și b sunt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral de latură 1. Deci,

$$a=\cos t+i\cdot\sin t \quad \text{și} \quad b=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right),$$

caz în care:

$$a^{2005}=\cos 2005\cdot t+i\cdot\sin 2005\cdot t \qquad \text{și} \qquad b^{2005}=\cos\left(2005\cdot t+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(2005\cdot t+\frac{\pi}{3}\right),$$

ceea ce arată că numerele complexe 0, a^{2005} și b^{2005} sunt și ele afixele unui triunghi echilateral de latură 1. Rezultă că și aceste numere satisfac o relație de tipul celei de la punctul 1, adică:

$$(a^{2005})^2+(b^{2005})^2=(a^{2005})^2\cdot(b^{2005})^2. \tag{13}$$

Notând:

$$c=a^{2005} \qquad \text{și} \qquad d=b^{2005},$$

obținem că:

$$(c+d)^2=3\cdot c\cdot d, \qquad \text{adică:} \qquad |c+d|=\sqrt{3}.$$

***Altfel*:** Folosim notația (∗), conform ipotezei, obținem egalitățile (8), (9) și celelalte.

3. Dacă AOBC este paralelogram, atunci aria sa este dublul ariei triunghiului echilateral AOB, adică este:

$$2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Considerăm ecuația:

$$a^2\cdot z^{2\cdot n}+a\cdot b\cdot z^n+b^2=0. \tag{14}$$

Aceasta este o ecuație bipătrată, de gradul $2\cdot n$. Notând:

$$z^n=t.$$

ecuația (8) devine:

$$a^2\cdot t^2+a\cdot b\cdot t+b^2=0, \tag{14′}$$

care este o ecuație de gradul doi, cu rădăcinile:

$$t_{1,2}=a\cdot b\cdot\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \text{cu} \qquad |t_1|=|t_2|=1. \tag{15}$$

Deci, mulțimea rădăcinilor ecuației (14) reprezintă reuniunea mulțimilor rădăcinile ecuațiilor:

$$z^n=t_1 \qquad \text{și} \qquad z^n=t_2. \tag{10}$$

Deoarece toate rădăcinile ecuațiilor (14) sunt de modul 1, rezultă că:

$|M|=2\cdot n$. (Varianta d))

II. Fie $a\in\mathbf{R}$ şi funcţia:

$$f_a:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \qquad \text{unde, oricare ar fi } x\in\mathbf{R} \qquad f_a(x)=(x-a)\cdot\sqrt[3]{x-1}. \tag{i}$$

1. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f_a este:

a) $\{a\}$ **b)** $\varnothing$

c) $\{1\}$ **d)** $\{1,a\}$.

2. Dacă $a \neq 1$, atunci mulţimea punctelor în care f_a nu este derivabilă este:

a) $\varnothing$ **b)** $\{a\}$

c) $\{1\}$ **d)** $\{1,a\}$.

3. Dacă $a \neq 1$, atunci punctul $x_0=1$ este:

a) punct unghiular **b)** punct de inflexiune

c) punct de derivabilitate **d)** punct de întoarcere.

4. Dacă $a=1$, atunci punctul $x_0=1$ este:

a) punct de maxim **b)** punct critic al lui f_a

c) punct de întoarcere **d)** punct unghiular.

5. Dacă:

$$M=\{a \in \mathbf{R} \mid x_0=1 \text{ este punct de extrem al lui } f_a\}, \quad \text{(ii)}$$

atunci:

a) $M=\{1\}$ **b)** $M=\mathbf{R}\setminus\{1\}$

c) $M=\{0\}$ **d)** $M=\mathbf{R}$.

6. Dacă:

$$I=\int_1^2 f_a(x)\cdot dx\,, \quad \text{(iii)}$$

atunci I este:

a) $\dfrac{21\cdot a-43}{28}$ **b)** $\dfrac{32-21\cdot a}{28}$

c) $\dfrac{33-21\cdot a}{28}$ **d)** $\dfrac{a-3}{2}$.

