Практикум з математичного аналізу

для студентів спеціальності “Інженерія програмного забезпечення”

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Семестр 2

Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В.

Зміст

Передмова

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Даний практикум з математичного аналізу призначений студентам спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення” факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відповідає програмі курсу, яка складається з 58 годин лекцій та 56 годин практичних занять. Практикум складається з двох частин, кожна з яких містить 14 практичних занять і відповідає матеріалу одного семестру.

Основною метою, яку переслідували автори, є забезпечення навчальним матеріалом практичних занять в рамках стислого курсу математичного аналізу. В посібнику кожна тема містить всі необхідні означення і твердження, що дозволяє розв’язувати запропоновані задачі без додаткової літератури. В якості основного теоретичного матеріалу і практичних завдань використані підручники і збірник задач з математичного аналізу авторів І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук, І. М. Александрович, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов та інші [**?**, 1, 3, 4].

Тематичний план практичних занять. Семестр 2

Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца
15. Первісна. Елементарні методи інтегрування.
16. Інтегрування раціональних функцій.
17. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації.
18. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій.
Інтеграл Рімана
19. Означення інтеграла Рімана та його зв’язок з інтегралом Ньютона-Лейбніца.
20. Основні теореми інтегрального числення.
21. Застосування інтеграла Рімана.
Функції багатьох змінних
22. Простір m-вимірних функцій, їх границя та неперервність.
23. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків.
24. Екстремуми функцій багатьох змінних.
Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли
25. Ряди з невід’ємними членами. Ряди з членами довільного знаку.
26. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди.
27. Ряди Фур’є.
28. Невласні інтеграли.

Розділ 5. Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца

Тема 11. Первісна. Елементарні методи інтегрування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***первісною функції*** $f(x)$, якщо $D_f = D_F$ і $\forall x \in D_f$ виконується: $F'(x) = f(x)$. Оскільки $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, $dF = f(x)\,dx$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$ називається ***невизначеним інтегралом***.

Теорема (про структуру первісної). Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — первісна для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді $\forall x \in D_f = D_F$: $F'(x) = f(x)$. Для того, щоб довільна функція $\Phi(x)$ була первісною для $f(x) \;\Leftrightarrow\; \Phi(x) - F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Сукупність всіх первісних функцій для $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \,|\, x \in D_f, C \in \mathbb{R}\}$, де $F'(x) = f(x)$. Як правило, позначення множини опускають і пишуть $F(x) + C$.

Інтеграл Ньютона–Лейбніца

Інтеграл Ньютона–Лейбніца, який запроваджується до розгляду, заміняє собою невизначений інтеграл, який традиційно вивчають лише з точки зору правил та техніки його обчислення, не займаючись застосуваннями [1, c. 196].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною в сенсі Ньютона–Лейбніца*** на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x \in X$ вона має первісну, тобто

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \overset{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \,\wedge\, \forall x \in X : F'(x) = f(x)\}.$$

Функція $F(x)$ називається ***інтегралом Ньютона–Лейбніца*** з фіксованою нижньою межею a і змінною верхньою x. Її значення $F(b)$ в точці $b \in X$ називається ***визначеним інтегралом Ньютона–Лейбніца*** і позначається $\int_a^b f(t)\,dt$, де t — змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить. Якщо f інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на множині X і множина точок її розриву — не більш ніж зліченна, то $F(x)$ — це первісна у широкому розумінні.

Теорема (формула Ньютона–Лейбніца). Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на D_f і F — її первісна, то $\forall a \in D_f$ і $\forall b \in D_f$ існує $\int_a^b f(x)\,dx$, однозначно визначений, і має місце рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Властивості інтеграла Ньютона-Лейбніца [1, с. 177–179]. Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровні в сенсі Ньютона–Лейбніца, $D_f = D_g$ та $a, b, c \in D_f$.

1. *Антисиметричність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Адитивність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. *Диференційовність*: $\forall x \in D_f$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x); \quad \left(\int_x^a f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

4. *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g)(x)$ також інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца і

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0\,dx = C$;

2) $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$;

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;

10) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$;

12) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$.

13) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

15) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Методи обчислення інтеграла Ньютона–Лейбніца

Теорема (метод заміни змінної). Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при цьому $\exists \varphi'(x)\,\forall x \in X$, $X = D_{f\circ\varphi}$. Якщо $f(\tau)$, де $\tau = \varphi(x)$, — інтегровна за Ньютоном-Лейбніцем функція на множині X, то функція $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ також інтегровна та $\forall a, b \in X$ має місце формула заміни змінної в інтегралі:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\tau)\,d\tau,\quad \tau=\varphi(x).$$

Зауваження. Якщо в інтегралі чисельник є похідною від знаменника, то

$$\int_{x_0}^{x}\frac{f'(t)\,dt}{f(t)}=\ln|f(t)|\Big|_{x_0}^{x}=\ln|f(x)|\quad \forall x: f(x)\neq 0.$$

Теорема (метод інтегрування частинами). Нехай $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_u=D_v$, $\exists u'(x), v'(x)$ для довільного $x\in D_u$, і нехай існує первісна для функції $u'(x)\cdot v(x)$. Тоді існує первісна для $u(x)\cdot v'(x)$ і має місце інтегрування частинами:

$$d(u\cdot v)=u\,dv+v\,du,\quad u\,dv=d(u\cdot v)-v\,du\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b u\,dv=\int_a^b d(uv)-\int_a^b v\,du\ \Rightarrow\ \int_a^b u\,dv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v\,du,\ \ \forall(a,b)\in D_u.$$

Первісна у широкому розумінні

Функція $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ називається ***первісною у широкому розумінні*** для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на множині $X\subset D_F$, якщо F неперервна та існує $F'(x)=f(x)$ для всіх точок множини X, можливо, за виключенням не більш ніж зліченної її підмножини.

Практичне заняття 15

Приклад 1. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int\frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx.$

⌜

В результаті почленного ділення чисельника на знаменник отримуємо суму степеневих функцій:

$$\int\frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx=\int\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{4}{3x}-\frac{8}{3x^2}\right)dx.$$

Далі скористаємося лінійністю інтеграла і таблицею основних інтегралів:

$$\int\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{4}{3x}-\frac{8}{3x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\cdot x+\frac{4}{3}\cdot\ln|x|-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+C=$$

$$=\frac{x^2}{6}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\ln|x|+\frac{8}{3x}+C,\quad x\neq 0.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int\frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx.$

⌜

Перетворимо підінтегральну функцію до зручного вигляду та скористаємося табличним інтегралом $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$:

$$\int\frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx=2e\int\frac{e^x}{2^x}\,dx=2e\int\left(\frac{e}{2}\right)^x dx=2e\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x\left(\ln\frac{e}{2}\right)^{-1}+C.$$

⌟

Приклад 3. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. Для цього зробимо лінійну заміну змінної: $x + \frac{\pi}{6} = t,\ \ dx = dt$. Тоді $\forall x \notin \left\{ \dfrac{\pi}{3} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

⌟

Приклад 4. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. Для цього винесемо сталу a з-під знаку інтеграла:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2}.$$

Тепер зробимо лінійну заміну змінної: $t = \dfrac{b}{a}x,\ \ dx = \dfrac{a}{b}\,dt$. Тоді:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a}{b}\,dt = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x + C.$$

⌟

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt$.

⌜

Функцію $f(t) = \dfrac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}$ можна представити у вигляді $f(t) = g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, де $\varphi(t) = t^8$. Тому зробимо раціональну підстановку $y = \varphi(t)$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt = \left| t = \sqrt[8]{y},\ dt = \frac{1}{8\sqrt[8]{y^7}}\,dy \right| = \int_{x_0^8}^{x^8} \frac{\sqrt[8]{y^7}}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{8\sqrt[8]{y^7}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin y \,\Big|_{x_0^8}^{x^8} = \frac{1}{8}\arcsin x^8, \quad |x| \leqslant 1.$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt$.

⌜

Оскільки підінтегральна функція залежить лише від функції $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ та її похідної $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, то зробимо раціональну заміну змінної:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt = \left| y = \operatorname{tg} t,\ dy = \frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} \left(e^y + \frac{1}{y}\right)\,dy =$$

$$= \left(e^y + \ln|y|\right)\Big|_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x} + \ln|\operatorname{tg} x|, \quad x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

⌟

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи таблицю основних інтегралів:

15.1 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 2x^3 - 4x^2 - x + 11}{x^2}\, dx;$

15.2 $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx;$

15.3 $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx;$

15.4 $\displaystyle\int 2\cos^2 \frac{x}{2}\, dx;$

15.5 $\displaystyle\int (\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x)\, dx;$

15.6 $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx;$

15.7 $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x\, dx;$

15.8 $\displaystyle\int \frac{3^{x+1} + e^{3x} - e^{x-1}}{e^x}\, dx.$

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи лінійну заміну змінної:

15.9 $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)^5};$

15.10 $\displaystyle\int \sqrt[3]{(5-8x)^4}\, dx;$

15.11 $\displaystyle\int e^{-3x+1}\, dx;$

15.12 $\displaystyle\int \sin(2x-3)\, dx;$

15.13 $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+9};$

15.14 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца, використовуючи раціональну заміну змінної:

15.15 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^3}{t^2-4}\, dt;$

15.16 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t}{\sqrt{b^2t^2+a^2}}\, dt;$

15.17 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t^4 \sin(t^5+3)\, dt;$

15.18 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\sqrt{b^2t^2+a^2}\, dt;$

15.19 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt;$

15.20 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{\sin t} \cos t\, dt;$

15.21 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\ln t};$

15.22 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\ln t \ln\ln t}.$

Тема 12. Інтегрування раціональних функцій

Раціональна функція однієї змінної (або ж ***дробово-раціональна функція***) — це алгебраїчний вираз, що є відношенням двох многочленів, коефіцієнти яких належать множині дійсних чисел, тобто має вигляд:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — сталі, m та n — невід'ємні цілі числа.

Якщо $m \geqslant n$, то дріб неправильний. Кожен неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена $W(x)$ (ціла частина) та правильного дробу $\left(\frac{R}{Q}\right)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. З класу правильних дробів виділяють 4 типи основних *елементарних дробів*: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}$ та $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^n}$, де $a, p, q, M, N \in \mathbb{R}$, а $n > 1$ — ціле число. При цьому $x^2 + 2px + q$ не має дійсних коренів у випадку, якщо дискримінант $D < 0 \ \Leftrightarrow \ p^2 - q < 0 \ \Leftrightarrow \ q - p^2 > 0$.

Розвинення правильних дробів на прості

Вигляд розвинення правильних дробів на прості залежить від розвинення многочлена $Q_n(x)$ на множники. Кожен многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і коефіцієнтом 1 при x^n можна однозначно представити у вигляді співмножників виду $x - a$ та $x^2 + px + q$. Якщо маємо співмножники, що співпадають, то:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{n_k} \times \\ \times (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{m_r},$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ — корені многочлена $Q_n(x)$; n_i, $i = \overline{1,k}$ — кратності коренів a_i; $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,r}$ — коефіцієнти тричленів; m_j, $j = \overline{1,r}$ — кратності квадратичних тричленів. При цьому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i + 2\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = n$.

Будь-який правильний раціональний дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \\ + \ldots + \frac{B_{n_2}}{x-a_2} + \ldots + \frac{K_1}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{K_2}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{K_{n_k}}{x-a_k} + \ldots + \\ + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}. \qquad (1)$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на $Q(x)$. Із рівності многочленів у лівій і правій частинах (1) випливає рівність коефіцієнтів при однакових степенях x. Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу у суму простих дробів називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Практичне заняття 16

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{A\,dt}{t-a}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{A\,dt}{t-a} = \int_{x_0-a}^{x-a}\frac{A\,dy}{y} = A\ln|y|\Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\ln|x-a|, \quad x \neq a.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{A\,dt}{(t-a)^n}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a \neq 0$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{A\,dt}{(t-a)^n} = \int_{x_0-a}^{x-a}\frac{A\,dy}{y^n} = A\int_{x_0-a}^{x-a}y^{-n}\,dy = A\cdot\frac{y^{1-n}}{1-n}\Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}.$$

⌟

Приклад 3. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q}$, *де* $M, N, p, q \in \mathbb{R}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q} = \int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)\,dt}{(t+p)^2+q-p^2} = \left|\begin{array}{c} t = y-p \\ dy = dt \end{array}\right| = \\
&= \int_{x_0+p}^{x+p}\frac{(My-Mp+N)\,dy}{y^2+b^2} = M\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{y\,dy}{y^2+b^2} + \int_{x_0+p}^{x+p}\frac{(N-Mp)\,dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{dy^2}{y^2+b^2} + (N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p}\frac{dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left(y^2+b^2\right)\Big|_{x_0+p}^{x+p} + (N-Mp)\cdot\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}\Big|_{x_0+p}^{x+p} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left|(x+p)^2+q-p^2\right| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.
\end{aligned}$$

⌟

Приклад 4. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n}$, *де* $M, N, p, b \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n} = \left| \begin{array}{c} t = y - p \\ dy = dt \end{array} \right| = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(M(y-p)+N)\,dy}{(y^2+b^2)^n} =$$

$$= \frac{M}{2} \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} + (N - Mp) \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}.$$

Тоді:

$$\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{d(y^2+b^2)}{(y^2+b^2)^n} = \frac{(y^2+b^2)^{1-n}}{1-n}\Bigg|_{x_0+p}^{x+p} = \frac{((x+p)^2+b^2)^{1-n}}{1-n}.$$

Позначимо другий інтеграл як $I_n = \displaystyle\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}$ та запишемо для нього рекурентну формулу, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$I_n = \left| \begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(y^2+b^2)^n}, & du = \dfrac{-2ny}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy \\ dv = dy, & v = y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{y}{(y^2+b^2)^n}\Bigg|_{x_0+p}^{x+p} + 2n \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2\,dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2+b^2-b^2}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n} - 2nb^2 \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2nI_n - 2nb^2 I_{n+1}.$$

Тобто

$$2nb^2 I_{n+1} = \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n;$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nb^2}\left(\frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n \right), \quad I_1 = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{b}.$$

┘

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)}\,dt.$

┌

Оскільки підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, то розкладемо її на прості дроби відповідно до формули (1):

$$\frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+4};$$

$$2t^3-6t^2-11 = A(1-t)(t^2+4) + B(t^2+4) + (Ct+D)(1-t)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях t, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та D:

$$
\begin{array}{l}
t^3: \\ t^2: \\ t^1: \\ t^0:
\end{array}
\begin{cases}
2 = -A + C \\
-6 = A + B - 2C + D \\
0 = -4A + C - 2D \\
-11 = 4A + 4B + D
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A = 0 \\
B = -3 \\
C = 2 \\
D = 1
\end{cases}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1-t)^2(4+t^2)}\, dt = &-3\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{2t+1}{t^2+4}\, dt = \\
&= 3\int_{x_0}^{x} \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2+4} = \\
&= \left(-\frac{3}{1-t} + \ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \\
&= \frac{3}{x-1} + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}, \quad x \neq 1.
\end{aligned}
$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} \ln t\, dt.$

⌜

Застосуємо формулу інтегрування частинами для того, щоб отримати інтеграл від похідної функції $f(t) = \ln t$:

$$
\int_{x_0}^{x} \ln t\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = \ln t, & du = \dfrac{1}{t}\, dt \\ dv = dt, & v = t \end{array} \right| = t \ln t \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} dt = x(\ln x - 1), \quad x > 0.
$$

⌟

Приклад 7. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} e^{at} \cos bt\, dt.$

⌜

Двічі скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$
\begin{aligned}
I = \int_{x_0}^{x} e^{at} \cos bt\, dt = &\left| \begin{array}{ll} u = \cos bt, & du = -b \sin bt\, dt \\ dv = e^{at}\, dt, & v = \dfrac{1}{a} e^{at} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{a} e^{at} \cos bt \Big|_{x_0}^{x} + \frac{b}{a} \int_{x_0}^{x} e^{at} \sin bt\, dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = \sin bt, & du = b \cos bt\, dt \\ dv = e^{at}\, dt, & v = \dfrac{1}{a} e^{at} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{at} \sin bt \Big|_{x_0}^{x} - \frac{b^2}{a^2} \int_{x_0}^{x} e^{at} \cos bt\, dt.
\end{aligned}
$$

Тобто отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла:

$$
I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I;
$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца шляхом розкладу правильних дробів на прості:

16.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t}{2t+1}\,dt;$

16.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt;$

16.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^4}{t^2+t-2}\,dt;$

16.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4+1}{t^3-t^2+t-1}\,dt;$

16.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^4-1};$

16.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^3-6t^2+9t+7}{(t-2)^3(t-5)}\,dt;$

16.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4-7t^3-8t^2-23t-11}{(t^2+4t+5)(t-3)^2(t+2)}\,dt;$

16.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t^4-t^3+7t^2+2}{(t-1)(t^2+1)^2}\,dt.$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца за допомогою формули інтегрування частинами:

16.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\cos t\,dt;$

16.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} te^{-t}\,dt;$

16.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{t}\sin t\,dt;$

16.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \operatorname{arctg}\sqrt{t}\,dt;$

16.13 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \arccos t\,dt;$

16.14 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} (\arcsin t)^2 dt;$

16.15 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\operatorname{tg}^2 t\,dt;$

16.16 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} 3t^2\ln(1+t)\,dt;$

16.17 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin\ln t\,dt;$

16.18 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$

Тема 13. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації

Ірраціональна функція — це елементарна функція, побудована зі степеневих функцій з раціональними показниками, яка не зводиться до раціональної або дробово-раціональної функції. Основним методом інтегрування ірраціональних функцій є пошук підстановок, які дають змогу позбутися від ірраціональностей у підінтегральній функції та звести задачу до інтегрування раціональної або дробово-раціональної функції. Такі підстановки називаються ***раціоналізуючими***.

Раціональна функція $R(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — це довільна функція, яка отримана в результаті скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення та ділення) над змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і довільними числами.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n$ та $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — деякі цілі числа, $n \in \mathbb{N}$, а r — спільне кратне чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

1. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; t^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; t^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою підстановки $t = y^r$, $dt = ry^{r-1}dy$.

2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції підстановкою $y^r = \dfrac{at+b}{ct+s}$, $dt = d\left(\dfrac{sy^r - b}{a - cy^r}\right)$.

Інтеграли, що містять квадратний тричлен

1. Для інтеграла вигляду $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\,dt$, де $P_m(t)$ — многочлен степені $m \geqslant 1$, має місце рівність:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\,dt = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}},$$

де $Q_{m-1}(x)$ — многочлен $(m-1)$-ої степені з невизначеними коефіцієнтами, λ — стала, що також є невизначеним коефіцієнтом. Диференціюючи це рівняння, маємо, що

$$P_m(x) = Q'_{m-1}(x) \cdot (ax^2+bx+c) + Q_{m-1}(x) \cdot \frac{2ax+b}{2} + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої знаходяться всі невідомі коефіцієнти.

2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-d)^n \cdot \sqrt{at^2+bt+c}}$, де $n \in \mathbb{N}$ та $d \notin [x_0, x]$, зводиться до інтеграла вигляду $\operatorname{sgn}(d-x) \displaystyle\int \frac{y^{n-1}\,dy}{\sqrt{a^*y^2+b^*y+c^*}}$ заміною $t - d = \dfrac{1}{y}$.

3. Інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції при застосуванні однієї з ***підстановок Ейлера***.

Перша підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}t$ застосовується у випадку, якщо $a > 0$. У такому разі $t = \dfrac{y^2 - c}{2\sqrt{a}y + b}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}\cdot\frac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b} = \frac{\sqrt{a}y^2+by+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}y+b}.$$

Після інтегрування отриманого дробу повертаємось до змінної t підстановкою $y = \sqrt{at^2+bt+c} + \sqrt{a}t$.

