方程组的几何解释（1）

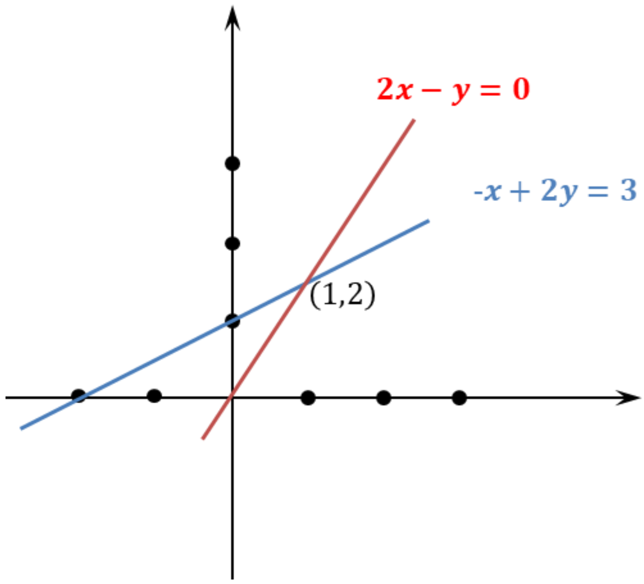
首先讨论最简单的情形：方程组的个数 m 与未知量 n 的个数相同：m=n。

行图像（Row Picture）

列图像（Column Picture）

矩阵形式（Matrix Form）

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \underset{=}{=} \underset{b}{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

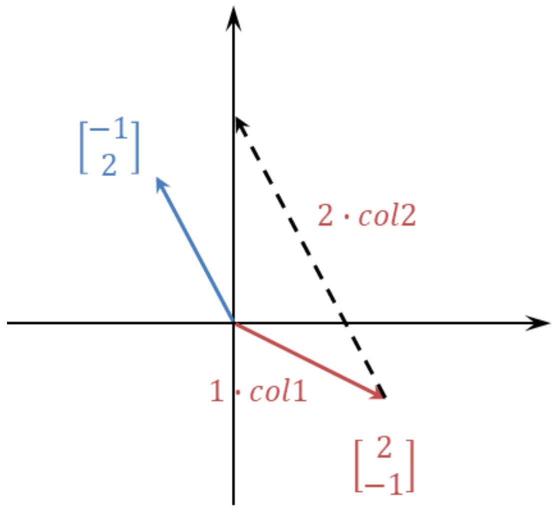


Row Picture

Column Picture

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

列图像可以看作两个列向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$的线性组合。这一定义将贯穿线性代数学习的始终。



$$1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

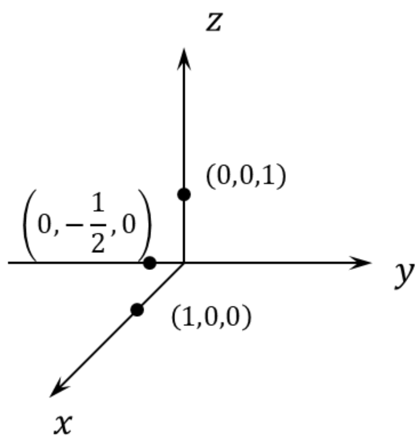
通过向量$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$的组合，得到向量$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$。事实上，两个向量所有的线性组合可以组成整个平面。(这两个向量是指$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$)

考虑 3×3 的情况:

$$\begin{cases}2x-y=0\\-x+2y-z=-1\\-3y+4z=4\end{cases}$$

此时矩阵 A 为: $\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-3&4\end{bmatrix}$

$b=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$



Row Picture

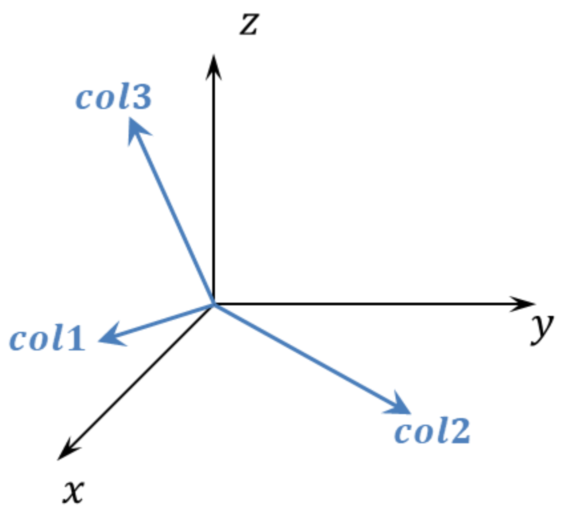
方程$-x+2y-z=-1$的行图景。

以方程组中的方程$-x+2y-z=-1$为例，其行图景应该为经过点$(1,0,0)$、$(0,-\frac{1}{2},0)$、$(0,0,1)$三点的平面。

用同样的方法做出另外两个方程的平面。这三个点的平面相交的点即为方程组的解。

下面讨论方程组的列图像。

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$$



如何通过上图中的三个列向量的线性组合得到右侧的向量b，本题为方便求解，选取了特殊情况，即b与第三个列向量相同。

此时方程组的解为$x=0;y=0;\mathrm{z}=1$

接着考虑大图景（big picture），此时考虑左侧矩阵不变，考虑不同的右侧向量。

$$\boldsymbol{x}\begin{bmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\boldsymbol{y}\begin{bmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{-3}\end{bmatrix}+\boldsymbol{z}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-3}\end{bmatrix}$$

对于$b=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$此时的解为 $x=1;y=1;\mathrm{z}=0$。

即将$col1$和$col2$相加可得结果。

问题：对于任意向量c，是否都能求解$Ax=b$？（列的线性组合是否可以覆盖整个线性空间？）

对于$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 4\end{bmatrix}$，答案是可以。

可能存在特殊情况，即左侧的三个列向量无法通过有效的组合得到右侧向量b。

比如矩阵A的三个列向量恰好处于同一平面，此时成为奇异矩阵。奇异矩阵不可逆。

矩阵A与向量x的乘法

$Ax=b$

$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

方法一：　$Ax=1\cdot\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 7\end{bmatrix}$

方法二：用A的每一行点乘向量x，结果即为b中对应行的值。

对于方法一，可以换作另外一种表达方式，Ax可以看作是A中各列的线性组合。