Домашняя работа 2.

1311. $a_1 = (1,1,1,1,0)$

$a_2 = (1,1,-1,-1,-1)$

$a_3 = (2,2,0,0,-1)$

$a_4 = (1,1,5,5,2)$

$a_5 = (1,-1,-1,0,0)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -2\mathrm{V} \\ -2\mathrm{V} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_5$ — базис L.

$\dim L = 3$

1313. $a_1 = (1,-1,1,-1,1)$

$a_2 = (1,1,0,0,3)$

$a_3 = (3,1,1,-1,7)$

$a_4 = (0,2,-1,1,2)$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_5 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + 7\alpha_5 = 0 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -I \\ -3I \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2II \\ -II \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}}$$

1317

~~$a_1 = (1, 2, 0, 1)$~~

~~$a_2 = (1, -1, 1, -1)$~~

~~$a_3 = (1, 3, 1, 3)$~~

$a_1 = (1, 2, 0, 1)$

$a_2 = (1, 1, 1, 0)$

$b_1 = (1, 0, 1, 0)$

$b_2 = (1, 3, 0, 1)$

$L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$

$L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim L_1 = 2$$

$B(L_1) = a_1, a_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \dim L_2 = 2$$

$B(L_2) = a_1, a_2$

$L_1 + L_2 = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim L_1 + L_2 = 3$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 + L_2 = 2+2-3 = 1$$

B 20

$a_1 = (1, 2, 1)$ $\qquad b_1 = (2, 3, -1)$

$a_2 = (1, 1, -1)$ $\qquad b_2 = (1, 2, 2)$

$a_3 = (1, 3, 3)$ $\qquad b_3 = (1, 1, -3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \dim L_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \dim L_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a_1, a_2, b_1 – базис $L_1 + L_2$

$x \in L_1 \cap L_2 \to x \in L_1, x \in L_2$

$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$

$$(a_1, a_2 | a_3 | b_1 | b_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3, 5, 1)$

1284 а) змінити два рядки

б) змінити два стовпчики

в) симетричне відображення

1290 Ні, сума двох векторів може лежати поза в першій чверті координат, що не задовольняє

1303 Властивості лін. підпростору:

1) Замкненість щодо додавання

$(A+B)^T = A^T + B^T = -A + -B = -(A+B)$

б) замкненість щодо скалярного множення:

$$(kA)^T = (A^T)^T = A = -kA$$

в) нульова матриця

$$0^T = 0 = -0.$$

Тому множина кососиметричних матриць утвор. лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць $n \times n$.

Вона має $\frac{n(n-1)}{2}$ незалежних елементів, всі інші – елементи залежні від незалежних, тому розмірність їх $\frac{n(n-1)}{2}$.

Базис будуємо, взявши незалежні елементи як базисні вектора.

Scanned with CamScanner