Модульна контрольна робота
з теорії ймовірностей
студента ІПС-21
Дубини Андрія

№2

1) Алгебра – клас множин F.
F називається алгеброю на Ω за наступних умов:

а) $\Omega \in F_0$

б) $A \in F_0 \Rightarrow \overline{A} \in F_0$

в) $A \in F_0,\ B \in F_0 \Rightarrow A \cup B \in F_0$

Сігма-алгебра (σ) є алгеброю, у якої властивість

в) наступна:

$\forall n \geq 1;\ A_n \in F_0 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_0$

Тобто об'єднання всіх подій A_n належить класу F_0

Адитивна ймовірність – ймовірність з наступними умовами:

а) $P(A) \geq 0$

б) $P(\Omega) = 1$

в) $\forall A, B \in F;\ A \cap B = \varnothing,\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Вона є σ-адитивною, якщо умова в) є наступною:

в) $\forall n \geq 1\ A_n \in F;\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \neq j)$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Як показати σ-адитивність при неперервності в 0 не знаю :(

г) Пуассонівський розподіл з пар. λ

$$P(x=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

В цьому розподілі λ - середнє значення подій, а k - шукане значення (наприклад, λ - середня кількість очок баскетболіста, k - кількість очок, ймовірність якої ми шукаємо). λ також є мат. сподіванням та дисперсією.

Виходячи з цієї логіки, можна сказати, що найбільша ймовірність $P(x=k)$ буде при $\underline{\lambda = k}$

3) A не залежить від B_1 і B_2 => $\begin{cases} P(A \cap B_1) = P(A) \cdot P(B_1) \\ P(A \cap B_2) = P(A) \cdot P(B_2) \end{cases}$

$$P(A \cap (B_2 \setminus B_1)) = P((A \cap B_2) \setminus (A \cap B_1)) =$$

$$= (P(A) \cdot P(B_2)) \setminus (P(A) \cdot P(B_1)) = P(A) \cdot P(B_2 \setminus B_1).$$

Так як $P(A \cap (B_1 \setminus B_2)) = P(A) \cdot P(B_2 \setminus B_1)$, то

A і $B_2 \setminus B_1$ - незалежні.

~~[illegible]~~

4) $A = \{$влучив$\}$, $\bar{A} = \{$не влучив$\}$

$H_i = \{$належить до і-ї групи$\}$

$P(H_1) = \frac{5}{18}$, $P(A|H_1) = \frac{8}{10}$, $P(\bar{A}, H_1) = \frac{2}{10}$

$P(H_2) = \frac{7}{18}$, $P(A|H_2) = \frac{7}{10}$, $P(\bar{A}, H_2) = \frac{3}{10}$

$P(H_3) = \frac{4}{18}$, $P(A|H_3) = \frac{6}{10}$, $P(\bar{A}, H_3) = \frac{4}{10}$

$P(H_4) = \frac{2}{18}$, $P(A|H_4) = \frac{5}{10}$, $P(\bar{A}|H_3) = \frac{5}{10}$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{18} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{18} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{18} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{18} =$$

$$= \frac{10 + 21 + 16 + 10}{180} = \frac{\cancel{57}^{19}}{\cancel{180}_{60}} = \frac{19}{60}$$

За формулою Байєса

$$P(H_1|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{18}}{\frac{19}{60}} = \frac{\frac{10}{180}}{\frac{19}{60}} = \frac{10 \cdot 60}{\cancel{180}_3 \cdot 19} = \frac{10}{57}$$

$$P(H_2|\bar{A}) = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{18}}{\frac{19}{60}} = \frac{\cancel{21}^{7} \cdot \cancel{60}^{1}}{\cancel{180}_{\cancel{3}} \cdot 19} = \frac{7}{19} = \boxed{\frac{21}{57}}$$

$$P(H_3|\bar{A}) = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{18}}{\frac{19}{60}} = \frac{16 \cdot 60}{\cancel{180}_3 \cdot 19} = \frac{16}{57}$$

$$P(H_4|\bar{A}) = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{2}{18}}{\frac{19}{60}} = \frac{10 \cdot 60}{\cancel{180}_3 \cdot 19} = \frac{10}{57}$$

