Real Analysis

Lecture Notes

作者：Stone Sun
时间：2025 年 6 月 21 日
联系方式：hefengzhishui@outlook.com

谨以此篇, 献给热爱分析的你.

目录

前言

这是一份关于实分析 (又名实变函数) 的讲义, 主要涵盖了 $\mathbb{R}^n$ 上的集合论与测度论, 同时讨论了 Lebesgue 可测、Lebesgue 积分的基本概念和定理. 这份讲义是基于中国海洋大学的实变函数课程的讲义和笔记而写成的, 也参考了其他一些教材和讲义.

值得注意的是, 这门课程在不同开课学院的所占学分和所需学时是不同的. 所以这份讲义可能更适合每周 3 学时的同学学习参考.

这份讲义的描述角度是一位数学专业的学生, 因此我可能会采用一些更易于理解, 但不严格符合课程结构的叙述方式和顺序. 这些特性决定了这份讲义不会有太广泛的适用性.

笔者曾经试图撰写过常微分方程、微积分、线性代数等课程的讲义, 但由于时间和精力的限制, 这些讲义都没有完成. 这份讲义是笔者在 2025 年春季学期和暑期复习这门课程时完成的, 从某种程度上来讲这既是对此前未完成的讲义的一种补偿, 也是对自己本科二年级学习生活的一份总结. 我希望在这份讲义里更多地去体现我对 Lebesgue 测度的理解和我对分析学的认知. 尽管这些认知可能都是浅显的, 但我仍希望这些想法能够落到具体实际, 以作纪念和方便回顾.

除了上述这些想法之外, 我还希望基于此回忆一些学习时的一些有趣的理解, 作为一名可能对分析方向不太感兴趣的学生, 我的这份讲义可能不会带来任何有益的帮助, 反倒可能对基础分析概念的理解产生许多误解, 因此我更希望读者将这份讲义看作漫谈, 而非一份严谨的参考讲义, 同时我也很期待任何同学能够帮助我修正其中的任何错误.

Stone Sun
2025 年 6 月 21 日

第一章 基础集合论

1.1 集合的运算

定义 1.1

设 A, B 是集合, 则有如下集合间运算和关系的定义:

- $A \bigcup B = \{x | x \in A或x \in B\}$, 称为 A 和 B 的并集.
- $A \bigcap B = \{x | x \in A且x \in B\}$, 称为 A 和 B 的交集.
- $A \backslash B = \{x | x \in A且x \notin B\}$, 称为 A 和 B 的差集.
- $A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集, 即 $\forall x \in A, x \in B$.
- $A = B$ 表示 A 和 B 相等, 即 $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
- 若 $A \subset S, B = S \backslash A$, 则称 A 是 B 的补集, 记作 A^c.

♣

针对抽象的集合, 我们有如下定义:

定义 1.2

设 Λ 是一集合, 则称 $\{A_\lambda\}$ 是一集族, 其中 $\lambda \in \Lambda$.

特别的, 若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则称 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是一集列.

♣

集合的运算满足下面的定律:

定理 1.1

设 A, B, C 是集合, 则下列命题成立:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- $A \bigcap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (A \bigcap B_\lambda)$.
- $A \bigcup (\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (A \bigcup B_\lambda)$.
- $(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$.
- $(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$.

♡

证明 证明略.

基于上面给出的集合间运算的性质, 我们作下面的特殊定义, 这些定义将会在未来某些测度论的定理中用到.

定义 1.3

设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则称集合 $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的上限集, 记作 $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$.

设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则称集合 $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的下限集, 记作 $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n$.

♣

针对上限集和下限集, 我们有如下等价定义:

定理 1.2

设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则有如下等价定义:

- $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \forall N, \exists n_0 \geqslant N, x \in A_{n_0}$.
- $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$.

证明 上面的等价定义是利用命题的存在性和任意性得到的, 这种证明方法会在后续经常用到. 通俗来讲, 即: 并集表示存在性, 交集表示任意性.

现在我们给出下面一些性质, 很好的描述了上限集和下限集在给定的集列上的关系:

定理 1.3

给定 $\{A_n\}$ 是一集列, 则下列命题成立:

- $(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n)^c$.
- $(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup\limits_{n\to\infty}(A_n)^c$.
- $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n) \subset \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

证明 前两个命题是利用上面给出的等价定义得到的. 这两个命题实际上解释了上限集和下限集的关系.

对于第三个命题, 首先考虑 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n) \subset$: 若 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 则 $\exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$, 这说明 x 在无穷多个 A_n 中出现, 因此 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n)$.

再考虑 $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$: 若 $x \in \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$, 则 $\forall n, x \in A_n$, 因此 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

类似地我们也有 $\liminf\limits_{n\to\infty}(A_n) \subset \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$: 若 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty}(A_n)$, 则 $\exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$, 因此 $x \in \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

定义 1.4

集列 $\{A_n\}$ 是收敛的, 当且仅当 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 此时记 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的极限.

推论 1.1

若递增集列 $\{A_n\}$ 是收敛的, 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

若递减集列 $\{A_n\}$ 是收敛的, 则 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$.

证明 递增集列有 $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$, 因此 $\bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

递减集列有 $\forall n, A_n \supset A_{n+1}$, 因此 $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

1.2 集合的对等

1.3 集合的基数

1.4 距离空间

1.5 开集、闭集及其构造

第二章 Lebesgue 测度

2.1 外测度

在一般的微积分中, 我们会选择区间和对应的长度来衡量集合的大小, 因为我们发现这是定义和运算微积分的前提. 而对于在第一章中定义的各种不同集合, 我们也需要类似的一种方法来定义集合的大小, 这就自然考虑到下面提及的外测度和测度.

