КР 3

I варіант

① Лема про дві системи

Лінійно незалежну систему векторів неможливо виразити через систему, в якій менше векторів, тобто якщо у просторі V $\exists A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, то і всі вектори A лінійно вираж. через вектори B, то $m \leq n$.

②

$a_1 = (2, -1, 1, 3)$

$a_2 = (1, 2, 3, 4)$

$a_3 = (1, 12, 13, 14)$

$a_4 = (-1, 8, 7, 6)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & x_1 \\ -1 & 2 & 12 & 8 & x_2 \\ 1 & 3 & 13 & 7 & x_3 \\ 3 & 4 & 14 & 6 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2III \\ +III \\ \\ -3III \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 13 & 7 & x_3 \\ 0 & -5 & -25 & -15 & x_1 - 2x_3 \\ 0 & 5 & 25 & 15 & x_2 + x_3 \\ 0 & -5 & -25 & -15 & x_4 - 3x_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-\frac{1}{5}) \\ +II \\ -II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 13 & 7 & x_3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 2x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 + x_3 + (x_1 - 2x_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - 3x_3 - (x_1 - 2x_3) \end{array}\right) \begin{array}{l} -3II \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 & -5x_3 + 3x_1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \text{ причому } \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 3x_1 - 5x_3 \\ \alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 = 2x_2 - x_2 \end{cases}$$

③ $a_1 = (1, -1, 1)$ $b_1 = (5, 1, 7)$

$a_2 = (1, 2, 4)$ $b_2 = (1, 4, 2)$

$a_3 = (1, 1, 2)$ $b_3 = (2, 4, -1)$

Довести існування лінійного перетворення, знайти матрицю перетворення $[A\varphi]_e$

$(a_1 | a_2 | a_3 | E) \sim (E | A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +I \\ -I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ (:3) \\ -3II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\frac{1}{3}III \\ -\frac{2}{3}III \\ \times(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$r(A) = 3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ – лін. незалежн. => утвор. базис =>

$\exists!$ φ - лін. перетвор. R_3: $\varphi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1,3}$. (за лемою)

A - матриця перех. з e до a

A^{-1} - матриця переходу з a до e: $A^{-1} = (e_1 | e_2 | e_3)_a$

$e_1 = -a_2 + 2a_3$

$e_2 = -\frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + a_3$

$e_3 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 - a_3$

$\varphi(e_1) = \varphi(-a_2 + 2a_3) = -b_2 + 2b_3 = (3, 4, -4)$

$\varphi(e_2) = \varphi(-\frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + a_3) = -\frac{2}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + b_3 = (-\frac{5}{3}, 2, \frac{19}{3})$

$\varphi(e_3) = \varphi(\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 - a_3) = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}b_2 - b_3 = (\frac{1}{3}, -1, \frac{14}{3})$

$$[A_\varphi]_e = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & \frac{19}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

(4) Чи існує для даного перетворення базис простору, складений з власних векторів перетворення. Знайти цей базис і матрицю перетвор. в ньому.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 2 & -6-\lambda & 13 \\ -2 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-6-\lambda)(8-\lambda) +$$

$$+ 39 + 24 - (18 + 3\lambda + 48 - 6\lambda - 52 + 52\lambda) = (-\lambda)^3 + (3\lambda)^2 + 46\lambda - 48 + 63 -$$

$$- (49\lambda + 14) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (\lambda - 1)^3$$

$\lambda = 1$ кр $= 3$

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} -2\text{III} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{3} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

x_3 – вільн. чл.

x_1	x_2	x_3
3	1	1

Лише один лінійн. незалеж. вектор, що не може утвор. базис в R^3. Тому базису не існує, а тому матрицю перетворення знайти неможливо.