Відповідно, стрілець найімовірніше належить до другої групи

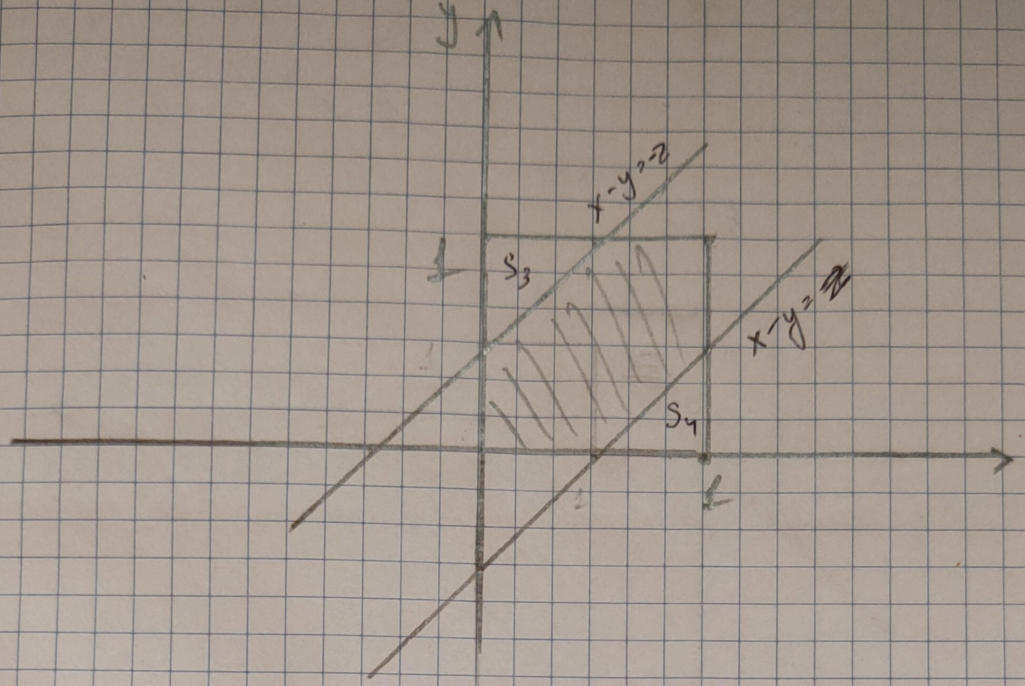
Пояснення

В 4 завданні я написав задачу, яка не є частиною мого варіанту ($P(|x-y|<z)$).

При підготовці до модулю я шукав задачі на геометричну ймовірність, і знайшов список завдань, серед яких були ці. При написанні МКР я помітив схожі задачі, але не помітив, що вони відрізняються і написав лишню задачу.

Таким чином, не прошу додавати за цю задачу бали (адже вона не є частиною мого варіанту), але прошу оцінити старання!
:)

б) Квадрат з вершинами $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$



Точка з координатами (x, y) кидається у квадрат навмання

Знайти:

x а) $P(|x-y|<z)$

$|x-y|<z \longrightarrow$

$x-y<z$ $\qquad$ $x-y>-z$

$0<z\leq 1$ (так як $-1\leq x-y\leq 1$)

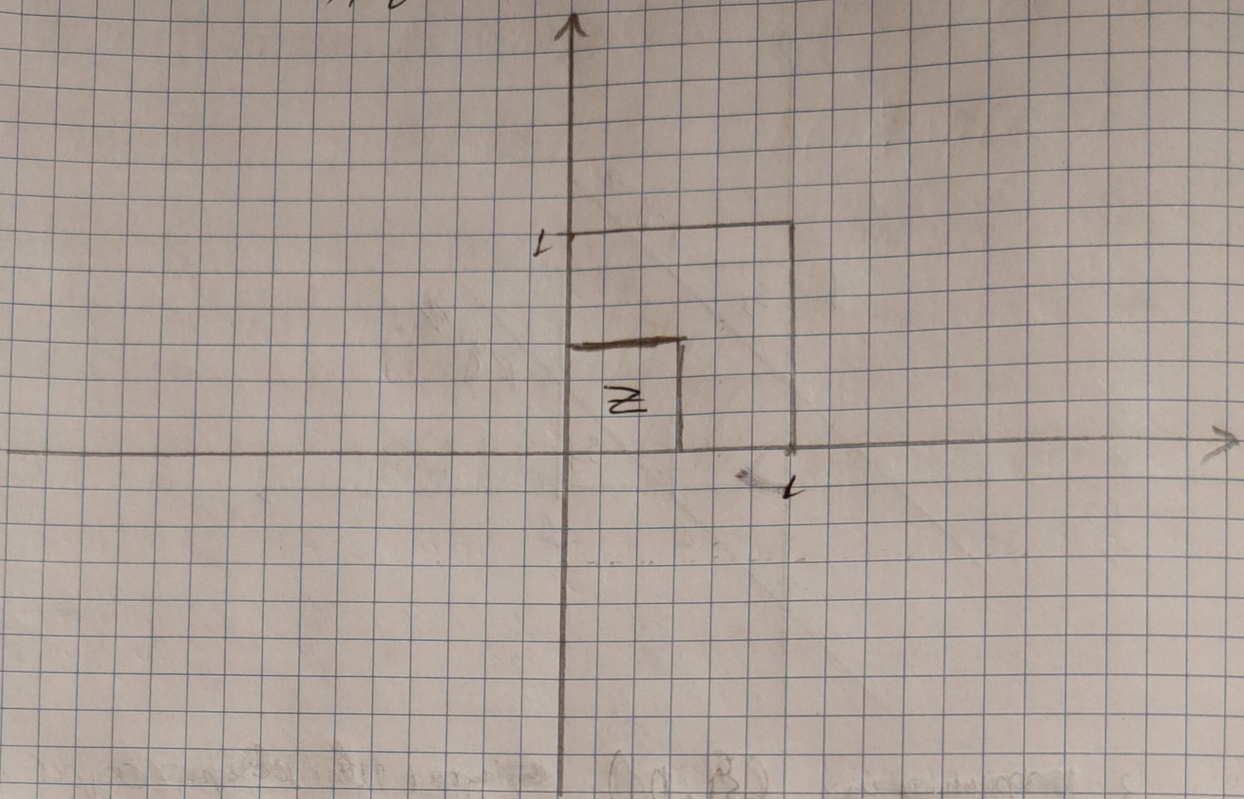
S(трикутника) $=1$, $S_3+S_4=(1-z)^2$ (бо вони формують квадрат стороною $(1-z)$)

