2.2.4 Principiul stimulării şi dezvoltării motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii

Inteligenţa unui elev, este pusă în funcţiune şi orientată spre învăţarea Matematicii de factorii emotiv - activi şi motivaţionali ai personalităţii. Ca orice activitate umană, învăţarea Matematicii se desfăşoară într-un „*câmp motivaţional*”, care ar fi bine să fie cât mai optim, mai ales pentru că Matematica reprezintă, din păcate pentru mulţi elevi, o disciplină aridă, greu de pătruns şi pentru că realitatea ne arată ponderea (relativ) ridicată a motivaţiei extrinseci, pentru învăţarea acestei discipline şcolare, la un număr mare de elevi din cadrul fiecărei clase. De aceea, profesorul de Matematică trebuie să cultive la elevi dragostea, pasiunea pentru Matematică, adică adevărata motivaţie cognitivă pentru această disciplină şcolară, care odată constituită nu mai cunoaşte saturaţie.

Acest principiu se impune, în activitatea de predare - învăţare a Matematicii, ca o necesitate pentru a găsi căile de trecere de la motivaţia extrinsecă la cea intrinsecă, pentru evitarea demotivării învăţării acestei discipline şcolare, pentru trecerea de la motivaţia nemijlocită la motivaţia socială a învăţării Matematicii, pentru cristalizarea intereselor profesionale în interrelaţie cu motivaţia cognitivă, intrinsecă şi cu aptitudinile şi deprinderile cu gradul cel mai mare de funcţionalitate.

Pentru creşterea eficienţei procesului de predare - învăţare a Matematicii, considerăm utile următoarele aspecte didactice care contribuie la dezvoltarea motivaţiei învăţării acestei disipline şcolare.

1. *Acceptarea unui punct de vedere realist privind aspectele reale ale funcţionalităţii motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii*. Orice profesor trebuie să accepte ideea că motivaţia extrinsecă şi intrinsecă (înţelegând aici ansamblul lor) pot duce - prin întrepătrunderea lor - la creşterea randamentului şcolar al elevilor, inclusiv la Matematică. De aceea profesorul de Matematică trebuie să-şi propună drept scop fundamental al activităţii sale creşterea la maxim a motivaţiei intrinseci a elevilor pentru învăţarea Matematicii, dar el trebuie să recunoască rolul important al diferitelor forme ale motivaţiei extrinseci ale acestora pentru această disciplină şcolară, precum şi al trebuinţei de autoafirmare, a trebuinţei de performanţă, cumulată cu nivelul lor de aspiraţie; toate acestea putând influenţa în bine calitatea învăţării Matematicii.

2. *Evaluarea motivelor învăţării Matematicii*. În cazul în care unui elev nu i se poate capta atenţia şi interesul în orele obişnuite de Matematică, cu procedeele obişnuite de motivare extrinsecă, profesorul trebuie să detecteze şi să evalueze cât mai exact structura şi funcţionalitatea sistemului motivaţional, al emoţiilor şi sentimentelor cognitive ale elevului respectiv faţă de Matematică, conjugându-le cu sarcinile didactice. Astfel, el va trebui să creeze situaţii de predare - învăţare în cadrul cărora elevii respectivi să trăiască sentimental succesul, care apoi devine factor motivaţional, căci succesul şi performanţele obţinute pot deveni surse pentru motivarea învăţării Matematicii.

3. *Dezvoltarea impulsului cognitiv pentru Matematică*, pe baza stimulării şi orientării trebuinţei de activism şi a trebuinţei de explorare, paralel cu stimularea şi dezvoltarea emoţiilor şi sentimentelor cognitive, cum ar fi:

- *curiozitate*,

- *mirare,*
- *îndoială,*
- *întrebare,*
- *bucuria descoperirii adevărului*, etc.

