SEMINAR D.M. 4

1.14 Specialitatea Matematică – Fizică (restanțe, 2002)

I. Rezolvaţi în **R** ecuaţia:

$$(1-x)^n+(1+x)^n=2^n,$$

dacă $n\in\mathbf{N}^*$ şi este impar.

***Rezolvare*:** Cazul:

$$n=1$$

este fiind trivial (orice $x\in\mathbf{R}$ este soluție), vom considera n impar și $n\geq 3$. Acum, considerăm funcția:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde, pentru orice $x\in R$, $f(x)=(1-x)^n+(1+x)^n-2^n$.(1)

Atunci f este derivabilă pe **R** și, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=n\cdot[(1+x)^{n-1}-(1-x)^{n-1}]. \tag{2}$$

Observăm că:

$f'(x)=0$ dacă și numai dacă $x=0$.

Tabelul de variație al funcției f este următorul:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$2-2^n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deoarece $2-2^n<0$, f fiind continuă și strict monotonă, conform primei Teoreme a lui Bolzano-Cauchy, există un singur număr $a<0$, astfel încât:

$$f(a)=0$$

și există un singur număr $b>0$, astfel încât:

$$f(b)=0.$$

Se observă că:

$a=-1$ și $b=1$,

care sunt, astfel, singurele soluții ale ecuației.

***Altfel*:** Deoarece n este impar, rezultă că:

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2(C_n^0+C_n^2\cdot x^2+C_n^4\cdot x^4+\cdots+C_n^{n-3}\cdot x^{n-3}+C_n^{n-1}\cdot x^{n-1})$$
$$=2^n. \tag{3}$$

Deci,

$$C_n^0+C_n^2\cdot x^2+C_n^4\cdot x^4+\cdots+C_n^{n-3}\cdot x^{n-3}+C_n^{n-1}\cdot x^{n-1}=2^{n-1}$$

$$=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{n-3}+C_n^{n-1}. \qquad (4)$$

Rezultă că:

$$(x^2-1)\cdot[C_n^2+C_n^4\cdot(x^2+1)+\cdots+C_n^{n-3}\cdot(x^{n-5}+x^{n-7}+\cdots+x^2+1)+C_n^{n-1}\cdot(x^{n-3}+x^{n-5}+\cdots+x^2+1)]=0.$$

Așadar singurele soluții ale ecuației sunt:

$x=-1$ și $x=1$.

1.15 Specialitatea Matematică (sesiune, 2003)

I. Suma a 10 numere naturale distincte şi nenule este 62. Să se arate că produsul lor este multiplu de 120.

Rezolvare*:** Vom demonstra că produsul unor astfel de numere este multiplu de *1440*, deci: vom demonstra că: „*Produsul a* ***10 *numere naturale distincte, nenule şi cu suma egală cu* ***62****, se divide cu* ***1440***" şi vom determina toate sistemele de astfel de *10* numere. Fie:

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$$

cele zece numere naturale, nenule, distincte cu:

$$S=\sum_{k=1}^{10} a_k=62 \quad \text{şi fie:} \quad P=\prod_{k=1}^{10} a_k. \qquad (1)$$

Deoarece:

$$1440=2^5 3^2 5,$$

vom demonstra că P este multiplu de *32*, *9* şi *5*. În acest sens procedăm astfel:

1) Dacă $1\notin A$, atunci:

$$S\geq 2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=65>62.$$

Rezultă că $1\in A$.

2) Dacă $2\notin A$, atunci:

$$S\geq 1+3+4+5+6+7+8+9+10+11=64>62.$$

Rezultă că $2\in A$.

3) Dacă $3\notin A$, atunci:

$$S\geq 1+2+4+5+6+7+8+9+10+11=63>62.$$

Rezultă că $3\in A$.

4) Dacă în A nu există nici un multiplu de *4*, atunci:

$$S\geq 1+2+3+5+6+7+9+10+11+13=67>62.$$

Rezultă că A conţine cel puţin un multiplu de *4*.

5) Dacă $4 \notin A$ şi $8 \notin A$, atunci:

$$S \geq 1+2+3+5+6+7+9+10+11+12=66>62.$$

Rezultă că: dacă $4 \notin A$, atunci $8 \in A$ şi reciproc, adică: dacă $8 \notin A$, atunci $4 \in A$.

