1. Алгебра висловлювань. Інтерпретація формул алгебри висловлювань. Загальнозначимість і суперечливість. Рівносилність формул. Нормальні форми. Логічні наслідки.

**Інтерпретація формул АВ**

      Істиносне значення довільної формули можна обчислити, виходячи з істиносних значень атомів.

      Приклад. Розглянемо формулу

G = (P∧Q) → (R ↔ (¬S)).

Атоми цієї формули – P, Q, R і S.

Нехай істиносні значення цих атомів дорівнюють 1, 0, 1 і 1 відповідно.

Тоді (P∧Q) є 0, (¬S) є 0,  (R ↔ (¬S)) є 0,

(P∧Q) → (R ↔ (¬S)) є 1.

Таким чином, G є 1, якщо атомам P, Q, R і S приписані значення 1, 0, 1 і 1.

Приписування істиносних значень атомам називається **інтерпретацією формули** G. Так як кожному із атомів P, Q, R і S можна приписати 0 або 1, то існує рівно 24 = 16 інтерпретацій формули G.

**Df**. Нехай G – формула і А1, ..., Аn – її атоми. Тоді інтерпретацією формули G називається приписування істиносних значень всім атомам А1, ..., Аn.

**Df.**Дві формули F і G називаються *рівносильними* (*тотожними*), якщо при будь-яких інтерпретаціях ці формули приймають однакові значення.

**Приклади** (рівносильних формул).

      ¬¬X = X,

      X∧Y = Y∧X

      (X∧Y)∧Z = X∧(Y∧Z)

      X∧(Y∨Z) = (X∧Y)∨(X∧Z)

X∨(X∧Y) = X

      X∧(X∨Y) = X

      ¬(X∨Y) = ¬X∧¬Y

      X∨X = X

      X∨¬X = 1

      X∧¬X = 0

**Нормальні форми**

**Df**. Говорять, що формула F знаходиться в кон’юнктивній нормальній формі, якщо

F = F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn, n≥1,

де кожна з Fi є диз’юнкцією літер.

**Df**. Говорять, що формула F знаходиться в  диз’юнктивній нормальній формі, якщо

F = F1 ∨ F2 ∨ … ∨ Fn, n≥1,

де кожна з Fi є кон’юнкцією літер.

**Приклади**. Формула

F = (P ∨¬Q ∨ R)∧(¬P ∨ Q)

є формулою в кон’юнктивній нормальній формі. Формула

F = (¬P∧Q) ∨ (P∧¬Q∧¬R)

є формулою в диз’юнктивній нормальній формі.

**Приклад**. Побудувати ДНФ для формули

(P∨¬Q)→R.

      (P∨¬Q)→R = ¬(P∨¬Q)∨R = (¬P∧Q)∨R.

**Df**. Говорять, що формула **загальнозначима**

(тавтологія), якщо вона істинна при всіх можливих

інтерпретаціях.

**Df**. Формула **незагальнозначима**, якщо вона не є

загальнозначимою.

***Логічні наслідки***

**Df**. Нехай задані формули F1, F2, ..., Fn і формула G. Говорять, що G є логічним наслідком формул F1,, F2, ..., Fn, якщо для всякої інтерпретації I в якій F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn

істинна, G також істинна.

**Теорема 1**. Нехай задані формули F1,, F2, ..., Fn і формула G. Тоді G є логічним наслідком F1, F2, ..., Fn тоді і тільки тоді, коли формула

(F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G

загальнозначима.

1. Числення висловлювань. Числення висловлювань. Приклади. Теорема дедукції. Теорема про коректність.

Визначення всякого числення містить:

**Числення висловлювань** (іноді також називають логікою висловлювань або пропозиційною логікою) є розділом математичної логіки, що вивчає структуру висловлювань та їх логічні взаємозв'язки за допомогою формальних правил і символів.

1. Визначення символів числення.

2. Визначення формул числення, що є скінченими

конфігураціями символів.

3. Визначення вивідних формул.

Символами ЧВ є символи наступних категорій:

а) Малі латинські букви з індексами і без них – a, b, …,

x, y, z, a1, … . f. Ці символи називаються змінними

висловлюваннями.

b) Cимволи ∧, ∨, →, ¬, які називаються логічними

зв’язками.

c) Символи (, ), які називаються лівою і правою

дужками.