Друга підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = ty + \sqrt{c}$ застосовується у випадку, якщо $c > 0$. У такому разі $t = \dfrac{2\sqrt{c}y - b}{a - y^2}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y\cdot\frac{2\sqrt{c}y-b}{a-y^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}y^2-by+a\sqrt{c}}{a-y^2}.$$

Третя підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = y(t-t_1)$ застосовується у випадку, якщо квадратний тричлен at^2+bt+c має різні дійсні корені t_1, t_2 та коефіцієнт $a > 0$. Тоді

$$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a(t-t_1)(t-t_2)} = \sqrt{a}\,|t-t_1|\sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}$$

і маємо інтеграл $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R_1\left(t; \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}\right) dt.$

Зазначимо, що застосування підстановок Ейлера призводить до громіздких обчислень. Тому, як альтернативу, використовують інші способи інтегрування. Зокрема, у тричлені можна виділити повний квадрат:

$$at^2+bt+c = a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

Тоді інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ за допомогою заміни $y = t + \dfrac{b}{2a}$ в залежності від знаків a та $(4ac-b^2)$ зводиться до інтеграла одного з видів:

4. $\int R\Big(y; \sqrt{q^2-y^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\sin u$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

5. $\int R\Big(y; \sqrt{y^2+q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\,\mathrm{sh}\,u$ зводиться до $\int R(\mathrm{sh}\,u, \mathrm{ch}\,u)\,du$.

6. $\int R\Big(y; \sqrt{y^2-q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\,\mathrm{ch}\,u$ зводиться до $\int R(\mathrm{sh}\,u, \mathrm{ch}\,u)\,du$.

Інтегрування диференціальних біномів

Вираз $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p — раціональні числа, називається ***диференціальним біномом***.

Теорема (Чебишева). Первісна функції $x^m(a+bx^n)^p$ виражається через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках: 1) p — ціле число; 2) $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле; 3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле.

Для зазначених випадків наведемо підстановки, які призводять до інтегрування раціональних функцій.

1. Нехай p — ціле число, $m=\dfrac{k}{l}$ та $n=\dfrac{r}{s}$, де k,l,r,s — цілі. Інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $x=y^\lambda$, $dx=\lambda y^{\lambda-1}\,dy$, де λ — найменше спільне кратне чисел l та s, зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

2. Нехай $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $a+bx^n=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

3. Нехай $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Практичне заняття 17

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt.$

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $t=y^2$, $dt=2y\,dy$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^4-y}\cdot 2y\,dy=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^3-1}\,dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{y+1}{y^3-1}=\frac{y+1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1};$$

$$y+1=A(y^2+y+1)+(By+C)(y-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A,B та C:

$$\begin{matrix} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{matrix}\ \begin{cases} 0=A+B \\ 1=A-B+C \\ 1=A-C \end{cases} \Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{3},\ B=-\frac{2}{3},\ C=-\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}\,dy}{y-1}-2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}}{y^2+y+1}\,dy=$$

$$= \frac{4}{3}\ln|y-1|\Big|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{2y+1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|\Bigg|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|x+\sqrt{x}+1\right|, \quad x \neq 1.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt$.

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $\dfrac{t-1}{t+1} = y^2 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{y^2+1}{1-y^2}$, $dt = \dfrac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy$. Оскільки $D_f = (-\infty,-1) \cup \cup\, [1,+\infty)$, то позначимо $g(x) = -1$, якщо $x < -1$, та $g(x) = 1$, якщо $x > 1$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = \int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} |y|\cdot\frac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\frac{4y^2}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

Розкладемо правильний дріб під знаком інтеграла на прості дроби:

$$\frac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{4y}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2};$$

$$4y^2 = A(y-1)(y+1)^2 + B(y+1)^2 + C(y+1)(y-1)^2 + D(y-1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та D:

$$\begin{matrix} y^3: \\ y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{matrix}\;\begin{cases} 0 = A + C \\ 4 = A + B - C + D \\ 0 = -A + 2B - C - 2D \\ 0 = -A + B + C + D \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} - \ln|y+1| - \frac{1}{y+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{2y}{y^2-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right| + (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x \in (-\infty,-1)\cup[1,+\infty).$$

Приклад 3. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt.$

Підінтегральна функція має вигляд $\dfrac{P_3(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}$, тобто можемо представити інтеграл у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}}.$$

Після диференціювання даної рівності маємо:

$$6x^3-x-1 = (2Ax+B)\cdot(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)\cdot(x+1)+\lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях x, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та λ:

$$\begin{array}{r} x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 6 = 3A \\ 0 = 5A+2B \\ -1 = 4A+3B+C \\ -1 = 2B+C+\lambda \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A = 2 \\ B = -5 \\ C = 6 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+1}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|t-1+\sqrt{(t-1)^2+1}\right|\Big|_{x_0}^{x} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|.$$

Приклад 4. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}}.$

Зведемо інтеграл до більш простого вигляду заміною $\dfrac{1}{t} = y$, $-\dfrac{1}{t^2}\,dt = dy$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = -\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1}} = -\operatorname{sgn} x \int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}}.$$

Оскільки $1+y-y^2 = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{4}-y+y^2\right) = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{2}-y\right)^2$, то лінійною заміною змінної $z = \dfrac{1}{2} - y$ зведемо інтеграл до двох табличних:

$$\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}} = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{d\left(\frac{5}{4}-z^2\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}\,\Bigg|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2z}{\sqrt{5}}\Bigg|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}.$$

Отже,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = \operatorname{sgn} x\cdot\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\arcsin\frac{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{x^2+x-1} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}x}, \quad x \neq 0.$$

⌟

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}}$.

⌜

Підінтегральна функція має вигляд $R\big(t;\sqrt{at^2+bt+c}\big)$, причому у даному випадку $a = 1 > 0$. Тож зручно буде застосувати першу підстановку Ейлера $\sqrt{t^2+2t+4} = y - t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{y^2-4}{2(y+1)}$, в результаті чого отримаємо інтеграл від дробово-раціональної функції: $\sqrt{t^2+2t+4} = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)}$; $dt = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy$;

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}} = \int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{1}{\frac{y^2-4}{2(y+1)} - \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)}}\cdot\frac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy =$$

$$= -\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)(y+4)}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left(1 - \frac{3y}{(y+1)(y+4)}\right)dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{3y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} = \frac{(A+B)y+4A+B}{(y+1)(y+4)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A та B:

$$\begin{matrix} y^1: \\ y^0: \end{matrix}\ \begin{cases} 3 = A+B \\ 0 = 4A+B \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right) + \frac{1}{2}\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left(\frac{-1}{y+1}+\frac{4}{y+4}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\ln|y+1| + 4\ln|y+4|\right)\Big|_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right|\right) +$$

$$+ 2\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+2x+4}\right|.$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\, dt.$

⌜

Оскільки вираз під знаком інтеграла $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\, dt = t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} dt$ є диференціальним біномом, то застосуємо теорему Чебишева. Маємо, що $p = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, але $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-1+1}{\frac{1}{2}} = 0 \in \mathbb{Z}$, тому використаємо другу підстановку Чебишева: $y^3 = 1+t^{\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; t = (y^3-1)^2;\; dt = 6y^2(y^3-1)\, dy$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\, dt = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y}{(y^3-1)^2}\cdot 6y^2(y^3-1)\, dy = 6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{y^3\, dy}{y^3-1}.$$

Після виділення із неправильного дробу під знаком інтеграла цілої частини маємо:

$$6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(y^3-1+1)\, dy}{y^3-1} = 6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} dy + \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6\, dy}{y^3-1}.$$

Отриманий правильний дріб у другому інтегралі розкладемо на прості дроби:

$$\frac{6}{y^3-1} = \frac{6}{(y-1)(y^2+y+1)} =$$

$$= \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+1} = \frac{(A+B)y^2 + (A-B+C)y + A - C}{(y-1)(y^2+y+1)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B та C:

$$\begin{array}{l} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{array} \begin{cases} 0 = A+B \\ 0 = A-B+C \\ 6 = A-C \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = 2,\; B = -2,\; C = -4.$$

Тоді

$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6\,dy}{y^3-1} = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2\,dy}{y-1} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(2y+4)\,dy}{y^2+y+1} =$$

$$= 2\ln|y-1|\Big|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy.$$

Оскільки

$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{d\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + 3\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}},$$

то

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt = 6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + 2\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right| - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}} -$$

$$- \ln\left|\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2} + \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right|, \quad x \neq 0.$$

⌟

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

17.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t^2}-\sqrt{t}}\,dt;$

17.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t(\sqrt{t}+\sqrt[5]{t^2})};$

17.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\,dt;$

17.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2+\sqrt{t+1}}{\sqrt[3]{t+1}}\,dt;$

17.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\sqrt[3]{2+t}}{t+\sqrt[3]{2+t}}\,dt;$

17.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\cdot\frac{dt}{t};$

17.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^2-5t}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,dt;$

17.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^3}{\sqrt{t^2+4t+5}}\,dt;$

17.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+4t-4}};$

17.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t^2+t+1}};$

17.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+\sqrt{t^2+2t+2}};$

17.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+t+1}-t};$

17.13 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+\sqrt{1-2t-t^2}};$

17.14 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dt;$

17.15 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$

17.16 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{2t}\,dt;$

17.17 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^{11}\sqrt{1+t^4}};$

17.18 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{t^3}}}{t^2\cdot\sqrt[8]{t}}\,dt.$

Тема 14. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій

Інтеграли вигляду $\int_{x_0}^{x} R(\sin t; \cos t)\, dt$, де у загальному випадку R — деяка раціональна функція, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = y$. При цьому $t = 2\operatorname{arctg} y,\ dt = \dfrac{2\,dy}{1+y^2}$;

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot\cos^2\frac{t}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2y}{1+y^2};$$

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Зазначимо, що застосування підстановки $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = y$ можливе лише при $t \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, де k — довільне ціле число.

У деяких частинних випадках існують такі способи інтегрування $R(\sin t; \cos t)$.

1. Якщо $R(\sin t; \cos t)$ — непарна функція за змінною $\sin t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y = \cos t$.

2. Якщо $R(\sin t; \cos t)$ — непарна функція за змінною $\cos t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y = \sin t$.

3. Якщо $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$, то заміна $y = \operatorname{tg} t$ призведе до інтегрування дробово-раціональної функції, при цьому застосування підстановки можливе при $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k, \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, де $k \in \mathbb{Z}$. У такому разі: $\sin t = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ та $dt = \dfrac{dy}{1+y^2}$.

4. Інтеграл $\int_{x_0}^{x} \sin^n t \cos^m t\, dt$ у випадку раціональних m і n зводиться до інтегрування диференціального біному підстановкою $y = \sin^2 t,\ dy = 2\sin t\cos t\, dt$:

$$\int_{x_0}^{x} \sin^n t\cos^m t\, dt = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \sin^{n-1} t\,(1-\sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\sin t\cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x_0}^{\sin^2 x} y^{\frac{n-1}{2}}(1-y)^{\frac{m-1}{2}}\, dy.$$

Якщо m, n — парні натуральні числа, то використовуємо формули пониження степеня: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Наведемо деякі інтеграли, що не обчислюються за допомогою елементарних функцій: $\int_{x_0}^{x} e^{-t^2}\, dt$ — *інтеграл Пуассона*, $\int_{x_0}^{x} \sin t^2\, dt$ та $\int_{x_0}^{x} \cos t^2\, dt$ — *інтеграли Френеля*, $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ — *інтегральний логарифм*, $\int_{x_0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$ — *інтеграл Діріхле.*

Практичне заняття 18

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \cos^5 t\,dt.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція є непарною по змінній $\cos t$, тобто виконується умова $R(\sin t; -\cos t) = -R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо підстановку $y = \sin t$:

$$\int_{x_0}^{x} \cos^5 t\,dt = \int_{x_0}^{x} \cos^4 t\,d(\sin t) = \int_{x_0}^{x} (1-\sin^2 t)^2\,d(\sin t) = \int_{\sin x_0}^{\sin x} (1-y^2)^2\,dy =$$

$$= \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{\sin x_0}^{\sin x} = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3\sin t + \cos t}.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція не є непарною по змінним $\sin t$ та $\cos t$, а також не виконується умова $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $y = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3\sin t + \cos t} = \int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{1}{\frac{6y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2} = -2\int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \frac{d(y-3)}{(y-3)^2 - 10} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{y-3-\sqrt{10}}{y-3+\sqrt{10}}\right|\Bigg|_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right|.$$

⌟

Приклад 3. *Знайдемо рекурентну формулу для інтеграла Ньютона–Лейбніца* $I_n = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos^n t}$, *де* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ *та* $[x_0, x] \bigcap \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \varnothing$.

⌜

Скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$I_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos^n t} = \left|\begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(\cos t)^{n-2}}, & du = -\dfrac{n-2}{(\cos t)^{n-1}} \cdot (-\sin t)\,dt \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt, & v = \operatorname{tg} t \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t}\bigg|_{x_0}^{x} - (n-2)\int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} t \cdot \frac{\sin t}{\cos^{n-1} t}\,dt =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{\cos^n t} - \frac{1}{\cos^{n-2} t}\right) dt =$$

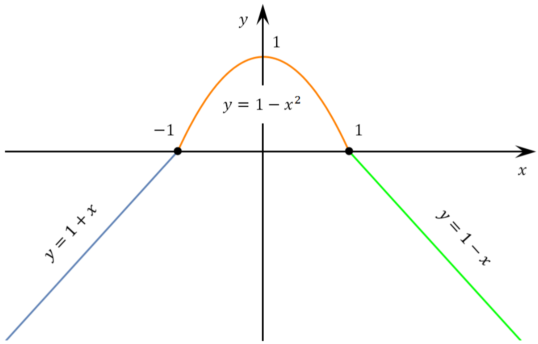
$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \cdot (I_n - I_{n-2}).$$

Отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла I_n через I_{n-2}:

$$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

Приклад 4. *Знайдемо первісну у широкому розумінні для функції*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$



Побудуємо графік функції $f(x)$. На проміжках $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ та $(1, +\infty)$ функція f має первісну F, причому

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x + C_1, & x < -1; \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C_2, & x \in (-1, 1); \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

Співвідношення між сталими C_1, C_2 та C_3 визначимо з умови неперервності первісної F на множині $D_f = \mathbb{R}$: $F(-1-0) = F(-1+0)$, $F(1-0) = F(1+0)$. Тому

$$\frac{1}{2} - 1 + C_1 = -1 + \frac{1}{3} + C_2, \quad 1 - \frac{1}{3} + C_2 = -\frac{1}{2} + 1 + C_3.$$

Отже, $C_1 = C_2 - \dfrac{1}{6}$ та $C_3 = C_2 + \dfrac{1}{6}$, звідки первісна функції f:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{6} + C, & x < -1; \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C, & x \in [-1, 1]; \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{6} + C, & x > 1. \end{cases}$$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

18.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^3 t \cdot \sin 4t \, dt;$

18.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^2 t \cdot \cos^3 t \, dt;$

18.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} \, dt;$

18.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^4 t \cdot \cos^2 t};$

18.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin 2t};$

18.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos t};$

18.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3 - 2\cos t};$

18.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{5 - 3\sin t};$

18.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1 + 5\cos t};$

18.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{2\sin t - \cos t + 5};$

18.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{8\cos^2 t \sin t}{\sin t + \cos t}\, dt$;

18.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2\sin t \cos t}{1 + \sin^4 t}\, dt$.

Знайдіть рекурентні формули для інтегралів Ньютона–Лейбніца:

18.13 $\displaystyle I_n = \int_{x_0}^{x} \cos^n t\, dt,\ n \in \mathbb{N}$;

18.14 $\displaystyle J_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^n t},\ n \in \mathbb{N}$.

Знайдіть первісні у широкому розумінні для функцій:

18.15 $f(x) = \operatorname{sgn}\, x,\ x \in \mathbb{R}$;

18.16 $f(x) = \operatorname{sgn}\, (x^2 + x - 2),\ x \in \mathbb{R}$;

18.17 $f(x) = [3x],\ x \in \left(0, \dfrac{4}{3}\right)$;

18.18 $f(x) = \{x\},\ x \in (-1, 2)$;

18.19 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ x, & 0 < x \leqslant 1; \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$

18.20 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \dfrac{\pi}{4}; \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 3\sin 3x, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Розділ 6. Інтеграл Рімана

Тема 15. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона–Лейбніца

Сукупність точок $P = P([a,b]) = \left\{x_k \mid k = \overline{0,n}\right\}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, таких, що

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$

називається ***розбиттям*** відрізка $[a,b]$. Множина точок $\xi_P = \left\{\xi_k \mid k = \overline{0,n-1}\right\}$: $\forall k = \overline{0,n-1} \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ називається ***сукупністю проміжних точок***, що відповідає розбиттю P. Величина $\|P\| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, називається ***діаметром (нормою) розбиття*** P.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. ***Інтегральною сумою Рімана*** для функції f по розбиттю $P = P([a,b])$ і набору проміжних точок ξ_P називається число

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Число $I \in \mathbb{R}$ називається ***інтегралом Рімана*** функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$$\forall \left(P = P([a,b]), \xi_P\right), \; \|P\| < \delta \;\Rightarrow\; |I - S_P(f, \xi_P)| < \varepsilon.$$

При цьому зазвичай число I записують таким чином: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi_P) = I$, яка не залежить ні від способу розбиття, ні від вибору сукупності проміжних точок, то f — ***інтегровна за Ріманом*** функція, а сама границя $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Множина функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$, позначається як $R([a,b])$.

Теорема (про інтегральні суми для інтеграла Ньютона–Лейбніца). Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна в розумінні Ньютона–Лейбніца на $[a,b]$ і $\int_a^b f(x)\,dx$ — інтеграл Ньютона–Лейбніца. Тоді $\forall P = P([a,b])$ існує така ξ_P, що виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = S_P(f, \xi_P)\,.$$

Теорема (про зв'язок інтегралів Рімана та Ньютона–Лейбніца). Якщо інтеграли Рімана та Ньютона–Лейбніца функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ існують одночасно, то вони рівні один одному.

Теорема (інтегровність неперервної функції). Якщо $f \in C([a,b])$, то f — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Тобто $C([a,b]) \subset R([a,b])$.

Теорема (інтегровність функції зі скінченною множиною точок розриву). Якщо функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ обмежена на $[a,b]$ та $f \in C([a,b]\backslash A)$, де $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset [a,b]$, то f — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена на відрізку $[a,b]$ функція. Для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ визначимо числа $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$ та $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$. Тоді ***нижньою*** та ***верхньою інтегральними сумами Дарбу*** для функції f і розбиття $P = P([a,b])$ називаються, відповідно, числа

$$\underline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \overline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Числа $\underline{\int} f(x)\, dx = \sup\limits_P \underline{S_P}(f)$ та $\overline{\int} f(x)\, dx = \inf\limits_P \overline{S_P}(f)$ називаються, відповідно, ***нижнім*** та ***верхнім інтегралами Дарбу*** функції f на відрізку $[a,b]$.

Лема (зв'язок між інтегралами Дарбу). Для будь-якої обмеженої функції $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ виконується нерівність: $\underline{\int} f(x)\, dx \leqslant \overline{\int} f(x)\, dx$.

Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною за Дарбу*** на $[a,b]$, якщо $\underline{\int} f(x)\, dx = \overline{\int} f(x)\, dx$. При цьому спільне значення верхнього та нижнього інтегралів називається ***інтегралом Дарбу***, який співпадає з інтегралом Рімана і позначається $\int_a^b f(x)\, dx$.

