2.2.5 Principiul formării şi dezvoltării capacităţii de creaţie a elevilor prin învăţarea Matematicii

2.2.5.1 Ce este şi cum se manifestă creativitatea la Matematică?

Conceptul de creativitate a apărut pe piața de idei, în Psihologia cognitivă, la sfârșitul sec. XIX și începutul sec. XX, când prin introducerea lui se dorea înlocuirea unor concepte mai vechi, ca:

- *nou,*
- *noutate,*
- *invenție,*
- *inovație,*

concepte considerate, atunci, învechite, perimate, depășite moral. În cei peste 100 de ani care au trecut de la apariția lui, conceptul de creativitate a cunoscut o dezvoltare fără precedent, ajungându-se la peste 120 de „*definiții*”. A apărut și o știință care-l studiază:

- *Euristica*.

Toate „*definițiile*” conceptului de creativitate prezintă, într-un fel sau altul, faptul că el desemnează capacitatea gândirii umane de a crea, în plan ideatic sau material, produse / probleme / idei cu elemente de noutate, fie pentru persoana în cauză, fie pentru societate. Procesul de realizare a acestor produse / probleme / idei se numește *proces de creație*, iar rezultatul acestui proces se numește *produs de creație*.

Totalitatea proceselor psihice ale unei persoane, care concură la formarea și dezvoltarea creativității, formează *capacitatea de creație*, sau *potențialul creativ* al persoanei respective.

Psihologia cognitivă și Euristica, au arătat că fiecare dintre noi dispunem de un potențial creativ general / capacitate de creație generală, nenul(ă), dar și de anumite capacități / creativități specifice:

- *matematice,*
- *lingvistice,*
- *filosofice,*
- *muzicale,*
- *artistice,*
- *sportive*, etc.

Ca și în cazul inteligenței, și în cazul creativității, ansamblul creativităților specifice nu este neaparat egal cu creativitatea generală.

Câteva idei, de reținut:

- Omul dotat cu inteligenţă creatoare concepe ideile ca planuri de acţiune şi nu ca reflectări ale realităţii obiective. Din această perspectivă s-a născut ideea unei realităţi „*metaculturale*” (David Bidney 1908 - 1987, – antropologist și filosof canadian), spre care tind să se îndrepte atitudinile valorizatoare individuale. Deosebirile dintre oameni ar fi de natură participativă.
- S-ar putea spune că actul de creaţie autentică se retrage într-o altă sferă, care este rezervată unui grup restrâns de oameni, iar creaţia „*masivă*” inhibă funcţia critică a culturii, făcând apel la senzaţional şi cucerindu-şi un public imens, de fapt un consumator uriaş, care nu mai doreşte să aprecieze efortul intelectual, erudiţia, pentru că nu mai are nici timp, nici disponibilitatea şi este satisfăcut

de ceea ce i se oferă din abundenţă. Noua civilizaţie aparţine loisir-urilor degradate (adică a folosirii neraţionale a timpului, contrar voinţei şi obiceiurilor individuale) şi domniei pseudo-individualităţii.

- În momentul în care personalităţile creatoare nu mai pot crea şi nu mai pot conduce masele, dispare elanul vital, iar civilizaţia moare prin sinucidere.
- Întreaga evoluţie a omenirii, deci şi a lumii matematice, are ca sursă emitentă acea caracteristică a performanţelor minţii omului de a inventa, de a descoperi, deci de a realiza un produs nou (pentru el sau societate, în plan material sau ideal), original şi valoros.

Fiind o formă superioară a gândirii umane, activitatea creatoare este de o mare diversitate: de la ştiinţă şi artă, până la tehnică, organizare şi conducere a diverselor activităţi, fiind un fenomen deosebit de complex. Până în secolul XIX s-a crezut că facultatea gândirii de a crea este un dar divin, rezervat unor privilegiaţi ai soartei, că munca nu are nici un rol în actul creaţiei şi aceasta pentru că ştiinţa nu a fost în stare să dea explicaţii despre actul creaţiei. Ideile conform cărora o persoană, sau alta, este născută creatoare sau necreatoare (sau într-o situație în care nu (se) poate face nimic) au fost o frână importantă în dezvoltarea şi folosirea potenţialului creativ uman, cu toate că oamenii de ştiinţă au recunoscut că:

- „*Inspiraţia este 99% transpiraţie*.” (Edison),
- „*Întâmplarea favorizează în ştiinţă pe cei pregătiţi.*” (Pasteur)

sau

- „*Ce este invenţia? Sfârşitul căutării.*” (Goethe)

S-a făcut astfel simţită nevoia ca Psihologia şi Euristica (ştiinţa care studiază creativitatea – vezi mai sus!) să intervină şi să explice natura şi fazele procesului de producere a ideilor noi, factorii obiectivi şi subiectivi ai creativităţii.

Dintre toate aptitudinile speciale, cu rol deosebit în activitatea creatoare, foarte strâns corelată cu coeficientul de inteligenţă şi activitatea gândirii, dar fără a se identifica cu aceasta, este aptitudinea pentru Matematică, în formarea căreia intervin, în mod egal, cele două categorii de factori:

- *ereditari*

şi

- *de mediu*.

Aptitudinea pentru Matematică reprezintă capacitatea gândirii matematice de a generaliza rapid şi extensiv (formarea asociaţiilor generalizate), de a realiza rapid o prescurtare a procesului de raţionalizare şi a sistemului de operaţii, de comutare rapidă de la raţionamentul direct la cel invers (de a realiza asociaţii reversibile), vizualizarea relaţiilor spaţiale.

Dezvoltarea aptitudinilor matematice obişnuite se face pe baza activităţii intense şi organizate de asimilare a cunoştinţelor matematice.

Se pot pune următoarele întrebări:

- *Ce înseamnă să fii creativ în învăţământ matematic*?
- *În ce domenii ale învăţământului matematic se poate manifesta creativitatea*?
- *Este creativitatea o cerinţă importantă pentru succesul reformei în învăţământ*? *Dar în particular în învăţământul matematic*?
- *Cum putem contribui, ca profesor de Matematică, la dezvoltarea unui climat*

de creativitate în şcoală?

- *Este învăţământul matematic românesc, la ora actuală, un învăţământ creativ*?

În procesul de predare - învăţare a Matematicii spunem că un elev este creativ dacă este satisfăcută (cel puţin) una din următoarele condiţii:

- *produsul gândirii sale are un element de noutate fie pentru el, fie pentru societate, ceea ce la Matematică se concretizează în*:
    - o noţiune matematică,
    - o teoremă,
    - un algoritm de rezolvare a unui anumit tip de probleme sau o nouă metodă de rezolvare pentru un tip de probleme (deci gândirea găseşte o metodă de rezolvare a unei probleme care nu a fost prezentată de profesor la clasă şi nici în manual, sau găseşte singur soluţie pentru o problemă care nu intră în nici o tipologie din cele prezentate până atunci de profesor),
    - o teorie matematică necunoscută,
    - un nou sistem axiomatic,
    - un exemplu deosebit sau un contra - exemplu,
    - descoperirea unei erori,
    - rezolvarea sau punerea unei probleme deschise,
    - formularea de conjecturi sau transformarea unei conjecturi în teoreme,
    - o noutate în organizarea Matematicii,
    - o aplicaţie neaşteptată a unei teorii matematice cunoscute,
    - un mijloc tehnic de instruire mai deosebit;
- *gândirea este neconvenţională*, în sensul că respinge sau modifică unele idei acceptate până atunci;
- *gândirea izvorăşte dintr-o puternică motivare şi persistenţă*, adică ocupă un timp suficient de îndelungat şi se desfăşoară la o tensiune înaltă;
- *gândirea prelucrează sau rezolvă probleme care au fost puse de la început în termeni vagi, insuficient definiţi*, astfel încât gândirea formulează clar problema sau o reformulează.

Se cuvine aici să precizăm ce este aceea o *conjectură* şi ce este o *problemă deschisă*.

