SEMINAR D.M. 10

2.29 Specialitatea: Matematică - Informatică (sesiune, 2006)

I. Să se determine valorile lui $a \in \mathbf{R}$, pentru care şirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots + \frac{\ln n}{n} - a \cdot \ln^2 n \qquad \text{(i)}$$

este convergent.

***Rezolvare*:** Considerăm funcţia:

$$f : [1,+\infty) \to \mathbf{R}, \qquad \text{unde: pentru orice } x \in [1,+\infty), \qquad f(x) = \ln^2 x. \qquad (1)$$

Se observă că f este o funcţie Rolle pe orice interval de forma $[k,k+1]$, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$. Rezultă, conform Teoremei lui Lagrange, că, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, există un $c_k \in (k,k+1)$ astfel încât:

$$f(k+1) - f(k) = f'(c_k). \qquad (2)$$

Deci, considerând n un număr natural oarecare, $n \geq 4$, din (2) obţinem egalităţile:

$$\begin{aligned} & f(2)-f(1)=f'(c_1), \text{ cu } c_1 \in (1,2); \\ & f(3)-f(2)=f'(c_2), \text{ cu } c_2 \in (2,3); \\ & f(4)-f(3)=f'(c_3), \text{ cu } c_3 \in (3,4); \\ & \vdots \\ & f(n+1)-f(n)=f'(c_n), \text{ cu } c_n \in (n,n+1). \end{aligned} \qquad (3)$$

Adunând, membru cu membru, egalităţile (3), obţinem că:

$$f(n+1) - f(1) = f'(c_1) + f'(c_2) + f'(c_3) + \ldots + f'(c_n). \qquad (4)$$

Deoarece $f(1)=0$, din (4) rezultă că:

$$f'(c_1) + f'(c_2) + f'(c_3) + \ldots + f'(c_n) = f(n+1). \qquad (5)$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \in (1,+\infty)$,

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{\ln x}{x} \qquad (6)$$

şi

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}. \qquad (7)$$

Rezultă că, pentru orice $x \in (e,+\infty)$, $f''(x) < 0$, adică f' este strict descrescătoare pe intervalul $(e,+\infty)$. Aşadar, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 3$, avem inegalităţile:

$$f'(k+1) < f'(c_k) < f'(k). \qquad (8)$$

Deci, considerând n un număr natural oarecare, n≥4, din (8) obţinem inegalităţile:

$$f'(4)<f'(c_3)<f'(3),$$
$$f'(5)<f'(c_4)<f'(4), \qquad (9)$$
$$\vdots$$
$$f'(n+1)<f'(c_n)<f'(n).$$

Adunând, membru cu membru, aceste ultime n inegalităţi, obţinem că:

$$\sum_{k=3}^{n} f'(k+1) < \sum_{k=3}^{n} f'(c_k) < \sum_{k=3}^{n} f'(k)\,. \qquad (10)$$

Din relaţia (6) şi inegalităţile (10) obţinem:

$$2\cdot\left(\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)<f'(c_3)+\ldots.+f'(c_n)<2\cdot\left(\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots+\frac{\ln n}{n}\right). \qquad (11)$$

Dar, din ultimele n-1 egalităţi de la (4), obţinem că:

$$f'(c_3)+f'(c_4)+\ldots.+f'(c_n)=f(n+1)-f(3). \qquad (12)$$

Acum, din (11), (12) şi (2), rezultă că:

$$2\cdot\left(\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+\ldots+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)<\ln^2(n+1)-\ln^2 3<2\cdot\left(\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\ldots+\frac{\ln n}{n}\right). \qquad (13)$$

Din (13) rezultă că:

$$2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}\right)<\ln^2(n+1)-\ln^2 3-2\cdot\frac{\ln(n+1)}{n+1}+2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}\right) \qquad (14)$$

şi

$$2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}\right)>\ln^2(n+1)-\ln^2 3+\ln 2. \qquad (15)$$

Dacă:

$$A_n=\ln^2(n+1)-\ln^2 3-2\frac{\ln(n+1)}{n+1}+2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}\right) \qquad (16)$$

şi

$$B_n=\ln^2(n+1)-\ln^2 3+\ln 2, \qquad (17)$$

atunci, din (14) şi (15) obţinem:

$$\frac{1}{2}\cdot B_n<\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}<\frac{1}{2}\cdot A_n,$$

ceea ce conduce la:

$$\frac{1}{2}\cdot(B_n-\ln^2 n)<\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\cdot\ln^2 n<\frac{1}{2}\cdot(A_n-\ln^2 n). \qquad (18)$$

Dar, din (16) rezultă că:

$$A_n-\ln^2 n=\ln^2(n+1)-\ln^2 3-2\cdot\frac{\ln(n+1)}{n+1}+2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}\right)-\ln^2 n$$

$$=\ln[n(n+1)]\cdot\ln\frac{n+1}{n}-2\cdot\frac{\ln(n+1)}{n+1}+2\cdot\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}\right)-\ln^2 3, \tag{19}$$

Analog, din (18) rezultă:

$$B_n-\ln^2 n=\ln[n(n+1)]\cdot\ln\frac{n+1}{n}+\ln 2-\ln^2 3. \tag{20}$$

Deoarece:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln[x\cdot(x+1)]\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\frac{\ln[x\cdot(x+1)]}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln[x\cdot(x+1)]}{x}\right]=0,$$

rezultă că şirurile: $\left(\frac{A_n-\ln^2 n}{2}\right)_{n\geq 2}$ şi $\left(\frac{B_n-\ln^2 n}{2}\right)_{n\geq 2}$ sunt convergente, deci (şi) mărginite.

Acum, din (18) rezultă că şirul:

$$b_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\cdot\ln^2 n$$

este mărginit. (21)

Pe de altă parte, din (3) şi (6), rezultă că există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât:

$$b_{n+1}-b_n=\ln\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot[\ln^2(n+1)-\ln^2 n]=\ln\frac{n+1}{n}-\frac{\ln c_n}{c_n}=\frac{1}{2}\cdot[f'(n+1)-f'(c_n)]<0, \tag{22}$$

conform ultimei inegalităţi de la (9). Rezultă, din (22), că şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este descrescător. Acum (21) completează demonstraţia faptului că şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este convergent. (23)

Revenim la şirul $(a_n)_{n\geq 2}$, observând că:

$$a_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-a\cdot\ln^2 n=b_n+\left(\frac{1}{2}-a\right)\cdot\ln^2 n. \tag{24}$$

Acum distingem trei cazuri:

<u>Cazul I</u>: Dacă $a<\frac{1}{2}$, atunci, din (23) şi (24), rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty. \tag{25}$$

<u>Cazul II</u>: Dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci, din (23) şi (24), rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{26}$$

Cazul III: Dacă $a>\frac{1}{2}$, atunci, din (23) şi (24), rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty. \tag{27}$$

În concluzie, din (25), (26) şi (27), rezultă că:

$(a_n)_{n\geq 2}$ este convergent dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

***Altfel*:** Folosim următorul rezultat tehnic, foarte ușor de demonstrat:

***Lemă*:** *Fie*:

$$f : [1,+\infty) \to (0,+\infty), \tag{28}$$

o funcție strict descrescătoare, cu proprietatea că:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \tag{29}$$

și șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$,

$$x_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\int_1^{n+1} f(x)\cdot dx \tag{30}$$

și

$$y_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\int_1^{n} f(x)\cdot dx. \tag{31}$$

Atunci, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$:

$$x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n. \tag{32}$$

Deci, șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente. În cazul nostru, considerăm funcția:

$$f : [1,+\infty) \to (0,+\infty), \qquad f(x)=\frac{\ln x}{x}, \tag{33}$$

care este o funcție strict descrescătoare pe intervalul $(e,+\infty)$ și are proprietatea că:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0. \tag{29}$$

Prin urmare, conform Lemei, șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definite astfel: pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$,

$$y_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\int_1^{n} f(x)\cdot dx=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+...+\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\cdot\ln^2 n \tag{34}$$

este convergent. În continuare, judecăm ca și mai sus, căci:

$y_n=b_n$.

