矩阵消元

消元法

方程组：$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 4y+z=2 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

消元法在计算机中也有应用。并非所有的方程组都可用消元法求解。本节讨论的主要内容是如何用矩阵的语言来描述消元法。

矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$

主元1

矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$可以应用消元法。

第一行不变，因其是主元行r_2-3r_1

主元2

$$A\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

主元3

☆：主元不能为零。

行列式的值=主元之积。

消元法失效的情形

如果将矩阵A中的A_{22}改为 6，即

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

由于消元后第 3 行第 2 列元素仍存在非零元素，因此矩阵B仍适用于消元法求解，但当$B_{32}=0$时。

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$，此时C就无法用消元法求解了。

回代（back substitution）

将右侧向量b带入矩阵A中，得到一个新矩阵，称为增广矩阵。

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 8 & 1 & 12\\ 0 & 4 & 1 & 2\end{array}\right]$$

增广矩阵（the augment matrix）

此时，将新组成的增光矩阵应用同样的步骤进行消元处理。

$$[A \,\vdots\, b]\xrightarrow{r_2-3r_1}[\quad]\xrightarrow{r_3-2r_2}[\quad]$$

得到结果

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 5 & -10\end{array}\right]$$

将矩阵还原成方程组

$$\begin{cases}x+2y+z=2\\ 2y-2z=6\\ 5z=-10\end{cases}\xrightarrow{回代}\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=2\end{cases}$$

回代是反向求解方程组的关键步骤。

如何用矩阵的形式来描述上述消元步骤?

消元矩阵的概念

矩阵的核心概念之一是利用行和列进行矩阵操作。

$$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}}\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} & & \\ & 3\times 3\text{矩阵} & \\ & & \end{bmatrix}} = \begin{matrix}1\times\text{行}1\\+\\2\times\text{行}2\\+\\7\times\text{行}3\end{matrix}$$

此时所得结果是各行的线性组合。

回到矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}$

r_2-3r_1这样的操作需要什么样的矩阵去完成?

$$\underset{\boldsymbol{E_{21}}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}}\underset{\boldsymbol{A}}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\3 & 8 & 1\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}}=\underset{B}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 4 & 1\end{bmatrix}}$$

此时矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$记作初等矩阵，用字母$E$表示。

E_{21}表示矩阵的第 2 行第 1 列上做变换，达到使其变为零的目的。

单位矩阵的定义

对于特殊矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，其他矩阵乘上这一矩阵不会有任何改变。这种特殊矩阵我们称为**单位矩阵**。

（Identity Matrix）这类矩阵就像数字 1 一样。

回到$E_{21}A=B$中，如果想求矩阵中的B_{23}元素（第二行第三列），应如何求解？用E的第 2 行点乘B的第三列即可。

$$\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=-2$$

用同样的方法可以描述消元法的第二步。

$$\begin{matrix} E_{32} & A & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$r_3 - 2r_2$

矩阵u是指上三角矩阵$(Upper\ Triangular)$。

关于矩阵乘法的一些重要性质

$\boldsymbol{E_{31}(E_{21}A) = U}$

假设我们想从矩阵A求得矩阵U，是否存在矩阵可以一次性解决上述问题？

只需移动式$E_{32}(E_{21}A) = U$中的括号即可$(E_{32}E_{21})A = U$。

对于矩阵的乘法：我们无法改变乘法式中每个矩阵的位置顺序，但我们可以改变乘法计算的先后顺序，即乘法的结合律（associative law）。

置换矩阵（Permutation Matrix）的概念

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \\ P_1 & A & B \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \\ A & P_2 & C \end{matrix}$$

如果要对矩阵A进行列变换，需要将置换矩阵放在矩阵A的右侧。

逆矩阵的简单介绍

逆（inverse）

已知矩阵$A \to U$的变化过程，如何描述矩阵$U \longrightarrow A$的变化

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$E_{21}^{-1} \qquad\qquad E_{21} \qquad\qquad I$$

矩阵E_{21}表示$r_2 - 3r_1$，而其逆矩阵E_{21}^{-1}代表的运算则是$r_2 + 3r_1$，E_{21}的逆矩阵记作E_{21}^{-1}。