

# 第9回 定数係数非同次系線形2階微分方程式の解法

## p.51 定理3.5

非同次微分方程式  $L(y) = F(x)$  の一般解は、同次微分方程式  $L(y) = 0$  の一般解（基本解） $y_f$  と、非同次方程式の特殊解  $y_p$  の和で表される。

$$y = y_f + y_p$$

## 定理3.6

定数係数非同次系線形2階微分方程式  $y'' + p_1y' + p_2y = F(x)$  で、 $F(x)$  が  $r$  次の多項式とする。

1.  $p_2 \neq 0$  ならば、この微分方程式は  $r$  次の多項式の特殊解を持つ。  
 $F(x) = ax^2 + bx + c$  ならば、 $y_p = Ax^2 + Bx + C$  の形の特殊解を持つ。
2.  $p_2 = 0, p_1 \neq 0$  ならば、この微分方程式は  $\varphi(x)$  を  $r$  次の多項式として、 $x\varphi(x)$  という形の特殊解を持つ。  
 $F(x) = ax^2 + bx + c$  ならば、 $y_p = x(Ax^2 + Bx + C)$  の形の特殊解を持つ。

## 定理3.7

定数係数非同次系線形2階微分方程式  $y'' + p_1y' + p_2y = ke^{\alpha x}$  について、

1.  $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$  として、 $f(\alpha) \neq 0$  ならば、この微分方程式は  $y_p = Ae^{\alpha x}$  の形の特殊解を持つ。
2.  $f(\alpha) = 0$  であり、 $\alpha$  が補助方程式  $t^2 + p_1t + p_2 = 0$  の1重の解であれば、この微分方程式は  $y_p = Axe^{\alpha x}$  の形の特殊解を持つ。

## 定理 3.8

定数係数非同次系線形2階微分方程式  $y'' + p_1y' + p_2y = h \sin \alpha x + k \cos \alpha x$  について、

1.  $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$  として、 $f(i\alpha) \neq 0$  ならば、この微分方程式は  $y_p = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$  の形の特殊解を持つ。
2.  $f(i\alpha) = 0$  であり、 $i\alpha$  が補助方程式  $t^2 + p_1t + p_2 = 0$  の1重の解であれば、この微分方程式は  $y_p = x(A \sin \alpha x + B \cos \alpha x)$  の形の特殊解を持つ。

## 3.7の補足の定理

定数係数非同次系線形2階微分方程式  $y'' + p_1y' + p_2y = p_n(x)e^{\alpha x}$  について、

1.  $f(D) = D^2 + p_1D + p_2$  として、 $f(\alpha) \neq 0$  ならば、この微分方程式は  $y_p = p_n(x)e^{\alpha x}$  の形の特殊解を持つ。
2.  $f(\alpha) = 0$  であり、 $\alpha$  が補助方程式  $t^2 + p_1t + p_2 = 0$  の1重の解であれば、この微分方程式は  $y_p = xp_n(x)e^{\alpha x}$  の形の特殊解を持つ。

ただし、 $p_n(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0$

p.56 例題5の特殊解  $Y_1$  の導出は「逆演算子の展開」を使わずに、上の定理の1で導出可能。

$Y_1 = (k_1 x + k_0)e^{2x}$  として、係数  $k_1, k_2$  を決定する。

## 重ね合わせの原理

2つの微分方程式

$$\begin{aligned} f(D)y &= F_1(x) \\ f(D)y &= F_2(x) \end{aligned}$$

の特殊解をそれぞれ  $Y_1(x), Y_2(x)$  とすれば、微分方程式

$$f(D) = F_1(x) + F_2(x)$$

は  $Y_1(x) + Y_2(x)$  の形の特殊解を持つ。

