Week 1-2 Outline

Main content of this lecture:

1. The standard form of LP (Linear Programming)

   —线性规划模型的标准型

2. Gauss elimination of equations

   —方程组的高斯消去法

3. Basic solution and Basic feasible solution (bfs)

   —线性规划的基解与基可行解

4. The geometry of LP-corresponding between bfs and extreme point

   —LP的几何意义：基可行解与可行解域顶点对应

5. Naïve idea on solving LP

   —LP的直觉解法（在所有bfs上找最优解）

LP模型 & 标准型

LP 模型的特点：

(1) 决策变量：一组变量，用以表示问题的一个决策方案；

(2) 约束条件：一组决策变量的线性方程或不等式组，表示决策方案所受的限制；

(3) 目标函数：决策变量的线性函数，根据实际问题求最大或最小。

① LP 的一般形式（general form）：

$$\max(\text{或}\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq, =) b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq, =) b_m \\ x_i \geq 0, i \in M \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \\ x_j \text{无符号限制}, j \notin M \end{cases}$$

② LP 的标准形式（standard form）：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

为什么考虑标准型？

LP一般形式与标准型可互相转化（等价）

$$\max(\text{或}\min)z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq, =) b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq, =) b_m \\ x_i \geq 0, i \in M \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \\ x_j\text{无符号限制}, j \notin M \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

a) $\min z \longrightarrow \max(-z)$

这种变量称为松弛变量

b) $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \xrightarrow{\text{加上变量 } y_i \geq 0} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$

$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j \xrightarrow{\text{减去变量 } y_j \geq 0} a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n - y_j = b_j$

这种变量称为剩余变量

c) 若 x_j（无符号约束）

另构造两个非负变量 $x_j^{'}, x_j^{''} \geq 0 \xrightarrow[\text{令}]{} x_j = x_j^{'} - x_j^{''}$ 代入原 LP。

LP矩阵/向量表示（以标准型为例）

① 矩阵表示：

$$\max z = c'x$$
$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $c' = (c_1, c_2, \cdots c_n)$ ， $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ， $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

c 也常直接写成行向量

（价值向量） （决策变量） （系数矩阵） （资源向量）

② 列向量表示形式： 令 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 分别为系数矩阵 A 的列向量，

$$\max z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t. \begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots n \end{cases}$$

或

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j = b \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$P_1, P_2, \cdots P_n$ 分别称为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的系数列。

Gauss 消去法—预备知识

Gauss-Jordan elimination example

Equations	Augmented matrix			
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$	1	3	1	9
$x_1 + x_2 - x_3 = 1$	1	1	-1	1
$3x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 35$	3	11	5	35
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$	1	3	1	9
$-2x_2 - 2x_3 = -8$	0	-2	-2	-8
$2x_2 + 2x_3 = 8$	0	2	2	8
$x_1 - 2x_3 = -3$	1	0	-2	-3
$x_2 + x_3 = 4$	0	1	1	4
$0 = 0$	0	0	0	0

We performed 2 pivots

1. `pivot(1,1)` (a pivot on the (1,1) element of the augmented matrix)
2. `pivot(2,2)`

通过Gauss 消去法—写出方程组的解

Gauss-Jordan elimination example

THE UNIVERSITY of ADELAIDE

In this form

Equations	Augmented array
$x_1 \quad - 2x_3 = -3$	1 0 -2 -3
$x_2 + x_3 = 4$	0 1 1 4
$0 = 0$	0 0 0 0

we can read off the solution. There is a degree of freedom, because the last equation is always true. This gives us a *free* variable: here we take it to be $x_3 = t$, and the solution will be

$$\mathbf{x} = (-3, 4, 0) + t(2, -1, 1)$$

这里是1，是对的！因为最后这个分量代表x_3的取值。

We could choose to set $x_3 = 0$, and get a solution $(-3, 4, 0)$.

Basic Solution & Basic Feasible Solution (bfs)
基解/基可行解

Basic feasible solution

这个定义的角度
有点儿问题！

Recall the following:

Definition (Basic solution)

A *basic solution* to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is a solution with at least $n - m$ zero variables.

We can add to this:

Definition (Basic feasible solution)

If a basic solution satisfies $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, then it is called a *basic feasible solution*.

That is, the solution is feasible if it also satisfies the non-negativity requirements (for the original variables, and the slack variables).

