2022 春-实变函数

一、填空题

1. 设 $A_{2n-1}=\left(0,\frac{1}{n}\right),A_{2n}=(0,2n)$, 则 $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=$_____, $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=$_____.

2. 设 C 为 Cantor 集, 则 $m(C)=$_____, 闭包 $\overline{C}=$_____.

3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 若_____, 则称 E 是闭集. 此外闭集的等价条件还有:_____.

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E\left[f_n\to 0\right]=$_____.

二、选择题

1. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $A,B\subset\mathbb{R}^n$, 则下列集合关系成立的是:

   A. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$　　B. $(A\backslash B)\cup B=A$

   C. $(B\backslash A)\cup A\subset A$　　D. $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

2. 设 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<x<1,y\in\mathbb{Q}\}$, 则下列命题成立的的是:

   A. $m(E)=1$　　B. $m(E)=0$

   C. E 是 $\mathbb{R}^2$ 中闭集　　D. E 是 $\mathbb{R}^2$ 中开集

3. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的实函数, 则下列命题不成立的是:

   A. $f(x)$ 在 E 上可测当且仅当 $|f(x)|$ 在 E 上可测

   B. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意子集上可测

   C. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意测度为零的子集上可积

   D. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限

4. 设 f_k,f 均为可测集 E 上的可测函数, 当 $k\to\infty$ 时下列命题成立的是:

   A. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 E.

   B. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

   C. 若 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 f, 则 f_k 在 E 上依测度收敛到 f.

   D. 若 f_k 在 E 上依测度收敛到 f, 则 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

5. 下列命题成立的是:

   A. 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 测度为 0, 则 E 为至多可数集.

   B. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 存在包含 E 的开集 G, $m(G\backslash E)=0$

   C. 若 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, 则 ∂G 是零测集.

D. 零测集是可测集.

三、解答题

1. 定义函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 1+x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$, 回答下列问题:

(1) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 R 可积? 简单说明理由.

(2) $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否 L 可积? 简单说明理由.

2. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k=E\left[|f|<\frac{1}{k}\right]$, 计算 $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x$.

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 证明 $\forall a>0, m(E\,[f\geqslant a])\leqslant \mathrm{e}^{-a}\int_E \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, $\{A_k\}$ 是 E 的一列可测子集且 $\lim_{k\to\infty}m(A_k)=0$, 证明 $\lim_{k\to\infty}\int_{A_k}f(x)\mathrm{d}x=0$.

3. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, 且对任意可测集 $A\subset E$, 均有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明 $f(x)=0$ a.e. on E.

五、辨析题

设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 0.

(1) 判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.

(2) 若 $\int_E \max f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant M$, 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=0$ 时判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.