Модуль №2 „Інтеграл Рімана"

1) Означення інтеграла Рімана.

Якому інтегралу еквівалентна наступна границя:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{9(i-1)}{n}} \frac{9}{n} \ ?$$

Інтеграл Рімана - число $I = \lim_{\lambda\to 0} \sigma(\tau, \xi) = \int_a^b f(x)dx$

при $\sigma(\tau, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, де

$x_i, x_{i-1} \dots$ — точки якогось розбиття функції $f(x)$,

а $\lambda = \max \Delta x_i$

2) Теорема про зв'язок інтеграла Н'ютона - Лейбніца та суми Рімана (з доведенням)

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$ за Н'ютона - Лейбніца, то існує сума Рімана на цьому проміжку та виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Дов.

$(F)' = f$ на $[a, b]$

$$\forall k: F(x_{k+1}) - F(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

3) Довести наступну властивість інт. за Ріманом функції:

Якщо $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$, то $\forall \alpha, \beta\ (\alpha f + \beta g) \in R[a,b]$

і $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Це властивість лінійності.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x + \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i=0}^{n} (g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

4) Чи інтегрована за Ріманом функція

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \text{ - раціональні} \\ 0, & x \in R \setminus Q \text{ - дійсні} \end{cases}$$

Функція $D(x)$ є інтегровною за Ріманом, адже для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tau = \{x_i\}_{i=0}$, що містить лише раціональні або лише ірраціональні числа і $|M_i - m_i| < \varepsilon$.

5) Теорема про диференційовність ІФВМ

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ при $f \in R[a,b]$

$\Phi(x)$ диференційована в кожній точці $x \in [a,b]$, якщо:

1) в цих точках $f(x)$ ~~диференційована~~ неперервна

2) в цих точках $\Phi'(x) = f(x)$

7. Площа плоскої фігури в декартових, полярних та параметрично заданих координатах

1. Декартових

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$$

2. Полярних

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$$