

第6回 線形微分方程式

逆演算子

p.51 定理3.5

非同次微分方程式 $L(y) = F(x)$ の一般解は、同次微分方程式 $L(y) = 0$ の一般解（基本解） y_f と、非同次方程式の特殊解 y_p の和で表される。

$$y = y_f + y_p$$

逆演算子法は、非同次方程式の特殊解を求める一つの方法。

定数係数線形微分方程式

$$\begin{aligned} L(y) &= y'' + by' + cy = F(x) \\ (D^2 + bD + c)y &= F(x) \quad <- \text{微分演算子による表現} \end{aligned}$$

$f(D) = D^2 + bD + c$ として、

$$y = \frac{1}{f(D)}F(x)$$

は微分方程式 $L(y) = F(x)$ の**特殊解**となる。

p.43 公式(1)

$Dy = F(x)$ を考える。

$$\begin{aligned} Dy &= y' = F(x) \\ y &= \int F(x)dx = \frac{1}{D}F(x) \end{aligned} \tag{1}$$

p.44 公式(2)

p.36 (1) $f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x}$ から、

$$\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x} \tag{2}$$

ただし、 $f(\alpha) \neq 0$ 。

p.45 例題1 (1)

$$\frac{1}{D^2 + D + 1}e^{2x} = \frac{1}{2^2 + 2 + 1}e^{2x} = \frac{1}{7}e^{2x}$$

p.44 公式(3)

p.36 (2) $f(D)[e^{\alpha x}y] = e^{\alpha x}f(D + \alpha)y$ より、

$$\frac{1}{f(D)}F(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{f(D + \alpha)}[e^{-\alpha x}F(x)] \tag{3}$$

(p.44 の証明参照)

公式 (2) が使えない時、公式 (3) を使う。

p.44 公式(4)

公式 (3) で $f(D) = D - \alpha$ とすると以下を得る。

$$\frac{1}{D - \alpha}F(x) = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x}F(x)dx \tag{4}$$

p.46 公式(6)

$1/f(D)[ke^{i\alpha x}] = \xi(x) + i\eta(x)$ ならば、

$$\frac{1}{f(D)}[k \cos \alpha x] = \xi(x), \quad \frac{1}{f(D)}[k \sin \alpha x] = \eta(x) \tag{6}$$