Теорема (критерій інтегровності функції). Для того, щоб обмежена функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P = P([a,b]) :\ 0 \leqslant \overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) < \varepsilon.$$

Теорема (Дарбу). [9, с. 142] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, а також задано розбиття $P = P([a,b])$ та набір проміжних точок ξ_P. Якщо $\exists \lim\limits_{\|P\|\to 0} S_P(f, \xi_P) = I$, то $f \in R([a,b])$ і при цьому $\int_a^b f(x)\, dx = I$.

Для формулювання критерію інтегровності за Ріманом (теорема Лебега) розглянемо деякі нові поняття.

Мірою сегмента $[a,b]$ (інтервалу (a,b), півінтервалу $[a,b)$ чи $(a,b]$) називають його довжину: $\mu([a,b]) = b - a$.

Множина $X \subset \mathbb{R}$ має ***лебегову*** (***жорданову***) ***міру нуль***, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує зліченне покриття $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (скінченне покриття $(I_j)_{j=\overline{1,n}}$) інтервалами, сумарна довжина яких не перевищує ε, тобто $\forall m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu(I_j) < \varepsilon$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon\right)$.

Властивості множин лебегової та жорданової міри нуль.

1. Якщо X має лебегову (жорданову) міру нуль, і $X_1 \subset X$, то й X_1 має лебегову (жорданову) міру нуль.

2. Якщо $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ $\left(X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j\right)$ і кожна з множин X_j має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина X також має лебегову (жорданову) міру нуль.

3. Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.

4. Будь-яка зліченна (скінченна) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.

5. Існує більш ніж зліченна (більш ніж скінченна) множина, що має лебегову (жорданову) міру нуль.

Теорема (компакт лебегової міри нуль). Компакт $K \subset \mathbb{R}$ лебегової міри нуль є множиною жорданової міри нуль.

Теорема (Лебега). Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена функція і E — множина точок її розриву. Тоді $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \mu(E) = 0$.

Властивості інтегровних за Ріманом функцій [1, с. 250].

Нехай функції $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровні за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

1. *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g) \in R([a,b])$ та

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *Інтегровність модуля*: $|f| \in R([a,b])$.

3. *Інтегровність добутку*: $f \cdot g \in R([a,b])$.

4. *Інтегровність звуження*: $\forall\, [a^*, b^*] \subset [a,b]\;\; f \in R([a^*, b^*])$.

5. *Адитивність по області інтегрування*: якщо $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, $f \in R([a,c])$ та $f \in R([c,b])$, то $f \in R([a,b])$ і

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

6. *Інтеграл Рімана з нерівними функціями*: якщо $f(x) \leqslant g(x)\;\; \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Наслідок (інтеграл від невід'ємної функції). Якщо $f \in R([a,b])$ та $f(x) \geqslant 0\;\; \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Наслідок (інтеграл Рімана від додатної функції). Якщо $f \in R([a,b])$, $f(x) \geqslant 0\;\; \forall x \in [a,b]$, та $\exists x_0 \in (a,b)$, що f неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то $\exists c > 0$: $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant c$.

Наслідок (двобічна оцінка інтеграла). Якщо $f \in R([a,b])$ та $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

Наслідок (модуль інтеграла). Якщо $f \in R([a,b])$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Практичне заняття 19

Приклад 1. *Для функції* $f(x) = 2 - x$, $x \in [a, b] = [-1, 3]$, *побудуємо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента* $[a, b]$ *на* $4n$ *рівних частин та обчислимо інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *як границю інтегральних сум.*

⌜

Відповідно до умови, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{4n} = \dfrac{1}{n}$ $\forall k = \overline{0, 4n-1}$. Тому маємо таке розбиття відрізка $[a, b]$: $x_0 = -1$, $x_1 = -1 + \dfrac{1}{n}$, $\ldots$, $x_{4n} = -1 + \dfrac{4n}{n} = 3$.

Оскільки функція $f(x) = 2 - x$ є монотонно спадною на відрізку $[a, b]$, то $\forall k = \overline{0, 4n-1}$:

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = 2 - x_{k+1} = 3 - \frac{k+1}{n};$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = 2 - x_k = 3 - \frac{k}{n}.$$

Обчислимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу:

$$\underline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} (k+1) =$$
$$= 12 - \frac{4n(4n+1)}{2n^2} = 4 - \frac{2}{n};$$
$$\overline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} k =$$
$$= 12 - \frac{(4n-1)4n}{2n^2} = 4 + \frac{2}{n}.$$

При цьому оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_{P_{4n}}}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_{P_{4n}}}(f) = 4$, то $\int_{-1}^{3} (2 - x)\,dx = 4$. ⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Рімана* $\int_0^2 a^x\,dx$, *де* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$, *як границю інтегральних сум.*

⌜

Функція $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, є неперервною і тому інтегровною за Ріманом на відрізку $[0, 2]$. Тому існує границя інтегральних сум, що за теоремою Дарбу співпадає з інтегралом Рімана:

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi_P) = \int_0^2 a^x\,dx.$$

Для обчислення цієї границі розіб'ємо відрізок $[0, 2]$ на $2n$ рівних частин:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, 2\right\},\ n \geqslant 1,$$

та оберемо набір проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \xi_k = \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \,\middle|\, k = \overline{0, 2n-1} \right\}, \ n \geqslant 1.$$

Тоді $\Delta x_k = \dfrac{1}{n} \ \ \forall k = \overline{0, 2n-1}$ та

$$S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^2-1}{a^{\frac{1}{n}}-1} \cdot \frac{1}{n} \to \frac{a^2-1}{\ln a} = \int_0^2 a^x \, dx, \ n \to \infty.$$

┘

Приклад 3. *Дослідимо інтегровність за Ріманом функції Діріхле на довільному відрізку* $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]; \\ 0, & x \in [a, b] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

┌

Множина точок розриву функції Діріхле — весь відрізок $[a, b]$, тобто її мірою є довжина відрізка $b - a$. Звідси за теоремою Лебега маємо, що функція $D \notin R([a, b])$ для довільних $-\infty < a < b < +\infty$.

Також цей факт можна довести за означенням інтеграла Рімана як границі інтегральних сум. Для цього покажемо, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле. Оберемо довільне розбиття відрізка $P = P([a, b]) = \big\{x_k \,|\, k = \overline{0, n}\big\}$. Для кожного проміжку розбиття $[x_k, x_{k+1}]$ існують точки $\xi_k \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$ та $\theta_k \in [x_k, x_{k+1}] \backslash \mathbb{Q}$. Складемо дві інтегральні суми Рімана для функції Діріхле по розбиттю P і наборів проміжних точок $\xi_P = \big\{\xi_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\big\}$ та $\theta_P = \big\{\theta_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\big\}$:

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a;$$

$$S_P(f, \theta_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\theta_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Очевидно, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

┘

Приклад 4. *Доведемо збіжність послідовності* $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$, $n \geqslant 1$, *та виразимо значення границі цієї послідовності через визначений інтеграл.*

┌

Перетворимо вираз із a_n так, щоб він набув вигляду, схожого до інтегральної суми Рімана:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2 + k^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^3 + n^2 \cdot n} - \frac{0^2}{n^3 + 0^2 \cdot n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$, значення якої присутні у сумі. Оскільки $f \in C([0,1])$, то $f \in R([0,1])$. Таким чином, $a_n - \dfrac{1}{2n}$ є інтегральною сумою Рімана для функції f по рівномірному розбиттю

$$P_n = P_n([0,1]) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\},\ n \geqslant 1,$$

відрізка $[0,1]$ та набору проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \,\middle|\, k = \overline{0, n-1} \right\},\ n \geqslant 1.$$

Тобто $a_n = S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) + \dfrac{1}{2n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, то

$$a_n \to \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = (x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4},\ n \to \infty.$$

┘

Для заданої функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ побудуйте нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента $[a,b]$ на $mn, n \in \mathbb{N}$, рівних частин, якщо:

19.1 $f(x) = x^2,\ [a,b] = [-1,1],\ m = 2;$

19.2 $f(x) = x^3,\ [a,b] = [-2,3],\ m = 1;$

19.3 $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ [a,b] = [-2,1],\ m = 3;$

19.4 $f(x) = |x|,\ [a,b] = [-3,2],\ m = 5;$

19.5 $f(x) = [x],\ [a,b] = [-4,0],\ m = 4;$

19.6 $f(x) = \{x\},\ [a,b] = [1,3],\ m = 2;$

19.7 $f(x) = \max\{x, 1-x\},\ [a,b] = [-2,2],\ m = 8.$

Для заданої функції $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ оцініть різницю між верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу для деякого розбиття $P = P([-1,1])$. Чи можливо за рахунок отриманої оцінки зробити висновок щодо інтегровності функції f за Ріманом на відрізку $[-1,1]$?

19.8 $f(x) = x;$

19.9 $f(x) = -|x|.$

Обчисліть інтеграли Рімана, розглядаючи їх як границі інтегральних сум Рімана:

19.10 $\displaystyle\int_0^3 \{x\}\,dx;$

19.11 $\displaystyle\int_{-3}^2 \operatorname{sgn} x\,dx;$

19.12 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^1 [x]\,dx;$

19.13 $\displaystyle\int_{-1}^5 \big(1+|x|\big)\,dx;$

19.14 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx;$

19.15 $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^2}.$

Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ за допомогою інтегральних сум та інтеграла Рімана, де:

19.16 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2};$

19.17 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k};$

19.18 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(4k-3)^3}{k^4};$

19.19 $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$

19.20 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{arcctg}\frac{k}{n^3};$

19.21 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot \sin\frac{\pi k}{n^2};$

19.22 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}} \cdot \sin\frac{k}{n^2} \cdot \operatorname{tg}\frac{k^2}{n^3};$

19.23 $a_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{2^n-1} \left(1+\frac{k}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}};$

19.24 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3};$

19.25 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4+k^4} \cdot \operatorname{arctg}\frac{k}{n} \cdot \sin\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}.$

З'ясуйте, чи є функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, якщо:

19.26 $f(x) = [x] \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, $[a,b] = \left[1, \frac{17}{2}\right];$

19.27 $f(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $[a,b] = \left[\frac{1}{3}, 11\right];$

19.28 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad [a,b] = [0,1].$

Тема 16. Основні теореми інтегрального числення

Теорема (перша теорема про середнє). [1, с. 254] Якщо $\{f, g\} \subset R([a,b])$ та $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$, то існує таке $\mu \in \mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx, \tag{2}$$

де $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m \leqslant \mu \leqslant M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Наслідок (для неперервної функції). Якщо в умовах першої теореми про середнє $f \in C([a,b])$, то існує $\xi \in [a,b]$ таке, що формула (2) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Наслідок (формула середнього значення). Якщо $f \in C([a,b])$, то існує $\xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Теорема (заміна змінної в інтегралі Рімана). Якщо $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$; $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ є диференційовною на $[\alpha,\beta]$ і $\varphi' \in R([\alpha,\beta])$, $E_\varphi \subset D_f$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

Теорема (інтегрування частинами). Нехай $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції та $f' \cdot g \in R([a,b])$. Тоді $f \cdot g' \in R([a,b])$ і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,$$

Інтеграл Рімана як функція верхньої межі

Якщо $f \in R([a,b])$ та $x \in [a,b]$ — довільна точка, то за властивістю інтегровності звуження $f \in R([a,x])$. Таким чином, можемо визначити функцію $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

$\Phi(x)$ визначає інтеграл Рімана як *функцію верхньої межі інтегрування.*

Теорема (про неперервність $\Phi(x)$). Якщо $f \in R([a,b])$, то $\Phi \in C([a,b])$.

Теорема (основна теорема інтегрального числення). Якщо функція $f \in R([a,b])$, то функція $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, диференційовна в кожній точці $x \in [a,b]$, в якій функція f — неперервна і $\Phi'(x) = f(x)$.

Наслідок 1. Якщо $f \in C([a,b])$, то функція f має на сегменті $[a,b]$ первісну Φ, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Наслідок 2. Якщо $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції f не більш ніж зліченна, то функція $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, є *первісною (у широкому розумінні)* функції f на сегменті $[a,b]$.

Теорема (основна формула інтегрального числення). Якщо функція $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції f не більш ніж зліченна, а F — будь-яка первісна (у широкому розумінні) функції f на сегменті $[a,b]$, то виконується рівність (*формула Ньютона-Лейбніца*):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \stackrel{def}{=} F(b) - F(a).$$

Теорема (друга теорема про середнє). [1, с. 257] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ є монотонною функцією, $g \in R([a,b])$. Тоді $\exists\,\xi \in [a,b]$, для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Якщо при цьому f — незростаюча на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, то $\exists\,\xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx$. Якщо f — неспадна на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, то $\exists\,\xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$.

Інтеграл Рімана як складна функція верхньої межі інтегрування

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $E_\varphi \subset [a,b]$, існує похідна функції $\varphi'(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]\backslash X$ (за виключенням не більше, ніж зліченної множини точок $X \subset [\alpha,\beta]$). Розглянемо $\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy$, де $\varphi(x_0) = t_0 \in [a,b]$. Можемо розглядати цей інтеграл як композицію $F \circ \varphi :\; F(t) = \int_{t_0}^t f(y)\,dy$, $t \in [a,b]$, $\Phi(x) = (F \circ \varphi)\,(x)$. За правилом знаходження похідної складної функції будемо мати $\Phi = F \circ \varphi$, $\Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, тобто отримали, що $\dfrac{d}{dx}\Phi(x) = \dfrac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Якщо розглянути інтеграл Рімана як складну функцію нижньої межі інтегрування і об'єднати обидва випадки, то отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,dy = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{3}$$

Наближене обчислення інтеграла Рімана

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R([a,b])$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних проміжків: $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1},x_n]$, де $a = x_0$, $b = x_n$.

Формула прямокутників: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) + R_n$, де R_n — додатковий член. Якщо $f \in C^{(2)}([a,b])$, то $\exists\,\xi \in [a,b] : R_n = \dfrac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\xi)$.

Формула трапецій: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1})+f(x_k))+R_n$, де R_n — додатковий член. Якщо $f\in C^{(2)}([a,b])$, то $\exists\,\xi\in[a,b]: R_n=-\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(\xi)$.

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx,\;\; f\in C_{[a,b]},\;\; f\geqslant 0.$

$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i,\;\; \Delta x_i=\frac{b-a}{n},\;\; \xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=f_{i+1/2}=y_{1+1/2}$

Формула прямокутників: $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\dots+y_{\frac{n}{2}}\right)$;

Щоб формула була точнішою, замінимо прямокутники на трапеції. Площа трапеції буде: $\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x_i=\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\Delta x_i$, $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\Delta x_i$
$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right)$.

Практичне заняття 20

Приклад 1. *Оцінимо значення інтеграла* $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^5\,dx}{1+x}$ *за першою теоремою про середнє.*

Позначимо $f_1(x)=x^5$ та $f_2(x)=\dfrac{1}{1+x}$ для $x\in[0,1]$. Оскільки $\forall x\in[0,1]:$ $f_i(x)\geqslant 0$, $i=\overline{1,2}$, та $\{f_1,f_2\}\subset R([0,1])$ то, згідно із першою теоремою про середнє, можемо оцінити значення інтеграла I двома способами.

1) Оберемо $f_1(x)=x^5$ в якості функції f у першій теоремі про середнє. Тоді існує таке $\mu_1\in\mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$I=\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx=\mu_1\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\mu_1\cdot\ln 2,$$

де $0=\inf\limits_{x\in[0,1]}x^5\leqslant\mu_1\leqslant\sup\limits_{x\in[0,1]}x^5=1$. Тобто $I\in[0,\ln 2]$.

2) Тепер нехай f_2 буде в якості функції f у першій теоремі про середнє. Тоді $\exists\,\mu_2\in\mathbb{R}$ таке, що:

$$I=\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx=\mu_2\int_0^1 x^5\,dx=\mu_2\cdot\frac{1}{6},$$

де $\dfrac{1}{2}=\inf\limits_{x\in[0,1]}\dfrac{1}{1+x}\leqslant\mu_1\leqslant\sup\limits_{x\in[0,1]}\dfrac{1}{1+x}=1$. Тобто $I\in\left[\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{6}\right]$. Порівнюючи дві оцінки, можемо зробити висновок, що оцінка значення інтеграла I другим способом — більш точна.

Приклад 2. *Оцінимо значення інтеграла* $I=\int\limits_0^1\dfrac{e^x\,dx}{1+x^2}$ *за другою теоремою про середнє.*

⌜

Позначимо $f_1(x) = e^x$ та $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ для $x \in [0,1]$. Так як обидві функції є монотонними на відрізку $[0,1]$ та $\{f_1, f_2\} \subset R([0,1])$, то застосуємо другу теорему про середнє до оцінювання значення інтеграла I двома способами.

1) Оскільки f_1 зростає на $[0,1]$ та $f_1(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists \xi_1 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx = f_1(1) \int_{\xi_1}^1 f_2(x)\, dx = e \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \xi_1\right).$$

Маємо, що $\operatorname{arctg} \xi_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant \dfrac{e\pi}{4}$.

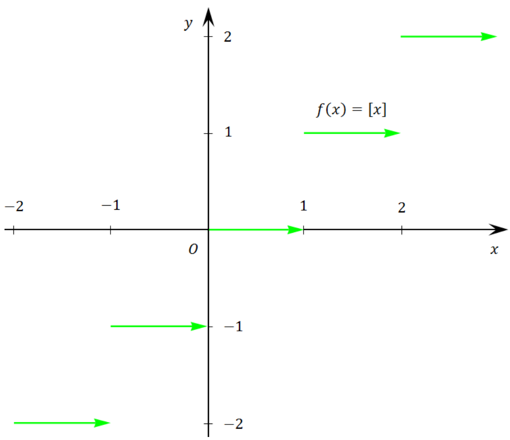
2) Оскільки f_2 — спадна функція на $[0,1]$ та $f_2(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists \xi_2 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx = f_2(0) \int_0^{\xi_2} f_1(x)\, dx = 1 \cdot \left(e^{\xi_2} - 1\right).$$

Маємо, що $e^{\xi_2} \in [1, e]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant e - 1$. У підсумку, ця оцінка є більш точною.
⌟

Приклад 3. *Обчислимо* $\int\limits_0^3 [x]\, dx$.

⌜



На довільному проміжку $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, функція f має первісну F:

$$F_{(n,n+1)}(x) = nx + C_n = [x] \cdot x + C_n.$$

Визначимо співвідношення між сталими $\ldots, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \ldots$ з умови неперервності первісної F на множині $D_f = \mathbb{R}$:

$$F(n-0) = F(n+0), \ n \in \mathbb{Z}.$$

Тому

$$(n-1) \cdot n + C_{n-1} = n \cdot n + C_n \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad C_n = C_{n-1} - n.$$

Продовжуючи за індукцією, отримаємо $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$C_n = (C_{n-2} - (n-1)) - n = \cdots = C_0 - \sum_{i=1}^{n} i = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оскільки $\forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z} : n = [x]$, то остаточно маємо, що при $C_0 = 0$:

$$F(x) = [x] \cdot x - \frac{n(n+1)}{2} = [x] \cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}$$

є первісною для f, неперервною $\forall x \in D_F = D_f$ і при цьому $F'(x) = f(x) = [x]$ $\forall x \in D_f \backslash \mathbb{Z}$. Таким чином, за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^3 [x]\, dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=3} = \left([x] \cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = 3.$$

Також цей результат можна отримати за допомогою властивості адитивності інтеграла Рімана: $f \in R\big([n, n+1]\big)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, тому
$$\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^3 [x]\,dx = 0 + 1 + 2 = 3.$$
$\lrcorner$

Приклад 4. *Для функції* $f = \int\limits_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy$ *знайдемо похідні* $\dfrac{df}{dx}$, *вважаючи* t *фіксованим параметром, та* $\dfrac{df}{dt}$, *вважаючи* x *фіксованим параметром.*

$\ulcorner$

Розглянемо функцію f як складну функцію меж інтегрування і скористаємося формулою (3):
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}} - t\cdot\cos\left(x^2t^2\right);$$
$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} - x\cdot\cos\left(x^2t^2\right).$$
$\lrcorner$

Приклад 5. *Обчислимо наближене значення інтеграла* $I = \int\limits_0^1 \dfrac{e^x\,dx}{1+x^2}$ *за допомогою формул прямокутників/трапецій.*

$\ulcorner$

$\lrcorner$

Доведіть рівності:

20.1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, якщо $f \in C\big([0,1]\big)$;

20.2 $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\,dt$, якщо $a > 0$ та $f \in C\left(\left[0, a^2\right]\right)$;

20.3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\sin t}$.

