SEMINAR D.M. 1

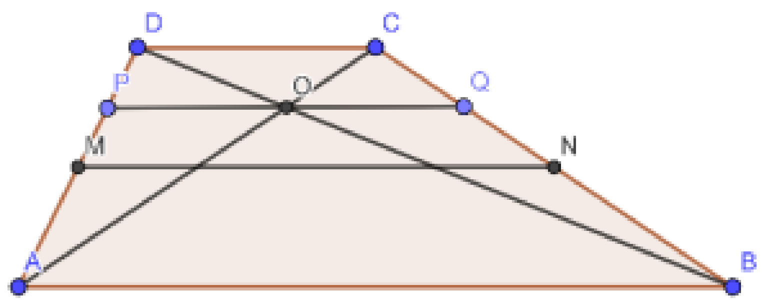
1.1 Specialitatea Matematică, fără - frecvenţă (sesiune, 2000)

I. Compuneţi şi rezolvaţi o problemă de Geometrie în care să faceţi o interpretare geometrică a inegalităţii dintre media aritmetică şi cea armonică.

Propuneri: 1) În orice trapez segmentul care trece prin punctul de intersecție al diagonalelor și are capetele pe laturile neparalele este cel mult egal cu linia mijlocie a trapezului. Dacă:

AB=a şi DC=b,

(vezi figura de mai jos),



atunci PQ≤MN. Se arată că:

$$PO=OQ=\frac{a\cdot b}{a+b}. \tag{1}$$

Se ştie că:

$$MN=\frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

unde [MN] este linia mijlocie a trapezului. (Din asemănarea triunghiurilor APO şi ADC, rezultă că:

$$\frac{PO}{b}=\frac{AP}{AD}, \tag{3}$$

iar din asemănarea triunghiurilor DPO şi DAB, rezultă că:

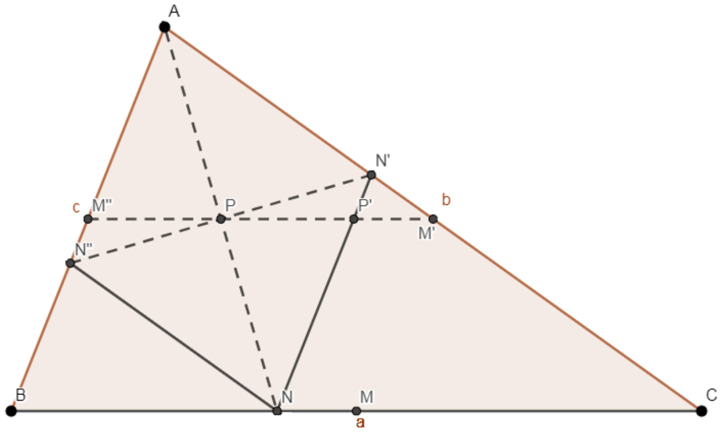
$$\frac{PO}{a}=\frac{PD}{AD}. \tag{4}$$

Adunând, membru cu membru, egalitățile (3) și (4), obținem că:

$$PO\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1. \tag{1′}$$

Analog se arată pentru QO.) (Am folosit figura de mai sus.)

2) Fie ABC un triunghi, mediana AM și bisectoarea [AN. Paralelele la AB prin M, respectiv N intersectează latura AC în M′, respectiv N′. Paralelele la AC prin M, respectiv N intersectează latura AB în M″, respectiv N″ (vezi figura de mai jos).



Arătați că:

$$NN'+NN''\leq MM'+MM''. \qquad (16)$$

II. Determinaţi toate grupurile neizomorfe de ordinul 4.

***Rezolvare*:** Orice grup este determinat de anumiți generatori și de relațiile dintre aceștia. Fiind vorba de grupuri de ordin finit, acestea vor fi determinate, în baza afirmației precedente, de tablele corespunzătoare. Astfel, fie:

$$G=\{e,a,b,c\}$$

o mulțime cu 4 elemente și „·” o operație internă pe G astfel încât (G,·) să fie grup. Conform Teoremei lui Lagrange, ordinul fiecărui element din G divide ordinul lui G; deci, oricare ar fi $x\in G\backslash\{e\}$,

$$o(x) \mid 4. \qquad (1)$$

Cazul:

$$x=e$$

este trivial și nesemnificativ în rezolvarea problemei noastre. Distingem două cazuri:

