矩阵的乘法和逆

矩阵的乘法

$$\begin{bmatrix} & & & \\ \cdots & \cdots & row3 & \cdots \\ & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \vdots \\ & & col4 \\ & & \vdots \\ & & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & C_{34} \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A \qquad\qquad B \qquad\qquad C$$

已知矩阵的乘法等式$AB = C$，矩阵C中的元素C_{34}等于矩阵A的第三行r_3与矩阵B的第四列$col4$的内积。

$C_{34} = (row3\ of\ A)(col4\ of\ B)$

引入一些矩阵标记，例a_{31}代表矩阵A的第三行第一列元素。

此时，$C_{34} = a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + \cdots = \sum_{k=1}^{n} a_{3k}r_{k4}$

当A和B属于长方形矩阵时，若要矩阵乘法AB有意义，A的列数必须与B的行数相同。即A中有n列时，B中必须有n行。

例如，矩阵A为$m \times n$，B为$n \times p$，$C = AB$，矩阵C的大小为$m \times p$。

矩阵乘法有几种其他计算方法

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots & & \\ col1 & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ col1 & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \qquad\qquad B_{n\times p} \qquad\qquad C_{m\times p}$$

考虑用矩阵A乘以B整列的情况。

用矩阵A乘以矩阵B中的第i列可以得到矩阵C中对应的第i列。

（个人认为，可将矩阵C中的第i列看作是矩阵A中的各列按照矩阵B中第i列的对应值进行线性组合的结果。）

第三种方法是以行为标准进行计算。

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & row_i & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & row_i & \cdots \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n} \qquad B_{n\times p} \qquad C_{m\times p}$$

用矩阵A的第i行乘以矩阵B中的各行，可以得到矩阵C中对应的第i行。

矩阵C中的第i行可看作是矩阵B中的每一行按照矩阵A中第i行的对应值进行线性组合的结果。

第四种方法

$$\begin{bmatrix} \vdots & & \\ col\ 1 & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & row\ 1 & \cdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$A \qquad B \qquad C$$

$$\boldsymbol{\underset{m\times 1}{column\ of\ A} \times \underset{1\times p}{row\ of\ B} = \underset{m\times p}{matrix}}$$

例：$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$

用矩阵A中的第i列乘以矩阵B中的第i行可以得到与矩阵C相同大小的矩阵。

$$\boldsymbol{AB = sum\ of\ (cols\ of\ A)\times(rows\ of\ B)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}}^{col\ 1\ \times row\ 1}+\overbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}^{col\ 2\ \times row\ 2}=\overset{M}{\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}}$$

矩阵M特殊性在于此矩阵的所有行都依赖于同一行（即矩阵中的三个行所指代的向量都互相平行），矩阵中的所有列都依赖于同一列。

此外，我们还可以将矩阵切割成块，对块进行乘法。

分块矩阵（block）

分块的大小不重要，只要相互匹配即可。

$$\underset{A}{\left[\begin{array}{c:c} A_1 & A_2 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right]}\underset{B}{\left[\begin{array}{c:c} B_1 & B_2 \\ \hdashline B_3 & B_4 \end{array}\right]}=\left[\begin{array}{c:c} A_1B_1+A_2B_3 & \cdots \\ \hdashline \cdots & \cdots \end{array}\right]$$

矩阵乘法的几种计算方法：

① 常规方法：$C_{ij}=(\boldsymbol{row\ i\ of\ A})\times(\boldsymbol{col\ j\ of\ B})$

$$A的行\times B的列= C的某一元素$$

② 列方法：$(\boldsymbol{col\ i\ of\ C})=A\times(\boldsymbol{col\ i\ of\ B})$

$$C的某列=A\times B的对应列$$

③ 行方法：$(\boldsymbol{row\ i\ of\ C})=(\boldsymbol{row\ i\ of\ A})\times B$

$$C的某行=A的对应行\times B$$

④ $C=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{col\ i\ of\ A})\times(\boldsymbol{row\ i\ of\ B})$

$C=\sum_{i=1}^{n}\left(A的列\times B的对应行\right)$

⑤ 矩阵的分块

矩阵的逆（方阵）

如果矩阵A可逆，则$AA^{-1}=I=A^{-1}A$

对于可逆方阵而言，左逆是等于右逆的。

可逆——invertible, nonsingular

矩阵不可逆的情况：奇异矩阵（Singular matrix）

No inverse

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

此时的A乘以任何矩阵都无法得到单位矩阵，A中各列所有的线性组合只能是列$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$的倍数，无法得到单位矩阵中$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$向量。

（如果存在非零向量x，使$Ax=0$，则矩阵A不可逆。）

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}}\underset{x}{\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}}\underset{=}{=}\underset{0}{\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}}$$

因此，矩阵A不可逆。

在何种情况下矩阵可逆?

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}}\underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

a，b应满足$a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow a=7;b=-2$

c，d应满足$c\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow c=-3;d=1$

$A\times column\ j\ of\ A^{-1}\ =\ column\ j\ of\ I$

Gauss-Jordan (Solve two equations at once)

高斯-若尔当法可以同时解决两个含未知量的等式。

$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

将上侧两式合并在一起，写成下方的形式。

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & 0 & 1\end{array}\right]$$

通过消元法，将左侧的矩阵变为单位矩阵，右侧矩阵跟随变化，右侧矩阵最终会变为$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}$的逆矩阵。

此即高斯-若尔当法。

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & 1 & 0\\3 & 7 & 0 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & -2 & 1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 7 & -3\\0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$A\quad I\qquad\qquad\qquad\qquad I\quad A^{-1}$$

上述过程即为高斯-若尔当方法，从一个增广矩阵$[A\ \ \vdots\ \ I]$的消元过程中，相当于其左侧乘上了一系列的消元矩阵E_1；E_2，假定$E=E_1E_2$，则$E[A\ \ \vdots\ \ I]=[I\ \ \vdots\ \ E]$。

通过$EA=I$，可知，矩阵E即为A的逆矩阵A^{-1}。