Обчисліть інтеграли Рімана:

20.4 $\displaystyle\int_{-2}^2 \left|x^2-1\right|dx$;

20.5 $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$;

20.6 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\,dx$;

20.7 $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$;

20.8 $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$;

20.9 $\displaystyle\int_0^4 [x^2]\,dx$;

20.10 $\displaystyle\int_{-2\pi}^{8\pi} [\cos x]\,dx$;

20.11 $\displaystyle\int_2^{\pi-1} \{x^2-1\}\,dx$;

20.12 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$;

20.13 $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Зробіть вказані заміни змінних у інтегралах (якщо це можливо):

20.14 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad x=\frac{1}{\cos t};$ **20.15** $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx, \quad x=\sin t;$

20.16 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{12-5\cos x}, \quad t=\operatorname{tg}\frac{x}{2};$

20.17 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx, \ \ f\in R\big([0,\pi]\big), \quad t=\sin x;$

20.18 $\int_4^7 (x^2-6x+13)\,dx, \quad t=x^2-6x+13.$

Чи справедливе формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца у інтегралах:

20.19 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$ **20.20** $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(2+\operatorname{tg}^2 x)};$

20.21 $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx;$ **20.22** $\int_{-2}^3 \operatorname{sgn}\, x\,dx.$

Знайдіть на області визначення похідні $\frac{df}{dx}$, вважаючи t фіксованим параметром, та $\frac{df}{dt}$, вважаючи x фіксованим параметром, якщо:

20.23 $f=\int\limits_{t^2\sin\sqrt{t}}^{x^2 t} \frac{e^y}{y}\,dy;$ **20.24** $f=\int\limits_{\sin(t+x)}^{\cos(t^2+x^2)} y^2\cos\sqrt{y}\;dy.$

Знайдіть границі:

20.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt;$ **20.26** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\operatorname{arctg} t^2\,dt}{\int\limits_{x^3}^{x^5}\operatorname{arctg} t\,dt};$

20.27 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt};$ **20.28** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t^2}{t}\,dt}{\int\limits_{x^2}^{x^4}\sin t^{\frac{3}{2}}\,dt}.$

З'ясуйте, значення якого з двох інтегралів більше:

20.29 $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$ чи $\int_1^2 \ln x\,dx$? **20.30** $\int_0^1 2^{x^2}\,dx$ чи $\int_0^1 2^{x^3}\,dx$?

20.31 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ чи $\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$? **20.32** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ чи $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

20.33 $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ чи $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$?

Оцініть значення інтегралів за допомогою теорем про середнє:

20.34 $\int_0^2 e^{x^2-x}\, dx$;

20.35 $\int_0^{100} \frac{e^{-x}\, dx}{x+100}$;

20.36 $\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\, dx$;

20.37 $\int_0^1 \frac{x^{19}\, dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$;

20.38 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x^2\, dx$;

20.39 $\int_{-1}^1 \frac{\cos x\, dx}{1+x^2}$;

20.40 $\int_{10}^{20} \frac{x^2\, dx}{x^4+x+1}$;

20.41 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

20.42 $\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{(x+1)(2-x)}$;

20.43 $\int_0^{\sqrt{3}} (x-1) \operatorname{arctg} x\, dx$.

Тема 17. Застосування інтеграла Рімана

Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах. Нехай $f(x)$ — неперервна невід'ємна на $[a,b]$ функція. *Площа* S множини $\Phi = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ (криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \overset{def}{=} S\big([a,b]\big) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ і за абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції $-S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Площа, обмежена кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, ординатами $x = a$, $x = b$ за умови $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \tag{5}$$

Випадок параметричної функції. Нехай функція $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$. При цьому функції $x(t), y(t)$ неперервно–диференційовні та $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$, а також крива є замкненою: $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$. Тоді:

$$S(\Phi) = \int_\alpha^\beta x(t) \cdot y'(t)\,dt. \tag{6}$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах. *Криволінійним сектором* називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса O і утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2: $\Phi = \big\{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\big\}$. Тоді:

$$S \overset{def}{=} S\big([\varphi_1,\varphi_2]\big) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi. \tag{7}$$

Довжина дуги кривої. Нехай $f \in C^{(1)}\big([a,b]\big)$ та крива задана рівнянням $L = f(x)$ у прямокутних координатах. *Довжина дуги AB кривої L*, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, визначається формулою

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx. \tag{8}$$

Якщо крива γ задана у полярних координатах: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Якщо крива γ задана параметрично, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, і при цьому $\{\varphi,\psi\} \subset C^{(1)}\big([t_1,t_2]\big)$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{10}$$

Обчислення об'ємів. Якщо тіло T має об'єм і $S = S(x)$, $x \in [a,b]$, де $S \in C\big([a,b]\big)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис у точці x, то величина цього об'єму обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{11}$$

Якщо криволінійна трапеція $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, де $f \in C\big([a,b]\big)$, обертається навколо вісі Ox, то *об'єм* утвореного *тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{12}$$

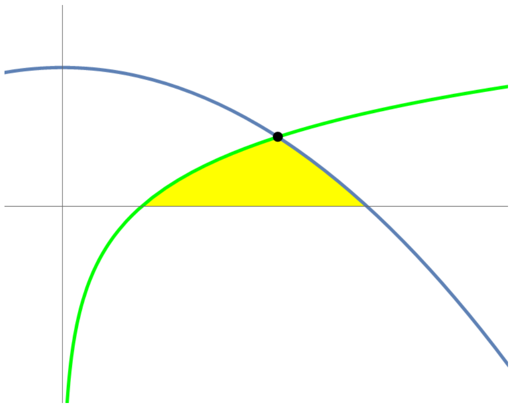
Також за умови, що f є однозначною функцією, об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції Φ навколо вісі Oy, обчислюється за формулою:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx. \tag{13}$$

Практичне заняття 21

Приклад 1. *Обчислимо площу фігури, обмеженої кривими* $y = 2 - x^2$, $y = 0$ *та* $y = \ln x + 1$ *у прямокутній декартовій системі координат.*

⌜



Позначимо функції $f_1(x) = 2 - x^2$ та $f_2(x) = \ln x + 1$. Оскільки f_2 монотонно зростає на $D_{f_2} = (0, +\infty)$ і при цьому f_1 — монотонно спадна на тій же множині, то існує єдина точка перетину заданих кривих, абсциса якої дорівнює $x_0 = 1$.

Також можна визначити абсциси точок перетину кривих із віссю Ox:

$$2 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{2};$$
$$\ln x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^{-1}.$$

Використовуючи формулу (4) та властивість лінійності інтеграла Рімана, маємо:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \big(\ln x + 1\big)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \big(2 - x^2\big)\,dx = x \ln x\,\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{e} + \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо площу фігури, обмеженої петлею лемніскати Бернуллі:* $\big(x^2 + y^2\big)^2 = a^2\big(x^2 - y^2\big)$, *де* $a > 0$.

⌜

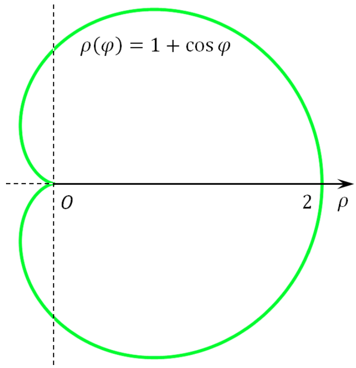
Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді рівняння лемніскати можна переписати таким чином: $\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi$. Враховуючи невід'ємність полярного радіуса, маємо таке рівняння кривої: $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$, де кут $\varphi \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n, \frac{5\pi}{4} + \pi n\right] \bigcap \mathbb{R}^+$. Тоді, згідно із формулою (7), маємо:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$
⌟

Приклад 3. *Обчислимо довжину дуги кардіоїди:* $\rho = 1 + \cos\varphi$.

⌜

Оскільки $\forall\varphi \geqslant 0: \rho(\varphi) \geqslant 0$, а також за рахунок симетричності графіка кардіоїди відносно полярної вісі, досить обрати довільний проміжок $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \pi$ та застосувати формулу (9) для обчислення довжини дуги цієї кривої:



$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$
$$= 8\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\Big(\frac{\varphi}{2}\Big) = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$
⌟

Приклад 4. *Обчислимо довжину дуги однієї арки циклоїди:* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, *де* $a > 0$.

⌜

Зафіксуємо деяке початкове значення параметра t_1. Враховуючи періодичність функції $\cos t$, маємо, що $y(t_1 + 2\pi n) = y(t_1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому одна арка циклоїди відповідає зміні параметра t на величину 2π. Нехай $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. При цьому маємо: $x(t_1) = y(t_1) = y(t_2) = 0$, $x(t_2) = 2a\pi$. Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу (10):

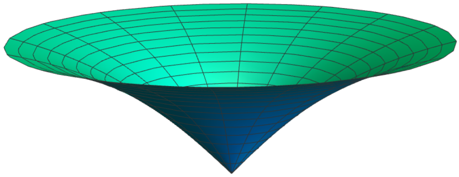
$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'}\right)^2} \cdot \big(a(t - \sin t)\big)'\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} \cdot a(1-\cos t)\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\Big(\frac{t}{2}\Big) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$
⌟

Приклад 5. *Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вісі* Oy, *що обмежена лініями* $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$ *та* $y = \frac{\pi}{3}$.

⌜

Крива $y = \operatorname{arctg} x$ і пряма $y = \frac{\pi}{3}$ перетинаються у одній точці із абсцисою $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Застосуємо формулу (13):

$$V_y = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot \operatorname{arctg} x\,dx =$$



$$= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \operatorname{arctg} x\,dx, & v = \dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2\pi x}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\pi \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right).$$ ⌟

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій СК:

21.1 $y = x^2,\ y = x^4;$

21.2 $x^2 + y^2 = 4x,\ y = x;$

21.3 $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = \dfrac{x^2}{2};$

21.4 $y = \dfrac{16}{x^2},\ y = 17 - x^2,\ x > 0;$

21.5 $xy = 20,\ x^2 + y^2 = 41,\ x \geqslant 0;$

21.6 $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 8;$

21.7 $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right];$

21.8 $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0.$

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у полярній СК:

21.9 $\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0,\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right];$

21.10 $\rho = \sin^2 \dfrac{\varphi}{2},\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right];$

21.11 $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0;$

21.12 $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho \geqslant 1.$

Обчисліть площі фігур, обмежених петлями кривих, що задані параметрично або неявно:

21.13 $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3;$

21.14 $x = \cos^3 t,\ y = \sin t;$

21.15 $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy;$

21.16 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

Знайдіть довжини дуг кривих або петель кривих (параметр $a > 0$):

21.17 $y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}];$

21.18 $\rho = a\sin\varphi,\ a > 0;$

21.19 $\rho = \dfrac{a}{1+\cos\varphi},\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right];$

21.20 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0;$

21.21 $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3;$

21.22 $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3;$

21.23 $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t \in [0, \ln\pi].$

Знайдіть об'єми тіл, обмежених поверхнями:

21.24 $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2;$

21.25 $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9},\ z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9};$

21.26 $x + y + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

21.27 $y = 2x - x^2,\ y = 0$, навколо: а) вісі Ox; б) вісі Oy;

21.28 $xy = 4,\ x = 1$ та $y = 0$, навколо вісі Ox;

21.29 $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2$ та $y = 0$, навколо: а) вісі Ox; б) вісі Oy.

Розділ 7. Функції багатьох змінних

Тема 18. Простір m-вимірних функцій, їх границя та неперервність

Нехай E — певна множина, елементами якої є вектори. Кажуть, що на цій множині побудовано ***лінійний (векторний) простір***, якщо введено операції додавання, множення на дійсне число елементів цієї множини, і вказані операції мають наступні властивості $\forall\,(x, y, z \in E;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

1. $x + y = y + x$;

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3. $\exists\, 0 \in E\colon\ x + 0 = x$ $\quad$ (*існування* 0-*вектора*);

4. $\exists\,(-x) \in E\colon\ x + (-x) = 0$ $\quad$ (*існування протилежного вектора*);

5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

7. $1 \cdot x = x$.

Ці властивості називають ***аксіомами векторного простору***.

Будемо розглядати m-вимірний простір, $m \in \mathbb{N}$, елементами x якого є впорядковані множини з m дійсних чисел: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, де $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $E = \mathbb{R}^m$. Ці елементи по аналогії із просторами $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ (на площині $\mathbb{R}^2$ і у просторі $\mathbb{R}^3$ пари (x, y) і трійки (x, y, z) чисел можна розглядати як координати точок у прямокутній системі координат і як координати, відповідно, двовимірних і тривимірних векторів) будемо розглядати як точки, і як вектори (m-вимірні). У першому випадку для них визначається поняття відстані, у другому — відповідні векторні операції. Лінійна комбінація двох елементів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ із дійсними коефіцієнтами λ і μ визначається рівністю

$$\lambda x + \mu y \overset{def}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots, \lambda x_m + \mu y_m);$$

зокрема, $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)$.

Нормований векторний простір

Відображення $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ називається ***нормою*** (***довжиною***) у векторному просторі, якщо $\forall\,(x, y \in E;\ \lambda \in \mathbb{R})$ виконуються аксіоми норми:

1. $\|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$;

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $\quad$ (*нерівність трикутника*).

Упорядкована пара $(E, \|\cdot\|)$ називається ***лінійним нормованим простором*** (***ЛНП***) та $\|x\| \geqslant 0\ \ \forall x \in E$.

Приклади норм:

1. Для довільного $x \in \mathbb{R}$ введемо норму $\|x\| = |x|$. Тоді $\mathbb{R}$ — ЛНП.

2. Для $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ введемо норму $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$. Відповідно

$$p = 2\colon \qquad \|x\|_2 = \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \qquad (\textit{Евклідова норма});$$

$$p = 1\colon \qquad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |x_k| \qquad (\textit{октаедрична норма});$$

$$p = \infty\colon \qquad \|x\|_\infty = \max_{k=\overline{1,m}} |x_k| \qquad (\textit{кубічна норма}).$$

Метричні простори

Однією з фундаментальних характеристик взаємного розміщення точок множини є відстань між ними.

Нехай E — довільна множина. Відображення $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається ***метрикою***, якщо $\forall x, y, z \in E$ виконуються аксіоми:

1) $\rho(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симетрія*);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*нерівність трикутника*).

Упорядкована пара (E, ρ) називається ***метричним простором***.

Норма в $\mathbb{R}^m$ грає ту ж роль, що й абсолютна величина для точок числової прямої. Відстань від x до нуля визначається як $d(x, 0) = \|x\|$. Тоді всякий нормований векторний простір є метричним, якщо визначити у ньому метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Будемо розглядати точковий m-вимірний простір $E = \mathbb{R}^m$ із метрикою ρ, а також послідовність $\left(x^{(n)}\right)$, $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\right)$, точок простору $\mathbb{R}^m$, тобто відображення $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$, де $x^{(n)} = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Точка $x \in \mathbb{R}^m$ називається ***границею*** послідовності $\left(x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots\right)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(x^{(n)}, x\right) = 0$. У цьому випадку пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ і кажуть, що послідовність $\left(x^{(n)}\right)$ збігається до точки x.

Поняття границі послідовності точок m-вимірного простору може бути зведене до поняття границі числових послідовностей їх координат:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Вектор x називається ***границею*** послідовності векторів $\left(x^{(n)}\right)$, якщо $\left\|x^{(n)} - x\right\| = o(1)$, позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x$.

У теорії метричних просторів використовується мова класичної геометрії. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $x_0 \in X$, $\delta > 0$, $X \subset \mathbb{R}^m$.

Множина $O_\delta(x_0) = \{x \in X \,|\, \rho(x_0, x) < \delta\}$ називається ***відкритою кулею*** радіуса δ з центром у точці $x_0 \in X$, а також δ***-околом*** точки x_0.

Множина $\overline{O_\delta}(x_0) = \{x \in X \,|\, \rho(x_0, x) \leqslant \delta\}$ називається ***замкненою кулею*** радіуса δ з центром у точці $x_0 \in X$.

Множина $S(x_0, \delta) = \{x \in X \,|\, \rho(x_0, x) = \delta\}$ називається ***сферою*** радіуса δ з центром у точці $x_0 \in X$.

Відображення множин

Нехай (X, ρ_1) та (Y, ρ_2) — довільні метричні простори, $E \subset X$. Тоді відображення $f : E \to Y$ означає, що кожному елементу $x \in E$ ставиться у відповідність $y \in Y$, який називається ***образом*** цього елемента і множина $f^{(-1)}(y) = \{x \in E \,|\, f(x) = y\}$ називається ***повним прообразом простору***.

Якщо $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}$ та $f\colon E \to Y$, тоді $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $E \subset \mathbb{R}^m$.

Якщо $X = \mathbb{R}^2$ та $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, тоді $f = f(x, y)$ — функція двох змінних.

Якщо $X = \mathbb{R}^3$ та $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$, тоді $f = f(x, y, z)$ — функція 3-х змінних, фізичний зміст якої є густина або кількість речовини.

Лінією рівня називається геометричне місце точок $f(x, y) = C$, в яких функція приймає одне стале значення. Зокрема/наприклад/, $f = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = c$ — сімейство концентричних кіл.

Поверхнею рівня називається Г.М.Т. $f(x, y, z) = C$, в яких функція приймає одне стале значення. Зокрема/наприклад/, $f = x^2 + y^2 - z^2$, $f = c$. При $c = 0$ рівняння $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ визначає конус; при $c < 0:\ x^2 + y^2 - z^2 = -1$ — двопорожневий гіперболоїд; при $c > 0$ — однопорожневий гіперболоїд.

Границя і неперервність функції багатьох змінних

Будемо розглядати функції $f = f(x)$, які задані на множинах E, що належать m-вимірному простору і набувають числових значень. Оскільки точка m-вимірного простору описується m числами–координатами: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то замість $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^m$, пишуть також $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ і називають ***функцією*** m ***змінних*** $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Функції $f(x, y)$ двох змінних легко зобразити малюнком: їх графіки лежать у тривимірному просторі.

Поняття границі функції багатьох змінних є узагальненням поняття границі функції однієї змінної.

Нехай $f = f(x_1, \ldots, x_m)\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$. Розглянемо $P_0\big(x_1^0, \ldots, x_m^0\big) \in E$ — граничну точку множини E. Також позначатимемо $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається ***границею за Коші*** функції $f(x)$ при $x \to P_0$ $\left(\text{тобто } a = \lim\limits_{x \to P_0} f(x)\right)$, якщо $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon, P_0) > 0$:

$$\begin{cases} 0 < |x_1 - x_1^0| < \delta \\ \cdots \\ 0 < |x_m - x_m^0| < \delta \end{cases} \Rightarrow\ |f(x_1,\, x_2, \ldots, x_m) - a| < \varepsilon.$$

Також цей факт записують так: $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \dots\\ x_m\to x_m^0}} f(x_1,x_2,\dots,x_m)=a$, і число a називають ***m-кратною границею***.

