МКР №1
з дисципліни „Управління динамічними системами"
студента 2 курсу групи ІПС-21
Дубини Андрія

№1 $y' = \frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x} \Big| \cdot dx$

$dy = \frac{(y+\sqrt{x^2-y^2})dx}{x}$

$y = tx \qquad dy = tdx + xdt$

$t = \frac{y}{x}$

$tdx + xdt = \frac{tx+\sqrt{x^2-(tx)^2}}{x}dx$

$tdx + xdt = \frac{t\cancel{x} + \cancel{x}\sqrt{1-t^2}}{\cancel{x}}dx$

$tdx + xdt = tdx + \sqrt{1-t^2}\,dx$

$\cancel{tdx} + xdt - tdx = \sqrt{1-t^2}\,dx$

$\frac{xdt}{x\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}\,dx}{x\sqrt{1-t^2}}$

$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\ln|x| + C_1 = \arcsin t + C_2$

$\ln|x| + C_1 = \arcsin\frac{y}{x} + C_2$

$\underline{y = x \cdot \sin(\ln|x| + C_2)}$

$M(1,0)$

$0 = 1 \cdot \sin(\ln 1 + C_1)$

$\sin(\ln_1 + C) = 0$

$\downarrow$

0

$\ln 1 + C = 0 \Rightarrow \underline{C = 0, \pi, 2\pi \dots \pi n}$

N2 $3\cdot\frac{dy}{dx} - y\sin x + 3y^4 \sin x = 0 \quad | \cdot dx$

$3dy - y\sin x\, dx + 3y^4 \sin x\, dx +$

$3dy = dx\,(y\sin x - 3y^4 \sin x)$

$3dy = \sin x\, dx\,(y - 3y^4) \quad | : 3(y-3y^4) \quad y \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y-3y^4} = \int \frac{\sin x\, dx\,(y-3y^4)}{3(y-3y^4)} \quad =$$

$\to -\frac{\cos x}{3}$

$$\int \frac{dy}{y-3y^4} = -\int \frac{dy}{3y^4-y} = \left| \begin{array}{l} t = 3y^3-1 \\ y^2 dy = \frac{1}{9} dt \end{array} \right| =$$

$y(3y^3-1)$

$$= -\int \frac{1}{3t^2+3t}\, dt = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t(t+1)}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln|x+1| - \ln|x|\right) = -\frac{1}{3}\left(\ln 3y^2|y| - \ln|3y^3-1|\right) + C$$

$$= \ln y - \frac{\ln(3y^3-1)}{3} = -\frac{\cos x}{3} + C$$

$M(0,1)$

$$\ln 1 - \frac{\ln(3-1)}{3} = -\frac{\cos 0}{3} + C$$

$$-\frac{\ln 2}{3} = -\frac{1}{3} + C$$

$$C = -\frac{\ln 2 + 1}{3}$$

№3. $xy' - y = \ln y'$

$y = 2xy' - \ln y'$

$y' = t \qquad y = 2xt - \ln t$

$dy = t\,dx \qquad dy = 2t\,dx + 2x\,dt - \frac{dt}{t}$

$t\,dx = 2t\,dx + 2x\,dt - \frac{dt}{t}$

$t\,dx + 2x\,dt = \frac{dt}{t} \; |:dt$

$t\frac{dx}{dt} + 2x = \frac{1}{t} \; |:t$

$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = \frac{1}{t^2}$

$x = e^{-\int \frac{2}{t}dt} \cdot \left(\int \frac{1}{t^2} \cdot e^{\int \frac{2}{t}dt} dt + C\right) =$

$= e^{-2\ln t}\left(\int \frac{1}{t^2} \cdot e^{2\ln t} dt + C\right) =$

$= t^{-2}\left(\int \frac{1}{\cancel{t^2}} \cdot \cancel{t^2}\, dt + C\right) = \frac{1}{t^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{t} = \frac{1}{t} + C$

$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + C \\ y = 2xt - \ln t \end{cases}$

№4 $y'' + y = 2\sec^3 x$

$y'' + y = 2 \cdot \frac{1}{\cos^3 x}$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$y_{зо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_{чн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$

$y'_{чн} = C_1' \cos x - C_1 \sin x + C_2' \sin x + C_2 \cos x$; $C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$

$y''_{чн} = -C_1' \sin x - C_1 \cos x + C_2' \cos x - C_2 \sin x$

$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{2}{\cos^2 x}$

$$W_1 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = \underline{1}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{2}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{2}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{2\cos x}{\cos^3 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$C_1 = \int \frac{W_2}{W_1}\,dx = \int -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2}{t^3}\,dt = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2t^2}\right) + C = -\frac{1}{\cos^2 x} + C$$

$$C_2 = \int \frac{W_3}{W_1} = \int \frac{2}{\cos^2 x}\,dx = 2\,\mathrm{tg}\,x + C$$

$$y_{зно} = \left(-\frac{1}{\cos^2 x} + C\right) \cdot \cos x + (2\,\mathrm{tg}\,x + C)\sin x$$

№5 $\begin{cases} \dot{x}^{*} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y}^{*} = 2x - y \end{cases}$ $\quad$ $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = 2x - y$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 2 = -(1-\lambda^2) + 2 \cancel{\;} = 0$

$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

$\lambda_1 = i \quad \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$

$x = c$

$y = (1-i)c$

$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$x = e^{it}$

$x_1 = \cos t \qquad x_2 = \sin t$

$y = (1-i)e^{it}$

$y_1 = \cos t - (-1)\sin t = \cos t + \sin t$

$y_2 = \sin t - \cos t$

?

МКР 1

1. Знайти загальний розв'язок рівняння, та розв"язок задачі Коші ***y(1)=0***

$$\dot{y} = \frac{(y + \sqrt{x^2 - y^2})}{x}$$

2. Розв'язати задачу Коші ***M(0,1)*** для диференціального рівняння

$$3\frac{dy}{dx} - y\sin x + 3y^4 \sin x = 0$$

3. Зінтегрувати рівняння

$$2x\dot{y} - y = \ln\dot{y}$$

4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\ddot{y} + y = 2\sec^3 x$$

5. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$