SEMINAR D.M. 5

2.16 Specialitatea Matematică – Informatică (sesiune, 2003)

I. Există funcţii continue pe **R**,

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

cu proprietatea că:

$f(x)\in\mathbf{Q}$ dacă şi numai dacă $f(x+1)\notin\mathbf{Q}$? (i)

***Rezolvare*:** Presupunem că există o astfel de funcție f, cu proprietățile din enunț și considerăm funcția:

$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x)=f(x+1)-f(x)$. (1)

Atunci, conform ipotezei și operațiilor cu funcții continue, rezultă că g este continuă pe **R**. Pe de altă parte, conform echivalenței (i), rezultă că, pentru orice $x\in\mathbf{R}$, $g(x)\notin\mathbf{Q}$. (2) Acum distingem două posibilități:

<u>Cazul 1</u>: Funcția g este constantă. Deci, în acest caz, există $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, astfel încât, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$g(x)=\alpha$.

Din echivalența din enunț rezultă că f ia cel puțin o valoare rațională și cel puțin o valoare irațională. Fie $x_0\in\mathbf{R}$, pentru care $f(x_0)\in\mathbf{Q}$. Atunci, conform cu echivalența (i), $f(x_0+1)\notin\mathbf{Q}$, iar $f(x_0+2)\in\mathbf{Q}$. Rezultă că:

$2\cdot\alpha=g(x_0)+g(x_0+1)=f(x_0+2)-f(x_0)\in\mathbf{Q}$,

ceea ce contrazice afirmația (2).

<u>Cazul 2</u>: Funcția g nu este constantă. Atunci există numerele reale x_1 și x_2, astfel încât:

$g(x_1)=\alpha\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, și $g(x_2)=\beta\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, (3)

iar $\alpha\neq\beta$. Deoarece mulțimea numerelor raționale este densă pe **R**, iar funcția g are Proprietatea lui Darboux pe **R**, rezultă că pentru orice număr rațional γ situat între α și β, există un c situat între x_1 și x_2 astfel încât:

$g(c)=\gamma$,

ceea ce, iarăși, contrazice afirmația (2). În concluzie, nu există o astfel de funcție f, care să satisfacă la proprietățile din enunț.

II. Să se determine cel mai mare număr natural n astfel încât complementara oricărei submulţimi cu n elemente a mulţimii:

A={1, 2, 3, …, 2003} (i)

să conţină cel puţin o pereche de numere consecutive.

***Rezolvare*:** Fie B submulțimea numerelor pare ale mulțimii A și C submulțimea numerelor impare ale aceleeași mulțimi A. Deci,

B={2,4,6,⋯,2000,2002} și C={1,3,⋯,2001,2003}.

Atunci B și C sunt complementare una alteia,

|B|=1001, iar |C|=1002.

Observăm că numărul:

n=1001

nu satisface la condițiile noastre, deoarece, iată, există o submulțime cu 1001 elemente (B), pentru care complementara ei (C) nu conține nicio pereche de numere consecutive. Rezultă că numărul cerut va fi cel mult egal cu 1000. Într-adevăr, pentru orice submulțime X a lui A, cu cel mult 1000 de elemente, complementara ei va avea cel puțin 1003 elemente, deci va conține cel puțin o pereche de numere consecutive. Deci, numărul căutat este 1000.

III. Fie x, y, z$\in$(0,+∞) astfel încât să fie îndeplinite simultan condiţiile:

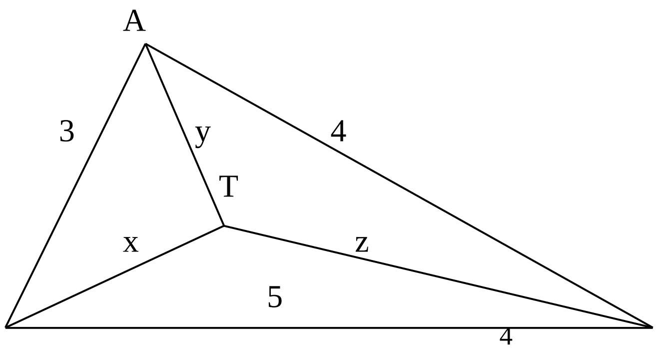
a) $x^2+x\cdot y+y^2=9$;

b) $y^2+y\cdot z+z^2=16$;

c) $x^2+x\cdot z+z^2=25$.

