SEMINAR D.M. 3

1.10 Specialitatea Matematică (sesiune, 2002)

I. Fie $A_1A_2\ldots A_k$ un poligon regulat înscris într-un cerc de rază R, cu $k=2^n$. Să se arate că:

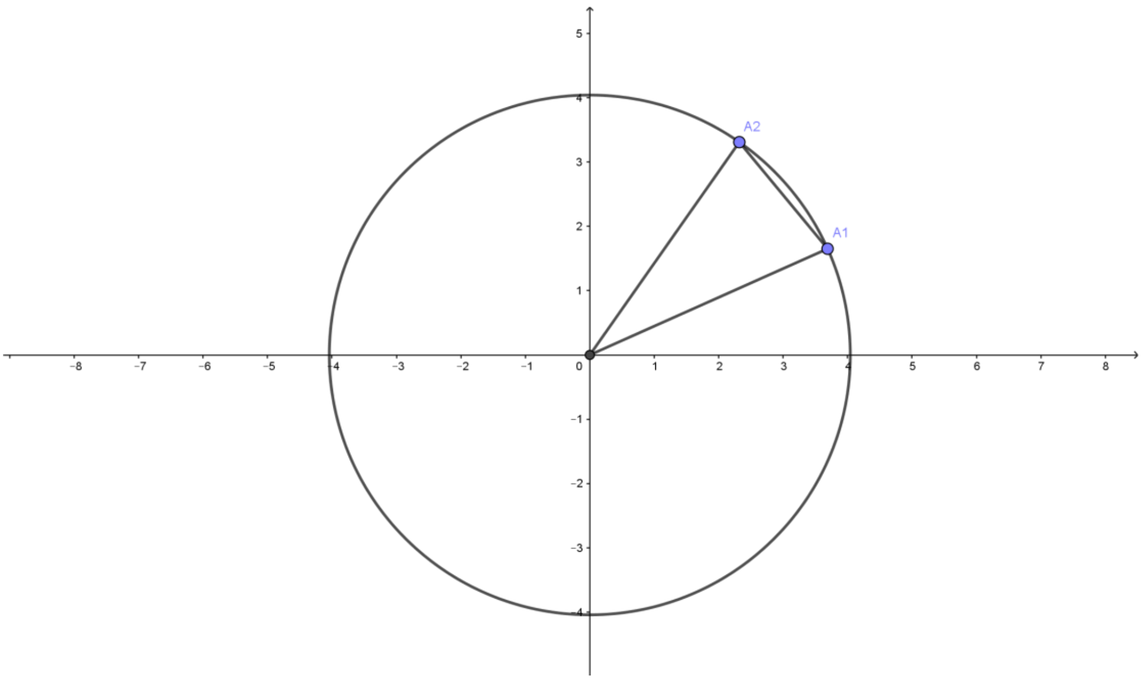
$$A_1A_2=l_{2^n}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}, \qquad \text{(i)}$$

unde numărul radicalilor este egal cu n–1.

Rezolvare: Fie $A_1A_2\cdots A_m$ un poligon regulat cu m laturi înscris într-un cerc de rază R. Atunci, aplicând teorema cosinusului în ΔA_1OA_2, obținem că:

$$A_1A_2=l_m=\sqrt{R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{m}}=\sqrt{2\cdot R^2\cdot\left(1-\cos\frac{2\cdot\pi}{m}\right)}=\sqrt{2\cdot R^2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{\pi}{m}}$$

$$=2\cdot R\cdot\sin\frac{\pi}{m}. \qquad (1)$$



În particular, pentru $m=2^n$, din (1), obținem că latura unul poligon regulat cu 2^n laturi, este egală cu:

$$l_{2^n}=2\cdot R\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}. \qquad (2)$$

Știm că, pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{și} \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (3)$$

