SEMINAR D.M. 11

2.34 Toate specialitățile (sesiune, (I), 2007)

I. Se consideră un triunghi echilateral ABC, cu:

$AB=1$ (i)

și P un punct situat pe cercul circumscris triunghiului. Să se arate că:

$PA^2+PB^2+PC^2=2.$ (ii)

***Rezolvare*:** Considerăm triunghiul ABC și un punct P pe cercul său circumscris. Atunci,

$m(\sphericalangle APB)=m(\sphericalangle BPC)=60°$ și $m(\sphericalangle APC)=120°.$ (1)

Aplicăm Teorema cosinusului în triunghiurile ABP, BPC și APC, pentru fiecare din laturile triunghiului ABC, și obținem:

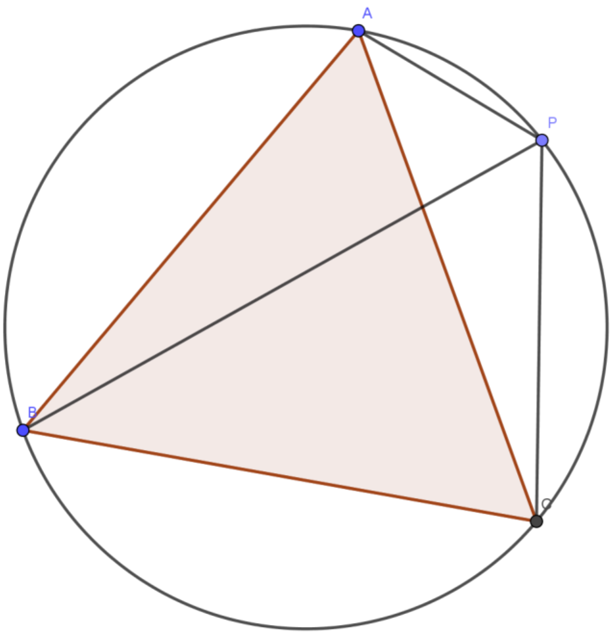
$AB^2=AP^2+BP^2-2\cdot AP\cdot BP\cdot \cos(60°),$ (2)

deci:

$AB^2=AP^2+BP^2-AP\cdot BP.$ (3)

Analog obținem:

$BC^2=BP^2+CP^2-BP\cdot CP$ și $AC^2=AP^2+CP^2+AP\cdot CP.$ (4)



Adunând, membru cu membru, aceste 3 egalități și ținând cont de ipoteză, obținem că:

$AP^2+BP^2-AP\cdot BP+BP^2+CP^2-BP\cdot CP+AP^2+CP^2+AP\cdot CP=3,$ (4)

adică:

$2\cdot(AP^2+BP^2+CP^2)-(AP+CP)\cdot BP+AP\cdot CP=3.$ (5)

Dar, din Prima Teoremă a lui Ptolemeu, aplicată patrulaterului inscriptibil ABCP, rezultă că:

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP=AC\cdot BP. \tag{6}$$

Deoarece, triunghiul ABC este echilateral, egalitatea (6) este echivalentă cu:

$$CP+AP=BP. \tag{7}$$

Acum, din egalitățile (5) și (7), rezultă că:

$$2\cdot(AP^2+BP^2+CP^2)-(AP+CP)^2+AP\cdot CP=3; \tag{8}$$

deci,

$$2\cdot(AP^2+BP^2+CP^2)-AP^2-CP^2-AP\cdot CP=3. \tag{8'}$$

Dar,

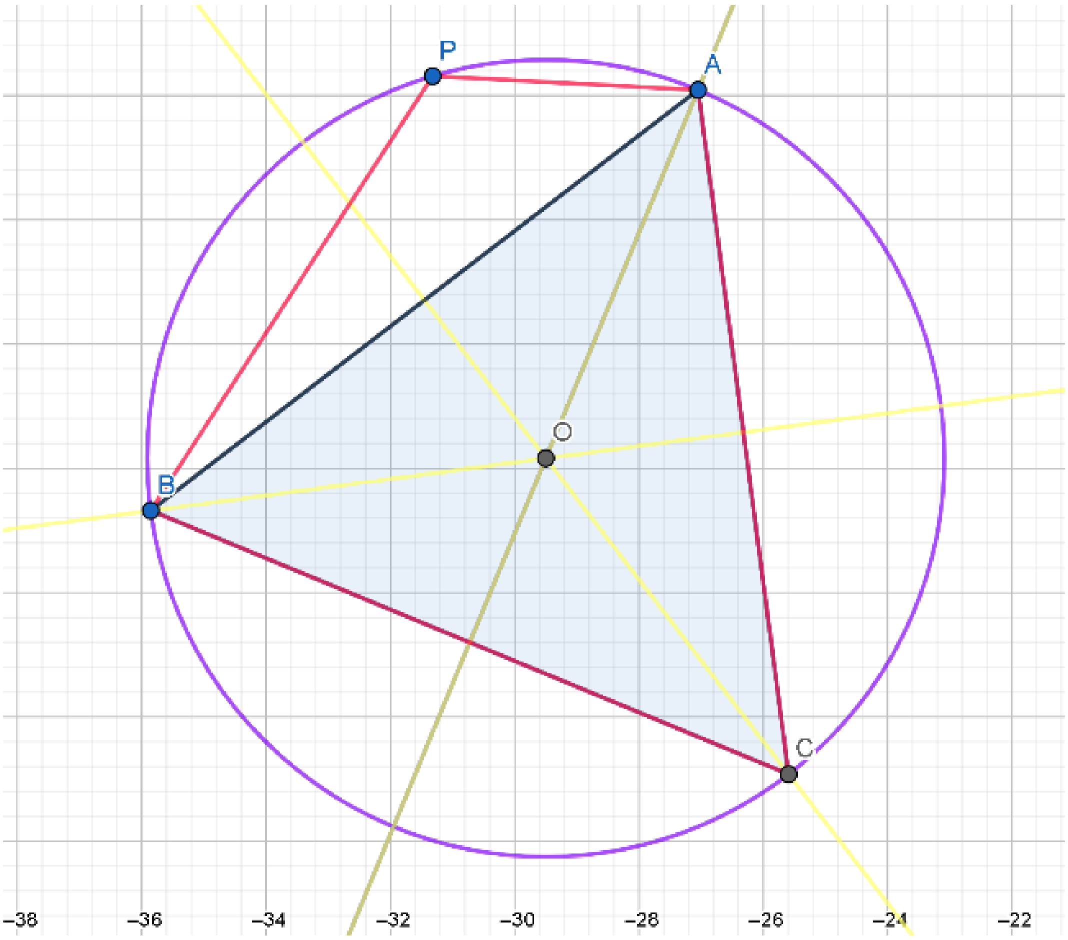
$$AP^2+CP^2+AP\cdot CP=AC^2=1. \tag{9}$$

Din ultimele două egalități, rezultă că:

$$2\cdot(AP^2+BP^2+CP^2)-1=3,$$

de unde rezultă imediat egalitatea din enunț.

