SEMINAR D.M. 7

2.21 Specialitatea: Matematică aplicată (sesiune, 2004)

I. Fie $n\in\mathbf{N}^*$ şi $A_1, A_2, \ldots A_n$ mulţimi finite. Pentru orice $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$, notăm cu

$a_{ij}=|A_i\cap A_j|$ şi fie $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{R})$.

Demonstraţi că $\det(A)\geq 0$.

Rezolvare: Vom aplica următoarea teoremă:

Teorema 1 (Cauchy-Binet): *Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})$, cu $m\leq n$ şi $1\leq j_1, j_2, \ldots, j_m\leq n$. Considerăm matricea $A^{j_1j_2\cdots j_m}\in\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, care conține coloanele $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ale matricii A și fie $B^{j_1j_2\cdots j_m}\in\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, matricea care conține liniile $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ale matricii B. Atunci*:

$$\det(A\cdot B)=\sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m}\det(A^{j_1j_2\ldots j_m})\cdot\det(B^{j_1j_2\ldots j_m}). \tag{1}$$

Corolarul 2: *Fie $A, B\in\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$. Atunci*:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B). \tag{2}$$

Corolarul 3: *Fie $A\in\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbf{R})$, $B\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{R})$. Atunci*:

$$\det(A\cdot B)=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot b_{k1}. \tag{3}$$

Corolarul 4: *Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$, $A^T\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})$, cu $m\leq n$ și $1\leq j_1, j_2, \ldots, j_m\leq n$. Considerăm matricea $A^{j_1j_2\cdots j_m}\in\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, care conține coloanele $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ale matricii A și fie $A^{T\, j_1j_2\cdots j_m}\in\mathcal{M}_m(\mathbf{R})$, matricea care conține liniile $j_1, j_2, \ldots, j_m$ ale matricii A^T. Atunci*:

$$\det(A\cdot A^T)=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_m}\det(A^{j_1j_2\cdots j_m})\cdot\det(A^{T\, j_1j_2\cdots j_m})=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_m}\det{}^2(A^{j_1j_2\cdots j_m})\geq 0. \tag{4}$$

Corolarul 5: *Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$, $B\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbf{R})$, cu $m>n$. Atunci*:

$$\det(A\cdot B)=0.$$

Revenim, acum, la rezolvarea exercițiului nostru. Fie M mulțimea tuturor elementelor din cele n mulțimi, deci:

$$M=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}. \tag{5}$$

Acum, considerăm matricea $B\in\mathcal{M}_{n\times k}(\mathbf{N})$,

$B=(b_{ij})$, unde, $b_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } x_j \in A_i \\ 0, \text{ dacă } x_j \notin A_i\end{cases}$. (6)

Atunci,

$B^T \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbf{N})$, iar: $C=B\cdot B^T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{N})$.

Dar, dacă:

$C=(c_{ij})$,

atunci, pentru orice i, $j \in \{1,2,\cdots,n\}$,

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} b_{il}\cdot b_{jl}\,. \quad (7)$$

Conform relației (2),

$b_{il}\cdot b_{jl}=1$ dacă și numai dacă $b_{il}=b_{jl}=1$,

adică:

$b_{il}\cdot b_{jl}=1$ dacă și numai dacă $x_l \in A_i \cap A_j$.

Conform egalității (7) și ultimei echivalențe, rezultă că, pentru orice i, $j \in \{1,2,\cdots,n\}$:

$c_{ij}=a_{ij}$, adică $C=A$.

În final, conform ultimei egalități și Corolarului 4 (dacă $n \le k$) / Corolarului 5 (dacă $n>k$), rezultă că:

$$\det(A)=\det(C)=\det(B\cdot B^T)\ge 0.$$

II. Există funcții

$f : D \to \mathbf{R}$,

cu $0 \in D$, indefinit derivabile în 0 şi astfel încât pentru orice $n \in \mathbf{N}$,

$f^{(n)}(0)=n$?