Формули ЧВ – це скінченні послідовності символів

вищеописаних категорій.

**Приклади**. Змінні висловлювання a і b є формулами.

Тоді (а→b), ¬a, (¬a ∧ (а→b)) – формули.

Наступні слова (а→b, а¬b, ∧а, а→b не є формулами.

**Теорема (про дедукцію).** Нехай Г – множина формул,

А і В - формули. Якщо Г, А Ⱶ В, то Г Ⱶ А→В.

Доведення. Нам потрібно побудувати виведення

формули А→В із Г. Нехай С1, С2, ..., Сn – виведення

формули В = Сn із Г∪{А}. Перетворимо це виведення в

наступну послідовність формул:

(А→С1), (А→С2), ..., (А→Сn).

Ця послідовність закінчується формулою

(А→ В).

Перебудуємо цю послідовність (рухаючись зліва направо і

додаючи деякі формули) у виведення формули (А→ В).

Нехай ми підійшли до формули (А→Сi). За припущенням,

формула Сi або співпадає з А, або належить Г, або є вивідною, або

одержується із двох попередніх за правилом МР.

Розглянемо всі ці випадки по черзі.

(1) Якщо Сi є А, то формула має вигляд

А→А. Вона вивідна. Додамо перед нею її виведення.

(2) Нехай Сi належить Г. Тоді ми вставляємо формули Сi і

вивідну формулу Ci→(A→Ci). Застосування правила МР до цих

формул дає формулу (A→Ci).

(3) Ті ж формули можна додати, якщо Сi є вивідною формулою

ЧВ.

(4) Зрозуміло, що формула С1 або співпадає з А, або належить Г,

або є вивідною. Тому, формула A→C1 є вивідною з Г. Теж саме

стосується формули С2. Нехай, нарешті, формула С3 одержується із

двох попередніх С1 та С2 за правилом МР. Це означає, що

попередніми були формули С1 і С2 = С1 → C3.

Тоді в новій послідовності (з формулою А) вже будуть формули

(А→С1) і (А→(С1→C3)).

Ці формули є вивідними із Г. Дійсно, маємо послідовності:

С1, С1 →(А →С1), А→С1;

С1→C3, (С1→C3) →(А → (С1→C3)), А → (С1→C3),

які є виведенням цих формул з Г.

Тому ми можемо дописати до послідовності

С1, С1 →(А →С1), А→С1, С1→C3, (С1→C3) →(А → (С1→C3)), А →

(С1→C3),

формули

((А→(С1→C3)) → ((A→C1) → (A→ C3)) (ПП);

((A→C1) → (A→ C3)) (MP);

(A→ C3) (MP).

Отже, формула A→ C3 є вивідною з Г. Продовжуючи так далі,

одержимо, що формула A→ Cn є вивідною з Г. **Теорема доведена.**

1. Деякі правила і твердження числення висловлювань.

Далі через R будемо позначати довільну вивідну

формулу.

**Твердження.** b → R вивідна формула.

Доведення.

1. R (вивідна);

2. R→ (b → R) (ПП, I.1);

3. (b → R) (МР 1, 2).

**Твердження**. a → a – вивідна.

Доведення.

1. ((a→(b→a)) → ((a→b) → (a→ a)) (ПП, I.2);

2. (a→b) → (a→ a) (MP 1, I.1);

3. (a→R) → (a→ a) (ПП 2);

4. (a→R)

5. (a→ a) (МР 3, 4).

Існують інші способи доведення цього твердження.

Наприклад,

1. (d→((d→d)→d)) → ((d→(d→d)) → (d→ d)) (ПП I.2);

2. d→((d→d)→d) (ПП I.1);

3. (d→(d→d)) → (d→ d) (MP 1,2);

4. (d→(d→d)) (ПП I.1);

5. (d→ d) (MP 3,4).

Нехай Г – деяка множина формул.

Вивідні з Г формули ЧВ визначають наступним чином:

(1) якщо А формула з Г, то А – вивідна з Г формула;

(2) якщо А вивідна формула, то А – вивідна з Г формула;

(3) якщо А та А → В – вивідні з Г формули, то формула В,

одержана за правилом висновку є вивідною з Г формулою.