***Altfel*:** Considerăm figura de mai jos.



Observăm că:

$$AP^2=(\overline{OP}-\overline{OA})^2=OP^2+OA^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OA}, \qquad (10)$$

$$BP^2=(\overline{OP}-\overline{OB})^2=OP^2+OB^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OB}, \qquad (11)$$

$$CP^2=(\overline{OP}-\overline{OC})^2=OP^2+OC^2-2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{OC}. \qquad (12)$$

Adunând, membru cu membru, cele trei egalități de mai sus, obținem că:

$$AP^2+BP^2+CP^2=6R^2-2\cdot\overline{OP}\cdot(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})=2,$$

deoarece,

$$R=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{și} \qquad \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0.$$

Altfel: O rezolvare analoagă celei de mai sus poate fi dată cu ajutorul numerelor complexe. Astfel, dacă z_A, z_B, z_C și z_P sunt afixele punctelor A, B, C și P, atunci:

$$AP^2+BP^2+CP^2=|z_P-z_A|^2+|z_P-z_B|^2+|z_P-z_C|^2$$

$$=(z_P-z_A)\cdot(\overline{z_P}-\overline{z_A})+(z_P-z_B)\cdot(\overline{z_P}-\overline{z_B})+(z_P-z_C)\cdot(\overline{z_P}-\overline{z_C})$$

$$=|z_P|^2+|z_P|^2+|z_P|^2+|z_A|^2+|z_B|^2+|z_C|^2-2\cdot z_P\cdot(\overline{z_A}+\overline{z_B}+\overline{z_C})-2\cdot\overline{z_P}\cdot(z_A+z_B+z_C)$$

$$=6\cdot R^2=2,$$

deoarece, conform ipotezei:

$$z_A+z_B+z_C=\overline{z_A}+\overline{z_B}+\overline{z_C}=0.$$

Altfel: Conform relației lui Leibniz,

$$AP^2+BP^2+CP^2=3\cdot GP^2+GA^2+GB^2+GC^2. \qquad (13)$$

Deoarece triunghiul nostru este echilateral, egalitatea de mai sus devine:

$$AP^2+BP^2+CP^2=3\cdot OP^2+OA^2+OB^2+OC^2=6\cdot R^2=6\cdot\frac{1}{3}=2,$$

căci,

$$G\equiv O \qquad \text{și} \qquad R=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

II. Să se arate că există o submulţime H a mulţimii $\mathcal{M}_3(\mathbf{N})$ a matricilor pătratice de ordinul 3 cu elemente numere naturale, astfel încât H împreună cu operaţia obişnuită de înmulţire a matricelor să formeze un grup izomorf cu grupul $(S_3,\circ)$ al permutărilor de trei elemente.

Rezolvare: Vom rezolva acest exercițiu într-un context mai general, al unui concept inedit, dar, din păcate, foarte puţin cunoscut de elevi şi profesori, concept din algebra grupală:

- *permutarea matriceală.*

Vom prezenta, aici, definiţia, proprietăţile imediate şi câteva aplicaţii ale acestui concept în rezolvări de exerciţii din algebra grupală. Considerăm un număr $n\in\mathbf{N}^*$, şi fie mulţimea:

$$G_n=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})\mid A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})\}. \quad (1)$$

Mai întâi vom demonstra următorul rezultat:

Propoziţia 1: *Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, mulţimea G_n este un grup în raport cu înmulţirea obişnuită a matricelor*.

***Demonstraţie*:** Dacă $A, B\in G_n$, atunci $\det(A)\neq 0$, $\det(B)\neq 0$ şi $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$ şi $B^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$. Rezultă că:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)\neq 0, \quad (2)$$

şi, conform ipotezei,

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N}); \quad (3)$$

deci, înmulţirea matricelor este o operaţie internă pe $\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$. Pe de altă parte, înmulţirea matricilor este asociativă pe $\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$, deci şi pe G_n. Aşadar, pentru orice matrici $A, B, C\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$, are loc egalitatea:

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C). \quad (4)$$

Matricea unitate de ordinul n, $I_n\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N})$ şi este element neutru în raport cu această operaţie. În sfârşit, conform ipotezei, pentru orice matrice $A\in G_n$, rezultă că şi $A^{-1}\in G_n$, deoarece:

$$(A^{-1})^{-1}=A. \quad (5)$$

Din cele arătate mai sus rezultă că $(G_n,\cdot)$ este un grup. □

Să determinăm acum elementele acestui grup, pentru $n\in\{1,2,3\}$.

***Exemplul 2*:** Pentru n=1, problema determinării lui:

$$G_1=\{A\in\mathcal{M}_1(\mathbf{N})\mid A^{-1}\in\mathcal{M}_1(\mathbf{N})\} \quad (6)$$

devine trivială, deoarece există o singură matrice A=(1), care aparţine lui G_1. Deci, în acest caz,

$$|G_1|=1$$

şi grupul $(G_1,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(S_1,\cdot)$ al permutărilor de ordinul 1, deoarece toate grupurile de ordinul 1 sunt izomorfe. □

***Exemplul 3*:** Considerăm n=2, În acest caz:

$$G_2=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbf{N})\mid A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{N})\}. \quad (7)$$

Fie $A\in G_2$. Atunci:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (8)$$

cu a, b, c, $d\in\mathbf{N}$ şi $ad-bc\neq 0$ şi fie:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \tag{9}$$

cu x, y, z, $t\in\mathbf{N}$ şi $xt-yz\neq 0$. Atunci egalităţile:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_2 \tag{10}$$

sunt echivalente cu:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

de unde rezultă sistemele:

$$\begin{cases} a\cdot x+b\cdot z=1 \\ a\cdot y+b\cdot t=0 \\ c\cdot x+d\cdot z=0 \\ c\cdot y+d\cdot t=1 \end{cases}, \tag{12}$$

respectiv:

$$\begin{cases} ax+cy=1 \\ az+ct=0 \\ bz+dt=1 \\ bx+dy=0 \end{cases}. \tag{13}$$

Adunând primele două, respectiv ultimele două ecuaţii de la sistemele (12) şi (13), obţinem sistemele:

$$\begin{cases} a(x+y)+b(z+t)=1 \\ c(x+y)+d(z+t)=1 \end{cases}, \tag{14}$$

respectiv:

$$\begin{cases} a(x+z)+c(y+t)=1 \\ b(x+z)+d(y+t)=1 \end{cases}. \tag{15}$$

Conform ipotezei, rezultă că x+y, z+t, x+z şi y+t sunt numere naturale nenule. Acum, din sistemul (14), deoarece $a\cdot d-b\cdot c\neq 0$, rezultă că obţinem următoarele posibilităţi:

$$a=1,\quad b=0,\quad x+y=1,\quad d=1,\quad c=0,\quad z+t=1, \tag{16}$$

respectiv:

$$a=0,\quad b=1,\quad x+y=1,\quad d=0,\quad c=1,\quad z+t=1. \tag{17}$$

Din egalităţile (16) şi (17) şi condiţia $x\cdot t-y\cdot z\neq 0$, obţinem următoarea situaţie:

$$a=1,\quad b=0,\quad x=1,\quad y=0,\quad d=1,\quad c=0,\quad z=0,\quad t=1, \tag{18}$$

adică:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2, \tag{18'}$$

cu

$$A_1^{-1}=A_1, \tag{19}$$

iar din egalităţile (17), sistemul (16) şi aceeaşi condiţie $x\cdot t-y\cdot z\neq 0$, obţinem următoarea situaţie:

$$\begin{array}{llll} a=0, & b=1, & x=0, & y=1,\\ d=0, & c=1, & z=1, & t=0, \end{array} \tag{20}$$

adică:

$$A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{20'}$$

cu

$$A_2^{-1}=A_2. \tag{21}$$

Deci, în acest caz, $|G_2|=2$ şi:

$$G_2=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}=\{A_1,A_2\}, \tag{22}$$

iar tabla operaţiei grupale este următoarea:

·	**A_1**	**A_2**
A_1	A_1	A_2
A_2	A_2	A_1

şi grupul $(G_2,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(S_2,\cdot)$ al permutărilor de ordinul 2, deoarece toate grupurile de ordinul 2 sunt izomorfe (fiind ciclice). □

***Exemplul 4*: **Considerăm, acum, cazul n=3, În acest caz:

$$G_3=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbf{N}) \mid A^{-1}\in\mathcal{M}_3(\mathbf{N})\}. \tag{23}$$

Fie $A\in G_3$. Atunci:

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}, \tag{24}$$

cu a, b, c, d, e, f, g, h, $i\in\mathbf{N}$ şi $\det(A)\neq 0$ şi fie:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \tag{25}$$

cu x, y, z, t, u, v, α, β, $\gamma \in \mathbf{N}$ şi $\det(A^{-1}) \neq 0$. Atunci egalităţile:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2 \tag{26}$$

sunt echivalente cu:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

de unde rezultă sistemele:

$$\begin{cases} ax + bt + c\alpha = 1 \\ ay + bu + c\beta = 0 \\ az + bv + c\gamma = 0 \\ dx + et + f\alpha = 0 \\ dy + eu + f\beta = 1 \\ dz + ev + f\gamma = 0 \\ gx + ht + i\alpha = 0 \\ gy + hu + i\beta = 0 \\ gz + hv + i\gamma = 1 \end{cases}, \tag{28}$$

şi

$$\begin{cases} ax + dy + gz = 1 \\ bx + ey + hz = 0 \\ cx + fy + iz = 0 \\ at + du + gv = 0 \\ bt + eu + hv = 1 \\ ct + fu + iv = 0 \\ a\alpha + d\beta + g\gamma = 0 \\ b\alpha + e\beta + h\gamma = 0 \\ c\alpha + f\beta + i\gamma = 1 \end{cases}. \tag{29}$$

Adunând convenabil ecuaţiile de la sistemele (28) şi (29), obţinem sistemele:

$$\begin{cases} a(x+y+z)+b(t+u+v)+c(\alpha+\beta+\gamma)=1 \\ d(x+y+z)+e(t+u+v)+f(\alpha+\beta+\gamma)=1, \\ g(x+y+z)+h(t+u+v)+i(\alpha+\beta+\gamma)=1 \end{cases} \qquad (30)$$

respectiv:

$$\begin{cases} a(x+t+\alpha)+d(y+u+\beta)+g(z+v+\gamma)=1 \\ b(x+t+\alpha)+e(y+u+\beta)+h(z+v+\gamma)=1. \\ c(x+t+\alpha)+f(y+u+\beta)+i(z+v+\gamma)=1 \end{cases} \qquad (31)$$

Din ipoteză, rezultă că a+b+c, d+e+f, g+h+i, a+d+g, b+e+h şi c+f+i, respectiv x+y+z, t+u+v, $\alpha+\beta+\gamma$, $x+t+\alpha$, $y+u+\beta$ şi $z+v+\gamma$ sunt numere naturale nenule. Acum, pentru prima ecuaţie din sistemul (30), obţinem următoarele posibilităţi:

a=1, b=0, c=0, x+y+z=1, (32)

a=0, b=1, c=0, t+u+v=1, (33)

respectiv:

a=0, b=0, c=1, $\alpha+\beta+\gamma=1$, (34)

pentru ecuaţia a doua din sistemul (30) obţinem următoarele posibilităţi:

d=1, e=0, f=0, x+y+z=1, (35)

d=0, e=1, f=0, t+u+v=1, (36)

respectiv:

d=1, e=0, f=0, $\alpha+\beta+\gamma=1$, (37)

iar pentru ecuaţia a treia din acelaşi sistem obţinem următoarele trei posibilităţi:

g=1, h=0, i=0, x+y+z=1, (38)

g=0, h=1, i=0, t+u+v=1, (39)

respectiv:

g=0, h=0, i=1, $\alpha+\beta+\gamma=1$. (40)

Combinând în toate cazurile posibile situaţiile (32) – (40), obţinem următoarele 27 de cazuri:

$$\begin{cases}(32)\\(35)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(35)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(35)\\(40)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(36)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(36)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(36)\\(40)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(37)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(37)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(32)\\(37)\\(40)\end{cases},$$

$$\begin{cases}(33)\\(35)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(35)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(35)\\(40)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(36)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(36)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(36)\\(40)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(37)\\(38)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(37)\\(39)\end{cases}, \begin{cases}(33)\\(37)\\(40)\end{cases}, \qquad (41)$$

$$\begin{cases}(34)\\(35)\\(38)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(35)\\(39)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(35)\\(40)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(36)\\(38)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(36)\\(39)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(36)\\(40)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(37)\\(38)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(37)\\(39)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(37)\\(40)\end{cases};$$

dar, deoarece

$a+b+c$, $d+e+f$, $g+h+i$, $a+d+g$, $b+e+h$ şi $c+f+i$

sunt numere naturale nenule (aşa cum am precizat mai sus!), din cele 27 de cazuri ne convin doar următoarele 6:

$$\begin{cases}(32)\\(36)\\(40)\end{cases},\ \begin{cases}(32)\\(37)\\(39)\end{cases},\ \begin{cases}(33)\\(35)\\(40)\end{cases},\ \begin{cases}(33)\\(37)\\(38)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(35)\\(39)\end{cases},\ \begin{cases}(34)\\(36)\\(38)\end{cases}. \tag{42}$$

Pentru aceste ultime şase cazuri, obţinem că matricea A aparţine mulţimii:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}. \tag{43}$$

Dacă am fi judecat, în mod analog, cu A^{-1}, am fi obţinut aceeaşi mulţime (43). Într-adevăr, notând cu:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{44}$$

şi cu:

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \tag{45}$$

obţinem următoarele egalităţi:

$$A^2=I_3, \tag{46}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$B^3=I_3, \tag{48}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$A\cdot B^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=B\cdot A. \qquad (50)$$

Atunci au loc următoarele egalităţi:

$$A\cdot(A\cdot B)=A^2\cdot B=I_3\cdot B=B, \qquad (51)$$

$$A\cdot(A\cdot B^2)=A^2\cdot B^2=I_3\cdot B^2=B^2, \qquad (52)$$

$$B\cdot(A\cdot B)=(B\cdot A)\cdot B=A\cdot B^2\cdot B=A\cdot B^3=A\cdot I_3=A, \qquad (53)$$

$$B\cdot(A\cdot B^2)=(B\cdot A)\cdot B^2=A\cdot B^2\cdot B^2=A\cdot B^4=A\cdot B, \qquad (54)$$

$$B^2\cdot A=B\cdot(B\cdot A)=B\cdot(A\cdot B^2)=(B\cdot A)\cdot B^2=A\cdot B^2\cdot B^2=A\cdot B^4=A\cdot B, \qquad (55)$$

$$B^2\cdot(A\cdot B)=(B^2\cdot A)\cdot B=(A\cdot B)\cdot B=A\cdot B^2, \qquad (56)$$

$$B^2\cdot(A\cdot B^2)=B^2\cdot(B\cdot A)=B^3\cdot A=I_3\cdot A=A, \qquad (57)$$

$$(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A)=A\cdot(A\cdot B^2)=A^2\cdot B^2=I_3\cdot B^2=B^2, \qquad (58)$$

$$(A\cdot B)^2=(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)=A\cdot(B\cdot A)\cdot B=A\cdot A\cdot B^2\cdot B=A^2\cdot B^3=I_3\cdot I_3=I_3, \qquad (59)$$

$$(A\cdot B)\cdot(A\cdot B^2)=A\cdot(B\cdot A)\cdot B^2=A\cdot A\cdot B^2\cdot B^2=A^2\cdot B^4=I_3\cdot B=B, \qquad (60)$$

$$(A\cdot B^2)\cdot A=(B\cdot A)\cdot A=B\cdot A^2=B\cdot I_3=B, \qquad (61)$$

$$(A\cdot B^2)\cdot(A\cdot B)=(B\cdot A)\cdot(A\cdot B)=B\cdot A^2\cdot B=B\cdot I_3\cdot B=B^2, \qquad (62)$$

$$(A\cdot B^2)^2=(A\cdot B^2)\cdot(A\cdot B^2)=A\cdot(B^2\cdot A)\cdot B^2=A\cdot A\cdot B\cdot B^2=A^2\cdot B^3=I_3\cdot I_3=I_3. \qquad (63)$$

Din egalităţile (44) – (63) rezultă că mulţimea (43) este:

$$\{I_3,A,B,B^2,A\cdot B,A\cdot B^2\}, \qquad (43')$$

aceasta fiind chiar G_3. Deci, în acest caz,

$$|G_3|=6. \qquad (64)$$

Se observă că $(G_3,\cdot)$ este un grup necomutativ cu şase elemente. Deoarece, abstracţie făcând de un izomorfism, există doar două grupuri cu şase elemente, şi anume: grupul $(\mathbf{Z}_6,+)$ – care este comutativ (este chiar ciclic!) şi, respectiv grupul simetric $(S_3,\cdot)$, al permutărilor de trei elemente – care nu este comutativ. Deducem, de aici, că grupul $(G_3,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(S_3,\cdot)$ al permutărilor de ordinul 3.