***Rezolvare*:** Răspunsul la întrebarea din enunț este: Da, există. De exemplu: funcția:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$. (1)

Atunci f este indefinit derivabilă pe **R** (deci în x=0) și, pentru orice $x \in \mathbf{R}$,

$$f^{(n)}(x)=(x+n)\cdot e^x. \quad (2)$$

Verificarea egalității (1) se poate face fie prin inducție după n, fie utilizând formula lui Newton: pentru orice două funcții:

$u, v : D \to \mathbf{R}$

și, pentru orice $x \in D$, pentru care acestea sunt derivabile până la ordinul n în punctul x, are loc egalitatea:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}\ . \qquad (3)$$

Noi putem considera, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$u(x)=x$ și $v(x)=e^x$.

Demonstrarea egalității (3) se poate face tot prin inducție după n.

Particularizând pe x=0 în egalitatea (1), obținem că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$f^{(n)}(0)=n$.

***Altfel*:** Vom construi o astfel de funcție, de fapt funcția f de mai sus. Conform ipotezei,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\dots$$

$$=0+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{2}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{n}{n!}\cdot x^n+\dots=x\cdot\left(1+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+\dots\right)$$

$$=x\cdot e^x.$$

III. Alcătuiţi o problemă de Geometrie în care să utilizaţi teorema cosinusului.

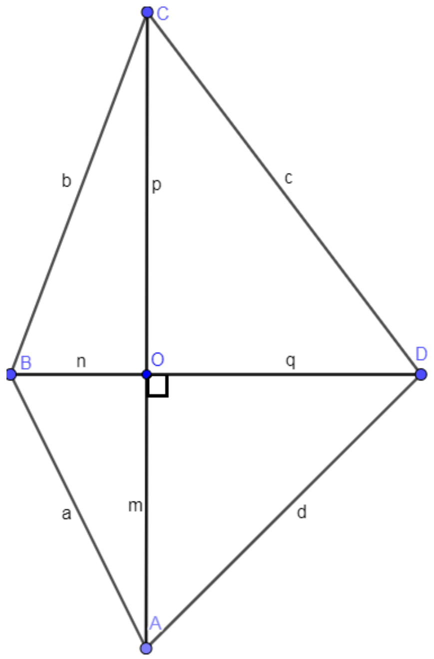
Propuneri: 1) Să se arate că în orice triunghi ABC, de laturi a, b, c, are loc inegalitatea:

$$a\cdot(2\cdot a^2-b^2-c^2)+b\cdot(2\cdot b^2-a^2-c^2)+c\cdot(2\cdot c^2-a^2-b^2)\geq 0.$$

Demonstrați această inegalitate folosind Teorema cosinusului.

2) Fie ABCD un patrulater ortodiagonal cu:

AD=BC. (Vezi figura de mai jos.)



Arătați că are loc inegalitatea:

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D\geq 0$.

Indicație: Folosim notațiile din figură, Teorema lui Pitagora și Inegalitatea C-B-S.

3) Să se arate că în orice triunghi ABC, de laturi a, b, c, are loc inegalitatea:

$a\cdot b\cdot(2\cdot\cos C-1)+a\cdot c\cdot(2\cdot\cos B-1)+b\cdot c\cdot(2\cdot\cos A-1)\geq 0$.

Demonstrați această inegalitate folosind Teorema cosinusului.

2.22 Specialitatea Matematică – Fizică (sesiune, 2004)

La subiectele I, II, III şi IV.A stabiliţi valoarea de adevăr a tuturor variantelor de răspuns.

I. Fie ($\mathbf{Z}$, +) grupul aditiv al numerelor întregi.

1. Acest grup satisface relaţia:

a) este ciclic **b)** este finit

c) nu este ciclic **d)** nu are endomorfisme.

2. Dacă:

$G=p\mathbf{Z}\cap q\mathbf{Z}$,

cu p, $q\in\mathbf{N}$, atunci G este:

a) $(p,q)\mathbf{Z}$ **b)** $[p,q]\mathbf{Z}$

c) $(p\cdot q)\mathbf{Z}$ **d)** $p^q\mathbf{Z}$.

