Екзаменаційна робота
з математичного аналізу
студента ІПС-11
Дубини Андрія Володимировича
варіант 2

1) Дослідити ф-цю $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на диференційовність
на $\mathcal{D}f$, якщо

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$f_x'(x,y) = \left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)' = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{4x^5+4x^3y^2-2x^5-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y'(x,y) = \left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)' = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^5+4x^2y^3-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x_0^4+y_0^4}{x_0^2+y_0^2}}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot 0 = 0$. Отже $f'_x = (0,0)$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$

$P(0,0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

В т. $P(0,0)$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \le \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^4+y^4}{x^2-2xy+y^2} = \cancel{\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4+y^4}{(x-y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4+y^4}{(x-y)^2}$$

$$\left| \begin{matrix} y = kx \\ x \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + k^4x^4}{|x - kx|} = \lim_{x \to 0} x^3 \frac{k^4+1}{|1-k|} = 0$$

Частинні похідні існують (в т. ч. в $P(0,0)$)

і в $(0,0)$ $\lim = 0$. Тому функція диференційована на D_f.

② Розкласти ф-ю $h(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ у степеневий ряд в околі $x_0 = 0$

Формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

В точці $x_0 = 0$ це буде ряд Маклорена як окремий випадок. ф. Тейлора

Значення ф-ї та її похідних в $x_0 = 0$.

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$, $f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$, $f''(0) = -\frac{1}{2}$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{6})$, $f^{(3)}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f^{(4)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$, $f^{(4)}(0) = \frac{1}{2}$

$f^{(5)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$, $f^{(5)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Підставивши ці значення в формулу маємо

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2!\,2} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4\sqrt{3}} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{80\sqrt{3}} + O(x^6)$$

---

③ Інтеграл Рімана $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$

Використ інтегрування частинами

$$\int f g' = fg - \int f' g \ominus$$

$f = x \qquad g' = e^{-x}$

$f' = 1 \qquad g = -e^{-x}$

$$\ominus -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = -x \\ du = -dx \end{matrix} \right| = -\frac{\ln 2}{2} - \int_0^{-\ln 2} e^{u}\,du =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \int_{-\ln 2}^{0} e^{u}\,du = -\frac{\ln 2}{2} + \left(e^{u}\Big|_{-\ln 2}^{0} = \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

4) Знайти перші та другі диференціали, всі част. похідні по області визначення ф-ї

$F(x,y) = 3^x \cdot sh(5y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3^x sh(5y)) = (3^x)' sh(5y) = 3^x \ln 3 \cdot x' \cdot sh(5y) =$$

$= 3^x \ln 3 \, sh(5y) \Rightarrow$ частинна похідна по x

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3^x \cdot sh(5y)' = 3^x \cdot ch(5y) \cdot 5y' = 5 \cdot 3^x \cdot ch(5y)$$

$\Downarrow$

частинна похідна по y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \ln 3 \cdot (3^x)' sh(5y) = 3^x \ln 3 \cdot x' \ln 3 \, sh(5y) =$$

$$= 3^x \ln^2 3 \cdot 1 \cdot sh(5y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3^x \ln 3 \cdot (sh(5y))' = 3^x \ln 3 \, ch(5y) \cdot (5y)' =$$

$$= 5 \cdot 3^x \ln 3 \cdot ch(5y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 5 \cdot 3^x (ch(5y))' = 5 \cdot 3^x \cdot sh(5y) \cdot (5y)' = 25 \cdot 3^x \cdot sh(5y)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (3^x \ln 3 \, sh(5y))dx +$$

$$+ (3^x \cdot 5ch(5y))dy$$

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial}{\partial x}(df)dx + \frac{\partial}{\partial y}(df)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy}.$$

Підставимо в цю формулу наші значення частинних похідних

$d^2 f = (3^x \ln^2 3 \cdot sh(5y))dx^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3^x \ln 3 \cdot ch(5y)\,dx\,dy +$

$+ 25 \cdot 3^x \cdot sh(5y) \cdot dy^2 =$

$= 3^x(\ln^2 3 \cdot sh(5y)\,dx^2 + 10 \ln 3 \cdot ch(5y)\,dx\,dy + 25 \cdot sh(5y)\,dy^2)$

6. При яких α збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - n \cdot \sin(\tfrac{1}{n}))^{\alpha}$$

Ряд збіжний при $n \to \infty$, ~~$\lim_{n\to\infty}$ ...~~

~~$(1 - n \sin(\frac{1}{n}))^{\alpha} \to 0$~~

$\lim_{n\to\infty} (1 - n \sin(\frac{1}{n}))^{\alpha} = 0$, тому ~~...~~ при $\alpha \to 0$ ряд

збігається. (???)

остатнє писав на швидку руку