***Altfel*:** Folosim funcția de la (33), a cărei derivată este: pentru orice $x>1$,

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}. \qquad (35)$$

Observăm, că pentru orice $x\geq 3$, $f'(x)\leq 0$. Așadar, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 4$, avem inegalitățile:

$$\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+...+\frac{\ln n}{n}\leq\int_3^4 f(x)\cdot dx+\int_4^5 f(x)\cdot dx+...+\int_{n-1}^n f(x)\cdot dx\leq\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+...+\frac{\ln(n-1)}{n-1},$$

adică, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 4$,

$$\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+...+\frac{\ln n}{n}\leq\int_3^n f(x)\cdot dx\leq\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+...+\frac{\ln(n-1)}{n-1}. \qquad (36)$$

Deoarece:

$$\int_3^n f(x)\cdot dx=\frac{\ln^2 n-\ln^2 3}{2}, \qquad (37)$$

din egalitatea (37) și inegalitățile (36), obținem că:

$$\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+...+\frac{\ln n}{n}\leq\frac{\ln^2 n-\ln^2 3}{2}\leq\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+...+\frac{\ln(n-1)}{n-1}. \qquad (38)$$

Deci,

$$a_n+a\cdot\ln^2 n-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}\leq\frac{\ln^2 n-\ln^2 3}{2}\leq a_n+a\cdot\ln^2 n-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln n}{n}. \qquad (39)$$

$$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln^2 3}{2}\leq a_n+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot\ln^2 n\leq\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}-\frac{\ln^2 3}{2}. \qquad (40)$$

Trecând la limită în inegalitățile (40), ajungem la aceeași concluzie ca și mai sus.

II. Considerăm pe **R** următoarea lege de compoziţie, notată cu „•”: pentru orice $x, y\in\mathbf{R}$,

$x\bullet y=x\cdot y-6\cdot x-6\cdot y+42.$ (i)

a) Să se arate că legea „•” determină pe mulţimea $G=[5,7]$ o structură de monoid comutativ.

b) Să se determine elementele inversabile ale acestui monoid.

***Rezolvare*:** Legea din enunț o putem scrie așa: pentru orice $x, y\in\mathbf{R}$,

$x\bullet y=(x-6)\cdot(y-6)+6.$ (*)

Verificăm cerințele pentru care $(G,\bullet)$ este monoid.

1) Partea stabilă: Fie $x, y\in G$. Atunci:

$5\leq x\leq 7$ și $5\leq y\leq 7$, (1)

adică:

$-1\leq x-6\leq 1$ și $-1\leq y-6\leq 1$, (2) sau, altfel scris:

$$|x-6|\leq 1 \qquad \text{și} \qquad |y-6|\leq 1. \tag{3}$$

Atunci și:

$$|(x-6)\cdot(y-6)|\leq 1, \tag{4}$$

adică:

$$-1\leq(x-6)\cdot(y-6)\leq 1, \tag{5}$$

sau, altfel scris:

$$5\leq(x-6)\cdot(y-6)+6\leq 6. \tag{6}$$

Inegalitățile (6) ne arată că, $x\bullet y\in G$.

2) Asociativitatea legii „•": Fie, x, y, $z\in G$. Atunci:

$$\begin{aligned}(x\bullet y)\bullet z&=[(x-6)\cdot(y-6)+6]\bullet z\\&=a\bullet z\\&=(a-6)\cdot(z-6)+6\\&=(x-6)\cdot(y-6)\cdot(z-6)+6,\end{aligned} \tag{7}$$

iar

$$\begin{aligned}x\bullet(y\bullet z)&=(x-6)\bullet[(y-6)\cdot(z-6)+6]\\&=x\bullet b\\&=(x-6)\cdot(b-6)+6\\&=(x-6)\cdot(y-6)\cdot(z-6)+6,\end{aligned} \tag{8}$$

unde:

$$a=(x-6)\cdot(y-6)+6 \qquad \text{și} \qquad b=(y-6)\cdot(z-6)+6.$$

Din egalitățile (7) și (8) rezultă că:

$$(x\bullet y)\bullet z=x\bullet(y\bullet z),$$

adică legea „•" este asociativă.

3) Comutativitatea legii „•". Fie, x, $y\in G$. Atunci:

$$\begin{aligned}x\bullet y&=(x-6)\cdot(y-6)+6\\&=(y-6)\cdot(x-6)+6\\&=y\bullet x.\end{aligned} \tag{9}$$

Din egalitățile (9) rezultă că legea „•" este comutativă.

4) Existența elementului neutru pentru legea „•": Fie $e\in G$ astfel încât, oricare ar fi $x\in G$,

$$x\bullet e=x. \tag{10}$$

Conform egalității (∗), egalitatea (10) este echivalentă cu:

$$(x-6)\cdot(e-6)=x-6, \tag{11}$$

egalitatea care trebuie să fie adevărată pentru orice $x\in G$. Observăm că, pentru orice $x\in G\setminus\{6\}$, din egalitatea (11), obținem că:

$$e=7.$$

Acum verifică egalitatea (11) pentru x=6. Într-adevăr,

$$7\bullet 6=(7-6)\cdot(6-6)+6$$
$$=6.$$

Deci, acum putem spune că numărul $7\in G$ este element neutru pentru legea „•” și, conform celor demonstrate mai sus, putem afirma că (G,•) este un monoid comutativ.

b) A determina elementele inversabile ale unui monoid M, înseamnă a determina mulțimea U(M). Știm că U(M) este nevidă deoarece, în orice monoid există cel puțin un element inversabil, acesta este elementul neutru. În cazul nostru, conform celor demonstrate mai sus, $7\in U(G)$. Să verificăm dacă în U(G) mai sunt și alte elemente. Fie $x\in U(G)$ și $x'\in G$, inversul său. Atunci:

$$x\bullet x'=7, \tag{12}$$

adică:

$$(x-6)\cdot(x'-6)+6=7. \tag{13}$$

Din egalitatea (13), rezultă că:

$$x'=6+\frac{1}{x-6}. \tag{14}$$

Punând condiția ca x' să aparțină lui G, obținem că $x\in\{5,7\}$. Altfel spus,

$$U(G)=\{5,7\}.$$

III. Alcătuiți și rezolvați o problemă de Geometrie analitică în care să utilizați hiperbola

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \quad \text{și dreapta} \quad 9\cdot x+2\cdot y=24. \tag{i}$$

Propuneri: 1**)** Să se determine poziția dreptei (D) față de hiperbola (H).

***Rezolvare*:** Determinăm punctele de intersecție ale dreptei (D) cu hiperbola (H), rezolvând sistemul:

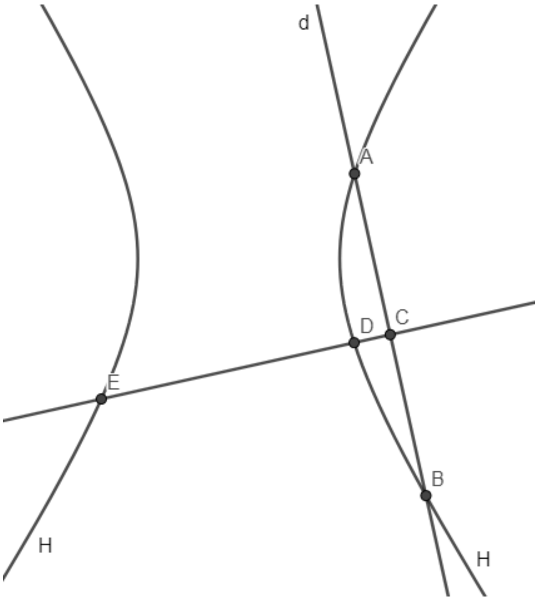
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ 9\cdot x+2\cdot y=24\end{cases}, \tag{1}$$

și obținem două puncte:

$$M\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\cdot\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \text{și} \qquad N\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}, \frac{-6-9\cdot\sqrt{2}}{4}\right).$$

Deci, dreapta (D) este secantă hiperbolei.

2) Fie hiperbola H, dreapta d, A și B punctele de intersecție ale lui d cu H. Fie D și E punctele de intersecție ale mediatoarei segmentului [AB] cu H. (Vezi figura de mai jos.)