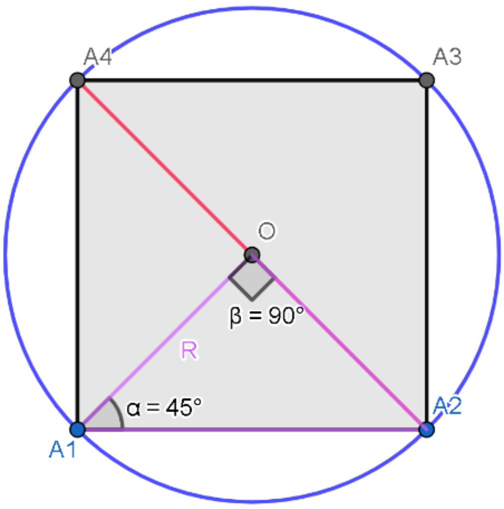
Acum, vom demonstra, prin inducție după numărul natural n≥2, ținând cont de formulele (3), că pentru orice $n\in\mathbf{N}$, n≥2,

$$\sin\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}\ \text{(n-1 radicali)}. \tag{4}$$

Considerăm egalitatea (4) ca fiind propoziția P(n), cu $n\in\mathbf{N}$, n≥2.

Pentru n=2, obținem, ceea ce știam:

$$\sin\frac{\pi}{2^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ (Vezi figura de mai jos.)



Pentru n=3, din egalitățile (3), obținem:

$$\sin\frac{\pi}{2^3}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

și

$$\cos\frac{\pi}{2^3}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

iar pentru n=4, vom obține:

$$\sin\frac{\pi}{2^4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^3}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

și

$$\cos\frac{\pi}{2^4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^3}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Așadar, P(2), P(3) și P(4) sunt propoziții adevărate. Acum, presupunem că, pentru orice k=$\overline{1,n}$, propoziția P(k) este adevărată. Vom demonstra, că, atunci, și P(n+1) este adevărată. Deci, presupunem că au loc egalitățile:

$$\cos\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}\ \text{(n-1 radicali)} \qquad (5)$$

și

$$\sin\frac{\pi}{2^n}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}\ \text{(n-1 radicali).} \qquad (6)$$

Atunci, conform primei egalități de la (3) și a egalității (5), rezultă că:

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}\ \text{(n radicali);}$$

adică propoziția P(n+1) este adevărată. Conform celui de al doilea principiu al inducției matematice, rezultă că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, n≥2, propoziția P(n) este adevărată; adică are loc egalitatea (4). În final, din egalitățile (4) și (2), rezultă egalitatea din enunț.

1.11 Specialitatea Matematică – Informatică (sesiune, 2002)

I. Fie m, $n\in\mathbf{N}^*$. Să se arate că dacă numărul $n^3+5\cdot m^2+5\cdot m$ este cub perfect, atunci m>n.

***Rezolvare*:** Presupunem că m≤n. Atunci, deoarece m>0 și presupunerii făcute:

$$n^3<n^3+5\cdot m^2+5\cdot m\le n^3+5\cdot n^2+5\cdot n<n^3+6\cdot n^2+12\cdot n+8=(n+2)^3. \qquad (1)$$

Deci, conform ipotezei și inegalităților de la (1), rezultă că:

$$n^3+5\cdot m^2+5\cdot m=(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1. \qquad (2)$$

De aici rezultă că:

$$5\cdot m^2+5\cdot m=3\cdot n^2+3\cdot n+1,$$

ceea ce este imposibil.

1.12 Specialitatea Matematică - Fizică (sesiune, 2002)

I. Fie A, $B\in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că există $\lambda\in\mathbf{R}^*$ astfel încât:

$$\lambda\cdot A\cdot B+A+B=O. \qquad (i)$$

Să se arate că:

$$A\cdot B=B\cdot A. \qquad (ii)$$

***Rezolvare*:** Conform ipotezei, egalitatea (i) este echivalentă cu:

$$(\lambda\cdot A+I_n)\cdot(\lambda\cdot B+I_n)=I_n, \qquad (1)$$

ceea ce arată că matricele $\lambda\cdot A+I_n$ și $\lambda\cdot B+I_n$ sunt inverse una alteia. Deci, are loc (și) egalitatea:

$$(\lambda\cdot B+I_n)\cdot(\lambda\cdot A+I_n)=I_n. \qquad (2)$$

Acum, din egalitățile (1) și (2), rezultă egalitatea (ii).

