第 2 章 线性规划与单纯形法

第 1 节 线性规划数学模型（Linear Programming——LP）

一．什么是线性规划？

例 1（生产组合问题）多种产品生产组合问题：某工厂要安排生产 I 和 II 两种产品。已知生产单位产品所需在机器上的加工时间及原料 A、B 的消耗，并已知机器和原料的可用总量限制及单位产品可获得的利润（如右表）。问如何安排生产，使工厂获得的利润最大？

产品 / 资源	产品 I	产品 II	资源限制
机器	1	2	≤8
原料 A	4	0	≤16
原料 B	0	4	≤12
产品利润	2	3	

决策变量

解：设 x_1, x_2 分别为产品 I 、 II 的产量，

则该问题的线性规划模型：

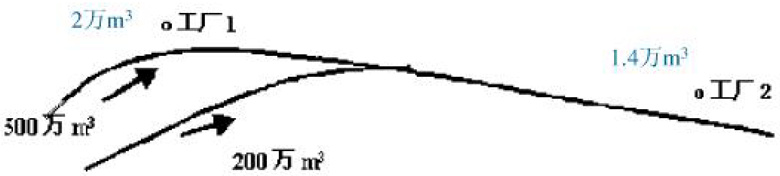
$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

线性目标函数

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性约束条件

例 2 （书上 P16 例 2）靠近某河流有两个化工厂(见附图)，流经第一个工厂的河流流量 500 万立方米/天；在两工厂之间有一支流、流量为 200 万立方米/天。第一个工厂每天排放工业污水 2 万立方米；第二个工厂每天排放工业污水 1.4 万立方米 。从第一个工厂排出的污水流到第二个工厂之前，有 20%可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量不应大于 0.2%，若这两个工厂都各自处理一部分污水，第一个工厂的处理成本是 1000 元/万立方米，第二个工厂的处理成本是 800 元/万立方米。试问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少污水，才能使总的污水处理费用为最小?建立线性规划模型。



决策变量

解：令 x,y 分别是第一和第二个化工厂每天处理的污水量，则

(1) 第一到第二个工厂之间河流中污水含量≤0.2%

$$\Rightarrow (2-x)/500 \le 0.2\%$$

(2) 流经第二个工厂后和二硫键污水含量≤0.2%

$$\Rightarrow [0.8(2-x)+(1.4-y)]/(500+200) \le 0.2\%$$

(3) 每个厂的污水处理量不超过污水排放量 $\Rightarrow$ $x \le 2,\ y \le 1.4$

(4) 目标：处理污水的总费用 $z=1000x+800y$ 最小。

线性目标函数

故线性规划模型：

$$\min z = 1000x+800y$$
$$s.t.\begin{cases} 2-x \le 0.2\% * 500 \\ [0.8(2-x)+(1.4-y)] \le 0.2\% * 700 \\ x \le 2 \\ y \le 1.4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

线性约束条件

化简

$$\min z = 1000x+800y$$
$$s.t.\begin{cases} x \ge 1 \\ 0.8x+y \ge 1.6 \\ x \le 2 \\ y \le 1.4 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

请用图解法求解该模型！

例 3 （产销平衡运输问题）设有 m 个产地 $A_1, A_2, \cdots A_m$，产量分别为 $a_1, a_2, \cdots a_m$； n 个销地 $B_1, B_2, \cdots B_n$，需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots b_n$；且满足产销平衡条件：$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。

需求地 产地	B_1 B_2 …… B_n	产地产量
A_1	c_{11} c_{12} ……c_{1n}	a_1
A_2	c_{21} c_{22} ……c_{2n}	a_2
$\vdots$	……………	$\vdots$
A_m	c_{m1} c_{m2} ……c_{mn}	a_m
需求地需求量	b_1 b_2 …… b_n	

已知从产地 A_i 到销地 B_j 单位货物的运费 C_{ij} ($i=1,2,\cdots m$， $j=1,2,\cdots n$)。问题是寻求一个货物运输方案，使得总的运输费用最小。

决策变量

解： 设 x_{ij} 为从产地 A_i 到销地 B_j 运输的货物量($i=1,2,\cdots m$, $j=1,2,\cdots n$)，则该问题的 LP 模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

线性目标函数

$$s.t.\begin{cases} \text{产地约束}\forall i=1,2,\cdots m\text{：} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \text{销地约束}\forall j=1,2,\cdots n\text{：} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \quad i=1,2,\cdots m, \quad j=1,2,\cdots n \end{cases}$$

