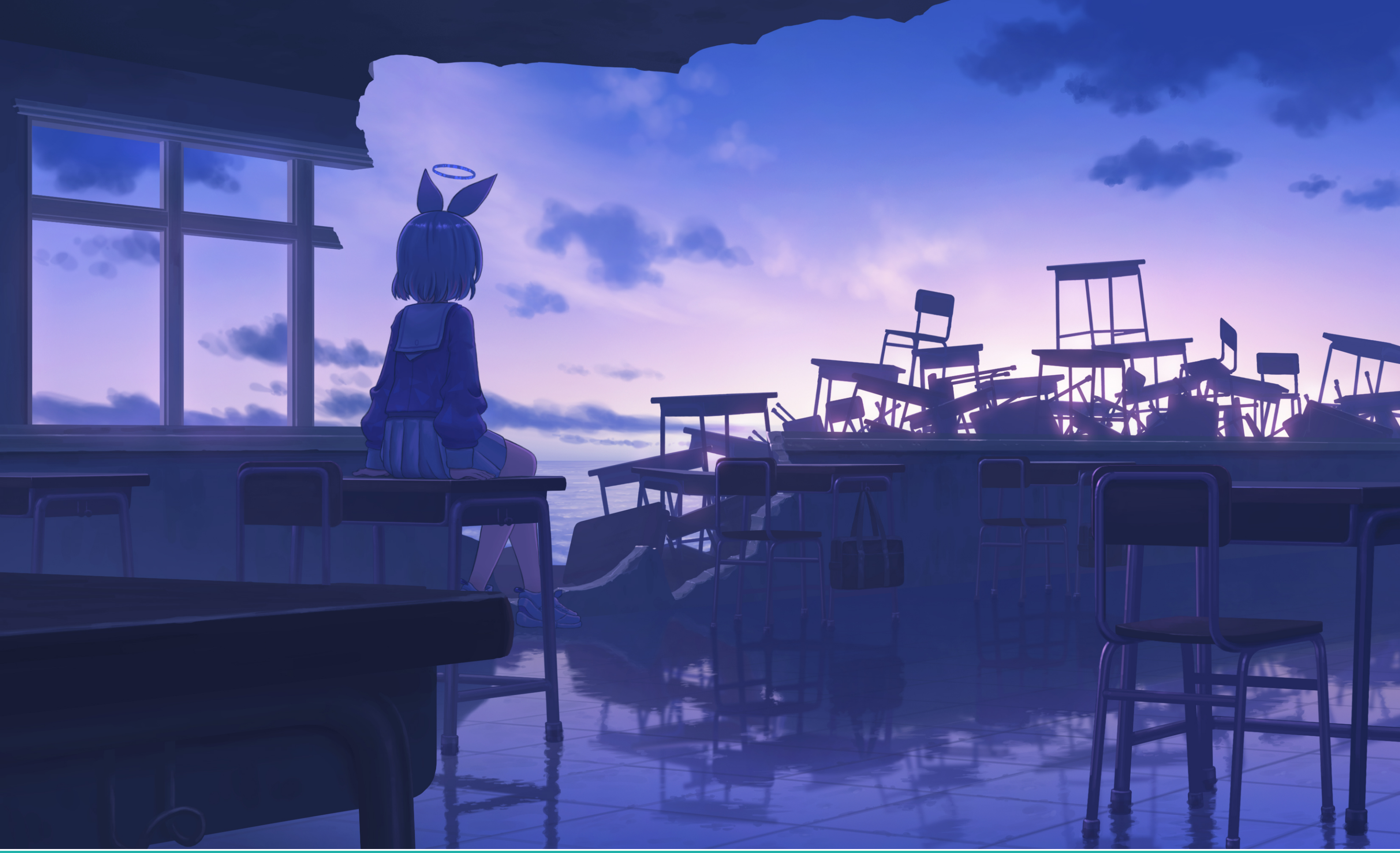
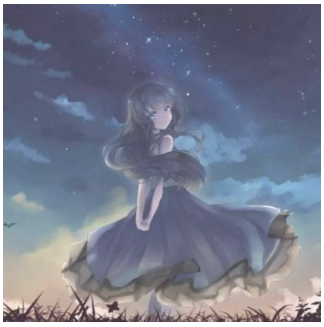


Functional Analysis

Lecture Notes

作者：Stone Sun
时间：2025 年 12 月 3 日
联系方式：hefengzhishui@outlook.com



谨以此篇, 献给热爱分析的你.

