МКР №2 вар. I.

Дубина Андрій

1. Закон інерції квадратичних форм

Незалежно від способу зведення квадр. функції на скінченно вимірному просторі до канонічного вигляду у квадр. формах число відємних, додатніх, ненульових та нульових коефіцієнтів не змінюється та не залежить від базису.

Доведення. Візьмемо функцію $A(x)$. В базисах $Б_1$ та $Б_2$ їй відповідають відповідні квадратичні форми:

$$Б_1 \begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \ldots + a_k x_k^2 - a_{k+1} x_{k+1}^2 - a_{k+2} x_{k+2}^2 - \ldots - \\ - a_{k+s} x_{k+s}^2 + 0 \cdot x_{k+s+1}^2 + \ldots + 0 \cdot x_n^2 \end{cases}$$

та

$$Б_2 \begin{cases} b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots b_m y_m^2 - b_{m+1} y_{m+1}^2 - b_{m+1} y_{m+2}^2 - \ldots \\ \ldots - b_{m+p} y_{m+p}^2 + 0 \cdot y_{m+p+1}^2 + \ldots + 0 \cdot y_n^2 \end{cases}$$

Доведемо, що $k = m$, $s = p$.

Ранги матриць білінійних функцій діагонально, не залежить від вибору базису, а тому $k + s = m + p$

Далі не пам'ятаю :)

№2 $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-6-\lambda) +$$
$$+ 6\cdot(-5)\cdot 1 + (-15)\cdot 1\cdot 2 -$$
$$- (-15)\cdot(1-\lambda)\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot(-6-\lambda) -$$
$$- (2-\lambda)\cdot(-5)\cdot 2 =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

$\lambda = -1$, крат. $= 3$

$$B = A-\lambda E = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{6} & \cancel{-15} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

x_2, x_3 – б.з

ФСР

x_1	x_2	x_3
-2	1	0
5	0	1

$a_1 = (-2, 1, 0)$
$a_2 = (5, 0, 1)$ $\Big\}$ $h = 1$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3
1	0	0

$a_1 = (1, 0, 0)$, $h = 2$

a_3, $\varphi(a_1) = (3, 1, 1)$

a_2

$f_1 = (3, 1, 1)$
$f_2 = (1, 0, 0)$ $\Big\}$ $2, \lambda = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$f_3 = (-2, 1, 0)$ $\}$ $1; \lambda = -1$ (-1)

$$A_J = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

№3 $x = (7, -4, -1, 2)$

$$L = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L^{\perp} = \langle (2, 1, 1, 3), (3, 2, 2, 1), (1, 2, 2, -9) \rangle$$

$$(a_1 | a_2 | a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 3 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\text{II} \\ \\ \\ -3\text{II} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -15 \end{pmatrix}.$$

a_1, a_2 – базис.

$z = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

$(x, a_1) = (z, a_1) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2)$

$(x, a_2) = (z, a_2) = \alpha_1 (a_1, a_2) + \alpha_2 (a_2, a_2)$

$(x, a_1) = 14 - 4 - 1 + 6 = 15$

$(x, a_2) = 21 - 8 - 2 + 2 = 13$

$(a_1, a_1) = 4 + 1 + 1 + 9 = 15$

$(a_1, a_2) = 6 + 2 + 2 + 3 = 13$

$(a_2, a_2) = 9 + 4 + 4 + 1 = 18$

$$\begin{cases} 15\alpha_1 + 13\alpha_2 = 15 \\ 13\alpha_1 + 18\alpha_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$z = (2, 1, 1, 3)$

$y = x - z = (5, -5, -2, -1)$

№4 $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda)(1-\lambda) + 2\cdot2\cdot1 +$$
$$+ 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot(-5-\lambda)\cdot1 - 2\cdot2\cdot(1-\lambda) -$$
$$- (1-\lambda)\cdot2\cdot2^2 = -\lambda(\lambda+6)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -6$

$\lambda_3 = 3$

1) $$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= \quad x_3$ – б.з.

x_1	x_2	x_3
-1	0	1

$a_1 = (-1, 0, 1)$

$e_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) $$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7III \\ -2III \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -12 & -48 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad x_3 \text{ – б.з.}$$

x_1	x_2	x_3
1	-4	1

$a_2 = (1, -4, 1)$

$e_2 = \frac{a_2}{|a_2|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

3) $$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2III \\ -2III \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -II \\ \cdot\frac{1}{3} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_3 = b.3.$

x_1	x_2	x_3
1	$\frac{1}{2}$	1

$$a_3 = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$c_3 = \frac{a_3}{|a_3|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_2 + \frac{2}{3} y_3$$

$$x_2 = -\frac{4}{3\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{3} y_3$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} y_2 + \frac{2}{3} y_3$$

$$B = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f(x) = -6y_2^2 + 3y_3^2}$$