



Complex Analysis

Lecture Notes

作者: Stone Sun
时间: 2025 年 8 月 7 日
联系方式: hefengzhishui@outlook.com



谨以此篇, 献给热爱分析的你.

目录

第一章 度量空间	1
1.1 度量空间	1
1.2 赋范线性空间及内积空间	3

前言

这是一份关于复分析的讲义,但其主要观点是围绕函数论的思想展开的,几何的观点在这其中很少体现,仅在第一章和第七章中简要介绍,这份讲义是基于中国海洋大学的复变函数课程的讲义和笔记而写成的,主要参考了龚昇的《简明复分析》和钟玉泉的《复变函数论》,其中许多例子和习题均来自于这两本书.

相较于其他分析课程,复变函数似乎是最能体现应用的一门课程,甚至于许多工科专业也需要学习相关的知识.但这篇讲义是从数学专业的角度展开阐述的,也正因此,我在整理这份讲义的时候更倾向于用抽象的方式引入,采用分析的语言来表述.因此这对于想要直接应用的学生并不友好.

这份讲义是笔者在 2025 年春季学期和暑期复习这门课程时完成的,主要目的是为了更进一步了解现代分析和函数论的观点.同时我也非常感谢姚增善老师对这门课程的讲授,我整理的内容大纲就是大致按照姚老师的课程结构安排的.

出于对个人水平的了解,我不敢保证这份讲义不存在任何问题,因此在正式撰写完成这份讲义后,我期待能够得到更多的反馈和建议,以便于我在今后的学习和研究中更好地完善这份讲义.如果你有任何意见或建议,欢迎随时与我联系.

Stone Sun

2025 年 8 月 7 日

第一章 度量空间

1.1 度量空间

作为现代数学研究的重要概念之一,通过度量构造的空间为后面许多空间的形成提供了重要基础. 这里我们首先讨论度量空间的定义和一些例子.

定义 1.1

设 X 是一个非空集合, 如果存在一个函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下性质:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

则称 d 为 X 上的度量, 并称 (X, d) 为度量空间.



考虑下面的例子是一个度量空间:

例题 1.1 设 $p \geq 1$, 定义 $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. 则 (\mathbb{R}^n, d_p) 是一个度量空间.

定义 1.2

设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中一个可列的点列, $x_0 \in X$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$, 则称 x_n 收敛于 x_0 , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.



注 我们注意到这样一个事实, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n, m > N$ 时, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, 则称 x_n 为 Cauchy 列, 这说明完备的度量空间可以直观解释为满足 Cauchy 收敛性的点列.

但同时我们也应注意到, 这一事实并不对任何拓扑空间都成立. 在一般拓扑学中, 我们知道并不永远满足点列的极限存在性的唯一性, 这说明只有给定了度量的空间, 才能保证点列的收敛性和 Cauchy 列的等价性.

定义 1.3

设 (X, d) 是度量空间, 如果 X 中任意 Cauchy 列都收敛于 X 中的某个点, 则称 (X, d) 为完备的.



下面我们考虑一些在传统实分析中经常用到的度量空间:

例题 1.2 定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数空间 $C[a, b]$ 是完备的.

注 上面这个例子说明在 $[a, b]$ 上定义的连续函数空间是完备的, 这说明在 $[a, b]$ 上定义的连续函数列一致收敛 (根据 Weierstrass 一致收敛定理), 但我们应当注意到, 在 $[a, b]$ 上定义的函数列的点态收敛是不能通过度量描述的, 这是由于点态收敛的定义是基于函数值的收敛, 而不是基于函数的距离.

例题 1.3 考虑度量空间 (X, d) , 一种关于 X 的新的度量方式是 $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.

注 上面的例子说明了度量空间的度量可以通过一些变换来得到新的度量, 这说明度量空间的结构是相对灵活的. 并且我们容易验证, 上面 d' 在被看作度量时收敛性和 d 是一致的.

事实上, 对于 Lebesgue 可测函数, 我们也可以定义一种度量.

例题 1.4 设 f, g 是 Lebesgue 可测函数, 定义 $d(f, g) = \int_{[a, b]} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dm(x)$. 则 (L^1, d) 是一个度量空间, 其中 m 表示测度.

注 要说明上面这个例子, 我们考虑 Lebesgue 控制收敛定理, 这说明 Lebesgue 可测函数的点态收敛和 Lebesgue 积分的收敛是等价的. 因此我们可以通过 Lebesgue 积分来定义 Lebesgue 可测函数的度量.

不同于一般拓扑的情形, 在度量空间中收敛点列的极限是唯一的, 因此我们用下面的定理概括这一事实:

定理 1.1

设 (X, d) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的点列, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则 x_0 是唯一的.



证明 设 x_0 和 x_1 都是 $\{x_n\}$ 的极限, 则根据度量的定义, 有 $0 \leq d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_1)$, 对任意的 n , 当 n 足够大时, $d(x_0, x_n)$ 和 $d(x_n, x_1)$ 都趋近于 0, 因此 $d(x_0, x_1) = 0$, 这说明 $x_0 = x_1$.