Arătați că:

$$5<DE<AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<6.$$

3) Să se arate că dreapta (D) este secantă la hiperbola dată și să se calculeze aria triunghiului determinat de dreapta (D) și tangentele la hiperbolă duse în punctele de intersecție ale acesteia cu dreapta (D).

***Rezolvare*:** Se judecă ca și în cazul precedent. Se scriu ecuațiile tangentelor la hiperbolă în punctele M și N și se determină punctul lor de intersecție. Acesta este $P\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$. În final, se calculează aria triunghiului MNP și se găsește că aceasta este $3\cdot\sqrt{2}$.

4) Determinați distanțele de la focarele hiperbolei la punctele de intersecție ale dreptei cu axa abciselor.

***Rezolvare*:** Focarele hiperbolei sunt punctele:

$$F_1(-\sqrt{13},0) \qquad \text{și} \qquad F_2(\sqrt{13},0)$$

iar punctul de intersecție a dreptei cu axa abciselor este $C\left(\frac{8}{3},0\right)$. Va rezulta că distanțele cerute sunt:

$F_1C=\frac{8}{3}+\sqrt{13}$ și $F_1C=\frac{8}{3}-\sqrt{13}$.

2.30 Specialitatea Fizică - Matematică (sesiune, 2006)

I. Se consideră funcţia:

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde, pentru orice $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\cdot dt$. (i)

a) Să se calculeze:

i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$,

ii) $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx$.

b) Să se arate că f este bijectivă.

c) Dacă:

$g=f^{-1}$, (ii)

să se arate că:

i) g este impară;

ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\ln x}=0$; (iii)

iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. (iv)

***Rezolvare*: a)i)** Deoarece, pentru orice $x\in\mathbf{R}$, are loc inegalitatea:

$$e^x\geq x+1, \quad (1)$$

rezultă că, pentru orice $t\in\mathbf{R}$,

$$e^{t^2}\geq t^2+1. \quad (2)$$

Deci, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$\int_0^x e^{t^2}\cdot dt \geq \int_0^x (t^2+1)\cdot dt=\frac{x^3}{3}+x. \quad (3)$$

Trecând la limită în inegalitatea (3), cânt $x\to\infty$, obținem că:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty. \quad (4)$$

ii) Vom arăta că funcția f este impară. Într-adevăr, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}\cdot dt=\int_0^{x} e^{(-y)^2}\cdot(-dy)=-\int_0^{x} e^{y^2}\cdot dy=-f(x). \qquad (5)$$

Aici am efectuat schimbarea de variabilă:

$$y:=-t.$$

Acum, utilizând egalitățile (5) și ținând cont de faptul că integrala unei funcții (integrabile) și impare pe un interval simetric este nulă, rezultă că:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx=0. \qquad (6)$$

b) Deoarece, f este derivabilă pe **R** și, pentru orice $x\in$**R**,

$$f'(x)=e^{x^2}>0,$$

rezultă că f este strict monotonă (crescătoare) și, implicit, injectivă. (7) Pe de altă parte, datorită imparității și egalității (4),

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\lim_{-x\to+\infty} f(-x)=-\infty. \qquad (5)$$

Fiind continuă pe **R**, rezultă că:

$$\mathrm{Im}f=\mathbf{R}. \qquad (8)$$

Din afirmația (7) și egalitatea (8) – care arată că funcția f este surjectivă, rezultă că această funcție f este bijectivă.

c)i) Deoarece,

$$g=f^{-1},$$

rezultă că, pentru orice $x\in$**R**,

$$f(g(x))=x=g(f(x)). \qquad (9)$$

Dacă $x\in$**R** și:

$$f(x)=y, \qquad (10)$$

atunci:

$$x=g(y). \qquad (10')$$

Deoarece, pentru orice $y\in$**R**, există un singur $x\in$**R**, astfel încât au loc egalitățile (10) și (10′), conform egalităților (5), rezultă că:

$$g(-y)=g(-f(x))=g(f(-x))=-x=-g(y);$$

adică, funcția g este impară.

ii) Conform egalității (4), avem egalitățile:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{\ln x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{g(f(y))}{\ln(f(y))}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\ln(f(y))}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{f'(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f'(y)}{f''(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y^2}}{2\cdot y\cdot e^{y^2}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2\cdot y} = 0. \qquad (11)$$

iii) Conform (4) și (11), avem egalitățile:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{f(x)} \right) = 0\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{f(x)}$$

$$= 0\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\cdot e^{x^2}} = 0\cdot 0 = 0.$$

II. Se consideră mulţimea:

$$K=\{f=a+b\cdot X \mid a, b\in \mathbf{R}\}. \qquad (i)$$

Pe K se consideră operaţiile:

„+”, „∗” : $K\times K \to K$,

unde, pentru orice f, g∈K, f+g este adunarea obişnuită a polinoamelor cu coeficienţi reali, iar f∗g este restul împărţirii lui f·g la X^2+1. Să se arate că:

a) (K,+,∗) este un corp comutativ;

b) corpul (K,+,∗) este izomorf cu corpul (**C**,+,·) al numerelor complexe.

***Rezolvare*:** Fie a, b, c și d∈**R**, iar $f_{a,b}$ și $f_{c,d}\in K$, unde:

$f_{a,b}=a+b\cdot X$ și $f_{c,d}=c+d\cdot X$.

Atunci:

$f_{a,b}=f_{c,d}$ dacă și numai dacă $(a=c) \wedge (b=d)$ (1)

$f_{a,b}+f_{c,d}=f_{a+c,b+d}\in K$ și $f_{a,b}*f_{c,d}=f_{a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c}\in K$.(2)

Așadar K este o mulțime închisă față de cele două legi de compoziție. Verificăm cerințele pentru ca acestea să determine pe K o structură de corp comutativ.

1) Asociativitatea legii „+”:

Fie $f_{a,b}$, $f_{c,d}$ și $f_{g,h}\in K$. Atunci, conform primei egalități de la (2):

$$(f_{a,b}+f_{c,d})+f_{g,h}=f_{a+c,b+d}+f_{g,h}=f_{(a+c)+g,(b+d)+h}=f_{a+(c+g),b+(d+h)}=f_{a,b}+f_{c+g,d+h}$$

$$=f_{a,b}+(f_{c,d}+f_{g,h}). \qquad (3)$$

2) Comutativitatea legii „+”:

Fie $f_{a,b}$ și $f_{c,d}\in K$. Atunci, conform primei egalități de la (2):

$$f_{a,b}+f_{c,d}=f_{a+c,b+d}=f_{c+a,d+b}$$

$$=f_{c,d}+f_{a,b}. \qquad (4)$$

3) Existența elementului neutru față de legea „+”:

Polinomul:

$f_{0,0}=0\in K$

este elementul neutru față de acestă lege, deoarece, oricare ar fi $f_{a,b}\in K$, (conform primei egalități de la (2)),

$$f_{a,b}+f_{0,0}=f_{a+0,b+0}=f_{a,b}. \quad (5)$$

4) Existența simetricului fiecărui element din K față de legea „+”:

Fie $f_{a,b}\in K$ și $f_{c,d}\in K$ simetricul lui față de legea „+”. Atunci, iarăși, prima egalitate de la (2) ne conduce la:

$$f_{a,b}+f_{c,d}=f_{0,0}. \quad (6)$$

În fine, tot din prima egalitate de la (2) și din egalitatea (6), rezultă că:

$c=-a$ și $d=-b$,

adică $f_{-a,-b}\in K$ este simetricul lui $f_{a,b}$ față de legea „+”.