Daţi o interpretare geometrică sumei x+y+z şi calculaţi xy+xz+yz.

***Rezolvare*:** Egalitatea a) ne duce cu gândul la teorema cosinusului într-un triunghi cu laturile de lungimi x, y, și 3, iar unghiul opus laturii de lungime 3 este de 120°. Analog celelalte două egalități. Deci, cele trei triunghiuri de laturi (x, y, 3), (y, z, 4) și (x, z, 5) au în comun un vârf, să-l notăm cu T, și pentru fiecare din aceste trei triunghiuri punctul T „*vede*” segmentele / laturile de lungimi 3, 4, respectiv 5 sub un unghi de 120°. Mai mult, numerele 3, 4 și 5 sunt / pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Deci, punctul T este interior triunghiului dreptunghic de laturi 3, 4 și 5 și, conform enunțului, avem următoarea situație:



B C

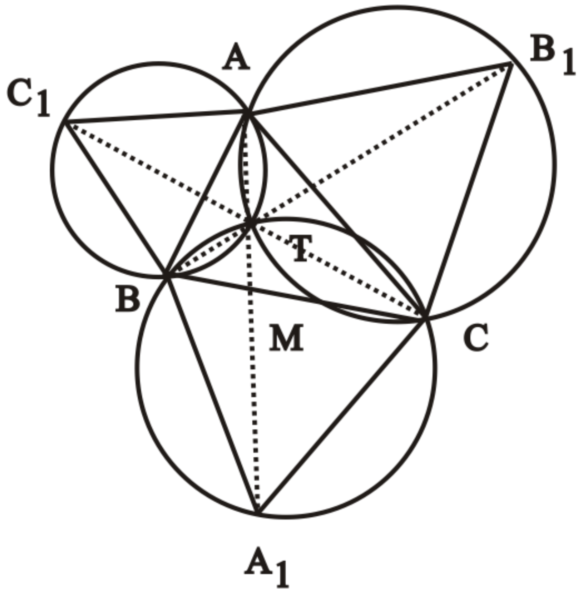
Apare următoarea întrebare: Există un astfel de punct? Răspunsul este DA, el este punctul lui Torricelli - Fermat asociat triunghiului ABC. (Vezi teorema de mai jos.) Așadar, suma x+y+z reprezintă suma distanțelor de la punctul lui Torricelli - Fermat asociat triunghiului dreptunghic ABC, de laturi 3, 4 și 5, la vîrfurile acestui triunghi. Acum, calculul expresiei $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x$ este imediat. Într-adevăr,

$$6=\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\mathcal{A}_{\Delta ABT}+\mathcal{A}_{\Delta BTC}+\mathcal{A}_{\Delta CTA}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x), \qquad (1)$$

de unde rezultă că:

$$x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=8\cdot\sqrt{3}.$$

Folosind figura de mai jos, prezentăm următorul rezultat:



Teoremă: *Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile strict mai mici decât 120°. Atunci există un punct T, interior acestuia, care „vede” fiecare latură a triunghiului sub un unghi de 120°, adică pentru care unghiurile ∢ATB, ∢BTC și ∢CTA au fiecare câte 120°.*

***Indicație*:** Construiți pe laturile triunghiului, în afara acestuia, triunghiurile echilaterale ABC_1, BCA_1 și CAB_1 (vezi figura de mai sus) și arătați că cercurile circumscrise acestor triunghiuri echilaterale au un punct comun T, amintit mai sus. Arătați (și) că:

- **a)** dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente în punctul T;
- **b)** $AT+BT+CT=AA_1=BB_1=CC_1$;
- **c)** Pentru orice punct M din planul triunghiului, $AT+BT+CT\leq AM+BM+CM$.