***Rezolvare*: 1.** Observăm că, pentru orice $a \in \mathbf{R}$, funcția f_a este o funcție continuă pe **R**, deoarece este produs, respectiv compunere de funcții continue pe **R**. Așadar, mulțimea punctelor de discontinuitate a funcție f_a este $\varnothing$. (Varianta b))

2. Pentru orice $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$,

$$f_a'(x)=\frac{4\cdot x-a-3}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,. \quad (1)$$

Așadar, problema derivabilității funcției f se pune doar în punctul x=1. Calculăm derivatele laterale ale acestei funcții, în acest punct:

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{(x-a)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\text{sign}(1-a)\cdot\infty, \tag{2}$$

iar:

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{(x-a)\cdot\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\text{sign}(1-a)\cdot\infty. \tag{3}$$

Din egalitățile (2) și (3), rezultă că, dacă $a\neq1$, atunci f_a nu este derivabilă în $x_0=1$, dar, în rest, este derivabilă. (Varianta c))

3. Dacă $a\neq1$, atunci, din egalitățile (2) și (3), rezultă că derivatele laterale în punctul $x_0=1$, există și sunt infinite. Pe de altă parte, din egalitatea (1), rezultă că:

$$f''(x)=\frac{4\cdot x-6+2\cdot a}{9\cdot(x-1)\cdot\sqrt[3]{x-1}}. \tag{4}$$

Din egalitatea (4), rezultă că $f''(1)\neq0$; deci într-o vecinătate a lui 1, f'' schimbă semnul. Așadar, punctul $x_0=1$ este un punct de inflexiune. (Varianta b))

4. Dacă $a=1$, atunci:

$$f_1(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x-1} \quad \text{și} \quad f_1'(x)=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{x-1}. \tag{5}$$

Se observă că f_1' este continuă pe $\mathbf{R}$, deci $x_0=1$ este punct critic al funcției f_1. (Varianta b))

5. Conform celor arătate la punctele 3. și 4., pentru $a=1$, punctul $x_0=1$ este punct de extrem al funcției f_1, iar pentru $a\neq1$, acest punct este punct de inflexiune (vezi punctul 3.), deci nu este punct de extrem. Deci,

$M=\mathbf{R}\setminus\{1\}$. (Varianta b))

6. Calculăm:

$$I=\int_1^2 f_a(x)\cdot dx=\int_1^2(x-a)\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot dx=\int_1^2[(x-1)+(1-a)]\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot dx$$

$$=\int_1^2(x-1)\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot dx+(1-a)\cdot\int_1^2\sqrt[3]{x-1}\cdot dx$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{3\cdot(1-a)}{4}=\frac{33-21\cdot a}{28}.$$ (Varianta c))

III.1. Numărul de elemente ale mulţimii:

$$M=\{\,\hat{x}^2 \mid \hat{x}\in\mathbf{Z}_8\} \tag{i}$$

este:

a) 3 **b)** 2

c) 4 **d)** 5.

2. Numărul soluţiilor $(x,y,z)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ ale ecuaţiei:

$$x^2+y^2+z^2=2^{100}+15 \qquad \text{(ii)}$$

este:

a) o infinitate **b)** 8

c) 16 **d)** 0.

***Rezolvare*: 1.** Deoarece:

$$\mathbf{Z}_8=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}\},$$

rezultă că:

$$M=\{\hat{0},\hat{1},\hat{4}\}.\ \text{(Varianta a))}$$

2. Dacă ecuația:

$$x^2+y^2+z^2=2^{100}+15,$$

are soluții în $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, atunci și „*scufundata*” în $\mathbf{Z}_8$, adică ecuația:

$$\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2=\hat{7}, \qquad (1)$$

are soluții în $\mathbf{Z}_8\times\mathbf{Z}_8\times\mathbf{Z}_8$, ceea ce este imposibil, deoarece în mulțimea M nu există niciun triplet pentru care egalitatea (1) să aibă loc.

2.27 Specialităţile: Matematică şi Matematică - Informatică (restanţe, 2005)

I. Fie α, β numere iraţionale pozitive şi mulţimile:

$$A=\{[\alpha\cdot n]|\ n\in\mathbf{N}^*\},\quad \text{respectiv} \quad B=\{[\beta\cdot m]|m\in\mathbf{N}^*\}. \qquad \text{(i)}$$

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $A\cap B=\varnothing$ şi $A\cup B=\mathbf{N}^*$; (ii)

b) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$ (iii)

***Rezolvare*: b)** implică **a)** Presupunem că are loc egalitatea (iii) și nu are loc niciuna din egalitățile de la (ii). Deci:

$$A\cap B\neq\varnothing \quad \text{și} \quad A\cup B\neq\mathbf{N}^*.$$

Așadar, există $m, n\in\mathbf{N}^*$, astfel încât:

$$[\alpha\cdot m]=[\beta\cdot n]=q. \qquad (1)$$

Atunci, din egalitățile de la (1), rezultă:

$$q<\alpha\cdot m<q+1 \quad \text{și} \quad q<\beta\cdot n<q+1. \qquad (2)$$

Din inegalitățile de la (2), rezultă că:

$$\frac{m}{q+1}<\frac{1}{\alpha}<\frac{m}{q} \qquad \text{și} \qquad \frac{n}{q+1}<\frac{1}{\beta}<\frac{n}{q}. \qquad (3)$$