定义 2.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则称 E 的外测度为

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\},$$

其中 I_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开区间, $|I_i|$ 是 I_i 的体积.

♣

例题 2.1 考虑两个最特殊的集合 $\mathbb{R}$ 和 ϕ, 我们有 $m^*(\mathbb{R}) = \infty$ 和 $m^*(\phi) = 0$.

命题 2.1

外测度具有如下性质:

- $m^*(E) \geqslant 0$.
- $m^*(E) = a < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\{I_k\}, E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k| < a + \varepsilon$

♠

证明 考虑到外测度是由若干开区间的并构成的, 且开区间的体积总是非负的, 因此外测度一定非负.

根据下确界的定义, 如果 $m^*(E) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i| : E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i\right\}$.

则 $\forall \varepsilon > 0$, 都存在一组开区间 $\{I_k\}$, 使得 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k| < m^*(E) + \varepsilon$.

推论 2.1

$\mathbb{R}^n$ 中可列点集的外测度为 0.

♡

证明 首先考虑 $\mathbb{R}^1$ 上的情形, 设 $E = \{r_1, r_2, \cdots\}$, 并且首先考虑 r_1, 此时应当有 $\forall \delta > 0, I_\delta = (p-\delta, p+\delta) \supset E$.

于是 $m^*(\{r_1\}) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i| : E \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i\right\} \leqslant |I_\delta| = 2\delta$.

令 $\delta \to 0$, 则 $m^*(\{r_1\}) = 0$.

对于 r_2, 同理有 $m^*(\{r_2\}) = 0$.

于是对于 $\{r_1, r_2, \cdots\}$, 由于 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是可列点集, 因此可以找到一组开区间 $\{I_k\}$, 使得 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k| < \varepsilon$.

而对于 $\mathbb{R}^n$ 上的情形, 可将其看作 $\mathbb{R}^1$ 上的可列点集的乘积, 因此同样有 $m^*(E) = 0$.

命题 2.2

若 $E \subset F$, 则 $m^*(E) \leqslant m^*(F)$.

♠

证明 由外测度的定义, $\exists\{I_k\}, F\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(F)+\varepsilon$.

因为 $E\subset F$, 所以 $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 因此 $m^*(E)\leqslant m^*(F)$.

推论 2.2

$m^*((a,b))=b-a,\ m^*([a,b])=b-a.$

证明 显然 (a,b) 和 $[a,b]$ 都可以被开区间 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 所覆盖, 且其体积为 $b-a+2\varepsilon$, 因此当 $\varepsilon\to0$ 时, 有 $m^*((a,b))=b-a$ 和 $m^*([a,b])=b-a$.

注 上述结论推广至 $\mathbb{R}^n$ 上也是成立的, 综合上面两个推论的证明即可.

对于区间某一端点为开的情形, 结论也是成立的, 这里只需要考虑开区间的另一端即可.

定理 2.1

设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $x+E=\{x+y:y\in E\}$, 则 $m^*(E)=m^*(x+E)$.

证明 这是很显然的, 因为对于每个满足 $m^*(E)=\inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|:E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i\right\}$ 的开区间 I_i, 都可以通过平移得到满足 $m^*(x+E)=\inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|J_i|:x+E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}J_i\right\}$ 的开区间.

而对于每个 I_i 和 J_i, 都有 $|I_i|=|J_i|$, 因此有 $m^*(E)=m^*(x+E)$.

上面讨论了外测度的各种基本性质, 在一般微积分中我们可以自然做集合的各种运算, 其长度都是良好定义的, 因此接下来我们将讨论外测度的可加性.

定理 2.2

设 $E_1,\cdots,E_n\subset\mathbb{R}^n$, 则有 $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

证明 若 $\exists E_{n_0}, m^*(E_{n_0})=\infty$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)=\infty$, 此时显然成立.

若 $\forall n, m^*(E_n)<\infty$, 则 $\forall E_k$ 都有 $\forall\varepsilon>0,\exists\{I_{k_j}\},E_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{k_j},m^*(E_k)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}|I_{k_j}|<m^*(E_k)+\dfrac{\varepsilon}{2^k}$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon\geqslant m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)$. 即成立.

定理 2.3

设 $E_1,\cdots,E_n\subset\mathbb{R}^n$, 若 $\forall i,j,\rho(E_i,E_j)>0$, 则有 $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

证明 若 $\forall i,j,\rho(E_i,E_j)>0$, 则总可以把每个 E_i 都拆成若干不相交的小区间, 即 $E_i=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{i_k}$, $E_j=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{j_k}$ 且 $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{i_k}\right)\cap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{j_k}\right)=\phi$.

于是对于每个 E_i, 都可以找到恰好满足 $m^*(E_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m^*(E_{i_k})$ 的开区间, 使得 $E_i\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_{i_k}$.

因此有 $m^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m^*(E_i)$.

注 一般情形的集合的外测度不满足可列可加性.

2.2 可测集及其测度

上一节我们提到外测度的可加性是必须满足一定条件才能成立的, 因此对于更特殊的集合, 始终满足可加性的集合就说明其存在一种良好的性质. 因此这里我们就从可加性的角度来考虑集合可测性.

定理 2.4

设 E 和 F 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的开区间, 若 $E\cap F=\phi$, 则 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$.

证明 首先由次可加性有 $m^*(E\cup F)\leqslant m^*(E)+m^*(F)$. 因此下面证明另一个方向的不等式.

考虑 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E\cap I_i)$, 其中 I_i 是开区间, 于是有 $m^*(E)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|E\cap I_i|$.