Se pune, deci, în alţi termeni, problema trecerii de la curiozitatea perceptivă, care este o simplă prelungire a reflexului înnăscut de orientare şi a trebuinţei de explorare, la curiozitatea epistemică, adică la nevoia devenită intrinsecă, automată, de a şti, de a cunoaşte Matematică, de a descoperi adevărurile matematice. În acest sens, în cadrul tuturor activităţilor din învăţământul matematic, se recomandă apelarea la „*surpriză*”, la noutate, la contrast, crearea unor situaţii didactice care să producă „*disonanţa cognitivă*”. În acest mod se captează atenţia elevului şi se trezeşte interesul acestuia pentru studiul Matematicii, clădindu-se, mai întâi, atracţiile şi preferinţele pentru o anumită temă din programa şcolară. Captarea atenţiei elevilor se leagă de motivaţia sarcinii, de motivaţia pe termen scurt, în cadrul secvenţelor de instruire, iar trezirea, stimularea şi dezvoltarea interesului cognitiv pentru Matematică se leagă şi de motivaţia socială, pe termen lung, ea fiind şi expresia măiestriei didactice a profesorului.

Motivaţia optimă scurtează timpul necesar învăţării, inclusiv la elevii cu ritm mai lent, la care prin activitatea proceselor cognitive se antrenează şi ritmul învăţării.

De asemenea, predarea Matematicii în absenţa motivaţiei elevilor pentru această disciplină, ridică o serie de probleme, ca de altfel şi predarea în cazul „*demotivării*”, a stingerii interesului cognitiv al elevilor pentru Matematică. În aceste condiţii, măiestria didactică a profesorului îşi spune cuvântul, profesorul bun fiind capabil de a stârni curiozitatea elevilor prin „*elemente - surpriză*” incluse în demersul didactic. Astfel, de exemplu, un elev poate să nu arate nici o atracţie, nici un impuls cognitiv pentru însuşirea unor cunoştinţe de Algebră, dar el poate fi intrigat de o curiozitate matematică, de un paradox logic, de o contradicţie vizibilă, sau de o problemă mai deosebită, de la care să se plece în învăţarea Algebrei. **De exemplu:**

A) *Curiozitate matematică* (vezi şi documentul ataşat):

6 săptămâni = 6 (săptămâni) · 7 (zile) · 24 (ore) · 60 (minute) · 60 (secunde)
= 6 · 7 · (3 · 8) · (3600)
= 6 · 7 · (3 · 8) · (4 · 9 · 10 · 10)
= 6 · 7 · 3 · 8 · 4 · 9 · 10 · 2 · 5
= 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10
= 10! secunde;

sau:

2520 = 7 (numărul zilelor unei săptămâni) ·
30 (numărul zilelor unei luni) ·
12 (numărul lunilor unui an);

sau:

1.026.753.849 = $(32.043)^2$,

este cel mai mic număr natural, care este pătrat perfect, format din toate cifrele și care nu se repetă;
sau:

$$9.814.072.356 = (99.066)^2,$$

este cel mai mare număr natural, care este pătrat perfect, format din toate cifrele și care nu se repetă;
sau:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 19 \cdot 91;$$

sau:

$$3=\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+3\cdot\sqrt{1+4\cdot\sqrt{1+5\cdot\sqrt{1+\ldots}}}}}\ ;$$

sau:

$$144^5 = 130^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5;$$

sau:

$$987654321=\left(\frac{1}{0,52350230079621179657722631189558}\right)^{32}$$

și

$$123456789=\left(\frac{1}{0,55865045518599294315718001405653}\right)^{32};$$

sau, pentru ziua de 7 – 3 - 23: pentru orice $n\in\{2,10,32,137,180,232,1042,3506\}$, numărul $7^n+3^n+23^n$ este număr prim;
sau:

$$155 = 1 \cdot 55 + 15 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 5;$$

sau:

$$\sqrt{121} = 12 – 1;$$

sau, numerele:

31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331,

sunt (toate) numere prime, dar numărul:

$$333333331 = 17 \cdot 19607843,$$

nu mai este prim;
sau, pătratul magic al lui Ramanujan:

22	12	18	87
88	17	9	25
10	24	89	16
19	86	23	11

B) *Paradox logic*: Pentru a scoate în evidenţă un paradox matematic, considerăm următoarea problemă:

„Un prieten de-al meu are doi copii, dintre care cel puţin unul este băiat. Care este probabilitatea ca şi celălalt copil să fie tot băiat?”