Adunând, membru cu membru, inegalitățile de la (3), rezultă că:

$$\frac{m+n}{q+1}<1<\frac{m+n}{q}, \qquad \text{adică:} \qquad q<m+n<q+1,$$

ceea ce nu se poate. Deci,

$$A\cap B=\varnothing.$$

Pe de altă parte, observăm că α și β sunt din intervalul $(1,+\infty)$. Ba mai mult, $\alpha\in(1,2)$ și $\beta\in(2,+\infty)$ sau invers. Dacă $A\cup B\neq\mathbf{N}^*$, atunci există un $q>2$, astfel încât în intervalul $(q,q+2)$ nu se află niciun element din $A\cup B$, altfel spus $q+1\notin A\cup B$. Deci, există $m, n\in\mathbf{N}^*$, astfel încât:

$$\alpha\cdot m<q<q+2<\alpha\cdot(m+1) \qquad \text{și} \qquad \beta\cdot n<q<q+2<\beta\cdot(n+1). \quad (4)$$

Atunci, din inegalitățile (4), obținem că:

$$\frac{m}{q}<\frac{1}{\alpha}<\frac{m+1}{q+2} \qquad \text{și} \qquad \frac{n}{q}<\frac{1}{\beta}<\frac{n+1}{q+2}. \ (5)$$

Adunând, membru cu membru, inegalitățile de la (5), obținem că:

$$\frac{m+n}{q}<1<\frac{m+n+2}{q+2}, \qquad \text{adică:} \qquad m+n<q<q+2<m+n+2,$$

ceea ce nu se poate. Așadar, ambele egalități de la $(*)$ au loc.

a) implică **b)** Considerăm mulțimea:

$$C=\left\{n\cdot\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\right] \middle| n\in N^*\right\}.$$

Atunci, conform punctului b),

$$A\cap C=\varnothing \qquad \text{și} \qquad A\cup C=\mathbf{N}^*. \qquad (6)$$

Deci, în acest caz,

$$A\cap B=A\cap C \qquad \text{și} \qquad A\cup B=A\cup C,$$

ceea ce ne arată că:

$$B=C. \qquad (7)$$

Deoarece în fiecare mulțime elementele sunt scrise în ordine crescătoare, din egalitatea (7), rezultă că, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$,

$$[\beta\cdot n]=\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot n\right]$$

și, astfel, deoarece:

$[\beta\cdot n]\le\beta\cdot n<[\beta\cdot n]+1$, adică: $\frac{[\beta\cdot n]}{n}\le\beta<\frac{[\beta\cdot n]+1}{n}$,

rezultă că:

$$\beta=\lim_{n\to\infty}\frac{[\beta\cdot n]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot n\right]}{n}=\frac{\alpha}{\alpha-1}. \qquad (8)$$

Din egalitățile extreme de la (8) rezultă egalitatea (ii).

II. Fie şirul $(I_n)_{n\ge0}$, unde, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2\cdot n}dx. \qquad (i)$$

Să se arate că:

a) pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$:

$$I_n+I_{n-1}=\frac{1}{2\cdot n-1}; \qquad (ii)$$

b) $(I_n)_{n\ge0}$ este convergent;

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2\cdot n-1}\right)=\frac{\pi}{4}. \qquad (iii)$

***Rezolvare*: a)** Din ipoteză obținem imediat egalitățile:

$$I_n+I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2n}\cdot dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2(n-1)}\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2(n-1)}\cdot(1+tg^2x)\cdot dx$$

$$=\frac{1}{2\cdot n-1}\cdot(tgx)^{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2\cdot n-1}.$$

b) Observăm că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $I_n\ge0$. (1) Pe de altă parte,

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2n}\cdot dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2(n-1)}\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tgx)^{2(n-1)}\cdot(tg^2x-1)\cdot dx\le0, \qquad (1)$$

căci, pentru orice $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $tg^2x\le1$. Rezultă că şirul I_n este descrescător (2) şi, implicit, mărginit superior (3) de:

$$I_0=\frac{\pi}{4}. \qquad (4)$$

Așadar, din (1), (2) și (3), rezultă că șirul I_n este convergent.