5) Asociativitatea legii „*”:

Fie $f_{a,b}$, $f_{c,d}$ și $f_{g,h}\in K$. Atunci, conform celei de a două egalități de la (2):

$$\begin{aligned}(f_{a,b}*f_{c,d})*f_{g,h}&=f_{a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c}*f_{g,h}=f_{m,n}*f_{g,h}=f_{m\cdot g-n\cdot h,m\cdot h+n\cdot g}\\&=f_{a\cdot c\cdot g-b\cdot d\cdot g-a\cdot d\cdot h-b\cdot c\cdot h,a\cdot c\cdot h-b\cdot d\cdot h+a\cdot d\cdot g+b\cdot c\cdot g}\\&=f_{a\cdot(c\cdot g-d\cdot h)-b\cdot(d\cdot g+c\cdot h),a\cdot(c\cdot h+d\cdot g)+b\cdot(c\cdot g-d\cdot h)}\\&=f_{a\cdot p-b\cdot q,a\cdot q+b\cdot p}=f_{a,b}*f_{p,q}=f_{a,b}*f_{c\cdot g-d\cdot h,c\cdot h+d\cdot g}\\&=f_{a,b}*(f_{c,d}*f_{g,h}). \quad (7)\end{aligned}$$

Aici,

$m=a\cdot c-b\cdot d$, $a\cdot d+b\cdot c$, $p=c\cdot g-d\cdot h$ și $q=c\cdot h+d\cdot g$.

6) Comutativitatea legii „*”:

Fie $f_{a,b}$, $f_{c,d}$ și $f_{g,h}\in K$. Atunci, conform celei de a doua egalități de la (2):

$$\begin{aligned}f_{a,b}*f_{c,d}&=f_{a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c}=f_{c\cdot a-d\cdot b,d\cdot a+c\cdot b}\\&=f_{c,d}*f_{a,b}. \quad (8)\end{aligned}$$

7) Existența elementului neutru față de legea „*”:

Polinomul:

$f_{1,0}=1\in K$

este elementul neutru față de acestă lege, deoarece, oricare ar fi $f_{a,b}\in K$,

$$f_{a,b}*f_{1,0}=f_{a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1}=f_{a,b}. \quad (9)$$

8) Existența simetricului fiecărui element din $K^*=K\setminus\{f_{0,0}\}$, față de legea „*”:

Fie $f_{a,b}\in K^*$ și $f_{c,d}\in K^*$ simetricul lui față de legea „*”. Atunci $a^2+b^2>0$ și:

$f_{a,b}*f_{c,d}=f_{1,0}$. (10)

Din a doua egalitate de la (2), egalitatea (10) și echivalența (1), rezultă că:

$$\begin{cases} a\cdot c-b\cdot d=1 \\ a\cdot d+b\cdot c=0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Rezolvând sistemul (11), care are determinantul nenul, obținem soluția unică:

$$\begin{cases} c=\dfrac{a}{a^2+b^2} \\ d=-\dfrac{a}{a^2+b^2} \end{cases}. \qquad (12)$$

adică $f_{\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}}\in K^*$ este simetricul lui $f_{a,b}$ față de legea „$*$”.

9) Distributivitatea legii „$*$” față de legea „+”.

Fie $f_{a,b}$, $f_{c,d}$ și $f_{g,h}\in K$. Atunci, conform egalităților de la (2):

$$(f_{a,b}+f_{c,d})*f_{g,h}=f_{a+c,b+d}*f_{g,h}=f_{r,s}*f_{g,h}=f_{r\cdot g-s\cdot h,r\cdot h+s\cdot g}$$

$$=f_{a\cdot g+c\cdot g-b\cdot h-d\cdot h,a\cdot h+c\cdot h+b\cdot g+d\cdot g}=f_{a\cdot g-b\cdot h,a\cdot h+b\cdot g}+f_{c\cdot g-d\cdot h,c\cdot h+d\cdot g}$$

$$=(f_{a,b}*f_{g,h})+(f_{c,d}*f_{g,h}). \qquad (13)$$

Analog, se arată că:

$$f_{a,b}*(f_{c,d}+f_{g,h})=(f_{a,b}*f_{c,d})+(f_{a,b}*f_{g,h}). \qquad (14)$$

Acum,

- din cerințele 1) – 4) rezultă că (K,+) este grup comutativ;
- din cerințele 5) – 8) rezultă că (K^*,+) este grup comutativ;
- din cerințele 9) și 10) rezultă că legea „$*$” este distributivă la stânga, respectiv la dreapta față de legea „+”.

Având în vedere aceste afirmații, putem spune că (K,+,$*$) este un corp comutativ.

b) Vom arăta că funcția:

$$F:\mathbf{C}\to K,$$

dată de legea: pentru orice număr complex $a+b\cdot i$,

$$F(a+b\cdot i)=f_{a,b}\in K, \qquad (15)$$

este un izomorfism de corpuri. Din echivalența (1) rezultă că funcția F este injectivă, iar surjectivitatea ei rezultă chiar din definiția ei (egalitatea (15)); deci, funcția f este bijectivă. Din relațiile (2), rezultă că, pentru orice două numere complexe $a+b\cdot i$ și $c+d\cdot i$,

$$F((a+b\cdot i)+(c+d\cdot i))=F((a+c)+(b+d)\cdot i)=f_{a+c,b+d}=f_{a,b}+f_{c,d}$$

$$=F(a+b\cdot i)+F(c+d\cdot i), \qquad (16)$$

şi

$$F((a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i))=F((a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i)=f_{a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c}=f_{a,b}*f_{c,d}$$
$$=F(a+b\cdot i))*F(c+d\cdot i). \qquad (17)$$

Din egalitățile (16) şi (17), rezultă că F este un morfism de corpuri. Deci, corpul numerelor complexe este izomorf cu corpul K.

Observație: *Exercițiul de mai sus se poate rezolva mult mai uşor utilizând următoarea teoremă de transfer de structură*:

Teoremă: *Dacă* $(K_1,+,\cdot)$ *este un corp,* $(K_2,+,\cdot)$ *este o algebră universală (în sensul că satisface la relațiile (2)), iar*:

$$F : K_1 \to K_2,$$

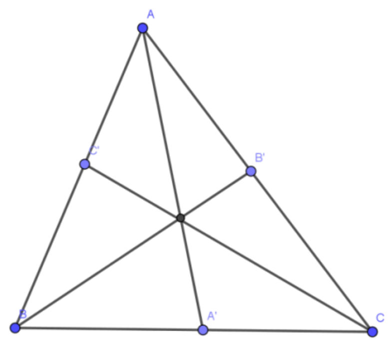
este un izomorfism (în sensul că este bijectivă şi satisfice la relațiile (16) şi (17)), atunci $(K_2,+,\cdot)$ *este un corp izomorf cu* $(K_1,+,\cdot)$.

III. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care [AA′, [BB′ şi [CC′ sunt bisectoarele interioare, cu A′∈(BC), B′∈(AC), C′∈(AB). Să se arate că dacă:

$$A'B=B'C=C'A, \qquad (i)$$

atunci ΔABC este echilateral.

Rezolvare: Să considerăm triunghiul ABC în care [AA′, [BB′ şi [CC′ sunt bisectoarele interioare, cu A′∈(BC), B′∈(AC), C′∈(AB) şi astfel încât au loc egalitățile (i) – vezi figura de mai jos.



Atunci, conform ipotezei şi teoremei bisectoarei,

$$A'B=\frac{a\cdot c}{b+c}, \qquad B'C=\frac{a\cdot b}{a+c} \qquad \text{și} \qquad C'A=\frac{b\cdot c}{a+b}. \tag{1}$$

Din egalitățile (i) și (1) rezultă că:

$$\frac{a\cdot c}{b+c}=\frac{a\cdot b}{a+c}=\frac{b\cdot c}{a+b}, \tag{2}$$

adică:

$$\begin{cases} a\cdot c+c^2=b^2+b\cdot c \\ a\cdot b+a^2=b^2+b\cdot c \end{cases}. \tag{3}$$

Din prima ecuație a sistemului (3) obținem că:

$$a=\frac{b^2+b\cdot c-c^2}{c}, \tag{4}$$

pe care substituind-o în a doua ecuație a aceluiași sistem, obținem ecuația:

$$b^4+3\cdot b^3\cdot c-b^2\cdot c^2-4\cdot b\cdot c^3+c^4=0. \tag{5}$$

Împărțind ecuația (5) cu c^4 și notând:

$$\frac{b}{c}:=x, \tag{6}$$

obținem ecuația:

$$x^4+3\cdot x^3-x^2-4\cdot x+1=0. \tag{7}$$

Observăm că suma coeficienților ecuației (7) este 0, deci ea admite pe 1 ca rădăcină. Utilizând schema lui Horner, obținem că ecuația (7) se scrie sub forma:

$$(x-1)\cdot(x^3+4\cdot x^2+3\cdot x-1)=0. \tag{7'}$$

Așadar,

$$x=1$$

este soluție a ecuației (7′), ceea ce, conform notației (6), ne arată că:

$$b=c,$$

și, în continuare, din egalitatea (4), rezultă că:

$$a=b=c,$$

adică, triunghiul ABC este echilateral. Acum, considerăm funcția:

$$f : (0,+\infty) \to \mathbf{R},$$

dată de legea: pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=x^3+4\cdot x^2+3\cdot x-1. \tag{8}$$