II. Să se arate că funcţia:

$$f:[-1,1]\to\left[-\frac{5\cdot\pi}{3},\frac{2\cdot\pi}{3}\right],$$

dată de legea: pentru orice $x\in[-1,1]$,

$$f(x)=\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot x-\arccos x \qquad (i)$$

este inversabilă şi să se calculeze:

$$\int_{-\pi}^{0} f^{-1}(x)\,dx. \qquad (ii)$$

***Rezolvare*:** Funcția

$$f:[-1,1]\to\left[-\frac{5\cdot\pi}{3},\frac{2\cdot\pi}{3}\right],$$

dată de legea: pentru orice $x\in[-1,1]$,

$$f(x)=\frac{2\cdot\pi}{3}\cdot x-\arccos x, \qquad (i)$$

este derivabilă pe (-1,1) și, pentru orice $x\in(-1,1)$

$$f'(x)=\frac{2\cdot\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0. \qquad (1)$$

Deci f este injectivă. Pe de altă parte,

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=-\frac{5\cdot\pi}{3} \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\frac{2\cdot\pi}{3}. \qquad (2)$$

Funcția f fiind continuă, rezultă că:

$$\mathrm{Im}f=\left[-\frac{5\cdot\pi}{3},\frac{2\cdot\pi}{3}\right]; \qquad (3)$$

deci f este și surjectivă. Așadar, f este bijectivă sau echivalent, inversabilă. Pentru a calcula integrala, efectuăm schimbarea de variabilă:

$x=f(t)$.

Atunci:

$dx=f'(t)\cdot dt$

și:

$$\int_{-\pi}^{0} f^{-1}(x)=\int_{f^{-1}(-\pi)}^{f^{-1}(0)} t\cdot f'(t)\cdot dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot dx=0. \qquad (4)$$

Aici am folosit faptul că:

$$f^{-1}(-\pi)=-\frac{1}{2}, \qquad f^{-1}(0)=\frac{1}{2}$$

și pentru orice a>0 și orice funcție g, integrabilă și impară:

$$\int_{-a}^{a} g(x)\cdot dx=0. \qquad (5)$$

În cazul nostru, funcția:

$$g:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to[-\pi,0], \qquad g(x)=x\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

satisface la aceste condiții.

III. Alcătuiţi şi demonstraţi o teoremă de caracterizare a paralelogramului utilizând arii.

Rezolvare: Vom demonstra următorul rezultat:

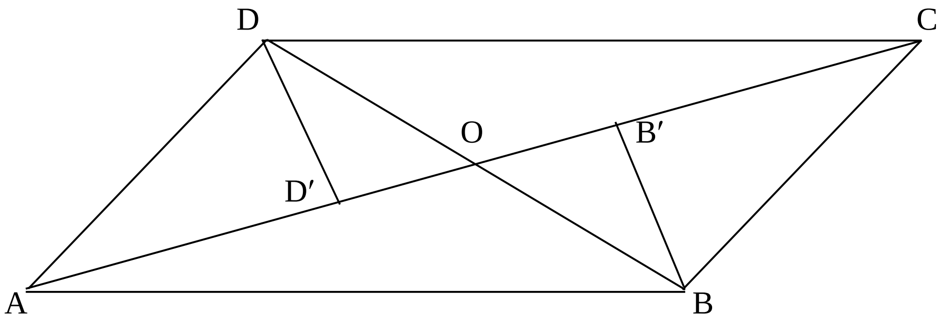
Teoremă: *Dacă ABCD este un patrulater convex, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1) *ABCD este un paralelogram;*

2) Fiecare diagonală a sa îi înjumătățește aria.

Demonstrație: 1) implică 2) Această implicație este imediată.

2) implică 1) Fie ABCD un patrulater în care afirmația de la punctul 2) are loc. Considerăm figura:



Conform ipotezei,

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\mathcal{A}_{\Delta ADC}. \qquad (1)$$

Fie $DD' \perp AC$ și $BB' \perp AC$. Deci, conform egalității (1):

$$\frac{AC\cdot DD'}{2}=\frac{AC\cdot BB'}{2}; \qquad \text{adică} \qquad BB'=DD'. \qquad (2)$$

În aceste condiții triunghiurile dreptunghice $DD'O$ și $BB'O$ sunt congruente (CU), de unde rezultă că:

$$DO=BO. \qquad (3)$$

Analog, din egalitatea ariilor triunghiurilor ABD și BCD, va rezulta că:

$$AO=OC. \qquad (4)$$

Din egalitățile (3) și (4), rezultă afirmația de la punctul 1).