c) Dacă I_n este convergent, atunci orice subșir al lui converge la aceeași limită, s-o notăm cu l. Deci,

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} I_{n-1} = l \qquad (5)$$

și, trecând la limită în relația de recurență, obținem că:

$$l=0. \qquad (6)$$

***Altfel*:** Din cele demonstrate la punctele a) și b), rezultă că:

$$2\cdot I_n \le \frac{1}{2\cdot n-1} = I_n + I_{n-1} \le 2\cdot I_{n-1}. \qquad (7)$$

Din inegalitățile (7), rezultă că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$$\frac{1}{2\cdot(2\cdot n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2\cdot(2\cdot n-1)}. \qquad (8)$$

Trecând la limită în inegalitățile (8), obținem egalitatea (6).

Revenim la rezolvarea punctului c). Conform egalității de la punctul a), avem egalitățile:

$$\begin{aligned}
I_1+I_0 &= \frac{1}{1}, && \Big|\cdot(-1)^0\\
I_2+I_1 &= \frac{1}{3}, && \Big|\cdot(-1)^1\\
I_3+I_2 &= \frac{1}{5}, && \Big|\cdot(-1)^2\\
&\vdots\\
I_{n-2}+I_{n-3} &= \frac{1}{2\cdot n-5}, && \Big|\cdot(-1)^{n-3}\\
I_{n-1}+I_{n-2} &= \frac{1}{2\cdot n-3}, && \Big|\cdot(-1)^{n-2}\\
I_n+I_{n-1} &= \frac{1}{2\cdot n-1}. && \Big|\cdot(-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

Înmulțind fiecare din aceste egalități cu expresiile arătate și adunând-le, obținem:

$$I_0+(-1)^{n-1}\cdot I_n=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\cdot n-1}\right). \qquad (9)$$

În final, trecând la limită în egalitatea (9) și având în vedere egalitățile (4), (5) și (6), obținem egalitatea (iii), din enunț.

III. Să se arate că:

a) $\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°=\frac{1}{8}$; (i)

b) $\cos\frac{2\cdot\pi}{9}+\cos\frac{8\cdot\pi}{9}+\cos\frac{14\cdot\pi}{9}=0.$ (ii)

***Rezolvare*: a)** Deoarece,

$$\sin a\cdot\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \quad \text{și} \quad \sin a\cdot\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

rezultă că:

$$\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°=\frac{1}{2}\cdot(\cos 40°-\cos 60°)\cdot\sin 70°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\cos 40°\cdot\sin 70°-\cos 60°\cdot\sin 70°)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos 40^{\circ}\cdot\sin 70^{\circ}-\frac{1}{2}\cdot\sin 70^{\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin 110^{\circ}+\sin 30^{\circ}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sin 70^{\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sin 70^{\circ}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sin 70^{\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{8}.$$

Am ținut cont de faptul că:

$$\sin 110°=\sin 70°,$$

căci, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$\sin(\pi-x)=\sin x.$$

b) Deoarece,

$$\cos a+\cos b=2\cdot\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2},$$

rezultă că:

$$\cos\frac{2\cdot\pi}{9}+\cos\frac{8\cdot\pi}{9}+\cos\frac{14\cdot\pi}{9}=2\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{3}+\cos\frac{8\cdot\pi}{9}$$

$$=2\cdot\cos\frac{8\cdot\pi}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\frac{8\cdot\pi}{9}$$

$$=0.$$

2.28 Specialitățile: Matematică și Matematică aplicată (sesiune, 2006)

I. Calculați:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right). \qquad (i)$$

***Rezolvare*:** Au loc egalitățile:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+\sqrt{x^2+x+1}\left(1-\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\left(x-\ln(e^x+x)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}+\lim_{x\to\infty}\left[x-\ln e^x-\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

II. Fie m, n, p$\in$**N***, A și B două mulțimi astfel încât:

$$|A|=m \qquad \text{și} \qquad |B|=n \qquad (i)$$

și mulțimea:

$$F=\{f: A\to B \mid f \text{ are exact } p \text{ coretracte}\}. \qquad (ii)$$

a) Să se determine o relație între m și n astfel încât $F\neq\varnothing$.

b) În condițiile de la punctul a) construiți o astfel de funcție, pentru m, n și p convenabil aleși.

c) Determinați numărul de elemente ale lul F.

