Екзаменаційна робота
з дисципліни "Управління динамічними системами"
студента "КНУ ім. Тараса Шевченка
факультету комп. наук та кібернетики
групи ІПС – 21
Дубков Андрій

білет №20

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Бакалаври
Спеціальність: *Інженерія програмного забезпечення* Семестр: *третій*
Навчальний предмет: Управління динамічними системами

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 20

1. Метод Коші побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння
2. Математична постановка задач оптимального керування.
3. Приклад 1 (Модуль 1 Д.р.)
Розв'язати рівняння

$$(x+y^2)dy = ydx$$

4. Приклад 2 (Модуль 1 Д.р.)
Знайти загальний розв'язок (метод невизначених коефіцієнтів, числові значення коефіцієнтів не знаходити)

$$y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$$

5. Приклад 3 (Модуль 2 ТК)
. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду $u(t) = c^T x(t)$ таке, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) - x_2(t) + 3u(t) \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$.
6. Приклад 4 (Модуль 2 ТК)
Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування з вільними кінцями траєкторії

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt + \frac{x_1^2(1)}{2} \quad \to \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + u_1(t), \\ x_2'(t) = x_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

Заверджено на засіданні кафедри моделювання складних систем,
протокол №5 від 15.11.2023року
Завідувач кафедри, доц. Д.І.Черній
Екзаменатор, доц. А.В. Шатирко

① Метод Коші побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Якщо $y = K(x,s)$ - розв'язок о.д.р. і

$$K(s,s) = K'_x(s,s) = K_x^{(n-2)}(s,s) = 0, \quad K_x^{(n-1)}(s,s) = 1, \quad \text{то}$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$$ є розв'язком неоднорідного рівняння

при $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$

② Математична постановка задачі оптимального керування

При мат. постановці задачі опт. керування розглядаються фазові коорд-ти системи як ф-ї часу $x = x(t)$.

У 0 момент задаються початкові умови $x(t_0) = x_0$ та керування $u(t)$ (ф-я від часу)

Фазові коорд-ти $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ визначаються як розв'язок задачі Коші

$$x'(t) = \underbrace{f(x(t), u(t), t)}_{\text{відома вектор-функція}}, \quad x(t_0) = x_0$$

Розв'язком такої задачі Коші є функція

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + x_0.$$ і позначається $x = x(t, u, x_0)$

$x(t_0, u, x_0)$ - лівий кінець траєкторії

$x(t_1, u, x_0)$ - правий кінець траєкторії

③ $(x+y^2)\,dy = y\,dx$

$(x+y^2)\,dy - y\,dx = 0 \quad \Big|\, : y^2$

$\left(\frac{x}{y^2}+1\right)dy - \frac{dx}{y} = 0 \qquad (y^2=0 \Rightarrow y=0)$

$$\boxed{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$\int dy + \int d\left(-\frac{x}{y}\right) = 0$

$y - \frac{x}{y} + C = 0$

$\frac{x}{y} - y = C \quad ; \quad y=0$

④ $y'' - 2y' + 5y = \underbrace{2xe^x}_{*} + \underbrace{e^x \sin 2x}_{**}$

$y_{\text{оно}} = y_{\text{чр}} + y_{\text{зо}}$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$\Downarrow$

$y_{\text{зо}} = C_1 e^x \sin(2x) + C e^x \cos(2x)$

$y_{\text{чр}}:$

Для $*$

$y_0 = xe^x(B\sin 2x + A\cos 2x)$

$y_0' = (x(B-2A)+B)e^x \sin 2x + (x(2B+A)+A)e^x \cos 2x$

Ст.2.

$$y_0'' = (x(-3B-4A)+2B-4A)e^x \sin 2x + (x(4B-3A)+4B+2A)e^x \cos 2x$$

При підстановці

$$4Be^x\cos(2x) - 4Ae^x\sin(2x) = e^x\sin(2x)$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y_0 = -\frac{xe^x\cos 2x}{4}$$

Для *

$$y_1 = (Ax+B)e^x$$

$$y_1' = (Ax+B+A)e^x$$

$$y_1'' = (Ax+B+2A)e^x$$

При підстановці

$$4Axe^x + 4Be^x = 2xe^x$$

$$\begin{cases} 4A = 2 \\ 4B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{xe^x}{2}$$

$$y_{зно} = C_1e^x\sin 2x + \frac{xe^x}{2} + Ce^x\cos(2x) - \frac{xe^x\cos 2x}{4}$$

5) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) - x_2(t) + 3u(t) \end{cases}$

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -4$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\det[B, AB] = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0$

система керована

$U = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + BU = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(-S^{-1} A^2 B)$

$(\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2$

$\lambda^2 + 4\lambda + 3\lambda + 12 = \lambda^2 + 7\lambda + 12 \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (S^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix} =$

Ст. 4. 10

$$= \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = 63x_1(t) - 23x_2(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 63 & 0 \\ 0 & -23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Відповідь

(6) $$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t))\,dt + \frac{x_1^2(1)}{2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) + u_1(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$ Кінці вільні

~~$H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, t, \psi) = \psi_0 (\ldots$~~

1) $H(x, u, t, \psi, \psi_0) = \psi_0 (u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 \cdot x_1' + \psi_2 \cdot x_2'$

2) Спряжені системи ~~$\dot{\psi} = H x_2' = -\frac{\partial H(x, u, t, \psi_1, \psi_2)}{\partial x_1}$~~

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -H_{x_1} \\ \dot{\psi}_2 = -H'_{x_2} \end{cases} \to \cancel{\dot{\psi}_1} = ?$$