Екзаменаційна робота
з предмету „Алгебра та геометрія"
студента I курсу
групи ІПС-11
Факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
ім. Тараса Шевченка
Дубини Андрія Володимировича
Білет №11
07.06.2023

① Матриця лінійного перетворення в базисі, властивості

A - лінійне перетвор. скінченно вимірного простору V над полем F.
$a_1, a_2, \dots a_n$ - фіксований базис V

$A(a_1), A(a_2) \dots A(a_n)$ лінійно виражаються через наступний базис.

$A(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \dots \alpha_{n1} a_n$
$A(a_2) = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \dots + \alpha_{n2} a_n$
$A(a_n) = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + \dots + \alpha_{nn} a_n$

Тоді

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ - наша матриця

1 матриця лінійного перетворення буд. наступним чином.

1) Знайти образи (координати) вект. $A(a_1), A(a_2) \dots A(a_n)$ в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$

2) ці координати записуємо в стовпчики (1 стовпчик - перший вектор, 2-й стовпчик - 2-й вектор і т.д.)

Властивості

① Якщо лінійні перетворення двох матриць A, B рівні = в якомусь базисі їм відповідають однакові матриці

② Якщо V - скінченно вимірний простір над полем F, $a_1, a_2, \dots, a_n$ - базис V

$C = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ - квадратична матриця з елементами поля F.

Тоді існує єдине лін перетворення A векторного прост. V, якому в базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ відповідає матриця C.

② Теорема про будову ортогонального оператора

Нехай A - ортогональний оператор на скінченновимірному просторі V.

Для простор. V ∃ розклад в пряму суму

$V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$ (L - підпростори), і викон. умови:

1) кожен з підпросторів інваріантний відносно A

2) розмірність $L_i = 1$ або 2

3) Якщо $\dim L_i = 1$, то A діє на L_i як тотожнє або як дзеркальне відображ.

4) Якщо $\dim L_i = 2$, то A діє на L_i як поворот площини на кут.

5) $\forall i = \overline{1,k}$: $L_i^{\perp} = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \ldots \oplus L_k$

Scanned with CamScanner

3) $a_1 = (2; 3; 4)$, $a_2 = (1; 2; 2)$ $\quad a_3 = (-1, -1, -1)$

$b_1 = (-11, 3, 0)$ $\quad b_2 = (1, 1, -2)$ $\quad b_3 = (18, -6, -14)$

$$(a_1 | a_2 | a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ранг $= 3 \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ – базис простору

$\exists!$ лінійне перетвор. $\quad g(a_i) = b_i, \quad i = \overline{1,3}$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = -a_2 - 2a_3$

$e_2 = -a_1 + 2a_2$

$e_3 = a_1 - a_2 + a_3$

$\varphi(e_1) = \varphi(-a_2 - 2a_3) = -\varphi(a_2) - 2\varphi(a_3) = -b_2 - 2b_3 = (-1,-1,1) +$
$+ (-36, 12, 18) = (-37, 11, 29)$

$\varphi(e_2) = -b_1 + 2b_2 = (11, -3, -9) + (2, 2, -2) = (13, -1, -11)$

$\varphi(e_3) = b_1 - b_2 + b_3 = (-11, 3, 9) + (-1, -1, 1) + (18, -6, -14) = (6, -4, -4)$

$$[\varphi_e] = \begin{pmatrix} -37 & 13 & 6 \\ 11 & -1 & -4 \\ 29 & -11 & -4 \end{pmatrix}$$

(4) $a_1 = (1, 2, -1, 1)$ $a_2 = (-5, -5, 4, -2)$ $a_3 = (-3, 6, 2, 0)$

$L = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$b_1 = a_1 \ (1, 2, -1, 1)$

$b_2 = a_2 - \alpha_{21} b_1$

$\alpha_{21} = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{-5-10-4-2}{1+4+1+1} = -3$ $b_2 = a_2 + 3b_1 =$

$= (-5, -5, 4, -2) + (3, 6, -3, 3) = (-2, 1, 1, 1)$

$b_3 = a_3 - \alpha_{31} b_1 - \alpha_{32} b_2$ $\alpha_{31} = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{-3+12-2+0}{7} = 1$

$b_3 = a_3 - b_1 - 2b_2$ $\alpha_{32} = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{6+6+2+0}{4+1+1+1} = 2$

$= (-3, 6, 2, 0) - (1, 2, -1, 1) - (-4, 2, 2, 2) = (0, 2, 1, -3)$

$B_{орт} = \{b_1, b_2, b_3\}$