对于 F, 也有 $m^*(F)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|F\cap J_i|$.

由于 $E\cap F=\phi$, $I_i=(I_i\cap E)\cup(I_i\cap F)\cup(I_i\backslash(E\cup F))$. 因此 $|I_i|\geqslant|I_i\cap E|+|I_i\cap F|$.

由外测度定义可知, $\forall\varepsilon>0,\exists\{I_i\},m^*(E\cup F)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|\leqslant m^*(E\cup F)+\varepsilon$.

于是 $m^*(E\cup F)+\varepsilon\geqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i\cap E|+|I_i\cap F|\geqslant m^*(E)+m^*(F)$.

因此有 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$.

注 上面的定理还可以改写成:

设 E 和 F 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的开区间, 若 $E\cap F=\phi$, $E\cup F=I$ 则 $m^*(E\cup F)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)$.

推论 2.3

设 E 和 F 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的任意集合, $\exists I$ 是开区间, 使得 $E\subset I$, $F\subset I^c$, 则 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$.

证明 类似地, 作 $m^*(E)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I\cap I_k|$ 和 $m^*(F)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I^c\cap I_k|$.

则由 $E\cap F=\phi$, $I_k=(I_k\cap I)\cup(I_k\cap I^c)$, 此时有 $|I_k|=|I_k\cap I|+|I_k\cap I^c|$.

我们发现, 上面的定理和推论都满足可加性, 这说明这些集合具有良好的性质. 而对于一般的集合, 满足这种可加性被称为 Carathéodory 条件, 其定义如下:

定义 2.2

设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则称 E 满足 Carathéodory 条件, 当且仅当 $\forall T\subset\mathbb{R}^n,m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$.

注 上面的定义说明, 满足 Carathéodory 条件的集合, 在任意集合上都满足可加性. 这为下面定义可测集提供了一种方式.

定义 2.3

设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则 E 是可测集当且仅当 E 满足 Carathéodory 条件. 若 E 是可测的, 则定义其测度为 $m(E)=m^*(E)$.

记 $\mathcal{M}$ 为所有可测集的集合, $\mathcal{M}$ 表示可测集族.

注 由次可加性知, 从定义角度说明一个集合可测只需证 $\forall T\subset\mathbb{R}^n,m^*(T)\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$.

2.3 可测集族

2.4 不可测集

2.5 乘积测度

第三章 可测函数

3.1 可测函数的定义和性质

在研究可测函数的性质之前, 我们首先考虑广义实函数的定义:

定义 3.1

$f: A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ 称为定义在 A 上的广义实函数. ♣

类似地, 我们也有广义实函数的有界性的定义:

定义 3.2

设 $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在 A 上的广义实函数, 则称 f 是有界的, 当且仅当 $\exists M > 0, \forall x \in A, |f(x)| < M$. ♣

注 值得注意的是, 有界性和函数有限并不完全一致, 例如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $A = (0, 1)$ 上是有界的, 但不是有限的. 另一方面, $f(x) = \chi_{(0,1)}$ 在 $A = (0, 1)$ 上是有限的, 但不是有界的.

事实上, 我们可以给出函数有限的分析定义:

定义 3.3

设 $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ 是定义在 A 上的广义实函数, 则称 f 是有限的, 当且仅当 $\forall x \in A, f(x) \in \mathbb{R}$. ♣

而对于广义实函数的连续性, 我们也类似地给出定义:

定义 3.4

设 f 在 E 上有限, 则称 f 在 $x_0 \in E$ 处是连续的, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0, \forall x \in E, \rho(x, x_0) < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若 f 在 E 上每一点都是连续的, 则称 f 在 E 上是连续的.

设 f 在 E 上有限, 则称 f 在 E 上是一致连续的, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in E, \rho(x, x_0) < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x_0 \in E$. ♣

注 在抽象集合中讨论连续性时, 我们必须要指定讨论的集合范围, 因为在不同的集合上, 同一个函数可能会有不同的连续性. 因此为了方便讨论, 我们下面定义特征函数和简单函数.

定理 3.1

若 E,F 为闭集, $f \in C(E)$, $f \in C(F)$, 则 $f \in C(E \cup F)$. ♡

证明 若 $x_0 \in E \cup F$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得 $\forall x \in E, \rho(x, x_0) < \delta_1$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

同理, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$, 使得 $\forall x \in F, \rho(x, x_0) < \delta_2$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

于是取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x \in E \cup F, \rho(x, x_0) < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

若 $x_0 \in E \backslash F$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 使得 $\forall x \in E, \rho(x, x_0) < \delta_1$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

同时有 $\exists \delta_3 > 0$, 使得 $O(x_0, \delta_3) \subset F^c$.

于是取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$, 则 $\forall x \in E \cup F, \rho(x, x_0) < \delta$ 时有 $x \in E \backslash F$ 且 $\rho(x, x_0) < \delta_1, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

对于 $x_0 \in F \backslash E$, 类似可证.

定义 3.5

设 E 是集合, 则称 E 的特征函数为 $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$.

设 E_i 是一集列, 则称 E_i 的简单函数为 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$, 其中 $c_i \in \mathbb{R}$, 且 E_i 互不交.

特别地, 若 E_i 均为区间, 则称 f 是阶梯函数. ♣

根据上面的讨论, 我们有一类特殊的例子来表示广义实函数的连续性:

例题 3.1 $f = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是连续的, 但在 $\mathbb{R}$ 上是处处不连续的.

