第１２回 級数による解法

一階微分方程式

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

において、$f(x,y)$ が点 $x(x_0, y_0)$ の近くで偏微分可能で、$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ が連続ならば $y(x_0) = y_0$ を満たす解 $y = g(x)$ がただ1つ存在する。(p.5 定理1.1)

この解 y を $x = x_0$ でテイラー級数の形で表す。

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + \cdots \tag{2}$$

微分方程式を解く → 微分方程式を満たすように係数 $A_i,\ (i = 0, \dots, n, \dots)$ を決める。

1. $x = x_0$ で $y = y_0$ より、$A_0 = y_0$
2. (2)を微分

$$y' = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \cdots + nA_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

これを(1)に代入して、A_1、$A_2, \cdots$ を決める。

$x_0 = 0$ **のとき、初期条件が与えられていないとき**は、

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

とする（マクローリン級数）。

p.66 例題1

$y' - 2xy = x$ を x のべき級数による解法で解け。

$$\begin{aligned}
y &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\
y' &= A_1 + 2A_2 x + \cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n \\
-2xy &= -2A_0 x + -2A_1 x^2 - \cdots - 2A_{n-1} x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -2A_{n-1} x^n
\end{aligned}$$

より、

$$y' - 2xy = A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1) A_{n+1} - 2A_{n-1} \right\} x^n = x$$

- $n = 0$ のとき、両辺の x の0次項を比較して、$A_1 = 0$
- $n = 1$ のとき、両辺の x の1次項を比較して、$2A_2 - 2A_0 = 1$ → $A_2 = (1 + 2A_0)/2$
- $n = 2$ のとき、両辺の x の2次項を比較して、$3A_3 - 2A_1 = 0$ → $A_3 = (2/3)A_1 = 0$
- $n = 3$ のとき、両辺の x の3次項を比較して、$4A_4 - 2A_2 = 0$ → $A_4 = (1/2)A_2$
- $n = 4$ のとき、両辺の x の4次項を比較して、$5A_5 - 2A_3 = 0$ → $A_5 = (2/5)A_3 = 0$
- $n = 5$ のとき、両辺の x の5次項を比較して、$6A_6 - 2A_4 = 0$ → $A_6 = (1/3)A_4$
- $\vdots$

$$\begin{gathered}
\text{偶数次項：} A_2 = \frac{1}{2}(1 + 2A_0),\quad A_{2m} = \frac{1}{m} A_{2m-2}\ (m \geq 2) \\
A_{2m} = \frac{1}{2}\frac{1}{m!}(1 + 2A_0)\ (m \geq 1) \\
\text{奇数次項：} A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m+1} = \cdots = 0\ (m \geq 0)
\end{gathered}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
y &= A_0 + \frac{1}{2}(1 + 2A_0) \left\{ x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + 2A_0) \left\{ 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} + c \left\{ 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} + ce^{x^2}
\end{aligned}$$

解の公式（p.13 (2)）による例題１の解法

$y' - 2xy = x$ → $P(x) = -2x, Q(x) = x$

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} + c \right) \\
&= -\frac{1}{2} + ce^{x^2} \quad \leftarrow \text{級数による解法と同じ}
\end{aligned}$$

p.67 例題２

$y'' - 2xy' + 2y = 0$（エルミットの微分方程式）を x のべき級数による解法で解け。

（**定数係数でない**ので、これまでの解法では解けない）

$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
y' &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
y'' &= 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \cdots + n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1) a_{n+2} x^n \\
-2xy' &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\
y'' - 2xy' + 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} - 2n a_n + 2a_n \right\} x^n \\
&= 2(a_0 + a_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} - 2(n-1) a_n \right\} x^n = 0
\end{aligned}
$$

より、

- 両辺の0次項を比較して、$2(a_0 + a_2) = 0$ → $a_2 = -a_0$
- 両辺の1次項を比較して、$2 \cdot 3 a_3 = 0$ → $a_3 = 0$
- 両辺の2次項を比較して、$3 \cdot 4 a_4 - 2a_2 = 0$ → $a_4 = (1/6) a_2$
- 両辺の3次項を比較して、$4 \cdot 5 a_5 - 2 \cdot 2 a_3 = 0$ → $a_5 = (1/5) a_3 = 0$
- 両辺のn次項を比較して、$(n+1)(n+2) a_{n+2} - 2(n-1) a_n = 0$ → $a_{n+2} = 2(n-1)/(n+1)(n+2) a_n$

$$
\begin{aligned}
\text{偶数次項：} a_{2m} &= \frac{2(2m-3)}{(2m-1)2m} a_{2m-2} = \frac{2(2m-3)}{(2m-1)2m} \frac{2(2m-5)}{(2m-3)(2m-2)} a_{2m-4} \\
&= -\frac{1}{(2m-1)m!} a_0 \ \ (m \geq 1) \\
\text{奇数次項：} A_3 &= A_5 = A_7 = \cdots = A_{2m+1} = \cdots = 0 \ (m \geq 1)
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
y = a_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{2!\,3} x^4 - \cdots - \frac{1}{n!\,(2n-1)} x^{2n} - \cdots \right) + a_1 x
$$