SEMINAR D.M. 6

2.19 Specialitatea Matematică (sesiune, 2004)

I. Să se determine toate numerele prime p pentru care numerele:

$p+4$, $p+24$, p^2+10 și p^2+34

sunt toate numere prime.

***Rezolvare*:** Conform ipotezei, numărul p aparține mulțimii numerelor prime:

$\mathscr{P}=\{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$.

Se verifică imediat că dacă $p\in\{2, 3, 5, 11, 13\}$, atunci cel puțin unul din numerele $p+4$, $p+24$, p^2+10 și p^2+34 nu este prim, dar pentru $p=7$, numerele obținute sunt:

11, 31, 59, 83;

toate fiind prime. Deci, numărul 7 este o soluție a problemei noastre. Să arătăm că aceasta este singura soluție. Pornind de la premisa că resturile împărțirii unui număr natural la 7 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6, distingem următoarele 7 cazuri:

Cazul 1: $p=7\cdot k$, $k\in\mathbf{N}^*$. În acest caz, pentru $k=1$, obținem soluția precizată mai sus, iar pentru $k\geq2$, numărul p nu mai este prim.

Cazul 2: $p=7\cdot k+1$, $k\in\mathbf{N}^*$. În acest caz, numărul:

$$p^2+34=49\cdot k^2+14\cdot k+35=7\cdot(7\cdot k^2+2\cdot k+5),$$

nu este prim.

Cazul 3: $p=7\cdot k+2$, $k\in\mathbf{N}^*$. În acest caz, numărul:

$$p^2+10=49\cdot k^2+28\cdot k+14=7\cdot(7\cdot k^2+4\cdot k+2),$$

nu este prim.

Cazul 4: $p=7\cdot k+3$, $k\in\mathbf{N}^*$. În acest caz, numărul:

$$p+4=7\cdot k+7=7\cdot(k+1),$$

nu este prim.

Cazul 5: $p=7\cdot k+4$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, numărul:

$$p+24=7\cdot k+28=7\cdot(k+4),$$

nu este prim.

Cazul 6: $p=7\cdot k+5$, $k\in\mathbf{N}^*$. În acest caz, numărul:

$$p^2+10=49\cdot k^2+70\cdot k+35=7\cdot(7\cdot k^2+10\cdot k+7),$$

nu este prim.

Cazul 7: $p=7\cdot k+6$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, numărul:

$p^2+34=49\cdot k^2+84\cdot k+70=7\cdot(7\cdot k^2+12\cdot k+10)$,

nu este prim. În concluzie, singura soluție este:

$p=7$.

II. Să se arate că pentru orice x, $y\in\mathbf{R}$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}+$$
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\geq 8. \qquad (i)$$

Daţi o interpretare geometrică acestei inegalităţi.

***Rezolvare*:** Dovedirea inegalităţi o putem face utilizând inegalitatea lui Minkowski: pentru orice $n\in N$, $n\geq 2$ și orice două sisteme de n numere reale $(a_1,a_2,...,a_n)$ și $(b_1,b_2,...,b_n)$ avem:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\geq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}. \qquad (1)$$

Particularizând inegalitatea (1) pentru n=2, obținem că, oricare ar fi (a_1,a_2) și (b_1,b_2) din $\mathbf{R}^2$, avem:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}. \qquad (2)$$

Acum, observăm că inegalitatea din enunț se poate scrie:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(5-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}\geq 8.(3)$$

Considerând:

$a_1=x-2$, $a_2=2-x$, $b_1=y$ și $b_2=5-y$,

obținem, folosind inegalitatea (2), că:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(2-x)^2+(5-y)^2}\geq\sqrt{(x-2+2-x)^2+(y+5-y)^2}=5. \qquad (4)$$

În continuare, considerând:

$a_1=x-4$, $a_2=1-x$, $b_1=y-2$ și $b_2=2-y$,

obținem, folosind tot inegalitatea (2), că:

