Контрольна робота
з дисципліни „Загальна алгебра"
студента групи ІПС-21
Дубіни Андрія
варіант 44

① $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Операція множення.

а) замкненість. $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y, x \in \mathbb{R}$,

тому замкненість зберігається.

б) нейтральний елемент: одинична матриця.

$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) обернений елемент. $\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$

г) асоціативність: $\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Тому це множина є групою.

② $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{Z}_5^*)$, $T_2(\mathbb{Z}_5)$ - множина невироджених верхніх трикутних матриць порядку 2 з коеф поля $\mathbb{Z}_5$

$g^1 = g$

$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$g^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2\times 2}$

g^4 = одинична матриця. Порядок $g = 4$.

(3) $f: R \to Z,\ f(x) = [x]$

Гомоморфізм: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Для $x = 2{,}9$ і $y = -3{,}1$

$f(x+y) = f(2{,}9 + (-3{,}1)) = f(-0{,}2) = [-0{,}2] = 0$

$f(x) + f(y) = [2{,}9] + [-3{,}1] = 2 + (-3) = -1$.

Необхідна умова не виконується -> не є гомоморфізмом.

Ізоморфізм — бієктивний гомоморфізм. Але так як наш приклад не є гомоморфізмом загалом, то він і не є ізоморфізмом

(4) $n = 2$
$p = 7$

Многочлен степеня 2 у Z_7: $ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in Z_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Для незвідності $b^2 - 4ac$ – квадратний лишок у Z_7; невиродженні квадратні лишки: 1, 2, 4

Незвідні многочлени:
$x^2 + x + 1$
$x^2 + 2x + 2$
$x^2 + 3x + 3$
$x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 5x + 1$
$x^2 + 6x + 2$

Знаходження кругових м-членів.

$x^n - 1$. Для їх знаходження треба знайти найменше d, для якого n ділить 7^d-1

$d=1$: $7^1-1=6$, $n=6$

$d=2$: $7^2-1=48$, $n=3,8$

$d=3$: $7^3-1=342$, $n=1,3,9,19,57$

$d=6$: $7^6-1=117649$, $n=1,3,7,9,19,57,171,513$

Отже незвідні кругові м-члени це

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$,

x^3+x^2+x+1

Частковий розклад добутку незвідних м-членів степеня 2 через незвідні кругові м-члени

$(x^2+x+1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)(x^2+4x+4)(x^2+5x+1)(x^2+6x+2)=$

$=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+2)=$

$=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^3+x^2+x+1)$

3) Частковий розклад всіх незвідних м-членів має вигляд

$(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2(x^3+x^2+x+1)^2$