Df. Виведенням формули А із Г називається скінченна

послідовність формул, кожна з яких є вивідною з Г формулою, або

одержується із попередніх за допомогою правила МП. Останньою

формулою послідовності є формула А, яка називається вивідною з

Г.

Df. Якщо формула А вивідна із Г, то в цьому випадку пишуть Г

Ⱶ А.

Якщо Г пуста, то пишуть Ⱶ А і говорять, що А вивідна в ЧВ.

1. Несуперечливість числення висловлювань. Незалежність аксіом числення висловлювань. Інтуїціоністська логіка.

**Несуперечливість ЧВ**

Проблема несуперечливості є однією із

найважливіших проблем математичної логіки.

Df. Логічне числення називається **несуперечливим**,

якщо в ньому не виводяться ніякі дві формули, із яких

одна є запереченням іншої.

Іншими словами, несуперечливе числення – це таке

числення, що для довільної формули А, ніколи формули А

і ¬А не можуть одночасно виводитись із аксіом числення.

Проблема несуперечливості полягає в наступному: **є**

**дане числення суперечливим чи ні?**

Якщо в численні виводяться формули А і ¬А, то таке

числення називається суперечливим.

**Незалежність аксіом ЧВ**

Для всякого числення, в тому числі для ЧВ виникає

питання про незалежність його аксіом. Питання

ставиться наступним чином: чи можна якусь аксіому

вивести з останніх, застосовуючи правила виведення?

Якщо це можна зробити, то її можна вилучити із

списку аксіом, при цьому числення не зміниться.

Df. Аксіома, яка не виводиться з інших, називається

**незалежною від цих аксіом**, а система аксіом, в якій жодна

аксіома не виводиться з інших, називається незалежною

системою аксіом.

Ясно, що залежна система аксіом в якомусь розумінні

менш досконала, ніж незалежна, так як містить лишні

аксіоми.

**Теорема.** Система аксіом ЧВ є незалежною.

**Інтуїционістська логіка**

Для “формалізації” АВ, як уже говорилось, можна

розглядати й інші системи аксіом. Наприклад, четверту

групу аксіом можна замінити наступною:

IV.

1. ¬a→(a→b).

2. (a→b)→((a→¬b)→¬a).

3. a∨¬a.

Одержана аксіоматична система буде “еквівалентна”

приведеній на початку (суть еквівалентності – у

справедливості теорем про коректність і повноту).

Обидві аксіоматичні системи називаються класичними

системами аксіом ЧВ.

Якщо виключити із числа аксіом нової аксіоматичної

системи аксіому IV.3, то одержане числення буде

називатись інтуіционістським численням висловлювань.

Таке числення виникло як спроба формалізувати

методи міркувань інтуїционістської математики. В такій

математиці кожне математичне поняття або твердження

мають певний інтуїтивний зміст (на відміну від класичної

математики, де використовуються дуже абстрактні

поняття, які існують тільки в нашій уяві, дуже часто

суперечливій).

Наприклад, коли йдеться про твердження

А∨В, то його можна розуміти наступним чином:

1. “Твердження А∨В справедливе, якщо справедливе

твердження А або твердження В”.

2. “Твердження А∨В справедливе, якщо показано, що

справедливе твердження А, або показано, що справедливе

твердження В”.

Перша інтерпретація характерна для класичної логіки,

друга – для інтуїционістської.

1. Логіка предикатів. Приклади. Формули та інтерпретації. Терми. Предикатні символи.

**ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ**

Крім логічних зв’язок в математичних міркуваннях

часто зустрічаються квантори “для всякого (∀)” і “існує

(∃)”. Наприклад, визначення неперервності починається

словами “для всякого ε>0 існує δ>0 таке, ...”.

Питання про істинність чи фальшивість формули

∀x∃yR(x,y)

для даних множини М і бінарного відношення R на ній не

має змісту, поки не уточнена область М. Наприклад, якщо

М = N і R(x,y) є x>y, то формула є фальшивою. Якщо

R(x,y) є x<y, то формула є істинною.

Перейдемо до формальних визначень.

Нехай М – непорожня множина.

**Df**. Назвемо k-місною функцією довільне

відображення Mk в М визначене на всьому Mk.