Este bine ştiut că încă de la începuturile sale, Matematica a creat şi s-a dezvoltat prin probleme, ajungând astăzi să vorbim de Universul matematic care domină întreaga cunoaştere şi care a dus la civilizaţia actuală. Volumul şi calitatea cunoştinţelor matematice la începutul mileniului III sunt impresionante şi cresc întru-un ritm rapid: se estimează că în ultimii 25 de ani, numărul teoremelor (demonstrate) creşte cu 1.000.000 pe an. Dar numărul problemelor ce se nasc anual este de câteva sute de mii: o parte îşi primesc rezolvarea (devin fie teoreme, fie probleme închise), iar o bună parte rămân probleme deschise (cele ce nu au fost rezolvate). Desigur că nu orice problemă nerezolvată capătă statutul de conjectură. Se consideră probleme deschise în Matematica ştiinţă, acele probleme de excepţie, nobile, provocatoare care pot declanşa teorii sau chiar ramuri noi în Universul matematic. Existenţa problemelor deschise asigură corectarea (individuală sau sub formă instituţionalizată) şi progresul în Matematică. Propoziţiile logice din Matematică care au fost demonstrate (dovedite) sunt desemnate prin termenii:

- *lemă*,
- *propoziţie*,
- *teoremă*

sau

- *corolar*,

iar cele ce nu sunt încă demonstrate (din diverse motive) prin termenii:

- *axiomă*,
- *postulat*,
- *problemă*,
- *ipoteză*

şi

- *conjectură*.

Termenul de *conjectură* a apărut ultimul, introdus de D. Hilbert, în formularea celor 23 de probleme supuse spre rezolvare comunităţii internaţionale a matematicienilor la al II - lea „*Congres internaţional al matematicienilor*" din 1900 de la Paris.

Primele probleme deschise din istoria Matematicii au apărut în Antichitatea greacă:

- *cuadratura cercului* (435 î.H., autor Artemon din Clazomene); Cuadratura (sau cvadratura) cercului este o veche și celebră problemă de Geometrie. Problema cerea să se construiască un pătrat care să aibă aceeași arie cu cea a unui cerc de rază dată, folosind doar rigla și compasul, adică doar instrumentele pe care le aveau la dispoziție geometrii antici. În notația matematică modernă, dacă cercul are raza r, pătratul ar trebui să aibă latura de lungime $r\cdot\sqrt{\pi}$. În 1882, însă, Ferdinand von Lindemann a demonstrat că π este un număr irațional transcendent (adică nealgebric, deci care nu poate fi construit cu rigla și compasul). Din aceasta rezultă că și lungimea laturii pătratului ar trebui să fie tot un număr irațional transcendent; ca urmare construcția este imposibilă.
- *duplicarea cubului* (430 î.H., autor Hippocrate din Chias); Se dă un cub de latură a. Se cere construirea, cu rigla și compasul, a unui segment de lungime x, astfel încât cubul cu această latură x să aibă volumul dublu față de cubul inițial. Din ecuația:

  $$x^3=2\cdot a^3$$

  rezultă că:

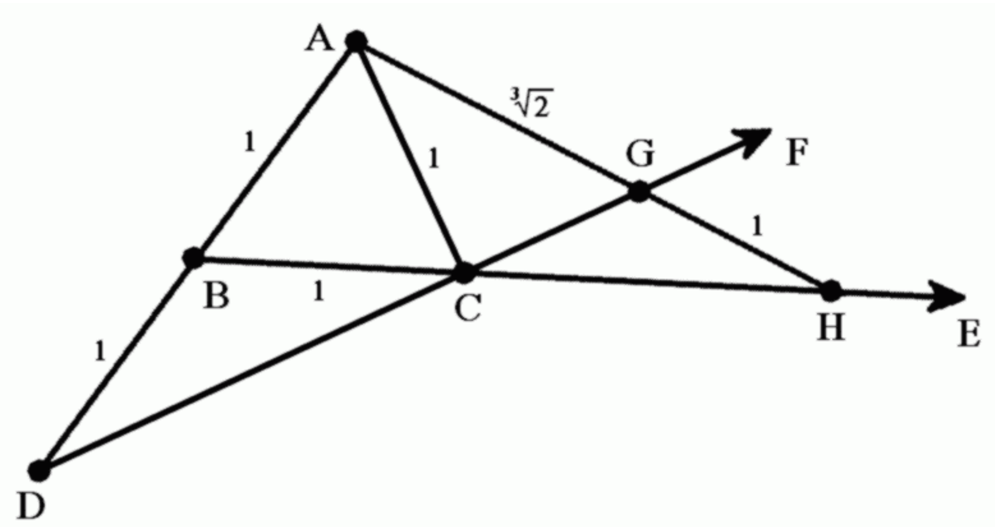
  $$x=a\cdot\sqrt[3]{2}.$$

  Pentru cazul particular a=1 se pune, așadar, problema construirii segmentului de lungime $\sqrt[3]{2}$. Problema era cunoscută de egipteni, indieni și greci. Conform legendelor mitologiei grecești, cetățenii atenieni, consultând oracolul lui Apollo din Delos, în 430 î.H., pentru a scăpa de o molimă care făcea ravagii, găsesc ca soluție necesitatea dublării mărimii altarului. Inițial, problema a fost înțeleasă eronat: era vorba de *volumul* altarului, nu de dimensiunile acestuia. Prima rezolvare, dar prin metodele geometriei analitice, provine de la Menaechmus

(380 î.H. – 320 î.H.), matematician grec. Alți matematicieni ai antichității care au fost preocupați de această problemă au fost: Hippias din Elis, Archytas din Tarene, Eudoxiu din Cnide. Ca și Menaechmus, aceştia au propus acelaşi tip de soluție - prin intersectarea unor figuri spațiale de tip conică. În epoca modernă, printre cei care au studiat această problemă se pot enumera: Carl Friedrich Gauss şi Evariste Galois. Abia în secolul al XIX-lea (1837), matematicianul francez Pierre – Laurent Wantzel (1814 - 1848) a demonstrat, în 1837, că segmentul de lungime $\sqrt[3]{2}$ nu poate fi construit cu rigla şi compasul. Demonstraţia lui Wantzel a fost simplificată de către Edmund Landau în 1908. Sunt mai multe modalități de a construi segmentul de lungime $\sqrt[3]{2}$, toate acestea însă recurg la alte instrumente decât rigla și compasul. Una din aceste metode necesită folosirea unei rigle care să aibă marcată pe ea distanța egală cu unitatea. Se construieşte un triunghi echilateral ABC cu latura unitară. Se prelungeşte segmentul [AB] tot cu unitatea şi fie D simetricul lui A față de B. Se plasează rigla în vârful A astfel încât să intersecteze semidreptele (DC şi (BC în G, respectiv H, astfel încât segmentul [GH] să aibă extremitățile chiar în punctele marcate (între care distanța este unitară): GH=1. Atunci AG=$\sqrt[3]{2}$. (Vezi figura de mai jos.) AC $\perp$ CD, CG=$\sqrt{x^2-1}$, unde x=AG; scriind relația lui Stewart în triunghiul ADG, obținem ecuația:

$$4\cdot\sqrt{x^2-1}+x^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1}+(\sqrt{3}+\sqrt{x^2-1})\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-1},$$

care are ca soluție pe $\sqrt[3]{2}$.



şi

- *trisecţiunea unghiului* (425 î.H., autor Hippias din Elis); Problema cere ca, folosind doar rigla și compasul, să se împartă un unghi în trei unghiuri congruente. De această problemă s-au mai ocupat și matematicienii antici:
  - Pappus din Alexandria (sec. al IV-lea î.H.);
  - Nicomede (sec. al III-lea î.H.);
  - Arhimede (sec. al III-lea î.H.).

Cele trei probleme de mai sus, sunt cele trei probleme celebre nerezolvate ale antichității, probleme de construcție geometrică ce trebuiau să fie rezolvate doar cu rigla și compasul.

Rezolvarea lor s-a făcut (în sens negativ!) de-abia în secolul al XIX - lea.

Cuvântul *conjectură* provine de la latinescul *conjectura*, care înseamnă ipoteză, prezumţie, opinie bazată pe aparenţe. În mod obişnuit, prin conjectură se înţelegere orice explicaţie presupusă a unui fenomen (eveniment) constituită fără certitudine şi în afara oricărei dovezi (probe), plecând de la aparenţă sau presupuneri. În acord cu Hilbert (autorul termenului de conjectură), se înţelege prin conjectură acea problemă deschisă care poate furniza arhitectura construirii unei teorii în Matematică (sau o direcţie nouă) sau avansarea unui nou domeniu.

Așadar, termenul de „*conjectură*” înseamnă, în Matematică, presupunere, ipoteză, în sensul unei afirmații nedemonstrate, care poate fi adevarată cu o probabilitate destul de mare (**spre exemplu,** este adevarată în mai multe cazuri particulare, ca în cazul inducției incomplete); *o conjectură* este o propoziţie matematică, corect constituită (adică, nu conţine în interiorul ei nici o contradicție), dar la care nu se cunoaşte valoarea de adevăr; altfel spus o conjectură este o propoziţie matematică, corectă din punct de vedere logic, dar care nu este nici adevărată, nici falsă, în logica bivalentă. Aritmetica şi apoi Teoria numerelor au produs cele mai multe şi subtile conjecturi în Matematică. **De exemplu,** Pierre Fermat (părintele Teoriei numerelor) a produs 48 conjecturi (trei s-au dovedit false), care au reprezentat probleme de cercetare pentru mulţi matematicieni (Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, etc).