<u>Cazul 1:</u> Există un $x\in G\backslash\{e\}$, astfel încât:

$$o(x)=4.$$

Să notăm acest element cu a. Deci,

$$a^4=1 \qquad (2)$$

și subgrupul ciclic generat de a,

$$\langle a\rangle=\{e,a,a^2,a^3\}$$

este un subgroup cu 4 elemente al lui G. În acest caz,

$G=\langle a \rangle$, (3)

adică G este un grup ciclic cu 4 elemente. Deci G este generat de elementul a și de relația (2). Tabla acestui grup este următoarea:

·	**e**	**a**	$\mathbf{a^2}$	$\mathbf{a^3}$
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
$\mathbf{a^2}$	a^2	a^3	e	a
$\mathbf{a^3}$	a^3	e	a	a^2

Există un astfel de grup? Da, de exemplu $(\mathbf{Z}_4,+)$.

<u>Cazul 2:</u> Nu există niciun $x \in G \setminus \{e\}$, astfel încât:

$o(x)=4$.

În acest caz, oricare ar fi $x \in G \setminus \{e\}$,

$o(x)=2$.

Deci,

$a^2=b^2=c^2=1$. (4)

Deoarece în cazul unui grup G, pentru orice a, $b \in G$, ecuațiile:

$a \cdot x=b$ și $x \cdot a=b$

au soluții unice, rezultă că, pentru orice $a \in G$,

translația stângă $x \mapsto a \cdot x$ și, respectiv translația dreaptă $x \mapsto x \cdot a$,

sunt bijecții. În atare condiții, va rezulta că în tabla grupului G, fiecare element va apare o singură dată pe linie și pe coloană (desigur, în afara celor generice!). (Dacă nu știi aceste chestiuni, atunci judeci toate posibilitățile care apar în întocmirea tablei.) Acum, tabla acestui grup este ușor de completat; ea este următoarea:

·	**e**	**a**	**b**	**c**
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Așadar, în acest caz, grupul G este determinat de generatorii a, b, c și de relațiile (4). Apare, iarăși întrebarea: există astfel de grupuri? Da, de exemplu: grupul:

$$K=\{1_{\mathscr{P}},s_O,s_{Ox},s_{Oy}\} \quad (5)$$

al simetriilor față de originea sistemului de coordonate O - s_O, față de axa Ox - s_{Ox} și față de axa Oy - s_{Oy}. Acest grup se mai numește și grupul lui Klein.

În concluzie, există două grupuri neizomorfe cu 4 elemente: grupul ciclic de ordinul 4 și grupul lui Klein.

1.2 Specialitatea Matematică - Fizică (sesiune, 2000)

I. Să se demonstreze, în două moduri, că grupurile $(\mathbf{Q},+)$ și $(\mathbf{Q}^*,\cdot)$ nu sunt izomorfe.

***Rezolvare*:** Grupul $(Q^*,\cdot)$ are un element de ordinul 2 (pe -1), iar grupul $(\mathbf{Q},+)$ nu are un astfel de element. Deoarece printr-un monomorfism (morfism injectiv) de grupuri se păstrează ordinul elementelor (DEMONSTRAȚI ASTA!), rezultă că cele două grupuri din enunț nu sunt izomorfe.

***Altfel*:** Presupunem că există un izomorfism de grupuri:

$$f : (\mathbf{Q},+) \to (\mathbf{Q}^*,\cdot).$$

Atunci, există $a\in\mathbf{Q}$ astfel încât:

$$f(a)=2. \quad (1)$$

În acest caz, conform ipotezei și egalității (1),

$$2=f(a)=f\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)\cdot f\left(\frac{a}{2}\right)=f^2\left(\frac{a}{2}\right). \quad (2)$$

Deci, $f\left(\frac{a}{2}\right)\notin\mathbf{Q}$.

