Дубінін А ІПС-11 Вар. III

1 Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1}\right)\left(\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+1}\right)}{\left(\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+1}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(\cancel{n^4}+n+1-\cancel{n^4}-1\right)}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\,1}{\cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}+\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Дубина А.В. |ПЧ-11|

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)^7}{n^8} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^8}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)^7$

За т. Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)^7 - \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^7}{(n+1)^8-n^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+1)^7}{(n+1)^8-n^8} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^7}{(n+1)^8-n^8} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^7 + C_7^1 \cdot (2n)^6\cdot 3 + \dots + 3^7}{n^8 + C_8^1 n^7 + C_8^2 n^6 + \dots + 1 - n^8} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^7}{C_8^1} = \frac{128}{8} = 16$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\quad x_1 = 10 \quad x_{n+1} = \sqrt{4x_n+1} \quad \forall n \ge 1$

$x_{n+1} = \sqrt{4x_n+1}$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a = \sqrt{4x_n+1}$

$a^2 = 4a+1$

$a^2-4a-1=0$

$a_{1,2} = 2\pm\sqrt{5}$

Монотонность:

$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 4x_n+1 - x_n^2 = x_n^2-4x_n-1 \rightsquigarrow$ при $x\in(2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5})$ — неубывающая

Ограниченность x_n

При $n=1$ $\quad x_1 > +$

$10 > 2-\sqrt{5}$.

При n+1 $x_{n+1} = \sqrt{x_n+1}$

$x_{n+1}^2 = 4x_n+1 > 8 - 4\sqrt{5} > (2-\sqrt{5})^2 = a^2$

$x_{n+1} > a$

Доведено

x_n – монотонна і обмежена. За теор Вейєрштраса послідовність збіжна.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2-\sqrt{5}.$

4) Побудувати графік функції:

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}, \ x \ge 0$

$\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^n}+1\right)} = \begin{cases} x, & x>1 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$