**Df**. Назвемо k-місним предикатом на множині М

довільне відображення Mk в множину {0,1}.

Зафіксуємо деякий набір символів, які будемо

називати змінними. Як правило, це латинські букви x, y, z,

u, … або ті ж букви з індексами.

Символи f, g, h, … будемо називати **функціональними**.

Символи P, Q, R, … будемо називати **предикатними**.

Всякий функціональний або предикатний символи, як

було зазначено, мають визначену кількість аргументів.

Функціональний символ без аргументів будемо

ототожнювати з елементами множини М.

Визначимо поняття **терма**.

Df. **Термом** називається послідовність змінних, ком,

дужок і функціональних символів, яку можна побудувати

за наступними правилами:

1. Змінна є терм.

2. Константа є терм (функ. символ без аргументів).

3. Якщо t1, …, tk – терми, а f – функціональний символ

розмірності k>0, то

f(t1, …, tk)

є термом.

Df. Якщо А – предикатний символ розмірності k, а t1,

…, tk – терми, то вираз

А(t1, …, tk)

є атомарною формулою.

Формули логіки предикатів будуються за такими

правилами:

1. Атомарна формула – формула.

2. Якщо α - формула, то ¬α - формула.

3. Якщо α і β - формули, то вирази (α∧β), (α∨β),

(α→β) – формули.

Якщо α є формулою, а ξ - змінна, то вирази ∀ξα і ∃ξα

- формули.

Отже, поняття формули повністю визначене. Такі

формули іноді називають формулами першого порядку або

формулами мови першого порядку.

Наступний крок – це визначення інтерпретації. Щоб

задати інтерпретацію необхідно:

1. Задати не порожню множину М (носій інтерпрета-

ції).

2. Для кожного предикатного символа вказати

предикат, визначений на множині М.

3. Для кожного функціонального символу вказати

функцію з аргументами і значеннями в множині М.

Для кожної інтерпретації формула може приймати

значення 1 або 0 згідно з наступними правилами:

1. Якщо задані значення формул α і β, то значення

формул ¬α, (α∧β), (α∨β), (α→β) можна одержати з

відповідних таблиць.

2. Значення формули (∀x)α рівне 1 ⇔ коли α приймає

значення 1 для кожного x∈M.

3. Значення формули (∃x)α рівне 1 ⇔ коли α приймає

значення 1 хоча б для одного x∈M.

1. Загальнозначимість. Попередня нормальна форма.

Df. Говорять, що формула **загальнозначима**

(тавтологія), якщо вона істинна при всіх можливих

інтерпретаціях.

Df. Формула **незагальнозначима**, якщо вона не є

загальнозначимою.

Df. Говорять, що формула суперечлива, якщо вона

фальшива при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула несуперечлива (виконувана), якщо вона не

є суперечливою.

Df. Говорять, що G є логічним наслідком формул F1, F2,

..., Fn, якщо для всякої інтерпретації I в якій F1 ∧ F2 ∧ …

∧ Fn істинна, G також істинна.

Df. Говорять, що формула суперечлива, якщо вона

фальшива при всіх можливих інтерпретаціях.

Df. Формула несуперечлива (виконувана), якщо вона не

є суперечливою.

Df. Говорять, що G є логічним наслідком формул F1, F2,

..., Fn, якщо для всякої інтерпретації I в якій F1 ∧ F2 ∧ …

∧ Fn істинна, G також істинна.

Df. Формула F логіки предикатів знаходиться **в попередній**

**нормальній формі** тоді і тільки тоді, коли формула F має вигляд

(Q1x1) … (Qnxn) (M),

де (Qixi), i=1,…n, є або (∀xi) або (∃xi), М - формула, яка не містить кванторів.

(Q1x1) … (Qnxn) є префіксом , а М – матрицею формули F.

Приклад. Формули

(∀x)(∀y)(P(x,y)∧Q(y)),

(∀x)(∀y)(¬P(x,y)→Q(y)),

(∀x)(∀y)(∃z)(Q(x,y)→R(z))

знаходяться в попередній нормальній формі.

1. Еквівалентність формул. Алгоритм перетворення формул до попередньої нормальної форми.

Df. Формули F і G **еквівалентні** (записується F=G)

тоді і тільки тоді, коли істинносні значення цих формул

одні і ті ж при будь-яких інтерпретаціях.