***Rezolvare*:** Gândind superficial am fi tentaţi să afirmăm că probabilitatea cerută este $\frac{1}{2}$, căci şansa de a fi băiat este egală cu aceea de a fi fată. Paradoxul este că, în realitate, dacă un copil este băiat, există trei variante posibile: BB, BF, respectiv FB, fiecare variantă posibilă având aceeaşi probabilitate: $\frac{1}{3}$. Remarcăm faptul că dacă enunţul ar conţine precizarea: *cel mai mic*, *sau cel mai mare, sau ..., este băiat*, atunci într-adevăr, probabilitatea cerută ar fi fost $\frac{1}{2}$, căci în acest caz variantele posibile ar fi fost BB şi BF (sau FB).

C) *O contradicţie vizibilă*:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)}=i\cdot i=i^2=-1;$$

sau, considerăm suma:

$$S=1+2+4+6+8+...+2^n+....$$

Atunci:

$$S=1+2\cdot(1+2+4+6+8+...+2^n+...)=1+2\cdot S.$$

Deci:

$$S=-1.$$

D) *O problemă deosebită*:

„Să se calculeze suma primelor 300 de zecimale exacte ale numărului:

$(\sqrt{2}-1)^{1000}$.”

***Rezolvare*:** $(\sqrt{2}-1)^{1000}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{100}=\left(\frac{1}{1024}\right)^{100}<\left(\frac{1}{1000}\right)^{100}=10^{-300}$.

sau:

„Fie M mulţimea tuturor matricilor de ordin $m\times n$, a căror elemente sunt –1 sau 1, şi care au proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie, respectiv fiecare coloană este –1. Să se determine numărul de elemente al mulţimii M.”

***Rezolvare*:** Fie M mulțimea din enunț și:

$$H=\{A^*\in\mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbf{Z}) \mid A^*=(a_{ij}),\text{ unde } a_{ij}\in\{-1,1\}\}.$$

Atunci,

$$|H|=|\{f:\{1,2,...,m-1\}\times\{1,2,...,n-1\}\to\{-1,1\}\}|=2^{(m-1)\cdot(n-1)}. \qquad (1)$$

Vom arăta că:

$$|M|=|H|. \qquad (2)$$

Mai întâi, observăm că dacă, pentru orice $i=\overline{1,n}$, notăm cu P_{li} produsul elementelor de pe linia i a matricii A (deci, $P_{li}=a_{i1}\cdot a_{i2}\cdot...\cdot a_{im}$) și, pentru orice $j=\overline{1,m}$, notăm cu P_{cj} produsul elementelor de pe coloana j a matricii A (deci, $P_{cj}=a_{1j}\cdot a_{2j}\cdot...\cdot a_{jn}$), atunci produsul P al tuturor elementelor elementelor matricii A este:

$$P=\prod_{i=1}^{n} P_{li} =(-1)^n=\prod_{j=1}^{m} P_{cj} =(-1)^m.$$

Deci, numerele m și n au aceeași paritate. Acum, considerăm funcția:

$$F : M \to H,$$

unde, pentru orice matrice $A \in M$,

$$F(A)=A^* \in H,$$

iar A^* este matricea obținută din matricea A prin suprimarea liniei a n-a și coloanei a m-a. Acum, considerăm funcția:

$$G : H \to M,$$

care la fiecare matrice $A^* \in H$ îi asociază matricea $A \in M$, prin adăugarea unei linii (a n-a) și a unei coloane (a m-a), astfel:

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m-2} & a_{1m-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m-2} & a_{2m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & a_{n-22} & \cdots & a_{n-2m-2} & a_{n-2m-1} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1m-2} & a_{n-1m-1} \end{pmatrix} \mapsto A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m-2} & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m-2} & a_{2m-1} & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & a_{n-22} & \cdots & a_{n-2m-2} & a_{n-2m-1} & a_{n-2m} \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1m-2} & a_{n-1m-1} & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm-2} & a_{nm-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

unde ultima linie și ultima coloană a matricii A se completează în felul următor:

- Dacă produsul elementelor de pe linia 1 a matricii A^* este 1, atunci a_{1m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{1m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe linia 2 a matricii A^* este 1, atunci a_{2m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{2m}=1.
- …
- Dacă produsul elementelor de pe linia n-2 a matricii A^* este 1, atunci a_{n-2m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n-2m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe linia n-1 a matricii A^* este 1, atunci a_{n-1m}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n-1m}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana 1 a matricii A^* este 1, atunci a_{n1}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n1}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana 2 a matricii A^* este 1, atunci a_{n2}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{n2}=1.
- …
- Dacă produsul elementelor de pe coloana m-2 a matricii A^* este 1, atunci a_{nm-2}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{nm-2}=1.
- Dacă produsul elementelor de pe coloana m-1 a matricii A^* este 1, atunci a_{nm-1}=-1, iar dacă acest produs este -1, atunci a_{nm-1}=1.

Deci, elementele a_{1m}, a_{2m}, ..., a_{n-1m} de pe coloana a m-a a matricii A și elementele a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm-1} de pe linia a n-a a matricii A sunt bine de determinate. Mai trebuie să arătăm că și elementul a_{nm} de la intersecția liniei a n-a a matricii A cu coloana a m-a (a matricii A) este (și el) bine determinat. Mai întâi observăm că produsul tuturor elementelor primelor n-1 linii ale noii matrici A este $(-1)^{n-1}$, iar produsul tuturor elementelor primelor m-1 coloane ale noii matrici A este $(-1)^{m-1}$. Deoarece m și n au aceeași paritate, rezultă că produsul tuturor elementelor primelor n-1 linii ale noii matrici A este același cu produsul tuturor elementelor primelor m-1 coloane ale noii matrici A, și anume acest produs este:

$$(-1)^{m-1}=(-1)^{n-1}.$$

Această egalitate arată că, dacă P^* este produsul tuturor elementelor matricii A^*, atunci:

$$P^*\cdot a_{n1}\cdot a_{n2}\cdot\ldots\cdot a_{nm-1}=P^*\cdot a_{1m}\cdot a_{2m}\cdot\ldots\cdot a_{n-1m},$$

de unde rezultă că:

$$a_{n1}\cdot a_{n2}\cdot\ldots\cdot a_{nm-1}=a_{1m}\cdot a_{2m}\cdot\ldots\cdot a_{n-1m},$$

adică, a_{mn} este (și el) bine determinat. În final, din modul de definire a celor două funcții, concluzionăm că ele sunt inverse una alteia, adică sunt bijecții și astfel, egalitatea (2) are loc. Conform egalităților (2) și (1),

$$|M|=2^{(n-1)\cdot(m-1)}.$$

4. *Punerea în funcţiune a unui nivel adecvat al motivaţiei elevilor pentru învăţarea Matematicii.* Cercetările din Didactica Matematicii au demonstrat forţa mobilizatoare şi eficienţa optimumului motivaţional în învăţarea Matematicii, care diferă de la o persoană la alta, în funcţie de particularităţile tipului de sistem nervos, de echilibrul temperamental şi emotiv, de capacităţile cognitive ale elevilor, toate acestea fiind raportate la dificultatea percepută sau anticipată a sarcinilor de învăţare a acestora. Optimumul motivaţional se leagă şi de trebuinţa de performanţă şi nivelul de aspiraţie al elevului, de capacitatea sa de autocunoaştere şi de evaluarea adecvată a dificultăţilor reale ale sarcinilor didactice. S-a constatat că în cazul anumitor elevi, supramotivarea poate avea aceleaşi efecte neadecvate ca şi submotivarea, şi anume apariţia descurajării şi a demobilizării la primul eşec; ba mai mult, unii elevi se pot demobiliza chiar după primul mare succes. Nivelurile foarte înalte ale impulsului cognitiv pentru Matematică pot inhiba (uneori) însuşirea cunoştinţelor matematice, deoarece „*punerea sub presiune*” a elevului care întâmpină, de exemplu dificultăţi în rezolvarea unei probleme, va crea acestuia o stare anxiogenă. De fapt, probabilitatea supramobilizării este, în general, mai mare la elevii al căror comportament se caracterizează printr-un nivel ridicat de anxietate. De asemenea, s-a constat că stabilirea unor obiective operaţionale precise, posibil de atins, mai curând decât simplele îndemnuri generale adresate elevilor de a „*face tot ce pot*”, sau mai mult decât „*controlul aversiv*”, sunt utile pentru mobilizarea adecvată a elevilor care dispun de un nivel scăzut de motivaţie pentru învăţarea Matematicii.

