
main,sans,mono,CJKmain,CJKsans,CJKmono



Functional Analysis

Lecture Notes

作者: Stone Sun
时间: 2025 年 10 月 13 日
联系方式: hefengzhishui@outlook.com

谨以此篇, 献给热爱分析的你.

目录

前言

Stone Sun
2025 年 10 月 13 日

第一章 距离空间

1.1 距离空间基本概念

距离空间是泛函分析研究的基础,也是拓扑学的基础.本章我们将介绍距离空间的基本概念,并举一些例子,以便理解一些重要的定理.

1.1.1 距离的定义

定义 1.1

设 X 是一个非空点集,如果存在一个函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,使得对于任意的 $x, y, z \in X$ 都有以下公理化条件成立:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

那么我们称 d 为 X 上的一个距离,并称 (X, d) 为一个距离空间,简记为 X .



距离空间上显然成立的一个定理是 Cauchy-Schwarz 不等式:

定义 1.2

设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 \mathbb{R}^n 中的两个向量,则有:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}$
- $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \right)^2$



1.1.2 距离空间的例子

例题 1.1 实数集 \mathbb{R} 上的标准距离定义为 $d(x, y) = |x - y|$. 这使得 \mathbb{R} 成为一个距离空间.

例题 1.2 欧几里得空间 \mathbb{R}^n 上的标准距离定义为 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. 这使得 \mathbb{R}^n 成为一个距离空间.