第5回 線形微分方程式

微分演算子（つづき）

練習問題

1. Dx^2
2. $D\cos 4x$
3. $D(xe^{2x})$
4. D^2e^{-3x}
5. $D^2(x^3+5x^2)$
6. $D^2(x^3e^{2x})$

p.36の公式

1. $f(D)e^{\alpha x}=f(\alpha)e^{\alpha x}$
   $De^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x}$、$D^2e^{\alpha x}=\alpha^2e^{\alpha x}$、$\ldots$、$D^ne^{\alpha x}=\alpha^ne^{\alpha x}$。
   $f(D)=aD^2+bD+c$ とする。

$$\begin{aligned}f(D)e^{\alpha x}&=(aD^2+bD+c)e^{\alpha x}\\&=aD^2e^{\alpha x}+bDe^{\alpha x}+ce^{\alpha x}\\&=(a\alpha^2+b\alpha+c)e^{\alpha x}\\&=f(\alpha)e^{\alpha x}\end{aligned}$$

2. $f(D)[e^{\alpha x}y]=e^{\alpha x}f(D+\alpha)y$

$$\begin{aligned}D[e^{\alpha x}y]&=(De^{\alpha x})y+e^{\alpha x}Dy\\&=\alpha e^{\alpha x}y+e^{\alpha x}Dy\\&=e^{\alpha x}(D+\alpha)y\\D^2[e^{\alpha x}y]&=D[D[e^{\alpha x}y]]=D[e^{\alpha x}(D+\alpha)y]\\&=(De^{\alpha x})(D+\alpha)y+e^{\alpha x}(D+\alpha)Dy\\&=\alpha e^{\alpha x}(D+\alpha)y+e^{\alpha x}(D+\alpha)Dy\\&=e^{\alpha x}(D+\alpha)^2y\end{aligned}$$

$f(D)=aD^2+bD+c$ とする。

$$\begin{aligned}f(D)[e^{\alpha x}y]&=aD^2[e^{\alpha x}y]+bD[e^{\alpha x}y]+ce^{\alpha x}y\\&=ae^{\alpha x}(D+\alpha)^2y+be^{\alpha x}(D+\alpha)y+ce^{\alpha x}y\\&=e^{\alpha x}\{a(D+\alpha)^2+b(D+\alpha)+c\}y\\&=e^{\alpha x}f(D+\alpha)y\end{aligned}$$

p.39 オイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{1}$$

ただし、i は**虚数単位**（$i^2=-1$）。

証明

マクロ―リンの定理より、

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right) = \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

次もまた成り立つ。

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{2}$$ (1)

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \tag{3}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{4}$$

練習問題

次の複素数 z の実部 Rez、虚部 Imz を求めよ。

1. $z = e^{\frac{\pi}{3}i}$
2. $z = e^{\pi i}$
3. $z = e^{(-5+2i)x}$
4. $z = (3+2i)e^{(4+2i)x}$

定理 3.4 （の一部）

２階定数係数同次微分方程式 $y'' + by' + cy = 0$ の一般解は、補助方程式 $t^2 + bt + c = 0$ の解が
3. 虚数解 $\lambda \pm \mu i$の場合、$y = c_1 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_2 e^{\lambda x} \cos \mu x$