Дубина А. ІПС-21 МКР №2 мотілор

① а) „невірно, що існує рівно 2 числа, що є сумою 4-х квадратів"

Сума 4-х квадратів:

$$\exists x\, \exists y\, \exists u\, \exists v\, (xx+yy+uu+vv=z)$$

Вся формула:

$$\neg \exists t\, \exists d\, (\forall z\, (\exists x\, \exists y\, \exists u\, \exists v\, (xx+yy+uu+vv=z) \leftrightarrow (z=x \vee z=y)) \wedge x \neq y).$$

Тобто: заперечення $\neg$, що існують рівно два числа t і d такі, що $\forall z$, z є сумою 4-х квадратів тоді та тільки тоді, коли $z=t$ або $t=d$. ~~Та~~ $t \neq d$.

б) $S = Y \setminus (Z \cup X) = (Y \setminus Z) \wedge (Y \setminus X)$

$$\forall a\, (a \in S \leftrightarrow (a \in Y \,\&\, \neg (a \in Z \vee a \in X)))$$

$$\forall a\, (a \in S \leftrightarrow (a \in Y \,\&\, \neg a \in Z \,\&\, \neg a \in X))$$

② $\forall z\, \exists y\, (\forall x\, \exists y\, A(x,y,z) \wedge \neg \exists x\, B(x,y)) \to \forall x\, \exists y\, C(x,y)$

$$\forall z\, \exists y\, (\forall x\, \exists y_1\, A(x, y_1, z) \wedge \neg \exists x_1\, B(x_1, y)) \to \forall x_2\, \exists y_2\, C(x_2, y_2)$$

$$\forall z\, \exists y\, (\forall x\, \exists y_1\, A(x, y_1, z) \wedge \forall x_1\, \neg B(x_1, y)) \to \forall x_2\, \exists y_2\, C(x_2, y_2)$$

$$\forall z\, \exists y\, (\forall x\, \exists y_1\, (\forall x_1\, (A(x, y_1, z) \wedge \neg B(x_1, y)))) \to \forall x_2\, \exists y_2\, C(x_2, y_2)$$

$$\forall z\, \exists y\, \forall x\, \exists y_1\, \forall x_1\, (A(x, y_1, z) \wedge \neg B(x_1, y)) \to \forall x_2\, \exists y_2\, C(x_2, y_2)$$

$$\exists z\, \forall y\, \exists x\, \forall y_1\, \exists x_1\, \forall x_2\, \exists y_2\, (A(x, y_1, z) \wedge \neg B(x_1, y) \to C(x_2, y_2))$$

$z \mapsto c$

$x \mapsto f(y)$

$x_1 \mapsto g(y, y_1)$

$y_2 \mapsto q(y, y_1, x_2)$

$$\forall y\, \forall y_1\, \forall x_2\, (A(f(y), y_1, c) \wedge \neg B(g(y, y_1), y) \to C(x_2, q(y, y_1, x_2)))$$

(3) $\dashv \forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$

$\vdash \forall x (P(x) \to Q(x)),\quad \dashv \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

$\vdash \forall x P(x),\ \dashv \forall x Q(x),\quad \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

$\dashv Q(y),\ \vdash \forall x P(x),\ \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

$\dashv Q(y),\ \vdash P(x),\ \vdash \forall x P(x),\ \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

$\dashv Q(y),\ \vdash P(y),\ \vdash P(y) \to Q(y),\ \vdash \forall x P(x),\ \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

$\dashv P(y),\ \dashv Q(y),\ \vdash P(y),\ \vdash \forall x \ldots$ | $\vdash Q(y),\ \dashv Q(y),\ \vdash P(y),\ \vdash \forall x \ldots$

$\times$ | $\times$

Висновок: вірно

(4) „$D_x \neq E_x$"

$D_x = E_x \Leftrightarrow \forall z\,(z \in D_x \leftrightarrow z \in E_x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall z\,((z \in D_x \vee \neg(z \in E_x)) \,\&\, (\neg(z \in D_x) \vee z \in E_x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall z\,(((\exists k_1\, P_x(z)\downarrow \text{ на } k_1) \vee \neg \exists c\, \exists k_2 (P_x(c)\downarrow z \text{ на } k_2)) \,\&$

$\&\, (\neg(\exists k_3 (P_x(z)\downarrow \text{ на } k_3)) \vee \exists d\, \exists k_4 (P_x(d)\downarrow z \text{ на } k_4))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall z\,(((\exists k_1 (P_x(z)\downarrow \text{ на } k_1)) \vee \forall c\, \forall k_2\, \neg(P_x(c)\downarrow z \text{ на } k_2)) \wedge$

$\wedge\, (\forall k_3\, (P_x(z)\downarrow \text{ на } k_3) \vee \exists d\, \exists k_4 (P_x(d)\downarrow z \text{ на } k_4))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall z\, (\exists k_1\, \forall c\, \forall k_2\, ((P_x(z)\downarrow \text{ на } k_1) \vee \neg(P_x(c)\downarrow \text{ на } k_2)) \wedge$

$\wedge\, \forall k_3\, \exists k_4\, (\neg(P_x(z)\downarrow \text{ на } k_3) \vee (P_x(d)\downarrow z \text{ на } k_4))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall z\, \exists k_1\, \forall c\, \forall k_2\, \forall k_3\, \exists d\, \exists k_4\, (((P_x(z)\downarrow \text{ на } k_1) \vee \neg(P_x(c)\downarrow z \text{ на } k_2)) \wedge (\neg(P_x(z)\downarrow \text{ на } k_3) \vee (P_x(d)\downarrow z \text{ на } k_4)))$

„$D_x \neq E_x$" $\Leftrightarrow \underbrace{\exists z}\, \underbrace{\forall k_1}\, \underbrace{\exists c\, \exists k_2\, \exists k_3}\, \underbrace{\forall d\, \forall k_4}$

Тому „$D_x \neq E_x$" $\in \Sigma_4$.

(5) Універсум – всі люди

$P(x)$ – бути політиком

$S(x)$ – бути шахраєм

$R(x)$ – бути розумним

Не всі політики шахраї: $\neg \forall x\,(P(x) \to S(x))$

Всі шахраї розумні: $\forall x\,(S(x) \to R(x))$

Деякі політики дурні = не всі політики розумні =

$= \neg \forall x (P(x) \to R(x))$