第１3回 級数による解法

2階微分方程式

級数による解法が最も有効なのは、以下のような変数係数2階微分方程式。

2階微分方程式

$$P_0(x)y'' + p_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{1}$$

の係数 $P_0(x), p_1(x), P_2(x)$ は x の多項式とする。

- $P_0(a) \neq 0 : a$ は**通常点**
- $P_0(a) = 0 : a$ は**特異点**

確定特異点

2階微分方程式

$$(x-a)^2y'' + (x-a)P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{2}$$

について点 $x = a$ は**特異点**である。
$P_1(x)$、$P_2(x)$ が x の多項式のとき、点 $x = a$ を (2) の**確定特異点**という。

このとき、以下が成り立つ。

(2)は、以下の形の解を持つ。

$$\begin{aligned} y = A_0(x-a)^\lambda + A_1(x-a)^{\lambda+1} + A_2(x-a)^{\lambda+2} + \cdots \\ + A_n(x-a)^{\lambda+n} + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、$A_0 \neq 0$。
λは、

$$\lambda(\lambda-1) + P_1(a)\lambda + P_2(a) = 0 \tag{4}$$

の解である。(4) を**決定方程式**と呼ぶ。

(1)の解き方

(4)の２つの解を λ_1、λ_2 とする。

- λ_1、λ_2 の差が**整数でない**場合
  λ_1、λ_2のそれぞれに対応する解 $y = y_1(x)$ と $y = y_2(x)$ は一次独立であり、一般解は
  $$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$
  となる。
- λ_1、λ_2 の差が**整数**の場合
  扱わない

p.71 例題2

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \tag{a}$$

与式 $\times x/4$

$$x^2y'' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{4}xy = 0 \tag{b}$$

$x = 0$ は微分方程式 (b) の**確定特異点**。
(b) の解を

$$y = x^\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \tag{c}$$

とおく。
$P_1(x) = 1/2$、$P_2(x) = x/4 \to P_1(0) = 1/2$、$P_2(x) = 0$ より**決定方程式**は以下となる。

$$\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{2}\lambda = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{d}$$

決定方程式 (d) の解は $\lambda = 0, 1/2$。

$\lambda = 0$ に対して、

(c) より、

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ y'' &= 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots \end{aligned}$$

これを (a) に代入して、以下を得る。(←がんばって解くこと)

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{1}{2!}a_0,\ a_2 = \frac{1}{4!}a_0,\ a_3 = -\frac{1}{6!}a_0,\ \cdots, \\ a_n = (-1)^n\frac{1}{(2n)!}a_0,\ \cdots \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ に対する解として以下を得る。

$$y = a_0\left\{1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^n + \cdots\right\} \tag{e}$$

ここで、

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

より、$(e) = a_0\cos\sqrt{x}$ を得る。

$\lambda = 1/2$ に対して、

(c) より、

$$y = \sqrt{x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(a_0 + 3a_1 x + 5a_2 x^2 + \cdots + (2n+1)a_n x^n + \cdots\right)$$
$$y'' = \frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(-a_0 + 3a_1 x + 3\cdot 5 a_2 x^2 + \cdots + (2n-1)(2n+1)a_n x^n + \cdots\right)$$

これを (a) に代入して、以下を得る。(←がんばって解くこと)

$$a_1 = -\frac{1}{3!}a_0,\ a_2 = \frac{1}{5!}a_0,\ a_3 = -\frac{1}{7!}a_0,\ \cdots,$$
$$a_n = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}a_0,\ \cdots$$

$\lambda = 1/2$ に対する解として以下を得る。

$$y = a_0\sqrt{x}\left\{1 - \frac{1}{3!}x + \frac{1}{5!}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^n + \cdots\right\} \tag{f}$$

ここで、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$
$$\sin\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{1}{3!}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{5!}x^2\sqrt{x} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^n\sqrt{x} + \cdots$$

より、$(f) = a_0 \sin\sqrt{x}$ を得る。

以上より、(a) の一般解は、$y = c_1\cos\sqrt{x} + c_2\sin\sqrt{x} \quad (c_1, c_2$は任意定数)