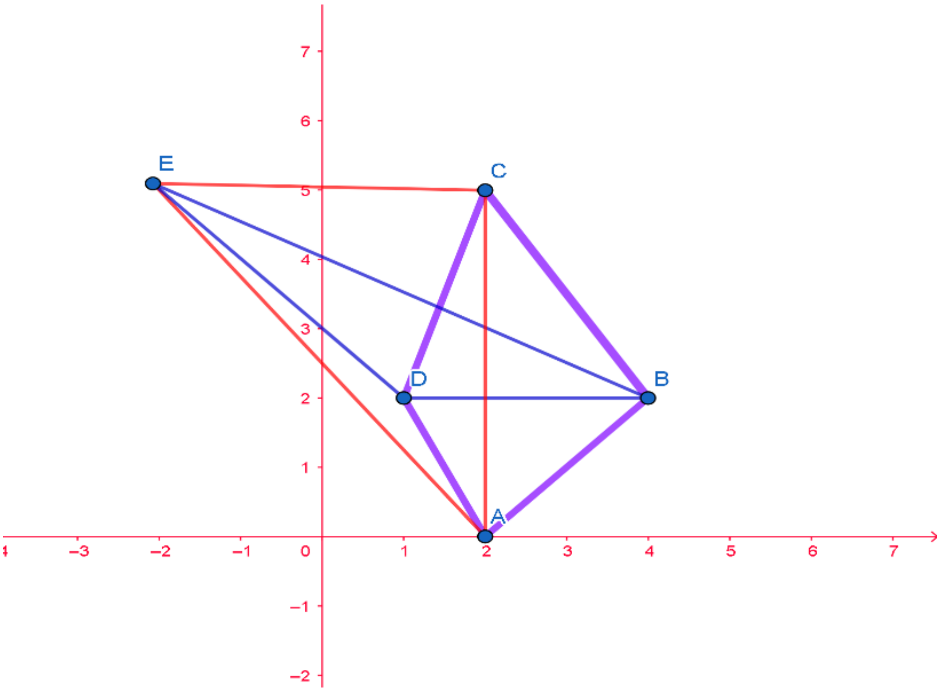
$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}\geq\sqrt{(x-4+1-x)^2+(y-2+2-y)^2}=3. \qquad (5)$$

Adunând, membru cu membru inegalitățile (4) și (5), obținem inegalitatea din enunț.

***Interpretare geometrică*:** Considerăm, în plan, punctele A(2,0), B(4,2), C(2,5), D(1,2) și E(x,y) – vezi figura de mai jos. Atunci:

$EA=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, $EB=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$,

$EC=\sqrt{(2-x)^2+(5-y)^2}$, $ED=\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}$.



Aplicând inegalitatea triunghiului în triunghiurile AEC și BED, obținem inegalitățile:

EA+EC≥AC=5, respectiv EB+ED≥BD=3,

adică:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\geq 5,$$

respectiv:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\geq 3.$$

Adunând, membru cu membru, aceste ultime două inegalități, obținem inegalitatea din enunț.

Altfel**:** Inegalitatea (i), din ipoteză, poate fi interpretată, conform figurii de mai jos, ca fiind:

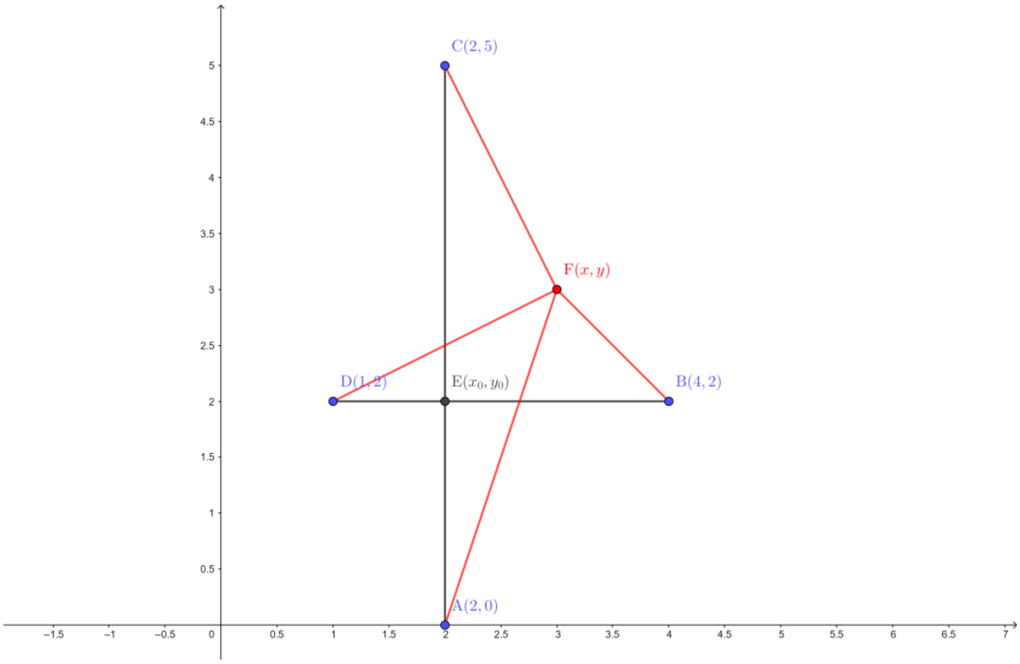
FA+FB+FC+FD≥8. (6)