***Rezolvare*:** **a)** Fie:

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\} \qquad \text{și} \qquad B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}.$$

Conform ipotezei, orice funcție $f\in F$ este surjectivă. Deci,

$$m\geq n. \qquad (1)$$

În plus, numărul coretractelor unei astfel de funcții, coincide cu $\prod_{k=1}^{n}\left|f^{-1}\langle b_k\rangle\right|$. Așadar,

$$p=\prod_{k=1}^{n}\left|f^{-1}\langle b_k\rangle\right|. \qquad (2)$$

b) Fie:

$m=7$ și $n=3.$

Să considerăm mulțimile:

$$A=\{a,b,c,d,e,f,g\} \quad \text{și} \quad B=\{1,2,3\}, \qquad (3)$$

și funcția

$$\varphi : A \to B,$$

definită astfel:

$$\varphi(a)=\varphi(b)=1, \quad \varphi(c)=\varphi(d)=2 \quad \text{și} \quad \varphi(e)=\varphi(f)=\varphi(g)=3. \qquad (4)$$

Atunci,

$$|\overset{-1}{\varphi}\langle 1\rangle|=2, \quad |\overset{-1}{\varphi}\langle 2\rangle|=2 \quad \text{și} \quad |\overset{-1}{\varphi}\langle 3\rangle|=3. \qquad (5)$$

Din egalitățile (2) și (5), rezultă că funcția φ are 12 coretracte; acestea sunt următoarele:

x	1	2	3	x	1	2	3	x	1	2	3
$s_1(x)$	a	c	e	$s_2(x)$	a	c	f	$s_3(x)$	a	c	g

x	1	2	3	x	1	2	3	x	1	2	3
$s_4(x)$	a	d	e	$s_5(x)$	a	d	f	$s_6(x)$	a	d	g

x	1	2	3	x	1	2	3	x	1	2	3
$s_7(x)$	b	c	e	$s_8(x)$	b	c	f	$s_9(x)$	b	c	g

x	1	2	3	x	1	2	3	x	1	2	3
$s_{10}(x)$	b	d	e	$s_{11}(x)$	b	d	f	$s_{12}(x)$	b	d	g

c) Numărul de elemente ale mulțimii F este egal cu numărul funcțiilor surjective:

$$f : A \to B;$$

pentru care are loc egalitatea (1).

III. Se consideră tetraedrul echifacial ABCD (care are toate feţele de aceeaşi arie). Să se determine două proprietăţi ale acestui tetraedru.

***Rezolvare*:** Prezentăm mai multe proprietăți ale tetraedrului echifacial. Demonstrați-le pe toate. Astfel, are loc următorul rezultat, care prezintă condiții necesare și suficiente pentru ca un tetraedru să fie echifacial:

***Teorema 1*:** *Dacă ABCD este un tetraedru, atunci următoarele afirmații sunt echivalente*:

1) *ABCD este echifacial*;

2) *Înălțimile tetraedrului sunt congruente*;

3) *Muchiile opuse sunt congruente*;

4) *Centrul sferei înscrise coincide cu centrul sferei circumscrise*;

5) *Suma măsurilor unghiurilor plane de la fiecare vârf este aceeași, 180°.*

De aici rezultă următorul rezultat, care prezintă o condiție suficientă pentru ca un tetraedru să fie echifacial:

Corolarul 2: *Dacă în tetraedrul ABCD orice bimediană este perpendiculara comună a muchiilor pe care le unește, atunci tetraedrul este echifacial*.

În plus, are loc și următoarea teoremă, care prezintă condiții necesare pentru un tetraedru echifacial:

Teorema 3: *Dacă ABCD este un tetraedru echifacial, atunci au loc următoarele afirmații*:

1) *Medianele sunt congruente*;

2) *Planul bisector al oricăui diedru al său este și plan median*;

3) *Unghiurile diedre opuse sunt congruente*;

4) *Suma distanțelor de la orice punct interior la fețele tetraedrului este constantă*;

5) *Desfășurarea tetraedrului este un triunghi ascuțitunghic în care sunt duse liniile mijlocii*;

6) *Fețele tetraedrului sunt triunghiuri ascuțitunghice cu cercuri circumscrise de aceeași rază*;

7) *Proiecția tetraedrului pe fiecare din cele trei plane paralele cu fețele este un dreptunghi*;

8) *Dacă*:

$AB=c,$ $BC=a$ *și* $CA=b,$

atunci volumul tetraedrului este:

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)}\,.$$