2022 春-实变函数

一、填空题

1. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\frac{1}{n}\right), A_{2n}=(0,2n)$, 则 $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n=$_____, $\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n=$_____.

Sol 1. $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n=\bigcap_{N=1}^{+\infty}(0,+\infty)=(0,+\infty)$.
$\liminf\limits_{n\to+\infty} A_n=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\phi=\phi$.

2. 设 C 为 Cantor 集, 则 $m(C)=$_____, 闭包 $\overline{C}=$_____.

Sol 2. 由于 C 是闭的零测集, 因此 $m(C)=0$, 闭包 $\overline{C}=C$.

3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 若_____, 则称 E 是闭集. 此外闭集的等价条件还有:_____.

Sol 3. E 是闭集的定义: E 的补集 E^c 是开集.

闭集的等价条件: E 是闭集当且仅当 E 包含它的所有极限点.

事实上我们还有许多等价条件, 例如 $E=\overline{E}$, $\partial E\subset E$ 等.

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E\left[f_n\to 0\right]=$_____.

Sol 4. 根据定义, $E\left[f_n\to 0\right]$ 表示 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}, n\geqslant N,|f_n(x)|<\varepsilon$.

于是有集合的表示形式:$\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{k}\right]$.

二、选择题

1. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $A,B\subset\mathbb{R}^n$, 则下列集合关系成立的是:

A. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$ B. $(A\backslash B)\cup B=A$

C. $(B\backslash A)\cup A\subset A$ D. $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Sol 5. ***A*** 正确, $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

B 错误, 当且仅当 $B\subset A$ 时成立.

C 错误, $(B\backslash A)\cup A=A\cup B$.

D 错误, $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$, 但不一定相等.

因此正确答案是 ***A***.

2. 设 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<x<1,y\in\mathbb{Q}\}$, 则下列命题成立的的是:

A. $m(E)=1$ B. $m(E)=0$

C. E 是 $\mathbb{R}^2$ 中闭集 D. E 是 $\mathbb{R}^2$ 中开集

Sol 6. ***A*** 错误, E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集.

B 正确, E 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集.

C 错误, E 不是闭集, 因为它不包含所有的极限点.

D 错误, E 不是开集, 因为它不包含任何开球.

因此正确答案是 ***B***.

3. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的实函数, 则下列命题不成立的是:

A. $f(x)$ 在 E 上可测当且仅当 $|f(x)|$ 在 E 上可测

B. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意子集上可测

C. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意测度为零的子集上可积

D. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限

Sol 7. ***A*** 错误, 可测函数可测时其绝对值也是可测的, 但反之未必, 例如 $\chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

B 正确, 可测函数在任意可测子集上一定可测. 这里我们认为提及子集时即可测.

C 正确, 可测函数在测度为零的子集上是可积的.

D 正确, 可测函数在其定义域上几乎处处有限.

因此正确答案是 ***A***.

4. 设 f_k, f 均为可测集 E 上的可测函数, 当 $k \to \infty$ 时下列命题成立的是:

A. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 E.

B. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

C. 若 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 f, 则 f_k 在 E 上依测度收敛到 f.

D. 若 f_k 在 E 上依测度收敛到 f, 则 $\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

Sol 8. ***A*** 错误, 几乎处处收敛不一定近乎一致收敛.

B 错误, 几乎处处收敛的函数序列在可测集上积分极限等于函数极限的积分, 因为在零测集上不收敛时积分值为 *0*.

C 正确, 近乎一致收敛可以推出依测度收敛.

D 错误, 依测度收敛未必一定有积分和极限可换序.

因此正确答案是 ***C***.

5. 下列命题成立的是:

A. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 测度为 0, 则 E 为至多可数集.

B. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 存在包含 E 的开集 G, $m(G\setminus E) = 0$

C. 若 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 则 ∂G 是零测集.

D. 零测集是可测集.

Sol 9. ***A*** 错误, 零测集可以是不可数的, 例如 *Cantor* 集.

B 错误, E 可测时才有对应结果.

C 错误, ∂G 可能不是零测集, 例如 $\mathbb{R}^n$ 中的开球的边界.

D 正确, 零测集是可测集.

因此正确答案是 ***D***.

三、解答题

1. 定义函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 1+x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$, 回答下列问题:

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 R 可积? 简单说明理由.

(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 L 可积? 简单说明理由.

Sol 10. *(1)* $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 *Riemann* 可积的. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上每一点都不连续, 不满足 *Riemann* 可积的条件.

(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 *Lebesgue* 可积的. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有限, 其不连续点构成零测集.

积分计算如下:

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{Q}} x^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(1+x)\mathrm{d}x = \int_0^1(1+x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$

2. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k = E\left[|f| < \frac{1}{k}\right]$, 计算 $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$.

Sol 11. 考虑 $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{E\left[|f|<\frac{1}{k}\right]}|f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E[|f|=0]}|f(x)|\mathrm{d}x = 0.$

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 证明 $\forall a > 0, m(E\,[f \geqslant a]) \leqslant \mathrm{e}^{-a}\int_E \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

Sol 12. 考虑证明 $\forall a > 0, \int_E \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \mathrm{e}^a \cdot m(E\,[f \geqslant a])$.

由于 $f(x)$ 是可测函数, 则 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 也是可测函数. 于是 $\int_E \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \int_{E[f\geqslant a]}\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \int_{E[f\geqslant a]}\mathrm{e}^a\mathrm{d}x \geqslant m(E[f \geqslant a]) \cdot \mathrm{e}^a$.

2. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, $\{A_k\}$ 是 E 的一列可测子集且 $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$, 证明 $\lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Sol 13. 由于 $f(x)$ 是可积函数, 则 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$. 由 $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = 0$, 可知对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $k > N$ 时 $m(A_k) < \varepsilon / \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$.

因此有 $\left|\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{A_k}|f(x)|\mathrm{d}x \leqslant m(A_k)\cdot\sup_{x\in E}|f(x)| < \varepsilon$, 从而 $\lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, 且对任意可测集 $A \subset E$, 均有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明 $f(x) = 0$ a.e. on E.

Sol 14. 假设 $f(x) \neq 0$ 在 E 上有正测度的集合 A, 不妨设 $f(x) > 0$, 则 $\int_A f(x)\mathrm{d}x$, 与条件矛盾.

因此 $f(x) = 0$ 在 E 上几乎处处成立.

五、辨析题

设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 0.

(1) 判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.

(2) 若 $\int_E \max f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M$, 验证 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ 时判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.

Sol 15. *(1)* $\{f_n\}$ 在 E 上不总是依测度收敛到 0, 例如 $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$ 在 $E = [0, +\infty)$ 上几乎处处收敛到 0, 但不依测度收敛到 0.

(2) 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$, 由于 $\int_E \max f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M$, 于是有 $\exists M > 0, \int_E f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. 由有界收敛定理, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

(3) $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛到 0, 下面证明这一结果:

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n > N$ 时 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

由非负性, $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{E\left[f_n \geqslant \frac{1}{k}\right]} f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{k} \cdot m\left(E\left[f_n \geqslant \frac{1}{k}\right]\right)$.

于是当 $n \to \infty$ 时有 $m\left(E\left[f_n \geqslant \frac{1}{k}\right]\right) \leqslant 0$. 从而 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛到 0.