II. Să se calculeze, în două moduri, primitiva:

$$I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbf{R}^*. \quad (i)$$

***Rezolvare*:** Avem egalitatea:

$$I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{1}{(x^2+1)-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot dx. \quad (1)$$

Acum, conform cu egalitatea (1), efectuăm substituția:

$$\sqrt{x^2+1}=t, \qquad \text{caz în care} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot dx=dt. \quad (2)$$

În final, avem de calculat o primitivă banală:

$$J=\int\frac{1}{t^2-1}\cdot dt. \quad (3)$$

Altfel: Efectuăm substituția:

$$\sqrt{x^2+1}=x+t. \qquad (4)$$

Atunci, din egalitatea (4), rezultă că:

$$x=\frac{1-t^2}{2\cdot t} \quad \text{şi} \quad dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{t^2}\cdot dt. \qquad (5)$$

Acum, avem de calculat o integrală nedefinită dintr-o funcție rațională (banală!):

$$K=2\cdot\int\frac{1}{t^2-1}\cdot dt\,. \qquad (3')$$

III. Alcătuiţi o problemă de Geometrie în care să utilizaţi teorema sinusului.

Exemple de astfel de probleme:

1) Triunghiul ABC este dreptunghic dacă și numai dacă:

$$a^2+b^2+c^2=8R^2. \qquad (1)$$

Notațiile fiind cele obișnuite.

2) Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, O – centrul cercului circumscris acestuia, M, N, P – intersecțiile dreptelor AO, BO și CO cu laturile BC, CA și AB. Să se arate că:

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}\leq\frac{3\cdot\sqrt{3}}{p}, \qquad (6)$$

unde p este semiperimetrul triunghiului.

1.3 Specialităţile: Matematică şi Matematică – Informatică (sesiune, 2000)

I. Fie:

$$f:[a,b]\to[a,b]$$

o funcţie care admite primitive, cu proprietatea că:

$$f\circ f=1_{[a,b]}. \qquad (i)$$

Să se arate că:

a) f are un punct fix;

b) f este mărginită şi îşi atinge marginile;

c) dacă u, v$\in$[a,b], astfel încât:

$$f(u)=m=\inf_{x\in[a,b]}f(x) \quad \text{şi} \quad f(v)=M=\sup_{x\in[a,b]}f(x), \qquad (ii)$$

atunci:

$$f(m)=u \quad \text{şi} \quad f(M)=v. \qquad (iii)$$

***Rezolvare*:** Din faptul că f admite primitive și din egalitatea (i) rezultă că f este continuă (Teorema lui I. Stal și A. Triponi). Atunci f admite un punct fix (se aplică prima Teoremă a lui Bolzano - Cauchy funcției continue:

$$g : [a,b] \to \mathbf{R}, \qquad g(x)=f(x)-x). \qquad (1)$$

Teorema lui Weierstrass ne conduce la enunțul de la punctul b). Acum, pentru că f este continuă, rezultă că:

$$\min f(x)=\inf f(x) \qquad \text{și} \qquad \max f(x)=\sup f(x), \qquad (2)$$

pe [a,b], iar egalitățile (i) și (ii) implică egalitățile (iii).

1.4 Specialitatea Matematică - Fizică (restanțe, 2000)

I. Să se arate că funcția

$$f : \mathbf{R}\backslash\left(-\frac{3}{4}\right) \to \mathbf{R}\backslash\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{unde, pentru orice } x\in\mathbf{R}\backslash\left(-\frac{3}{4}\right), \quad f(x)=\frac{2x+5}{4x+3}, \qquad \text{(i)}$$

este bijectivă şi să se determine f^{-1}.

***Rezolvare*:** Injectivitatea lui f: fie x, $y\in\mathbf{R}\backslash\left(-\frac{3}{4}\right)$, astfel încât:

$$f(x)=f(y). \qquad (1)$$

Atunci rezultă că:

x=y. (calculele sunt banale!)

Pentru surjectivitatea lui f, considerăm un element oarecare $y\in\mathbf{R}\backslash\left(\frac{1}{2}\right)$ și rezolvăm ecuația:

$$f(x)=y. \qquad (2)$$

Aceasta are soluția:

$$x=-\frac{3\cdot y-5}{4\cdot y-2}\neq-\frac{3}{4}. \qquad (3)$$

Deci, conform Principiului generalizării universale,

pentru orice $y\in\mathbf{R}\backslash\left(\frac{1}{2}\right)$, există $x\in\mathbf{R}\backslash\left(-\frac{3}{4}\right)$, astfel încât:

$$f(x)=y;$$

deci f este surjectivă. Așadar f este bijectivă, adică inversabilă și inversa ei este funcția:

$$g : \mathbf{R}\backslash\left(\frac{1}{2}\right) \to \mathbf{R}\backslash\left(-\frac{3}{4}\right),$$

unde, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\frac{1}{2}\right)$,

$$g(x)=\frac{5-3\cdot x}{4\cdot x-2}. \qquad (4)$$

***Altfel*:** Folosim cunoștințele de analiză matematică, referitoare la interpretarea algebrică a graficului unei funcții. Pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left(-\frac{3}{4}\right)$,