Astfel, în Teoria numerelor; cea mai cunoscută conjectură, din acest domeniu, fiind (celebra conjectură) a lui Goldbach (1742):

- „*Orice număr natural par, mai mare sau egal cu 4, se poate scrie ca suma a două numere prime, nu neaparat distincte*”.

În 1742, matematicianul Christian Goldbach, într-o scrisoare trimisă marelui matematician al vremii Leonard Euler (1707–1783), îi propune să arate că orice număr par mai mare decât 6 este suma a două numere prime. **De exemplu:**

12=5+7,   18=5+13=7+11, … .

Nici până azi această problemă nu a fost rezolvată (pozitiv sau negativ), devenind astfel pentru Istoria Matematicii ipoteza (conjectura) lui Goldbach. De această conjectură, pe parcursul a peste 250 ani, s-a ocupat o serie de mari matematicieni:

- Gauss,
- Dirichlet,
- Kummer,
- Hardy,
- Littlewood,
- Papachristas.

În 2000, editura Faber&Faber a oferit un premiu de 1.000.000 de dolari pentru rezolvarea conjecturii lui Goldbach, după ce folosind un supercalculator această ipoteză a fost dovedită pentru numere pare cu 2^{72} cifre.

Se observă că această propoziţie este corectă din punct de vedere logic. Dacă am afirma că ea este adevărată, ar trebui să avem la dispoziţie o demonstraţie în acest sens, dar până acum nu există aşa ceva. Deci, nu putem afirma acest lucru. Dacă am afirma că propoziţia aceasta este falsă, ar trebui să găsim un contra - exemplu, care să invalideze enunţul; adică ar trebui să găsim un număr par, mai mare decât 4, care să nu poată fi scris ca suma a două numere prime. Dar nici acest contra - exemplu nu există, încă. În concluzie: putem spune că propoziţia de mai sus, în logica aristotelică, nu este nici adevărată, nici falsă; ea este, deci, o conjectură.

Iată şi alte câteva conjecturi din Teoria numerelor (care pot fi înţelese de orice absolvent de liceu, ceea ce nu înseamnă că au şi rezolvare elementară):

1) Înţelegem prin *număr prim Mersenne*, numărul prim de forma:

$M_n=2^n-1$.

De exemplu:

$2^2-1=3$; $2^3-1=7$; $2^5-1=31$; $2^7-1=127$;
$2^{13}-1=8.191$, $2^{17}-1=131.071$, $2^{19}-1=524.287$,
$2^{31}-1=2.147.483.647$, $2^{61}-1=2.305.843.009.213.693.951$,
$2^{89}-1=618.970.019.642.690.137.449.562.111$,
$2^{107}-1=162.259.276.829.213.363.391.578.010.288.127$,
$2^{127}-1=170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727$, ….

Până azi se cunosc numai 37 de numere prime Mersenne (care sunt din ce în ce mai mari, obţinute cu supercalculatorul). Cel mai mare număr prim Mersenne obţinut în 1997 (în Anglia de Gordon Spence) este $M_{2.976.221}$ care are 895.932 cifre. Întrebarea este:

- *Există o infinitate de numere prime Mersenne*?

2) Se înţelege prin *număr perfect*, un număr natural egal cu suma divizorilor săi (suma părţilor sale alicate) mai puţin el însuşi. **De exemplu:**

$6=1+2+3$; $28=1+2+4+7+14$; … .

S-a conjecturat că orice număr perfect este par (această afirmaţie este încă nedemonstrată). La fel nu se ştie dacă există o infinitate de numere perfecte.

3) Înţelegem prin *număr prim Fermat*, numărul:

$F_n=2^{2^n}+1$,

cu $n\in\mathbf{N}$, care este prim. Fermat a arătat că F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sunt prime şi a conjecturat că oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, F_n este prim. Euler a arătat că F_5 nu este prim, deoarece:

$F_5=2^{32}+1=4.294.967.297=641\cdot6.700.417$.

Nu se ştie nici până azi dacă există o infinitate de numere prime Fermat şi nici dacă există o infinitate de numere Fermat compuse. Importanţa numerelor prime Fermat a fost arătată de Gauss, demonstrând proprietatea că se pot construi cu rigla şi compasul numai poligoanele regulate cu n laturi, unde:

$N=2^k\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$,

iar numerele p_1, p_2, …, p_k, sunt numere prime Fermat, distincte.

4) Două numere naturale *a* şi *b* se zic *prietene* (*amice*) dacă suma părţilor alicate ale unuia este egală cu celălalt. **De exemplu:**

$a=220$ şi $b=284$.

(Într-adevăr,

$220=2^2\cdot5\cdot11$ şi $284=2^2\cdot71$,

deci,

$|\mathcal{D}(220)|=3\cdot2\cdot2=12$ şi $|\mathcal{D}(284)|=3\cdot2=6$.

Un calcul simplu ne arată că:

$\mathcal{D}(220)=\{1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110,220\}$,

$\mathcal{D}(284)=\{1,2,4,71,142,284\}$,

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

şi

1+2+4+71+142=220.)

Nu se ştie dacă există o infinitate de perechi de numere amice. Mai general, trei numere naturale *a*, *b*, *c* se zic *sociabile*, dacă:

$b=\sigma(a)$, $c=\sigma(b)$, $a=\sigma(c)$,

unde $\sigma(n)$ este suma părţilor alicate a numărului natural *n*. Un exemplu de numere sociabile sunt:

a=1.945.330.728.960; b=2.324.196.638.729; c=2.615.631.953.920.

Nu se ştie dacă există o infinitate de triplete sociabile.

5) Numerele prime *p*, *q* se zic *gemene*, dacă:

$|p-q|=2$.

De exemplu:

(3;5); (5;7); (17;19); (29;31); … .

Nu se ştie dacă există o infinitate de numere prime gemene.

6) Un număr natural n se numeşte *număr Munchausen*, dacă are proprietatea că este egal cu suma puterilor cifrelor sale, iar exponentul fiecărei puteri este egal cu cifra respectivă. **De exemplu,** 0, 1, 3.435, 438.579.088;

$3.435=3^3+4^4+3^3+5^5$ şi $438.579.088=4^4+3^3+8^8+5^5+7^7+9^9+0^0+8^8+8^8$,

cu convenția:

$0^0=0$.

Nu se știe câte numere Munchausen există.

7) Există numere naturale, a și b, cu proprietatea că fiecare este suma cuburilor cifrelor celuilalt. **De exemplu:** 136 și 244. Într-adevăr,

$136=2^3+4^3+4^3$ și $244=1^3+3^3+6^3$.

Nu se știe câte perechi de astfel de numere există.

8) (Conjectura lui Legendre) Pentru orice număr natural, nenul, n, există un număr prim p, astfel încât:

$n^2<p<(n+1)^2$?

9) Există o infinitate de numere prime p, de forma:

$p=n^2+1$?

10) Se cuvine să menționăm, aici, și următoarea propoziție, numită „*conjectura lui Andrica*”:

- „*Dacă $(p_n)_{n\geq 1}$, este șirul numerelor prime, atunci, pentru orice n $\in$* ***N*****, avem*:

  $\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}\in(0,1)$.”

Este potrivit să menționăm aici și:

11) „*Conjectura lui Smarandache*”:

- „*Dacă $(p_n)_{n\geq 1}$, este șirul numerelor prime, atunci, pentru orice n $\in$* ***N*****, ecuația*:

  $p_{n+1}^x-p_n^x=1$,

  are soluție mai mare decât $\frac{1}{2}$.”

12) „*Conjectura lui Oppermann*”:

- *„Pentru orice n $\in$**N****, în intervalele:*

  $[n^2-n+1, n^2-1]$ *și* $[n^2+1, n^2+n]$,

  există cel puțin un număr prim.”

13) *„Conjectura lui Firoozbakht”:*

- *„Dacă $(p_n)_{n\geq 1}$, este șirul numerelor prime, atunci, pentru orice n $\in$**N****, avem:*

  $\sqrt[n+1]{p_{n+1}} - \sqrt[n]{p_n} < 0.$”

14) Tot în acest context merită să facem şi următoarea precizare: se ştie că în manuscrisele lui Fermat a fost găsit următorul enunţ:

- *„Pentru orice n, mai mare sau egal cu 4, ecuaţia $x^n+y^n=z^n$ nu are nici o soluţie în mulţimea numerelor întregi*”.

