第１3回 級数による解法

2階微分方程式

級数による解法が最も有効なのは、以下のような変数係数2階微分方程式。

2階微分方程式

$$P_0(x)y'' + p_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{1}$$

の係数 $P_0(x), p_1(x), P_2(x)$ は x の多項式とする。

- $P_0(a) \neq 0 : a$ は**通常点**
- $P_0(a) = 0 : a$ は**特異点**

通常点

$x = 0$ が「通常点」のとき、一般解 y は以下で表せる。

$$y = c_1\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + c_2\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$$

ここで、c_1, c_2 は任意定数。

p.69 例題１

$$(1-x^2)y'' + -2xy' + 2y = 0$$

$P_0(x) = 1 - x^2, P_0(0) = 1 \neq 0$ より $x = 0$ は**通常点**なので、

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

とおく。

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
y' &= a_1 + 2a_2 x + \cdots + nc_n x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\
y'' &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \cdots + (n-1)\cdot nc_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 y'' &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^n \\
xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \\
(1-x^2)y'' + -2xy' + 2y &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^{n-2} \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^n \\
&\quad - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \\
&\quad + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \qquad \text{(a)} \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^n \qquad \text{(b)} \\
&\quad - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n \qquad \text{(c)} \\
&\quad + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(d)}
\end{aligned}$$

- $n = 0$ のとき: $(a), (d)$より、$2a_2 + 2a_0 = 0 \to a_2 = -a_0$
- $n = 1$ のとき: $(a), (c), (d)$より、$2\cdot 3a_3 - 2a_1 + 2a_1 = 0 \to a_3 = 0$
- $n = 2$ のとき: $(a), (b), (c), (d)$より、$3\cdot 4a_4 - 2a_2 - 2\cdot 2a_2 + 2a_2 = 0 \to a_4 = (1/3)a_2 = -(1/3)a_0$
- $n = n$ のとき: $(a), (b), (c), (d)$より、$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n-1)na_n - 2na_n + 2a_n = 0 \to a_{n+2} = \{(n-1)/(n+1)\}a_n$

$a_3 = 0$ より、

$$a_{2m+1} = 0 \ \ (m \geq 1)$$

$$\begin{aligned}
a_{2m} &= \frac{(2m-2)-1}{(2m-2)+1}a_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-1}a_{2m-2} = \frac{2m-3}{2m-1}\frac{2m-5}{2m-3}a_{2m-4} \\
&= \frac{(2m-3)(2m-5)\cdots 3\cdot 1}{(2m-1)(2m-3)\cdots 5\cdot 3}a_2 = \frac{1}{2m-1}a_2 = -\frac{1}{2m-1}a_0 \ \ (m \geq 2)
\end{aligned}$$

以上より、

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{3}a_0 x^4 - \frac{1}{5}a_0 x^6 - \cdots = a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \cdots) + a_1 x$$

ここで、a_1, a_2 は任意定数。