6) Dacă $4 \in A$ şi $8 \in A$, atunci P este multiplu de 32.

7) Dacă $4 \in A$, $8 \notin A$ şi în A nu mai există alt număr par (în afară de 2 şi 4), atunci:

$$S \geq 1+2+3+4+5+7+9+11+13+15=70>62.$$

Rezultă că, în acest caz, mulţimea A mai conţine (pe lângă 2 şi 4) încă un număr par. Deci numărul numerelor pare din A este cel puţin 3. Dacă A conţine exact trei numere pare, atunci suma celorlalte şapte numere impare din A este un număr par, ceea ce este imposibil. Rezultă că, în aceste condiţii, mulţimea A conţine cel puţin patru numere pare, dintre care unul este 4. Deci P este multiplu de 32.

8) Dacă $4 \notin A$, $8 \in A$ şi în A nu mai există alt număr par (în afară de 2 şi 8), atunci:

$$S \geq 1+2+3+5+7+8+9+11+13+15=74>62.$$

Rezultă că, în acest caz, mulţimea A mai conţine (pe lângă 2 şi 8) încă un număr par. Deci, raţionând ca şi la pasul anterior, obţinem că, în aceste condiţii, mulţimea A conţine cel puţin patru numere pare, dintre care unul este 8. Deci P este multiplu de 32.

9) Dacă în A nu există nici un multiplu de 5, atunci:

$$S \geq 1+2+3+4+6+7+8+9+11+12=63>62.$$

Rezultă că A conţine cel puţin un multiplu de 5.

10) Dacă în A nu există nici un alt multiplu de 3 (în afară de 3), atunci:

$$S \geq 1+2+3+4+5+7+8+10+11+13=64>62.$$

Rezultă că A conţine cel puţin doi multipli de 3 şi P este multiplu de 9.

Acum problema noastră este complet rezolvată.

***Altfel*:** Vom determina toate sistemele de 10 numere cu proprietăţile din enunţ. În acest sens vom nota cu A_k o mulţime formată din astfel de 10 numere şi cu P_k produsul lor. Mai întâi, observăm că:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55<62.$$

Aşadar pentru a obţine un sistem de astfel de 10 numere din mulţimea:

$$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

trebuie scos un număr, cel puţin egal cu 4, şi înlocuit cu altul, cu 7 mai mare decât el, sau scoase două numere, fiecare cel puţin egal cu 4, şi înlocuite cu altele a căror sumă este mai mare cu 7 decât suma celor scoase din B, sau acelaşi lucru făcut cu trei numere sau patru numere, sau ... .

1) Scoatem din B un singur număr şi îl înlocuim cu altul cu 7 mai mare decât el.

i) Dacă $4 \notin B$, atunci obţinem:

$A_1=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ şi $P_1=9979200=1440\cdot(11\cdot 9\cdot 7\cdot 2)$. (1)

ii) Dacă $5 \notin B$, atunci obţinem:

$A_2=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$ şi $P_2=8709120=1440\cdot(32\cdot 27\cdot 7)$. (2)

iii) Dacă $6 \notin B$, atunci obţinem:

$A_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13\}$ şi $P_3=7862400=1440\cdot(13\cdot 5\cdot 4\cdot 3)$. (3)

iv) Dacă $7 \notin B$, atunci obţinem:

$A_4=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14\}$ şi $P_4=7257600=1440\cdot(16\cdot 9\cdot 7\cdot 5)$. (4)

v) Dacă $8 \notin B$, atunci obţinem:

$A_5=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 15\}$ şi $P_5=6804000=1440\cdot(27\cdot 25\cdot 7)$. (5)

vi) Dacă $9 \notin B$, atunci obţinem:

$A_6=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 16\}$ şi $P_6=6451200=1440\cdot(128\cdot 7\cdot 5)$. (6)

vii) Dacă $10 \notin B$, atunci obţinem:

$A_7=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17\}$ şi $P_7=6168960=1440\cdot(17\cdot 9\cdot 7\cdot 4)$. (7)