Acest enunţ este cunoscut sub numele de *Marea teoremă a lui Fermat*, cu toate că, se pare că, Fermat nu a dat nici o demonstraţie acestui enunţ, sau cel puţin aşa ceva nu s-a găsit în manuscrisele sale. Ba mai mult, până în 1993, nu s-a dat o demonstraţie a acestei „*teoreme*” şi nici nu s-a găsit nici un contra - exemplu, care să infirme enunţul lui Fermat; adică nu s-a găsit nici un număr natural n, mai mare sau egal cu 4, pentru care ecuaţia de mai sus să aibă, cel puţin o soluţie. În 1993 matematicianul englez Andrew Wiles a demonstrat că această propoziţie a lui Fermat este adevărată.

De fapt, începând cam pe la jumătatea anului 1986, pe baza progreselor succesive din anii anteriori ai lui Gerhard Frey, Jean-Pierre Serre și Ken Ribet, a devenit clar că Marea Teoremă a lui Fermat putea fi dovedită ca un corolar al unei forme limitate a Teoremei modularității (nedovedită la acea vreme și cunoscută apoi sub numele de „*conjectura Taniyama–Shimura–Weil*”). Teorema de modularitate a implicat curbe eliptice, care a fost, de asemenea, domeniul de specialitate al lui Wiles.

Conjectura a fost văzută de matematicienii contemporani ca fiind importantă, dar extraordinar de dificil sau poate imposibil de dovedit. **De exemplu,** fostul profesor al lui Wiles, John Coates, a declarat că părea „*imposibil de demonstrat*”. Și Ken Ribet a considerat „*este complet inaccesibilă*”, adăugând că „*Andrew Wiles a fost probabil unul dintre puținii oameni de pe pământ care au avut îndrăzneala să viseze că să o dovedească.*”

În ciuda acestui fapt, Wiles, cu fascinația sa din copilărie pentru Marea Teoremă a lui Fermat, a decis să accepte provocarea de a demonstra conjectura. El s-a pus pe treabă în secret pentru a dovedi că fiecare curbă eliptică este modulară. Astfel, el și-a dedicat tot timpul cercetării acestui lucru, timp de peste șase ani, lucrând în secret aproape total, ascunzându-și eforturile prin elaborarea lucrărilor în segmente mici sub formă de documente separate, încredințându-le, în exclusivitate, doar soției sale.

În cele din urmă, în mai 1993, totul părea gata: Wiles își terminase demonstrația de 200 de pagini și era gata să o expună la un congres din Cambridge. Astfel, în iunie 1993, el și-a prezentat rezultatele cercetărilor sale publicului, pentru prima dată, la o conferință la Cambridge. A ținut câte o prelegere pe zi, luni, marți și miercuri, cu titlul „*Forme modulare, curbe eliptice și reprezentări Galois*”; nici măcar nu s-a menționat timid conjectura lui Fermat. La sfârșitul celei de-a treia prelegeri, A. Wiles a concluzionat că Marea Teoremă a lui Fermat era adevărată.

Dar sarcina era departe de a fi îndeplinită. O comisie de matematicieni, foarte experți în domeniul teoriei numerelor, a trebuit să analizeze linie cu linie cele două sute de pagini de demonstrație.

În august 1993, s-a descoperit că demonstrația lui conținea un defect într-un domeniu. Andrew Wiles s-a întors la Princeton în toamna anului 1993 dezamăgit și stânjenit. După un an fără îmbunătățiri, cu întreaga presiune a comunității matematice „*încălzindu-se*” doar cu câteva noutăți, era hotărât să renunțe la orice speranță și să uite să dovedească teorema.

Potrivit lui Wiles, ideea crucială era de a ocoli – mai degrabă decât de a închide – această zonă, și care i-a venit la 19 septembrie 1994, când era pe punctul de a renunța. Împreună cu fostul său student Richard Taylor, a publicat o a doua lucrare care a ocolit problema greșită și a completat astfel demonstrația. Ambele lucrări au fost publicate în mai 1995 într-un număr dedicat al Annals of Mathematics.

Deci, ca în cele mai frumoase teorii, o intuiție l-a făcut să găsească din nou drumul cel bun. Noua demonstrație a fost examinată, dar de data aceasta a fost fără erori și a fost acceptată oficial de Uniunea Internațională Matematică abia patru ani mai târziu, în 1998.

Așadar, după mai bine de trei sute de ani, Marea Teoremă a lui Fermat a fost, în sfârșit, demonstrată.

În ciuda faptului că nu a câștigat medalia Fields pentru că depășise limita de vârstă (avea peste 40 de ani), Wiles a câștigat mai multe premii, inclusiv Premiul Wolf pentru Matematică în 1995 și prestigiosul Premiu Abel în 2016 „*pentru demonstrația uimitoare a celei mai recente teoreme a lui Fermat prin conjectura lui, modularitate pentru curbe eliptice semistabile, cu care a inaugurat o nouă eră a teoriei numerelor*".

Aşadar, acesta este un caz în care o conjectură este transformată în teoremă. (???)

Iată acum şi două conjecturi celebre din Geometrie:

15) În corespondenţa dintre astronomul şi geometrul Johannes Kepler (1571–1630) şi matematicianul britanic Thomas Harriot (1560–1621) s-a născut aşa-zisa *conjectură a lui Kepler*, care constă în aranjarea unor sfere de aceeaşi rază într-un spaţiu închis astfel încât să optimizeze ocuparea acestuia. Este exact ceea ce vedem cum sunt aşezate portocalele, roşiile etc. pe tarabe în piaţă. Kepler a conjecturat că aşezarea optimă (din mai multe posibile) a sferelor este a *reţelei centrate* (în care fiecare sferă este înconjurată de 12 sfere împărţite în două straturi paralele cuprinzând fiecare câte 6 sfere tangente unei sfere oarecare). În primul strat se înconjoară o sferă cu alte 6 sfere tangente (se obţine o aşa zisă stea hexagonală), apoi al doilea strat format din sfere aşezate în spaţiile goale ale primului strat şi aşa mai departe. S-a constatat că această aşezare ocupă 74% din spaţiul de împachetare. O altă aşezare a sferelor este când al doilea strat se aşează peste primul astfel încât sferele să fie tangente încât să formeze o reţea pătratică. În acest caz se ocupă 53% din spaţiul de aranjare. Kepler a analizat o serie de configuraţii de aşezare a sferelor şi a ajuns la concluzia (fără demonstraţie), care a rămas sub numele de conjectura lui Kepler, că aşezarea în straturi de reţea hexagonală este optimă.

De această conjectură s-au ocupat în decursul veacurilor mulţi matematicieni celebri, însă fără succes. În anii 1990, matematicianul Thomas Hale de la Universitatea Pittsburg (SUA) a publicat o serie de lucrări legate de această conjectură, culminând în 1997 cu un articol de 250 pagini publicat în Annals of Mathematics, în care conjectura este demonstrată în proporţie de 99% cu ajutorul calculatorului.

„*Verdictul experților a fost că soluția pare să funcționeze, dar ei nu aveau timpul și energia necesare pentru a verifica totul într-o manieră extinsă*”, a spus Henry Cohn, editor al revistei Forum of Mathematics, Pi.

„*Demonstrația a fost publicată în 2005 și nu au fost identificate erori ireparabile, însă aceea era o situație nesatisfăcătoare, deoarece soluția părea să se afle dincolo de posibilitatea comunității de matematicieni de a opera o verificare extinsă a teoriei*”, a adăugat Henry Cohn, care este și cercetător la Microsoft Research New England din Cambridge, Massachusetts.

„*Pentru a remedia această situație și pentru a demonstra certitudinea, profesorul Hales a apelat la computere, folosind tehnici de verificare formale. El și echipa lui de colaboratori au scris întreaga soluție, cu detalii extraordinare, folosind logica strict formală, pe care un program computerizat a verificat-o apoi cu o rigoare perfectă. Acest studiu este rezultatul analizei lor complete*”, a explicat profesorul Cohn, conform Agerpres.

Noul studiu nu doar că a rezolvat o problemă de Matematică veche de trei secole, ci reprezintă și un pas uriaș făcut în domeniul verificărilor computerizate ale unor demonstrații matematice complexe, au precizat specialiștii de la Cambridge University Press, cea mai veche tipografie universitară din lume.