线性约束条件

【思考】若产销不平衡的模型呢？

例 4 （贷款策略模型）建设银行正在制定一项总额可达 1200 万元的贷款策略。右表提供了各类贷款相关数据。其中坏账不可回收、也不产生利息收入。

贷款类型	利率	坏账比例
个人	0.140	0.10
汽车	0.130	0.07
住房	0.120	0.03
农业	0.125	0.05
商业	0.100	0.02

为与其他金融机构竞争，银行至少要将 40%的资金分配给农业贷款和商业贷款。为扶持当地房地产业，住房贷款至少要等于个人贷款、汽车贷款和住房贷款总额的 50%。银行还有一项明确政策：坏账的占比不允许超过全部贷款的 4%。试建立该问题的数学模型。

解： 设 x_i (i=1,2,3,4,5)分别个人、汽车、住房、农业、商业贷款额。

决策变量

总利息＝$0.14*0.9x_1+0.13*0.93x_2+0.12*0.97x_3+0.125*0.95x_4+0.1*0.98x_5$

（注意：坏账不产生利息）

坏账=$0.1x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02x_5$

目标函数表达为：

$$\max z=\text{总利息-坏账} =0.026x_1+0.0509x_2+0.0864x_3+0.06875x_4+0.078x_5 \qquad (*)$$

5 个约束条件：

(1) 资金总额不超过 1200 万元：$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 12$；

(2) 农业和商业贷款至少等于贷款总额的 40%：$x_4+x_5 \ge 0.4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

(3) 住房贷款应至少等于个人贷款、汽车贷款和祝福贷款总额的 50%：

$x_3 \ge 0.5(x_1+x_2+x_3)$

(4) 坏账占比不应超过贷款总额的 4%：

$0.1x_1+0.07x_2+0.03x_3+0.05x_4+0.02x_5 \le 0.04(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$

(5) 非负约束：$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$

最优解分析：用软件求出最优解为 $x_1=0, x_2=0, x_3=7.2, x_4=0, x_5=4.8; z=0.99648$

注 1：为什么第(2)个约束右端不直接写成 12？

注 2：最优解除了住房和商业贷款，没有其他贷款。投资收益如何计算呢？

收益率=$\dfrac{z}{12}=\dfrac{0.99648}{12}=0.08034$，

从目标函数表达（*）中可以看出，这个最优解的收益率低于住房贷款收益为 0.0864，为什么我们求出的最优解达不到住房贷款收益率呢？

二．线性规划模型及两个变量线性规划图解法

1. LP 模型特点及一般形式

LP 模型的特点：

(1) 决策变量：一组变量，用以表示问题的一个决策方案；

(2) 约束条件：一组决策变量的线性方程或不等式组，表示决策方案所受的限制；

(3) 目标函数：决策变量的线性函数，根据实际问题求最大或最小。

LP 模型一般形式：

$$\max(\text{或}\min) z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \ge (\le,=) b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \ge (\le,=) b_m \\ x_i \ge 0, \quad i\in M \subseteq \{1,2,\cdots,n\} \\ x_j\text{无符号限制}, \quad j \notin M \end{cases}$$

其中，$a_{ij},b_i,c_j\ (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)$ 都是给定的常数。

总之，线性规划（LP）就是研究线性函数在线性不等式或等式组成的约束条件下，达到最优（最大或最小）的数学模型；也称具有线性规划模型的问题为线性规划问题。

2. LP 解的有关概念

(1) 可行解（可行点）：满足约束条件的一组决策变量的值 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$；
所有可行解（点）组成的集合称为该 LP 的可行解域，记为 F；

(2) 最优解：使目标函数值达到最优（最大或最小）的可行解。

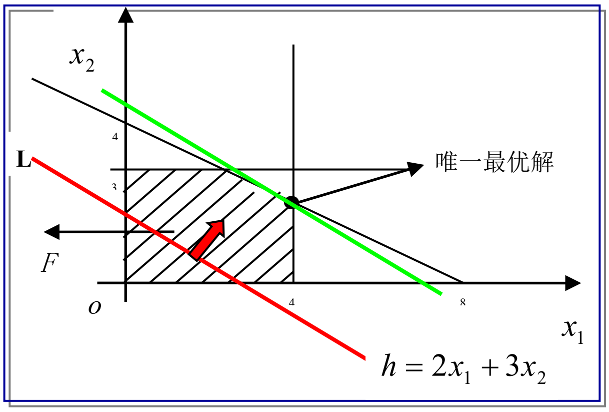
由线性代数和微积分中求极值的知识可知，LP 的解必有如下三种情况之一：

$$\begin{cases} F=\phi \ \Rightarrow \ \text{称该LP无解或不可行} \\ F\neq\phi \ \ \text{但无最优解} \ \Rightarrow \ \text{称该LP无界} \\ F\neq\phi \ \ \text{有限最优解} \ \Rightarrow \ \text{称该LP有最优解} \end{cases}$$