Основні пари еквівалентних формул алгебри

висловлювань будуть, зрозуміло, еквівалентними і логіці

предикатів. Крім них існують еквівалентності, що містять

квантори. Розглянемо такі еквівалентності.

**Алгоритм перетворення формул ЛП до попередньої**

**нормальної форми**

1. Використовуючи правила

F↔G=(F→G)∧(G→F),

F→G=¬F∨G,

виключити логічні операції ↔, →.

2. Використовуючи правило

¬(¬F)=F,

закони де Моргана і закони

¬((∀x)F[x])=(∃x)(¬F[x]), ¬((∃x)F[x])=(∀x)(¬F[x]),

переносимо знак заперечення всередину формули.

3. Перейменовуємо зв’язані змінні, якщо це потрібно.

4. Використовуємо тотожності ЛП 1-6 з тим, щоб

винести квантори на початок формули.

Приклад. Привести формулу

(∀x)P(x)→(∃x)Q(x)

до попередньої нормальної форми.

(∀x)P(x)→(∃x)Q(x) = ¬(∀x)P(x)∨(∃x)Q(x) =

= (∃x)(¬P(x))∨(∃x)Q(x)=

= (∃x)(¬P(x)∨Q(x)).

Отже, попередня нормальна форма формули

(∀x)P(x)→(∃x)Q(x) є (∃x)(¬P(x)∨Q(x)).

Приклад. Привести формулу

(∀x) (∀y)((∃z)P(x,z)∧P(y,z))→(∃u)Q(x,y,u))

до попередньої нормальної форми.

(∀x) (∀y)((∃z)P(x,z)∧P(y,z))→(∃u)Q(x,y,u)) =

(∀x)(∀y)(¬((∃z)P(x,z)∧P(y,z)))∨(∃u)Q(x,y,u))=

(∀x)(∀y)((∀z)(¬P(x,z)∨¬P(y,z))∨(∃u)Q(x,y,u))

=(∀x)(∀y)(∀z)(∃u)(¬P(x,z)∨¬P(y,z)∨Q(x,y,u).

1. Скулемівські стандартні форми. Приклади.

Використовувались наступні ідеї:

1. Формула логіки предикатів може бути зведена до

попередньої нормальної форми (ПНФ).

2. Оскільки матриця не містить кванторів, вона може

бути зведена до КНФ.

3. Зберігаючи суперечливість формули, в ній можна

елімінувати квантори існування шляхом використання

скулемівських функцій.

Нехай формула F знаходиться в ПНФ

(Q1x1) … (Qnxn) (M),

де М є КНФ і Qr є квантор існування в префіксі (Q1x1) …

(Qnxn), 1≤r≤n.

1. Якщо ніякий квантор загальності не стоїть в префіксі лівіше

Qr , то вибираємо нову константу с, відмінну від інших констант, які

входять в М, замінюємо всі xr, що зустрічаються в М, на с і

викреслюємо (Qrxr) з префікса.

2. Якщо , …, - список всіх кванторів загальності, що

знаходяться лівіше Qr , 1≤s1< …< sm< r, то вибираємо новий

функціональний символ f, відмінний від інших, всі xr в М міняємо

на f( , …, ), елімінуємо (Qrxr).

3. Повторюємо пункти 1 або 2 для всіх кванторів існування в

префіксі. Остання з одержаних формул є **скулемівською**

**стандартною формою** (або просто стандартною формою)

формули F.

Константи і функції, що використовуються для заміни змінних

квантора існування, називаються скулемівськими функціями.

Приклад. Одержати стандартну форму для формули

(∃x)(∀y)(∀z)(∃u)(∀v)(∃w) P(x,y,z,u,v,w).

В цій формулі лівіше (∃x) нема ніяких кванторів

загальності, лівіше (∃u) стоять (∀y) і (∀z), лівіше (∃w)

стоять (∀y) і (∀z) і (∀v). Отже, замінюємо змінну x на

константу а, змінну u – на двомісну функцію f(y,z), змінну

w – на тримісну функцію g(y,z,v). Таким чином одержимо

стандартну форму

(∀y)(∀z)(∀v) P(а,y,z, f(y,z),v, g(y,z,v)).

