

第9回 定数係数非同次系線形2階微分方程式の解法

p.51 定理3.5

非同次微分方程式 $L(y) = F(x)$ の一般解は、同次微分方程式 $L(y) = 0$ の一般解（基本解） y_f と、非同次方程式の特殊解 y_p の和で表される。

$$y = y_f + y_p$$

定理3.6

定数係数非同次系線形2階微分方程式 $y'' + p_1y' + p_2y = F(x)$ で、 $F(x)$ が r 次の多項式とする。

- 1. $p_2 \neq 0$ ならば、この微分方程式は r 次の多項式の特殊解を持つ。
 $F(x) = ax^2 + bx + c$ ならば、 $y_p = Ax^2 + Bx + C$ の形の特殊解を持つ。
- 2. $p_2 = 0, p_1 \neq 0$ ならば、この微分方程式は $\varphi(x)$ を r 次の多項式として、 $x\varphi(x)$ という形の特殊解を持つ。
 $F(x) = ax^2 + bx + c$ ならば、 $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$ の形の特殊解を持つ。

定理3.7

定数係数非同次系線形2階微分方程式 $y'' + p_1y' + p_2y = ke^{\alpha x}$ について、

- 1. $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$ として、 $f(\alpha) \neq 0$ ならば、この微分方程式は $y_p = Ae^{\alpha x}$ の形の特殊解を持つ。
- 2. $f(\alpha) = 0$ であり、 α が補助方程式 $t^2 + p_1t + p_2 = 0$ の1重の解であれば、この微分方程式は $y_p = Axe^{\alpha x}$ の形の特殊解を持つ。

定理 3.8

定数係数非同次系線形2階微分方程式 $y'' + p_1y' + p_2y = h \sin \alpha x + k \cos \alpha x$ について、

- 1. $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$ として、 $f(i\alpha) \neq 0$ ならば、この微分方程式は $y_p = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$ の形の特殊解を持つ。
- 2. $f(i\alpha) = 0$ であり、 $i\alpha$ が補助方程式 $t^2 + p_1t + p_2 = 0$ の1重の解であれば、この微分方程式は $y_p = x(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)$ の形の特殊解を持つ。

3.7の補足の定理

定数係数非同次系線形2階微分方程式 $y'' + p_1y' + p_2y = p_n(x)e^{\alpha x}$ について、

- 1. $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$ として、 $f(\alpha) \neq 0$ ならば、この微分方程式は $y_p = p_n(x)e^{\alpha x}$ の形の特殊解を持つ。
- 2. $f(\alpha) = 0$ であり、 α が補助方程式 $t^2 + p_1t + p_2 = 0$ の1重の解であれば、この微分方程式は $y_p = xp_n(x)e^{\alpha x}$ の形の特殊解を持つ。

ただし、 $p_n(x) = k_nx^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1x + k_0$

p.56 例題5の特殊解 Y_1 の導出は「逆演算子の展開」を使わずに、上の定理の1で導出可能。
 $Y_1 = (k_1x + k_0)e^{2x}$ として、係数 k_1, k_2 を決定する。

重ね合わせの原理

2つの微分方程式

$$\begin{aligned} f(D)y &= F_1(x) \\ f(D)y &= F_2(x) \end{aligned}$$

の特殊解をそれぞれ $Y_1(x), Y_2(x)$ とすれば、微分方程式

$$f(D) = F_1(x) + F_2(x)$$

は $Y_1(x) + Y_2(x)$ の形の特殊解を持つ。

