2023 春-实变函数

一、选择题

1. 设 $E = [a, b] \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, 其中 \mathbb{Q} 为有理数集, 则 E 的讨论为真的是:

A. $m(E) = +\infty$.

B. m(E) = 0.

C. m(E) = b - a.

D. E 是不可测集.

2. 设 f 为可测集 E 上的可测函数, 则关于 f 的命题成立的是:

A. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 f^+ 和 f^- 在 E 上 Lebesgue 可积.

B. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 |f| 在 E 上 Lebesgue 可积.

C. f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当 |f| 在 E 上 Riemann 可积.

D. f 可测当且仅当 |f| 可测.

3. 设 $A_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n} \right]$, 则下列关于 A_n 的运算正确的是:

A. $\lim_{n \to +\infty} A_n = [0, 1)$

B. $\liminf_{n \to \infty} A_n = [0, 1]$

C. $\limsup_{n\to+\infty} A_n = [0,1)$

D. $\limsup_{n\to+\infty} A_n = [0,1]$

4. 设 C 为 Cantor 集, 则下列关于 C 的命题不成立的是:

A. m(C) = 0.

B. $\overline{C} = C$.

C. C 中有至多可数个点.

D. C 是疏朗集.

5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则下列关于 E 的命题成立的是:

A. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E \setminus K) < \varepsilon$.

B. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

C. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E) < m(K) + \varepsilon$.

D. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E) < m(F) + \varepsilon$.

二、判断题

- 1. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是零测集, 则 E 的闭包也是零测集.
- 2. 若 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, 则 $f_n g_n \Rightarrow fg$.
- 3. 设 E_k 为一列可测集, 若 $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$, 则 $m(E) = \lim_{k \to +\infty} m(E_k)$.
- 4. 设 A 为集合,则总存在集合 B, A 的势严格大于 B 的势.

- 5. 设 $f_n(x)$ 为可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E[f_n \nrightarrow 0] = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{N\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant N} E\left[|f_n(x)|\geqslant \frac{1}{k}\right]$.
- 6. 有限个闭集的并是闭集, 可数多个闭集的并不一定是闭集.

三、简答题

- 1. 设 e_n 是一列可测集, 分析 $\limsup_{n \text{ to} + \infty} e_n$ 是否可测.
- 2. 叙述几乎处处收敛和依测度收敛的定义, 并分析两者的关系.
- (1) f 是否在 [0,1] 上 Riemann 可积? 简单说明理由.
- (2) f 是否在 [0,1] 上 Lebesgue 可积? 简单说明理由.

四、证明题

- 1. 设 f 为可测集 E 上的可积函数,记 $E_k=E\left[|f|<\frac{1}{k^2}\right]$,证明 $\lim_{k\to +\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0$.
- 2. 设 $f_k(x)$ 为可测集 E 上的可测函数列, 若 $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0$, 证明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0.

五、解答题

- 1. 设 e_k 是一列集合, 若 $m^*(e_k) < \frac{1}{2^k}$, 计算 $\limsup_{k \to +\infty} e_k$ 的外测度.
- 2. 计算 $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx.$