Deci demonstrația lui Hale nu este o demonstraţie completă (iată cum folosind calculatorul în scop demonstrativ, obţinem grade de demonstraţie în Matematică).

Nemulţumit, Hale a lansat *Proiectul flyspeck* pentru a da o demonstraţie formală completă a conjecturii - vezi www.math.pitt.edu/thales/flyspeck.

16) O altă conjectură geometrică este *conjectura (ipoteza) punctelor*, care a fost trecută de curând în rândul teoremelor (problemelor rezolvate). Fie:

$M=\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$

o mulţime de n (cu $n\geq4$) puncte distincte necoliniare, care determină mulţimea de drepte:

$\Delta=\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}$.

Să se arate că, oricare ar fi aşezarea celor n puncte, există întotdeauna drepte în Δ, care conţin numai două puncte din M. Această problemă (al cărei autor nu-l cunosc!) a rămas nerezolvată peste 40 de ani. Nu de mult ea a fost rezolvată folosind un minim de cunoştinţe de Geometrie, care se obţin în şcoala gimnazială.

Un raţionament foarte simplu arată că:

$$n\leq k\leq\frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Rezolvarea acestei conjecturi este integral prezentată în Simion Singh: „*Marea teoremă a lui Fermat*” (Editura Humanitas, Bucureşti, 1998).

Conjecturile au reprezentat şi reprezintă în continuare căi prin care Matematica se dezvoltă alături de metodele reprezentate de programele de cercetare (cercetarea pe bază de program), cum sunt:

- *programul de la Erlangen* (pentru Geometrie),
- *programul lui Hilbert*

sau

- *programul Langlands*.

În 1844, matematicianul Eugène Charles Catalan a lansat conjectura care-i poartă numele, conform căreia ecuaţia:

$x^y - z^t = 1$

are singura soluţie:

$x=3$; $y=2$; $z=2$; $t=3$.

Această conjectură a fost tranşată de matematicianul german (de origine română) Preda Mihăilescu, în anul 2002, de când a devenit Teorema lui Mihăilescu.

Numim *problemă deschisă* o problemă matematică, corect constituită, care nu are o soluţie generală, decât câteva soluţii particulare. **De exemplu:**

a) „*Să se stabilească legea de distribuire a numerelor prime printre numerele naturale*”;

b) „*Să se determine toate grupurile neizomorfe de un anumit ordin n*”;

c) „*Să se determine toate numerele naturale n pentru care n!+1 este pătrat perfect*” (1876, H. Brocard);

d) Referitor la conjectura 1), de mai sus: „*Se ştie că dacă 2^n-1 este un număr prim, atunci şi n este un număr prim. Apare în mod natural întrebarea reciprocă: Dacă n este un număr prim, rezultă că şi 2^n-1 este tot un număr prim? Sau altfel: Care sunt valorile lui n - prim, pentru care 2^n-1 este tot un număr prim?*”

e) „*Fiind dat un număr natural n≥2, există numere prime p de / cu n cifre, astfel încât suprimând câte o cifră de la sfârșitul numărului p (a unităților!), ceea ce rămâne să fie tot un număr prim?*”

f) „*Să se determine în ce condiţii o funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ care are Proprietatea lui Darboux pe D este (şi) continuă pe D*”;

g) „*Să se stabilească în ce condiţii suma a două funcţii cu Proprietatea lui Darboux are, la rândul ei această proprietate*”;

h) „*Se consideră n puncte A_1, A_2, ..., A_n pe un cerc de centru O şi rază R, M – mijlocul unuia din arcele subîntinse de linia frântă şi N – piciorul perpendicularei duse din M pe linia frântă. Să se stabilească în ce condiţii punctul N este mijlocul liniei frânte*”.

Referitor la aceste probleme deschise, trebuie să facem aici câteva precizări:

A) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, există n numere naturale consecutive compuse, deci printre care nu se află niciun număr prim.

Într-adevăr, numerele:

$(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$, ..., $(n+1)!+(n+1)$,

sunt n numere compuse.

B) Dacă n este un număr natural nenul şi notăm cu n_g – numărul grupurilor neizomorfe, de ordinul n, sunt cunoscute și utilizate următoarele rezultate:

n	n_g	n	n_g	n	n_g	n	n_g
1	1	5	1	9	2	13	1
2	1	6	2	10	2	14	2
3	1	7	1	11	1	15	1
4	2	8	5	12	5	16	14

C) Pentru ipoteza lui Brocard se cunosc soluțiile:
(4,5), (5,11) și (7,71).

D) Vezi cele precizate la conjectura 1). Răspunsul la prima întrebare este negativ; contraexemplu:
$2^{11}-1=2047=23\cdot89$.

E) Da. Există astfel de numere. **De exemplu:**

- Pentru n=2: 23, 29, 37, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 79, 83, 89, 97;
- Pentru n=3: 233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 419, 431, 433, 439, 479, 571, 577, 593, 599, 613, 617, 619, 673, 677, 719, 733, 739, 797, 839, 971, 977;
- Pentru n=4: 2333, 2339, 2393, 2399, 2939, 3119, 3137, 3733, 3739, 3793, 3797, 4337, 4339, 4391, 4397, 4793, 4799, 571, 5717, 5779, 5939, 6131, 6133, 6173, 6197, 6199, 6733, 6737, 6779, 7193, 7331, 7333, etc.
- …
- Pentru n=8: Cel mai mare astfel de număr cunoscut este: 73.939.133.

F) Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție cu proprietatea lui Darboux, atunci, dacă f:

- este injectivă,

sau

- este strict monotonă,

sau

- are limite laterale finite în fiecare punct din D,

rezultă că ea este și continuă pe D.

G) Dacă $f, g : D \to R$ sunt două funcții cu proprietatea lui Darboux, atunci, dacă f și g:

- admit primitive pe D,

sau

- sunt continue pe D,

sau

- sunt de prima clasă Baire pe D și mulțimile lor de discontinuitate sunt disjuncte,

rezultă că funcția f+g are și ea proprietatea lui Darboux pe D.

Trebuie să facem aici următoarele precizări:

În Matematică, funcțiile Baire sunt funcții obținute din funcții continue prin iterația transfinită a operației de formare a limitelor punctuale ale șirurilor de funcții. Ele au fost introduse de René-Louis Baire în 1899. O mulţime Baire este o mulţime a cărei funcţie caracteristică este o funcţie Baire.

Clasificarea funcțiilor Baire:

Funcțiile Baire din clasa α, pentru orice număr ordinal numărabil α, formează un spațiu vectorial de funcții cu valori reale definite pe un spațiu topologic, după cum urmează:

- Funcțiile Baire clasa 0 sunt funcțiile continue.
- Funcțiile Baire clasa 1 sunt acele funcții care sunt limita punctuală a unui șir de funcții Baire clasa 0.
- În general, funcțiile Baire de clasă α sunt toate funcțiile care sunt limita punctuală a unui șir de funcții din clasa Baire mai mică decât α.

Henri Lebesgue a demonstrat că (pentru funcții pe intervalul unitar) fiecare clasă Baire a unui număr ordinal numărabil conține funcții care nu sunt în nicio clasă mai mică și că există funcții care nu sunt în nicio clasă Baire.

H) Dacă punctele A și B aparțin cercului de centru O și rază R și M este mijlocul arcului AB, iar N este piciorul perpendicularei din M pe AB, atunci N este mijlocul segmentului [AB]. Acest rezultat este cunoscut în literatura domeniului sub numele de *Teorema lui Arhimede* și se demonstrează foarte ușor, la nivel gimnazial.

Considerăm, acum, tot un cerc de centru O și rază R și trei puncte: A, B și C, pe acest cerc. Fie M mijlocul arcului subântins de linia frântă ABC (deci, M este mijlocul arcului ABC) și N proiecția lui M pe această linie frântă. Deci, N poate coincide cu B sau să fie în interiorul unuia din segmentele (AB), respectiv (BC). Vezi figura de mai jos.