Avem următoarele inegalități:

FA+FC≥AC=5 și FB+FD≥BD=3, (7)

cu mențiunea că triunghiurile AFC și BFD pot fi degenerate. Adunând aceste două inegalități, obținem concluzia, cu egalitate pentru:

$F(x,y)=E(x_0,y_0)=E(2, 2)$.



III. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}. \qquad \text{(i)}$$

***Rezolvare*:** Fie:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

Atunci:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot e-n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot e-n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\frac{1}{n}}\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^3+x^2}\right)}=e^{\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^3+x^2}\right)}=e^{\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\cdot\frac{x}{x\cdot(3\cdot x+2)\cdot(1+x)}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

2.20 Specialitatea Matematică - Informatică (sesiune, 2004)

I. Să se determine toate numerele naturale n pentru care numerele:

$n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$ şi $n+15$

sunt toate numere prime.

***Rezolvare*:** În acest caz, numărul n poate să nu fie prim. Deoarece toate cele 5 numere din enunț au o expresie lineară (în sensul că exponentul puterii lui n este 1!), vom rezolva exercițiul, pornind (tot) de la clase de resturi, dar de această dată modulo 5. Astfel, distingem următoarele cinci cazuri:

Cazul 1: $n=5\cdot k$, $k\in\mathbf{N}$. Conform „*Şcolii americane de Matematică*" – care consideră numărul 1 ca fiind număr prim (la americani definiția numărului prim este diferită față de cea cunoscută de noi!), în acest caz, pentru $k=0$, numerele $n+1$, $n+3$ şi $n+7$ sunt prime, dar numerele $n+9$ şi $n+15$ nu mai sunt prime. Conform „*Şcolii ruseşti de Matematică*" – care nu consideră numărul 1 ca fiind număr prim (la ruşi definiția numărului prim este cea cunoscută de noi!), acest caz este exclus. Pentru $k\geq1$, numărul:

$$n+15=5\cdot k+10=5\cdot(k+3),$$

nu este prim.

Cazul 2: $n=5\cdot k+1$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, numărul:

$$n+9=5\cdot k+10=5\cdot(k+2),$$

nu este prim.

Cazul 3: $p=5\cdot k+2$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, pentru $k=0$, numărul:

$$n+7=9,$$

nu este prim, iar pentru $k\geq1$, numărul:

$$n+3=5\cdot k+5=5\cdot(k+1),$$

de asemenea, nu este prim.

Cazul 4: $p=5\cdot k+3$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, pentru $k=0$, numerele obținute sunt:

4, 6, 10, 12 şi 18;

niciunul din ele nu este prim, iar pentru $k\geq1$, numărul:

$$n+7=5\cdot k+10=5\cdot(k+2),$$

de asemenea, nu este prim.

Cazul 5: $n=5\cdot k+4$, $k\in\mathbf{N}$. În acest caz, pentru $k=0$, numerele obținute sunt:

5, 7, 11, 13 şi 19;

toate fiind prime, iar pentru $k\geq1$, numărul:

$$n+1=5\cdot k+5=5\cdot(k+1),$$

nu este prim. În concluzie, singura soluție este:

n=4.

II. Să se arate că pentru orice a, b, c, d$\in$**R** are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2}+$$

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\geq 4\sqrt{c^2+d^2}\,. \qquad \text{(i)}$$

Daţi o interpretare geometrică acestei inegalităţi.

