第4回 線形微分方程式

線形微分方程式

１階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

１階線形微分方程式の一般解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

（変数分離形もこの公式で解ける。同次形は変数変換が必要）

2階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

$R(x)=0$のとき、2階線形**同次**微分方程式という。

2階線形微分方程式の一般解 -> 存在しない

$P(x)=p$、$Q(x)=q$、（ただし p、q は定数）の2階線形微分方程式は解ける。

定数係数2階線形同次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+q=L(y)=0$$

を解く <- 今回のテーマ

定理 3.1

$u(x)$、$v(x)$ が同次微分方程式の解ならば、

$$y=c_1u(x)+c_2v(x)$$

も解である。ただし、c_1、c_2 は任意定数。

一次独立と一次従属

$u(x)$、$v(x)$ が一次独立 <-> $u(x)/v(x)\neq$ 定数　$(v(x)\neq 0)$ または $v(x)/u(x)\neq$ 定数　$(u(x)\neq 0)$

$u(x)$、$v(x)$ が一次従属 <-> $u(x)/v(x)=$ 定数

定理 3.2

2階線形同次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+q=L(y)=0$$

の2つの解 $u(x)$、$v(x)$ が一次独立ならば、一般解は、

$$y = c_1 u(x) + c_2 v(x) \quad (c_1, c_2 \text{は任意定数})$$

定理３．３

スキップ

例題１（１階線形同次微分方程式）

$y' = 2y$ の一般解は $y = ce^{2x}$ -> $y' = 2ce^{2x}$ より、$y' - 2y = 2ce^{2x} - 2 \cdot ce^{2x} = 0$

練習１

以下の微分方程式を解け（= 一般解を求めよ）

1. $y' = -3y$
2. $y' + 5y = 0$
3. $2y' + 5y = 0$

微分演算子

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = Dy$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = DDy = D^2 y$$

と表す。このとき D を **微分演算子** という。

例

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$
$$D^2 y + 3Dy - 4y = (D^2 + 3D - 4)y = 0$$

上の微分方程式の非自明解（自明解は $y = 0$） は、$D^2 + 3D = 4 = 0$ を満たす。

- 解いてみる
  上の 例題1、練習1 の解から $y = e^{tx}$ と置く。ここで t は定数。

$y' = te^{tx}$、$y'' = t^2 e^{tx}$ より、もとの微分方程式は以下となる。

$$y'' + 3y' - 4y = t^2 e^{tx} + 3te^{tx} - 4e^{tx} = (t^2 + 3t - 4)e^{tx} = 0$$

$e^{tx} \neq 0$ より、$t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) = 0$、$t = 1, -4$。したがって、解は $y = e^x, e^{-4x}$。
e^x と e^{-4x} は一次独立なので、一般解は $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$。

微分演算子の方程式 $D^2 + 3D - 4 = 0$ から上の補助方程式 $t^2 + 3t - 4 = 0$ が導出できる。

定理 3.4 （の一部）

２階定数係数同次微分方程式 $y'' + by' + cy = 0$ の一般解は、補助方程式 $t^2 + bt + c = 0$ の解が

1. 2つ実数解 α, β $(\alpha \neq \beta)$の場合、$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$