Екзаменаційна робота

з дисципліни „Теорія ймовірностей та математична статистика"

студента групи ІПС-21

Дубини Андрія Володимировича

Білет №5

При виконанні роботи зобов'язуюсь дотримуватись принципів академ. доброчесності.

БІЛЕТ №5

1. Нерівність Крамера-Рао. Ефективні оцінки
2. З урни, яка містить "m" білих і "n" чорних куль $(n > 4)$ загубили дві кулі. Після цього з урни взяли дві кулі, які виявилися чорними. Обчислити ймовірність того, що загублено було дві чорні кулі.
3. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами 0 і σ^2. Обчислити перший, другий, третій та четвертий моменти для ξ.
4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з нормального розподілу з параметрами $(0, \theta)$. Чи є $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ ефективною оцінкою параметра θ? Дослідити на незміщеність та консистентність.

(2.) m білих куль, n чорних куль;

A – взяли 2 чорні кулі

Загубили:

H_1 – дві чорні $\quad$ H_2 – чорна + біла $\quad$ H_3 – дві білі

$$P(H_1) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1}$$

$$P(H_2) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}$$

$$P(H_3) = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1}$$

$$P(A|H_1) = \frac{n-2}{m+n-2} \cdot \frac{n-3}{m+n-3}$$

$$P(A|H_2) = \frac{n-1}{m+n-2} \cdot \frac{n-2}{m+n-3}$$

$$P(A|H_3) = \frac{n}{m+n-2} \cdot \frac{n-1}{m+n-3}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) =$$

$$= \left(\frac{n-2}{m+n-2} \cdot \frac{n-3}{m+n-3} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1}\right) + \left(\frac{n-1}{m+n-2} \cdot \frac{n-2}{m+n-3} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{n}{m+n-2} \cdot \frac{n-1}{m+n-3} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1}\right) = \frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \times$$

$$\underbrace{\times \left(\frac{n!}{(n-4)!} + \frac{n!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!}\right)}_{P(A)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{n-2}{m+n-2} \cdot \frac{n-3}{m+n-3} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1}}{\frac{(m+n-4)!}{(m+n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n-4)!} + \frac{n!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(n-4)!}}{\frac{1}{(n-4)!} + \frac{m}{(n-3)!} + \frac{m!}{(n-2)!(m-2)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!}}{\frac{(n-2)!}{(n-4)!} + \frac{(n-2)!}{(n-3)!} \cdot m + \frac{m!}{(m-2)!}} =$$

$$\underbrace{\frac{(n-3)(n-2)}{(n-3)(n-2)+(n-2)m+m(m-1)}}_{*}=P(H_1/A)$$

Відповідь: $*$

② $\xi\sim N(0,\sigma^2)=\overbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}^{f_\xi(x)}$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_\xi(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,d(x^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-2\sigma^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(-\left(e^{\frac{(+\infty)^2}{2\sigma^2}}-e^{\frac{(-\infty)^2}{2\sigma^2}}\right)\right)=\underline{0}$$

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_\xi(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\left(x^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-2\int_{-\infty}^{+\infty}\cancel{x}\left(\int e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma^3\cdot\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right)-\sigma^2xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma^3\cdot 2=\underline{\sigma^2}$$

$$M\xi^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-2\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (x^2 + 2\sigma^2)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \underline{0}$$

$$M\xi^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^5 \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \sigma^2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}(3\sigma^2 + x^2)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= 3\frac{\sigma^4}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \underline{3\sigma^4}$$

(4) $\xi_i \sim N(0, \theta)$, $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\theta} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\theta}} \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$L(x, \theta) = \prod_{k=1}^{n} f(\xi_k, \theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{\xi_k^2}{2\theta}}$$

$$\ln L(x, \theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{\xi_k^2}{2\theta}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \ln\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \left(-\frac{\xi_k^2}{2} \cdot \frac{1}{\theta}\right)\right)$$

$$U(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \ln(x, \theta) = \sum_{k=1}^{n}\left(0 + \sqrt{\theta}\left(-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right) + \left(-\frac{\xi_k^2}{2}\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(-\frac{1}{\theta^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2\theta} + \frac{\xi_k^2}{2\theta^2}\right) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 =$$

$$= -\frac{n}{2\theta} + \frac{n}{2\theta^2}\hat{\theta} = \frac{n}{2\theta^2}(\hat{\theta} - \theta).$$

оцінка є ефективною

$$M\hat{\Theta} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Theta = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot \cancel{n}\,\Theta = \Theta$$

$$\boxed{M\xi_i^2 = (M\xi_i)^2 + D\xi_i = 0 + \Theta = \Theta}$$

Оцінка є незміщеною

$$D\hat{\Theta} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\xi_i^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot 2\Theta^2}_{\to 0} = 0$$

$$\boxed{D\xi_i^2 = M\xi_i^4 - (M\xi_i^2)^2 = 3\Theta^2 - \Theta^2 = 2\Theta^2}$$

Оцінка є конзистентною.