2023 春-实变函数

一、选择题

1. 设 $E=[a,b]\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 为有理数集, 则 E 的讨论为真的是:

A. $m(E)=+\infty$.　　B. $m(E)=0$.

C. $m(E)=b-a$.　　D. E 是不可测集.

Sol 1. ***A*** 错误, $\mathbb{Q}$ 测度为 *0*, 由乘积测度的性质知 $m(E)=0$.

B 正确, $\mathbb{Q}$ 测度为 *0*, 由乘积测度的性质知 $m(E)=0$.

C 错误, $\mathbb{Q}$ 测度为 *0*, 由乘积测度的性质知 $m(E)=0$.

D 错误, E 的测度为 *0*, 一定可测.

因此正确答案是 ***B***.

2. 设 f 为可测集 E 上的可测函数, 则关于 f 的命题成立的是:

A. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 f^+ 和 f^- 在 E 上 Lebesgue 可积.

B. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

C. f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上 Riemann 可积.

D. f 可测当且仅当 $|f|$ 可测.

Sol 2. ***A*** 正确, f 可积的充要条件为其正部和负部函数均可积.

B 错误, 可举反例 $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$.

C 错误, 可举反例 $f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}-\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. 由为 *Riemann* 可积一定有 *Lebesgue* 可积, 现有 *Lebesgue* 不可积的反例, 因此 *Riemann* 可积也不成立.

D 错误, 可举反例 $f(x)=\chi_V-\chi_{\mathbb{R}\setminus V}$, 其中 V 为 $\mathbb{R}$ 上的不可测集.

因此正确答案是 ***A***.

3. 设 $A_n=\left[-\frac{1}{n}\,,1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n}\right)$, 则下列关于 A_n 的运算正确的是:

A. $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1)$　　B. $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1]$

C. $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1)$　　D. $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1]$

Sol 3. ***A*** 错误, $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$ 存在当且仅当 $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n$.

而这里 $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty}A_n=[0,1]$, $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty}A_n=[0\,,1)$.

B 错误, $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{N=1}^{+\infty}\bigcap_{n=N}^{+\infty}A_n=[0\,,1)$.

C 错误, $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1]$.

D 正确, $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1]$.

因此正确答案是 ***D***.

4. 设 C 为 Cantor 集, 则下列关于 C 的命题不成立的是:

A. $m(C) = 0$.　　　　B. $\overline{C} = C$.

C. C 中有至多可数个点.　　　　D. C 是疏朗集.

Sol 4. ***A*** 正确, *Cantor* 集是一个闭的零测集.

B 正确, *Cantor* 集是闭集, 因此 $\overline{C} = C$.

C 错误, *Cantor* 集是不可数的.

D 正确, *Cantor* 集是疏朗集.

因此正确答案是 ***C***.

5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则下列关于 E 的命题成立的是:

A. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E \backslash K) < \varepsilon$.

B. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E \backslash F) < \varepsilon$.

C. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E) < m(K) + \varepsilon$.

D. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E) < m(F) + \varepsilon$.

Sol 5. ***A*** 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

B 正确, *Lebesgue* 可测集可以用闭集近似, 且有对应的测度结果.

C 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

D 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

因此正确答案是 ***B***.

二、判断题

1. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是零测集, 则 E 的闭包也是零测集.

Sol 6. 错误, 例如 $\mathbb{Q}$ 是零测集, 但其闭包 $\mathbb{R}$ 不是零测集.

2. 若 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, 则 $f_n g_n \Rightarrow fg$.

Sol 7. 正确, 在已经有 f_n 和 g_n 几乎处处有限的前提下, $f_n g_n$ 一定依测度收敛到 fg.

3. 设 E_k 为一列可测集, 若 $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$, 则 $m(E) = \lim\limits_{k\to+\infty} m(E_k)$.

Sol 8. 错误, 一般情况下不成立, 例如 $E_k=[0,k]$, 则 $m(E_k)=k$, $\lim\limits_{k\to+\infty} m(E_k)=+\infty$, 但 $E=\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k=[0,1]$, $m(E)=1$.

4. 设 A 为集合, 则总存在集合 B, A 的势严格大于 B 的势.