3. Dacă $p\mathbf{Z}\subseteq q\mathbf{Z}$, atunci:

a) $(p,q)=1$ **b)** $p \mid q$

c) $p=q$ **d)** $q \mid p$.

4. Dacă:

$H=p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}$,

atunci H este:

a) $(p+q)\mathbf{Z}$ **b)** $[p,q]\mathbf{Z}$

c) $(p,q)\mathbf{Z}$ **d)** $p^q\mathbf{Z}$.

***Rezolvare*: 1.** Grupul ($\mathbf{Z}$,+) este ciclic generat de elementul 1. Deci:

$\mathbf{Z}=\langle 1\rangle$. (Varianta a))

2. Presupunem că:

$G=p\mathbf{Z}\cap q\mathbf{Z}$

şi fie $x\in G$. Atunci,

$x\in p\mathbf{Z}$ și $x\in q\mathbf{Z}$,

adică:

$p \mid x$ și $q \mid x$.

Rezultă că:

$[p,q] \mid x$, adică $x \in [p,q]\mathbf{Z}$.

Așadar, $G \subseteq [p.q]\mathbf{Z}$. (1) Acum, fie $y \in [p.q]\mathbf{Z}$. Atunci, $[p.q] \mid y$ și cum $p \mid [p.q]$, rezultă că $p \mid y$; adică $y \in p\mathbf{Z}$. (2) Analog, $y \in q\mathbf{Z}$. (3). Din relațiile (2) și (3) rezultă că $y \in G$ și, astfel, $[p.q]\mathbf{Z} \subseteq G$. (4) Din incluziunile (1) și (4), rezultă că:

$G=[p.q]\mathbf{Z}$. (Varianta b))

3. Dacă $p\mathbf{Z} \subseteq q\mathbf{Z}$, atunci, pentru orice $a \in \mathbf{Z}$, există $b_a \in \mathbf{Z}$, astfel încât:

$$p \cdot a = q \cdot b_a. \quad (5)$$

Deci, există un $b_1 \in \mathbf{Z}$, astfel încât:

$p=q \cdot b_1$, deci $q \mid p$. (Varianta d))

4. Deoarece $p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}$ este un subgrup al lui $\mathbf{Z}$, rezultă că există $d \in \mathbf{Z}$, astfel încât:

$p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}=d\mathbf{Z}$.

Atunci:

$p=p \cdot 1+q \cdot 0 \in p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}=d\mathbf{Z}$ și $q=p \cdot 0+q \cdot 1 \in p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}=d\mathbf{Z}$.

Deci, $p, q \in d\mathbf{Z}$ și:

$d \mid p$ și $d \mid q$.

Fie $d' \in \mathbf{Z}$, astfel încât:

$d' \mid p$ și $d' \mid q$.

Atunci,

$p\mathbf{Z} \subseteq d'\mathbf{Z}$ și $qZ \subseteq d'\mathbf{Z}$,

de unde rezultă că:

$p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}=d\mathbf{Z} \subseteq d'\mathbf{Z}$,

ceea ce arată că $d' \mid d$; adică:

$d=(p,q)$ și $H=(p.q)\mathbf{Z}$. (Varianta c))

***Altfel*:** Fie:

$d=(p.q)$.

Atunci,

$d \mid p$ și $d \mid q$;

deci:

$p\mathbf{Z} \subseteq d\mathbf{Z}$ și $qZ \subseteq d\mathbf{Z}$,

de unde rezultă că:

$p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}\subseteq d\mathbf{Z}$.

Dar, există a, $b\in Z$, astfel încât:

$d=p\cdot a+q\cdot b$, deci $d\mathbf{Z}\subseteq p\mathbf{Z}+q\mathbf{Z}$.

II. Se consideră funcţia:

$f : D \to \mathbf{R}$, dată de legea: pentru orice $x\in D$, $f(x)=\arcsin\frac{2\cdot x}{1+x^2}$. (i)

1. Mulţimea D este:

a) $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ **b)** $\mathbf{R}$

c) $[-1,1]$ **d)** $\mathbf{R}^*$.