Tabla operaţiei grupale este următoarea:

$\cdot$	I_3	A	B	B^2	$A\cdot B$	$A\cdot B^2$
I_3	I_3	A	B	B^2	$A\cdot B$	$A\cdot B^2$
A	A	I_3	$A\cdot B$	$A\cdot B^2$	B	B^2

B	B	$A\cdot B^2$	B^2	I_3	A	$A\cdot B$
$\mathbf{B^2}$	B^2	$A\cdot B$	I_3	B	$A\cdot B^2$	A
A·B	$A\cdot B$	B^2	$A\cdot B^2$	A	I_3	B
$\mathbf{A\cdot B^2}$	$A\cdot B^2$	B	A	$A\cdot B$	B^2	I_3

Pe de altă parte, pentru fiecare matrice $X\in G_3$,

$$\det(X)=\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\,. \tag{65}$$

Dar,

$$[a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}=1 \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad a_{1\sigma(1)}=a_{2\sigma(2)}=a_{3\sigma(3)}=1] \tag{66}$$

şi, în rest,

$$a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}=0. \tag{66'}$$

Deoarece egalitatea (66) are loc pentru o singură permutare, rezultă că, pentru orice matrice $X\in G_3$, există o singură permutare $\sigma\in S_3$, pentru care:

$$\det(X)=\varepsilon(\sigma). \tag{67}$$

Acum, definim funcţia:

$$f : G_3 \to S_3, \tag{68}$$

prin: pentru orice $X\in G_3$,

$$f(X)=\sigma^{-1}, \tag{69}$$

unde σ este permutarea pentru care are loc egalitatea (67). Atunci, din egalităţile (44), (45), (65), (66), (67) şi (69), obţinem că:

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\sigma \tag{70}$$

şi

$$f(B)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\tau. \tag{71}$$

În sfârşit, din egalităţile (70) şi (71), respectiv (46) – (63), obţinem egalităţile:

$$f(A^2)=f(I_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e_3=f(A)\cdot f(A), \tag{46'}$$

$$f(B^2)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\tau^2=f(B)\cdot f(B), \tag{47'}$$

$$f(B^3)=f(I_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=e_3=\tau^2\cdot\tau=f(B^2)\cdot f(B), \quad (48')$$

$$f(A\cdot B)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\sigma\cdot\tau=f(A)\cdot f(B), \quad (49')$$

$$f(A\cdot B^2)=f(B\cdot A)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\sigma\cdot\tau^2=f(A)\cdot f(B^2)=\tau\cdot\sigma=f(B)\cdot f(A), \quad (50')$$

Atunci au loc (şi) următoarele egalităţi:

$$f(A\cdot(A\cdot B))=f(B)=\sigma=\sigma\cdot(\sigma\cdot\tau)=f(A)\cdot f(A\cdot B), \quad (51')$$

$$f(A\cdot(A\cdot B^2))=f(B^2)=\tau^2=\sigma\cdot(\sigma\cdot\tau^2)=f(A)\cdot f(A\cdot B^2), \quad (52')$$

$$f(B\cdot(A\cdot B))=f(A)=\sigma=\tau\cdot(\sigma\cdot\tau)=f(B)\cdot f((A\cdot B)), \quad (53')$$

$$f(B\cdot(A\cdot B^2))=f(A\cdot B)=\sigma\cdot\tau=\tau\cdot(\sigma\cdot\tau^2)=f(B)\cdot f((A\cdot B^2)), \quad (54')$$

$$f(B^2\cdot A)=f(A\cdot B)=\sigma\cdot\tau=\tau^2\cdot\sigma=f(B^2)\cdot f(A), \quad (55')$$

$$f(B^2\cdot(A\cdot B))=f(A\cdot B^2)=\sigma\cdot\tau^2=\tau^2\cdot(\sigma\cdot\tau)=f(B^2)\cdot f((A\cdot B)), \quad (56')$$

$$f(B^2\cdot(A\cdot B^2))=f(A)=\sigma=\tau^2\cdot(\tau\cdot\sigma)=f(B^2)\cdot f((A\cdot B^2)), \quad (57')$$

$$f((A\cdot B)\cdot A)=f(B^2)=\tau^2=(\sigma\cdot\tau)\cdot\sigma=f((A\cdot B)\cdot f(A), \quad (58')$$

$$f((A\cdot B)^2)=f(I_3)=e_3=(\sigma\cdot\tau)^2=(f(A\cdot B))^2, \quad (59')$$

$$f((A\cdot B)\cdot(A\cdot B^2))=f(B)=\tau=(\sigma\cdot\tau)\cdot(\tau\cdot\sigma)=f((A\cdot B))\cdot f((A\cdot B^2)), \quad (60')$$

$$f((A\cdot B^2)\cdot A)=f(B)=\tau=(\tau\cdot\sigma)\cdot\sigma=f((A\cdot B^2))\cdot f(A), \quad (61')$$

$$f((A\cdot B^2)\cdot(A\cdot B))=f(B^2)=\tau^2=(\tau\cdot\sigma)\cdot(\sigma\cdot\tau)=f((A\cdot B^2))\cdot f((A\cdot B)), \quad (62')$$

$$f(A\cdot B^2)^2)=f(I_3)=e_3=(\sigma\cdot\tau)^2=(f(A\cdot B^2))^2. \quad (63')$$

Din egalităţile (46') – (63') rezultă că funcţia f, definită prin egalitatea (69), este un morfism de la grupul $(G_3,\cdot)$ la grupul $(S_3,\cdot)$, iar din egalităţile (70) şi (71), respectiv (46') – (50'), rezultă că f este (şi) bijectivă. Aşadar, f este un izomorfism de grupuri şi, astfel, aşa cum am arătat mai sus, $(G_3,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(S_3,\cdot)$. □

Deoarece pentru $n\in\{1,2,3\}$ am demonstrat, în Exemplele 2 – 4, că grupul $(G_n,\cdot)$ este izomorf cu grupul $(S_n,\cdot)$, acum vom demonstra următorul rezultat general:

Teorema 5: *Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, există un grup de matrici izomorf cu grupul simetric S_n.*

***Demonstraţie*:** Vom demonstra că grupul G_n definit de egalitatea (1) este izomorf cu grupul S_n. În acest sens, considerăm o matrice oarecare

$A=(a_{ij})\in G_n$ şi $A^{-1}=X=(x_{ij})\in G_n$

inversa matricii A. Atunci, egalitatea:

$A\cdot X=I_n$, (72)

devine:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in-1} & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn-1} & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (72')$$

de unde rezultă următoarele n sisteme de relaţii, pentru orice i=$\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{i1}\cdot x_{11} + a_{i2}\cdot x_{21} + \cdots + a_{in}\cdot x_{n1} = 1 \\ a_{i1}\cdot x_{12} + a_{i2}\cdot x_{22} + \cdots + a_{in}\cdot x_{n2} = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}\cdot x_{1n} + a_{i2}\cdot x_{2n} + \cdots + a_{in}\cdot x_{nn} = 0 \end{cases}. \quad (73)$$