目录

前言

Stone Sun

2025 年 12 月 3 日

第一章 距离空间

1.1 距离空间基本概念

距离空间是泛函分析研究的基础, 也是拓扑学的基础. 本章我们将介绍距离空间的基本概念, 并举一些例子, 以便理解一些重要的定理.

1.1.1 距离的定义

定义 1.1

设 X 是一个非空点集, 如果存在一个函数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$, 使得对于任意的 $x, y, z \in X$ 都有以下公理化条件成立:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

那么我们称 d 为 X 上的一个距离, 并称 (X,d) 为一个距离空间, 简记为 X. ♣

距离空间上显然成立的一个定理是 Cauchy-Schwarz 不等式:

定理 1.1

设 $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量, 则有:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$
- $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2$

♡

证明 这里我们仅对第三条不等式证明:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned}
$$

1.1.2 距离空间的例子

例题 1.1 实数集 $\mathbb{R}^n$ 上的标准距离定义为 $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. 则 $(\mathbb{R}^n, d)$ 成为一个距离空间.

证明 我们仅证明三角不等式:

$$
\begin{aligned}
d(\vec{x},\vec{z}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2} \\
&\le \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\right)^2} \\
&= d(\vec{x},\vec{y})+d(\vec{y},\vec{z})
\end{aligned}
$$

注 特别地, 实数空间 $\mathbb{R}$ 上的标准距离 $d(x,y)=|x-y|$ 使得 $(\mathbb{R},d)$ 成为一个距离空间.

例题 1.2 $[a,b]$ 上的连续函数空间 $C[a,b]$ 上的距离定义为 $d(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$. 则 $(C[a,b],d)$ 成为一个距离空间.

证明 我们仅证明三角不等式:

$$
\begin{aligned}
d(f,h) &= \max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \\
&\le \max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\max_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)| \\
&= d(f,g)+d(g,h)
\end{aligned}
$$

注 事实上一个空间上可以规定若干不同的距离, 只需要满足上述的三个公理化条件即可. 例如: 在 $\mathbb{R}$ 上可定义 $d_1(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

下面证明三角不等式成立:

$$
\begin{aligned}
d_1(x,z) &= \frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \frac{|x-y+y-z|}{1+|x-y+y-z|} \\
&\le \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\
&= \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z|}+\frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \\
&\le \frac{|x-y|}{1+|x-y|}+\frac{|y-z|}{1+|y-z|} = d_1(x,y)+d_1(y,z).
\end{aligned}
$$

上述不等式中, $\phi(t)=\dfrac{t}{1+t}$ 在 $t>-1$ 上单调增保证了 $\phi(|x-y|+|y-z|)\le\phi(|x-y|)+\phi(|y-z|)$.

这里我们用 d_1 表示距离, 以和 d 进行区分.

例题 1.3 记所有实数列构成空间 S. $\forall x=\{\xi_n\}, y=\{\eta_n\}$, 规定距离 $d(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$. 则 (S,d) 成为一个距离空间.

例题 1.4 记所有有限可测集上的可测函数构成空间 S. 设 E 有限可测, $\forall x,y\in S$, 规定距离 $d(x,y)=\displaystyle\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t$. 则 (S,d) 成为一个距离空间.

例题 1.5 记所有可测集 E 上的所有 p 次幂 L 可积的可测函数构成集合 $L^p(E)$, 其中 $1\le p<+\infty$. 设 $\forall x,y\in L^p(E)$, 规定距离 $d(x,y)=\left(\displaystyle\int_E|f(t)-g(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$. 则 $(L^p(E),d)$ 成为一个距离空间.

注 $L^p(E)$ 上的距离满足的条件后证.