***Rezolvare*:** Procedăm că și la rezolvarea Exercițiului II, de la 1 / 2.19; folosim aceeași inegalitate:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\,. \qquad (1)$$

Acum, observăm că inegalitatea din enunț se poate scrie:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(-a-c)^2+(-b+d)^2}+$$

$$\sqrt{(-a-c)^2+(-b-d)^2}\geq 4\cdot\sqrt{c^2+d^2}\,. \qquad (2)$$

Considerând:

a_1=a-c, a_2=-a-c, b_1=b-d și b_2=-b-d,

obținem, folosind inegalitatea (1), că:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(-a-c)^2+(-b-d)^2}\geq\sqrt{(a-c-a-c)^2+(b-d-b-d)^2}$$

$$=2\cdot\sqrt{c^2+d^2}\,. \qquad (3)$$

În continuare, considerând:

a_1=a-c, a_2=-a-c, b_1=b+d și b_2=-b,+d

obținem, folosind tot inegalitatea (1), că:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(-a-c)^2+(-b+d)^2}\geq\sqrt{(a-c-a-c)^2+(b+d-b+d)^2}$$

$$=2\cdot\sqrt{c^2+d^2}\,. \qquad (4)$$

Adunând, membru cu membru inegalitățile (3) și (4), obținem inegalitatea din enunț.

***Interpretare geometrică*:** Considerăm, în plan, punctele A(-c,-d), B(c,-d), C(c,d), D(-c,d) și M(a,b) – vezi figura de mai jos.

Atunci:

MA=$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, MB=$\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$,

MC=$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$, MD=$\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2}$.

Aplicând, iarăși, inegalitatea triunghiului în triunghiurile AMC și BMD, obținem inegalitățile:

$MA+MC \geq AC=2\cdot\sqrt{c^2+d^2}$, respectiv $MB+MD \geq BD2\cdot\sqrt{c^2+d^2}$,

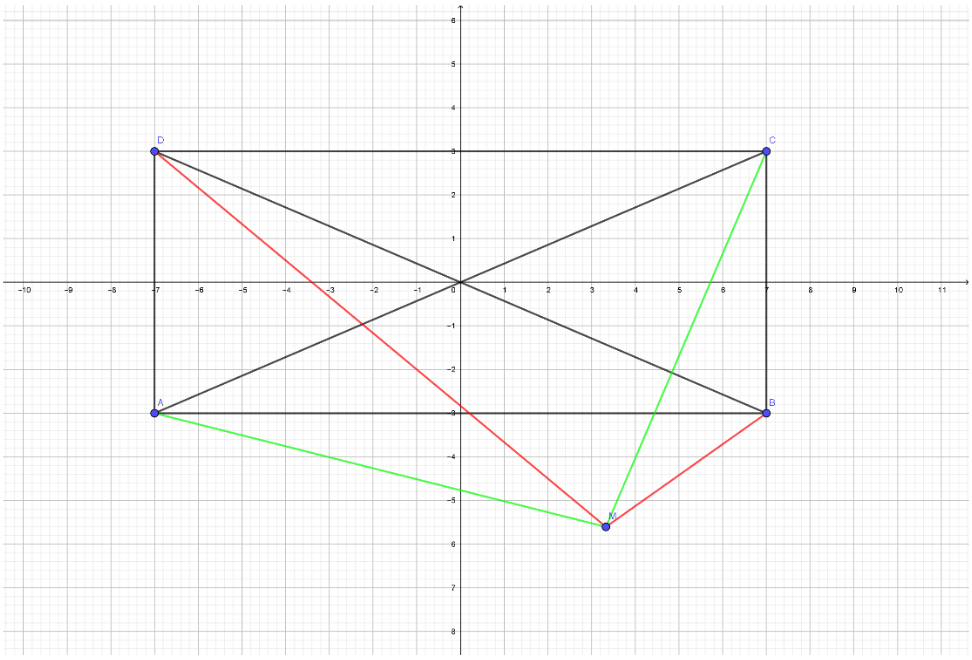
adică:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2} \geq 2\cdot\sqrt{c^2+d^2},$$

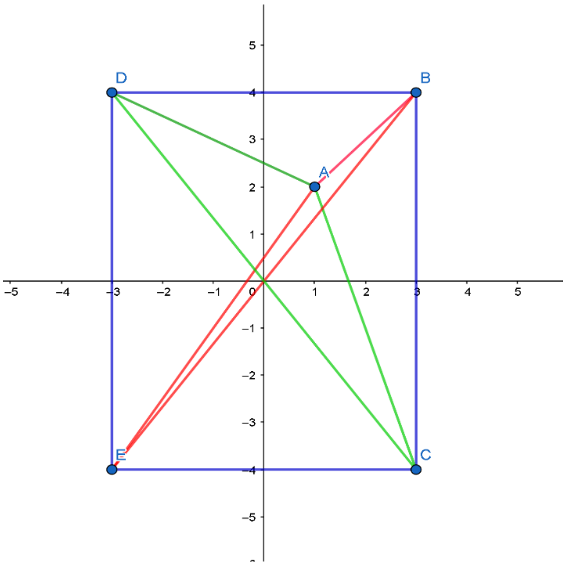
respectiv:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \geq 2\cdot\sqrt{c^2+d^2}.$$

Adunând, membru cu membru, aceste ultime două inegalități, obținem inegalitatea din enunț.