Adunând relaţiile membru cu membru obţinem următoarele n relaţii, pentru orice i=$\overline{1,n}$:

$$a_{i1}\cdot(x_{11}+x_{12}+...+x_{1n})+a_{i2}\cdot(x_{21}+x_{22}+...+x_{2n})+...+a_{in}\cdot(x_{n1}+x_{n2}+...+x_{nn})=1, \quad (74)$$

sau echivalent, pentru orice i=$\overline{1,n}$:

$$a_{i1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_{1k}\right)+a_{i2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_{2k}\right)+...+a_{in}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_{nk}\right)=1, \quad (74')$$

sau echivalent, pentru orice i=$\overline{1,n}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\right)=1. \quad (74'')$$

Dar, deoarece, pentru orice j=$\overline{1,n}$: $\sum_{k=1}^{n} x_{jk} \geq 1$, rezultă că, pentru orice i=$\overline{1,n}$, dintre numerele a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in} exact unul este egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

Pentru orice i=$\overline{1,n}$, notăm cu a_{ij_i} elementul egal cu 1, de pe linia i. Deci, pentru orice i=$\overline{1,n}$ şi orice $j_l \neq j_i$, $a_{ij_l}=0$. Dacă există p, q$\in\{1,2,...,n\}$, cu p<q, astfel încât $j_p=j_q$, atunci, deoarece pe linia p toate elementele diferite de a_{pj_p} sunt egale cu 0 şi, analog, pe linia q, toate elementele diferite de a_{qj_q} sunt egale cu 0, rezultă că liniile p şi q ale matricii A sunt egale; deci matricea A nu este inversabilă – ceea ce contrazice ipoteza.

Aşadar, numerele j_1, j_2, ..., j_n sunt distrincte şi, astfel, în matricea A, pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element este egal cu 1, iar, în rest, toate elementele sunt egale cu 0. Rezultă că, pentru orice matrice $A\in G_n$, există o permutare $\sigma\in S_n$, astfel încât, pentru orice $i=\overline{1,n}$, $a_{i\sigma(i)}=1$, şi, în rest, toate elementele lui A sunt nule. Deci:

$$G_n=\{A_\sigma\in\mathcal{M}_n(\mathbf{N}) \mid \sigma\in S_n\}. \tag{1'}$$

Considerăm, acum, funcţia:

$$f : G_n \to S_n, \tag{68'}$$

prin: pentru orice $A_\sigma\in G_n$,

$$f(A_\sigma)=\sigma^{-1}. \tag{69'}$$

Observăm că, dacă:

$$f(A_\sigma)=f(A_\tau), \tag{75}$$

atunci:

$\sigma^{-1}=\tau^{-1}$, ceea ce implică $\sigma=\tau$.

Rezultă, de aici, că f este injectivă. Cum f este surjectivă, prin definiţie, rezultă că f este bijectivă. Vom demonstra acum că, pentru orice σ, $\tau\in S_n$, avem egalitatea:

$$A_\sigma\cdot A_\tau=A_{\tau\cdot\sigma}. \tag{76}$$

Într-adevăr, dacă i, $j\in\{1,2,...,n\}$ astfel încât:

$$a_{i\sigma(i)}=a_{j\tau(j)}=1,$$

atunci:

$a_{i\sigma(i)}\cdot a_{j\tau(j)}=1$ dacă şi numai dacă $j=\sigma(i)$; (77)

deci:

$$a_{i\sigma(i)}\cdot a_{j\tau(j)}=a_{i\sigma(i)}\cdot a_{\sigma(i)\tau(\sigma(i))}=a_{i\tau(\sigma(i))}=1. \tag{76'}$$

Deoarece înmulţind linia i a matricii A_σ cu coloana $\sigma(i)$ a matricii A_τ un singur produs – cel dat de egalităţile (76') este egal cu 1, iar toate celelalte n-1 produse sunt egale cu 0, rezultă că egalităţile (76) şi (76') sunt echivalente. Rezultă că:

$$f(A_\sigma\cdot A_\tau)=f(A_{\tau\cdot\sigma})=(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\tau^{-1}=f(A_\sigma)\cdot f(A_\tau). \tag{78}$$

Egalitățile (78) arată că f este un morfism de la grupul $(G_n,\cdot)$ la grupul $(S_n,\cdot)$ şi, deoarece f este bijectivă, rezultă că f este un izomorfism de grupuri, adică cele două grupuri - $(G_n,\cdot)$ şi $(S_n,\cdot)$ – sunt izomorfe şi, astfel, teorema este complet demonstrată. □

Obţinem, acum, următoarele rezultate:

Corolarul 6: *Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, mulţimea G_n are n! elemente.*

***Demonstraţie*:** Din demonstraţia Teoremei 2, rezultă că între mulţimile G_n şi S_n există o bijecţie, ceea ce echivalează cu afirmaţia din enunţ, deoarece mulţimea S_n are n! elemente. □

Corolarul 7: *Dacă $A_\sigma \in G_n$, atunci*:

$$det(A_\sigma)=\varepsilon(\sigma). \tag{79}$$

***Demonstraţie*:** Din definiţia determinantului unei matrici de ordinul n obţinem că:

$$\det(A_\sigma)=\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\cdot a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}\ . \tag{80}$$

Dar, din demonstraţia Teoremei 5, rezultă că în membrul drept al egalităţii (80) din cele n! produse, doar unul singur este egal cu 1, şi anume: $a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$, iar toate celelalte sunt egale cu 0. Aşadar, pentru orice matrice $A_\sigma \in G_n$, are loc egalitatea (79). □

Din Corolarul 7 rezultă că, pentru orice matrice $A_\sigma \in G_n$, $\det(A_\sigma)\in\{-1,1\}$. Deoarece jumătate din permutările din S_n sunt pare şi jumătate sunt impare, rezultă:

Corolarul 8: *Pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, mulţimea*:

$$\{A_\sigma\in G_n \mid det(A_\sigma)=1\}$$

are acelaşi număr de elemente ca şi mulţimea:

$$\{A_\sigma\in G_n \mid det(A_\sigma)=-1\},$$

şi anume: $\frac{n!}{2}$. □

***Exemplele 9*:** Au loc următoarele izomorfisme de grupuri:

$(G_4,\cdot)\cong(S_4,\cdot)$,

$(G_5,\cdot)\cong(S_5,\cdot)$. □

Din Exemplul 4 şi egalitatea (1'), rezultă că:

$$G_3=\{A_\sigma\in\mathcal{M}_3(\mathbf{N}) \mid \sigma\in S_3\}. \tag{1''}$$

Acum, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 10: *Are loc nonegalitatea*:

$$\prod_{A_\sigma\in G_3} A_\sigma \neq I_3. \tag{81}$$

***Demonstraţie*:** Presupunem că are loc egalitatea:

$$\prod_{A_\sigma\in G_3} A_\sigma = I_3. \tag{82}$$

Atunci, din egalitatea (82), prin aplicarea izomorfismului f, definit de relaţiile (68) şi (69), obţinem că:

$$e_3=f(I_3)=f\left(\prod_{A_\sigma\in G_3} A_\sigma\right)=f(A_{e_3}\cdot A_{\sigma_1}\cdot A_{\sigma_2}\cdot A_{\sigma_3}\cdot A_{\sigma_4}\cdot A_{\sigma_5})$$

$=f(A_{e_3})\cdot(A_{\sigma_1})\cdot(A_{\sigma_2})\cdot f(A_{\sigma_3})\cdot f(A_{\sigma_4})\cdot(fA_{\sigma_5})$

$$=e_3^{-1}\cdot\sigma_1^{-1}\cdot\sigma_2^{-1}\cdot\sigma_3^{-1}\cdot\sigma_4^{-1}\cdot\sigma_5^{-1}=(\sigma_5\cdot\sigma_4\cdot\sigma_3\cdot\sigma_2\cdot\sigma_1\cdot e_3)^{-1}. \quad (83)$$