2. Perechea $\left(f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(2)\right)$ este:

a) $\left(\frac{8}{5},\frac{2}{5}\right)$ **b)** $\left(-\frac{8}{5},\frac{2}{5}\right)$

c) $\left(\frac{8}{5},-\frac{2}{5}\right)$ **d)** $\left(-\frac{8}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

3. Semitangentele la graficul lui f în punctul x=1 determină un unghi de:

a) 75° **b)** 45°

c) 60° **d)** 90°.

4. Dacă:

$I=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx$, (ii)

atunci I este:

a) $\frac{\pi}{2}-1$ **b)** $\frac{\pi}{2}+1$

c) $\frac{\pi}{4}+1$ **d)** $\frac{\pi}{4}-1$.

***Rezolvare*: 1.** Mulțimea D coincide cu mulțimea valorilor lui x pentru care:

$-1\le\frac{2\cdot x}{1+x^2}\le 1$. (1)

Rezolvând dubla inegalitate de la (1), conform celor precizate mai sus, obținem că:

$D=\mathbf{R}$. (Varianta b))

2. Calculăm $f'(x)$ și obținem că, pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$f'(x)=\frac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}.$$

Deci,

$$\left(f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(2)\right)=\left(\frac{8}{5},-\frac{2}{5}\right).$$ (Varianta c))

3. Calculăm f_s' și f_d' și obținem că:

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{\arcsin\frac{2\cdot x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}=1,$$

iar:

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\arcsin\frac{2\cdot x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}=-1.$$

Așadar, cele două semitangente sunt perpendiculare. (Varianta d))

4. Calculăm integrala:

$$I=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^1 x\cdot\arcsin\frac{2\cdot x}{1+x^2}\cdot dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\arcsin\frac{2\cdot x}{1+x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-1.$$ (Varianta a))

III. În spaţiul Oxyz se consideră planul π de ecuaţie:

$$x+y+z=1 \qquad \text{(i)}$$

şi punctele A(2,2,1) şi B(6,4,3).

1. Planul mediator al segmentului [AB] este:

a) $2\cdot x-2\cdot y+z=0$ **b)** $x+y-2\cdot z=3$

c) $2\cdot x+y+z=13$ **d)** $x+y-z=5$.

2. Sinusul unghiului format de planele (xOy) şi π este:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **d)** $\frac{1}{3}$.

3. Punctul $P \in \pi$ pentru care $|PA-PB|$ este maximă este:

a) (1,0,0) **b)** (0,0,1)

c) (4,2,-5) **d)** (0,1,0).

***Rezolvare*: 1.** Planul mediator al segmentului [AB] este planul perpendicular pe segmentul [AB] în mijlocul acestuia. Mijlocul segmentului [AB] este punctul C(4,3,2), iar vectorul normal al acestui plan va fi $\overrightarrow{AB}$ (4,2,2). Acum, putem scrie ecuația planului mediator al segmentului [AB]:

$4\cdot(x-4)+2\cdot(y-3)+2\cdot(z-2)=0,$ adică: $2\cdot x+y+z=13$. (Varianta c))

2. Unghiul format de două plane este unghiul format de normalele lor; în cazul nostru avem:

$$\cos(xOy,\pi)=\frac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{\|(0,0,1)\|\cdot\|(1,1,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Deci, din egalitățile (1), rezultă că:

$$\sin(xOy,\pi)=\frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ (Varianta c))} \tag{2}$$

***Altfel*:** Observăm că planul π intersectează axele de coordonate în punctele D(1,0,0), E(0,1,0) și F(0,0,1). Dacă $OM \perp DF$, atunci $EM \perp DF$, iar:

$$OM=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{și} \quad EM=\frac{\sqrt{6}}{2}. \tag{3}$$

Din egalitățile (3), rezultă egalitatea (2).