2) Scoatem din B două numere şi le înlocuim cu altele, să zicem a şi b, care sunt (fiecare) cel puţin egale cu 11, respectiv 12 (deci $a+b\geq 23$), şi astfel încât $a+b$ este mai mare cu 7 decât suma celor scoase din B.

i) Dacă din B scoatem numerele 4 şi c, atunci:

$c\in\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $4+c\in\{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

şi $a+b\in\{16, 17, 18, 19, 20, 21\}$,

ceea ce este imposibil. Rezultă că, în aceste condiţii, nu există nici un astfel de sistem de 10 numere.

ii) Dacă din B scoatem numerele 5 şi d, atunci:

$d\in\{6, 7, 8, 9, 10\}$, $5+d\in\{11, 12, 13, 14, 15\}$ şi $a+b\in\{18, 19, 20, 21, 22\}$,

ceea ce este imposibil. Rezultă că, şi în aceste condiţii, nu există nici un astfel de sistem de 10 numere.

iii) Dacă din B scoatem numerele 6 şi e, atunci:

$e\in\{7, 8, 9, 10\}$, $6+e\in\{13, 14, 15, 16\}$ şi $a+b\in\{20, 21, 22, 23\}$.

Rezultă că, în aceste condiţii,

$a=11$, $b=12$, $e=10$

şi obţinem:

$A_8=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12\}$ şi $P_8=7983360=1440\cdot(11\cdot9\cdot8\cdot7)$. (8)

iv) Dacă din B scoatem numerele 7 şi f, atunci:

$f\in\{8, 9, 10\}$, $7+f\in\{15, 16, 17\}$ şi $a+b\in\{22, 23, 24\}$.

Rezultă că, în aceste condiţii, $(a, b, f)\in\{(11, 12, 9); (11, 13, 10)\}$ şi obţinem:

$A_9=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$ şi $P_9=7603200=1440\cdot(32\cdot11\cdot5\cdot3)$. (9)

$A_{10}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13\}$ şi $P_{10}=7413120=1440\cdot(13\cdot11\cdot7\cdot4)$. (10)

v) Dacă din B scoatem numerele 8 şi g, atunci:

$g\in\{9, 10\}$, $8+g\in\{17, 18\}$ şi $a+b\in\{24, 25\}$.

Rezultă că, în aceste condiţii,

$(a, b, g)\in\{(11, 13, 9); (11, 14, 10), (12, 13, 10)\}$

şi obţinem:

$A_{11}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13\}$ şi $P_{11}=7207200=1440\cdot(13\cdot11\cdot7\cdot5)$; (11)

$A_{12}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14\}$ şi $P_{12}=6985440=1440\cdot(49\cdot11\cdot9)$; (12)

$A_{13}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13\}$ şi $P_{13}=7076160=1440\cdot(27\cdot13\cdot7\cdot2)$. (13)

vi) Dacă din B scoatem numerele 9 şi 10, atunci:

$a+b=26$.

Rezultă că, în aceste condiţii,

$(a, b)\in\{(11, 15); (12, 14)\}$

şi obţinem:

$A_{14}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 15\}$ şi $P_{14}=6652800=1440\cdot(11\cdot7\cdot5\cdot4\cdot3)$; (14)

$A_{15}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 14\}$ şi $P_{15}=6773760=1440\cdot(49\cdot32\cdot3)$. (15)

3) Scoatem din B trei numere, fiecare cel puţin egal cu 4, şi le înlocuim cu altele, să zicem a, b şi c, care sunt (fiecare) cel puţin egale cu 11, 12, respectiv 13 (deci $a+b+c\geq34$), şi astfel încât $a+b+c$ este mai mare cu 7 decât suma celor scoase din B. Rezultă că suma celorlalte şapte numere din B (să zicem: d, e, f, g, h, i, j) este cel mult egală cu 28. Aşadar:

$28\geq d+e+f+g+h+i+j\geq1+2+3+7+8+9+10=40$,

ceea ce este imposibil. Rezultă că din B nu putem scoate mai mult de două numere pe care să le înlocuim cu altele, astfel ca, condiţiile problemei să fie respectate.