Reţinând membrii extremi ai egalităţilor (83), rezultă că:

$$\sigma_5\cdot\sigma_4\cdot\sigma_3\cdot\sigma_2\cdot\sigma_1=e_3. \quad (84)$$

Prin aplicarea morfismului ε - semnul unei permutări - de la grupul $(S_3,\cdot)$ la grupul $(\{-1,1\},\cdot)$, egalităţii (84), obţinem egalitatea:

$$\varepsilon(\sigma_5)\cdot\varepsilon(\sigma_4)\cdot\varepsilon(\sigma_3)\cdot\varepsilon(\sigma_2)\cdot\varepsilon(\sigma_1)=1,$$

ceea ce este imposibil, deoarece dintre permutările σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, două sunt pare şi trei sunt impare. Aşadar, presupunerea noastră este falsă, adică nu are loc egalitatea (82). □

Un ultim rezultat, care ne permite să privim relaţia (81) din altă perspectivă, este următorul:

Corolarul 11: *Dacă $n\in\mathbf{N}^*$, atunci au loc următoarele afirmaţii*:

1) *pentru n=3,*

$$det\left(\prod_{A_\sigma\in G_3} A_\sigma\right)=-1. \quad (85)$$

2) *pentru n≥4,*

$$det\left(\prod_{A_\sigma\in G_n} A_\sigma\right)=1. \quad (86)$$

***Demonstraţie*:** Conform egalităţii (79),

$$\det\left(\prod_{A_\sigma\in G_n} A_\sigma\right)=\prod_{A_\sigma\in G_n}\det(A_\sigma)=\prod_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma). \quad (87)$$

Dar, pentru n=3, în S_3, există trei permutări impare, iar pentru n≥4, în S_n, există un număr par de permutări impare. Deci, din egalitatea (87), rezultă că, pentru n=3, are loc egalitatea (85), iar pentru n≥4, are loc egalitatea (86). □

În final facem precizarea că o matrice $A_\sigma\in G_n$ se numeşte *permutare matriceală de ordinul n*, iar grupul $(G_n,\cdot)$ se numeşte *grupul permutărilor matriceale de ordinul n*.

Tot aici mai precizăm că din Exemplul 4, Corolarul 6 - pentru n=3 – Corolarul 10, obţinem punctele f) şi g) ale Subiectului I de la concursul de titularizare din sesiunea iulie 2006 (vezi Duca et. comp. (2006) şi www.edu.ro/subiectenaţionale/titularizare/suplinire), care în 2007 a fost propus de Ministerul Educaţiei şi Cercetării, prin Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare, ca Subiectul III al Variantei 003, pentru Examenul Naţional de Bacalaureat, Proba D, la examenul scris de Matematică, Programa M1 (vezi www.edu.ro/subiectenaţionale/bacalaureat /subiecte şi bareme).

Bibliografie:

Duca, D., Purdea, I., Văcăreţu, A., Văcăreţu, D., (2006), *Soluţii ale problemelor date la concursul pentru ocuparea posturilor didactice declarate vacante în învăţământul preuniversitar – 2006* (17 iulie 2006), în Didactica Mathematica, Vol. 25, Nr. 1, 2006, pp. 61-73.

www.edu.ro/subiectenaţionale/titularizare/suplinire.

www.edu.ro/subiectenaţionale/bacalaureat/subiecte şi bareme.

III. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(5+3\sqrt{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{\left(5-3\sqrt{2}\right)^n}}. \quad \text{(i)}$$

***Rezolvare*:** Se știe că, orice număr real x se poate scrise ca suma dintre partea lui întreagă și partea sa fracționară; deci, pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$x=[x]+\{x\}. \quad (1)$$

Pe de altă parte,

$$(5+3\cdot\sqrt{2})^n+(5-3\cdot\sqrt{2})^n\in\mathbf{N}. \quad (2)$$

Așadar, din (1) și (2), rezultă că:

$$[(5+3\cdot\sqrt{2})^n]+\{(5+3\cdot\sqrt{2})^n\}+[(5-3\cdot\sqrt{2})^n]+\{(5-3\cdot\sqrt{2})^n\}\in\mathbf{N},$$

de unde deducem că:

$$\{(5+3\cdot\sqrt{2})^n\}+\{(5-3\cdot\sqrt{2})^n\}\in\mathbf{N}. \quad (3)$$

Deoarece $\{(5+3\cdot\sqrt{2})^n\}$ și $\{(5-3\cdot\sqrt{2})^n\}$ sunt numere din intervalul (0,1) și suma lor este un număr natural, rezultă că această sumă nu poate fi decât 1, adică:

$$\{(5+3\cdot\sqrt{2})^n\}+\{(5-3\cdot\sqrt{2})^n\}=1. \quad (4)$$

Acum limita noastră devine:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(5-3\cdot\sqrt{2}\right)^n\right\}^{\frac{1}{\left(5-3\cdot\sqrt{2}\right)^n}}=e^{-1}.$$

2.35 Toate specialitățile (2007)

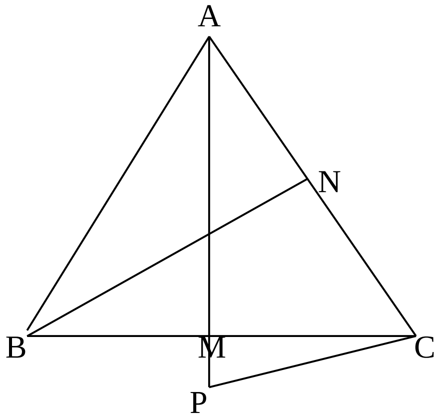
I. Se consideră un triunghi ABC, cu M mijlocul lui [BC] şi N mijlocul lui [AC] şi:

$$m(\sphericalangle CBN)=m(\sphericalangle CAM)=30^\circ. \quad \text{(i)}$$

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

***Rezolvare*:** Considerăm figura de mai jos. Conform ipotezei, [MN] este linie mijlocie în triunghiul ABC; deci MN || AB și patrulaterul ABMN este trapez. Acum, conform egalității (i), rezultă că trapezul ABMN este inscriptibil, deci isoscel. Așadar,

$$\sphericalangle CBA)=m(\sphericalangle CAB) \quad \text{și} \quad AC=BC. \qquad (1)$$



Presupunem că triunghiul ABC nu este echilateral, adică AM nu este perpendiculară pe BC. În acest caz, fie CP $\perp$ AM, cu P$\in$AM\{M}. Presupunem că M$\in$(AP), ca și în figură. Atunci, conform ipotezi și egalităților (1), rezultă că:

$$PC=\frac{AC}{2}=\frac{BC}{2}=MC,$$

ceea ce este imposibil. Analog se tratează cazul în care P$\in$(AM). Deci, presupunerea noastră este falsă și, astfel, AM $\perp$ BC, iar triunghiul isoscel ABC devine echilateral.

II. Se consideră mulţimea:

$$G=(2,+\infty). \qquad (i)$$

Să se arate că există pe mulţimea G o lege de compoziţie internă „$*$” astfel încât (G,$*$) este grup izomorf cu grupul (**R**,+) al numerelor reale faţă de adunare.