2.17 Specialitatea Matematică – Fizică (sesiune, 2003)

I. Sunt grupurile $(\mathbf{Q}_{+}^{*},\cdot)$ şi $(\mathbf{Z}[X],+)$ izomorfe?

***Rezolvare*:** Răspunsul la întrebarea din enunț este: Da. Justificăm răspunsul, în sensul că vom construi un izomorfism de grupuri de la $(\mathbf{Q}_{+}^{*},\cdot)$ la $(\mathbf{Z}[X],+)$. Mai întâi, considerăm $(p_n)_{n\geq 1}$ – şirul numerelor prime (2, 3, 5, ...) şi observăm că, în baza Teoremei fundamentale a Aritmeticii, pentru orice $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}_{+}^{*}$, există numerele prime p_1, p_2, ..., p_k şi există numerele întregi α_1, α_2, ..., α_k, astfel încât:

$$\frac{m}{n}=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}. \qquad (1)$$

Acum, definim o funcție:

$$f:\mathbf{Q}_{+}^{*}\to\mathbf{Z}[X],$$

astfel: pentru orice $\frac{m}{n}=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\in\mathbf{Q}_{+}^{*}$,

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\alpha_1+\alpha_2\cdot X+\alpha_3\cdot X^2+\ldots+\alpha_k\cdot X^{k-1}\in\mathbf{Z}[X]. \qquad (2)$$

Fie:

$$\frac{m}{n}=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}\in\mathbf{Q}_{+}^{*} \quad \text{şi} \quad \frac{q}{r}=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}\in\mathbf{Q}_{+}^{*},$$

ca şi mai sus; deci p_1, p_2, ..., p_k sunt primele k numere prime, iar α_1, α_2, ..., α_k, β_1, β_2, ..., $\beta_k\in\mathbf{Z}$. Atunci:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{r}=p_1^{\alpha_1+\beta_1}\cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k+\beta_k}\in\mathbf{Q}_{+}^{*} \qquad (3)$$

şi:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{r}\right)&=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\cdot X+(\alpha_3+\beta_3)\cdot X^2+\ldots+(\alpha_k+\beta_k)\cdot X^{k-1}\\&=(\alpha_1+\alpha_2\cdot X+\alpha_3\cdot X^2+\ldots+\alpha_k\cdot X^{k-1})+(\beta_1+\beta_2\cdot X+\beta_3\cdot X^2+\ldots+\beta_k\cdot X^{k-1})\\&=f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(\frac{q}{r}\right). \qquad (4)\end{aligned}$$

Deci f este morfism de grupuri. Surjectivitatea lui f rezultă din definiția acestuia. Pentru injectivitatea lui f, observăm că, dacă $\frac{m}{n}$ şi $\frac{q}{r}$ sunt ca şi mai sus, atunci, folosind metoda identificării coeficienților,

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{q}{r}\right) \qquad \text{echivalează cu faptul că} \qquad \frac{m}{n}=\frac{q}{r}.$$

În concluzie f este un morfism bijectiv de grupuri şi, astfel, cele două grupuri din enunț sunt izomorfe.

***Altfel*:** Aplicația:

$$g : \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Q}_{+}^{*},$$

unde, pentru orice polinom:

$$\varphi=\alpha_1+\alpha_2\cdot X+\alpha_3\cdot X^2+...+\alpha_k\cdot X^{k-1}\in\mathbf{Z}[X], \qquad (5)$$

$$g(\varphi)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}\in\mathbf{Q}_{+}^{*}, \qquad (6)$$

este un izomorfism de grupuri. Se observă că g este inversul lui f, de mai sus.

II. Fie:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad \text{dată de: pentru orice } x\in\mathbf{R}, \qquad f(x)=\arcsin(\sin x) \qquad \text{(i)}$$

şi şirul:

$$x_0=2003 \qquad \text{şi, pentru orice } n\geq1, \qquad x_{n+1}=f(x_n). \qquad \text{(ii)}$$

Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) $(x_n)_{n\geq0}$ este divergent;

b) $(x_n)_{n\geq0}$ este convergent la 0;

c) $(x_n)_{n\geq0}$ este convergent la $l\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$;

d) $(x_n)_{n\geq0}$ este nemărginit.

