

---

main,sans,mono,CJKmain,CJKsans,CJKmono





# Functional Analysis

## Lecture Notes

作者: Stone Sun

时间: 2025 年 10 月 13 日

联系方式: hefengzhishui@outlook.com

谨以此篇，献给热爱分析的你。

# 目录

---

# 前言

Stone Sun  
2025 年 10 月 13 日

# 第一章 距离空间

## 1.1 距离空间基本概念

距离空间是泛函分析研究的基础，也是拓扑学的基础。本章我们将介绍距离空间的基本概念，并举一些例子，以便理解一些重要的定理。

### 1.1.1 距离的定义

#### 定义 1.1

设  $X$  是一个非空点集，如果存在一个函数  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得对于任意的  $x, y, z \in X$  都有以下公理化条件成立：

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

那么我们称  $d$  为  $X$  上的一个距离，并称  $(X, d)$  为一个距离空间，简记为  $X$ 。



距离空间上显然成立的一个定理是 Cauchy-Schwarz 不等式：

#### 定理 1.1

设  $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  和  $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  是  $\mathbb{R}^n$  中的两个向量，则有：

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}$
- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2$



### 1.1.2 距离空间的例子

**例题 1.1** 实数集  $\mathbb{R}$  上的标准距离定义为  $d(x, y) = |x - y|$ . 这使得  $\mathbb{R}$  成为一个距离空间。

**例题 1.2** 欧几里得空间  $\mathbb{R}^n$  上的标准距离定义为  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ . 这使得  $\mathbb{R}^n$  成为一个距离空间。