Приклад. Одержати стандартну форму для формули

(∀x)(∃y)(∃z) ((¬P(x,y) ∧ Q(x,z)) ∨ R(x,y,z)).

Спочатку зведемо матрицю до КНФ:

(∀x)(∃y)(∃z)((¬P(x,y)∨R(x,y,z))∧(Q(x,z)∨ R(x,y,z))).

Змінні y, z замінюємо одномісними функціями f(x), g(x)

відповідно. Одержимо СФ

(∀x)((¬P(x,f(x))∨R(x,f(x),g(x)))∧(Q(x,g(x))∨

R(x,f(x),g(x)))).

1. Теорема про суперечливість множини диз’юнктів.

Теорема. Нехай S – множина диз’юнктів, які задають

стандартну форму формули F. Тоді F суперечлива тоді і

тільки тоді коли S суперечлива.

Доведення. Будемо вважати, що F знаходиться в ПНФ,

тобто

F = (Q1x1) … (Qnxn) M[x1, … , xn]

(M[x1, … , xn] означає, що матриця М містить змінні x1, …

, xn). Нехай Qr – перший квантор існування і

F1 = (∀x1)…(∀xr-1) (Qr+1xr+1) … (Qnxn) M[x1, …, xr-1, f(x1,

…, xr-1), xr+1, … xn],

де f – скулемівська функція для xr, 1≤r≤n. Ми хочемо

показати, що F суперечлива тоді і тільки тоді, коли F1

суперечлива.

Нехай F суперечлива. Якщо F1 несуперечлива, то існує

інтерпретація I така, що F1 істинна в I. Тобто, формула

(Qr+1xr+1) … (Qnxn) M[x1, …, xr-1, f(x1, …, xr-1), xr+1, … xn]

буде істинною в I для всіх x1, …, xr-1.

Отже, для всіх x1, …, xr-1 буде існувати xr, для якого

(Qr+1xr+1) … (Qnxn)M[x1, …,xr-1, xr, xr+1, … xn]

істинна (xr = f(x1, …, xr-1)).

Таким чином, F несуперечлива. Отже, F1 повинна

бути суперечливою.

З іншого боку, пртимо, що F1 суперечлива. Якщо F

несуперечлива, то існує інтипусерпретація I така, що для

всіх x1, …, xr-1 буде існувати xr для якого

(Qr+1xr+1) … (Qnxn) M[x1, …,xr-1, xr, xr+1, … xn]

істинна в I. Розширимо I, включаючи функцію f, яка

відображає x1, …,xr-1 в xr . Позначимо це розширення через

I′.

Зрозуміло, що для всіх x1, …, xr-1 формула

(Qr+1xr+1) … (Qnxn) M[x1, …,xr-1, f(x1, …, xr-1), xr+1, … xn]

буде істинною в I′, тобто F1 істинна в I′, що суперечить

припущенню про те, що F1 суперечлива. Отже, F повинна

бути суперечливою.

1. Метод Ербрана. Ербранівський універсум множини диз’юнктів. Ербранівський базис. Основні приклади. Н-інтерпретація.

За визначенням тавтологія – це формула істинна при

всіх інтерпретаціях. Ербран розробив алгоритм

знаходження інтерпретації, яка спростовує дану формулу.

Однак, якщо формула справді є тавтологією, то ніякої

інтерпретації не існує і алгоритм не завершує роботу.

Df. Нехай H0 – множина констант, які зустрічаються в

S. Якщо ніяка константа не зустрічається в S, то

покладають H0 = {a}.

Для i=0, 1, 2, … нехай Hi+1 є об’єднання Hi і множини

всіх термів fn(t1, ... ,tn), що зустрічаються в S, де tj належать

Hi.

Кожне Hi називається множиною констант i-го рівня

для S, а H∞ називається **ербранівським універсумом S.**

Приклад. Нехай S = {P(a), ¬P(x)∨P(f(x))}.

Тоді

H0 = {a},

H1 = {a, f(a)},

H2 = {a, f(a), f(f(a))},

. . . . . . . . . . . . . . . . .

H∞ = {a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), … }

Приклад. Нехай S = {P(f(x), a, g(y), b}.

