

第11回 連立微分方程式

これまで、

- 独立変数 x
- 未知関数 $y(x)$

ここでは、

- 独立変数 t
- 未知関数 $x(t), y(t)$

とする。つまり、**連立微分方程式**を扱う。

例：

$$\begin{cases} x' - 2x + y = e^t \\ x' + y' + 4x = 0 \end{cases}$$

これは、微分演算子 D を用いて以下のように表せる。

$$\begin{cases} (D - 2)x + y = e^t & (1) \\ (D + 4)x + Dy = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)を x, y についての連立一次方程式として解く。

y を消去すると、

$$\begin{aligned} (D(D - 2) - (D + 4))x &= De^t \\ (D + 1)(D - 4)x &= e^t \end{aligned}$$

$(D + 1)(D - 4)x = 0$ の一般解

補助方程式 $(t + 1)(t - 4) = 0$ の解は $t = -1, 4$ (2つの実数解) なので、一般解は以下となる。

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

$(D + 1)(D - 4)x = e^t$ の特殊解

【逆演算子】

$$\frac{1}{D + 1} \frac{1}{D - 4} e^t = -\frac{1}{6} e^t$$

p.44 公式(2)を2回適用した。

これは、

$$\frac{1}{D^2 - 3D - 4} e^t = \frac{1}{1 - 3 - 4} e^t = -\frac{1}{6} e^t$$

このように、直接公式(2)を適用した方がよい。

【未定係数法】

補助方程式の解は $-1, 4$ であり、 $\alpha = 1$ より、p.54 定理3.7 (i)より、この非同次形微分方程式は Ae^t の形の特殊解を持つ。

Ae^t を元の微分方程式に代入して、

$$-\frac{1}{6} e^t$$

を得る。

$(D + 1)(D - 4)x = e^t$ の一般解

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6} e^t \tag{3}$$

得られた x から y を求める

x を(1)の式に代入して、

$$\begin{aligned} y &= e^t - (D - 2) \left[c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6} e^t \right] \\ &= 3c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{4t} + \frac{5}{6} e^t \end{aligned} \tag{4}$$

教科書の[別解]

x を消去して y を求める

連立微分方程式(1)から x を消去すると、次の y の非同時系微分方程式が得られる。

$$(D + 1)(D - 4)y = -5e^t$$

これを解くと、次の一般解が得られる。

$$y = b_1 e^{-t} + b_2 e^{4t} + \frac{5}{6} e^t \tag{5}$$

任意定数 c_1, c_2, b_1, b_2 を c_1, c_2 に**集約しなければならない**。← なぜ集約できるかは後で説明する

(3), (5) を (1) へ代入

$$\begin{aligned} (D - 2) \left[c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{6} e^t \right] &+ \left[b_1 e^{-t} + b_2 e^{4t} + \frac{5}{6} e^t \right] \\ &= (-3c_1 + b_1) e^{-t} + (2c_2 + b_2) e^{4t} + e^t = e^t \\ \begin{aligned} -3c_1 + b_1 &= 0, & 2c_2 + b_2 &= 0 \\ b_1 &= 3c_1, & b_2 &= -2c_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

これで、(5)は(4)と等しくなる。

例題2（初期値問題）

初期条件から、任意定数の値を決定する。

$t = 0, x = -1/6, y = 5/6$ を(3)に代入して、 $c_1 = -1/3, c_2 = 1/3$ を得る。

「解け」＝「微分方程式の解を求めよ」なので、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{6}e^t \\ y = -e^{-t} - \frac{2}{3}e^{4t} + \frac{5}{6}e^t \end{cases}$$

が例題2の答えとなる。

任意定数の数

連立微分方程式(1), (2)の任意定数は c_1, c_2 の2つだった。

次の連立微分方程式を考える。

$$\begin{cases} f_{11}(D)x + f_{12}(D)y = h_1 \\ f_{21}(D)x + f_{22}(D)y = h_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

(行列式) $\Delta(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) \end{vmatrix}$

とすると、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(D)} \begin{bmatrix} f_{22}(D) & -f_{12}(D) \\ -f_{21}(D) & f_{11}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

と表せる。

ここで、

- $\Delta(D)$ が**k次式**ならば、連立微分方程式の一般解は**k個の任意定数**を含む
- $\Delta(D)$ が**定数**ならば、連立微分方程式の一般解は**任意定数を含まない**

p.59 例題3は任意定数を含まない例

p.60 例題4は未知関数が3つの例