Еквівалентне означення можна дати у термінах послідовностей (*означення Гейне*):

$$\lim_{x\to P_0} f(x)=A \;\;\Leftrightarrow\;\; \forall\{P_n : n\geqslant 1\}\subset E\backslash\{P_0\},\;\; P_n\to P_0\;:\; f(P_n)\to A,\; n\to\infty.$$

Якщо $m=2$ та $\exists \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$, то число A називають ***подвійною границею***. Нехай у цьому випадку множина $E=X\times Y$, де $X\subseteq\mathbb{R}$ та $Y\subseteq\mathbb{R}$. Якщо для кожного $x\in X$, $x\neq a$, існує границя $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)=:\varphi(x)$ та існує границя $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\in\mathbb{R}$, то число A називають ***повторною границею*** функції f у точці $P_0(a,b)$ і записують як

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)=A.$$

Аналогічно визначається повторна границя $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$.

У загальному випадку ($m\geqslant 2$) при послідовних граничних переходах по кожному з аргументів окремо (в тому чи іншому порядку) повторні границі визначаються так. Нехай $E=X_1\times X_2\times\dots\times X_m$, де $X_i\subseteq\mathbb{R}\;\;\forall i=\overline{1,m}$. Якщо існують границі

$$\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,\dots,x_m)=:\varphi_1(x_2,x_3,\dots,x_m),$$

$$\lim_{x_2\to a_2}\varphi_1(x_2,\dots,x_m)=:\varphi_2(x_3,x_4,\dots,x_m),$$

$$\dots$$

$$\lim_{x_m\to a_m}\varphi_{m-1}(x_m)=A,$$

то $\lim\limits_{x_m\to a_m}\lim\limits_{x_{m-1}\to a_{m-1}}\dots\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2,\dots,x_m)=A$ називається ***повторною границею*** за умови існування границі при $x_m\to a_m$ та всіх фіксованих попередніх границях.

Зауваження. Теорема про арифметичні дії аналогічна теоремі про границю функції одного аргумента.

Нехай $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, точка $P_0\in E$ є граничною точкою множини $E\subset\mathbb{R}^m$.

Функція $f: E\to\mathbb{R}$ є ***неперервною в точці*** $P_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)\in E$, якщо $\exists \lim\limits_{\substack{x_1\to x_1^0\\ \dots\\ x_m\to x_m^0}} f(x_1,x_2,\dots,x_m)=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$.

Згідно із означенням границі за Коші, функція $f\colon E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^m$, є неперервною в точці $P_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)\in E$, якщо $\forall\varepsilon>0\;\;\exists\delta(\varepsilon,P_0)>0$:

$$\left|x_1 - x_1^0\right| < \delta, \ \ldots \ , \left|x_m - x_m^0\right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - f(P_0)\right| < \varepsilon.$$

Виходячи зі значень $\{x_i^0 \mid i = \overline{1,m}\}$, надамо незалежним змінним x_i деякі прирости Δx_i. Назвемо ***повним приростом*** функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ у точці $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ вираз

$$\Delta f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0).$$

Відображення $f\colon E \to \mathbb{R}$ — *неперервне в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$\Delta x_1 \to 0, \ \ldots \ , \Delta x_m \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f(x_0) \to 0.$$

Нехай $X = \mathbb{R}^m$ чи (X, ρ) — деякий метричний простір.

Теорема (перша теорема Вейєрштрасса). Якщо f — неперервне відображення компактного простору K в $\mathbb{R}$, $K \subset X$, то f — обмежена на K.

Теорема (друга теорема Вейєрштрасса). Нехай $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subset X$, $M^* = \sup\limits_{x \in K} f(x)$, $m_* = \inf\limits_{x \in K} f(x)$. Тоді існують точки $x_0, x_1 \in K$, в яких функція досягає свого найбільшого і найменшого значення: $M^* = f(x_0)$, $m_* = f(x_1)$.

Мають місце аналоги теорем Больцано–Коші. Аналогом скінченному проміжку в $\mathbb{R}$ є обмежена зв'язна область.

Множина $E \subset \mathbb{R}^2$ називається ***зв'язною***, якщо будь-які дві точки множини можна з'єднати ламаною зі скінченною кількістю ланок, що цілком належать множині E.

Теорема (перша теорема Больцано–Коші). Нехай $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, є неперервним відображенням зв'язної множини з $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Якщо в двох точках $P_1 \in E$ і $P_2 \in E$: $f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$, то існує точка $P_0 \in E$: $f(P_0) = 0$.

Множина $K \subset X$ називається ***компактом*** в просторі (X, ρ), якщо будь-яка послідовність $\left(x^{(n)}\right) \subset K$ містить збіжну підпослідовність.

Практичне заняття 22

Приклад 1. *Знайдемо* $\lim\limits_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 0+}} \dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$.

⌜

Знаходження границі функції багатьох змінних часто зводиться до отримання оцінки значення функції або заміною змінної. Оскільки $\forall x > 0,\ y > 0$:

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} > \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y},$$

то

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 0+}} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} > \lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 0+}} \frac{x+y}{(x+y)^2} = \lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 0+}} \frac{1}{x+y} = +\infty.$$

⌟

Приклад 2. *Для функції* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *знайдемо повторні та подвійну границі у точці* $(0,0)$.

⌜

Оскільки при фіксованому x: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$, а також при фіксованому y: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) = 0.$

Перейдемо до подвійної границі. Довільна пряма (окрім $x=0$), що проходить через граничну точку $(0,0)$, задається рівнянням $y = kx$, де $k\in\mathbb{R}$ — кутовий коефіцієнт прямої. Якщо подвійна границя існує у точці $(0,0)$, то за означенням Гейне вона не залежить від напрямку, у якому відбувається наближення (прямування) до $(0,0)$ за сукупністю змінних функції f. Перевіримо цей факт:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Результат залежить від k, тому подвійної границі в точці $(0,0)$ не існує. ⌟

Зауваження. Довільна пряма (окрім $x=a$), що проходить через деяку точку (a,b), де $a\in\mathbb{R}$ та $b\in\mathbb{R}$ ($\{a,b\}\subset\mathbb{R}$), задається рівнянням $y = k(x-a)+b$, де $k\in\mathbb{R}$ — кутовий коефіцієнт прямої.

Приклад 3. *Доведемо, що подвійна границя* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2x}{x+y^3}$ *не існує.*

⌜

Перейдемо до полярної системи координат у границі. Оскільки гранична точка $(0,0)$ у декартовій СК відповідає граничному значенню $\rho_0 = 0$ та довільному значенню полярного кута φ у полярній СК, то перевіримо, чи залишиться залежність від кута φ у границі:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x}{x+y^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\cos\varphi}{\rho\cos\varphi+\rho^3\sin^3\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi+\rho^2\sin^3\varphi} = \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi} = 2,$$

якщо $\cos\varphi\neq 0$. Якщо ж $\varphi\in\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, то границя дорівнює нулю. Отже, подвійної границі в точці $(0,0)$ не існує. ⌟

Приклад 4. *Для функції* $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, *знайдемо повторні та подвійну границі у точці* $(0,0)$.

⌜

Нехай $y\notin\left\{\dfrac{1}{k\pi}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$. Тоді $y\sin\dfrac{1}{y}\neq 0$. Підберемо дві послідовності x_n та x_n^* таким чином, щоб отримати різні граничні значення $f(x_n,y)$ та $f(x_n^*,y)$. Наприклад, задамо послідовність $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n\geqslant 1$, а послідовність

$x_n^* = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, $n \geqslant 1$. У такому разі $x_n \to 0$ та $x_n^* \to 0$ при $n \to \infty$, але $f(x_n, y) = 0$ $\forall n \geqslant 1$ та

$$f(x_n^*, y) = \left(\frac{2}{(4n+1)\pi} + y\right) \cdot \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} \cdot \sin\frac{1}{y} \to y\sin\frac{1}{y}, \quad n \to \infty.$$

Отже, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ відповідно до означення Гейне. Тому повторна границя $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ також не існує. Аналогічно не існує й границі $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$. Разом із цим, з нерівності

$$0 \leqslant \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y| \to 0, \quad (x,y) \to (0,0),$$

випливає, що подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

┘

Приклад 5. *Дослідимо на неперервність* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2x+y}, & 2x+y \neq 0; \\ 0, & 2x+y = 0. \end{cases}$

┌

Оскільки подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to -2x_0}} f(x,y) = \infty$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то функція f має розриви 2 роду у точках прямої $2x+y=0$, окрім, можливо, $(0,0)$. Окремо перевіримо у початку координат за допомогою переходу у полярну СК:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{2x+y} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{2\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\cos^2\varphi}{2\cos\varphi + \sin\varphi} = 0 = f(0,0),$$

якщо $2\cos\varphi + \sin\varphi \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \notin \left\{k\pi - \operatorname{arctg} 2 \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (що відповідає прямій $2x+y=0$). Тобто значення границі не залежить від кута φ, звідки маємо, що функція f — неперервна у точці $(0,0)$. Очевидно, що в інших точках площини функція також є неперервною.

┘

Приклад 6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$

┌

Функція f є неперервною у довільній точці $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ як композиція неперервних елементарних функцій на цій множині. Дослідимо окремо, чи є вона неперервною в точці $(0,0)$. Із нерівності $\sin t \leqslant t$ при $t \geqslant 0$ та нерівності Коші між середніми геометричним і середнім арифметичним маємо таку оцінку:

$$\left|\sin xy\right| \leqslant |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

Враховуючи те, що умова $(x, y) \to (0, 0)$ є еквівалентною умові $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$, отримаємо:

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad (x, y) \to (0, 0).$$

Тому подвійна границя $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0 \neq 1 = f(0, 0)$, тобто функція f має розрив у точці $(0, 0)$. $\lrcorner$

Знайдіть повторні границі $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{y \to b} f(x, y) \right)$ та $\lim\limits_{y \to b} \left(\lim\limits_{x \to a} f(x, y) \right)$, якщо:

22.1 $f(x, y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $x > 0$; $a = \infty$, $b = 0+$;

22.2 $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$; $a = b = \infty$;

22.3 $f(x, y) = \sin \dfrac{\pi x}{2x+y}$, $y \neq -2x$; $a = b = +\infty$;

22.4 $f(x, y) = \log_x(x+y)$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x + y > 0$; $a = 1$, $b = 0$.

Знайдіть повторні та подвійну границі у точці $(0, 0)$, якщо вони існують, для функцій:

22.5 $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x \neq -y$;

22.6 $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x}$, $x \neq 0$;

22.7 $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

22.8 $f(x, y) = \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$.

Знайдіть подвійні границі (якщо вони існують):

22.9 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy^2}{x^2+y^4}$;

22.10 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

22.11 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(x^2+y^2\right) \cdot e^{-(x+y)}$;

22.12 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to +\infty}} x^y$;

22.13 $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, де $a \in \mathbb{R}$;

22.14 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

Дослідіть неперервність функцій на $\mathbb{R}^2$:

22.15 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy}, & xy \neq 0; \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$

22.16 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

22.17 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^3+y^3}, & x \neq -y; \\ 3, & x = -y. \end{cases}$

22.18 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y^2}{x+y^2}, & x \neq -y^2; \\ 0, & x = -y^2. \end{cases}$

22.19 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Довизначте функцію f, задану на множині $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, таким чином, щоб вона була неперервною на $\mathbb{R}^2$:

22.20 $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$;

22.21 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

22.22 $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

22.23 $f(x,y)=\dfrac{\ln\bigl(1+|xy|\bigr)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тема 19. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків

Наведемо наступні означення для функцій трьох змінних, оскільки в подальшому будуть розглянуті приклади саме для функцій двох і трьох змінних. Узагальнення введених понять та означень для більшого числа змінних цілком очевидні.

Частинні похідні, диференціал

Нехай $f = f(x, y, z)\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$. Розглянемо точку $P_0(x_0, y_0, z_0) \in E$ та Δx, Δy, Δz — довільні прирости змінних.

Повним приростом функції f у точці P_0 позначається/називається/

$$\Delta f(P_0) = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y,\, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Якщо існує скінченна границя відношення ***частинного приросту*** функції f по змінній x до приросту аргумента x:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

то вона називається ***частинною похідною*** функції f ***по змінній*** x та позначається як $f'_x(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = L$. Аналогічно визначаються ***частинні похідні по змінним*** y та z: $f'_y(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$, $f'_z(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$.

Функція $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$, називається ***диференційовною в точці*** $P_0 \in E$, якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді:

$$\Delta f(P_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho),$$

де A, B, C — сталі, що не залежать від Δx, Δy та Δz, а відстань між точками $P_0(x_0, y_0, z_0)$ та $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ — це $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Якщо функція f — диференційовна, то лінійна частина повного приросту f називається ***повним диференціалом***:

$$df(P_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z.$$

Теорема (про існування частинних похідних). Для функції $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$, що диференційовна в точці $P_0 \in E$, існують частинні похідні: $f'_x(P_0) = A$, $f'_y(P_0) = B$, $f'_z(P_0) = C$.

Зауваження. Зазначимо, що обернене до теореми твердження не справджується: існування частинних похідних не забезпечує диференційовності функції (це лише *необхідна умова диференційовності*).

У іншій формі означення диференційовності в точці P_0 функції f набуде вигляду, який використовується на практиці для дослідження диференційовності.

Наслідок. Нехай існують всі частинні похідні функції $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$, у точці $P_0 \in E$. Тоді f — диференційовна в точці P_0, якщо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{\Delta f(P_0) - f'_x(P_0)\cdot\Delta x - f'_y(P_0)\cdot\Delta y - f'_z(P_0)\cdot\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = 0.$$

Теорема (достатні умови диференційовності функції). Для того, щоб функція f була диференційовною в точці $P_0 \in D_f$, достатньо існування неперервних частинних похідних по всім змінним у цій точці.

(вводимо пере-позначення для диференційовних у точці P_0 функцій ?) Головна лінійна частина повного приросту функції називається ***повним диференціалом*** і записується як $df(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot dz$. Повний диференціал є сумою *частинних диференціалів*.

Оскільки $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0) = f'_x(P_0)\cdot\Delta x + f'_y(P_0)\cdot\Delta y + f'_z(P_0)\cdot\Delta z + o(\rho)$, то має місце **наближена формула обчислення** значення функції:

$$f(P) \approx f(P_0) + f'_x(P_0)\cdot\Delta x + f'_y(P_0)\cdot\Delta y + f'_z(P_0)\cdot\Delta z.$$

Для функцій багатьох змінних має місце *інваріантність форми першого диференціала*. Також справедливі такі правила диференціювання:

1. $dc = 0$, де c — константа;

2. $d(f \pm g) = df \pm dg$;

3. $d(f\cdot g) = f\,dg + g\,df$;

4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\,df - f\,dg}{g^2}$, $g \neq 0$.

Похідна за напрямком, градієнт

Нехай $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$, та $P(x, y, z) \in E$. Проведемо із точки P вектор S з напрямними косинусами $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Розглянемо на векторі S точку $P_1(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$, яка знаходиться на відстані Δs від його початку. Тоді $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Якщо $f = f(x, y, z)$ — неперервна і має неперервні частинні похідні на множині E, тоді

$$\Delta f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\Delta z + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y + \varepsilon_3\cdot\Delta z;$$

$$\frac{\Delta f(P)}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Оскільки $\dfrac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$ та $\dfrac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, то

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f(P)}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\cos\gamma=\frac{\partial f}{\partial s}(P).$$

Отже,/Таким чином визначається.../ ***похідна функції*** f ***у точці*** $P(x,y,z)$ ***за напрямком вектора*** S визначається як $\dfrac{\partial f}{\partial s}(P)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta f(P)}{\Delta s}$.

У кожній точці множини E, де задана функція $f=f(x,y,z)$, визначимо вектор, проекції якого на осі координат є значеннями частинних похідних: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$. Цей вектор називається ***градієнтом*** та позначається як

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k},$$

де $\vec{i}=\overrightarrow{(1,0,0)}$, $\vec{j}=\overrightarrow{(0,1,0)}$ та $\vec{k}=\overrightarrow{(0,0,1)}$ — *одиничні вектори.*

Похідні вищих порядків

Нехай $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^3$. Якщо f — диференційовна в точці $P_0(x_0,y_0,z_0)\in E$, то існують частинні похідні $f'_x(P_0)$, $f'_y(P_0)$, $f'_z(P_0)$, які є функціями змінних x,y,z і від них можна брати похідні. ***Частинні похідні другого порядку*** позначають таким чином: $f''_{xx}(P_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$, аналогічно по іншим змінним. *Частинні похідні по різним змінним* називають ***мішаними похідними***: $f''_{xy}(P_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P_0)$ і т. д.

За означенням, *частинні похідні другого порядку* визначаються так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'_x(x,y_0,z_0)-f'_x(x_0,y_0,z_0)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_x(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f'_x(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}.$$

Для функції двох змінних $z=f(x,y)$ маємо 2 частинні похідні 1-го порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, та чотири частинні похідні 2-го порядку: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Теорема (про мішані похідні). Нехай $f:E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^2$, для якої існують неперервні в деякому околі точки P_0 частинні похідні f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}. Тоді в цій точці похідна не залежить від порядку її обчислення і $f''_{xy}(P_0)=f''_{yx}(P_0)$.

Зауваження. Якщо мішані похідні не є неперервними у точці P_0, то теорема може не виконуватись.

Після введення другої похідної можна послідовно ввести поняття третьої похідної, четвертої похідної і т.д., тобто індуктивно можна ввести поняття n-ої похідної.

Функція $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, називається n ***разів диференційовною*** в точці $P_0\big(x_1^0, \ldots, x_m^0\big)$, якщо існує окіл точки P_0, у якому існують частинні похідні по всім змінним до $(n-1)$ порядку, і кожна з них, як функція, — диференційовна в точці P_0.

Теорема. Якщо $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, є двічі диференційовною у точці $P_0 \in E$, то справедлива рівність: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(P_0)$.

Має місце також *загальна теорема про мішані похідні.*

Теорема. Якщо $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, n разів диференційовна у точці $P_0 \in E$, то похідна n-го порядку не залежить від послідовності її обчислення.

Диференціали вищих порядків

Нехай $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, та точка $P_0 = P_0(x_0, y_0) \in E$. Також нехай існує такий окіл $O_\delta(P_0)$, що f диференційовна $\forall x \in O_\delta(P_0)$:

$$df(P_0) = \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\, dy.$$

Якщо f — n разів диференційовна у точці P_0, то диференціали для цієї функції визначаються таким чином:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy;$$

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(dy)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 f(x,y);$$

(останній вираз є символічним записом)

$$d^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,(dx)^3 + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}\,(dx)^2\, dy + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}\, dx\,(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,(dy)^3;$$

$$d^n f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(k)}_{x^k} \cdot f^{(n-k)}_{y^{n-k}}\,(dx)^k\,(dy)^{n-k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n f(x,y).$$

Формула Тейлора

Нехай функція $f = f(P) = f(x_1, \ldots, x_m)$ задана в деякому δ-околі точки $P_0\big(x_1^0, \ldots, x_m^0\big)$ і $(n+1)$ раз диференційовна в цьому околі. Тоді повний приріст $\Delta f(P_0) = f(P) - f(P_0)$ даної функції в точці P_0 для будь-якої точки P із вказаного δ-околу може бути поданий/представлений/ у такій формі:

$$\Delta f(P_0) = df\,\Big|_{P_0} + \frac{1}{2!} d^2 f\,\Bigg|_{P_0} + \ \ldots\ + \frac{1}{n!} d^n f\,\Bigg|_{P_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f\,\Bigg|_{N}, \qquad (14)$$

де N — деяка точка із δ-околу, що залежить від $P(x_1, \ldots, x_m)$, а диференціали dx_i змінних x_i, що входять у вирази $d^k f\,\big|_{P_0}$, $k = \overline{1,n}$, та $d^{n+1} f\,\big|_N$, дорівнюють $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. Формула (14) називається ***формулою Тейлора функції*** $f = f(P)$ ***із центром розвинення у точці*** P_0.

