第11回 連立微分方程式

これまで、

- 独立変数 x
- 未知関数 $y(x)$

ここでは、

- 独立変数 t
- 未知関数 $x(t), y(t)$

とする。つまり、**連立微分方程式**を扱う。

例：

$$\begin{cases} x' - 2x + y = e^t \\ x' + y' + 4x = 0 \end{cases}$$

これは、微分演算子Dを用いて以下のように表せる。

$$\begin{cases} (D-2)x + y = e^t & (1) \\ (D+4)x + Dy = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)をx, y についての連立一次方程式として解く。

教科書とは違う解法

(2) = (2) - D(1)

$$\begin{cases} (D-2)x + y = e^t & (1\text{'}) \\ (-D^2+3D+4)x \qquad = -De^t = -e^t & (2\text{'}) \end{cases}$$

(2)のyの項が消えていることに注意（←こうなるよう操作を行った）

(1')と(2')の入れ替えと(2')の符号反転

$$\begin{cases} (D^2-3D-4)x \qquad = e^t & (\mathrm{a}) \\ (D-2)x + y = e^t & (\mathrm{b}) \end{cases}$$

二階非同次微分方程式(a)を解く

$t^2 - 3t - 4 = (t+1)(t-4) = 0$の解$t = -1, 4$から、同次方程式の一般解$x_f$は、

$$x_f = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

特殊解f_pは、

$$f_p = \frac{1}{D^2-3D-4} e^t = \frac{1}{f(1)} e^t = -\frac{1}{6} e^t$$

(a)の一般解 x は、

$$x = x_f + x_p = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6} e^t$$

(b)からyを求める

(b)より、

$$\begin{aligned} y &= e^t - (D-2)x \\ &= e^t - (D-2)\left\{ c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6} e^t \right\} \\ &= e^t - \left\{ c_1(-1-2)e^{-t} + c_2(4-2)e^{4t} - \frac{1}{6}(1-2)e^t \right\} \\ &= 3c_1 e^{-t} - 2e^{-4t} + \frac{5}{6} e^t \end{aligned}$$

ここから教科書の解法

yを消去すると、

$$
\begin{aligned}
(D(D-2)-(D+4))x &= De^t \\
(D+1)(D-4)x &= e^t
\end{aligned}
$$

$(D+1)(D-4)x=0$の一般解

補助方程式 $(t+1)(t-4)=0$の解は$t=-1,4$（2つの実数解）なので、一般解は以下となる。

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}$$

$(D+1)(D-4)x=e^t$の特殊解

【逆演算子】

$$\frac{1}{D+1}\frac{1}{D-4}e^t=-\frac{1}{6}e^t$$

p.44 公式(2)を2回適用した。
これは、

$$\frac{1}{D^2-3D-4}e^t=\frac{1}{1-3-4}e^t=-\frac{1}{6}e^t$$

このように、直接公式(2)を適用した方がよい。

【未定係数法】

補助方程式の解は $-1,4$ であり、$\alpha=1$ より、p.54 定理3.7 (i)より、この非同次形微分方程式は Ae^t の形の特殊解を持つ。
Ae^tを元の微分方程式に代入して、

$$-\frac{1}{6}e^t$$

を得る。

$(D+1)(D-4)x=e^t$の一般解

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{4t}-\frac{1}{6}e^t \tag{3}$$

得られた x から y を求める

x を(1)の上式に代入して、

$$
\begin{aligned}
y &= e^t-(D-2)\left[c_1e^{-t}+c_2e^{4t}-\frac{1}{6}e^t\right] \\
&= 3c_1e^{-t}-2c_2e^{4t}+\frac{5}{6}e^t
\end{aligned} \tag{4}
$$

xを消去して y を求める

連立微分方程式(1)からxを消去すると、次のyの非同時系微分方程式が得られる。

$$(D+1)(D-4)y=-5e^t$$

これを解くと、次の一般解が得られる。

$$y=b_1e^{-t}+b_2e^{4t}+\frac{5}{6}e^t \tag{5}$$

任意定数 c_1,c_2,b_1,b_2 を c_1,c_2 に**集約しなければならない。**← なぜ集約できるかは後で説明する

(3), (5) を (1) へ代入

$$
\begin{aligned}
(D-2)\left[c_1e^{-t}+c_2e^{4t}-\frac{1}{6}e^t\right]+\left[b_1e^{-t}+b_2e^{4t}+\frac{5}{6}e^t\right] \\
=(-3c_1+b_1)e^{-t}+(2c_2+b_2)e^{4t}+e^t=e^t \\
-3c_1+b_1=0, \quad 2c_2+b_2=0 \\
b_1=3c_1, \quad b_2=-2c_2
\end{aligned}
$$

これで、(5)は(4)と等しくなる。

例題2（初期値問題）

初期条件から、任意定数の値を決定する。

$t=0, x=-1/6, y=5/6$ を(3)に代入して、 $c_1=-1/3, c_2=1/3$を得る。

「解け」＝「微分方程式の解を求めよ」なので、

$$
\begin{cases}
x=-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{4t}-\dfrac{1}{6}e^t \\
y=-e^{-t}-\dfrac{2}{3}e^{4t}+\dfrac{5}{6}e^t
\end{cases}
$$

が例題2の答えとなる。

任意定数の数

連立微分方程式(1), (2)の任意定数は c_1, c_2の2つだった。

次の連立微分方程式を考える。

$$
\begin{cases}
f_{11}(D)x+f_{12}(D)y=h_1 \\
f_{21}(D)x+f_{22}(D)y=h_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{（行列式）}\quad \Delta(D)=\begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{vmatrix}
$$

とすると、

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta(D)}\begin{bmatrix} f_{22}(D) & -f_{12}(D) \\ -f_{21}(D) & f_{11}(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}
$$

と表せる。

ここで、

- $\Delta(D)$がk次式ならば、連立微分方程式の一般解はk個の任意定数を含む
- $\Delta(D)$が定数ならば、連立微分方程式の一般解は任意定数を含まない

p.59 例題3は任意定数を含まない例

p.60 例題4は未知関数が3つの例