În concluzie, am obţinut 15 sisteme de astfel de numere şi, se observă că, produsul numerelor din fiecare sistem obţinut este multiplu de 1440; mai mult, 1440 este cel mai mare divizor comun al (tuturor) acestor produse. Astfel, şi prin această metodă, problema este complet rezolvată.

II. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir neconstant. Considerăm următoarele propoziţii:

p: „pentru orice $n\geq 0$, $a_n^2-2\cdot a_{n+1}\leq 4\cdot a_n-9<2\cdot(4\cdot a_n-a_{n+1}-1)$";

q: „ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$".

Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor formule propoziţionale:

a) „$p \Rightarrow q$";

b) „$q \Rightarrow p$";

c) „$p \Leftrightarrow q$".

***Rezolvare*:** „$p \Rightarrow q$" Din enunț, rezultă că: pentru orice $n\geq 0$,

$$a_n^2-2a_{n+1}<2(4\cdot a_n-a_{n+1}-1); \qquad \text{adică} \qquad a_n^2-8\cdot a_n+2<0. \qquad (1)$$

Deci șirul nostru este mărginit. (2) Tot din enunț, rezultă că, pentru orice $n\geq 0$,

$$a_n^2-2\cdot a_{n+1}\leq 4\cdot a_n-9; \qquad \text{adică} \qquad 0\leq(a_n-3)^2\leq 2\cdot(a_{n+1}-a_n), \quad (3)$$

ceea ce arată că șirul a_n este crescător (4). Din afirmațiile (2) și (4) rezultă că (a_n) este convergent. Atunci orice subșir al lui (a_n) converge la aceeași limită l și putem trece la limită în inegalitățile din propoziția „p". Deci:

$$l^2-2\cdot l\leq 4\cdot l-9\leq 2\cdot(4l-l-1), \qquad \text{adică} \qquad l=3. \qquad (5)$$

„$q \not\Rightarrow p$". Observăm că șirul (a_n) din propoziția „p" este crescător și că niciun șir descrescător nu satisface la inegalitățile din această propoziție. De exemplu, se verifică imediat că, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, șirul:

$$b_n=3-\frac{1}{n+1},$$

nu satisface la ambele inegalități din propoziția „p".

„$p \not\Leftrightarrow q$" Rezultă din punctul precedent, conform Principiului echivalenței.

III. Fie $a, b, c\in(0,+\infty)$ astfel încât:

$$a^8+b^8+c^8<2\cdot(a^4\cdot b^4+b^4\cdot c^4+c^4\cdot a^4). \qquad (i)$$

Dați o interpretare geometrică acestei inegalităţi.

***Rezolvare*:** Inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$a^8+2\cdot a^4\cdot b^4+b^8-2\cdot c^4\cdot(a^4+b^4)+c^8<4\cdot a^4\cdot b^4, \qquad (1)$$

adică:

$$(a^4+b^4-c^4)^2-4\cdot a^4\cdot b^4<0, \qquad (1')$$

ceea ce echivalează cu:

$$[(a^2-b^2)^2-c^4)]\cdot[(a^2+b^2)^2-c^4)]<0, \qquad (1'')$$

care se poate scrie și astfel:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2-b^2-c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)<0. \qquad (1''')$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu:

$$(-a^2+b^2+c^2)\cdot(a^2-b^2+c^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)>0.$$

Din această inegalitate deducem că avem două posibilități:

1) Expresiile algebrice din două paranteze sunt negative; să zicem că:

$$-a^2+b^2+c^2<0 \qquad \text{și} \qquad a^2-b^2+c^2<0,$$

ceea ce este imposibil (prin adunarea lor obținem că $2\cdot c^2<0$).

2) Expresiile din cele trei paranteze sunt pozitive. Deci:

$$\begin{cases} b^2+c^2>a^2 \\ c^2+a^2>b^2 \\ a^2+b^2>c^2 \end{cases}.$$

Acest sistem de inegalități admite două interpretări geometrice.

Prima interpretare: Dacă numerele reale a, b și c sunt ca și în enunț, atunci există un triunghi de laturi a^2, b^2 și c^2.

A doua interpretare: Dacă numerele reale a, b și c sunt ca și în enunț și există un triunghi de laturi a, b și c, atunci acesta este ascuțitunghic.