求解 LP 就是要判定它属于哪种情况？当有最优解时，求出最优解和最优目标函数值。

3. LP 图解法——解的结构与几何直观

记 F 为 LP 的可行域（可行解集合），以两个变量的 LP 的图解法说明 LP 的解的结构。



例 ①：

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+2x_2\le 8 \\ 4x_1\le 16 \\ 4x_2\le 12 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

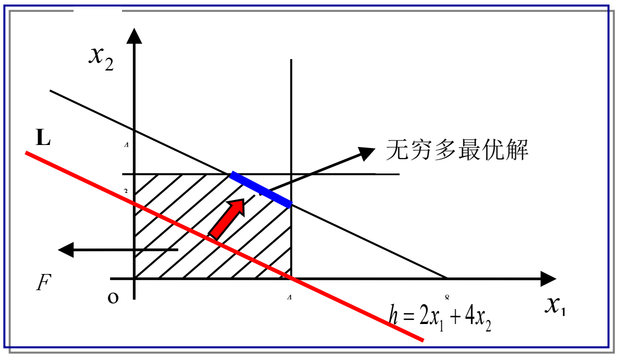
目标函数线 L：$h=2x_1+3x_2$ (如图红线).

原点 O 到 L 的距离 $d=\dfrac{|0+0-h|}{\sqrt{4+9}}=\dfrac{h}{\sqrt{13}}$，

即目标函数值与原点 O 到 L 的距离 d 成正比，故将直线 L 向远离原点 O 的方向平行移动，直至要脱离可行解域为止（如图绿线）。可见，该线性规划存在唯一最优解(4,2)。

例 ②： 将例 ① 中目标函数变为 $\max z=2x_1+4x_2$。

按前例分析可知，存在无穷多最优解。（如图蓝色线段）

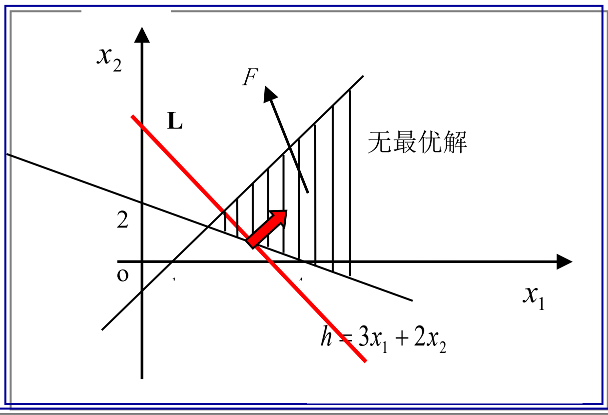


例 ③：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

存在可行解，但无最优解。

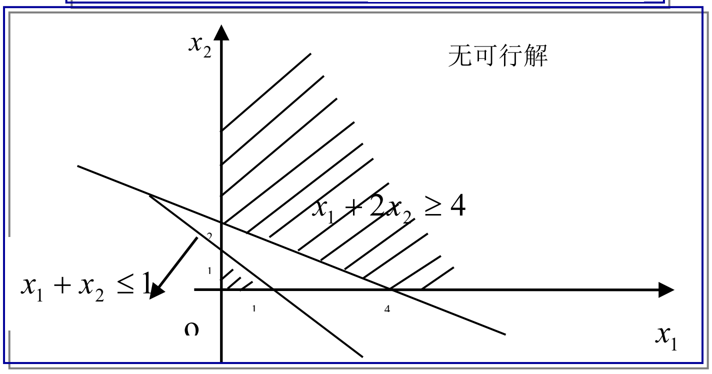


例 ④：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

不存在可行解。



由以上例子可看出的直观结论：

① LP 解的情况，必为下述四种情况之一：

a）存在唯一最优解；

b）存在无穷多最优解；

c）存在可行解，但无最优解；

d）不存在可行解。

② LP 可行解域及最优解的几何特征：

a）可行解域 F 是（超）多面体且一定是凸集；

b）若最优解存在，则一定可以在多面体的顶点取到。

三．线性规划标准形式

1. LP 模型两种形的式：

① LP 的**一般形式**（general form）：

$$\max(\text{或}\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge (\le, =) b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge (\le, =) b_m \\ x_i \ge 0, i \in M \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \\ x_j \text{无符号限制}, j \notin M \end{cases}$$

