# 2023 春-实变函数

## 一、选择题

- 1. 设  $E = [a, b] \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , 其中  $\mathbb{Q}$  为有理数集, 则 E 的讨论为真的是:
  - A.  $m(E) = +\infty$ .

B. m(E) = 0.

C. m(E) = b - a.

- D. E 是不可测集.
- **Sol 1. A** 错误,  $\mathbb{Q}$  测度为 0, 由乘积测度的性质知 m(E) = 0.
- **B** 正确,  $\mathbb{Q}$  测度为 0, 由乘积测度的性质知 m(E) = 0.
- C 错误,  $\mathbb{Q}$  测度为 0, 由乘积测度的性质知 m(E) = 0.
- D 错误, E 的测度为 0, 一定可测.

因此正确答案是 B.

- 2. 设 f 为可测集 E 上的可测函数, 则关于 f 的命题成立的是:
  - A. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当  $f^+$  和  $f^-$  在 E 上 Lebesgue 可积.
  - B. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 |f| 在 E 上 Lebesgue 可积.
  - C. f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当 |f| 在 E 上 Riemann 可积.
  - D. f 可测当且仅当 |f| 可测.
- $Sol\ 2.\ A$  正确, f 可积的充要条件为其正部和负部函数均可积.
- B 错误, 可举反例  $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ .
- C 错误, 可举反例  $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ . 由为 Riemann 可积一定有 Lebesgue 可积, 现有 Lebesgue 不可积的 反例, 因此 Riemann 可积也不成立.
- D 错误, 可举反例  $f(x) = \chi_V \chi_{\mathbb{R}\setminus V}$ , 其中 V 为  $\mathbb{R}$  上的不可测集.

因此正确答案是 A.

- 3. 设  $A_n = \left[ -\frac{1}{n}, 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n} \right]$ , 则下列关于  $A_n$  的运算正确的是:
  - A.  $\lim_{n \to +\infty} A_n = [0, 1)$

B.  $\liminf_{n \to +\infty} A_n = [0, 1]$ 

C.  $\limsup_{n\to +\infty} A_n = [0,1)$ 

- D.  $\limsup_{n \to +\infty} A_n = [0, 1]$
- Sol 3. A 错误,  $\lim_{n\to+\infty} A_n$  存在当且仅当  $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} A_n$ .
- 而这里  $\limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1]$ ,  $\liminf_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1]$ .
- B 错误,  $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n = [0, 1).$

C 错误,  $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1].$ 

D 正确,  $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0,1].$ 

因此正确答案是 D.

4. 设 C 为 Cantor 集, 则下列关于 C 的命题不成立的是:

A. m(C) = 0.

B.  $\overline{C} = C$ .

C. C 中有至多可数个点.

D. C 是疏朗集.

Sol 4. A 正确, Cantor 集是一个闭的零测集.

B 正确, Cantor 集是闭集, 因此  $\overline{C} = C$ .

C 错误, Cantor 集是不可数的.

D 正确, Cantor 集是疏朗集.

因此正确答案是 C.

- 5. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  是 Lebesgue 可测集, 则下列关于 E 的命题成立的是:
  - A.  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在紧集  $K \subset E$ ,  $m(E \setminus K) < \varepsilon$ .
  - B.  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在闭集  $F \subset E$ ,  $m(E \setminus F) < \varepsilon$ .
  - $C. \forall \varepsilon > 0$ , 存在紧集  $K \subset E$ ,  $m(E) < m(K) + \varepsilon$ .
  - D.  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在闭集  $F \subset E$ ,  $m(E) < m(F) + \varepsilon$ .
- Sol 5. A 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.
- B 正确, Lebesque 可测集可以用闭集近似, 且有对应的测度结果.
- C错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.
- D 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

因此正确答案是 B.

#### 二、判断题

- 1. 若  $E \subset \mathbb{R}^n$  是零测集, 则 E 的闭包也是零测集.
- Sol 6. 错误, 例如 ℚ 是零测集, 但其闭包 ℝ 不是零测集.
- 2. 若  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$  是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 若  $f_n \Rightarrow f$ ,  $g_n \Rightarrow g$ , 则  $f_n g_n \Rightarrow fg$ .
- Sol 7. 正确, 在已经有  $f_n$  和  $g_n$  几乎处处有限的前提下,  $f_n g_n$  一定依测度收敛到 fg.
- 3. 设  $E_k$  为一列可测集, 若  $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$ , 则  $m(E) = \lim_{k \to +\infty} m(E_k)$ .

