第１２回 級数による解法

一階微分方程式

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

において、$f(x, y)$ が点 $x(x_0, y_0)$ の近くで偏微分可能で、$f_x(x, y)$、$f_y(x, y)$ が連続ならば $y(x_0) = y_0$ を満たす解 $y = g(x)$ がただ1つ存在する。(p.5 定理1.1)

この解 y を $x = x_0$ でテイラー級数の形で表す。

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n + \cdots \tag{2}$$

微分方程式を解く → 微分方程式を満たすように係数 $A_i,\ (i = 0, \ldots, n, \ldots)$ を決める。

1. $x = x_0$ で $y = y_0$ より、$A_0 = y_0$
2. (2)を微分

$$y' = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \cdots + nA_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

これを(1)に代入して、A_1、$A_2, \cdots$ を決める。

$x_0 = 0$ のときはマクローリン級数。

p.66 例題1

$y' - 2xy = x$ を x のべき級数による解法で解け。

$$\begin{aligned}
y &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \\
y' &= A_1 + 2A_2 x + \cdots + nA_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)A_{n+1} x^n \\
-2xy &= -2A_0 x + -2A_1 x^2 - \cdots - 2A_{n-1}x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -2A_{n-1}x^n
\end{aligned}$$

より、

$$y' - 2xy = A_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{(n+1)A_{n+1} - 2A_{n-1}\right\} x^n = x$$

- $n = 0$ のとき、$A_1 = 0$
- $n = 1$ のとき、$2A_2 - 2A_0 = 1$ → $A_2 = (1 + 2A_0)/2$
- $n = 2$ のとき、$3A_3 - 2A_1 = 0$ → $A_3 = (2/3)A_1 = 0$
- $n = 3$ のとき、$4A_4 - 2A_2 = 0$ → $A_4 = (1/2)A_2$
- $n = 4$ のとき、$5A_5 - 2A_3 = 0$ → $A_5 = (2/5)A_3 = 0$
- $n = 5$ のとき、$6A_6 - 2A_4 = 0$ → $A_6 = (1/3)A_4$
- $\vdots$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2}(1+2A_0),\quad A_{2m} = \frac{1}{m}A_{2m-2}\ (m \geq 2)\\
A_1 &= A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m+1} = \cdots = 0\ (m \geq 0)\\
A_{2m} &= \frac{1}{2}\frac{1}{m!}(1+2A_0)\ (m \geq 1)
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
\begin{aligned}
y &= A_0 + \frac{1}{2}(1+2A_0)\left\{x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m}\right\}\\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+2A_0)\left\{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m}\right\}\\
&= -\frac{1}{2} + c\left\{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots + \frac{1}{m!}x^{2m}\right\}\\
&= -\frac{1}{2} + ce^{x^2}
\end{aligned}
$$

解の公式（p.13 (2)）による例題 1 の解法

$y' - 2xy = x$ → $P(x) = -2x, Q(x) = x$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + c\right)\\
&= -\frac{1}{2} + ce^{x^2}
\end{aligned}
$$