Atunci, funcția f este derivabilă pe **R** și, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=3\cdot x^2+8\cdot x+3. \tag{9}$$

Soluțiile ecuației:

$$f'(x)=0$$

sunt:

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{7}}{3} \quad \text{și} \quad x_2=\frac{-4+\sqrt{7}}{3}, \tag{10}$$

ambele negative. Deci, pe intervalul $(0,+\infty)$, funcția f este strict crescătoare. Observăm că:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-1<0 \quad \text{și} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0. \tag{11}$$

Așadar, funcția f se anulează într-un singur punct $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Deci, din egalitățile (6) și (4), obținem că:

$$b=\alpha\cdot c \quad \text{și} \quad a=(\alpha^2+\alpha-1)\cdot c. \tag{12}$$

Dar, dacă $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, atunci expresia $\alpha^2+\alpha-1$ este negativă, ceea ce arată că a doua egalitate de la (12) nu poate avea loc. În concluzie, altă posibilitate, diferită de cea a triunghiului echilateral – obținută mai sus, nu există.

***Altfel*:** Din egalitățile (2), rezultă că:

$$a\cdot(a+b)=b\cdot(b+c)=c\cdot(c+a) \tag{13}$$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că:

$$a\le b\le c. \tag{14}$$

Astfel:

$$a+b\le c+a\le b+c. \tag{15}$$

Conform presupunerii, din (15), rezultă că:

$$a\cdot(a+b)\le b\cdot(c+a)\le c\cdot(b+c). \tag{16}$$

Înlocuind pe rând $a\cdot(a+b)$ în (16), folosind (13), obținem:

$$b\cdot(b+c)\le b\cdot(c+a)\le c\cdot(b+c);$$

deci:

$$b\le c. \tag{17}$$

Analog, obținem că:

$$c\cdot(c+a)\le b\cdot(c+a)\le c\cdot(b+c),$$

de unde rezultă că:

$$c\le b. \tag{18}$$

Din inegalitățile (14), (17) și (18), rezultă că:

$a=b=c$,

deci triunghiul ABC este echilateral.

***Altfel*:** Din egalitățile (2), rezultă că:

$$\frac{a \cdot c}{b+c}=\frac{a \cdot b}{a+c}=\frac{b \cdot c}{a+b}=\frac{a \cdot (b+c)}{a+b+2 \cdot c}. \qquad (19)$$

Ultima egalitate de la (19) se scrie astfel:

$$1+\frac{2 \cdot c}{a+b}=\frac{a}{c}+\frac{a}{b}. \qquad (20)$$

Analog obținem că:

$$1+\frac{2 \cdot a}{b+c}=\frac{b}{a}+\frac{b}{c} \quad \text{și} \quad 1+\frac{2 \cdot b}{a+c}=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}. \qquad (21)$$

Adunând, membru cu membru, egalitățile de la (20) și (21), obținem că:

$$3=\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-\frac{2 \cdot c}{a+b}-\frac{2 \cdot a}{b+c}-\frac{2 \cdot b}{a+c} \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 3. \qquad (22)$$

Din relațiile (22), rezultă că:

$a=b=c$.

***Altfel*:** Din egalitățile (3), rezultă că:

$b^2-c^2=c \cdot (a-b)$, $\quad c^2-a^2=a \cdot (b-c)$ $\quad$ și $\quad a^2-b^2=b \cdot (c-a)$. $\qquad$ (23)

Înmulțind, membru cu membru, egalitățile de la (23), obținem că:

$$(a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a) \cdot [(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)-a \cdot b \cdot c]=0. \qquad (24)$$

Deoarece:

$a+b>c$, $\quad b+c>a$ $\quad$ și $\quad c+a>b$,

rezultă că:

$$(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a)>a \cdot b \cdot c. \qquad (25)$$

Acum, din egalitatea (24) și inegalitatea (25), rezultă că:

$a=b$ $\quad$ sau $\quad b=c$ $\quad$ sau $\quad c=a$. $\qquad$ (26)

Dar, oricare din egalitățile de la (26), împreună cu egalitățile (2), ne conduc la cerința problemei.

2.31 Specialitatea Fizică - Matematică (restanțe 2006)

I. Să se arate că numărul:

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \in \mathbf{Q}. \qquad (i)$$

Rezolvare: Dacă:

$$x=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}},$$

atunci, el satisface egalitatea:

$$x^3=6-5\cdot x. \tag{1}$$

Utilizând schema lui Horner, obținem că:

$$x=1$$

este singura soluție a acestei ecuații.

II. Fie:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde, pentru orice $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=[x]\cdot\left|\cos\frac{(2\cdot x+1)\cdot\pi}{2}\right|$. (i)

Să se arate că funcția f admite primitive pe **R** și să se determine o primitivă:

$$F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

a funcției f pe **R**. (Prin [x] se notează partea întreagă a numărului real x.)

Rezolvare: Mai întâi, observăm că, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$\cos\frac{(2\cdot x+1)\cdot\pi}{2}=\cos\left(\pi\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\pi\cdot x). \tag{1}$$

Deci, funcția din enunț devine: pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=[x]\cdot|\sin(\pi\cdot x)|. \tag{2}$$

Considerăm, acum, un număr întreg k, oarecare. Atunci, pentru orice $x\in[k,k+1)$,

$$[x]=k \quad \text{și} \quad |\sin(\pi\cdot x)|=(-1)^k\cdot\sin(\pi\cdot x), \tag{3}$$

căci:

$\sin(\pi\cdot x)\geq 0$ dacă și numai dacă $x\in[2\cdot k,2\cdot k+1)$

și

$\sin(\pi\cdot x)<0$ dacă și numai dacă $x\in[2\cdot k+1,2\cdot k+2)$.

Așadar, pentru orice $k\in\mathbf{Z}$ și orice $x\in[k,k+1)$

$$f(x)=(-1)^k\cdot k\cdot\sin(\pi\cdot x). \tag{4}$$

O primitivă a acesteia, pe intervalul [k,k+1) este de forma:

$$F_k(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\cdot k\cdot\cos(\pi\cdot x)+c_k, \tag{5}$$

unde $c_k\in\mathbf{R}$. Constantele c_k se determină din condiția de continuitate a primitivei F. Pentru a afla o primitivă, alegem:

$c_0 := c$.

Funcția F este continuă pe fiecare interval de forma (k,k+1); deci condiția de continuitate se impune doar în capetele intervalelor de această formă. Pentru aceasta trebuie să avem, la limită, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$,

$$\lim_{x \to k+1} F_k(x) = F_{k+1}(k+1), \tag{6}$$

adică:

$$\frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \cdot k \cdot \cos(k \cdot \pi + \pi) + c_k = \frac{(-1)^{k+2}}{\pi} \cdot (k+1) \cdot \cos(k \cdot \pi + \pi) + c_{k+1}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \cdot (k+1) \cdot \cos(k \cdot \pi) + c_{k+1}. \tag{6'}$$

Din egalitățile (6′), rezultă că:

$$\frac{(-1)^{k}}{\pi} \cdot k \cdot \cos(k \cdot \pi) + c_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \cdot (k+1) \cdot \cos(k \cdot \pi) + c_{k+1}. \tag{7}$$

Deoarece, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$,

$$\cos(k \cdot \pi) = (-1)^k, \tag{8}$$

din egalitățile (7) și (8), rezultă că, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$:

$$c_{k+1} - c_k = \frac{2 \cdot k + 1}{\pi}. \tag{9}$$

Scriind relația de recurentă obținută – (9), pe rând, pentru $k = \overline{0, n-1}$, iar apoi însumând membru cu membru, se obține:

$$c_n = c + \frac{n^2}{\pi}. \tag{10}$$

Așadar, o primitivă a funcției f este:

$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

unde, pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ și orice $x \in [k, k+1)$

$$F(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} \cdot k \cdot \cos(\pi \cdot x) + \frac{k^2}{\pi} + c.$$

III. O tangentă dusă într-un punct M al unei elipse cu focarele în F_1 și F_2 intersectează axa mică în N.

a) Să se arate că punctele F_1, F_2, M și N sunt conciclice.

b) Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor $[F_1M]$ şi $[F_2M]$ când M descrie elipsa.