Теорема (локальна формула Тейлора). Нехай функція $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — n разів диференційовна в точці $P_0\big(x_1^0, \ldots, x_m^0\big) \in D_f$. Тоді при $\|h\| \to 0$, де $h = P - P_0$, справджується формула:

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0)(h) + \frac{d^2 f(P_0)(h)}{2!} + \ \ldots \ + \frac{d^n f(P_0)(h)}{n!} + o\big(\|h\|^n\big),$$

яка називається ***формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано***.

Практичне заняття 23

Приклад 1. *Дослідимо на диференційовність функцію* $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ *на множині* $D_f = \mathbb{R}^2$.

⌜

1. За правилами диференціювання знаходимо частинні похідні:

$$f'_x(x, y) = \frac{\sqrt{|y|}}{2\sqrt{|x|}} \cdot \operatorname{sgn}\, x,\ x \neq 0; \qquad f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\sqrt{|y|}} \cdot \operatorname{sgn}\, y,\ y \neq 0.$$

Тобто на всій площині, окрім координатних осей, частинні похідні існують та неперервні, звідки робимо висновок про диференційовність функції на цій множині.

2. Перевіримо за означенням, чи існують частинні похідні на координатних осях:

$$\forall (x_0, 0), x_0 \neq 0 : \ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, 0 + \Delta y) - f(x_0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|x_0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = \infty;$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0 = f'_y(0, 0);$$

$$\forall (0, y_0), y_0 \neq 0 : \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, y_0) - f(0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot y_0|} - 0}{\Delta x} = \infty;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 = f'_x(0, 0).$$

Оскільки частинні похідні на відповідних координатних осях не існують (крім початку координат), то за теоремою про існування частинних похідних функція не є диференційовною на них.

3. Тепер можемо скористатися наслідком із означення диференційовності, щоб перевірити диференційовність функції окремо у точці $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = |\Delta y = k \cdot \Delta x| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|k|} \cdot |\Delta x|}{\sqrt{1 + k^2} \cdot |\Delta x|} = \sqrt{\frac{|k|}{1 + k^2}}.$$

Отже, остання границя не існує, бо залежить від напрямку наближення до точки $(0,0)$. Тому остаточний висновок: функція є диференційовною на всій площині, окрім координатних осей. ⌟

Приклад 2. *Обчислимо похідну функції* $f(x,y) = \ln(6x+7y)$ *в точці* $M(-2,2)$ *за напрямком вектора* $\overrightarrow{MM_1}$ $(\overrightarrow{P_0P_1})$, *де* $M_1 = (2,-1)$.

⌜

Знайдемо одиничний вектор l, що має початок у точці $M(-2,2)$ та співпадає за напрямком із $\overrightarrow{MM_1} = (4,-3) = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Так як $|\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$, то

$$l = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right), \qquad \text{тобто} \quad \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\beta = -\frac{3}{5}.$$

Знайдемо частинні похідні функції f в точці $M(-2,2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{6}{6x+7y}\bigg|_M = 3; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = \frac{7}{6x+7y}\bigg|_M = \frac{7}{2}.$$

Тепер можемо обчислити похідну функції f в точці $M(-2,2)$ за напрямком вектора l:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\cdot\cos\beta = 3\cdot\frac{4}{5} + \frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10},$$

тобто функція f в точці M зростає у напрямі вектора $\overrightarrow{MM_1}$ зі швидкістю 0,3. ⌟

Приклад 3. *Обчислимо наближене значення виразу* $\dfrac{\cos(\sin 89^\circ) + \ln 0{,}96}{1{,}99^{\operatorname{arctg} 1{,}03}}$ *за допомогою першого диференціала.*

⌜

Розглянемо функцію $f(x,y,z,t) = \dfrac{\cos(\sin x) + \ln y}{z^{\operatorname{arctg} t}}$. Вона є диференційовною на множині $M = \mathbb{R}\times(0,+\infty)\times(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, тому можемо обчислити її частинні похідні на цій множині:

$$f'_x = \frac{-\sin(\sin x)\cdot\cos x}{z^{\operatorname{arctg} t}}; \qquad f'_z = \frac{-\big(\cos(\sin x) + \ln y\big)\cdot\operatorname{arctg} t}{z^{1+\operatorname{arctg} t}};$$

$$f'_y = \frac{1}{y\cdot z^{\operatorname{arctg} t}}; \qquad f'_t = -\frac{\cos(\sin x) + \ln y}{z^{\operatorname{arctg} t}}\cdot\frac{\ln z}{1+t^2}.$$

Оберемо точку P_0 із координатами $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$ та $t_0 = 1$, яка належить множині M. Тоді для $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$, $\Delta y = -0{,}04$, $\Delta z = -0{,}01$ та $\Delta t = 0{,}03$ за наближеною формулою обчислення значення функції маємо, що

$$\frac{\cos(\sin 89^\circ) + \ln 0{,}96}{1{,}99^{\operatorname{arctg} 1{,}03}} = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z, t_0+\Delta t) \approx$$

$$\approx \frac{\cos 1}{2^{\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{2^{\frac{\pi}{4}}}\cdot(-0{,}04) - \frac{\cos 1\cdot\frac{\pi}{4}}{2^{1+\frac{\pi}{4}}}\cdot(-0{,}01) - \frac{\cos 1}{2^{\frac{\pi}{4}}}\cdot\frac{\ln 2}{2}\cdot 0{,}03.$$

⌟

Приклад 4. *Для функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ знайдемо всі частинні похідні до другого порядку включно (в області їх існування), а також перший і другий диференціали, якщо $f(x,y) = \ln\left(x + y^3\right)$.*

⌜

Нехай/Позначимо/ $x + y^3 = t$. Тоді $f(t) = \ln t \quad \Rightarrow \quad df = (\ln t)'_t\, dt = \dfrac{1}{t}\, dt$ при $t > 0$. Тепер продиференціюємо $f(x,y)$ як складну функцію двох змінних:

$$df = \frac{1}{x+y^3}\, d\left(x + y^3\right) = \frac{1}{x+y^3}\left(dx + 3y^2\, dy\right).$$

Із формули для першого диференціала функції двох змінних маємо:

$$df = f'_x(x,y)\, dx + f'_y(x,y)\, dy.$$

Звідси можемо визначити частинні похідні першого порядку функції f за умови, що $x + y^3 > 0$: $f'_x(x,y) = \dfrac{1}{x+y^3}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{3y^2}{x+y^3}$. Обчислимо частинні похідні другого порядку функції f за правилами диференціювання:

$$f''_{xx}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_x = -\frac{1}{(x+y^3)^2}; \qquad f''_{yy}(x,y) = \left(f'_y(x,y)\right)'_y = \frac{6xy - 3y^4}{(x+y^3)^2};$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_y = \frac{-3y^2}{(x+y^3)^2}.$$

Відповідно до формули другого диференціала маємо, що при $x + y^3 > 0$:

$$\begin{aligned} d^2 f &= f''_{xx}(x,y)\,(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\, dx\, dy + f''_{yy}(x,y)\,(dy)^2 = \\ &= -\frac{1}{(x+y^3)^2}\left(dx^2 + 6y^2\, dx\, dy - 3y(2x - y^3)\, dy^2\right). \end{aligned}$$

⌟

Приклад 5. *Знайдемо мішану похідну $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}$ для функції $f(x,y,z) = 2^{xy^2z^3}$.*

⌜

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} &= \left(f'_y(x,y,z)\right)'_z = \left(2^{xy^2z^3} \cdot \ln 2 \cdot 2xyz^3\right)'_z = \\ &= 2^{xy^2z^3} \cdot \ln^2 2 \cdot 3xy^2z^2 \cdot 2xyz^3 + 2^{xy^2z^3} \cdot \ln 2 \cdot 2xy \cdot 3z^2. \end{aligned}$$

⌟

Приклад 6. *Знайдемо розклад функції $f(x,y) = e^x \cdot \operatorname{sh} y$ в околі точки $P_0(0,0)$ за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано з точністю до членів 3-го порядку.*

⌜

Скористаємося формулою Тейлора–Маклорена для функцій однієї змінної:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right), \quad x \to 0;$$

$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) = y + \frac{y^3}{6} + o\left(y^3\right), \quad y \to 0.$$

Враховуючи, що $P(x,y)\to P_0(0,0) \quad\Leftrightarrow\quad \|(x,y)\|^2 = x^2+y^2\to 0$, маємо асимптотичний розклад:

$$e^x\cdot \operatorname{sh} y = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\cdot\left(y+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right) =$$
$$= y+xy+\frac{x^2y}{2}+\frac{y^3}{6}+o\big(\|(x,y)\|^3\big),\quad \|(x,y)\|\to 0.$$

┘

Дослідіть функцію $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ на диференційовність на множині $\mathbb{R}^2$ (D_f), якщо:

23.1 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$;

23.2 $f(x,y)=xe^y+ye^x$;

23.3 $f(x,y)=\ln\left(x+y^2\right)$, $x>-y^2$;

23.4 $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(x^2+2y^2\right)$;

23.5 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

23.6 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$ $\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Обчисліть похідну функції $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ в точці $P_0\left(x_0,y_0\right)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, а також градієнт f у точці P_0, якщо:

23.7 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(1,1)$, $P_1(2,0)$;

23.8 $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$, $P_0(1,1)$, $P_1(2,2)$.

Обчисліть похідну функції $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ в точці $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ за напрямком вектора $\vec{a}$, а також градієнт f у точці P_0, якщо:

23.9 $f(x,y)=e^{x^2+y^2+z^2}$, $P_0(1,0,0)$, $\vec{a}=(0,1,1)$;

23.10 $f(x,y)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, $P_0(1,-1,1)$, $\vec{a}=(1,1,1)$.

За допомогою першого диференціала обчисліть наближено значення таких виразів:

23.11 $(0{,}92)^{\frac{1}{3{,}97}}$;

23.12 $\sqrt{3{,}98^2+3{,}01^2}$;

23.13 $\ln\left(1{,}02+\sqrt[3]{0{,}97}-\sqrt{1{,}01}\right)$;

23.14 $\dfrac{\operatorname{tg}46^\circ\cdot\operatorname{arcctg}0{,}01}{\sqrt[2{,}02]{4{,}03}}$.

Знайдіть всі частинні похідні та диференціали першого і другого порядків (в області їх існування) для функції $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, якщо:

23.15 $f(x,y)=xy^3-3x^2y^2+2y^4$;

23.16 $f(x,y,z)=e^{x+y^2-z^3}$;

23.17 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$.

Нехай функції $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ та $u\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ мають неперервні похідні другого порядку (є двічі неперервно–диференційовними) на множинах визначення. Знайдіть диференціали першого та другого порядків наведених складних функцій:

23.18 $F(x,y,z)=g\big(x^2+y^2-z\big)$;

23.19 $F(x,y)=h(x+y,\,x-y)$;

23.20 $F(x,y)=h\left(x^2y,\,\dfrac{x}{y^2}\right)$;

23.21 $F(x,y,z)=u(xy,\,\sin y,\,x+z)$;

23.22 $F(x,y,z)=u\big(x^2+y^2,\,x^2-y^2,\,2xz\big)$.

Знайдіть вказану частинну/мішану/ похідну для функції $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$:

23.23 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}$, якщо $f(x,y)=(2x-5)\cdot\cos\dfrac{1}{y^2}$, $y\neq 0$;

23.24 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, якщо $f(x,y,z)=x^3\cdot\sin(yz)+\big(x^2+y^2\big)\cdot e^{x+z}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

23.25 $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2\,\partial y^2\,\partial z}$, якщо $f(x,y,z)=x^5-xy^2z^2+x^2y^2z-\ln\big(x^2-z\big)$, $z<x^2$;

23.26 $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ для $m,n\in\mathbb{Z}^+$, якщо $f(x,y)=\sin(xy)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

23.27 $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ для $m,n\in\mathbb{N}$, якщо $f(x,y)=\ln(1+x+y)$, $x+y>-1$;

23.28 $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ для $m,n\in\mathbb{Z}^+$, якщо $f(x,y)=\big(x^2+y^2\big)\cdot e^{x-y}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Знайдіть всі частинні похідні першого і другого порядків (в області їх існування) для функції $z=z(x,y)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, визначеної співвідношенням:

23.29 $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$;

23.30 $x+y+z=e^z$;

23.31 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z=7$;

23.32 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

Знайдіть розклад функції $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ в околі точки $P_0\big(x_0,y_0\big)$ за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано з точністю до членів 2-го порядку ($n=2$), якщо:

23.33 $f(x,y)=e^x\cdot\ln(1+y)$, $P_0(0,0)$;

23.34 $f(x,y)=(1+x)^y$, $P_0(0,0)$;

23.35 $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $P_0(0,0)$;

23.36 $f(x,y)=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}y}$, $P_0(0,0)$;

23.37 $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$, $P_0(0,0)$;

23.38 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$, $y\neq 0$, $P_0(1,1)$;

23.39 $f(x, y) = \ln \dfrac{1 - x - y + xy}{1 - x - y}$, $P_0(0, 0)$;

23.40 $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, $x \neq y$, $P_0(1, 2)$;

23.41 $f(x, y) = x \cdot \cos(x - y)$, $P_0(\pi, 2\pi)$;

23.42 $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$, $P_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Тема 20. Екстремуми функцій багатьох змінних

Деякі відомості про квадратичні форми

Функція
$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} x_i y_k, \tag{15}$$
що залежить від $x_i, y_k,\ i, k = \overline{1, m}$, називається ***білінійною формою*** від змінних $x_i, y_k,\ i, k = \overline{1, m}$.

Функція $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i,k=1}^{m} a_{ik} x_i x_k$ називається ***квадратичною формою*** (***КФ***), що відповідає білінійній формі (15). Якщо при цьому $a_{ik} = a_{ki}\ \forall i, k = \overline{1, m}$, то квадратична форма називається ***симетричною***.

Квадратична симетрична форма $\Phi = \sum\limits_{i,k=1}^{m} a_{ik} x_i x_k$ називається ***додатньо визначеною*** (***від'ємно визначеною***), якщо для довільних значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_m$, які одночасно не дорівнюють нулю $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0)$, Φ набуває строго додатніх (строго від'ємних) значень. Додатні та від'ємні КФ називаються ***знаковизначеними***.

КФ називається ***знакозмінною***, якщо при одному наборі $x_1, x_2, \ldots, x_m$ вона набуває додатнього значення, а при іншому — від'ємного. КФ — ***квазізнаковизначена***, якщо вона набуває лише недодатніх або невід'ємних значень, при цьому обертається в нуль для значень $x_1, x_2, \ldots, x_m$, що одночасно не дорівнюють нулю.

Означення та необхідна умова екстремума

Точка $P_0 \in D_f$ називається точкою ***локального максимуму*** (***мінімуму***) функції $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, якщо існує $S(P_0, \delta) \subset D_f$ така, що $\forall x \in S(P_0, \delta)$ виконується нерівність: $f(x) \leqslant f(P_0)$ $\big(f(x) \geqslant f(P_0)\big)$. Максимуми та мінімуми функції називаються її ***екстремумами***. Якщо $\forall x \neq P_0$ виконується строга нерівність, то відповідний екстремум називається ***строгим***.

Таким чином, для локального екстремуму функції в деякому околі екстремальної точки приріст функції $\Delta f(P_0) = f(x) - f(P_0)$ є знакосталим, причому недодатним для максимуму, та невід'ємним — для мінімуму.

Теорема (необхідна умова екстремума). Якщо в точці P_0 функція $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ диференційовна і має в цій точці локальний екстремум, то $df(P_0) = 0$ або, що те ж саме, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = 0,\ j = \overline{1, m}$.

Точки області визначення функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, в яких $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0$ $\forall j = \overline{1, m}$, називаються ***стаціонарними***.

Достатні умови екстремума

Симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

назвемо ***матрицею квадратичної форми***. ***Кутовими мінорами*** A називаються такі m визначників цієї матриці:

$$A_1 = |a_{11}|, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots \ , \quad A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Теорема (критерій Сільвестра). Для того, щоб КФ з симетричною матрицею $A = (a_{ij})$ була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб для її кутових мінорів виконувались умови: $A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \dots,\ A_m > 0$, тобто $\operatorname{sgn} A_i = 1\ \forall i = \overline{1,m}$ $\big($знаки A_i чергуються, починаючи з $A_1 < 0$, тобто $\operatorname{sgn} A_i = (-1)^i$, $i = \overline{1,m}\big)$.

Неважко помітити, що другий диференціал функції $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f \Bigg|_{P_0} = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i\, \partial x_k}\, dx_i\, dx_k$$

є симетричною квадратичною формою відносно диференціалів незалежних змінних dx_1, dx_2, …, dx_m і $a_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} = a_{ki}$.

Теорема (достатня умова локального екстремума). Для того, щоб двічі диференційовна в точці P_0 функція, в якій $df(P_0) = 0$, мала в цій точці екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал був знаковизначеною КФ в точці P_0. Якщо $d^2 f(P_0)$ буде додатно (від'ємно) визначеною КФ, то в точці P_0 функція f має локальний мінімум (максимум). Якщо $d^2 f(P_0)$ є знакозмінною КФ, то в точці P_0 локального екстремуму немає.

Якщо $d^2 f(P_0)$ — квазізнаковизначена КФ, то для дослідження на екстремум функції f треба продовжувати вивчення безпосередньо приросту функції, або за допомогою інших міркувань.

З урахуванням критерія Сільвестра, при $n = 2$ достатні умови існування екстремума набувають такого вигляду: якщо точка $P_0(x_0, y_0)$ — точка можливого екстремума, функція $f(x, y)$ є двічі диференційовною в цій точці та $a_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $a_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, то за умови $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$ функція $f(x, y)$ має в точці P_0 локальний екстремум: мінімум при $a_{11} > 0$ і максимум при $a_{11} < 0$. Якщо $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то локального екстремума в точці P_0 немає.

Умовні екстремуми

Розглянемо задачу пошуку екстремумів функції, аргументи якої задовольняють додатковим умовам зв'язку. Екстремуми такого роду будемо називати умовними, щоб відрізняти їх від безумовних екстремумів функції, аргументи якої не пов'язані жодними додатковим умовами.

Постановка задачі. Знайти екстремум функції f, визначеної на області $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$, якщо

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{16}$$

за умов зв'язку

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ &\quad \ldots \\ &F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \quad m < n. \end{aligned} \tag{17}$$

Рівняння (17) також називають ***рівняннями зв'язку***.

Функція $f = f(P)$ має в точці $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ ***умовний максимум*** (***мінімум***), якщо $\exists$ такий окіл точки P_0, в межах якого значення функції $f = f(P)$ є найбільшим (найменшим) серед всіх її значень у всіх точках, координати яких задовольняють рівнянням зв'язку (17).

Досі ми розглядали екстремуми функції f, вважаючи, що змінні, від яких вона залежить, незалежні між собою. Це *абсолютні екстремуми.* Перейдемо до розгляду випадку, коли змінні, від яких залежить функція f, пов'язані деякими співвідношеннями. Дослідити функцію (16) на умовний екстремум можна так: знайти розв'язок системи (17), підставити цей розв'язок у рівняння (16) і одержану функцію дослідити на безумовний екстремум.

Для розв'язку системи (17) повинні виконуватись теореми про існування і диференційовність неявних функцій [?], а саме диференційовність в деякому околі точки P_0 функцій $F_i(P)$, неперервність в точці P_0 частинних похідних цих функцій по $y_1, y_2, \ldots, y_m$ і умова на якобіан системи:

$$\left.\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{P_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(P_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Тоді система (17) визначає однозначні неявні функції

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\quad \ldots \\ &y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{19}$$

Після підстановки (19) в (16) отримаємо функцію від n змінних:

$$f(P) = f\big(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)\big) = \Phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Такий спосіб знаходження екстремума досить складний, оскільки потрібно розв'язати систему (17). Тому на практиці користуються іншим методом знаходження умовних екстремумів — **методом множників Лагранжа**.