Prelungim segmentul [AB] cu segmentul:

$$[BD]\equiv[BC].$$

Atunci triunghiurile MBC și MBD sunt congurente (după cazul LUL). Rezultă că:

$$MC=MD.$$

Dar,

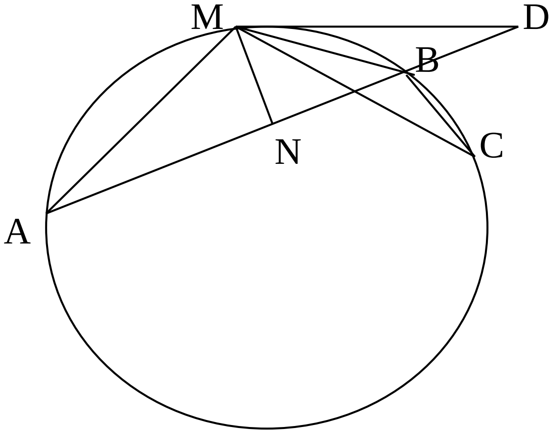
$$MC=MA.$$

Deci,

$$MA=MD$$

și, astfel, triunghiul AMD este isoscel. Rezultă că MN este și mediană în acest triunghi și, astfel,

$$AN=ND.$$



Dar,

$ND=NB+BD=NB+BC$.

Așadar, punctul N este mijlocul linie frânte ABC.

Acest rezultat este cunoscut în literatura de specialitate, ca fiind *Teorema lui Al-Biruni*. Mohamed Al-Biruni a fost profesor de Matematică la Universitatea din Kiat, la sfârșitul primului mileniu și începutul celui de al doilea. Kiatul este un vechi oraș din lumea arabă, situat, conform documentelor vremii, la aproximativ 1.000 de km, Nord-Est, de vechiul așezământ al Edenului, actualmente pe teritoriul Uzbekistanului. În anul 999 el avea, deja, 22 de demonstrații ale acestui rezultat și mai dă încă una, dar precizează că acest rezultat nu-i aparține. Mai precizăm și faptul că tot Al-Biruni, în anul 997, dă prima demonstrație a Teoremei sinusului, un alt rezultat care, zice el că, nu este al lui.

Oricărei probleme i se poate asocia o întrebare, care o conturează şi îi dă o direcţie de soluţionare. Cvasi-echivalenţa dintre punerea şi soluţionarea unei probleme, semnalată adesea de marii gânditori, nu înseamnă că întrebarea dispune de un răspuns gata pregătit, căruia numai proclamarea îi lipseşte, ci că truda de a pune bine problema (întrebarea) este în bună măsură şi truda de a o rezolva (de a răspunde) în cadrul referenţial stabilit.

„*Adevăratele mari probleme nu sunt puse decât atunci când sunt rezolvate*”, afirma Bergson (1859-1941, filosof francez).

Se știe că dacă n este număr prim, atunci, abstracție făcând de un izomorfism, există un singur grup G, de ordin n. În iunie 1992, în AMM, J. Dieter a demonstrat că reciproca acestei afirmații este falsă, mai precis el a arătat că:

- „*Dacă* $n \in \mathbf{N}^*$, *există un singur grup G, de ordin n dacă și numai dacă*:

$$(n,\phi(n))=1, \qquad (*)$$

unde ϕ *este funcția indicator al lui Euler.*”

Acesta este un exemplu mai deosebit, în care propoziția reciprocă asociată unei teoreme directe este falsă; deci teorema directă nu are reciprocă. Se verifică imediat că numărul 15 este primul număr compus pentru care egalitatea (∗) are loc; vezi (și) tabelul de mai sus.

Găsim probleme deschise în majoritatea domeniilor Matematicii:

- Analiză matematică,
- Geometrie,
- Topologie etc.,

propuse de diverşi matematicieni (multe le poartă numele):

- *ipoteza lui Riemann*,
- *ipoteza conţinutului*,
- *ipoteza lui Poincaré*,
- *ipoteza (conjectura) lui Kepler*,
- *conjectura lui Bieberbach* (Al n-lea coeficient din seria de puteri a unei funcții univalente nu trebuie să fie mai mare decât n. Cu alte cuvinte, dacă:

  $f(z)=a_0+a_1\cdot z+a_2\cdot z^2+\ldots+a_n\cdot z^n+\ldots$

  este o aplicație conformă a unui disc unitate pe orice domeniu și $a_0=0$ și $a_1=1$, atunci $|a_n|\leq n\cdot|a_1|$. În termeni mai tehnici, „*extremitatea geometrică implică* *extremitatea metrică*". O formulare alternativă este că $|a_j|\leq j$, pentru orice funcție Schlicht, f (Krantz 1999, p. 150).), etc.

În anul 2000, Institutul matematic Clay (USA) a lansat în cadrul unei Conferinţe aniversare a centenarului congresului internaţional al matematicienilor din 1900, un număr de 7 probleme (numite problemele mileniului trei, „*Millennium Problems in Mathematics*") spre rezolvare, fiecare problemă este cotată cu un premiu de 1.000.000 de dolari. Printre aceste probleme se află şi celebra ipoteză a lui Riemann (1859), care vizează distribuţia numerelor prime. Distribuţia numerelor prime în rândul celorlalte numere nu urmează un tipar regulat. Totuşi, Bernard Riemann a observat că frecvenţa numerelor prime este foarte apropiată de rezultatele furnizate de o funcţie complexă, denumită *funcţia zeta Riemann*.

Ipoteza problemei afirmă că toate soluţiile ecuaţiei:

$$\zeta(s)=0$$

urmează o anumită linie dreaptă verticală, potrivit Clay Mathematics Institute; adică funcţia:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

unde $s\in\mathbf{C}$, are zerourile în **C** situate pe drepte:

$$s=\frac{1}{2}+b\cdot i,$$

cu $b\in\mathbf{R}$. Această conjectură reprezintă cea mai importantă şi dificilă problemă a Matematicii contemporane. Înainte de a muri, Hilbert a fost întrebat, dacă ar învia după 500 de ani, ce întrebare ar pune, şi el a răspuns:

- *Dacă a fost rezolvată ipoteza lui Riemann*?

Deşi matematicienii au demonstrat că teorema se verifică pentru primele 10 miliarde de soluţii, abia în 2015 a fost găsită o dovadă care explică distribuţia numerelor prime dincolo de acea limită.

Ipoteza lui Riemann este una din cele mai importante probleme din Matematica contemporană, în principal pentru că s-a demonstrat că un mare număr de alte rezultate importante sunt adevărate, dacă ipoteza Riemann este adevărată. Majoritatea matematicienilor cred că ipoteza Riemann este adevărată. (J. E. Littlewood și Atle Selberg sunt sceptici. Scepticismul lui Selberg, rezultă din tinerețea sa. Într-o lucrare din 1989, el a sugerat că există o clasă mai largă de funcții, *clasa Selberg,* pentru care această ipoteză este valabilă.) Așa cum am precizat mai sus, a fost oferit un premiu de 1.000.000 de dolari de către Institutul Matematic Clay pentru prima demonstrație corectă a acestei ipoteze.

Și totuși, Mediafax, a anunțat în 19 noiembrie 2015, că profesorul nigerian Opeyemi Enoch a rezolvat ipoteza Riemann şi că, astfel, ar putea să câştige pentru această reuşită un premiu de 1 milion de dolari, potrivit dailymail.co.uk.

Deocamdată, Clay Mathematical Institute nici nu a confirmat, nici nu a infirmat faptul că profesorul Enoch a rezolvat în mod oficial această problemă, spunând doar că nu face comentarii la adresa numeroaselor soluţii care îi sunt propuse în mod constant pentru „*Millennium Problems in Mathematics*".

În urma acestui răspuns, mai mulţi critici au afirmat deja că ştirea despre rezolvarea ipotezei Riemann reprezintă o farsă.

Profesorul Enoch, care predă la Universitatea Federală Oye Ekiti (FUOYE) din Nigeria, a declarat pentru BBC că a fost motivat în decizia sa de a rezolva această problemă veche de 156 de ani, de studenţii săi.

Profesorul nigerian a prezentat soluţia sa, pe 11 noiembrie 2019, la International Conference on Mathematics and Computer Science din Viena, precizează site-ul nigerian de ştiri Vanguard.

În trecut, Opeyemi Enoch a realizat designul pentru un prototip de siloz pentru fermierii săraci, iar în prezent lucrează la un proiect care vizează protejarea conductelor de petrol împotriva actelor de vandalism şi la implementarea unei abordări matematice care să diminueze problemele generate de încălzirea globală.

Tot aici, amintim și conjectura lui Poincaré (sau și „*ipoteza lui Poincaré*”), prima dată enunțată de matematicianul francez Henri Poincaré în 1904, care afirmă că, „*dacă într-un spațiu tridimensional închis și nemărginit (cufundat într-un spațiu 4-dimensional) toate „cercurile” bidimensionale pot fi micșorate topografic până ce devin un punct, atunci acest spațiu tridimensional este echivalent din punct de vedere topologic (homeomorf) cu o „sferă” 3-dimensională*”.