$\boxed{S(\text{фігури}) = 1-(S_3+S_4) = 1-(1-z)^2}$

Ймовірність буде, відповідно, $\frac{1-(1-z)^2}{1} = 1-(1-z)^2$

При $z\leq 0$ або $z\geq 1$ $P=0$

86 a) $P(\min(\xi, \eta) < z)$ (для зручності позначу координати x та y)



$P(\min(x,y) < z)$.

При переборі всіх мінімальних значень (наприклад, $\min(0,0)=0$, $\min(1,0)=0$, $\min(1, 0{,}5)=0{,}5$ і т.д.) Вийде множина точок, що і формують нам квадрат. Щоб ввести обмеження z треба всередині квадрату помістити квадрат стороною z, що дотикається до осей Ox та Oy. $0 \le z$.

Тоді ймовірність події і буде ймовірністю цього квадрату.

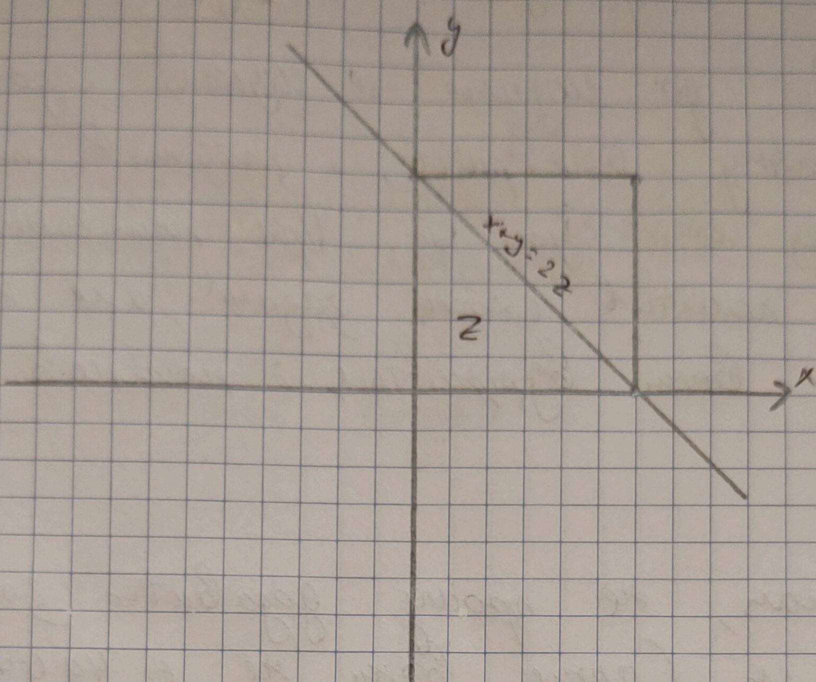
$P(\min(x,y) < z) = S(z) = z^2$. $P = \frac{z^2}{1} = z^2$

При $z \le 0$ $P = 0$

При $z \ge 1$ $P = 1$.

б) $P(\xi+\eta<2z)$ Для зручності позначу координати як x та y

$P(x+y<2z)$



Зобразимо на графіку $x+y=2z$. При збільшенні z вона рухається вгору, при зменшенні - вниз.

$S_{кв}=1.$

~~$S_z = \frac{1}{2}(2z^2)\cdot\frac{1}{2} = z^2$ при $0\le z\le 0{,}5$~~

$$S_z = \begin{cases} 2z^2\cdot\frac{1}{2} = z^2 & \text{при } 0\le z\le 0{,}5 \\ 1-z^2 & \text{при } 0{,}5<z\le 1 \end{cases}$$

При $z\geq 1$ $P=1$ При $0\le z\le 0{,}5$ $P=z^2$

При $z\le 0$ $P=0$ При $0{,}5<z<1$ $P=1-z^2$