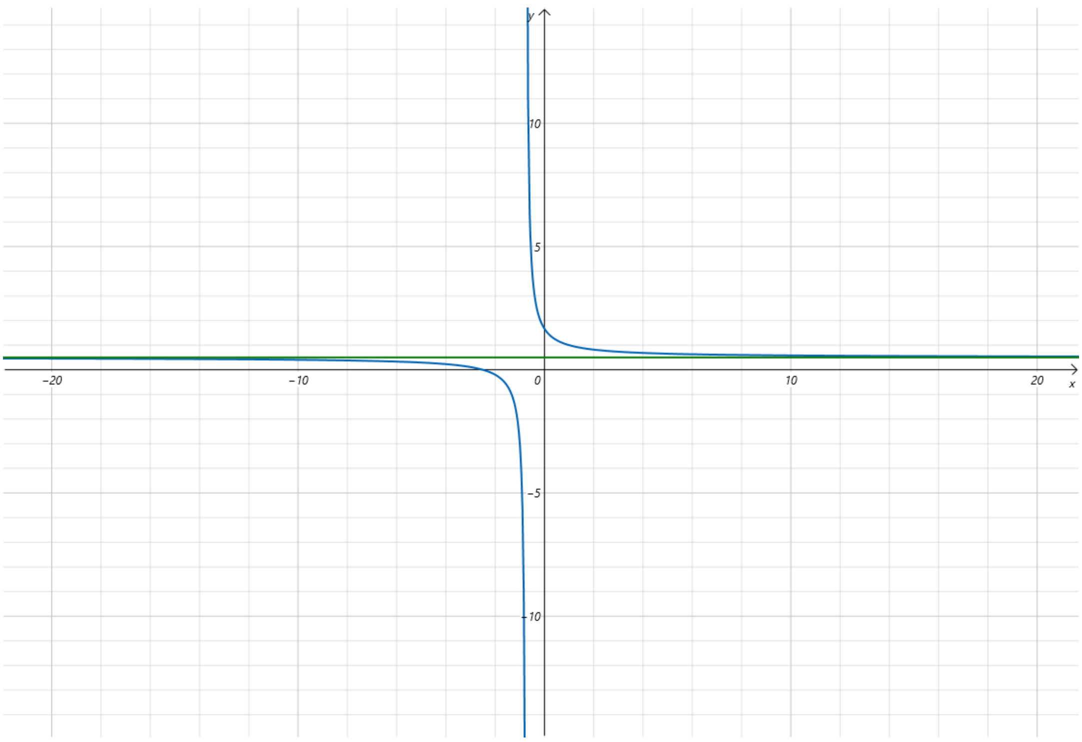
$$f'(x)=-\frac{10}{(4\cdot x+3)^2}. \qquad (5)$$

Tabelul de variație a acestei funcții este următorul:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - - - - -		|	- -	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

iar graficul lui f este cel de mai jos**.** Se observă că orice paralelă la axa Ox taie acest grafic într-un singur punct. Deci f este bijectivă.

Determinarea lui f^{-1} se face ca și mai sus.



1.5 Specialitatea Matematică (sesiune, 2001)

I. Există numere naturale cu proprietatea că suma câturilor împărţirii lor la 17 şi, respectiv la 5, să fie 220? Justificaţi răspunsul.

