Модульна контрольна робота №2
з управління динамічними системами
студента групи ІПС-21
Рубани Андрія

M2 Варіант 1

1. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від значення параметрів *a, p*.

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x, \\ y_1(t) = px(t) + \dot{x}(t), \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t). \end{cases}$$

2. Дослідити систему на спостережуваність в залежності від значення праметра *a*. Зафіксівавши будь-яке конкретне значення параметра, яке підходить, відновити вектор фазових координат

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -n \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = nx_1 + ax_2 + 3x_3.$$

$$n = \begin{cases} 1, & \textit{прізвище студента починається з А – Д;} \\ 2, & \textit{прізвище студента починається з Е – К;} \\ 3, & \textit{прізвище студента починається з Л – П;} \\ 4, & \textit{прізвище студента починається з Р – Ф;} \\ 5, & \textit{прізвище студента починається з Х – Я.} \end{cases}$$

3. Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца дослідити при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий (+ *зобразити графічно*)

$$y^{\mathrm{IV}} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0.$$

4. Знайти всі положення рівноваги та дослідити на стійкість за допомогою першого методу Ляпунова. Вказати тип точок спокою. (Графіки не зображати).

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{y} - e^{x}, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$$

5. Шукаючи керування у вигляді $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, розв'язати задачу аналітичного

конструювання регуляторів для системи $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

6. Записати крайову задачу принципу максимуму (вільні кінці траекторії)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1, \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_2) + 4u_2 \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1) + u_2^{\,4})\,dt + \cos^4(2x_2(1)) \to \min;$$

№1

$$\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ y_1(t) = px(t) + \dot{x}(t) \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x \\ \dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a^2 x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ y_1(t) = px_1 + x_2 \\ y_2(t) = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = [C, A^T C]$$

$$A^T C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & a^2 \\ p & -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} p & -1 & a^2 & a^2 \\ 1 & 1 & p & -1 \end{bmatrix}$$

ранк = 2 => спостережувана при $p \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq -1$

(2) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -n \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y(t) = nx_1 + ax_2 + 3x_3$

$n = 1$

$y(t) = x_1 + ax_2 + 3x_3$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$C^T = (1, a, 3)$ $\quad \tilde{S}_3 = [C, A^T C, A^{T^2} C]$

$$A^T C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+1 \\ 3a-5 \\ -a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^{T^2} C = A^T \cdot A^T C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a+1 \\ 3a-5 \\ -a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42a-17 \\ 2a-19 \\ -8a+6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4a+1 & 42a-17 \\ a & 3a-5 & 2a-19 \\ 3 & -a+2 & -8a+6 \end{bmatrix}$$

$\det \tilde{S}_3 = (3a-5)(-8a+6) + (4a+1)(2a-19)\cdot 3 + (42a-17)\cdot a \cdot (-a+2) -$

$- 3\cdot(3a-5)\cdot(42a-17) - (-a+2)(2a-19)\cdot 1 - (-8a+6)\cdot a \cdot (4a+1) =$

$= -10a^3 - 291a^2 + 556a - 304 \neq 0$

$a \neq -\frac{97}{10}$

Візьмемо $a = 1$

$-10 - 291 + 556 - 304 = -49$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \left(\hat{S}_3\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$y(t) = x_1 + x_2 + 3x_3$

$\dot{y}(t) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 3\dot{x}_3 = (7x_1 - 2x_2 - x_3) + (4x_1 + 3x_2 - x_3) +$

$+ 3(-2x_1 - x_2 + x_3) = 7x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 =$

$= 5x_1 - 2x_2 + x_3$

$\ddot{y} = 5\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 5(7x_1 - 2x_2 - x_3) - 2(4x_1 + 3x_2 - x_3) +$

$+ (-2x_1 - x_2 + x_3) = 35x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 -$

$- 2x_1 - x_2 + x_3 = 25x_1 - 17x_2 - 2x_3$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & -2 & -17 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad S_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 25 & -17 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(S_3^T\right)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 25 & -17 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{11}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\left(S_3^T\right)^{-1}}$$

③ $y^{IV} + ay^{III} + 4y^{II} + by' + y = 0$

$\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$

$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$

$$H = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_7 & p_6 & p_5 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a > 0$?

