№1 $\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$ — $\vdash A \wedge B \Rightarrow \vdash B \wedge A$

① $\vdash a \wedge b \to a$ (акс. II.1)

② $\vdash a \wedge b \to b$ (акс. II.2)

③ $\vdash (a \wedge b \to a) \wedge (a \wedge b \to b)$ (конъюнкция 1, 2)

④ $\vdash (a \wedge b \to a) \wedge (a \wedge b \to b) \to (a \wedge b \to (a \wedge b \wedge b))$ (акс. III 3)

⑤ $\vdash a \wedge b \to (a \wedge b \wedge b)$ (MP 3, 4)

⑥ $\vdash (a \wedge b \wedge b) \to (b \wedge a)$ (перестановка конъюнкций)

⑦ $\vdash a \wedge b \to b \wedge a$ (транзитивность 5, 6)

⑧ $\vdash A \wedge B \to B \wedge A$ (ПП 7)

⑨ $\vdash A \wedge B$

⑩ $\vdash B \wedge A$ (MP 8, 9)

Доведено.

№2 Якщо $a, b \vdash c$, то $b \vdash a \to c$

① $a \to (b \to a)$ (акс. I.1)

② $b \to a$

③ $\vdash b$

④ $\vdash a$ (MP 3, 2, 3)

⑤ $a \vdash c$

⑥ $\vdash c$ (з 4 і 5)

⑦ $a \to c$

⑧ $b \vdash a \to c$ (з 3, 4, 7)

Доведено

⑦ (доведення)

1) $\vdash a \to (b \to a)$ (акс. I.1)

2) $\vdash (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ (акс. I.2)

3) $a, b \vdash c$

4) $\vdash a \to (b \to c)$

5) $\vdash (a \to b) \to (a \to c)$ (3 і 4)

6) $\vdash b \to (b \to c)$

7) $a \to c$.

№3 $\neg(\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$ звести до СФ.

Зведемо до КНФ

$\neg(\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$

$\neg(\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall y P(y) \to \forall z Q(z))$

Перепишемо імплікацію $A \to B = \neg A \vee B$

$\neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \to (\neg \forall y P(y) \vee \forall z Q(z))$

$\neg(\neg \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg \forall y P(y) \vee \forall z Q(z))$

Винесемо квантори з-під заперечення

$\neg(\exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\exists y \neg P(y) \vee \forall z Q(z))$

$\neg \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg(\exists y \neg P(y) \vee \forall z Q(z))$

$\neg \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg \exists y \neg P(y) \wedge \neg \forall z Q(z))$

$\forall x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z))$

$\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (\forall y P(y) \wedge \exists z \neg Q(z))$

$\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \forall y \exists z (P(y) \wedge \neg Q(z))$

$\forall x \forall y \exists z ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(z)))$

Змінну z замінюємо на $f(x,y)$. Отримаємо СФ:

$\forall x \forall y ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge (P(y) \wedge \neg Q(f(x,y))))$

№5 $S = \{ \neg P(a) \vee P(b),\ \neg P(a) \vee \neg P(b),\ P(a) \}$

1) $\neg P(a) \vee P(b)$

2) $\neg P(a) \vee \neg P(b)$

3) $\neg P(a)$ (з 1 та 2)

4) $P(a)$

5) $\square$ (з 3 та 4)

Відповідь: Задана множина суперечлива $\longrightarrow$ множина не суперечлива

№4 $\exists x \exists y (P(f(x,y),a)$

I: $M = \{0,1\}$, $f(1,1)=1$, $f(2,2)=1$, $f(1,2)=f(2,1)=2$,
$P(1,1)=0$, $P(2,2)=0$, $P(1,2)=1$, $P(2,1)=0$, $a=1$

1) $x=1$, $y=1$
$f(1,1)=1$
$P(f(1,1),1) \cdot P(1,1)=0$

2) $x=1$, $y=2$
$f(1,2)=2$
$P(f(1,2),1)=P(2,1)=0$

3) $x=2$, $y=1$
$f(2,1)=2$
$P(f(2,1),1)=P(2,1)=0$

4) $x=2$, $y=2$
$f(2,2)=1$
$P(f(2,2),1)=P(1,1)=0$

Формула $\exists x \exists y$ в інтерпретації I є хибною.