5. *Dezvoltarea motivaţiei cognitive a elevilor pentru Matematică*, pentru ca aceştia să atingă competenţele gândirii logico - matematice şi să utilizeze, ori de câte ori este posibil, strategiile de raţionament matematic (operaţional - formal). Nu este de ajuns să ştim dacă un elev a atins, sau nu, nivelul competenţelor de raţionament formal, ci trebuie să ştim şi dacă el posedă motivaţia care să-l determine să utilizeze această competenţă. Rezultă că în activităţile didactice se impune, cu necesitate, un mediu instructiv - educativ de nuanţă formativă, care să stimuleze dezvoltarea motivaţiei cognitive şi a dorinţei şi voinţei elevilor de a stăpânii şi utiliza strategii de raţionament operaţional formal, convingându-i pe elevi că astăzi în activităţile profesionale se solicită tot mai mult asemenea competenţe.

6. *Utilizarea competiţiei, a întrecerilor - ca situaţii didactice motivogene în învăţarea Matematicii.* Aceste modalităţi se sprijină pe trebuinţa autoafirmării fiecărui elev, al unui grup, a colectivului clasei. Elevul poate fi determinat să intre în „*competiţie*” cu propriile sale realizări din trecut, cu anumite baremuri sau cu anumite etaloane ideale „*de perfecţiune*”. De mare utilitate, în acest sens, sunt întrecerile între clase, între şcoli, concursurile interjudeţene, olimpiadele, taberele judeţene sau naţionale de Matematică. Cercetările Didactici Matematicii recomandă utilizarea inteligentă a competiţiei între grupe omogene ale clasei, în condiţiile reprezentării unor sarcini de învăţare a căror natură este comună, dar diferă între ele prin numărul de cerinţe. De asemenea, practica şcolară a demonstrat că sunt utile şi întrecerile în care sarcinile didactice sunt prezentate sub forma unor teste de cunoştinţe care lasă libertatea alegerii de către elevi a unor itemi suplimentari, gradual mai dificili, mai complecşi, pe lângă itemii obligatorii. În aceste condiţii se antrenează şi se dezvoltă trebuinţele de performanţă şi nivelul de aspiraţie al elevilor, care sunt factori motivogeni puternici pentru învăţarea Matematicii.

7. *Dezvoltarea motivaţiei cognitive a elevilor pentru învăţarea Matematicii, în interrelaţie cu capacitatea acestora de trăire şi înţelegere a semnificaţiilor valorice (ştiinţifice, filosofice, morale, religioase, economice, estetice) ale cunoştinţelor matematice.* În procesul asimilării cunoştinţelor matematice, înţelegând principiile, legităţile şi explicaţiile ştiinţifice ale acestei discipline, elevii dobândesc treptat şi capacitatea de trăire şi înţelegere a semnificaţiilor valorice ale acestor cunoştinţe. În raport cu natura şi particularităţile cunoştinţelor asimilate, elevii devin capabili să-şi exprime opţiunile valorice:

- *ştiinţifice,*
- *filosofice,*
- *morale,* etc.,

despre aceste cunoştinţe. Acestea se sprijină pe motivaţia cognitivă a elevilor, dar şi pe capacitatea acestora de a sistematiza, abstractiza, generaliza şi utiliza cunoştinţele matematice însuşite.