$\Delta_2 = 4a - b > 0$?

$\Delta_3 = 4ab - b^2 - a^2 > 0$?

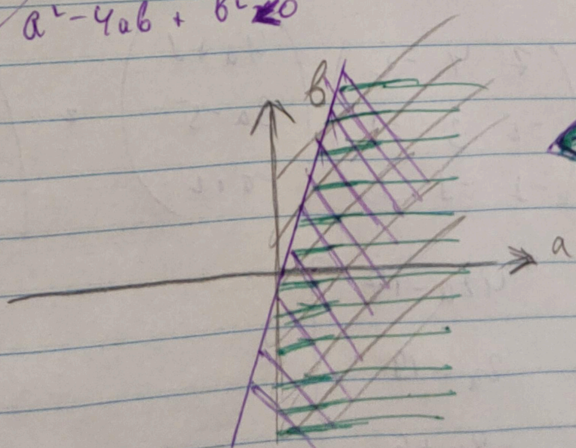
$\Delta_4 = (-1)^8 \cdot 1 \cdot \Delta_3 = 4ab - b^2 - a^2 > 0$

Δ_1:

Δ_2: $4a > b$ $\quad b \in (4a; +\infty)$

Δ_3: $4ab - b^2 - a^2 > 0$

$a^2 - 4ab + b^2 < 0$



$\boxed{(a, b)}$ ac. ст.

№4 $\begin{cases} \dot{x} = e^{y} - e^{x} \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2 \end{cases}$

Ос. точки $\begin{cases} e^{y} - e^{x} = 0 \\ \sqrt{3x + y^2} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} e^{y} = e^{x} \\ 3x + x^2 = 4 \end{cases}$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -4$

$M_1(1, 1) \qquad M_2(-4, -4)$

M_1:

$\dot{x} = (-x-1)\, e^{x}\Big|_{(1,0)} + (y-1)\, e^{y}\Big|_{(0,1)} = -e(x-1) + (y-1)e$

$\dot{y} = \frac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(1,1)} (x-1) + \frac{y}{\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{1,1} (y-1) = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e x_1 + e y_1 \\ \dot{y} = \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{4} y_1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} -e & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} -e-\lambda & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}-\lambda \end{bmatrix} = (e+\lambda)(\lambda-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{3}{4}e = \lambda^2 + (e-\tfrac{1}{4})\lambda - e = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{1}{4} - e \pm \sqrt{e^2+3{,}5e+\frac{1}{16}}}{2}$$

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ сідло

M_2:

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^x\Big|_{(-4,0)}(x+4) + e^y\Big|_{(0,-4)} y+4 \\ \dot{y} = \frac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(4,-4)}(x+4) + \frac{y}{\sqrt{3x+y^2}}\Big|_{(4,-4)}(y+4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e^{-4}(x+4) + e^{-4}(y+4) \\ \dot{y} = \frac{3}{4}(x+4) - 2(y+4) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = e^{-4}x_2 + e^{-4}y_2 \\ \dot{y} = \frac{3}{4}x_2 - 2y_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-4} & e^{-4} \\ \frac{3}{4} & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} -e^{-4}-\lambda & e^{-4} \\ \frac{3}{4} & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-e^{-4}-\lambda)(-2-\lambda) - e^{-4}\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= (\lambda+e^{-4})(\lambda+2) - e^{-4}\cdot\frac{3}{4} = \lambda^2 + (2+e^{-4})\lambda + \frac{5}{4}e^{-4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2-e^{-4} \pm \sqrt{4-e^{-4}+e^{-8}}}{2}$$

$\underbrace{\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0}_{\text{стійкий вузол}}$

№5 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = [B, AB] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

rank = 2 => керована система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$ -> розімкнена система

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) + 2 \cdot 2 =$$
$$= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 =$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 14$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2}$$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad c_{1,2} - ?$

$$u = C^T x \to \dot{x} = (A + BC^T)x$$
$$Re\lambda_i < 0$$

$BC^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$

$$A + BC^T = \begin{pmatrix} 3c_1 + 5 & -2 \\ 2 & c_2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\det|A + BC^T - \lambda| = \begin{vmatrix} 3c_1 + 5 - \lambda & -2 \\ 2 & c_2 + 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (3c_1 + c_2 + 7)\lambda +$$
$$+ 3c_1c_2 + 6c_1 + 5c_2 + 14$$

