第11回 連立微分方程式

これまで、

- 独立変数 x
- 道関数 $y(x)$

ここでは、

- 独立変数 t
- 未知関数 $x(t), y(t)$

とする。つまり、**連立微分方程式**を扱う。

例：

$$\begin{cases} x' - 2x + y = e^t \\ x' + y' + 4x = 0 \end{cases}$$

これは、微分演算子Dを用いて以下のように表せる。

$$\begin{cases} (D-2)x + y = e^t & (1) \\ (D+4)x + Dy = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)をx, y についての連立一次方程式として解く。

yを消去すると、

$$\begin{aligned} (D(D-2) - (D+4))x = De^t \\ (D+1)(D-4)x = e^t \end{aligned}$$

$(D+1)(D-4)x = 0$の一般解

補助方程式 $(t+1)(t-4) = 0$の解は$t = -1, 4$（2つの実数解）なので、一般解は以下となる。

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

$(D+1)(D-4)x = e^t$の特殊解

【逆演算子】

$$\frac{1}{D+1}\frac{1}{D-4}e^t = -\frac{1}{6}e^t$$

p.44 公式(2)を2回適用した

【未定係数法】

補助方程式の解は $-1, 4$ であり、$\alpha = 1$ より、p.54 定理3.7 (i)より、この非同次形微分方程式は Ae^t の形の特殊解を持つ。
Ae^tを元の微分方程式に代入して、

$$-\frac{1}{6}e^t$$

を得る。

$(D+1)(D-4)x = e^t$の一般解

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6}e^t \tag{3}$$

得られた x から y を求める

x を(1)の上式に代入して、

$$\begin{aligned} y &= e^t - (D-2)\left[c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6}e^t\right] \\ &= 3c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{4t} + \frac{5}{6}e^t \end{aligned} \tag{4}$$

xを消去して y を求める

連立微分方程式(1)からxを消去すると、次のyの非同時系微分方程式が得られる。

$$(D+1)(D-4)y = -5e^t$$

これを解くと、次の一般解が得られる。

$$y = b_1 e^{-t} + b_2 e^{4t} + \frac{5}{6}e^t \tag{5}$$

任意定数 c_1, c_2, b_1, b_2 を c_1, c_2 に**集約しなければならない。**$\leftarrow$ なぜ集約できるかは後で説明する

(3), (5) を (1) へ代入

$$\begin{aligned}(D-2)\left[c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6}e^t\right] + \left[b_1 e^{-t} + b_2 e^{4t} + \frac{5}{6}e^t\right] \\ = (-3c_1 + b_1)e^{-t} + (2c_2 + b_2)e^{4t} + e^t = e^t \\ -3c_1 + b_1 = 0, \quad 2c_2 + b_2 = 0 \\ b_1 = 3c_1, \quad b_2 = -2c_2\end{aligned}$$

これで、(5)は(4)と等しくなる。

例題2（初期値問題）

初期条件から、任意定数の値を決定する。

$t=0, x=-1/6, y=5/6$ を(3)に代入して、 $c_1 = -1/3, c_2 = 1/3$を得る。

「解け」＝「微分方程式の解を求めよ」なので、

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}e^{4t} - \dfrac{1}{6}e^t \\ y = -e^{-t} - \dfrac{2}{3}e^{4t} + \dfrac{5}{6}e^t \end{cases}$$

が例題2の答えとなる。

任意定数の数

連立微分方程式(1), (2)の任意定数は c_1, c_2の2つだった。

次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} f_{11}(D)x + f_{12}(D)y = h_1 \\ f_{21}(D)x + f_{22}(D)y = h_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{（行列式）} \quad \Delta(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{vmatrix}$$

とすると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(D)} \begin{bmatrix} f_{22}(D) & -f_{12}(D) \\ -f_{21}(D) & f_{11}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

と表せる。

ここで、

- $\Delta(D)$がk次式ならば、連立微分方程式の一般解はk個の任意定数を含む
- $\Delta(D)$が定数ならば、連立微分方程式の一般解は任意定数を含まない

p.59 例題3は任意定数を含まない例

p.60 例題4は未知関数が3つの例