***Rezolvare*: a)** Considerăm elipsa:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

de focare $F_1(-c,0)$ şi $F_2(c,0)$, punctul $M(x_M,y_M)\in(E)$ şi tangenta în punctul M la elipsa (E) – vezi figura de mai jos.

Atunci, ecuația acestei tangente la elipsă este:

$$(d): x\cdot\frac{x_M}{a^2}+y\cdot\frac{y_M}{b^2}=1, \tag{2}$$

iar punctul de intersecție al acestei tangente cu axa Oy este $N\left(0,\frac{b^2}{y_M}\right)$, dacă $y_M\neq0$. Dacă:

$$y_M=0,$$

atunci $M\equiv N$, iar concluzia este evidentă. Presupunem, în continuare, că $M\neq N$, adică $y_M\neq0$. Fie (C) cercul deteminat de F_1, F_2 şi M. Atunci:

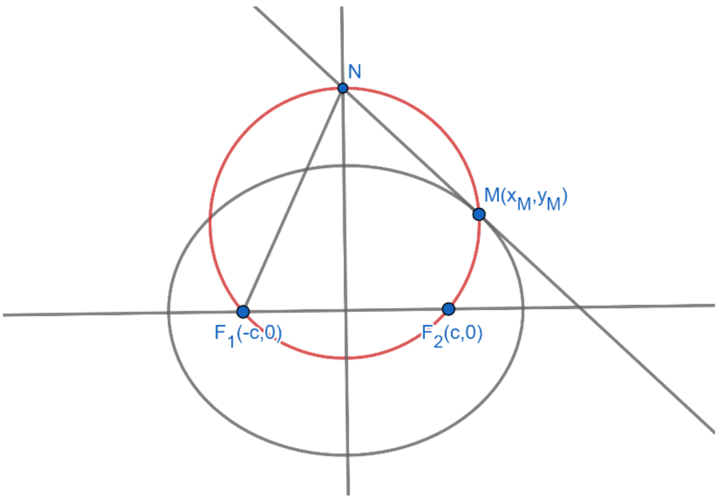
$$(C): \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c^2 & -c & 0 & 1 \\ c^2 & c & 0 & 1 \\ x_M^2+y_M^2 & x_M & y_M & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

adică:

$$2\cdot c\cdot y_M\cdot(x^2+y^2)-2\cdot c\cdot y\cdot(x_M^2+y_M^2-c^2)-2\cdot c^3\cdot y_M=0$$

sau, mai simplu:

$$y_M\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(x_M^2+y_M^2-c^2)-c^2\cdot y_M=0. \tag{4}$$



Verificăm dacă punctul N aparține cercului (C). Știm că:

$$b^2=a^2-c^2,$$

deci $N\left(0,\frac{a^2-c^2}{y_M}\right)$. Deci, conform egalității (4), punctul $N\in(C)$ dacă și numai dacă:

$$y_M\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(x_M^2+y_M^2-c^2)-c^2\cdot y_M=0. \tag{5}$$

Înlocuind în egalitatea (5) coordonatele punctului N, obținem că:

$$y_M\cdot\frac{(a^2-c^2)^2}{y_M^2}-\frac{a^2-c^2}{y_M}\cdot(x_M^2+y_M^2-c^2)-c^2\cdot y_M=0$$

adică:

$$\frac{(a^2-c^2)^2}{y_M}-\frac{a^2-c^2}{y_M}\cdot(x_M^2+y_M^2-c^2)-c^2\cdot y_M=0, \tag{5′}$$

ceea ce se verifică imediat, căci $M\in(E)$.

b) Considerăm elipsa (E) și punctul M, ca și la punctul a) și fie N - mijlocul lui $[F_2M]$, iar P – mijlocul lui $[F_1M]$ - vezi figura de mai jos. Atunci:

$$N\left(\frac{c+x_M}{2},\frac{y_M}{2}\right), \quad \text{iar} \quad P\left(\frac{-c+x_M}{2},\frac{y_M}{2}\right).$$

Deci:

$$x_M=2\cdot x_N-c \quad \text{și} \quad y_M=2\cdot y_N. \tag{6}$$

Deoarece,

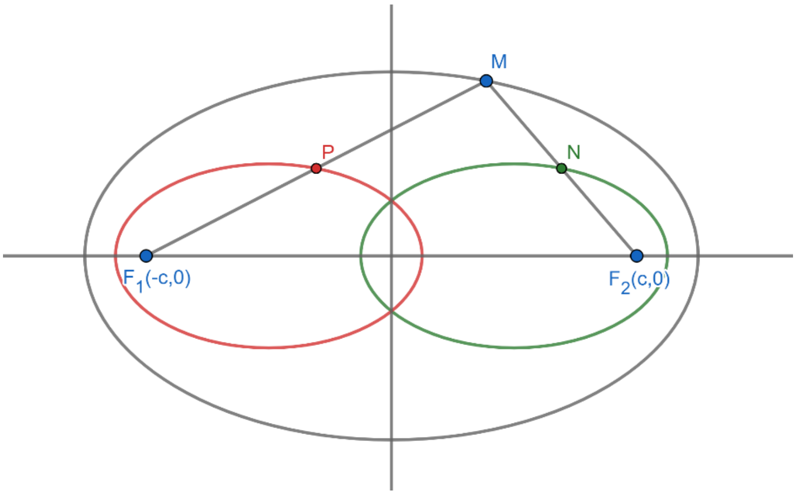
$$\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

înlocuind coordonatele lui M din egalitățile (6) în egalitatea (7), obținem că:

$$\frac{\left(x_N-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y_N^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1, \tag{8}$$

egalitate care ne arată că locul geometric al punctului N - mijlocul lui $[F_2M]$, când punctul M descrie elipsa (E), este tot o elipsă, și anume elipsa:

$$\frac{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1. \tag{9}$$

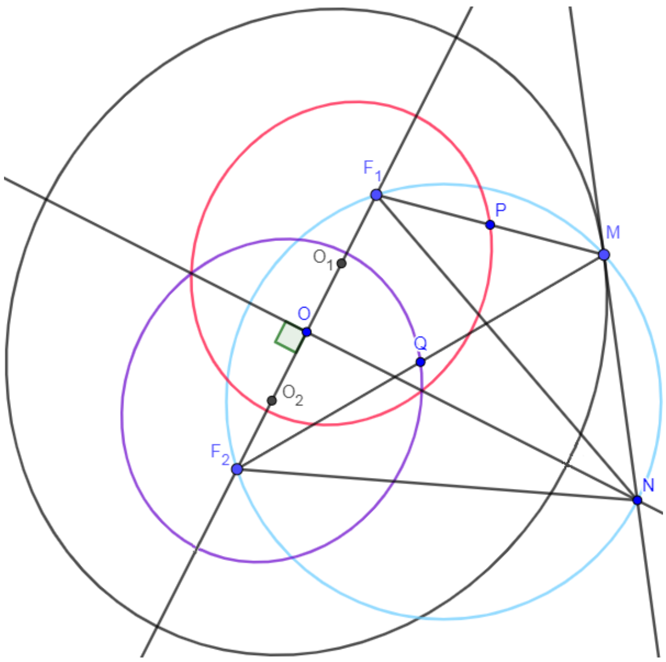


În mod analog, se arată că locul geometric al punctului P - mijlocul lui $[F_1M]$, când punctul M descrie elipsa (E), este de asemenea o elipsă, şi anume elipsa:

$$\frac{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1. \qquad (10)$$

Observăm că cele două elipse sunt simetrice față de axa Oy.