Este interesant că problemele analoage referitoare la un spațiu închis cu 2 dimensiuni, sau și cu 4 sau chiar și mai multe dimensiuni au fost demonstrate încă de mai demult.

Rusul Grigorij (Grisha) Jakovlevič Perelman a fost singurul om care a reușit să rezolve una dintre cele șapte „*Probleme ale Mileniului*”, amintite mai sus, dovedind Conjectura Poincaré și care a refuzat premiul de un milion de dolari care i-a fost acordat de Clay Mathematics Institute pentru această descoperire.

Demonstrația matematicianului rus Grigori Perelman**,** din anul 2002, s-a situat pe primul loc în topul celor mai importante descoperiri matematice, alcătuit de prestigioasa revistă *Science*, la 22 decembrie 2006. Enigmaticul savant rus a făcut senzație nu numai pentru că a rezolvat o problemă care i-a pasionat pe specialiști vreme de aproape un secol, dar și pentru că în 2006 a refuzat *Medalia Fields*, un premiu în Matematică echivalent cu premiul Nobel, fiind prima persoană din lume care a făcut acest lucru.

Perelman a refuzat în anul 2010 și recompensa de un milion de dolari pe care *Clay Mathematics Institute* din Cambridge, Massachusetts a oferit-o pentru rezolvarea Conjecturii lui Poincaré, afirmând că „*Pentru mine este complet irelevantă, pentru că dacă soluția este cea corectă, nu este nevoie de nicio altă recunoaștere*”.

În finalul acestei secțiuni precizăm și faptul că sunt și conjecturi sau probleme deschise care sunt acceptate și ca fiind și adevărate și ca fiind (și) false. **De exemplu,** Problema 1 a lui David Hilbert, prezentată la Congresul mondial al matematicienilor de la Paris, din 1900:

„*Dacă* $A \subset \boldsymbol{R}$ *este o mulţime infinită, atunci să se arate că există fie o bijecţie* $A \to \boldsymbol{N}$, *fie o bijecţie* $A \to \boldsymbol{R}$”.

Cu alte cuvinte, problema poate fi reformulată astfel:

„*Există un cardinal strict intermediar între cardinalele mulţimilor* $\boldsymbol{N}$ *şi* $\boldsymbol{R}$?

Aceasta este cunoscută ca *problema continuului*. În 1963, Paul Cohen a arătat că rezultatul nu se poate obţine din sistemul de axiome Zermelo - Fraenkel al Teoriei mulţimilor. (Paul Joseph Cohen (2 aprilie 1934 – 23 martie 2007) a fost un matematician american. El este cel mai bine cunoscut pentru dovezile sale conform cărora ipoteza continuumului și axioma alegerii sunt independente de Teoria mulțimilor axiomatizată pe sistemul Zermelo-Fraenkel, pentru care a primit o medalie Fields.)

Cu alte cuvinte, există o Matematică care acceptă ipoteza continuului şi o alta care nu o acceptă, ambele fiind viabile, problema continuului fiind, astfel, închisă – vezi K. Gödel. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*. Princeton University Press, Princeton, 1940.

2.2.5.2 Factorii creativităţii la Matematică

Educarea gândirii duce treptat la dezvoltarea creativităţii, dar un rol important pentru realizarea acestui scop revine şi factorilor motivaţionali. Motivaţia - nota primită pentru un răspuns şi, mai ales, satisfacţia elevului de a fi rezolvat el singur un exerciţiu sau o problemă, este o competenţă a creativităţii ce trebuie luată în considerare, ori de câte ori practica didactică o reclamă.

Gândirea creatoare este principala componentă a creativităţii, iar principalii factori ai creativităţii la Matematică sunt:

- *sensibilitatea faţă de probleme*,
- *fluiditatea gândirii,*
- *flexibilitatea gândirii,*
- *originalitatea,*
- *perspicacitatea*

şi

- *iscusinţa*.

Să-i prezentăm pe scurt:

a) *Sensibilitatea faţă de probleme* constă în capacitatea gândirii de a compune probleme, de a reformula o problemă, care eventual a fost prezentată în termeni vagi, de a transcrie cu simboluri matematice un enunţ dat în limbaj natural, de a formula mai multe concluzii la o problemă dată, de a analiza şi sistematiza reguli care se aplică în demonstraţii, de a abstractiza şi generaliza.

b) *Fluiditatea gândirii* constă în capacitatea acesteia de a reda mai multe metode de rezolvare unei probleme date. Când se solicită acest lucru, profesorul trebuie să ceară, în mod explicit, ca elevii să prezinte pentru o problemă dată un anumit număr de metode de rezolvare, cel puţin egal cu numărul de metode pe care el le cunoaşte. În astfel de cazuri, uneori, surpriza vine din partea unor elevi care prezintă o metodă la care profesorul nici nu s-a gândit. Acest factor al creativităţii se dezvoltă la elevi şi prin atitudinea profesorului de a nu sugera imediat rezolvarea unei probleme, cu o metodă anume, ci de a discuta cu clasa anumite idei de rezolvare a respectivei probleme. În urma acestor discuţii va trebui să se aleagă calea cea mai simplă care duce la rezultat, evidenţiindu-se elevii care au găsit soluţiile cele mai deosebite.

c) *Flexibilitatea gândirii* este capacitatea acesteia de a trece cu uşurinţă de la o situaţie la alta. Practic în rezolvarea de probleme la Matematică, gândirea elevului trebuie determinată să caute reguli şi combinaţii de reguli, să formuleze ipoteze pe care, apoi, să le verifice. La clasele mici, când se rezolvă o problemă, trebuie să se gândească atât aritmetic cât şi algebric, iar la Geometrie, nu de puţine ori, se pot aplica raţionamente însuşite la Algebră sau Analiză matematică. Tot pentru dezvoltarea acestui factor al creativităţii se pot concepe lecţii speciale de aplicaţii ale Trigonometriei în Algebră sau Geometrie, ori lecţii de recapitulare finală, când în rezolvările de probleme se trece de la un tip de raţionament la altul.

d) *Perspicacitatea şi spontaneitatea* sunt alţi factori ai creativităţii şi constă în capacitatea gândirii elevului de a da răspunsuri corecte într-un timp relativ scurt, de a efectua rapid calcule şi judecăţi, de a observa dintr-un număr de obiecte sau fenomene matematice, respectiv proprietăţi ale acestora, pe acelea cerute de problemă. Elevul care rezolvă cele mai multe probleme, dintr-un set dat, într-un timp dat, de asemenea este un elev cu o gândire rapidă (se presupune că şi în scris are rapiditate). **De exemplu,** la clasa a VI-a, în cadrul lecţiilor despre „*procente*" se pot pune numeroase întrebări, care să-l determine pe elev să efectueze calcule rapide.

La clasele mici, dar şi la clasele de liceu se pot propune elevilor spre rezolvare anumite probleme (de tipuri nu neaparat întâlnite până atunci), rezervându-se acestora timp suficient de rezolvare. Pentru scoaterea în evidenţă a caracterului stimulativ al notei, este bine ca primului elev care prezintă profesorului toate problemele corect (deci şi complet) rezolvate, să i se acorde nota maximă.

2.2.5.3 Cum se dezvoltă capacitatea de creaţie a elevilor la Matematică

Din păcate şcoala romănescă, în general, şcoala românească de Matematică, în particular, tinde să favorizeze mai mult inteligenţa şi mai puţin creativitatea elevilor, cu toate că, se ştie, (că) progresul în societate, inclusiv în Matematică, nu se datorează atât oamenilor inteligenți, cât mai degrabă, celor creativi.

Elevii creativi în permanență își pun întrebări sau întreabă profesorii, ceea ce de multe ori poate fi deranjant și, de aceea, acest lucru este de evitat și se preferă favorizarea, oarecum în contra-balans, a elevilor receptivi, dar pasivi, chiar dacă sunt foarte inteligenți.

Marea satisfacţie de a fi izbutit să rezolvi o problemă, sentimentul de mulţumire sufletească ce izvorăşte din faptul că ai reuşit să învingi necunoscutul, că ai reuşit să îmbini într-un mod nou (cel puţin pentru tine) elemente cunoscute, este cu atât mai mare atunci când eşti tu însuţi creatorul unei asemenea probleme, creatorul unei idei noi menite să bucure (şi) pe alţii.

Iată de ce, formarea și dezvoltarea capacității de creație a elevilor la Matematică, presupune antrenarea acestora în toate etapele actului didactic:

- *proiectare*,
- *organizare*,
- *desfășurare*

și

- *evaluare*.