3) Observăm că punctele A și B nu aparțin planului π. Dacă punctul P aparține planului π, înseamnă că $|PA-PB|$ este maximă exact dacă punctul P este intersecția dreptei AB cu planul π. Ecuația dreptei AB este:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Deci, există $t \in \mathbf{R}$, astfel încât:

$$\begin{cases} x=4\cdot t+1 \\ y=2\cdot t+2 \\ z=2\cdot t+1 \end{cases}.$$

Deoarece:

$x+y+z=1,$

rezultă că:

$t=-\frac{1}{2}$ și P(0,1,1). (Varianta d))

2.23 Toate specialitățile (restanțe, 2004)

I. Să se determine toate grupurile neizomorfe de ordinul 6.

***Rezolvare*:** Așa cum am precizat și la rezolvarea Exercițiului II de la Setul 1. / 2.1, orice grup este determinat de anumiți generatori și de relațiile dintre aceștia.

Fiind vorba de grupuri de ordin finit, acestea vor fi determinate, în baza afirmației precedente, de tablele corespunzătoare. Astfel, fie:

$G=\{1,a,b,c,d,e\}$

o mulțime cu 6 elemente și „·" o operație internă pe G astfel încât $(G,\cdot)$ să fie grup. Conform Teoremei lui Lagrange, oridinul fiecărui element din G divide ordinul lui G; deci, oricare ar fi $x\in G\setminus\{1\}$,

$o(x) \mid 6.$ (1)

Cazul

$x=1$

este trivial și nesemnificativ în rezolvarea problemei noastre. De aceea, distingem doar două cazuri:

Cazul 1: Există un $x\in G\setminus\{1\}$, astfel încât:

$o(x)=6.$

Să notăm acest element cu a. Deci,

$a^6=1$ (2)

și subgrupul ciclic generat de a,

$\langle a\rangle=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$

este un subgrup cu 6 elemente al lui G. În acest caz,

$G=\langle a\rangle,$ (3)

adică G este un grup ciclic cu 6 elemente. Deci G este generat de elementul a și de relația (2).

Tabla acestui grup este următoarea:

·	**1**	**a**	**a^2**	**a^3**	**a^4**	**a^5**
1	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	1
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	1	a
a^3	a^3	a^4	a^5	1	a	a^2
a^4	a^4	a^5	1	a	a^2	a^3
a^5	a^5	1	a	a^2	a^3	a^4

Există un astfel de grup? Da, de exemplu ($\mathbf{Z}_6$,+).

<u>Cazul 2:</u> Nu există niciun $x\in G\setminus\{1\}$, astfel încât:

$$o(x)=6.$$

În acest caz, oricare ar fi $x\in G\setminus\{1\}$, $o(x)\in\{2,3\}$. Presupunem că, oricare ar fi $x\in G\setminus\{1\}$,

$$o(x)=2.$$

Deci,

$$a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=1. \tag{4}$$

Rezultă că, oricare ar fi x, $y\in G$,

$$x^2=y^2=(x\cdot y)^2=1. \tag{5}$$

Deoarece într-un grup se poate „*simplifica*” cu orice element, din egalitățile (5), rezultă că, oricare ar fi x, $y\in G$,

$$x\cdot y=y\cdot x,$$

adică G este un grup abelian. Fie:

$$H=\{1,a,b,a\cdot b\}\subset G.$$

Atunci:

$$a^2=b^2=(a\cdot b)^2=1 \tag{6}$$

și restricția operației din G la H determină pe H o structură de grup abelian, a cărui tablă este următoarea:

·	**1**	**a**	**b**	**a·b**
1	1	a	b	a·b
a	a	1	a·b	b
b	b	a·b	1	a
a·b	a·b	b	a	1

Așadar, (H,·) este un subgroup cu 4 elemente ale lui G; dar $4\nmid 6$ – contradicție cu Teorema lui Lagrange. Deci, nu toate elementele lui G sunt de ordinul 2. Presupunem, acum, că toate elementele lui G sunt de ordinul 3; deci, oricare ar fi $x\in G\setminus\{1\}$,

$$x^3=1. \tag{7}$$

Fie a, $b\in G\setminus\{1\}$. Atunci:

$$a^3=b^3=(a\cdot b)^3=1. \tag{8}$$

Dacă $b\notin\langle a\rangle$, se verifică imediat că mulțimea:

$K=\{1,a,a^2,b,b^2,a\cdot b\}$

are 6 elemente distincte și este o submulțime a lui G. Rezultă că:

$G=K$.