Тоді

H0 = {a, b},

H1 = {a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)},

H2 = {a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)),

f(f(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))},

. . . .. . . . . . . . . . . . .

H∞ = . . . . . . . .

Df. Множина атомів виду P(t1, ... ,tn) для всіх

предикатів, що зустрічаються в S, називається

**ербранівським базисом** S, де ti – елементи ербранівського

універсума.

Df. Основним прикладом диз’юнкта C множини S є

диз’юнкт, одержаний заміною змінних в С на елементи

ербранівського універсуму.

Приклад. Якщо S = {P(x), Q(f(y))∨R(y)}, то P(a),

P(f(f(a))) **основні приклади** диз’юнкту C=P(x).

Нехай S – множина диз’юнктів, H – ербранівський

універсум S і I – інтерпретація S над Н.

Df. Говорять, що I є **H-інтерпретація** множини S,

якщо вона задовольняє наступним умовам:

1. I відображає константи в самих себе.

2. Якщо f – n-місний функціональний символ і h1, …,

hn – елементи H, то в I через f позначається функція, яка

відображає h1, …, hn в f(h1, …, hn).

При цьому не виникає ніяких обмежень при

інтерпретації предикатних символів з S.

Якщо А = {A1, A2, …, An, …} – ербранівський базис

множини S, то H-інтерпретацію I зручно подавати у

вигляді

I = {m1, m2, …, mn, … },

де mj є або Аj або ¬Аj для j=1,2, … При цьому, якщо mj є

Аj, то значення атома Аj дорівнює 0, в іншому випадку – 1.

1. Теорема про суперечливість множини диз’юнктів для Н-інтерпретацій.

**Теорема**. Множина диз’юнктів S суперечлива тоді і

тільки тоді, коли S фальшива при всіх H-інтерпретаціях в

S.

Доведення. (⇒). Доведення в цю сторону очевидне,

так як за визначенням S суперечлива тоді і тільки тоді,

коли S фальшива при всіх інтерпретаціях на будь-якій

області.

(⇐). Припустимо, що S фальшива при всіх H-

інтерпретаціях в S. Якщо S не суперечлива, то існує

інтерпретація I на деякій області D така, що S істинна при

I.

За попереднім твердженням S істинна при

інтерпретації I\*, що відповідає I. А це суперечить тому,

що S фальшива при всіх H-інтерпретаціях. Отже, S

повинна бути суперечливою.

Таким чином, для перевівки суперечливості множини

диз’юнктів, необхідно розглядати тільки H-інтерпретації.

1. Застосування теореми Ербрана.

**Теорема (Ербрана).** Для того, щоб множина диз’

їюнктів була суперечливою достатньо, щоб існувала

скінченна суперечлива множина основних прикладів диз’

юнктів.

Доведення. Нехай існує скінченна суперечлива

множина S′ основних прикладів диз’юнктів S.

Так як кожна інтерпретація I для S містить

інтерпретацію I′ множини S′ і I′ заперечує S′, то I також

повинна заперечувати S′. Але S′ заперечується в кожній

інтерпретації I′. Отже, S′заперечується в кожній

інтерпретації I множини S.

Тому S заперечується в кожній інтерпретації

множини S′. Отже, S суперечлива.

**Застосування теореми Ербрана**

Теорема Ербрана для доведення суперечливості

множини диз’юнктів припускає процедуру спростування.

Це означає, що для доведення суперечливості множини

диз’юнктів S повинна існувати машинна процедура, яка

породжує множини S1, ..., Sn, ... основних прикладів диз’

юнктів із S і встановлює їх суперечливість.

1. Метод резолюцій для логіки висловлювань. Резольвента. Резолютивне виведення.

**Метод резолюцій для логіки висловлювань**

Розглянемо наступні диз’юнкти:

С1: P

C2: ¬P∨Q.

Df. Якщо А – атом, то говорять, що дві літери А і ¬А

контрарні одна одній і множина {A, ¬A} називається

контрарною парою.

Відзначимо, що диз’юнкт є тавтологією, якщо він

містить контрарну пару.

Викреслюючи контрарну пару із С1 і С2 одержимо

дизюнкт:

С3: Q.

Узагальнюючи це правило, одержимо наступне

правило – правило резолюцій.