1.13 Specialităţile: Matematică şi Matematică – Informatică (restanțe, 2002)

I. Să se arate că dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel încât:

$$A^3=A+I_n, \qquad (i)$$

atunci $\det A>0$.

Rezolvare: Mai întâi prezentăm câteva rezultate tehnice care ne vor ajuta în rezolvarea acestui exercițiu.

Teorema 1: *Dacă*:

$$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \qquad \text{și} \qquad \overline{A}=(\overline{a_{ij}})\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C}),$$

atunci,

$$\det(\overline{A})=\overline{\det(A)}. \qquad (1)$$

***Demonstrație*:** Au loc următoarele egalități:

$$\det(\overline{A})=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\overline{a_{1\sigma(1)}}\cdot\overline{a_{2\sigma(2)}}\cdot\dots\cdot\overline{a_{n\sigma(n)}}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\overline{a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\dots\cdot a_{n\sigma(n)}}$$

$$=\overline{\sum_{\omega\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\dots\cdot a_{n\sigma(n)}}=\overline{\det(A)}.$$

Corolarul 2: *Dacă $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, astfel încât*:

$$A\cdot B=B\cdot A, \tag{2}$$

atunci:

$$\det(A^2+B^2)\geq 0. \tag{3}$$

***Demonstrație*:** Conform ipotezei,

$$A^2+B^2=(A+i\cdot B)\cdot(A-i\cdot B)=C\cdot\overline{C}, \tag{4}$$

unde:

$$C=A+i\cdot B.$$

Conform Teoremei 1 și egalității (4),

$$\det(A^2+B^2)=\det(A+i\cdot B)\cdot\det(A-i\cdot B)=\det(C)\cdot\det(\overline{C})=\det(C)\cdot\overline{\det(C)}=|\det(C)|^2\geq 0.$$

Corolarul 3: *Dacă $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, astfel încât*:

$$A\cdot B=B\cdot A, \tag{2}$$

și $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$, astfel încât $\alpha^2-4\cdot\beta^2\leq 0$, atunci:

$$\det(A^2+\alpha\cdot A\cdot B+\beta^2\cdot B^2)\geq 0. \tag{5}$$

***Demonstrație*:** Conform ipotezei,

$$A^2+\alpha\cdot A\cdot B+\beta^2\cdot B^2=\left(A+\frac{\alpha}{2}\cdot B\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4\cdot\beta^2-\alpha^2}}{2}\cdot B\right)^2=C^2+D^2. \tag{6}$$

unde:

$$C=A+\frac{\alpha}{2}\cdot B \quad \text{și} \quad D=\frac{\sqrt{4\cdot\beta^2-\alpha^2}}{2}\cdot B. \tag{7}$$

Din egalitățile (2) și (7), rezultă că:

$$C\cdot D=D\cdot C. \tag{8}$$

Acum, Corolarul 2 completează demonstrația.

Corolarul 4: *Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, atunci*:

$$\det(A^2+A+I_n)\geq 0. \tag{9}$$

***Demonstrație*:** Inegalitatea din enunț rezultă din Corolarul 3, pentru:

$\alpha=\beta=1$.

Acum, revenim la rezolvarea exercițiului nostru. Din egalitatea (i) rezultă că $\det(A)$ și $\det(A+I_n)$ au același semn. (10) Dacă rescriem egalitatea (i) sub forma:

$$A\cdot(A+I_n)\cdot(A-I_n)=I_n, \tag{11}$$

atunci, în baza afirmației (10), din egalitatea (11), deducem că:

$$\det(A-I_n)>0. \tag{12}$$

În fine, dacă rescriem egalitatea (i) sub forma:

$$(A-I_n)\cdot(A^2+A+I_n)=A, \tag{13}$$

atunci, în baza inegalităților (9) și (12), deducem că $\det(A)>0$.

***Observație*:** Se poate da și o rezolvare bazată pe valori proprii ale matricii A, arătând că una este reală și două complexe (conjugate), iar $\det(A)$ este produsul acestor valori proprii.