Fourier Transform Derivation

Stone

2015 年 11 月 9 日

1　傅里叶变换三角函数形式到复数形式的推导

傅里叶变换三角函数形式原始公式为：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}[a_n * cos(\frac{2\pi xt}{T}) + b_n * sin(\frac{2\pi xt}{T})]$$

记:$\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}[a_n * cos(\omega xt) + b_n * sin(\omega xt)] \qquad ①$$

对①式两边进行积分得：

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \qquad ②$$

对①式两边同乘 $cos(\omega xt)$ 后积分得：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(\omega xt)dt \qquad ③$$

同理，再对①式两边同乘 $sin(\omega xt)$ 后积分得：

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin(\omega xt)dt \qquad ④$$

由③及④两式形式可以得出：

a_n **为偶函数，**b_n **为奇函数。**　　⑤

由欧拉公式 $e^{j\theta} = cos\theta + j * sin\theta$ 及 $e^{-j\theta} = cos\theta - j * sin\theta$ 知:

$$\begin{cases} cos(\omega xt) = \frac{1}{2}(e^{j\omega xt} + e^{j\omega xt}) \\ sin(\omega xt) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega xt} - e^{-j\omega xt}) \end{cases} \qquad ⑥$$

将⑥式代入①式中，变形为：

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}[\frac{a_n}{2}(e^{j\omega xt} + e^{-j\omega xt}) + \frac{b_n}{2j}(e^{j\omega xt} + e^{-j\omega xt})] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}[\frac{a_n - jb_n}{2}e^{j\omega xt} + \frac{a_n + jb_n}{2}e^{-j\omega xt}] \end{aligned}$$

令 $F(\omega x) = \frac{a_n - jb_n}{2}, \qquad F(0) = \frac{a_0}{2}$

由⑤式可知 $F(-\omega x) = \frac{a_n - jb_n}{2}$

则

$$f(t) = \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} F(\omega x)e^{j\omega xt} \qquad ⑦$$

另结合③式和④式有：

$$\begin{aligned} F(\omega x) &= \frac{a_n - jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} * \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)cos(\omega xt) - jf(t)sin(\omega xt)]dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[cos(\omega xt) - jsin(\omega xt)]dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega xt}dt \qquad ⑧ \end{aligned}$$

将⑧式两边同时乘 T 有：

$$TF(\omega x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\omega xt}dt$$

又由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 可知

当 $t \to +\infty$ 时，$\omega = \frac{2\pi}{T} \to 0$,

那么有：

$$\frac{2\pi}{\omega}F(\omega x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

令 $F(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{2\pi}{\omega}F(\omega x)$ ⑨

则 $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega x)}{\omega}e^{j\omega xt}\omega$ ⑩

取 $\theta \to d\omega$ ⑪

结合⑦ ⑨ ⑩ ⑪四式，得：

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\theta)}{2\pi}e^{j\theta t}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)e^{j\theta t}d\theta \qquad ⑫ \end{aligned}$$

取 $u = \frac{\theta}{2\pi}$, 则⑫式可转化为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ut}du \qquad ⑬$$

⑬式即为傅里叶变换的复数形式，推导完成。