Варіант 3.

1. ξ_1 та ξ_2 – незалежні випадкові величини, $\xi_i \sim \Pi(\lambda)$. Довести

$$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = C_n^k \frac{1}{2^n}$$

2. Випадкова величина зосереджена на відрізку [0,10] і її щільність на ньому дорівнює cx^3. Знайти сталу c, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію.

3. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) дорівнює $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$, $x>0$, $y>0$ та 0 в інших випадках. Знайти щільності кожної випадкової величини. Довести, що вони залежні.

4. Нехай ξ_1, ξ_2,…ξ_n – вибірка з щільністю $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}$, якщо x>0. Чи буде $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ незсунутою та консистентною оцінкою параметра θ?

5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2 x}}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \text{якщо } x>0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Чи є $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$ ефективною та незсунутою оцінкою параметра μ?

6. За значеннями генератора випадкових гауссівських величин перевірити з рівнем значущості 0,05 гіпотезу про одиничну дисперсію.

Значення: 4.4, 4.7, 5.5, 5.2, 5.4, 3.8, 3.9, 3.9, 4.6, 3.7, 3.9, 4.4, 4.4, 3.8, 5.1, 4.7, 5.2.

Модульна контрольна робота №2

з теорії ймовірностей

студента ІПС-21

Дубини Андрія

Вар. 3

(6) 4,4 4,7 5,5 5,2 5,4 3,8 3,9 3,9 4,6 3,7

3,9 4,4 4,4 3,8 5,1 4,7 5,2

$H_0 = \sigma^2 = 1$

$\hat{S}^2 \approx 0,373$

$H_1 = \sigma^2 \neq 1$

$\sigma^2 = 1$

$$\chi_1^2 = \frac{(n-1)\cdot \hat{S}^2}{\sigma^2} = 16 \cdot 0,373 = 5,968$$

~~При рівні значущості крит. значення χ^2 =~~

При рівні значущості 0,05 і ступені свобод 16 $\chi^2 = 28,845$

$28,845 > 5,968$.

Наше значення χ^2 < критичного, тому ми приймаємо гіпотезу.

(1) ξ_1, ξ_2 – незал. в.в., $\xi_i \sim \Pi(\lambda)$

Довести

$$P\{(\xi_1 = k) \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = C_n^k \frac{1}{2^n}$$

$$P(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{P((\xi_1 = k) \cap (\xi_1 + \xi_2 = n))}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} =$$

$$= \frac{P((\xi_1 = k) \cap (\xi_2 = n-k))}{\sum_{k=0}^{n} P(\xi_1 = k) \cdot P(\xi_2 = n-k)} = \frac{\lambda^n e^{-2\lambda}}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{e^{-2\lambda} \cdot \lambda^n \cdot 2^n} = C_n^k \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$P(\xi_1 = k \wedge \xi_2 = n-k) = P(\xi_1 = k)\, P(\xi_2 = n-k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{k!\,(n-k)!} \cdot e^{-2\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{n} P(\xi_1 = k) \cdot P(\xi_2 = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \cdot e^{-\lambda} \right) =$$

$$= e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^n}{k!\,(n-k)!} = e^{-2\lambda} \cdot \lambda^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k \cdot (n-k)!} =$$

$$= e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot 2^n$$

(2) $f_\xi(x) = cx^3, \; x \in [0, 10]$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(u)\,du + \int_{0}^{x} cu^3\,du =$$

$$= 0 + C_1 \cdot \frac{x^4}{4} + C_2$$

$$\begin{cases} F_\xi(-\infty) = F_\xi(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 & C_2 = 0 \\ F_\xi(+\infty) = F_\xi(10) = C_1 \cdot \frac{10000}{4} + C_2 = 1 & C_1 = \frac{4}{10000} \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^4}{10^4}, & x \in [0, 10] \\ 1, & x > 10 \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{10} \frac{4}{10^4} x^4\,dx = \frac{4}{10^4} \cdot \left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{10} = \frac{4}{10^4} \cdot \frac{10^5}{5} -$$

$$- \frac{4}{10^4} \cdot 0 = \frac{4}{10^4} \cdot \frac{10^5}{5} - 0 = \frac{4 \cdot 10}{5} = 8.$$

$$M\xi^2 = \int_0^{10} \frac{4}{10^4} x^5 dx = \frac{4}{10^4} \cdot \left(\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^{10} = \frac{4 \cdot 10^6}{10^4 \cdot 6} - \frac{4}{10^4} \cdot 0 =$$

$$= \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3} = 66,6$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 66,6 - 64 = 2,6$$

№3. ?

пропустив ці заняття, не готувався

№4. ?

№5 $$f(x,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma_0^2 x} \cdot \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i$$

$$L(x,\mu) = \prod_{k=1}^{n} f(\xi_k, \mu) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k} \cdot e^{-\frac{(\ln \xi_k - \mu)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\ln L = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k} e^{-\frac{(\ln \xi_k - \mu)^2}{2\sigma_0^2}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right) - \ln(\xi_k) - \frac{(\ln \xi_k - \mu)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$U = \frac{\partial}{\partial\mu} \ln L = \sum_{k=1}^{n}\left(0 - 0 + \frac{1}{2\sigma_0^2} \cdot 2(\ln \xi_k - \mu)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln \xi_k - \mu}{\sigma_0^2} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \ln \xi_k - n\mu\right) = \frac{1}{\sigma_0^2}(n \cdot \hat{\Theta} - n\mu) = \frac{n}{\sigma_0^2}(\hat{\Theta} - \mu).$$

Оцінка є ефективною