În felul acesta, folosind metode activ-participative, elevii devin părtași la propria lor formare și dezvoltare.

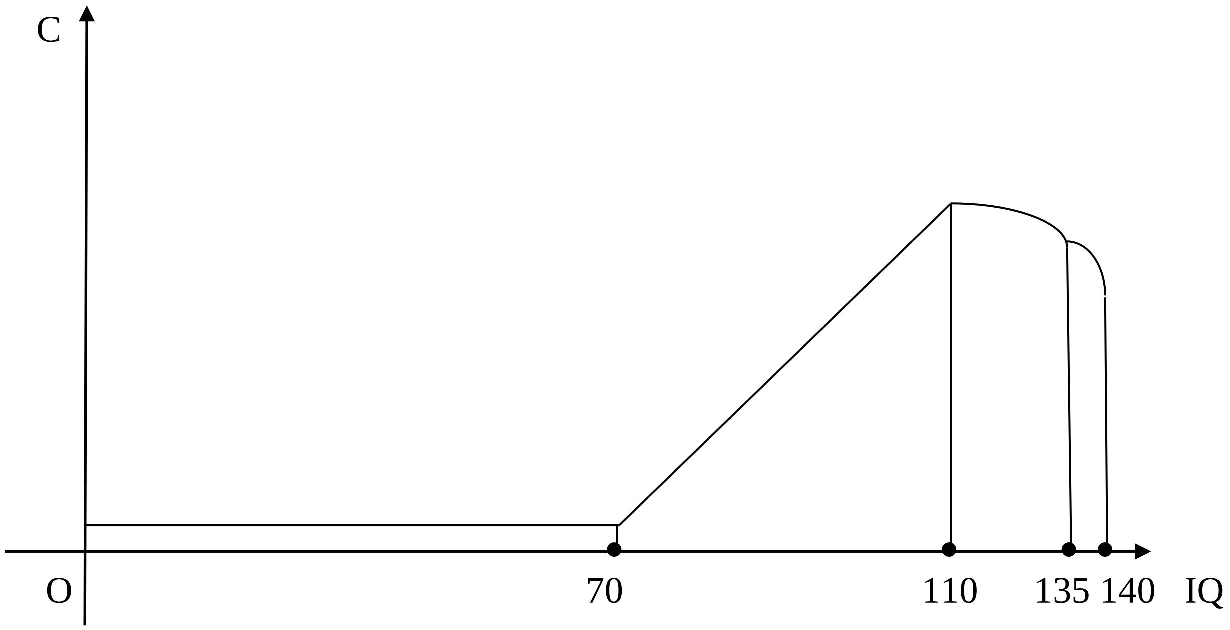
2.2.5.4 Legătura dintre inteligență și creativitate

Între inteligență și creativitate există o legătură de interdependență și intercondiționare, dar numai pînă la un anumit nivel de dezvoltare a inteligenței.

Astfel, o echipă de cercetători de la Centru de studii cognitive de pe lângă Universitatea Harvard, în urma experimentului efectuat în perioada 1940 - 1990, pe 8 din cei mai inteligenți copii (care la începutul experimentului aveau toți aprox. 7 ani și considerați astfel în urma testării cu testele de inteligență / Binet-Simon, pentru că aveau un coeficient de inteligență de aproximativ 135±0,5 IQ), a ajuns la următoarele concluzii:

- în domeniul „*handicapaților mintali*”, adică a acelor persoane care au o inteligență generală cuprinsă în intervalul [0,70) IQ, creativitatea este mică (dar nenulă) și constantă;
- în domeniul „*normalității*”, adică a acelor persoane care au o inteligență generală cuprinsă în intervalul [70,110) IQ, creativitatea crește direct proporțional cu inteligența;
- în domeniul „*inteligenței*”, adică a acelor persoane care au o inteligență generală cuprinsă în intervalul [110,135) IQ, creativitatea, în cel mai fericit caz rămâne constantă, dar, de cele mai multe ori, descrește;
- în domeniul „*geniilor*”, adică a acelor persoane care au o inteligență generală cuprinsă în intervalul [135,140) IQ, creativitatea, cu foarte rare excepții, descrește.

Aceste rezultate le putem reprezenta, grafic astfel:



2.2.5.5. Ce trebuie făcut pentru a dezvolta capacitatea de creaţie a elevilor la Matematică?

Realizarea acestui deziderat presupune găsirea de răspunsuri, cel puţin, la următoarelor întrebări:

1) *Ce se face la ora actuală în şcoală: un învăţământ al Matematicii moderne sau un învăţământ modern al Matematicii*?

2) *Care este rolul şi locul psiho-pedagogiei Matematicii în şcoală? Este acesta un nou capitol al Matematicii, sau al Psiho-pedagogiei*?

3) *Care este rolul şi locul Metodologiei învăţământului matematic ca disciplină de studiu în universitate*?

- **a)** *Punerea problemei, adică cum trebuie pusă problema*?
- **b)** *Situaţia educaţiei generale, adică, care este aceasta*?
- **c)** *Care este şi ce se întâmplă la graniţa dintre Matematică şi învăţământul ei*?
- **d)** *Care sunt rezultatele cercetărilor asupra conceptului de Matematică elementară şi asupra construcţiei programei şi în ce măsură ele înfluenţează procesul de predare - învăţare a Matematicii*?
- **e)** *Care este şi ce se întâmplă la graniţa dintre Metodologia învăţământului matematic, Psihologie, Pedagogie şi Sociologie*?
- **f)** *În ce măsură influenţează proiectarea didactică activitaea la orele de Matematică*?
- **g)** *Care sunt ultimele cercetări privind procedee pedagogice în şcoală şi în ce măsură sunt ele aplicate astăzi la clasă*?
- **h)** *Care sunt direcţiile de dezvoltare ale Metodologiei învăţământului matematic, ca disciplină în devenire*?
- **i)** *Care este corelaţia dintre studiul învăţământului matematic şi pregătirea practică pentru meserie a viitorilor profesori de Matematică*?
- **j)** *Care sunt problemele legate de programa de studiu în Metodologia învăţământului matematic*?

4) *Care este rolul şi locul cercetării în perfecţionarea învăţământului matematic*?

5) *În ce măsură s-au rezolvat următoarele problemele noi ale învăţământului matematic în şcoală*:

- **a)** *Corelaţia dintre progresul fără precedent al ideilor şi metodelor matematice, care se manifestă în dezvoltarea teoriilor clasice (Algebră, Geometrie, Analiză matematică), şi apariţia de noi discipline legate de noile ramuri ale Matematicii (Teoria informaţiei, Teoria grafelor, Teoria jocurilor, Programarea liniară),*
- **b)** *Utilizarea crescândă a calculatoarelor în predarea - învăţarea Matematicii,*
- **c)** *Punerea în valoare a principiilor şi concepţiilor generale, sistematizarea imensei acumulări de cunoştinţe matematice, care ne permite să ne orientăm fără dificultate în această bogăţie de fapte şi idei*?

6) *În ce măsură este cunoscută şi aplicată la clasă următoarea gamă diversificată a problematicii metodelor de predare - învăţare a Matematicii*:

- **a)** *Pregătirea pentru folosirea metodei axiomatice,*
- **b)** *Abordarea inductivă,*
- **c)** *Metoda deductivă,*
- **d)** *Metoda constructivistă,*
- **e)** *Importanţa obiectivelor generale ale predări - învăţării Matematicii în şcoală,*
- **f)** *Importanţa operaţionalizării obiectivelor (ierarhizarea acestora),*

g) *Scoaterea în evidenţă a unor aspecte epistemologice ale învăţării Matematicii (relaţia dintre dorinţa şi putinţa elevului de a învăţa Matematică)*?

7) *Este rezolvată problema formării profesorilor de Matematică*?

a) *Care sunt etapele formării profesorilor*?

b) *Care sunt obiectivele principale ale formării profesorilor de Matematică*?

c) *În ce sens trebuie să direcţioneze învăţământul matematic formarea actuală a profesorilor*?

8) *Care sunt relaţiile dintre Matematică şi aplicaţiile ei*?

a) *Care sunt aplicaţiile Matematicii în viaţa de toate zilele*?

b) *Care sunt aplicaţiile Matematicii la alte discipline şcolare*?

2.2.5.6 Probleme de rezolvat

1) stabilirea exactă a relaţiilor dintre structurile matematice şi structurile operatorii ale inteligenţei,

2) elaborarea de modele de dezvoltare intelectuală în învăţarea Matematicii.