为何考虑标准形式（方程组形式）：希望利用已有的完备的方程组理论求解 LP。

② LP 的**标准形式** (standard form)：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

【命题】①②两种形式是等价的，即他们之间是可互相转化的。

②→① 显然，标准形式是一般形式。

①→②：

a) $\min z \longrightarrow \max(-z)$

这种变量称为松弛变量

b) $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \xrightarrow{\text{加上变量 } y_i \ge 0} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$

$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \ge b_j \xrightarrow{\text{减去变量 } y_j \ge 0} a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n - y_j = b_j$

这种变量称为剩余变量

c) 若 x_j （无符号约束）

另构造两个非负变量 $x_j^{'}, x_j^{''} \ge 0 \xrightarrow[\text{令}]{} x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$ 代入原 LP。

当求解出 $x'_j \ge x''_j$ 时，原变量在最优解中取值 $x_j \ge 0$；否则，原变量在最优解中取值 $x_j < 0$。

例 1（续）： LP：

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其标准形式：

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

给定一个生产方案 (x_1, x_2)，
松弛变量 x_3, x_4, x_5 —— 分别表示在这种生产方案下相应各资源的剩余量。

例 2： 将（LP）

$$\min z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 = 16 \\ 4x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \text{无符号限制} \end{cases}$$

化为标准形式：

$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$

$$\max(-z) = -2x_1 - 3x_2^{'} + 3x_2^{''}$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2^{'} - 2x_2^{''} + x_3 = 8 \\ 4x_1 = 16 \\ 4x_2^{'} - 4x_2^{''} - x_4 = 12 \\ x_1, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

例 3： 现有 n 种食物含有 m 种营养素，已知：

$$\begin{cases} a_{ij}\text{为每单位第}\,j\,\text{种食物含第}\,i\,\text{种营养素的量；} \\ r_i\text{为第}\,i\,\text{种营养素的日需求单位量；} \\ c_j\text{为每单位第}\,j\,\text{种食品的价格；} \end{cases}$$

问题是如何购买食物，才能在满足各种营养素日需求量的前提下使总花费最少？令 x_j 为第 j 种食物的购买量，

则该问题的 LP 模型为：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq r_i & i = 1,2,\cdots m\text{，} \\ x_j \geq 0 & j = 1,2,\cdots n \end{cases}$$

其标准形式：

$$\min(-z) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - u_i = r_i & i = 1,2,\cdots m \\ x_j \geq 0, u_i \geq 0 & j = 1,2,\cdots n,\ i = 1,2,...,m \end{cases}$$

该 LP 模型在每个约束中添加一个剩余变量（共增加 m 个剩余变量），化为标准形式。其中：第 i 个约束中的剩余变量 u_i 表示在给定一种购买方案后，第 i 种营养和基本标准相比下的超出量。

注：LP 化为标准形时，每个不等式约束化为等式约束时，都要“补充”一个“松弛变量”或“剩余变量”，不同的约束所补充的松弛变量或剩余变量都是不同的变量！这些补充上的变量是有具体意义的：给定一个可行解后，相应的约束左边和右边常数的差。

2. LP 标准型的矩阵、向量表示：（不失一般性，只考察 LP 的标准形式）

① 矩阵表示：

$$\max z = c'x$$
$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $c' = (c_1, c_2, \cdots c_n)$ ， $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ， $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

（价值向量）　（决策变量）　（系数矩阵）　（资源向量）

② 列向量表示形式： 令 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 分别为系数矩阵 A 的列向量，

$$\max z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$
$$s.t. \begin{cases} P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{或}}$$

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$P_1, P_2, \cdots P_n$ 分别称为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的系数列。

③ 行向量表示形式：

令 $a_1,a_2,\cdots a_m$ 分别为系数矩阵 A 的行向量，LP 表示为：
$$\max z = c'x \quad s.t.\begin{cases} a_i x = b_i & i=1,2,\cdots,m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

例如，给定标准形式的 LP：
$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1) 其系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$， $c'=(2,3,0,0,0)$

2) 变量 $x_j(j=1,2,3,4,5)$ 的系数列向量分别为 $P_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

线性规划可写成：
$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}8\\16\\12\end{pmatrix} \\ x_1,\ldots,x_5 \geq 0 \end{cases}$$

注：给定一个 LP，变量和它所对应的系数列向量是一一对应、“绑定”在一起的。