基于此我们给出可测函数的定义:

定义 3.6

设 E 是集合, f 是定义在 E 上的广义实函数, 则称 f 在 E 上是可测的, 当且仅当 $\forall a \in \mathbb{R}, E[f > a]$ 是可测集. ♣

定理 3.2

下面函数均为可测函数:

- 可测集的特征函数.
- 简单函数.
- 可测集上的连续函数.
- 可测集上的单调函数.
- 零测集上的函数.

♡

证明 对于可测集的特征函数, 由定义可知, $\forall a \in \mathbb{R}, E[\chi_E > a] = E$ 或 E^c, 因此是可测的.

对于简单函数, 设 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$, 则 $\forall a \in \mathbb{R}, E[f > a] = \bigcup_{c_i > a} E_i$, 因此是可测的.

对于可测集上的连续函数, 由连续函数的性质知, $\forall a \in \mathbb{R}, E[f > a]$ 是开集或闭集, 因此是可测的.

对于可测集上的单调函数, 类似地, $\forall a \in \mathbb{R}, E[f > a]$ 是开集或闭集, 因此是可测的.

对于零测集上的函数, 由于零测集上的函数在几乎处处上是常数函数, 因此也是可测的.

3.2 可测函数的收敛性

在讨论函数性质时，我们自然想到普通微积分中实函数的收敛，因此我们现在对函数的收敛作如下定义:

定义 3.7

设 f_n, f 是定义在 E 上的函数，

- 称 f_n 逐点收敛到 f，当且仅当 $\forall x \in E, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- 称 f_n 一致收敛到 f，当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- 称 f_n 几乎处处收敛到 f，当且仅当 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \forall x \in E \backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- 称 f_n 近乎一致收敛到 f，当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists E_0 \subset E, m(E_0) < \delta, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in E \backslash E_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

例题 3.2 若 $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$，则 $f_n(x)$ 近乎一致收敛到 f.

这是由于 $\forall \delta > 0$，取 $E_0 = \left[1 - \dfrac{\delta}{2}, 1\right]$，则 $m(E_0) = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, $\forall x \in E \backslash E_0$, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon$.

此时只需要取 $N = \left|\dfrac{\varepsilon}{\log\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)}\right|$，使得 $\forall n \geqslant N$, $|x^n| < \varepsilon$.

注 这里 N 是和 δ 有关的，但不能和 x 有关，否则就不再是一致收敛了.

定理 3.3

下列命题等价:

- $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \forall x \in E \backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} m(E[f_n \nrightarrow f]) = 0$.
- $\forall x \in E[f_n \nrightarrow f], f_n(x) \nrightarrow f(x)$

引理 3.1

$$E[f_n \nrightarrow f] = \bigcup_{\varepsilon} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right].$$

证明 考虑 $E[f_n \nrightarrow f]$ 的定义:

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$.

这说明 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant N, x \in E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon_0\right]$.

于是有 $x \in \bigcup\limits_{\varepsilon} \bigcap\limits_{N=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon_0\right]$.

更进一步考虑 ε 的任意性，我们有 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{N=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]$.

注 上面的这种方法在后续的 Lebesgue 积分中也会用到，这种方法实际上是利用了 ε 的任意性来构造一个新的集合，使得这个集合的测度为 0. 但同时考虑到 ε 是任意的，因此我们选择 $\dfrac{1}{k}$ 代替依旧是成立的.

引理 3.2

(Borel-Cantelli) 设 $\{A_n\}$ 是一集列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty \Rightarrow m(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.

证明 首先考虑 e_k 和 E 均可测，则有下面的等价关系:

$E \backslash \left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right) = \liminf\limits_{k\to\infty} (E \backslash e_k)$.

事实上我们有 $\left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right)^c = \left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} e_k\right)\right)^c = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} e_k\right)^c = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=N}^{\infty} e_k^c$.

下面再考虑 $m(E_k) < \frac{1}{2^k}, \forall k$, 则有 $m\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leqslant \frac{1}{2^{N-1}}$. 记 $F_N = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k$, 则 $m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N\right) \leqslant m\left(F_N\right) \to 0$.

下面我们讨论近乎一致收敛, 几乎处处收敛的关系:

定理 3.4

若 f_n, f 在 E 上可测, f_n 近乎一致收敛到 f, 则 f_n 几乎处处收敛到 f.

证明 f_n 近乎一致收敛到 f, 则有 $\forall k>0, \exists e_k, m(e_k) < \frac{1}{k}, f_n \rightrightarrows f on E \backslash e_k$, 其中 e_k 可测.

往证 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]\right) = 0$. 令 $E_0 = \limsup\limits_{k\to\infty} e_k$, 则 $E\left[f_n \nrightarrow f\right] \subset E_0$.

由 Borel-Cantelli 引理, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]\right) < \infty$.

因此 $m\left(\limsup\limits_{n\to\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]\right) = 0$.

定理 3.5

(Egoroff) 设 $m(E) < \infty$, 若 f_n 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 f_n 近乎一致收敛到 f.

证明 由 $f_n \to f$ a.e.$on E$ 知, $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]\right) = 0$.

记 $F_k = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]$, 则 $m(F_k) = 0, \forall k > 0$. 由 $m(E) < \infty$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} m(F_k) = m(\lim\limits_{k\to\infty} F_k) = 0$.

即 $\forall k>0, \forall\delta>0, \exists k_\delta>0, \forall k>k_\delta, m(F_{k_\delta}) < \frac{\delta}{2^{k_\delta}}$, 于是 $m\left(\bigcup\limits_{k\geqslant k_\delta} F_k\right) < \sum\limits_{N=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{k_\delta}} = \delta$.