Sol 9. 正确, 取 $B=2^A$, 则 A 的势严格大于 B 的势, 因为根据康托尔定理, 集合的势总是小于其幂集的势.

5. 设 $f_n(x)$ 为可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E\left[f_n\nrightarrow 0\right]=\bigcup_{k\geqslant 1}\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant N} E\left[|f_n(x)|\geqslant \frac{1}{k}\right]$.

Sol 10. 正确, $E\left[f_n\nrightarrow 0\right]$ 表示存在 $\varepsilon>0$, 使得对于任意的 N, 存在 $n\geqslant N$, 使得 $|f_n(x)|\geqslant\varepsilon$.

6. 有限个闭集的并是闭集, 可数多个闭集的并不一定是闭集.

Sol 11. 正确, 有限个闭集的并是闭集, 但可数多个闭集的并不一定是闭集, 例如 $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,\frac{1}{n}]$ 是开集.

三、简答题

1. 设 e_n 是一列可测集, 分析 $\limsup\limits_{n\ to+\infty} e_n$ 是否可测.

Sol 12. $\limsup\limits_{n\to+\infty} e_n=\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{n=N}^{+\infty} e_n$.
由于可测集的可数并和交仍然是可测集, 因此 $\limsup\limits_{n\to+\infty} e_n$ 是可测集.

2. 叙述几乎处处收敛和依测度收敛的定义, 并分析两者的关系.

Sol 13. 几乎处处收敛: $\exists A\subset E, m(A)=0$, $f_n(x)\to f(x)$ 在 $E\backslash A$ 上成立.
依测度收敛: 对于任意 $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} m(E\left[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\right])=0$.
两者的关系: 在全空间测度有限的情况下, 几乎处处收敛一定有依测度收敛, 而依测度收敛一定有子列几乎处处收敛.

3. 设 C 为 Cantor 集, 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x\in C\\ \mathrm{e}^x+1, & x\notin C\end{cases}$.
(1) f 是否在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积? 简单说明理由.
(2) f 是否在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积? 简单说明理由.

Sol 14. *(1)* f 在 $[0,1]$ 上不是 *Riemann* 可积的. 因为 *Cantor* 集是不可数的, 且 $f(x)$ 在 *Cantor* 集上不连续, 不满足 *Riemann* 可积的条件.
(2) f 在 $[0,1]$ 上是 *Lebesgue* 可积的. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有限, 其不连续点构成零测集.
积分计算如下:
$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_C \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_{[0,1]\backslash C}(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\mathrm{e}$.

四、证明题

1. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k = E\left[|f| < \frac{1}{k^2}\right]$, 证明 $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x = 0$.

Sol 15. 考虑 $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to+\infty} \int_{E\left[|f|<\frac{1}{k^2}\right]} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E[|f|=0]} |f(x)|\mathrm{d}x = 0$.

2. 设 $f_k(x)$ 为可测集 E 上的可测函数列, 若 $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, 证明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0.

Sol 16. 由于 $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_{E_k} |f(x)|\mathrm{d}x = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $k > N$ 时 $m(E_k) < \frac{\varepsilon}{\int_E |f(x)|\mathrm{d}x}$. 由依测度收敛的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $k > N$ 时 $m(E\left[|f_k(x)| \geqslant \varepsilon\right]) \to 0$. 因此 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 *0*.

五、解答题

1. 设 e_k 是一列集合, 若 $m^*(e_k) < \frac{1}{2^k}$, 计算 $\limsup\limits_{k\to+\infty} e_k$ 的外测度.

Sol 17. 由 $\sum_{k=1}^{+\infty} m(e_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$, 因此 $m(\limsup\limits_{k\to+\infty} e_k) = 0$.

2. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx\sin kx}{2+k^2x^3}\mathrm{d}x$.

Sol 18. 考虑 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx\sin kx}{2+k^2x^3}\mathrm{d}x$.
由于 $\frac{kx\sin kx}{2+k^2x^3}$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有限, 且 $\int_0^1 \frac{kx}{2+k^2x^3}\mathrm{d}x$ 是有界的, 因此根据有界收敛定理, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx\sin kx}{2+k^2x^3}\mathrm{d}x = 0$.