Dar nu putem întocmi tabla lui G, în acest caz, deoarece $a\cdot b^2 \notin G$ – verificarea este imediată! În concluzie, nu toate elementele din $G\setminus\{1\}$ sunt de ordinul 3. Deci în $G\setminus\{1\}$ există un element de ordinul 2, să-l notăm cu a și un element de ordinul 3, să-l notăm cu b. Rezultă că:

$a^2=1$ și $b^3=1$. (9)

Considerăm, acum mulțimile:

$L=\{1,a,b,b^2,a\cdot b,a\cdot b^2\}$ și $M=\{1,a,b,b^2,b\cdot a,b^2\cdot a\}$.

Se verifică ușor că acestea sunt două submulțimi cu 6 elemente, ale lui G; deci:

$G=\{1,a,b,b^2,a\cdot b,a\cdot b^2\}=\{1,a,b,b^2,b\cdot a,b^2\cdot a\}$. (10)

Din egalitățile (10) rezultă că avem două subcazuri:

<u>Subcazul 2.1</u>: $a\cdot b=b\cdot a$, subcaz în care $a\cdot b^2=b^2\cdot a$. Atunci,

$(a\cdot b)^2=b^2$, $(a\cdot b)^3=a$, $(a\cdot b)^4=b$, $(a\cdot b)^5=a\cdot b^2$ și $(a\cdot b)^6=1$, (11)

adică G este ciclic generat de elemental $a\cdot b$ – contradicție cu ipoteza Cazului 2. Așadar, ne-a mai rămas de judecat doar:

<u>Subcazul 2.2</u>: $a\cdot b=b^2\cdot a$, subcaz în care $a\cdot b^2=b\cdot a$. (11)

Atunci, deoarece în cazul unui grup G, pentru orice $a, b\in G$, ecuațiile:

$a\cdot x=b$ și $x\cdot a=b$ (12)

au soluții unice, rezultă că, pentru orice $a\in G$,

translația stângă $x \mapsto a\cdot x$ și, respectiv translația dreaptă $x \mapsto x\cdot a$,

sunt bijecții. În atare condiții, va rezulta că în tabla grupului G, fiecare element va apare o singură dată pe linie și pe coloană (desigur, în afara celor generice!). (Dacă nu știi aceste chestiuni, atunci judeci toate posibilitățile care apar în întocmirea tablei.) Acum, tabla acestui grup este ușor de completat; ea este următoarea:

$\cdot$	**1**	**a**	**b**	$\mathbf{b^2}$	$\mathbf{a\cdot b}$	$\mathbf{a\cdot b^2}$
1	1	a	b	b^2	$a\cdot b$	$a\cdot b^2$
a	a	1	$a\cdot b$	$a\cdot b^2$	b	b^2
b	b	$a\cdot b^2$	b^2	1	a	$a\cdot b$
$\mathbf{b^2}$	b^2	$a\cdot b$	1	b	$a\cdot b^2$	a
$\mathbf{a\cdot b}$	$a\cdot b$	b^2	$a\cdot b^2$	a	1	b

$a \cdot b^2$	$a \cdot b^2$	b	a	$a \cdot b$	b^2	1

Așadar, în acest caz, grupul G este determinat de generatorii a și b și de relațiile (9) și oricare din relațiile de la (11). Apare, iarăși întrebarea: există astfel de grupuri? Da, de exemplu: grupul S_6 al permutărilor de 6 elemente (sau grupul diedral de ordinul 3, D_3).

În concluzie, există două grupuri neizomorfe cu 6 elemente: grupul ciclic de ordinul 6 și grupul S_3 (sau D_3).