基可行解引例

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

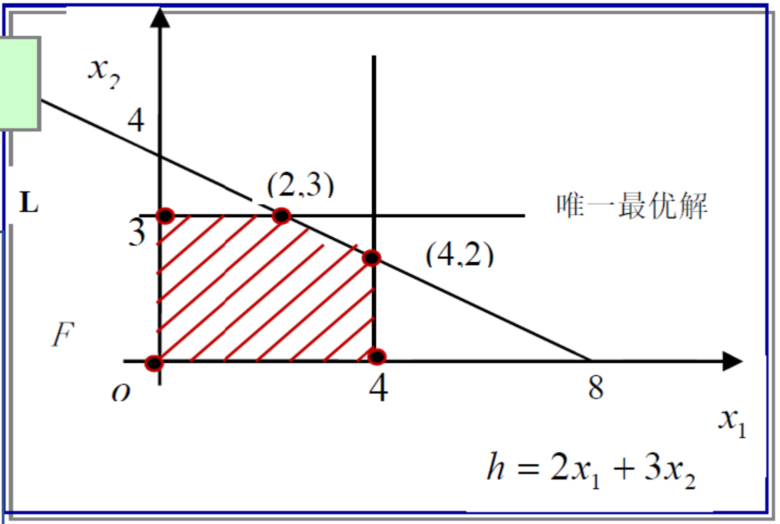
LP 可行解域及最优解的几何特征：

(1) 可行解域 F 是多面体且一定是凸集；

(2) 若最优解存在，必可在多面体的**顶点**取到。

什么样的解是顶点?

顶点对应的解是什么?



1）其标准形式(*)：

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

令 $x_1 = x_2 = 0$
得 $x_3 = 8, x_4 = 16, x_5 = 12$ → 点 O

2）

令 $x_2 = x_4 = 0$
得 $x_1 = 4, x_3 = 4, x_5 = 12$ → 点(4,0)

将(*) 约束恒等变换得形式(**)：

$$s.t.\begin{cases} +2x_2 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 4 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 = 4 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \end{cases}$$

3）

令 $x_4 = x_5 = 0$
得 $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = -2$ → 点(4,3)

将(*) 约束恒等变换得形式(***)：

$$s.t.\begin{cases} x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = -2 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_4 = 4 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_5 = 3 \end{cases}$$

基可行解定义

给定标准形式(LP)：$\max c'x$

$$s.t.\begin{cases} Ax=b \\ x\ge 0 \end{cases},\quad A \text{ 为 } m\times n \text{ 矩阵且假定：} \operatorname{rank}(A)=m\text{。}$$

在矩阵 A 中取 m 个线性无关列 $P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_m}$，记它们构成的矩阵为：

$$B=\left(P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_m}\right),$$

- $P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_m}$ 为(LP)的一个基(basis)；
- B 为相应的基阵；构成 B 的列为相应的基列或基向量；
- A 的其他列称为相应的非基列或非基向量（并将所有非基列构成的矩阵记为 $\boldsymbol{N}$）。

$$Ax=b \xleftrightarrow{\text{化为}} (B,N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=b \xleftrightarrow{\text{矩阵分块乘法化为}} Bx_B+Nx_N=b$$

- 令非基变量$x_N=0$，得到基变量唯一取值$x_B=B^{-1}b$.

(1) $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$——关于基 B 的基解(Basic Solution)；

(2) 若$\boxed{B^{-1}b\ge 0}$——关于基 B 的基可行解 (Basic Feasible Solution)

bfs 的个数有限，不超过C_n^m

bfs 的 0 分量个数不少于$(n-m)$.

LP几何意义+ 算法基本思想

1. bfs与可行解域extreme point (顶点)对应
2. LP最优解一定在顶点达到

结论 1. x^* 是 F 的一个顶点当且仅当 x^* 是(LP)的一个 bfs。

结论 2. 线性规划(LP)最优解必能在某个 bfs 上取到（若存在）。

几何上，若(LP)存在最优解，则必在可行解域的顶点上达到。

LP 单纯形法的基本思路：

这种算法称为：迭代法

从某个 bfs（可行解域顶点）出发

↓

寻找一个相邻的“更好（目标函数值更优）”的 bfs

（两个相邻的 bfs 对应的顶点由“可行解域的一条棱”相连）

↓

若不存在这样的相邻 bfs，则当前的 bfs 就是最优解！End！

否则，给出这个更好的 bfs

End