令 $e = \bigcup\limits_{n\geqslant k_\delta} F_k$, 则 $m(e) < \delta, \forall x \in E\backslash e, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, 这说明 f_n 近乎一致收敛到 f.

根据上面的讨论, 我们知道近乎一致收敛有下面的表述方法:

$$\forall\delta>0, \forall\varepsilon>0, \exists E_0 \subset E, m(E_0) < \delta, \exists N>0, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E\backslash E_0.$$

事实上, 我们知道这表示 $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ 的集合的测度应当很小, 而又考虑到 δ 是任意取的, N 只与 δ 有关, 于是我们可以作下面的定义:

$$\forall\delta>0, \forall\varepsilon>0, \exists N, n \geqslant N, m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) < \delta.$$

更进一步, 这可以写成 $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$.

这就有了下面依测度收敛的定义:

定义 3.8

设 f_n, f 是定义在 E 可测且几乎处处有限的函数, 则 f_n 依测度收敛到 f, 当且仅当 $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$. 记作 $f_n \Rightarrow f$.

对于这种收敛, 我们继续讨论和其他收敛的关系, 于是有下面的定理:

定理 3.6

(Lebesgue) 设 $m(E) < \infty$, 若 f_n 几乎处处收敛到 f, 则 f_n 依测度收敛到 f.

证明 由 f_n 几乎处处收敛到 f, 则 $\exists E_0 \subset E, m(E_0)=0, \forall x \in E\backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

于是有 $\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n \geqslant N, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \forall x \in E\backslash E_0$.

因此 $m\left(E\left[|f_n-f| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant m(E_0)=0$, 这说明 f_n 依测度收敛到 f.

定理 3.7
(Riesz) 设 $m(E)<\infty$, 若 f_n 依测度收敛到 f, 则 $\exists f_{n_k}$, f_{n_k} 几乎处处收敛到 f.

证明 对于依测度收敛的函数列 f_n, 总可以取 $k>0$ 使得 $e_k=E\left[|f_{n_k}-f| \geqslant \varepsilon\right]$ 满足 $m(e_k)<\dfrac{1}{2^k}$. 于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(e_k)=1<\infty$.

由 Borel-Cantelli 引理, 我们有 $m\left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right)=0$, 令 $E_0=\limsup\limits_{k\to\infty} e_k$, 则 $\forall x \in E\backslash E_0, \exists k_0, \forall k \geqslant k_0, |f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon$.

这说明 f_{n_k} 几乎处处收敛到 f.

注 几乎处处收敛和依测度收敛不是等价的条件, 例如下面两个例子:

令 $f_n(x)=\chi_{(0,n]}$, 则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)=\chi_{(0,+\infty)}$, 但 f_n 不依测度收敛到 f, 这是因为我们可以验证 $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n-f| \geqslant 1\right]\right)=+\infty$.

令 $f_n(x)$ 按下面的方法排列: $f_1(x)=\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2(x)=\chi_{(\frac{1}{2},1]}$, $f_3(x)=\chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_4(x)=\chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \cdots$, 则 $f_n(x)$ 依测度收敛到 $f(x)=\chi_{[0,1]}$, 但 f_n 处处不收敛到 f.

基于上面的结果, 我们下面讨论依测度收敛的性质:

例题 3.3 若 $f_n \Rightarrow f$, $f_n \Rightarrow g$, 则 $f=g$ 几乎处处成立.

例题 3.4 若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, $f_n \geqslant g_n$ 在 E 上几乎处处成立, 则 $f \geqslant g$ 在 E 上几乎处处成立.

例题 3.5 若 $f_n \Rightarrow f$, $a \in \mathbb{R}$, 则 $af_n \Rightarrow af$.

若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, 则 $f_n+g_n \Rightarrow f+g$.

推论 3.1
若 $f_n \Rightarrow 0$, $g_n \Rightarrow 0$, 则 $f_n g_n \Rightarrow 0$.

证明 往证: $\forall \varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right]\right)=0$.

记 $E_n=E\left[|g_n|>1\right]$, 则 $E_n^c=E\left[|g_n| \leqslant 1\right]$.

于是 $E\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right] \subset E_n\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right] \cup E_n^c\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right] \subset E_n \cup E\left[|f_n| \geqslant \varepsilon\right]$.

由 $f_n, g_n \Rightarrow 0$, $\exists N_1, N_2$ 使得 $n \geqslant N_1, m(E\left[|f_n| \geqslant \varepsilon\right])<\dfrac{\delta}{2}$, $n \geqslant N_2, m(E\left[|g_n| \geqslant 1\right])<\dfrac{\delta}{2}$.

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n \geqslant N$, $m(E\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right])<\dfrac{\delta}{2}+\dfrac{\delta}{2}=\delta$.

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n g_n| \geqslant \varepsilon\right]\right)=0$. 即 $f_n g_n \Rightarrow 0$.

推论 3.2
若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n=g$ 有界可测, 则 $f_n g \Rightarrow fg$.

证明 往证: $\forall \varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n g-fg| \geqslant \varepsilon\right]\right)=0$.

由 $f_n \Rightarrow f, \exists N, \forall n \geqslant N, m(E\left[|f_n-f| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{M}\right])<\delta$.

注意到 $E\left[|f_n g-fg| \geqslant \varepsilon\right] \subset E\left[|f_n-f| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{M}\right]$, 其中 $M=\sup|g_n|=\sup|g|$.

于是 $m\left(E\left[|f_n g-fg| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant m\left(E\left[|f_n-f| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{M}\right]\right)<\delta$. 即 $f_n g \Rightarrow fg$.