Для будь-яких двох диз’юнктів С1 і С2, якщо існує

літера L1 в С1, яка контрарна літері L2 в С2, то

викреслюючи L1 і L2 з С1 і С2 відповідно, утворимо диз’

юнкцію диз’юнктів, що залишились. Одержаний диз’юнкт

є **резольвентою** С1 і С2.

Df. Нехай S – множина диз’юнктів**. Резолютивне**

**виведення** С із S є така скінченна послідовність C1, …, Ck

диз’юнктів, що кожний Сi або належить S або є резольвен-

тою диз’юнктів, попередніх Сi і Сk=C. Виведення • із S

називається спростуванням S.

1. Метод резолюцій для логіки першого порядку. Повнота методу резолюцій

**Метод резолюцій для логіки першого порядку**

Приклад. Нехай С1= P(x)∨Q(x) і C2 = ¬P(a) ∨ R(x).

Ербранівський універсум: Е = {a}.

Основні приклади: C1= P(a)∨Q(a) і C2 = ¬P(a) ∨ R(a).

Таким чином, Q(a) ∨ R(a) резольвента С1 і С2.

Отже, правило резолюцій є правило виведення, яке породжує

резольвенти для множини диз’юнктів. Воно більш ефективне, ніж

попередні процедури доведення. Крім того, метод резолюцій

повний, тобто при допомозі цього методу для будь-якої

суперечливої множини диз’юнктів можна вивести пустий диз’юнкт.

Теорема (**повнота методу резолюцій**). Множина S

диз’юнктів суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує

виведення пустого диз’юнкта.

Приклад. Покажемо, що формула

((P→S) ∧ (S→U) ∧ P) → U істинна. Для цього треба

показати, що заперечення цієї формули суперечливе.

Таким чином, маємо:

1. ¬P∨S,

2. ¬S∨U,

3. P,

4. ¬U,

5. S (резольвента 3,1),

6. U (резольвента 5,2),

7.  (резольвента 6,4).

**Аксіоми числення висловлювань**

I

1. a → (b→a).

2. ((a→(b→c)) → ((a→b) → (a→ c)).

II

1. a ∧ b → a.

2. a ∧ b → b.

3. (a→ b) → ((a→c)→(a→b∧c)).

III

1. a →a ∨ b.

2. b → a∨ b.

3. (a→ c) → ((b→c)→((a ∨ b) → c)).

IV

1. (a→ b) → (¬b → ¬a).

2. a → ¬¬a.

3. ¬¬a → a.

**Лема.** Для довільних формул P і Q

P,Q Ⱶ (P∧Q); P,Q Ⱶ (P∨Q);

P,¬Q Ⱶ ¬(P∧Q); P,¬Q Ⱶ (P∨Q);

¬P,Q Ⱶ ¬(P∧Q); ¬P,Q Ⱶ (P∨Q);

¬P,¬Q Ⱶ ¬(P∧Q); ¬P,¬Q Ⱶ ¬(P∨Q);

P,Q Ⱶ (P→Q); P Ⱶ ¬(¬P);

P,¬Q Ⱶ ¬(P→Q); ¬P Ⱶ ¬P.

¬P,Q Ⱶ (P→Q);

¬P,¬Q Ⱶ (P→Q);

Доведення. Наприклад, для формули P,Q Ⱶ (P∧Q)

доведення одержуємо за правилом

Для формули ¬P,Q Ⱶ ¬(P∧Q) із аксіоми IV.1 маємо

Ⱶ ((P∧Q) → P) → (¬P→¬(P∧Q)).

Але Ⱶ (P∧Q) → P (аксіома II.1), отже за правилом

висновку Ⱶ (¬P→¬(P∧Q)). Тому,

¬P Ⱶ ¬(P∧Q).

Для формули P,¬Q Ⱶ (P∨Q) із III.1 одержуємо Ⱶ P → (P∨Q). Отже, P Ⱶ (P∨Q), а значить, P,¬Q Ⱶ (P∨Q).

Для формули P,Q Ⱶ (P→Q), що стосується імплікації

маємо за аксіомою I.1

Ⱶ Q→(P→Q).

Отже, Q Ⱶ (P→Q).

Щодо формул із запереченням, то, наприклад, перша з

них одержується з аксіоми IV.2, друга – з теореми  А→А.