***Rezolvare*:** Cerința exercițiului nostru este, de fapt, un caz particular al următoarei teoreme:

Teorema 5.1: *Dacă (G,·) este un grup (comutativ) şi H este o mulţime nevidă, iar*:

$$f: G \to H$$

este o aplicaţie bijectivă, atunci aplicaţia:

$$„\circ” : H\times H \to H,$$

definită prin: pentru orice $(x,y) \in H\times H$,

$$x\circ y=f(f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)) \qquad (5.1)$$

este o lege de compoziţie internă pe H şi care determină pe H o structură de grup (comutativ), *izomorf cu grupul (G,·).*

***Demonstraţie*:** Fie x, $y \in H$. Atunci, conform ipotezei, $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(y)$ şi $f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) \in G$. Rezultă că:

$$x \circ y = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) \in H$$

şi, astfel, aplicaţia „○" este o lege de compoziţie internă pe mulţimea H. Considerăm, acum, trei elemente x, y şi z din H. Atunci, au loc egalităţile:

(1) $(x \circ y) \circ z = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) \circ z = f(f^{-1}(f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) \cdot f^{-1}(z))$

$= f((f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) \cdot f^{-1}(z)) = f(f^{-1}(x) \cdot (f^{-1}(y) \cdot f^{-1}(z)))$

$= f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(f(f^{-1}(y) \cdot f^{-1}(z)))) = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y \circ z))$

$= x \circ (y \circ z).$

Reţinând extremităţile din egalităţile (1), obţinem că legea „○" este asociativă. Dacă legea „·" este comutativă pe G, atunci, pentru orice x, $y \in H$:

(2) $x \circ y = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y) \cdot f^{-1}(x))$

$= y \circ x,$

de unde rezultă că (şi) legea „○" este comutativă. Pe de altă parte, fie $e_G \in G$ – elementul neutru faţă de legea „·" şi $e_H \in H$, pentru care, oricare ar fi $x \in H$,

(3) $x \circ e_H = x.$

Egalitatea (3) echivalează cu:

(4) $f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(e_H)) = x,$

egalitate care (prin aplicarea lui f^{-1}) are loc exact dacă:

(5) $f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(e_H) = f^{-1}(x).$

Această ultimă egalitate o privim în grupul G, unde putem „*simplifica*" cu orice element. Rezultă că:

(6) $f^{-1}(e_H) = e_G,$

adică:

$$e_H = f(e_G). \qquad (5.2)$$

Aşadar, elementul $e_H \in H$, definit de egalitatea (5.2) este element neutru în raport cu operaţia „○". În sfârşit, vom arăta că fiecare element $x \in H$ are un simetric (invers) în raport cu operaţia „○". Aşadar, fie x, $x_H^{-1} \in H$ astfel încât:

(7) $x \circ x_H^{-1} = f(e_G).$

Din egalităţile (5.1) şi (8), rezultă că:

(8) $f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(x_H^{-1})) = f(e_G).$

Deoarece, conform ipotezei, f este injectivă, din egalitatea (8), rezultă că:

(9) $f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(x_H^{-1})=e_G$.

Deci:

(10) $f^{-1}(x_H^{-1})=(f^{-1}(x))_G^{-1}\in G$,

adică:

$$x_H^{-1}=f((f^{-1}(x))_G^{-1}). \tag{5.3}$$

Deci, fiecare element $x\in H$, are în H, un simetric x_H^{-1} dat de egalitatea (5.3), unde $(f^{-1}(x))_G^{-1}$ reprezintă inversul elementului $f^{-1}(x)$ în grupul G. În continuare vom arăta că funcţia f este (chiar) izomorfismul dintre cele două grupuri. Deoarece, conform ipotezei, f este bijectivă, nu ne mai rămâne decât să arătăm că f este morfism de grupuri. Astfel, fie g_1, $g_2\in G$. Deoarece, conform aceleeaşi ipoteze, f^{-1} este surjectivă, există x, $y\in H$, astfel încât:

$g_1=f^{-1}(x)$ şi $g_2=f^{-1}(y)$.

Atunci,

$f(g_1)=x$, $f(g_2)=y$

şi

(11) $f(g_1\cdot g_2)=f(f^{-1}(g_1)\cdot f^{-1}(g_2))=x\circ y$

$=f(g_1)\circ f(g_2)$.

Acum teorema este complet demonstrată. □

Obținem acum, imediat, următorul rezultat:

Corolarul 5.2: *Dacă $(G,\cdot)$ este un grup (comutativ), iar H şi K sunt două mulţimi echipotente cu G, atunci există două legi de compoziţie internă*:

$$„\circ" : H\times H\to H, \tag{5.4}$$

respectiv

$$„\bullet" : K\times K\to K, \tag{5.5}$$

care determină pe H, respectiv pe K, câte o structură de grup (comutativ), fiecare izomorf cu grupul $(G,\cdot)$, astfel încât următoarea diagramă (de grupuri izomorfe) este comutativă:

$$\begin{tikzcd} (G,\cdot) \arrow[r] \arrow[d] & (H,\circ) \arrow[dl] \\ (K,\bullet). \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

***Demonstraţie*:** Conform ipotezei, există aplicaţiile bijective:

$f : G \to H$ şi $g : G \to K$.

Din Teorema 2.1 rezultă că aplicaţiile (5.4) şi (5.5) definite prin: pentru orice $x, y \in H$,

(1) $x \circ y = f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) \in H$,

respectiv, pentru orice $x, y \in K$,

(2) $x \bullet y = g(g^{-1}(x) \cdot g^{-1}(y)) \in K$,

sunt operaţii interne pe H, respectiv K, care determină pe fiecare din aceste mulţimi (câte) o structură de grup (comutativ). Ba mai mult, considerăm aplicaţia:

(3) $h = g \circ f^{-1} : H \to K$.

Deoarece, conform ipotezei, f este bijectivă, ea este inversabilă şi inversa ei:

$f^{-1} : H \to G$

este şi ea bijectivă. Apoi, deoarece compusa a două funcţii bijective este, la rândul ei, tot o funcţie bijectivă, rezultă că funcţia h, definită mai sus, este bijectivă. Pe de altă parte, deoarece, conform demonstraţiei Teoremei 2.1, f este morfism de grupuri şi inversa ei f^{-1} este tot (un) morfism de grupuri. În fine, deoarece compusa a două morfisme de grupuri este, la rândul ei, tot un morfism de grupuri, rezultă că funcţia h, definită mai sus, este (şi) un morfism de grupuri. Aşadar, prin aplicaţia h, grupurile $(H, \circ)$ şi $(K, \bullet)$ sunt izomorfe şi diagrama din enunţ este comutativă. □

Se impun aici următoarele observaţii:

Observaţiile 5.3: ***1)*** *Faptul că aplicaţia h, din demonstraţia Corolarului 5.2, este morfism de grupuri se poate demonstra şi direct.*

2) *Din demonstraţia Corolarului 5.2 rezultă că aplicaţia f, care determină legea de compoziţie pe mulţimea H, o putem considera şi de la H la G; și în acest caz obținem aceeași lege de compoziție pe H, ca și în cazul Teoremei 5.2.*

***Demonstraţie*:** **1)** Într-adevăr, fie $x, y \in H$. Atunci, din egalităţile (1), (2) şi (3) din demonstraţia Corolarului 5.2, obţinem că:

$$h(x \circ y) = (g \circ f^{-1})(x \circ y) = g(f^{-1}(x \circ y)) = g(f^{-1}(f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y))))$$

$$= g((f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y))) = g(f^{-1}(x)) \circ g(f^{-1}(y)))$$

$$= h(x) \circ h(y).$$

2) Dacă:

$f : H \to G$

este o aplicaţia bijectivă, atunci aplicaţia:

(1) $x \perp y = f^{-1}(f^{-}(x) \cdot f(y))$

este o lege de compoziţie internă pe H şi care determină pe H o structură de grup (comutativ), izomorf cu grupul (comutativ) $(G,\cdot)$. Pentru a demonstra acest lucru se reface demonstraţia Teoremei 5.1, înlocuind pe f cu f^{-1} şi invers. Astfel, fie $x, y\in H$. Atunci, conform ipotezei, $f(x)$, $f(y)$ şi $f(x)\cdot f(y)\in G$. Rezultă că:

$$x\perp y=f^{-1}(f(x)\cdot f(y))\in H$$

şi, astfel, aplicaţia „⊥" este o lege de compoziţie internă pe mulţimea H. Considerăm, acum, trei elemente x, y şi z din H. Atunci:

(2) $$(x\perp y)\perp z=f^{-1}(f(x)\cdot f(y))\perp z=f^{-1}(f(f^{-1}(f(x)\cdot f(y))\cdot f(z))$$
$$=f^{-1}((f(x)\cdot f(y))\cdot f(z))=f^{-1}(f(x)\cdot(f(y)\cdot f(z)))$$
$$=f^{-1}(f(x)\cdot f(f^{-1}(f(y)\cdot f(z))))=f^{-1}(f(x)\cdot f(y\perp z))$$
$$=x\perp(y\perp z).$$

Reţinând extremităţile din egalităţile (2), obţinem că legea „⊥" este asociativă. Dacă legea „·" este comutativă pe G, atunci, pentru orice $x, y\in H$:

(3) $$x\perp y=f^{-1}(f(x)\cdot f(y))=f^{-1}(f(y)\cdot f(x))$$
$$=y\perp x,$$

de unde rezultă că (şi) legea „⊥" este comutativă. Pe de altă parte, fie $e_G\in G$ – elementul neutru faţă de legea „·" şi $e_H\in H$, pentru care, oricare ar fi $x\in H$,

(4) $x\perp e_H=x$.

Egalitatea (4) echivalează cu:

(5) $f^{-1}(f(x)\cdot f(e_H))=x$,

egalitate care (prin aplicarea lui f) are loc exact dacă:

(6) $f(x)\cdot f(e_H)=f(x)$.

Această ultimă egalitate o privim în grupul G, unde putem „*simplifica*" cu orice element. Rezultă că:

(7) $f(e_H)=e_G$,

adică:

$$e_H=f^{-1}(e_G). \qquad (5.7)$$

Aşadar, elementul $e_H\in H$, definit de egalitatea (5.7) este element neutru în raport cu operaţia „⊥". În sfârşit, vom arăta că fiecare element $x\in H$ are un simetric (invers) în raport cu operaţia „⊥". Aşadar, fie $x, x_H^{-1}\in H$ astfel încât:

(8) $x\perp x_H^{-1}=f^{-1}(e_G)$.

Din egalităţile (1) şi (8), rezultă că:

(9) $f^{-1}(f(x)\cdot f(x_H^{-1}))=f^{-1}(e_G)$.

Deoarece, conform ipotezei, f^{-1} este injectivă, din egalitatea (9), rezultă că:

(10) $f(x)\cdot f(x_H^{-1})=e_G$.

Deci:

(11) $f(x_H^{-1})=(f(x))_G^{-1}\in G$,

adică:

$$x_H^{-1}=f^{-1}(f(x))_G^{-1}). \tag{5.8}$$

Deci, fiecare element $x\in H$, are în H, un simetric x_H^{-1} dat de egalitatea (5.8), unde $(f(x))_G^{-1}$ reprezintă inversul elementului f(x) în grupul G. În continuare vom arăta că funcţia f este (chiar) izomorfismul dintre cele două grupuri. Deoarece, conform ipotezei, f^{-1} este bijectivă, nu ne mai rămâne decât să arătăm că f^{-1} este morfism de grupuri (de la $(G,\cdot)$ la $(H,\perp)$). Astfel, fie g_1, $g_2\in G$. Deoarece, conform aceleeaşi ipoteze, f este surjectivă, rezultă că există x, $y\in H$, astfel încât:

$g_1=f(x)$ şi $g_2=f(y)$.

Atunci,

$f^{-1}(g_1)=x$, $f^{-1}(g_2)=y$

şi

(12) $f^{-1}(g_1\cdot g_2)=f^{-1}(f(x)\cdot f(y))=x\perp y$

$=f^{-1}(g_1)\perp f^{-1}(g_2)$.

Foarte uşor arătăm şi faptul că, şi în acest caz, f este morfism de la grupul $(H,\perp)$ la grupul $(G,\cdot)$. Într-adevăr, dacă x, $y\in H$, atunci, conform egalităţii (1) sau aplicând f egalităţilor (12), obţinem că:

$f(x\perp y)=f(f^{-1}(f(x)\cdot f(y)))$

$=f(x)\cdot f(y)$.

Acum şi cea de a doua observaţie este complet demonstrată. □

În cazul nostru, considerăm funcţia:

$f:\mathbf{R}\to(2,+\infty)$,

definită prin: pentru orice $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=2+e^x. \tag{5.9}$$

Se arată, foarte uşor, că funcţia f este bijectivă şi:

$f^{-1}:(2,+\infty)\to\mathbf{R}$

este definită prin: pentru orice x, y$\in$(2,+∞),

$$f^{-1}(x)=\ln(x-2). \qquad (5.10)$$

Conform celor prezentate mai sus, operația cerută este:

$$„\circ” : (2,+\infty)\times(2,+\infty) \to (2,+\infty),$$

definită prin: pentru orice x, y$\in$(2,+∞),

$$x\circ y=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y))$$
$$=2+(x-2)(y-2). \qquad (5.11)$$

Raționând ca și la demonstrația Teoremei 5.1, se arată că (G=(2,+∞),$\circ$) este un grup comutativ izomorf cu corpul (**R**,+). □

Se impune aici următoarea remarcă:

Observația 5.4: *Funcția f de mai sus este crescătoare. Observăm că putem considera și o funcție descrescătoare, ca de exemplu*:

$$F : \mathbf{R} \to (2,+\infty),$$

definită prin: pentru orice x $\in$***R***,

$$F(x)=2+e^{-x}; \qquad (5.9')$$

concluzia problemei rămânând aceeași. □

Abordarea inductivă a acestui tip de izomorfism de grupuri presupune rezolvarea problemei:

Problema 5.5: *Considerăm d* $\in$***R*** *și următoarea lege de compoziție*:

$$„\circ” : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

definită prin: pentru orice (x,y) $\in$***R***$\times$***R***,

$$x\circ y=d+(x-d)(y-d). \qquad (5.12)$$

Să se arate că această operație determină pe mulțimea:

$$\mathbf{R}_{d,+\infty}=(d,+\infty)$$

o structură de grup comutativ și că ($\mathbf{R}_{d,+\infty}$*,*$\circ$*) este un grup izomorf cu grupul (**R**,+).* □

III. Să se determine partea întreagă a numărului real:

$$A=\int_2^3 \frac{x}{\ln x}dx . \qquad (i)$$

***Rezolvare*:** Considerăm funcția:

$$f : [2,3] \to \mathbf{R}, \qquad \text{unde, pentru orice } x\in[2,3], \qquad f(x)=\frac{x}{\ln x} . \qquad (1)$$

Atunci f este derivabilă pe (2,3) și, pentru orice $x\in(2,3)$,

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,. \tag{2}$$

Deci,

$$f'(x)=0 \qquad \text{dacă și numai dacă} \qquad x=e. \tag{3}$$

Pe de altă parte,

$$f(2)=\frac{2}{\ln 2} \qquad \text{și} \qquad f(3)=\frac{3}{\ln 3}\,. \tag{4}$$

Tabelul de variație al acestei funcții este următorul:

x	2		e		3
$f'(x)$	- -		0	+ + + + + + + + + + + + + +	
f(x)	$\frac{2}{\ln 2}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{3}{\ln 3}$

Dar, se verifică imediat că:

$$3>\frac{2}{\ln 2}>2 \qquad \text{și} \qquad 2<\frac{3}{\ln 3}<3; \tag{5}$$

în plus,

$$\frac{2}{\ln 2}>\frac{3}{\ln 3}\,. \tag{6}$$

Atunci, pentru orice $x\in[2,3]$,

$$2<f(x)<3.$$

Rezultă că:

$$2<A<3; \qquad \text{deci,} \qquad [A]=2.$$