注 上面的结果事实上给出了可测函数列依测度收敛的唯一性.

1.2 赋范线性空间及内积空间

泛函分析研究的一个重要方面是空间的结构和性质, 因此下面我们首先回顾线性空间.

定义 1.4

设 X 是一个非空集合, 如果存在两个运算 $+$ 和 \cdot 使得以下性质成立:

1. $(X, +)$ 是一个阿贝尔群;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in X, \alpha x + y \in X$;
3. $\forall x, y, z \in X, (x + y) + z = x + (y + z)$;
4. $\forall x, y \in X, x + y = y + x$;
5. $\exists 0 \in X$, 使得 $\forall x \in X, x + 0 = x$;
6. $\forall x \in X, \exists -x \in X$, 使得 $x + (-x) = 0$.

则称 $(X, +, \cdot)$ 为线性空间.



注 更进一步地, 线性空间可以等价定义为在 X 上有一个满足交换律的加法运算符和一个数乘运算符.

下面我们考虑一种较为特殊的线性空间, 事实上我们在高等代数中已经了解过这种空间的特点.

定义 1.5

设 S 是集合, \mathcal{F} 是 S 上某些函数构成的函数族, 若定义加法和数乘运算如下:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in \mathcal{F}, x \in S$,
2. $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall f \in \mathcal{F}, x \in S$.

则称 \mathcal{F} 为 S 上的函数空间, 并称 $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ 为线性空间.



注 这里我们没有明确 α 的取值范围, 这是因为我们可以将 α 看作是任意实数或复数, 这取决于我们所研究的函数空间的性质. 例如, 如果 \mathcal{F} 是实值函数空间, 则 α 为实数; 如果 \mathcal{F} 是复值函数空间, 则 α 为复数.

对应地, 我们称 \mathcal{F} 为实值函数空间或复值函数空间, 也简称为实空间或复空间.

下面讨论一些具体的函数空间的例子.

例题 1.5 以下这些例子都是函数空间:

1. $C(E)$ 表示在集合 E 上定义的所有连续函数的集合, 其中 E 是 \mathbb{R} 的一个子集.
2. $B(E)$ 表示在集合 E 上定义的所有有界函数的集合, 其中 E 是 \mathbb{R} 的一个子集.
3. $P[x]$ 表示全体多项式函数 $p(x)$ 的集合.

类似于高等代数中对空间的讨论, 线性空间总是存在着一个基, 这使得我们可以将线性空间中的任意元素表示为基向量的线性组合.

定义 1.6

若 X 上存在一组线性无关的向量 $\{e_i\}_{i \in I}$, 使得 X 中的任意向量都可以表示为这组向量的线性组合, 则称 $\{e_i\}_{i \in I}$ 为 X 的 Hamel 基.

若 X 的 Hamel 基是有限的, 则称 X 为有限维线性空间, 否则称 X 为无限维线性空间.




对于线性空间, 前面的讨论没有给出这种空间的度量, 因此我们引入赋范线性空间的概念.

定义 1.7

设 X 是一个定义在数域 K 上的线性空间, 若存在一个函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, 满足以下性质:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in K, x \in X$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的半范数.

若还满足 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in X$, 则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数, 此时也称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间. 

注 容易发现, 我们可以利用这个定义来诱导在 X 上的度量 $d(x, y)$, 其中 $d(x, y) = \|x - y\|$. 此外, 这个度量在线性空间上是连续的, 因此赋范线性空间也是度量空间.

我们下面考虑这样的例子:

例题 1.6 设 E 是 \mathbb{R}^k 上的 Lebesgue 可测集. 对 $1 \leq p < \infty$, 定义 $\mathcal{L}^p(E) = \{f : f \in L(E), \|f\|_p = \left(\int_E |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$. 则 $\|\cdot\|_p$ 是一个半范数, 这是因为 $\|f\|_p = 0$ 不能得到 $f = 0$.

若我们规定 $f \sim g$ 当且仅当 $f = g$ 几乎处处成立, 则 $\mathcal{L}^p(E)/\sim$ 是一个赋范线性空间, 记作 $L^p(E)$.

下面考虑有界变差函数, 我们发现全体有界变差函数构成的空间也是一个赋范线性空间.

例题 1.7 设 $[a, b]$ 是 \mathbb{R} 上的一个闭区间, 定义 $BV[a, b] = \{f : f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上有界变差}\}$. 则 $BV[a, b]$ 是一个赋范线性空间, 其中范数定义为 $\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b(f)$.

对于一般的赋范线性空间, 我们并不一定能够保证其完备性, 因此我们引入 Banach 空间, 简而言之, Banach 空间表示的是具有范数的完备赋范线性空间.

定义 1.8

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 如果其诱导的距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 是完备的, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间. 