注 上面的若干例子说明了依测度收敛的函数列在数乘和加法下是封闭的, 但同时注意到第二个推论中的有界性是必要的, 例如下面这个例子:

令 $f_n(x)=\chi_{(0,n]}\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$, 则 $f_n \Rightarrow 0$, 但 $f_n \cdot g=\chi_{(0,n]}$, $f \cdot g=1$. 此时并没有 $\chi_{(0,n]} \Rightarrow \chi_{(0,\infty)}$.

3.3 可测函数的连续性

上面讨论的许多收敛都是在可测函数的基础上进行的, 现在我们讨论可测函数的连续性, 这一点是必须的, 这是因为后续我们在建立可积函数, 可测函数与联系函数的关系时会更进一步讨论连续的特点.

引理 3.3

若 E 是一可测集, 则 $C(E) \subset \mathcal{M}(E)$.

证明 由 E 是可测集, 因此 $E[f>a] = E \cap f^{-1}(a,\infty), \forall a \in \mathbb{R}$.

由连续映射的定义知, $f^{-1}(a,\infty)$ 是开集. 于是 $E \cap f^{-1}(a,\infty)$ 可测.

即 $E[f>a], \forall a \in \mathbb{R}$ 是可测的. 于是 f 是可测函数.

上面这个定理说明了连续函数在可测集上是可测的, 下面我们为了得到更强结果的连续性条件, 我们首先考虑下面的一系列问题.

引理 3.4

设 A, B 均为闭集, $A \cap B = \Phi$, 则 $\exists g \in C(\mathbb{R}^n)$, $g|_A = 1$, $g|_B = 0$. 且 g 满足 $|g(x)| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

证明 可以自然想到距离定义, 于是有 $g = \dfrac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}$.

其中 $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A}|x-y|$, $d(x,B) = \inf\limits_{y\in B}|x-y|$. 同样可以验证 $g(x)$ 是满足上面的条件的.

于是我们得到下面的定理, 具体说明了连续函数和可测函数的关系:

定理 3.8

(Lusin I) 设 E 是一可测集, $f \in \mathcal{M}(E)$, 则 $\forall \delta > 0, \exists F \subset E, m(E \backslash F) < \delta$, 其中 F 是闭集, 且 f 在 F 上连续.

证明 由 $f \in \mathcal{M}(E)$ 有, $\exists \psi_k \to f$, 其中 ψ_k 是简单函数.

若 f 有界可测, 则 ψ_k 有界, $\exists F_k, m(E\backslash F_k) < \dfrac{\delta}{2^{k+1}}$, 其中 F_k 是闭集. 此时 ψ_k 在 F_k 上连续.

令 $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 $m(E\backslash F) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E\backslash F_k) < \delta$. 于是 f 在 F 上连续.

若 f 无界, 构造 $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$, 则 g 是有界的, 且 $g \in \mathcal{M}(E)$.

于是 $\exists F \subset E, m(E\backslash F) < \delta$, 其中 F 是闭集, 且 g 在 F 上连续.

由 $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$, $g(x)+g(x)|f(x)| = f(x)$, 即 $g(x)+|g(x)|f(x) = f(x)$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{1-|g(x)|}$, f 在 F 上连续.

事实上我们还有 $LusinII$, 可以表示如下:

定理 3.9

(Lusin II) 设 E 是一可测集, $f \in \mathcal{M}(E)$, 则 $\forall \delta > 0, \exists g \in C(\mathbb{R}^n), \exists F \subset E, m(E\backslash F) < \delta$, 其中 F 是闭集, 且 $g(x) = f(x), \forall x \in F$.

证明 由 Lusin I, 我们有 $\exists F \subset E, m(E\backslash F) < \delta$, 其中 F 是闭集, 且 f 在 F 上连续.

令 $g = f|_F$, 则 $g \in C(F)$.

为了证明 $g \in C(\mathbb{R}^n)$, 我们构造 $g_k(x) = \begin{cases} g(x), & x \in F, \\ \dfrac{1}{k}, & x \in E\backslash F. \end{cases}$

则 $g_k \in C(\mathbb{R}^n)$, 且 $\forall x \in F, g_k(x) = g(x)$, $\forall x \in E\backslash F, g_k(x) = \dfrac{1}{k}$.

于是 $\forall x \in E, g_k(x) \to g(x)$, 这说明 $g_k \to g$ 在 E 上收敛.

由于 g_k 是连续的, 因此 $g \in C(\mathbb{R}^n)$.

第四章 Lebesgue 积分

4.1 非负可测函数的积分

在讨论一般的积分之前, 我们先定义下方图形, 这个概念实际上是 Lebesgue 积分的几何意义.

定义 4.1

设 f 是定义在 E 上的非负可测函数, 则称 f 的下方图形称为 $G(E,f)=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x\in E, 0\leqslant z<f(x)\}$.

注 这里我们要求 $0\leqslant z<f(x)$, 实际上 $0\leqslant z\leqslant f(x)$ 所表达的几何意义是一样的, 但按照后者定义证明函数 Lebesgue 可测时需要更深层次的分析技术.

下面我们依次定义特征函数和简单函数的 Lebesgue 积分, 后面我们将用这些函数来定义一般的非负可测函数的 Lebesgue 积分.

定义 4.2

设 $f(x)=\chi_A(x)$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 1\cdot m(A\cap E)$ 称为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分.

设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{N} c_k\cdot\chi_{A_k}(x)$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{N} c_k\cdot m(A_k\cap E)$ 称为 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分.

注 显然可以得到特征函数和简单函数的 Lebesgue 积分的几何意义就是对应的下方图形的测度.