***Rezolvare*:** Avem egalitățile:

$$x_1=f(x_0)=f(2003)=\arcsin(\sin(2003))=\arcsin(\sin(638\pi+2003-638\pi))$$
$$=\arcsin(\sin(2003-638\pi))$$
$$=2003-638\pi; \qquad (1)$$

căci:

$$2003\cong637{,}8\pi \qquad \text{şi} \qquad 2003-638\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right).$$

Deci, pentru orice $n\geq1$,

$$x_n=2003-638\pi; \qquad (2)$$

deci, şirul este constant. Rezultă că el este converget la limita:

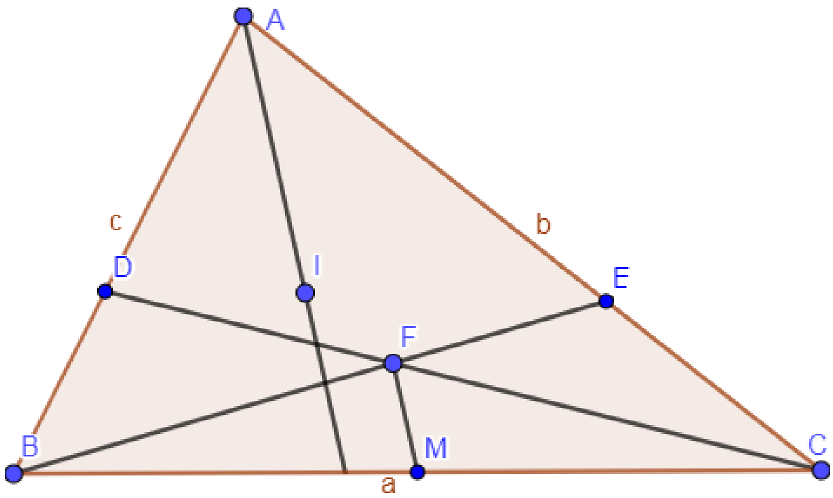
$l=2003-638\pi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

III. Alcătuiţi o problemă de Geometrie în rezolvarea căreia să folosiţi metoda vectorială.

***Rezolvare*: Propuneri: 1)** În orice triunghi medianele sunt concurente într-un punct G, situat pe fiecare mediană la două treimi de vârf şi o treime de bază.

2) Considerăm triunghiul ABC, [AA′ - bisectoarea unghiului BAC şi punctele: M – mijlocul lui [BC], $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ şi:

$CD\cap BE=\{F\}$. (Vezi figura de mai jos)



Să se arate că:

$MF \parallel AA'$ dacă şi numai dacă $\frac{AC-AB}{AC+AB}=\frac{AC}{EC}-\frac{AB}{BD}$.

2.18 Specialitatea Matematică – Fizică (restanţe, 2003)

I. Să se determine toate funcţiile:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

care admit primitive pe **R** şi pentru care există o primitivă:

$F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

astfel încât, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$x\cdot f(x)=2\cdot F(x)+x^3\cdot\sin(2\cdot x)$. (i)

***Rezolvare*:** Din egalitatea (i), pentru:

$x=0$,

obţinem că:

$F(0)=0$. (1)

Deci,

$$f(0)=F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}. \tag{2}$$

Împărțind egalitatea (i) cu $x\neq 0$, obținem că, pentru orice $x\neq 0$,

$$f(x)=2\cdot\frac{F(x)}{x}+x^2\cdot\sin(2\cdot x). \tag{3}$$

Trecând la limită când $x \to 0$ în egalitatea (3), conform egalităților (2), obținem că:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2\cdot f(0). \tag{4}$$

Din egalitatea (3) rezultă că f este derivabilă pe $\mathbf{R}^*$. Deci, prin derivare, din egalitatea (i), rezultă că, pentru orice $x\neq 0$,

$$f(x)=x\cdot f'(x)-3\cdot x^2\cdot\sin(2\cdot x)-2\cdot x^3\cdot\cos(2\cdot x). \tag{5}$$

Trecând la limită când $x \to 0$ în egalitatea (5), va rezulta că:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0. \tag{6}$$

Acum, din egalitățile (4) și (5), rezultă că:

$$f(0)=0. \tag{7}$$

În fine, din egalitatea (5), prin derivare, obținem, pentru $x\neq 0$, pe:

$$f''(x)=(6-4\cdot x^3)\cdot\sin(2\cdot x)+12\cdot x\cdot\cos(2\cdot x),$$

apoi, prin integrare, obținem pe $f'(x)$ și, în final (tot prin integrare) va rezulta $f(x)$. Egalitatea (7) va completa soluția.