第3回 1階微分方程式

線形微分方程式

次の微分方程式を**線形微分方程式**という

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

線形微分方程式の一般解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

P.13 例題1 (1)

$$\begin{aligned}
xy'-y&=x(1+2x^2)\\
y'-\frac{1}{x}y&=1+2x^2 \leftarrow \textbf{線形微分方程式}\\
P(x)&=-\frac{1}{x},\ Q(x)=1+2x^2\\
\int P(x)dx&=\int -\frac{1}{x}dx=-\log x,\ -\int P(x)dx=\log x\\
e^{-\int P(x)dx}&=e^{\log x}=x^{*1},\ \ e^{\int P(x)dx}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}^{*2}\\
\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C&=\int(1+2x^2)\frac{1}{x}dx+C=\int\left(\frac{1}{x}+2x\right)dx+C\\
&=\log x+x^2+C\\
y&=x(\log x+x^2+C)
\end{aligned}$$

*1, *2

$$\begin{aligned}
a=e^{\log x}&\text{とする}\\
\text{両辺の対数をとる}&\rightarrow \log a=\log x \rightarrow a=x\\
b=e^{-\log x}=e^{\log x^{-1}}=e^{\log\frac{1}{x}}&\text{とする}\\
\text{両辺の対数をとる}&\rightarrow \log b=\log\frac{1}{x} \rightarrow b=\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

P.13 例題1 (2)

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)y' &= xy+1 \\
y' - \frac{x}{1+x^2}y &= \frac{1}{1+x^2} \quad \color{red}{\leftarrow} \ \textbf{線形微分方程式} \\
P(x) &= -\frac{x}{1+x^2},\ Q(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
\int P(x)dx &= \int -\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\log(1+x^2),\quad -\int P(x)dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) \\
e^{\int P(x)dx} &= e^{-\frac{1}{2}\log(1+x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad e^{-\int P(x)dx} = e^{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} = \sqrt{1+x^2} \\
\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C &= \int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}^{*3} + C \\
y &= \sqrt{1+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C\right) \\
&= x + \sqrt{1+x^2}C
\end{aligned}
$$

*3

$$
\begin{aligned}
x = \tan t \text{とすると、} dx &= \frac{1}{\cos^2 x}dt \\
\int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)\sqrt{1+\tan^2 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}dt \\
\text{ここで} 1 + tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} &= \frac{1}{\cos^2 t} \\
\text{上式} &= \int \cos t dt = \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}^{*4}
\end{aligned}
$$

*4

$$
\begin{aligned}
x = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} &= \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \\
x^2(1-\sin^2 t) &= \sin^2 t \\
\sin t &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

ベルヌーイの微分方程式

次の微分方程式を**ベルヌーイの微分方程式**という

$$
\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\color{red}{y^n}
$$

ベルヌーイの微分方程式で $\color{red}{z = y^{1-n}}$ とおいて、x と z の微分方程式にすると、これは**線形微分方程式**となる。

p.15 例題２

$$2xy' - y = y^3 \log x$$

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{\log x}{2x}y^3 \leftarrow \text{ベルヌーイの微分方程式}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2x},\ Q(x) = \frac{\log x}{2x},\ n = 3$$

$$z = y^{-2}\text{とすると、}\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{2}\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{y^3}{2}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2y}y = \frac{\log x}{2x}y^3$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = -\frac{\log x}{x} \leftarrow \text{線形微分方程式}$$

$$P'(x) = \frac{1}{x},\ Q'(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$\int P'(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \log x,\ \ -\int P'(x)dx = -\log x$$

$$e^{-\int P'(x)dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x},\ \ e^{\int P'(x)dx} = e^{\log x} = x$$

$$z = \frac{1}{x}\left(-\int \frac{\log x}{x}xdx + C\right)$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x}(-x\log x + x + C)^{*5}$$

$$(x - x\log x + C)y^2 = x$$

*5

$$\begin{aligned}\int \log x dx &= \int (x)' \log x dx \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\log x - x + C\end{aligned}$$