***Altfel*:** Același raționament se poate face și folosind figura de mai jos



2.32 Specialităţile: Matematică şi Matematică aplicată (restanţe, 2006)

I. Fie d_1 şi d_2 doi întregi liberi de pătrate (adică d_1 şi d_2 nu se divid cu pătratul nici unui număr prim) şi mulţimile:

$\mathbf{Z}[\sqrt{d_1}]=\{a+b\cdot\sqrt{d_1} \mid a, b\in\mathbf{Z}\}$, respectiv $\mathbf{Z}[\sqrt{d_2}]=\{a+b\cdot\sqrt{d_2} \mid a, b\in\mathbf{Z}\}$.(i)

Să se arate că:

inelele $(\mathbf{Z}[\sqrt{d_1}],+,\cdot)$ şi $(\mathbf{Z}[\sqrt{d_2}],+,\cdot)$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă $d_1=d_2$. (ii)

Rezolvare: Fie d_1 şi d_2 două numere întregi, ca şi în enunț şi inelele $(\mathbf{Z}[\sqrt{d_1}],+,\cdot)$, respectiv $(\mathbf{Z}[\sqrt{d_2}],+,\cdot)$. Dacă:

$d_1=d_2$,

atunci, cele două inele coincid şi ele sunt, în mod trivial, izomorfe, prin izomorfismul identic $1_{\mathbf{Z}[\sqrt{d_1}]}$. Să presupunem, acum, că cele două inele sunt izomorfe, adică există o aplicație bijectivă:

$f : \mathbf{Z}[\sqrt{d_1}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{d_2}]$,

cu proprietatea că, pentru orice $x, y\in\mathbf{Z}[\sqrt{d_1}]$,

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ şi $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$. (1)

Atunci, conform primei egalități de la (1), pentru $x=y=0$, obținem că:

$f(0)=0$. (2)

(Asta o ştiam şi din faptul că orice morfism de inele este un morfism de grupuri, între grupurile subiacente.) Conform celei de a doua egalități de la (1), pentru $x=y=1$, obținem că:

$f(1)=f^2(1)$. (3)

Datorită injectivității lui f, din egalitatea (3), rezultă că:

$f(1)=1$. (4)

(Asta o ştiam şi din faptul că orice morfism surjectiv de inele, între două inele cu unitate, este unital.) Acum, folosind egalitatea (4) şi prima egalitate de la (1), obținem că:

$f(2)=2$, $f(3)=3$, ...,

şi prin inducție, că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$f(n)=n$. (5)

Prima egalitate de la (1) şi egalitatea (2), pentru $y=-x$, ne conduce la egalitatea:

$f(-x)=-f(x)$, (6)

valabilă pentru orice $x\in\mathbf{Z}$. Atunci din egalitățile (5) şi (6), rezultă că, pentru orice $x\in\mathbf{Z}$,

$f(x)=x$. (7)

Acum, din a doua egalitate de la (1) şi egalitatea (7), pentru $x=y=\sqrt{d_1}$, rezultă că:

$d_1=f(d_1)=f(\sqrt{d_1}\cdot\sqrt{d_1})=f(\sqrt{d_1})\cdot f(\sqrt{d_1})=f^2(\sqrt{d_1})$.

Deci,

$$f(\sqrt{d_1})=\pm\sqrt{d_1}. \quad (8)$$

Dar, $f(\sqrt{d_1})\in\mathbf{Z}[\sqrt{d_2}]$, deci, există a, b$\in$**Z**, astfel încât:

$$a+b\cdot\sqrt{d_2}=\pm\sqrt{d_1}, \quad (9)$$

egalitate care, prin ridicare la pătrat, ne dă egalitatea:

$$a^2+b^2\cdot d_2^2+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{d_2}=d_1,$$

sau, altfel scrisă:

$$2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{d_2}=d_1-a^2-b^2\cdot d_2^2. \quad (10)$$

Deoarece $\sqrt{d_2}$ este irațional, rezultă că egalitatea (10) are loc exact dacă:

$$a\cdot b=0 \quad \text{și} \quad d_1-a^2-b^2\cdot d_2^2=0. \quad (11)$$

Dacă, a=0, atunci din a doua egalitate de la (11), rezultă că:

$$d_1=b^2\cdot d_2^2,$$

ceea ce contrazice ipoteza (d_1 este liber de pătrate). Dacă b=0, atunci aceeași egalitate ne dă:

$$d_1=a^2,$$

și obținem aceeași contradicție ca și mai înainte. În concluzie, egalitatea (9) nu poate avea loc numai dacă $d_1=d_2$ (caz în care a=0 și b=1).

II. Folosind notaţiile obişnuite, să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a^2}+\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{b^2}+\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{c^2}=\frac{3}{4}. \quad \text{(i)}$$

***Rezolvare*:** Din inegalitatea mediilor, pentru n=2, obținem că, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$,

$$x\cdot y\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Deci, în cazul nostru, deoarece p-a, p-b, p-c$\in(0,+\infty)$, din inegalitatea (1), deducem că:

$$(p-a)\cdot(p-b)\le\left(\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right)^2=\left(\frac{(-a+b+c)+(a-b+c)}{4}\right)^2=\frac{c^2}{4}.$$

Deci:

$$\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{c^2}\le\frac{1}{4}. \quad (2)$$

Analog, obținem că:

$$\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a^2} \le \frac{1}{4}. \tag{3}$$

$$\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{b^2} \le \frac{1}{4}. \tag{4}$$

Adunând, membru cu membru, inegalitățile (2), (3) și (4), obținem că:

$$\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{c^2} + \frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a^2} + \frac{(p-c)\cdot(p-a)}{b^2} \le \frac{3}{4}. \tag{5}$$

Comparând egalitatea din enunț cu inegalitatea (5), observăm că inegalitatea (5) devine egalitatea din enunț, doar dacă inegalitățile (2), (3) și (4) devin egalități, adică doar atunci când:

p-a=p-b=p-c ceea ce echivalează cu a=b=c,

și ceea ce înseamnă că triunghiul ABC este echilateral.

***Altfel*:** Observăm că:

$$\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a^2} = \frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4\cdot a^2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4\cdot a^2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{(b-c)^2}{4\cdot a^2}. \tag{6}$$

Analog:

$$\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{c^2} = \frac{1}{4} - \frac{(a-b)^2}{4\cdot c^2}; \tag{7}$$

$$\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{b^2} = \frac{1}{4} - \frac{(c-a)^2}{4\cdot b^2}. \tag{8}$$

Acum, din egalitățile (6), (7) și (8), egalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$\frac{1}{4} - \frac{(b-c)^2}{4\cdot a^2} + \frac{1}{4} - \frac{(a-b)^2}{4\cdot c^2} + \frac{1}{4} - \frac{(c-a)^2}{4\cdot b^2} = \frac{3}{4},$$

adică:

$$\frac{(b-c)^2}{4\cdot a^2} + \frac{(a-b)^2}{4\cdot c^2} + \frac{(c-a)^2}{4\cdot b^2} = 0,$$

ceea ce echivalează cu faptul că a=b=c – triunghiul ABC este echilateral.

