

2022 春-实变函数

一、填空题

1. 设 $A_{2n-1} = (0, \frac{1}{n})$, $A_{2n} = (0, 2n)$, 则 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \underline{\hspace{2cm}}$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 C 为 Cantor 集, 则 $m(C) = \underline{\hspace{2cm}}$, 闭包 $\overline{C} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\underline{\hspace{2cm}}$, 则称 E 是闭集. 此外闭集的等价条件还有: $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E[f_n \rightarrow 0] = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 则下列集合关系成立的是:

A. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	B. $(A \setminus B) \cup B = A$
C. $(B \setminus A) \cup A \subset A$	D. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2. 设 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, y \in \mathbb{Q}\}$, 则下列命题成立的是:

A. $m(E) = 1$	B. $m(E) = 0$
C. E 是 \mathbb{R}^2 中闭集	D. E 是 \mathbb{R}^2 中开集
3. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的实函数, 则下列命题不成立的是:

A. $f(x)$ 在 E 上可测当且仅当 $ f(x) $ 在 E 上可测	B. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意子集上可测
C. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 的任意测度为零的子集上可积	D. 若 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限
4. 设 f_k, f 均为可测集 E 上的可测函数, 当 $k \rightarrow \infty$ 时下列命题成立的是:

A. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f , 则 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 E .	B. 若 f_k 在 E 上几乎处处收敛到 f , 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$.
C. 若 f_k 在 E 上近乎一致收敛到 f , 则 f_k 在 E 上依测度收敛到 f .	D. 若 f_k 在 E 上依测度收敛到 f , 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$.
5. 下列命题成立的是:

A. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 测度为 0, 则 E 为至多可数集.	B. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 存在包含 E 的开集 G , $m(G \setminus E) = 0$
C. 若 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 则 ∂G 是零测集.	

D. 零测集是可测集.

三、解答题

1. 定义函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 1+x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, 回答下列问题:

(1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是否 R 可积? 简单说明理由.

(2) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是否 L 可积? 简单说明理由.

2. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k = E \left[|f| < \frac{1}{k} \right]$, 计算 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx$.

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数, 证明 $\forall a > 0, m(E[f \geq a]) \leq e^{-a} \int_E e^{f(x)} dx$.

2. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, $\{A_k\}$ 是 E 的一列可测子集且 $\lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0$, 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f(x) dx = 0$.

3. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数, 且对任意可测集 $A \subset E$, 均有 $\int_A f(x) dx = 0$. 证明 $f(x) = 0$ a.e. on E .

五、辨析题

设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的非负可测函数列, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛到 0.

(1) 判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.

(2) 若 $\int_E \max f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) dx \leq M$, 验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$.

(3) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = 0$ 时判断 $\{f_n\}$ 在 E 上是否依测度收敛到 0, 并简要说明理由.