例题 1.6 设满足下列条件的数列构成空间 $l^p(p\ge1)$: $x=\{x_n\}\in l^p \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty$. 则定义距离为 $d(x,y)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$. 则 (l^p,d) 成为一个距离空间.

注 l^p 上的距离满足的条件后证.

例题 1.7 在任意非空点集 X 上定义距离 $d(x,y)=1$ if $x\neq y$ and $d(x,x)=0$. 则 (X,d) 成为一个距离空间, 称为离散距离空间.

1.1.3 距离空间点列的收敛性

定义 1.2

设 (X,d) 是一个距离空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点列, 存在 $x_0\in X$, 使 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时都有 $d(x_n,x_0)<\varepsilon$, 则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$.

对于一般点列的收敛性, 我们还有如下定理:

定理 1.2

- 设 (X,d) 是一个距离空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点列, 则 $\{x_n\}$ 的极限唯一.
- 设 (X,d) 是一个距离空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的一个点列, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 则 $\forall$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$.
- 设 (X,d) 是一个距离空间, 若 $\{x_n\}\to x_0, \{y_n\}\to y_0$, 则 $d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$.

下面我们再讨论一些函数空间的特性, 具体来说, 我们主要讨论收敛性.

命题 1.1

在有限可测集 E 上的可测函数空间 S 中, 点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 等价于 $\{x_n\}$ 依测度收敛于 x.

证明 若 $\{x_n\}$ 依测度收敛至 x_0, 则 $\forall\varepsilon>0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\varepsilon\}=0$. 考虑距离 $d(x_n,x_0)=\displaystyle\int_E\frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t=\int_{\{t:|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon\}}+\int_{\{t:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\varepsilon\}}$.

因为 E 的测度有限, 故存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时都有 $m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\varepsilon\}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因此 $d(x_n,x_0)\leq\varepsilon\cdot m(E)+m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\varepsilon\}<\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot m(E)+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 取 ε 足够小, 则 $d(x_n,x_0)<\delta$, 即 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0.

若 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时都有 $d(x_n,x_0)=\displaystyle\int_E\frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t<\varepsilon$. 因为 $\dfrac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\geq\dfrac{\delta}{1+\delta}$ 当且仅当 $|x_n(t)-x_0(t)|\geq\delta$, 故有 $m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\delta\}\leq\dfrac{1+\delta}{\delta}d(x_n,x_0)<\dfrac{1+\delta}{\delta}\varepsilon$. 取 ε 足够小, 则 $m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geq\delta\}<\eta$, 即 $\{x_n\}$ 依测度收敛于 x_0.

命题 1.2

在距离空间 $C[a,b]$ 中, $d(x_n,x_0)\to 0$ 等价于 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x_0.

证明 若 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x_0, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时都有 $\forall t\in[a,b], |x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$. 因此 $d(x_n,x_0)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$, 即 $d(x_n,x_0)\to 0$.

若 $d(x_n,x_0)\to 0$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时都有 $d(x_n,x_0)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$. 因此 $\forall t\in[a,b], |x_n(t)-x_0(t)|<\varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x_0.

1.1.4 连续映射与等距映射

最后我们给出两种映射的定义, 这会在有界算子空间中用到.

定义 1.3

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个距离空间, 双射 $f : X \to Y$ 称为连续的, 如果 $\forall x_0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d_X(x, x_0) < \delta$ 时都有 $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. ♣

定义 1.4

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个距离空间, 双射 $f : X \to Y$ 称为等距的, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 都有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. ♣

注 显然等距映射必然是连续映射.

进一步地, 我们也有距离空间等距的概念.

定义 1.5

设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个距离空间, 如果存在一个等距映射 $f : X \to Y$, 则称 X 和 Y 是等距的. ♣

1.2 距离空间的点集

这一部分主要是介绍距离空间中的点集概念, 包括开集、闭集、稠密集等内容. 这一切都是需要距离才能够定义的, 因此我们在这里讨论.

1.2.1 相关概念

定义 1.6

设 (X, d) 是一个距离空间, A 是 X 的一个非空子集, 则可以定义下列概念:

- 在 X 中, 称子集 $S(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) < r\}$ 为以 x_0 为中心, r 为半径的开球. ♣