> 0

Крит. Раусa – Гурвіца

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3C_1 - C_2 - 7 & 1 \\ 0 & 3C_1C_2 + 6C_1 + 5C_2 + 14 \end{bmatrix} =$$

$$\Delta_1 = -3C_1 - C_2 - 7 > 0$$

$$\Delta_2 = 3C_1C_2 + 6C_1 + 5C_2 + 14 \cdot \Delta_1 > 0$$

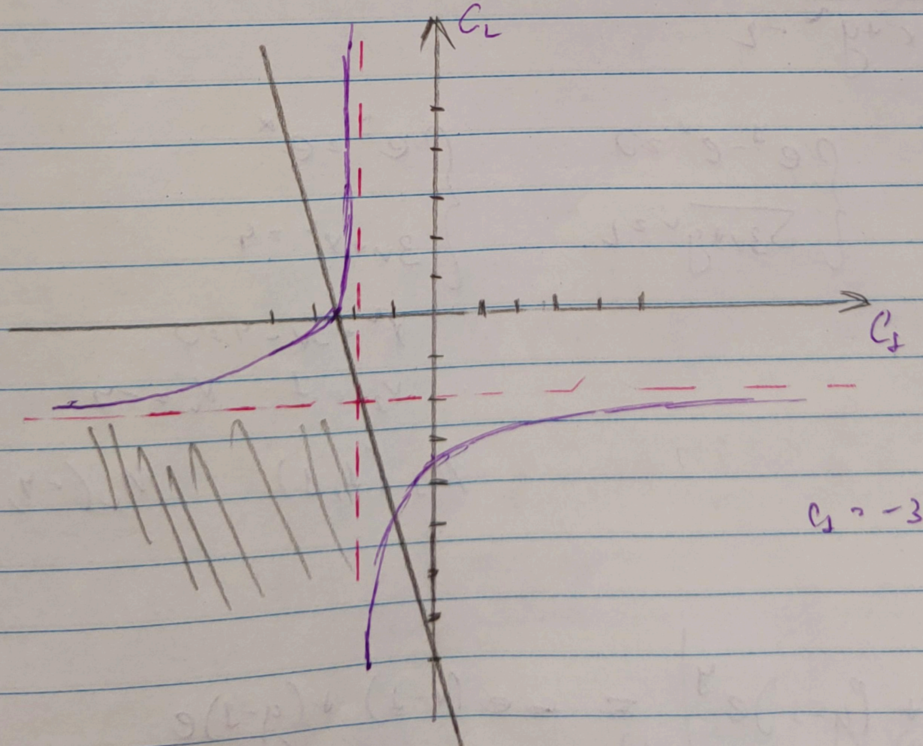
$$\begin{cases} -3C_1 - C_2 - 7 > 0 \\ 3C_1C_2 + 6C_1 + 5C_2 + 14 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3C_1 + C_2 < -7 \\ 3C_1C_2 + 6C_1 + 5C_2 > -14 \end{cases}$$

$$C_2 = -3C_1 - 7$$

$$C_2 = \frac{-6C_1 - 14}{3C_1 + 5} \qquad 3C_1 + 5 \neq 0$$

$$C_1 \neq -\frac{5}{3}$$

$$C_2 = -2$$



$C_1 = -3 \quad C_2 = -3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 2x_1 - 9x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)\cdot 2 =$$

$$= \cancel{4} + (-4 - 4\lambda + \lambda + \lambda^2) =$$

$$= \cancel{\ldots} = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3$$

~~вузол~~

не ст. сім. прямих.

№6 $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1 \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_1) + 4u_2 \end{cases}$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1) + u_2^4)\,dt + \cos^4(2x_1(1)) \to \min$$

0) $\psi_0 = -1$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$

1) $H(x, u, \psi_1, \psi_2, \psi_0) = -\sin^2 x_1 - u_2^4 + \psi_1(\sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1) +$
$+ \psi_2(3\cos(-4x_1) + 4u_2)$

2) $H'_u = 0$

?