引理 4.1

设 f 和 g 是定义在 E 上的非负简单函数, 则:

- $\int_E f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.
- 若 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int_E (af(x)+bg(x))\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x + b\int_E g(x)\mathrm{d}x$, 其中 $a,b\in\mathrm{R}^+$.

下面我们定义一般的非负可测函数的 Lebesgue 积分.

定义 4.3

设 $f:E\to[c,d]$ 是非负可测函数, 则 f 在 E 上有 Riemann 积分 $\lim\limits_{|\lambda|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, 类似地, 我们有 Lebesgue 积分 $\lim\limits_{|\lambda|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{N}\eta_k\cdot m(E_k)$.

不难注意到, 这里的 η_k 是 f 在 E_k 上的平均值, 而 $m(E_k)$ 是 E_k 的测度, 因此 $\eta_k\cdot m(E_k)$ 实际上是下方图形的面积. 但从严格证明的角度, 这种方式并不方便处理抽象测度的集合, 因此我们考虑下面这种定义方式:

定义 4.4

设 $f : E \to [c, d]$ 是非负可测函数, 则 f 在 E 上有 Lebesgue 积分 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E \phi_k(x)\mathrm{d}x$, 其中 $\phi_k(x)$ 为单增简单函数, 且 $\phi_k(x) \to f(x), \forall x \in E$. ♣

这种定义方式看似简单, 但实际上需要证明 $\phi_k(x)$ 的存在性, 并且若出现 $\phi_k(x)$ 和 $\psi_k(x)$ 时, 需要进一步说明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E \phi_k(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty}\int_E \psi_k(x)\mathrm{d}x$.

定义 4.5

设 $f : E \to [c, d]$ 是非负可测函数, 则 f 在 E 上有 Lebesgue 积分 $\sup\left\{\int_E \phi(x)\mathrm{d}x : 0 \leqslant \phi(x) \leqslant f(x)\right\}$, 其中 $g(x)$ 是一列非负简单函数. ♣

后面的各种 Lebesgue 积分的问题中我们都只采用第三种方式定义, 但可以证明三种定义方式时等价的.

引理 4.2

设 f 和 g 是定义在 E 上的非负可测函数, 则:

- $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- 若 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int_E (af(x) + bg(x))\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x + b\int_E g(x)\mathrm{d}x$, 其中 $a, b \in \mathrm{R}^+$. ♡

定理 4.1

设 f 是定义在 E 上的非负可测函数, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = m(G(E, f))$. ♡

证明 由 f 是非负可测函数, 则 $\exists\phi_k(x)$ 是单增简单函数, 且 $\phi_k(x) \to f(x), \forall x \in E$.

于是 $m(G(E, \phi_k)) \leqslant m(G(E, f))$. 于是 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant m(G(E, f))$. 下证 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant m(G(E, f))$:

$\forall(x, z) \in G(E, f), x \in E, 0 \leqslant z < f(x)$, 则 $\exists\phi_{k0}(x)$ 满足 $0 \leqslant z < \phi_k(x) < f(x), \forall x \in E$.

即 $(x, z) \in G(E, \phi_{k_0}) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G(E, \phi_k) \subset G(E, f)$.

由 (x, z) 的任意性, 有 $m(G(E, f)) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(G(E, \phi_k))$.

于是 $m(G(E, f)) = \lim\limits_{k\to\infty} m(G(E, \phi_k))$. 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant m(G(E, f))$.

下面围绕非负可测函数的 Lebesgue 积分, 我们讨论一些性质.

推论 4.1

设 $f \in \mathcal{M}(E), f \geqslant 0$, 若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) = 0$, a.e. on E. ♡

证明 假设 $m(E[f \neq 0]) > 0$, 则 $m(E[f > 0]) > 0$, 于是 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E[f > \frac{1}{n}])$.

于是 $\exists n_0 > 0, \delta > 0, m(E[f > \frac{1}{n_0}]) \geqslant \delta > 0$.

此时就会有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n_0}\cdot m(E[f > \frac{1}{n_0}]) \geqslant \frac{\delta}{n_0} > 0$.

推论 4.2

设 $f \in \mathcal{M}(E)$, $m(E) \geqslant 0$, $f > 0$ a.e. on E, 则 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明 由 $f > 0$ a.e. on E, 则 $m(E[f>0]) > 0$. 于是 $\forall \varepsilon > 0, m(E[f > \varepsilon]) > 0$.

于是 $\displaystyle\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant \varepsilon \cdot m(E[f>\varepsilon]) > 0$.

定理 4.2

(Levi) 设 $f_n \in \mathcal{M}(E)$, $f_n(x) \geqslant 0$ a.e. on E, 且 $f_n(x)$ 单增收敛至 $f(x)$, 则 $f \in \mathcal{M}(E)$, 且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明 考虑证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} G(E, f_n) = G(E, f)$:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} G(E, f_n) \subset G(E, f)$: $\forall (x,z) \in G(E, f_n), x \in E, 0 \leqslant z < f_n(x)$, 则 $\exists N > 0, \forall n \geqslant N, f_n(x) \leqslant f(x)$, 于是 $(x,z) \in G(E,f)$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} G(E, f_n) \supset G(E, f)$: $\exists f_{n_0}(x)$ 满足 $0 \leqslant z < f_{n_0}(x) < f(x)$, $\forall x \in E$, 则 $(x,z) \in G(E, f_{n_0}) \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} G(E, f_n) = \lim_{n\to\infty} G(E, f_n) \subset G(E, f)$.

因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} G(E, f_n) = G(E, f)$.

