Модульна к. р.
з математичного аналізу
студента ІПС-11
Дубини Андрія
Варіант 11

1) Обчислити прав. і лів. похідні до функції в т. x_0

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'_п(x_0) = \lim \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ при x_0 – гр. точка

$$f'_л(x_0) = \lim \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$ при x_0 – гр. точка

$$f'_п(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \cancel{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_л(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x^2}{\Delta x} - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = \cancel{0}\ -1$$

② $f(x) = e^{-|x|}$.

Функція $f(x)$ диференційовна на множині $D(f)$, якщо вона має ліву та праву похідну і вони рівні.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$

при $0 = x_0 =$ гранична точка.

$$f'_п(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{-\Delta x}}{\Delta x}$$

$$f'_л(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{e^{-\Delta x}}{\Delta x}.$$

Scanned with CamScanner

$f'_л(x_0) = f'_п(x_0)$. Тому функція диференційована на $D(f)$

③ Обчислити $f^{(31)}(3)$, якщо $f(x) = \ln(x^2-4x+4)$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4x+4)'}{x^2-4x+4} = \frac{2x-4}{x^2-4x+4} = \frac{2\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{x-2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(1+0)}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x-4)^2}$$

~~При~~ $f^{(3)} = -\frac{2\cdot(-2)\cdot(x-2)'}{(x-2)^3} = \frac{4}{(x-2)^3}$

$$f^{(4)} = \frac{4\cdot(-3)\cdot(x-2)'}{(x-2)^4} = -\frac{12}{(x-2)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2\cdot(n-1)!}{(x-2)^n}$$

Тому при $n=31$ $f^{(31)}(x) = \frac{2\cdot 30!}{(x-2)^{31}} = \cancel{2\cdot 30!}$

$x=3$

$$f^{31}(3) = \frac{2\cdot 30!}{1} = \underline{2\cdot 30!}$$

(4) Дослідити $f(x) = x^3 \ln x$ на екстремум

Екстремум функції – найбільше або найменше знач. по заданій області.

$f'(x) = (x^3 \ln x)' = 3x^2 \ln x + x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 3x^2 \ln x + x^2$.

$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = 0$

$x^2 (3\ln x + 1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$

Scanned with CamScanner

$x_1 = 0 \notin D_f$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \in D_f$

При $x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$ $f'(x) < 0$

При $x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; +\infty\right)$ $f'(x) > 0$

Тому є один екстремум – $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$. Це точка мінімуму, бо в ній функція змінює знак з + на –. Так як точки максимуму немає, функція ~~весь~~ зростаюча.