***Altfel*:** Se raționează analog, folosind figura de mai jos:



***Altfel*:** Inegalitatea din ipoteza poate fi interpretată, conform figurii de mai jos, ca fiind:

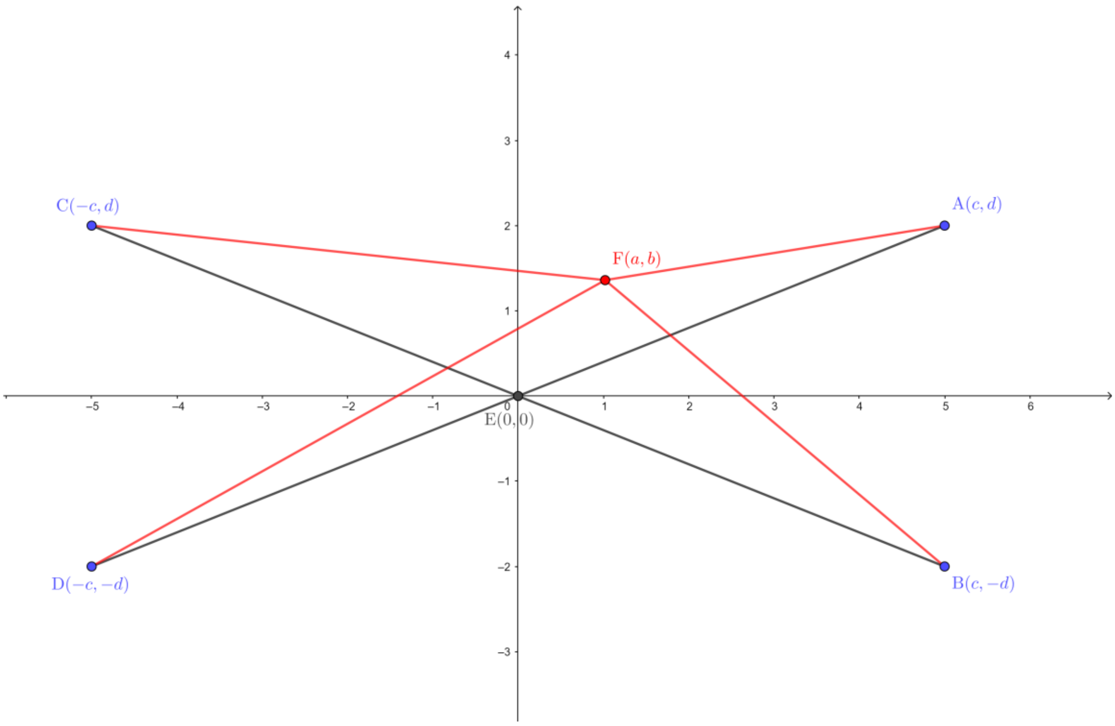
$$FA+FB+FC+FD \geq 4 \cdot \sqrt{c^2+d^2}\ . \qquad (5)$$

Avem urmatoarele inegalitati:

$$FA+FD \geq AD=EA+ED=4 \cdot \sqrt{c^2+d^2} \quad \text{și} \quad FB+FC \geq BC=EB+EC=4 \cdot \sqrt{c^2+d^2}\ ,$$

cu mentiunea ca triunghiurile AFD și BFC pot fi degenerate. Adunând aceste două inegalități, obținem concluzia, cu egalitate pentru:

F(a,b)=E(0,0).



III. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot(n+1)}}{e^n}. \qquad \text{(ii)}$$

***Rezolvare*:** Fie:

$$L=\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot(n+1)}}{e^n}.$$

Atunci:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e}{e}\right)^{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-n\cdot e}{e}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{e}\cdot\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-n\cdot e\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e}{\frac{1}{n}}\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e-(1+x)^{1+\frac{1}{x}}}{x}\right)}=e^{\frac{1}{e}\cdot\cdot\lim\limits_{x\to0}\left((1+x)^{1+\frac{1}{x}}\cdot\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}\right)}$$

$$=e^{\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}\right)}=e^{\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\cdot\frac{x}{2\cdot x\cdot\cdot1+x)}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\,.$$