***Rezolvare*:** Răspunsul la întrebarea din enunț este: Da, există. Să arătăm acest lucru. Fie a și b două numere naturale oarecare. Atunci, conform Teoremei împărțirii cu rest,

$a=17\cdot c_1+r_1$ și $b=5\cdot c_2+r_2$, (1)

unde c_1, c_2, r_1, $r_2\in\mathbf{N}$ și $0\le r_1\le 16$, iar $0\le r_2\le 4$. Atunci:

$5\cdot a=85\cdot c_1+5\cdot r_1$ și $17\cdot b=85\cdot c_2+17\cdot r_2$. (2)

Adunând egalitățile (1) și (2), conform ipotezei, obținem că:

$$5\cdot a+17\cdot b=85\cdot(c_1+c_2)+5\cdot r_1+17\cdot r_2=85\cdot 220+5\cdot r_1+17\cdot r_2. \quad (3)$$

Reținem extremitățile de la (3):

$$5\cdot a+17\cdot b=85\cdot 220+5\cdot r_1+17\cdot r_2. \quad (3')$$

Această ecuație diofantiană are o infinitate de soluții. De exemplu, pentru:

$r_1=r_2=0$,

ea devine:

$$5\cdot a+17\cdot b=85\cdot 220. \quad (4)$$

Se observă, în ecuația (4), că:

$a=17\cdot m$ și $b=5\cdot n$, (5)

cu m, $n\in\mathbf{N}^*$. Deci, ecuația (4) devine:

$$m+n=220, \quad (6)$$

unde oricare din perechile de numere: (1,219), (2,218), ..., (219,1) este soluție. Acum, conform egalităților (2), obținem exact 219 perechi de numere (a,b), care satisfac la cerința din enunț.

***Altfel*:** Problema care se pune este de a arăta că există numere naturale n, astfel încât:

$$\left[\frac{n}{17}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=220. \quad (7)$$

Deoarece, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$[x]\le x$,

din egalitatea (7) rezultă că:

$$220\le\frac{n}{17}+\frac{n}{5}=\frac{22\cdot n}{85}. \quad (8)$$

Din (8), rezultă că:

$n\ge 850$.

Observăm că:

$$n=850$$

convine, căci, în acest caz,

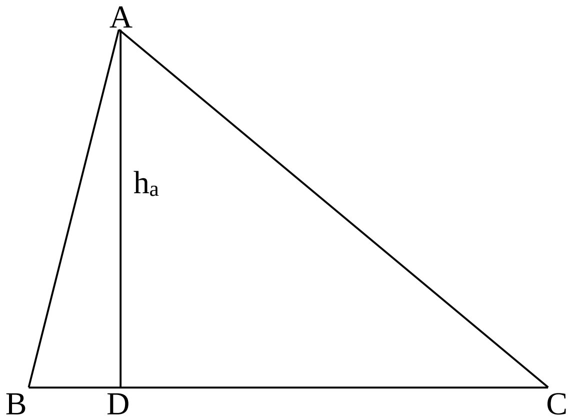
$$\left[\frac{n}{17}\right]=50 \qquad \text{și} \qquad \left[\frac{n}{5}\right]=170. \qquad (9)$$

Alte numere, care satisfac la cerințele problemei sunt: 851, 852, 853 și 854.

II. Ce putem spune despre un triunghi ascuţitunghic ABC, în care are loc relaţia:

$h_a+h_b+h_c=4\cdot R+r$? (Notaţiile sunt cele obişnuite.) (i)

***Rezolvare*:** Considerăm figura de mai jos:



Observăm că:

$$h_a=2\cdot R\cdot \sin B\cdot \sin C. \qquad (1)$$

Analog, obținem că:

$$h_b=2\cdot R\cdot \sin A\cdot \sin C \qquad \text{și} \qquad h_c=2\cdot R\cdot \sin A\cdot \sin B. \qquad (2)$$

Atunci relația din enunț devine:

$$2\cdot R\cdot \sin A\cdot \sin B+2\cdot R\cdot \sin B\cdot \sin C+2\cdot R\cdot \sin A\cdot \sin C=4\cdot R+r. \qquad (3)$$

Dar,

$$2\cdot \sin A\cdot \sin B+2\cdot \sin B\cdot \sin C+2\cdot \sin A\cdot \sin C=\cos(A-B)-\cos(A+B)+\cos(B-C)-\cos(B+C)$$

$$+\cos(C-A)-\cos(C+A)$$

$$=\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos A+\cos B+\cos C$$

$$=\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)+1+4\cdot \sin\frac{A}{2}\cdot \sin\frac{B}{2}\cdot \sin\frac{C}{2}. \qquad (4)$$

Aici, în egalitățile (4), am folosit faptul că:

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\cdot \sin\frac{A}{2}\cdot \sin\frac{B}{2}\cdot \sin\frac{C}{2}. \qquad (5)$$

Acum egalitatea (3) devine:

$$R\cdot[\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)]+R+4\cdot R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=4\cdot R+r. \tag{6}$$

Dar,

$$r=4\cdot R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}. \tag{7}$$

Într-adevăr,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R}\cdot\frac{2}{a+b+c}=\frac{16\cdot R^3\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{8\cdot R^2\cdot(\sin A+\sin B+\sin C)}=4\cdot R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

În final, egalitatea (6) devine:

$$\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)=3, \tag{8}$$

care este echivalentă cu egalitățile:

$$\cos(A-B)=\cos(B-C)=\cos(C-A)=1. \tag{8′}$$

Așadar, egalitatea din enunț exprimă o condiție necesară și suficientă pentru care triunghiul ABC este echilateral.

***Altfel*:** Egalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$2\cdot S\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=4\cdot R+r, \tag{9}$$

care este echivalentă cu:

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=8\cdot R^2+2\cdot R\cdot r. \tag{10}$$

Dar,

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=p^2+4\cdot R\cdot r+r^2. \tag{11}$$

Din egalitățile (10) și (11), rezultă:

$$p^2+4\cdot R\cdot r+r^2=8\cdot R^2. \tag{12}$$

Acum, din inegalitatea lui Mitrinovic, rezultă că:

$$p^2\leq\frac{27\cdot R^2}{4}, \tag{13}$$

iar, din inegalitatea lui Euler, rezultă că:

$$R\geq 2\cdot r. \tag{14}$$

În final, din inegalitățile (13) și (14), rezultă că:

$$p^2+4\cdot R\cdot r+r^2\leq 8\cdot R^2. \tag{15}$$

Dar, inegalitatea (15) devine egalitatea (12) exact dacă:

$$R=2\cdot r, \tag{16}$$

adică triunghiul ABC este echilateral.

1.6 Specialitatea Matematică - Informatică (sesiune, 2001)

I. Dacă $(G,*)$ este monoid şi $H\subset G$ este o submulţime nevidă a sa cu proprietatea că restricţia operaţiei din G la H determină pe H (tot) o structură de monoid, rezultă că $e_H=e_G$? (Adică elementele neutre ale celor doi monoizi coincid?)

***Rezolvare*:** Răspunsul la întrebarea din enunț este: Nu! Contraexemplu: Fie:

$$G=\mathcal{M}_2(R), \tag{1}$$

mulțimea matricilor de ordinul 2 cu elemente numere reale. Atunci, înmulțirea obișnuită a matricelor, determină pe G o structură de monoid necomutativ, unde:

$$e_G=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Considerăm, acum, mulțimea:

$$H=\{A(x) \mid x\in\mathbf{R}\}, \tag{3}$$

unde, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Atunci, aceeași înmulțire obișnuită a mtricelor determină pe H o strucutră de monoid comutativ; deci $(H,\cdot)$ este un submonoid al lui G. Dar,

$$e_H=A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq e_G=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

II. Calculaţi integrala:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\cdot\sin x}{\sin x+1}\cdot dx. \tag{i}$$

***Rezolvare*:** Vom folosi următorul rezultat:

Lemă: *Dacă*:

$$f:[a,b]\to\mathbf{R}$$

este o funcţie integrabilă, atunci:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=\int_a^b f(a+b-x)\cdot dx. \tag{1}$$

Într-adevăr, făcând substituţia de variabilă, x=a+b-y,

obţinem egalitatea (1). Astfel, deoarece:

sin(π-x)=sinx, (2)

integrala noastră devine:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\cdot\sin x}{\sin x+1}\cdot dx=\pi\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x+1}\cdot dx-I. \qquad (3)$$

Dar,

$$J=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sin x+1}\cdot dx=\pi-\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x+1}\cdot dx. \qquad (4)$$

Iar,

$$K=\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x+1}\cdot dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\cos y+1}\ \text{(am notat } x=\frac{\pi}{2}-y\text{)}$$

$$=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\cos y+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+tg^2\frac{y}{2})\cdot dy=2. \qquad (5)$$

Deci, din egalitățile (3), (4) și (5), rezultă că:

$J=\pi-2$ și $I=\frac{\pi\cdot(\pi-2)}{2}$.