Д/З

**22.1** $f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}$, $x>0$, $a=\infty$, $b=0+$

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to 0+}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim\limits_{y\to 0+}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim\limits_{y\to 0+} 1 = 1$

**22.3** $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $y \neq -2x$, $a=b=+\infty$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\lim\limits_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$

2) $\lim\limits_{y\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\overbrace{\sin\frac{\pi}{2+\underbrace{\frac{y}{x}}_{\to 0}}}^{\to 1}\right) = 1$

22.5 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$, $x\neq -y$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

2) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}(-1)=-1$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-y}{x+y}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}y=kx\\ x\to 0\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-kx}{x+kx}=\lim\limits_{x\to k}\frac{1-k}{1+k}$

Границя залеж. від $k$, тому подв. границі не існує

22.15 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$

1) $(x_0, 0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}}\frac{1}{xy}\to\left[\frac{1}{0}\right]=\left|y=k(x-x_0)\to 0\right|=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=k(x-x_0)}}\frac{1}{x(x-x_0)}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x^2-xx_0}\Rightarrow\nexists$

$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{2\rho^2\sin 2\varphi}\ \nexists$

$\nexists\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{1}{xy}$ та $\nexists\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{xy}$.

$(x_0,y_0)$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{1}{xy}=\frac{1}{x_0 y_0}$

Тому $f(x,y)$ не перервна на $\mathbb{R}^2/(x,y)$

**22.16** $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y} = x_0 \lim\limits_{y\to 0} \sin\frac{1}{y} \Rightarrow \nexists$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y}$ $\quad 0 \le |x|\,|\sin\frac{1}{y}| \le |x|\,|\frac{1}{y}| \le |x| \to 0 \Rightarrow (x,y)\to(0,0)$

$f(x,y)$ неперервна на проміжку $R^2 / (x_0, 0)$, де $(x_0, 0)$ – точка розриву

**22.84** $f(x,y) = \cancel{\ \ }\ \ln(x+y^2),\ x > -y^2$

1) $f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2} \cdot (x+y^2)' = \frac{1}{x+y^2}$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{x+y^2} \cdot (x+y^2)' = \frac{2}{x+y^2}$

$x+y^2 \neq 0$. Так як $x > -y^2$, то функція диферен-анна на $Df$

**23.6** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

1) $f'_x(x,y) = \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)' = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x\cdot x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^2(x^2+y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\ x^2+y^2\neq 0$

$f'_y(x,y) = \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)' = \frac{2yx^2(x^2+y^2) - 2y\cdot x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2y(x^2+y^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2},\ x^2+y^2\neq 0$

Scanned with CamScanner

Тому функція диференційовна, окрім точок $\{(x,y): x^2+y^2=0\}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^2\cdot y_0^2}{\Delta x^2+y_0^2}-0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\right)0 = 0 = f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

Частинні похідні існують

Перевіримо у т. $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$0 \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2-2xy+y^2}} = \lim\frac{x^2y^2}{|x-y|} = \left|\begin{matrix} y=kx\\ x\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot k^2x^2}{|x-kx|} = \lim_{x\to 0} x^3\frac{k^2}{|1-k|} = 0$$

Функція диференційовна на всій пл. $R^2$.