Sol 8. 错误,一般情况下不成立,例如  $E_k = [0, k]$ ,则  $m(E_k) = k$ , $\lim_{k \to +\infty} m(E_k) = +\infty$ ,但  $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = [0, 1]$ ,m(E) = 1.

4. 设 A 为集合,则总存在集合 B, A 的势严格大于 B 的势.

Sol 9. 正确, 取  $B=2^A$ , 则 A 的势严格大于 B 的势, 因为根据康托尔定理, 集合的势总是小于其幂集的势.

- 5. 设  $f_n(x)$  为可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则  $E\left[f_n \nrightarrow 0\right] = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{N\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant N} E\left[|f_n(x)|\geqslant \frac{1}{k}\right].$
- **Sol 10.** 正确,  $E[f_n \to 0]$  表示存在  $\varepsilon > 0$ , 使得对于任意的 N, 存在  $n \ge N$ , 使得  $|f_n(x)| \ge \varepsilon$ .
- 6. 有限个闭集的并是闭集, 可数多个闭集的并不一定是闭集.

Sol 11. 正确, 有限个闭集的并是闭集, 但可数多个闭集的并不一定是闭集, 例如  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0,1/n]$  是开集.

#### 三、简答题

- 1. 设  $e_n$  是一列可测集, 分析  $\limsup_{n \text{ to} + \infty} e_n$  是否可测.
- Sol 12.  $\limsup_{n \to +\infty} e_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} e_n$ .

由于可测集的可数并和交仍然是可测集, 因此  $\limsup e_n$  是可测集.

2. 叙述几乎处处收敛和依测度收敛的定义, 并分析两者的关系.

Sol 13. 几乎处处收敛:  $\exists A \subset E, m(A) = 0, f_n(x) \to f(x)$  在  $E \setminus A$  上成立.

依测度收敛: 对于任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \to +\infty} m(E[|f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon]) = 0$ .

两者的关系:在全空间测度有限的情况下,几乎处处收敛一定有依测度收敛,而依测度收敛一定有子列几乎处处收敛.

- 3. 设 C 为 Cantor 集, 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x \in C \\ e^x + 1, & x \notin C \end{cases}$
- (1) f 是否在 [0,1] 上 Riemann 可积? 简单说明理由.
- (2) f 是否在 [0,1] 上 Lebesgue 可积? 简单说明理由.
- Sol 14. (1) f 在 [0,1] 上不是 Riemann 可积的. 因为 Cantor 集是不可数的, 且 f(x) 在 Cantor 集上不连续, 不满足 Riemann 可积的条件.
- (2) f 在 [0,1] 上是 Lebesgue 可积的. 因为 f(x) 在 [0,1] 上几乎处处有限, 其不连续点构成零测集. 积分计算如下:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_C \frac{\ln x}{x} dx + \int_{[0,1] \setminus C} (e^x + 1) dx = \int_0^1 (e^x + 1) dx = e.$$

### 四、证明题

- 1. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记  $E_k=E\left[|f|<\frac{1}{k^2}\right]$ , 证明  $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0$ .
- Sol 15. 考虑  $\lim_{k\to +\infty} \int_{E_k} |f(x)| \mathrm{d}x = \lim_{k\to +\infty} \int_{E\left[|f|<\frac{1}{k^2}\right]} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_{E\left[|f|=0\right]} |f(x)| \mathrm{d}x = 0.$
- 2. 设  $f_k(x)$  为可测集 E 上的可测函数列,若  $\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0$ ,证明  $f_k(x)$  在 E 上依测度收敛到 0.
- Sol 16. 由于  $\lim_{k\to +\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=0$ ,则对于任意  $\varepsilon>0$ ,存在 N 使得当 k>N 时  $m(E_k)<\frac{\varepsilon}{\int_E|f(x)|\mathrm{d}x}$ . 由依测度收敛的定义,对于任意  $\varepsilon>0$ ,存在 N 使得当 k>N 时  $m(E[|f_k(x)|\geqslant \varepsilon])\to 0$ . 因此  $f_k(x)$  在 E 上依测度收敛到 0.

## 五、解答题

- 1. 设  $e_k$  是一列集合, 若  $m^*(e_k) < \frac{1}{2^k}$ , 计算  $\limsup_{k \to +\infty} e_k$  的外测度.
- Sol 17. 由  $\sum_{k=1}^{+\infty} m(e_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$ ,因此  $m(\limsup_{k \to +\infty} e_k) = 0$ .
- 2. 计算  $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx$ .
- Sol 18. 考虑  $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx$ .

由于  $\frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3}$  在 [0,1] 上几乎处处有限,且  $\int_0^1 \frac{kx}{2+k^2x^3} dx$  是有界的,因此根据有界收敛定理, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx = 0$ .