Для дослідження функції на умовний екстремум складемо *функцію Лагранжа*

$$L = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \cdots + \lambda_m F_m,$$

де λ_i, $i = \overline{1, m}$, — *множники Лагранжа*.

Необхідні умови умовного екстремума. Нехай P_0 — точка умовного екстремума функції (16) за умов зв'язку (17). За умови, що f та F_i, $i = \overline{1, m}$ — диференційовні в деякому околі P_0 функції, а також виконується умова (18), можна вибрати такі числа λ_i, $i = \overline{1, m}$, що

$$P_0\big(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\big)$$

становить критичну точку функції Лагранжа L, тобто задовольняє систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n}; \qquad \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0,\ j = \overline{1, m}; \qquad F_j = 0,\ j = \overline{1, m}.$$

Достатні умови. Припустимо, що

1. P_0 — критична точка функції L для деякого набору λ_i, $i = \overline{1, m}$;

2. функції f і F_i, $i = \overline{1, m}$, двічі неперервно-диференційовні в точці P_0 та

$$d^2 L = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ \ldots\ + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial}{\partial y_1} dy_1 + \ \ldots\ + \frac{\partial}{\partial y_m} dy_m\right)^2 L,$$

де dx_i, dy_j задовольняють рівняння зв'язку (17). Якщо при цьому $d^2L(P_0) > 0$, то функція f має в точці P_0 умовний мінімум; якщо $d^2L(P_0) < 0$, то в точці P_0 функція має умовний максимум.

Екстремуми функції на множині

Нехай G — відкрита множина в $\mathbb{R}^k$, функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ неперервна на компактній множині $K \subset G$. Згідно із теоремою Вейєрштрасса, функція f у деяких точках множини K набуває своїх найменшого і найбільшого значень (екстремумів). При цьому якщо точка екстремуму є внутрішньою точкою множини K, то вона є точкою локального екстремуму. Якщо ж точка належить межі множини K, що описується рівняннями зв'язку (17) при $m < k$, то вона є точкою умовного локального екстремуму.

Практичне заняття 24

Приклад 1. *Дослідимо функцію двох змінних* $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ *на екстремуми.*

⌜

Знайдемо стаціонарні точки f за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3-2x-2y=0 \\ f'_y = 4y^3-2x-2y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x(2x^2-1) \\ 2x^3(2x^2-1)^3-2x^3=0 \end{cases}$$

Із другого рівняння маємо, що або $x=0$, або $4x^6-6x^4+3x^2-1=0$. Підстановкою $t=x^2$ у останній многочлен визначаємо його нулі:

$$4x^6-6x^4+3x^2-1=4t^3-6t^2+3t-1=(t-1)(4t^2-2t+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=1.$$

Таким чином, отримали три стаціонарні точки функції f: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$ та $P_3(-1,-1)$. Тепер знайдемо частинні похідні 2-го порядку та запишемо другий диференціал функції f:

$$d^2f=f''_{xx}\,dx^2+2f''_{xy}\,dx\,dy+f''_{yy}\,dy^2=(12x^2-2)\,dx^2-4\,dx\,dy+(12y^2-2)\,dy^2.$$

Оскільки для точок $P_2(1,1)$ та $P_3(-1,-1)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=10$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-2$, то квадратична форма d^2f є додатньо визначеною за критерієм Сільвестра ($a_{11}=10>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=100-4>0$). Звідси робимо висновок, що функція $f(x,y)$ має у точках $P_2(1,1)$ та $P_3(-1,-1)$ локальний мінімум; $\operatorname{loc\,min} f=-2$.

Для точки $P_1(0,0)$: $d^2f=-2\,dx^2-4\,dx\,dy-2\,dy^2$, тому за критерієм Сільвестра зробити висновок щодо наявності чи відсутності екстремума неможливо. Перевіримо цей факт за означенням — запишемо повний приріст функції f у точці $P_1(0,0)$:

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x)^4+(\Delta y)^4-(\Delta x+\Delta y)^2.$$

Якщо $\Delta y=-\Delta x$, то $\Delta f(0,0)=2\cdot(\Delta x)^4>0$ для довільного $\Delta x\neq 0$. Тепер нехай $\Delta y=\Delta x$. У цьому випадку $\Delta f(0,0)=2\cdot(\Delta x)^2\cdot\big((\Delta x)^2-2\big)<0$ для довільного $0<|\Delta x|<\sqrt{2}$. Таким чином, приріст функції f є знакозмінним у будь-якому околі точки $P_1(0,0)$, тобто локального екстремума в точці P_1 немає. ⌟

Приклад 2. *Дослідимо на екстремуми функцію трьох змінних:*

$$f(x,y,z)=2x^3-3x^2+6y^2+z^2-6xy-6x+2z.$$

⌜

Знайдемо стаціонарні точки f за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2-6x-6y-6=0 \\ f'_y = 12y-6x=0 \\ f'_z = 2z+2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4y^2-3y-1=0 \\ x=2y \\ z=-1 \end{cases}$$

Система має два розв'язки, які визначають стаціонарні точки функції f: $P_1(2,1,-1)$ та $P_2\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1\right)$. Перевіримо виконання достатніх умов екстремума. Для цього запишемо другий диференціал функції f:

$$d^2f = f''_{xx}\,dx^2 + f''_{yy}\,dy^2 + f''_{zz}\,dz^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + 2f''_{yz}\,dy\,dz + 2f''_{xz}\,dx\,dz =$$
$$= (2x-1)\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2\,dz^2 - 2\,dx\,dy.$$

Визначимо кутові мінори матриці квадратичної форми d^2f: $A_1 = 2x-1$,

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2x-1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x-3, \qquad A_3 = \begin{vmatrix} 2x-1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8x-6.$$

Оскільки для т. $P_1(2,1,-1)$ маємо, що $A_1 = 3 > 0$, $A_2 = 5 > 0$ і $A_3 = 10 > 0$, то за критерієм Сільвестра квадратична форма $d^2f(P_1)$ є додатно визначеною. Отже, функція f має у точці $P_1(2,1,-1)$ локальний мінімум; $\operatorname{loc\,min} f = -15$.

Для точки $P_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1\right)$: $A_1 = -2 < 0$, $A_2 = -5 < 0$ і $A_3 = -10 < 0$, тобто $d^2f(P_2)$ є знакозмінною квадратичною формою. Тому локального екстремума в точці P_2 немає. ⌟

Приклад 3. *Дослідимо на екстремуми неявну функцію $z = f(x,y)$, якщо*
$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

⌜

Знайдемо диференціал функції F (як функції від незалежних змінних x, y, z):
$$dF = 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz - 2\,dx + 2\,dy - 4\,dz.$$

Враховуючи те, що $F = 0 \;\Rightarrow\; dF = 0$, маємо:
$$dz = \frac{1-x}{z-2}\,dx - \frac{y+1}{z-2}\,dy.$$

Згідно із необхідною умовою екстремума, $dz = 0$. Тобто (координати) стаціонарні точки отримаємо із системи:
$$\begin{cases} \dfrac{1-x}{z-2} = 0 \\ \dfrac{y+1}{z-2} = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Відповідні значення функції $z = f(x,y)$ у точці $(1,-1)$ знайдемо із рівняння:
$$F(1,-1,z) = z^2 - 4z - 12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned} z &= -2 \\ z &= 6 \end{aligned}\right.$$

Тоді при $z = -2$ маємо, що $dz = \dfrac{x-1}{4}\,dx + \dfrac{y+1}{4}\,dy$, звідки другий диференціал функції $z = f(x,y)$ має вигляд:
$$d^2z = \frac{1}{4}\,dx^2 + \frac{1}{4}\,dy^2.$$

Тобто d^2z є додатньо визначеною квадратичною формою при $z = -2$, що відповідає локальному мінімуму за достатніми умовами екстремума. Якщо ж $z = 6$, то $dz = \dfrac{1-x}{4}\,dx - \dfrac{y+1}{4}\,dy$. Звідси маємо: $d^2z = -\dfrac{1}{4}\,dx^2 - \dfrac{1}{4}\,dy^2$, що є від'ємно визначеною квадратичною формою і відповідає локальному максимуму функції $z = f(x, y)$. Отже, $\operatorname{loc}\min z = -2$, $\operatorname{loc}\max z = 6$. $\lrcorner$

Приклад 4. *Знайдемо екстремальні значення функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ на прямій $2x - y - 3 = 0$.*

$\ulcorner$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3).$$

Координати критичних точок функції $L(x, y, \lambda)$ знайдемо із системи:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ -2y - \lambda = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Знайдемо другий диференціал функції Лагранжа:

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dx\,d\lambda - dy\,d\lambda.$$

Оскільки d^2L є знакозмінною квадратичною формою (зокрема, при $dx = 1$, $dy = d\lambda = 0$: $d^2L = 2 > 0$, а при $dy = 1$, $dx = d\lambda = 0$: $d^2L = -2 < 0$), то отримана із необхідних умов точка $(2, 1, -2)$ не є екстремальною для функції $L(x, y, \lambda)$. Але ця точка може бути екстремальною для функції $f = x^2 - y^2$ за умови зв'язку $2x - y - 3 = 0$. Із рівняння зв'язку маємо, що $2dx = dy$. Враховуючи це співвідношення, для другого диференціала функції L отримаємо вираз:

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2dx^2 - 8dx^2 + 2dx\,d\lambda - 2dx\,d\lambda = -6dx^2,$$

який є від'ємно визначеною квадратичною формою і точка $(2, 1)$ є точкою локального максимуму функції $f = x^2 - y^2$ при умові зв'язку $2x - y - 3 = 0$. $\lrcorner$

Приклад 5. *Знайдемо найменше і найбільше значення функції $f(x, y) = 2x^3 + {} + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y$ на крузі $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ $(a > 0)$.*

$\ulcorner$

1. Дослідимо на екстремуми функцію f у внутрішніх точках круга, тобто на множині $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < a^2\}$. Для цього знайдемо стаціонарні точки f за теоремою про необхідні умови екстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 6x^2 + 3a^2 = 0 \\ f'_y = 6y^2 + 3a^2 = 0 \end{cases}$$

Для довільного $a > 0$ система не має розв'язків, тобто "підозрілі" точки безумовного екстремума функції f — відсутні.

2. Дослідимо поведінку функції f на межі області, тобто на колі $x^2 + y^2 = a^2$. Для цього запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y + \lambda(x^2 + y^2 - a^2).$$

Відповідно до необхідних умов умовного екстремума, знайдемо критичні точки функції $L(x, y, \lambda)$ із системи:

$$\begin{cases} L'_x = 6x^2 + 3a^2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 6y^2 + 3a^2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Додаючи перші два рівняння отриманої системи, маємо: $\lambda(x+y) = -6a^2$. Також розв'язки перших двох рівнянь системи відносно змінних x та y мають однаковий вигляд, тому $x = \pm y$. Підставляючи отримане співвідношення у третє рівняння, маємо, що $x = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Також знаходимо відповідні значення y та λ. Отже, існують дві стаціонарні точки функції Лагранжа: $M_1\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}, -3\sqrt{2}a\right)$ та $M_2\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{a}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}a\right)$. Порівнюючи значення функції f, відповідно, у точках $P_1\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ та $P_2\left(-\dfrac{a}{\sqrt{2}}, -\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$, приходимо до висновку, що P_1 є точкою умовного максимуму функції f, а P_2 — умовного мінімуму. Таким чином, $\min f = f(P_2) = -4\sqrt{2}a^3$, $\max f = f(P_1) = 4\sqrt{2}a^3$.

┘

Дослідіть функції двох змінних на екстремуми:

24.1 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

24.2 $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;

24.3 $f(x,y) = (x - y + 1)^2$;

24.4 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

24.5 $f(x,y) = xy \cdot e^{-x^2-y^2}$;

24.6 $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$;

24.7 $f(x,y) = x + y + 4\sin x \sin y$;

24.8 $f(x,y) = \big(1 + e^y\big) \cdot \cos x - ye^y$;

24.9 $f(x,y) = xy \cdot \ln\big(x^2 + y^2\big)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Дослідіть функції трьох змінних на екстремуми:

24.10 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

24.11 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$;

24.12 $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $a > 0$, $x,y,z > 0$;

24.13 $f(x,y,z) = xyz(4a - x - y - z)$, $a > 0$;

24.14 $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, $x,y,z > 0$;

24.15 $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, $x,y,z \in (0,\pi)$.

Знайдіть локальні екстремуми неявно заданої функції $z = f(x,y)$, якщо:

24.16 $F(x,y,z) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 + 2z - 1 = 0;$

24.17 $F(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0;$

24.18 $F(x,y,z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0;$

24.19 $F(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + 2y^2 - z^2x + z = 0;$

24.20 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0;$

24.21 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4xz + 4 + \frac{1}{2}\big(z^2 + z\big) = 0;$

24.22 $F(x,y,z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z - \frac{32}{3} = 0.$

Знайдіть умовні локальні екстремуми функцій при вказаних рівняннях зв'язку:

24.23 $f(x,y) = xy, \;\; x - 2y = 1;$

24.24 $f(x,y) = xy, \;\; x^2 + y^2 = 1;$

24.25 $f(x,y) = x + 2y, \;\; x^2 + y^2 = 5;$

24.26 $f(x,y) = e^{xy}, \;\; x + y = 1;$

24.27 $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2, \;\; 4x^2 + y^2 = 25;$

24.28 $f(x,y) = x^2 + y^2, \;\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \;\; ab \neq 0;$

24.29 $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y, \;\; x - y = \frac{\pi}{4};$

24.30 $f(x,y) = x - 2y + 2z, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

24.31 $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z, \;\; x + y + z = \pi, \;\; x,y,z > 0;$

24.32 $f(x,y) = xyz, \;\; x^2 + y^2 + z^2 = 3;$

24.33 $f(x,y) = x^m y^n z^p, \;\; x + y + z = a, \;\; x,y,z > 0, \;\; a > 0, \; \{m,n,p\} \subset \mathbb{N}.$

Знайдіть найбільше та найменше значення функції f в області D, якщо:

24.34 $f(x,y) = x - 2y - 3, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x > 0, \; y > 0, \; x + y \leqslant 1\big\};$

24.35 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x| + |y| \leqslant 1\big\};$

24.36 $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4, \;\; D = [0,1] \times [0,1];$

24.37 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4\big\};$

24.38 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 25\big\};$

24.39 $f(x,y) = x^2 - y^2, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 4\big\};$

24.40 $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 - 2y + 5, \;\; D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2 \leqslant y \leqslant -\frac{x^2}{2}\right\};$

24.41 $f(x,y) = \frac{xy}{2}\Big(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\Big), \;\; D = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leqslant 1\right\};$

24.42 $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \;\; D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\big\};$

24.43 $f(x,y,z) = x + y + z, \;\; D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\big\}.$

Відповіді та вказівки

15.1 $\frac{1}{4}x^4+x^2-4x-\ln|x|-\frac{11}{x}+C,\ x\neq 0$; **15.2** $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; **15.3** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C,\ x\neq 0$; **15.4** $x+\sin x+C$; **15.5** $\cos x+C$; **15.6** $\operatorname{tg}x-x+C$; **15.7** $\frac{1}{4}\operatorname{ch}2x+C$; **15.8** $3\cdot\left(\frac{3}{e}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{3}{e}\right)^{-1}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{x}{e}+C$; **15.9** $-\frac{1}{8(2x-3)^4}+C$, $x\neq\frac{3}{2}$; **15.10** $\frac{3}{56}\sqrt[3]{(5-8x)^7}+C$; **15.11** $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$; **15.12** $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$; **15.13** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$; **15.14** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C,\ |x|\leqslant\frac{2}{3}$; **15.15** $\frac{1}{2}x^2+2\ln|x^2-4|$, $x\neq\pm2$; **15.16** $\frac{1}{b^2}\sqrt{b^2x^2+a^2}$; **15.17** $-\frac{1}{5}\cos(x^5+3)$; **15.18** $\frac{1}{3b^2}(b^2x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$; **15.19** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0$; **15.20** $e^{\sin x}$; **15.21** $\ln|\ln x|,\ x>0$; **15.22** $\ln|\ln\ln x|,\ x>e$.

16.1 $2x-\ln|2x+1|,\ x\neq-\frac{1}{2}$; **16.2** $x-2\operatorname{arctg}x$; **16.3** $x^3-\frac{3}{2}x^2+9x+\ln|x-1|-16\ln|x+2|,\ x\notin\{-2,1\}$; **16.4** $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x,\ x\neq 1$; **16.5** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,\ x\neq\pm1$; **16.6** $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|,\ x\notin\{2,5\}$; **16.7** $\frac{2}{x-3}+3\ln|x+2|-3\operatorname{arctg}(x+2)-\ln(x^2+4x+5),\ x\notin\{-2,3\}$; **16.8** $3\ln|x-1|+\ln\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right),\ x\neq 1$; **16.9** $x\sin x+\cos x$; **16.10** $-e^{-x}(x+1)$; **16.11** $\frac{1}{2}e^x\cdot(\sin x-\cos x)$; **16.12** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x},\ x\geqslant 0$; **16.13** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leqslant 1$; **16.14** $x\cdot(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x,\ |x|\leqslant 1$; **16.15** $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|,\ x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **16.16** $(x^3+1)\cdot\ln(1+x)-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x,\ x>-1$; **16.17** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x),\ x>0$; **16.18** $\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

17.1 $\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+2\sqrt[6]{x^3}+3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|,\ x\notin\{0,1\}$; **17.2** $\ln\frac{|x|}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}},\ x\neq 0$; **17.3** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}$, $x\neq 1$; **17.4** $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{x+1}{5}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}+\frac{1}{4}\right),\ x\neq-1$; **17.5** $\frac{3}{4}y^4-\frac{3}{2}y^2-\frac{3}{4}\ln|y-1|+\frac{15}{8}\ln(y^2+y+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{7}}$, де $y=\sqrt[3]{2+x},\ x\neq-1$; **17.6** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ x\in(-1,0)\cup(0,1]$; **17.7** $-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2},\ x\in(-3,1)$; **17.8** $-15\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+(x^2-5x+20)\cdot\sqrt{x^2+4x+5}$; **17.9** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}},\ x\in(-2-2\sqrt{2},0)\cup(0,-2+2\sqrt{2})$; **17.10** $\frac{\ln|x-1|}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}\right|,\ x\neq 1$; **17.11** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{1}{x+1}\cdot(1-\sqrt{x^2+2x+2})$; **17.12** $-4\ln|y|+3\ln|2y-1|+\frac{3}{2y-1}$, де $y=\sqrt{x^2+x+1}-x$, $x\neq-1$; **17.13** $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|-2\operatorname{arctg}y$, де $y=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; **17.14** $3\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right),\ x\notin\{-1,0\}$; **17.15** $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5},\ x\neq\pm1$; **17.16** $3y+\ln\frac{|y-1|}{\sqrt{y^2+y+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, де $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}},\ x\neq 0$; **17.17** $-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}},\ x\neq 0$; **17.18** $-\frac{8}{9}\sqrt{(1+x^{-3/4})^3},\ x\neq 0$.