2.33 Specialitatea: Matematică - Informatică (restanțe, 2006)

I. Fie d_1 şi d_2 doi întregi liberi de pătrate (adică d_1 şi d_2 nu se divid cu pătratul nici unui număr prim) şi mulţimile:

$\mathbf{Q}[\sqrt{d_1}]=\{a+b\cdot\sqrt{d_1} \mid a, b\in\mathbf{Q}\}$, respectiv $\mathbf{Q}[\sqrt{d_2}]=\{a+b\cdot\sqrt{d_2} \mid a, b\in\mathbf{Q}\}$.(i)

Să se arate că:

corpurile ($\mathbf{Q}[\sqrt{d_1}]$,+,·) şi ($\mathbf{Q}[\sqrt{d_2}]$,+,·) sunt izomorfe dacă şi numai dacă $d_1=d_2$. (ii)

***Rezolvare*:** Vom proceda analog cu rezolvarea de la Exercițiul I, de la 1. / 2.32, de mai sus. Astfel, fie d_1 şi d_2 două numere întregi, ca şi în enunț şi corpurile ($\mathbf{Q}[\sqrt{d_1}]$,+,·), respectiv ($\mathbf{Q}[\sqrt{d_2}]$,+,·). Dacă:

$$d_1=d_2,$$

atunci, cele două corpuri coincid şi ele sunt, în mod trivial, izomorfe, prin izomorfismul identic $1_{\mathbf{Q}[\sqrt{d_1}]}$. Să presupunem, acum, că cele două corpuri sunt izomorfe, adică există o aplicație bijectivă:

$$f : \mathbf{Q}[\sqrt{d_1}] \to \mathbf{Q}[\sqrt{d_2}],$$

cu proprietatea că, pentru orice x, $y\in\mathbf{Q}[\sqrt{d_1}]$,

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \text{şi} \qquad f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y). \qquad (1)$$

Atunci, conform primei egalități de la (1), pentru x=y=0, obținem că:

$$f(0)=0. \qquad (2)$$

(Asta o ştiam şi din faptul că orice morfism de inele / corpuri este un morfism de grupuri, între grupurile subiacente.)

Conform celei de a doua egalități de la (1), pentru x=y=1, obținem că:

$$f(1)=f^2(1). \qquad (3)$$

Datorită injectivității lui f, din egalitatea (3), rezultă că:

$$f(1)=1. \qquad (4)$$

(Asta o ştiam şi din faptul că orice morfism surjectiv de inele, între două inele cu unitate, este unital; sau din faptul că orice morfism de corpuri este injectiv – deci, în egalitatea (3), varianta f(1)=0 nu este posibilă.)

Acum, folosind egalitatea (4) şi prima egalitate de la (1), obținem că:

$$f(2)=2, \qquad f(3)=3, \qquad \ldots,$$

şi prin inducție, că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$,

$$f(n)=n. \qquad (5)$$

Pe de altă parte, tot din prima egalitate de la (3), obținem că, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$:

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}. \qquad (6)$$

căci:

$$1=f(1)=f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{n ori}}\right)=\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{n ori}}=n\cdot f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Acum, pentru orice $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}_+^*$, obținem că:

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{m ori}}\right)=\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{m ori}}=m\cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{m}{n}. \tag{7}$$

Aceeași primă egalitate de la (1) și egalitatea (2), pentru y=-x, ne conduce la egalitatea:

$$f(-x)=-f(x), \tag{8}$$

valabilă pentru orice $x\in\mathbf{Q}$. Atunci, din egalitățile (5) și (8), rezultă că, pentru orice $x\in\mathbf{Q}$,

$$f(x)=x. \tag{9}$$

Acum, din a doua egalitate de la (1) și egalitatea (9), pentru $x=y=\sqrt{d_1}$, rezultă că:

$$d_1=f(d_1)=f(\sqrt{d_1}\cdot\sqrt{d_1})=f(\sqrt{d_1})\cdot f(\sqrt{d_1})=f^2(\sqrt{d_1}).$$

Deci,

$$f(\sqrt{d_1})=\pm\sqrt{d_1}. \tag{10}$$

Dar, $f(\sqrt{d_1})\in\mathbf{Q}[\sqrt{d_2}]$, deci, există a, $b\in\mathbf{Q}$, astfel încât:

$$a+b\cdot\sqrt{d_2}=\pm\sqrt{d_1}, \tag{11}$$

egalitate care, prin ridicare la pătrat, ne dă egalitatea:

$$a^2+b^2\cdot d_2^2+2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{d_2}=d_1,$$

sau, altfel scrisă:

$$2\cdot a\cdot b\cdot\sqrt{d_2}=d_1-a^2-b^2\cdot d_2^2. \tag{12}$$

Deoarece $\sqrt{d_2}$ este irațional, rezultă că egalitatea (12) are loc exact dacă:

$$a\cdot b=0 \qquad \text{și} \qquad d_1-a^2-b^2\cdot d_2^2=0. \tag{13}$$

Dacă, a=0, atunci din a doua egalitate de la (13), rezultă că:

$$d_1=b^2\cdot d_2^2,$$

ceea ce contrazice ipoteza (d_1 este liber de pătrate). Dacă b=0, atunci aceeași egalitate ne dă:

$d_1=a^2$,

și obținem aceeași contradicție ca și mai înainte. În concluzie, egalitatea (11) nu poate avea loc numai dacă $d_1=d_2$ (caz în care a=0 și b=1).

II. Folosind notaţiile obişnuite, să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)}+\frac{b^2}{(p-c)\cdot(p-a)}+\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}=12. \qquad \text{(i)}$$

***Rezolvare*:** Din inegalitatea mediilor, pentru n=2, obținem că, oricare ar fi x, y$\in(0,+\infty)$,

$$x\cdot y\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

adică:

$$\frac{1}{x\cdot y}\ge\left(\frac{2}{x+y}\right)^2. \qquad (1')$$

Deci, în cazul nostru, deoarece, p-a, p-b, p-c$\in(0,+\infty)$, din inegalitatea (1′), deducem că:

$$\frac{1}{(p-a)\cdot(p-b)}\ge\left(\frac{2}{(p-a)+(p-b)}\right)^2=\left(\frac{4}{(-a+b+c)+(a-b+c)}\right)^2=\frac{4}{c^2}.$$

Deci:

$$\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}\ge\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Analog, obținem că:

$$\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)}\ge\frac{1}{4}. \qquad (3)$$

$$\frac{b^2}{(p-a)\cdot(p-c)}\ge\frac{1}{4}. \qquad (4)$$

Adunând, membru cu membru, inegalitățile (2), (3) și (4), obținem că:

$$\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}+\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)}+\frac{b^2}{(p-a)\cdot(p-c)}\ge\frac{3}{4}. \qquad (5)$$

Comparând egalitatea din enunț cu inegalitatea (5), observăm că inegalitatea (5) devine egalitatea din enunț, doar dacă inegalitățile (2), (3) și (4) devin egalități, adică doar atunci când:

p-a=p-b=p-c ceea ce echivalează cu a=b=c,

ceea ce înseamnă că triunghiul ABC este echilateral.

***Altfel*:** Notăm cu:

$$x=\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)},\quad y=\frac{b^2}{(p-c)\cdot(p-a)}\quad \text{și}\quad z=\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}.$$

Din enunț și inegalitatea mediilor, rezultă că:

$$(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9,\qquad \text{adică:}\qquad 12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9. \quad (6)$$

Deci,

$$\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{c^2}+\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{a^2}+\frac{(p-c)\cdot(p-a)}{b^2}\geq\frac{3}{4}.$$

Acum, din relația (5) de la rezolvarea Exercițiului II de la 1. / 2.32, obținem că triunghiul ABC este echilateral.

***Altfel*:** Observăm că:

$$\frac{a^2}{(p-b)\cdot(p-c)}=\frac{4\cdot a^2}{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}=\frac{4\cdot a^2}{a^2-(b-c)^2}=4\cdot\frac{a^2-(b-c)^2+(b-c)^2}{a^2-(b-c)^2}$$

$$=4+\frac{(b-c)^2}{(p-b)\cdot(p-c)}. \quad (6)$$

Analog:

$$\frac{b^2}{(p-a)\cdot(p-c)}=4+\frac{(a-c)^2}{(p-a)\cdot(p-c)}, \quad (7)$$

$$\frac{c^2}{(p-a)\cdot(p-b)}=4+\frac{(a-b)^2}{(p-a)\cdot(p-b)}. \quad (8)$$

Acum, din egalitățile (6), (7) și (8), egalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$4+\frac{(b-c)^2}{(p-b)\cdot(p-c)}+4+\frac{(a-c)^2}{(p-a)\cdot(p-c)}+4+\frac{(a-b)^2}{(p-a)\cdot(p-b)}=12,$$

adică:

$$\frac{(b-c)^2}{(p-b)\cdot(p-c)}+\frac{(a-c)^2}{(p-a)\cdot(p-c)}+\frac{(a-b)^2}{(p-a)\cdot(p-b)}=0,$$

ceea ce echivalează cu faptul că a=b=c – triunghiul ABC este echilateral.