推论 4.3

(Lebesgue 逐项积分) 设 $f_n \in \mathcal{M}(E)$, $f_n(x) \geqslant 0$ a.e. on E, $\forall n$, 则 $\displaystyle\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right)$.

证明 记 $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, 则 $P_n(x)$ 是单增的, 且 $P_n(x) \to \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ a.e. on E.

由 Levi 定理, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E P_n(x)\mathrm{d}x = \int_E\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$.

由于 $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, 则 $\displaystyle\int_E P_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right)$.

于是 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right) = \int_E\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)\mathrm{d}x$.

定理 4.3

(Fatou) 设 $f_n \in \mathcal{M}(E)$, $f_n(x) \geqslant 0$ a.e. on E, 则 $\displaystyle\int_E \liminf_{n\to\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明 $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty}\inf_{n\geqslant N} f_n(x)$, 记 $g_N(x) = \displaystyle\inf_{n\geqslant N} f_n(x)$, 于是 $\displaystyle\inf_{n\geqslant N}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E g_N(x)$.

两边取极限有 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\inf_{n\geqslant N}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E\left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

4.2 一般可测函数的积分

对于一般可测函数, 我们考虑将其分成正部函数和负部函数, 于是有下面的定义:

定义 4.6

设 f 是定义在 E 上的可测函数, 则称 $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ 为 f 的正部函数, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ 为 f 的负部函数.

于是 f 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$.

引理 4.3

考虑 f 在 E 上的积分存在和可积的充要条件, 我们有:

- f 在 E 上积分存在, 即 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至多一个为 ∞.
- f 在 E 上可积, 即 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 均有限.

证明 f 在 E 上积分存在, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 可以运算, 显然需要 f^+ 和 f^- 至少有一个是有限的.

f 在 E 上可积, 即 $|\int_E f(x)\mathrm{d}x| < +\infty$, 则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 均有限.

下面给出一些一般可测函数的性质:

命题 4.1

- 若 $f = g$ a.e. on E, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$.
- 若 $f \in L(E_1)$, $f \in L(E_2)$, 则 $f \in L(E_1 \cup E_2)$.
- 若 $f \in L(E)$, 则 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$.
- 若 $f \in L(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限.

证明

- 由 $f = g$ a.e. on E, 则 $m(E[f \neq g]) = 0$, 于是 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$, 其中 $\int_{E[f\neq g]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E[f\neq g]} g(x)\mathrm{d}x = 0$.
- 由 $f \in L(E_1)$, $f \in L(E_2)$, 则 $\int_{E_1\cup E_2} f^+(x)\mathrm{d}x < \int_{E_1} f^+(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty$, $\int_{E_1\cup E_2} f^-(x)\mathrm{d}x < \int_{E_1} f^-(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f^-(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 于是 $\int_{E_1\cup E_2} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
- 由 $f \in L(E)$, 则 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$, 于是 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_E f^+(x)|\mathrm{d}x\right| + \left|\int_E f^-(x)|\mathrm{d}x\right| = \int_E |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- f a.e. 有限等价于 f^+ 和 f^- a.e. 有限. 由 $f \in L(E)$, $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{E[f^+=\infty]} f^+(x)\mathrm{d}x \geqslant N \cdot m(E[f^+ = \infty]), \forall N \in \mathbb{N}$. 于是 $m(E[f^+ = \infty]) < \frac{a}{N}, \forall N \in \mathbb{N}$. 即 $m(E[f^+ = \infty]) = 0$. $f^-(x)$ 同理可证. 于是 f 在 E 上几乎处处有限.

注 若 $f \in L(E_i), i = 1, 2, \cdots$, 未必有 $f \in L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$, 也未必有 f 在 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 上积分存在.

例如 $f(x) = 1$, $E_i = [i, i+1]$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = [1, \infty)$, 此时 f 在 $[1, \infty)$ 上不可积.

另可取 $f(x)=(-1)^i$, $E_i=[i,i+1]$, 此时 f 在 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 上积分不存在.

下面考虑一种方法, 用来控制 f_n 在 E 上的积分值, 为了说明这个特点, 我们首先需要引入绝对连续性, 并结合上面提及过的依测度收敛给出下面一个定理.

定义 4.7

设 $f\in L(E)$, 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall e\subset E,m(e)<\delta$, 有 $\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_e|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$, 则称 f 在 E 上绝对连续.

定理 4.4

设 $f\in L(E)$, 则 f 在 E 上绝对连续.

证明 由 $f\in L(E)$, 则 $\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty$, 下面考虑取 φ_k 单增简单函数逼近 f, 于是 $\int_E|f|\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x$.

即 $\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\forall k>K,\left|\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_E\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

考虑 f 可积, 于是 $|f|=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\chi_{E_k}(x)$, 记 $M=\sup\{c_k:k=1,2,\cdots\}\geqslant|f|$, 则有 $\int_e f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_e M\mathrm{d}x\leqslant M\cdot m(e)=M\cdot\delta,\forall e\subset E$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2M}$, 则 $\int_e|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\varepsilon$.

于是 $\exists\delta>0,\forall e\subset E,m(e)<\delta$, 有 $\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\int_e|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$.

这说明 f 在 E 上绝对连续.

定理 4.5

(Lebesgue 控制收敛) 设 f_n 几乎处处有限且可测, $F(x)\geqslant|f_n(x)|$, $f_n\Rightarrow f$ 在 E 上, 则 $f\in L(E)$, 且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明 由在 E 上 $f_n\Rightarrow f,\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}m(E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon])=0$. 又有

4.3 可积函数的连续性

4.4 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

4.5 重积分与累次积分的关系