18.1 $\frac{4}{5}\sin^5x-\frac{8}{7}\sin^7x$; **18.2** $\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x$; **18.3** $-(\cos x)^{-1}+\frac{1}{3}(\cos x)^{-3}$, $x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.4** $\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3x,\ x\notin\left\{\frac{\pi k}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.5** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x|$, $x\notin\left\{\frac{\pi k}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.6** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|,\ x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.7** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$,

$x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.8** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.9** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{6}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{6}}\right|$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{2\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2} + \pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.10** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$, $x \notin \{\pi + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$; **18.11** $-2\ln|\operatorname{tg}x+1| - \ln\cos^2 x - -2\cos^2 x + \sin 2x$, $x \notin \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; **18.12** $\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)$; **18.13** $I_1 = \sin x$, $I_2 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ та $\forall n \geqslant 3$: $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$; **18.14** $J_1 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, $J_2 = -\operatorname{ctg} x$ та $\forall n \geqslant 3$: $J_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot J_{n-2}$; **18.15** $|x| + C$, $x \neq 0$; **18.16** $x + 4 + C$ при $x < -2$, $-x + C$ при $x \in [-2, 1]$ та $x - 2 + C$ при $x > 1$; **18.17** $\frac{1}{3} + C$ при $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $x + C$ при $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $2x - \frac{2}{3} + C$ при $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ та $3x - \frac{5}{3} + C$ при $x \in \left[1, \frac{4}{3}\right)$; **18.18** $\frac{x^2}{2} + x + C$ при $x \in (-1, 0)$, $\frac{x^2}{2} + C$ при $x \in [0, 1)$ та $\frac{x^2}{2} - x + 1 + C$ при $x \in [1, 2)$; **18.19** $e^x + C$ при $x \leqslant 0$, $\frac{x^2}{2} + 1 + C$ при $0 < x \leqslant 1$ та $-\frac{1}{\pi}\cos\pi x + \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} + C$ при $x > 1$; **18.20** $-\cos x + C$ при $x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\sin x - \sqrt{2} + C$ при $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ та $-\cos 3x + 1 - \sqrt{2} + C$ при $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.

19.1 ; **19.2** $\underline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_{P_n}}(f) = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$; **19.3** ; **19.4** ; **19.5** ; **19.6** ; **19.7** ; **19.8** ; **19.9** ; **19.10** $\frac{3}{2}$; **19.11** -1; **19.12** -2; **19.13** 19; **19.14** 2; **19.15** $\frac{3}{4}$; **19.16** $\frac{1}{2}$; **19.17** $\ln 3$; **19.18** ; **19.19** $\frac{1}{e}$; **19.20** ; **19.21** $\frac{5}{6}\pi$; **19.22** ; **19.23** ; **19.24** ; **19.25** ; **19.26** – **19.28** так.

20.4 4; **20.5** 1; **20.6** $\frac{2(e-1)}{e}$; **20.7** $200\sqrt{2}$; **20.8** $200\sqrt{2}$; **20.9** $5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$; **20.10** -5π; **20.11** $9 - 3\pi - \pi^2 + \frac{\pi^3}{3}$; **20.12** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; **20.13** $e - \sqrt{e}$; **20.14** – **20.16** заміну зробити неможливо; **20.17** $\int_0^1 \left(f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)\right) dt$; **20.18** $\int_5^{20} \frac{t\,dt}{2\sqrt{t-4}}$; **20.19** – **20.21** ні; **20.22** так, 1; **20.23** ; **20.24** ; **20.25** 1; **20.26** $-\frac{2}{3}$; **20.27** 0; **20.28** ∞; **20.29** другого; **20.30** першого; **20.31** першого; **20.32** другого; **20.33** першого; **20.34** $\left[\frac{2}{\sqrt[4]{e}}, 2e^2\right]$ за 12-ою теор. про середнє; **20.35** $\left[\frac{1-e^{-100}}{200}, \frac{1}{100}\right]$ за 2-ою теор. про середнє; **20.36** ; **20.37** ; **20.38** ; **20.39** $\left[\frac{\pi}{2} \cdot \cos 1, \frac{\pi}{2}\right]$ за 1-ою теор. про середнє; **20.40** ; **20.41** ; **20.42** ; **20.43** $\left[\frac{\pi(3-2\sqrt{3})}{6}, \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3}\right]$ за 2-ою теор. про середнє.

21.1 $\frac{4}{15}$; **21.2** $\pi - 2$; **21.3** $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; **21.4** 18; **21.5** $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41} + 20\ln\frac{4}{5}$; **21.6** $\frac{4}{3} + 2\pi$; **21.7** $\frac{5\sqrt{2}-2}{3}$; **21.8** $2 - \frac{1}{\ln 2}$; **21.9** $\frac{\pi a^2}{12}$; **21.10** $\frac{3\pi-8}{32}$; **21.11** $\frac{3\pi a^2}{2}$; **21.12** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; **21.13** $\frac{8}{15}$; **21.14** $\frac{3\pi}{4}$; **21.15** a^2; **21.16** $\pi a^2\sqrt{2}$; **21.17** $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **21.18** $\sqrt{2}(\pi - 1)$; **21.19** $2a$; **21.20** $6a$; **21.21** 4; **21.22** ??; **21.23** πa; **21.24** $\frac{16}{3}a^3$; **21.25** ??; **21.26** $\frac{4}{15}$; **21.27** а) $\frac{16\pi}{15}$, б) $\frac{8\pi}{3}$; **21.28** 12π; **21.29** а) $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$, б) $4\pi e^2$.

22.1 $\frac{1}{2}$, 1; **22.2** 0, 1; **22.3** 0, 1; **22.4** 1, ∞; **22.5** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1$, $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$; **22.6** всі три границі дорівнюють нулю; **22.7** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$; **22.8** всі три границі дорівнюють 1; **22.9** не існує; **22.10** $\ln 2$; **22.11** 0; **22.12** не існує; **22.13** e; **22.14** 0; **22.15** $f \in C\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \,|\, xy = 0\}\right)$; **22.16** $f \in C\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{(a,0) \,|\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}\right)$; **22.17** $f \in C\left(\mathbb{R}^2 \backslash A\right)$, де $A = \left\{(a,-a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\frac{1}{3}\right\}\right\}$; **22.18** $f \in C\left(\mathbb{R}^2 \backslash A\right)$, де

$A=\{(x,y)\,|\,x+y^2=0\}$; **22.19** $f\in C\left(\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\right)$; **22.20 – 22.23** $f(0,0)=0$.

23.1 диференційовна на $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$; **23.2** диференційовна на $\mathbb{R}^2$; **23.3** диференційовна на множині $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>-y^2\}$; **23.4** диференційовна на $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$; **23.5 – 23.6** диференційовна на $\mathbb{R}^2$; **23.7** $\operatorname{grad} f(1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $f'_{\overrightarrow{P_0P_1}}=0$; **23.8** $\operatorname{grad} f(1,1)=\left(\frac19,\frac19\right)$, $f'_{\overrightarrow{P_0P_1}}=\frac29$; **23.9** $\operatorname{grad} f(1,0,0)=(2e,0,0)$, $f'_{\vec a}=0$; **23.10** $\operatorname{grad} f(1,-1,1)=\frac{1}{3+\sqrt3}\cdot(1,-1,1)$, $f'_{\vec a}=\frac{1}{3+\sqrt3}$; **23.11** 0,98; **23.12** 4,99; **23.13** 0,005; **23.14** $\frac{\pi^2}{360}+\frac{797+4\ln4}{3200}\pi-\frac{1}{200}$; **23.15** $df=\left(y^3-6xy^2\right)dx+2y\left(3xy-3x^2+4\right)dy$, $d^2f=-6y^2\,dx^2+12y(y-2x)\,dx\,dy+2\left(6xy-3x^2+4\right)dy^2$; **23.16** $df=e^{x+y^2-z^3}\cdot\left(dx+2y\,dy-3z^2\,dz\right)$, $d^2f=e^{x+y^2-z^3}\cdot\left(dx^2+4y^2\,dy^2+9z^4\,dz^2+4y\,dx\,dy-6z^2\,dx\,dz-12yz^2\,dy\,dz\right)$; **23.17** $df=-2xz\left(x^2+y^2\right)^{-2}dx-2yz\left(x^2+y^2\right)^{-2}dy+\left(x^2+y^2\right)^{-1}dz$, $d^2f=2\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(z\left(3x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-1}dx^2+z\left(3y^2-x^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{-1}dy^2+8xyz\left(x^2+y^2\right)^{-1}dx\,dy-2x\,dx\,dz-2y\,dy\,dz\right)$; **23.18** $dF=2xg'_x\,dx+2yg'_y\,dy-g'_z\,dz$, $d^2F=4x^2g''_{xx}\,dx^2+4y^2g''_{yy}\,dy^2+g''_{zz}\,dz^2+8xyg''_{xy}\,dx\,dy-4xg''_{xz}\,dx\,dz-4yg''_{yz}\,dy\,dz$; **23.19** $dF=\left(h'_1+h'_2\right)dx+\left(h'_1-h'_2\right)dy$, $d^2F=\left(h''_{11}+2h''_{12}+h''_{22}\right)dx^2+\left(h''_{11}-2h''_{12}+h''_{22}\right)dy^2+\left(h''_{11}-h''_{22}\right)dx\,dy$; **23.20** $dF=\left(2xyh'_1+y^{-2}h'_2\right)dx+\left(x^2h'_1-2xy^{-3}h'_2\right)dy$, $d^2F=\left(2\left(yh'_1+2x^2y^2h''_{11}+2xy^{-1}h''_{12}\right)+y^{-4}h''_{22}\right)dx^2+2\left(2xh'_1-2y^{-3}h'_2+2x^3yh''_{11}-3x^2y^{-2}h''_{12}-2xy^{-5}h''_{22}\right)dx\,dy+\left(6xy^{-4}h'_2+x^4h''_{11}-2xy^{-3}(1+x)^2h''_{12}+4x^2y^{-6}h''_{22}\right)dy^2$; **23.21** $dF=\left(yu'_1+u'_3\right)dx+\left(xu'_1+\cos y\,u'_2\right)dy+u'_3\,dz$, $d^2F=\left(y^2u''_{11}+2yu''_{13}+u''_{33}\right)dx^2+\left(x^2u''_{11}+x\cos y\,u''_{12}-\sin y\,u'_2+\cos y\cdot\left(xu''_{12}+\cos y\,u''_{22}\right)\right)dy^2+u''_{33}\,dz^2+2\left(u'_1+x\left(yu''_{11}+u''_{13}\right)+\cos y\cdot\left(yu''_{12}+u''_{23}\right)\right)dx\,dy+2\left(yu''_{13}+u''_{33}\right)dx\,dz+2\left(xu''_{13}+\cos y\,u''_{23}\right)dy\,dz$; **23.22** $dF=2\left(xu'_1+xu'_2+zu'_3\right)dx+2y\left(u'_1-u'_2\right)dy+2xu'_3\,dz$, $d^2F=2\left(u'_1+u'_2+2x^2\left(u''_{11}+u''_{22}\right)+2z^2u''_{33}\right)dx^2+2\left(u'_1-u'_2+2y^2\left(u''_{11}+u''_{22}\right)\right)dy^2+4x^2u''_{33}\,dz^2+8y\left(xu''_{11}-xu''_{22}+zu''_{13}-zu''_{23}\right)dx\,dy+4\left(u'_3+2x\left(xu''_{13}+xu''_{23}+zu''_{33}\right)\right)dx\,dz+8xy\left(u''_{13}+u''_{23}\right)dy\,dz$; **23.23** 0; **23.24** $3x^2\cdot\cos(yz)-3x^2yz\cdot\sin(yz)+2y\cdot e^{x+z}$; **23.25** 4; **23.26** $x^ny^m\sin\left(xy+\frac{\pi}{2}(m+n)\right)$; **23.27** $(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!\cdot(1+x+y)^{-(m+n)}$; **23.28** $(-1)^n\cdot\left((x+m)^2+(y-n)^2-m-n\right)$; **23.29** $z'_x=z'_y=-1$, $z''_{xx}=z''_{yy}=z''_{xy}=0$; **23.30** $z'_x=z'_y=(e^z-1)^{-1}$, $z''_{xx}=z''_{yy}=z''_{xy}=-e^z\cdot(e^z-1)^{-3}$; **23.31** $z'_x=\frac{2-x}{z+1}$, $z'_y=\frac{2y}{z+1}$, $z''_{xx}=\frac{-1}{z+1}-\frac{(2-x)^2}{(z+1)^3}$, $z''_{yy}=\frac{2}{z+1}-\frac{4y^2}{(z+1)^3}$, $z''_{xy}=\frac{2y(x-2)}{(z+1)^3}$; **23.32** $z'_x=\frac{z}{x+z}$, $z'_y=\frac{z^2}{y(x+z)}$, $z''_{xx}=\frac{-z^2}{(x+z)^3}$, $z''_{yy}=\frac{-xz^2}{y^2(x+z)^2}$, $z''_{xy}=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}$; **23.33** $y+xy-\frac12y^2+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.34** $1+xy+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.35** $1-\frac12x^2+\frac12y^2+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.36** $1+x-y-xy+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.37** $x-y+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.38** $1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.39** $xy+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.40** $-1-(x-1)+(y-2)-(x-1)^2+2(x-1)(y-2)-(y-2)^2+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.41** $-\pi-(x-\pi)+\frac{\pi}{2}(x-\pi)^2-\pi(x-\pi)(y-2\pi)+\frac{\pi}{2}(y-2\pi)^2+o\left(\|h\|^2\right)$; **23.42** $\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\left(y-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt3}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{\sqrt3}{4}\left(y-\frac{\pi}{3}\right)^2+o\left(\|h\|^2\right)$, де $h=\left(x-x_0,y-y_0\right)$.

24.1 $\operatorname{loc\,min} f=f(1,0)=-1$; **24.2** $\operatorname{loc\,min} f=f(0,1)=0$; **24.3** $\operatorname{loc\,min} f==f(x_0,x_0+1)=0,\ x_0\in\mathbb{R}$; **24.4** $\operatorname{loc\,min} f=f(1,1)=-1$; **24.5** $\operatorname{loc\,min} f==f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac{1}{2e}$, $\operatorname{loc\,max} f=f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2e}$; **24.6** $\operatorname{loc\,min} f=f(5,2)=30$; **24.7** $\operatorname{loc\,min} f=f\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+m),-\frac{7\pi}{12}+\pi(k-m)\right)=$

$= -2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{7\pi}{12}+\pi(k+m), \frac{7\pi}{12}+\pi(k-m)\big) = 2+\sqrt{3}+$ $+\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $\{k,m\}\subset\mathbb{Z}$; **24.8** $\operatorname{loc\,max} f = f(2\pi k, 0) = 2$, $k\in\mathbb{Z}$; **24.9** $\operatorname{loc\,min} f =$ $= f\big(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\big) = -\frac{1}{2e}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\big) = f\big(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\big) = \frac{1}{2e}$; **24.10** $\operatorname{loc\,min} f = f(-1,-2,3) = -14$; **24.11** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\big) = -\frac{4}{3}$; **24.12** $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\big) = \big(\frac{a}{7}\big)^7$; **24.13** $\operatorname{loc\,max} f = f(a,a,a) = a^4$; **24.14** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{1}{2}, 1, 1\big) = 4$; **24.15** $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) = 4$; **24.16** $\operatorname{loc\,min} z = -3$ та $\operatorname{loc\,max} z = 1$ у точці $(-1,1)$; **24.17** $\operatorname{loc\,min} z = z(-2,0) = 1$, $\operatorname{loc\,max} z =$ $= z\big(\frac{16}{7}, 0\big) = -\frac{8}{7}$; **24.18** $\operatorname{loc\,min} z = z(-1,-1) = -4$, $\operatorname{loc\,max} z = z(1,1) = 4$; **24.19** $\operatorname{loc\,min} z = z\Big(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\Big) = \sqrt{\frac{3}{2}}$; **24.20** $\operatorname{loc\,min} z = z\big(-3-\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}\big) = -4-$ $2\sqrt{6}$, $\operatorname{loc\,max} z = z\big(-3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{6}\big) = -4+2\sqrt{6}$; **24.21** $\operatorname{loc\,min} z = z\big(-\frac{16}{7}, 0\big) = \frac{8}{7}$, $\operatorname{loc\,max} z = z(2,0) = -1$; **24.22** $\operatorname{loc\,min} z = -1$ та $\operatorname{loc\,max} z = \frac{7}{3}$ у точці $\big(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\big)$; **24.23** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\big) = -\frac{1}{8}$; **24.24** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = f\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big) =$ $= -\frac{1}{2}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\big) = \frac{1}{2}$; **24.25** $\operatorname{loc\,min} f = f(-1,-2) = -5$, $\operatorname{loc\,max} f = f(1,2) = 5$; **24.26** $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = \sqrt[4]{e}$; **24.27** $\operatorname{loc\,min} f =$ $= f(2,-3) = f(-2,3) = -50$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\pm\frac{3}{2}, \pm 4\big) = \frac{425}{4}$; **24.28** $\operatorname{loc\,min} f =$ $= f\big(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\big) = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; **24.29** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(\frac{5\pi}{8}+\pi k, \frac{3\pi}{8}+\pi k\big) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{\pi}{8}+\pi k, -\frac{\pi}{8}+\pi k\big) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $k\in\mathbb{Z}$; **24.30** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\big) =$ $= -3$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\big) = 3$; **24.31** $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\big) = \frac{1}{8}$; **24.32** $\operatorname{loc\,min} f = -1$ у точках $(-1,-1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ і $(1,1,-1)$; $\operatorname{loc\,max} f =$ $= 1$ у точках $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ та $(-1,-1,1)$; **24.33** $\operatorname{loc\,max} f =$ $f\big(\frac{am}{m+n+p}, \frac{an}{m+n+p}, \frac{ap}{m+n+p}\big) = m^m n^n p^p \big(\frac{a}{m+n+p}\big)^{m+n+p}$; **24.34** $\operatorname{loc\,min} f = f(0,1) =$ -5, $\operatorname{loc\,max} f = f(1,0) = -2$; **24.35** $\operatorname{loc\,min} f = f(0,0) = 0$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\pm 1, 0) =$ $= f(0,\pm 1) = 1$; **24.36** $\operatorname{loc\,min} f = f(0,0) = f(1,0) = -4$, $\operatorname{loc\,max} f = f(0,1) =$ $= f(1,1) = 17$; **24.37** $\operatorname{loc\,min} f = f(0,4) = -12$, $\operatorname{loc\,max} f = f(4,0) = 36$; **24.38** $\operatorname{loc\,min} f = f(3,-4) = -75$, $\operatorname{loc\,max} f = f(-3,4) = 125$; **24.39** $\operatorname{loc\,min} f =$ $= f(0,\pm 2) = -4$, $\operatorname{loc\,max} f = f(\pm 2, 0) = 4$; **24.40** $\operatorname{loc\,min} f = f(\sqrt{2}, -2) =$ $= -4\sqrt{2}+5$, $\operatorname{loc\,max} f = f(-\sqrt{2}, -2) = 4\sqrt{2}+5$; **24.41** $\operatorname{loc\,min} f = 0$ у точках межі області D, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(1, \frac{4}{3}\big) = \frac{2}{9}$; **24.42** $\operatorname{loc\,min} f = 0$ у точках межі області D, $\operatorname{loc\,max} f = f(0,0) = 1$; **24.43** $\operatorname{loc\,min} f = f\big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{loc\,max} f = f\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\big) = 1+\sqrt{2}$.

Рекомендовані джерела

[1] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.

[2] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 2.* — К: Вища школа, 1993. — 375 с.

[3] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. и др. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1. Введение в анализ, производная, интеграл.* — К.: Вища школа, 1978. — 696 с.

[4] Ляшко С. И., Боярчук А. К. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — Москва–Санкт-Петербург–Киев: Диалектика, 2001. — 432 с.

[5] Дороговцев А. Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — К.: Факт, 2004. — 560 с.

[6] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.

[7] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 2.* — М.: Наука, 1968. — 464 с.

[8] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977. — 528 с.

[9] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 257 с.

[10] Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. — 276 с.