

B 错误, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n = [0, 1)$.

C 错误, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0, 1]$.

D 正确, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n = [0, 1]$.

因此正确答案是 **D**.

4. 设 C 为 Cantor 集, 则下列关于 C 的命题不成立的是:

A. $m(C) = 0$.

B. $\overline{C} = C$.

C. C 中有至多可数个点.

D. C 是疏朗集.

Sol 4. **A** 正确, Cantor 集是一个闭的零测集.

B 正确, Cantor 集是闭集, 因此 $\overline{C} = C$.

C 错误, Cantor 集是不可数的.

D 正确, Cantor 集是疏朗集.

因此正确答案是 **C**.

5. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则下列关于 E 的命题成立的是:

A. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E \setminus K) < \varepsilon$.

B. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

C. $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset E$, $m(E) < m(K) + \varepsilon$.

D. $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E) < m(F) + \varepsilon$.

Sol 5. **A** 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

B 正确, Lebesgue 可测集可以用闭集近似, 且有对应的测度结果.

C 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

D 错误, 在空间测度无限的情形下未必成立.

因此正确答案是 **B**.

二、判断题

1. 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是零测集, 则 E 的闭包也是零测集.

Sol 6. 错误, 例如 \mathbb{Q} 是零测集, 但其闭包 \mathbb{R} 不是零测集.

2. 若 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 若 $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$, 则 $f_n g_n \Rightarrow fg$.

Sol 7. 正确, 在已经有 f_n 和 g_n 几乎处处有限的前提下, $f_n g_n$ 一定依测度收敛到 fg .

3. 设 E_k 为一列可测集, 若 $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$, 则 $m(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k)$.

Sol 8. 错误, 一般情况下不成立, 例如 $E_k = [0, k]$, 则 $m(E_k) = k$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(E_k) = +\infty$, 但 $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k = [0, 1]$, $m(E) = 1$.

4. 设 A 为集合, 则总存在集合 B , A 的势严格大于 B 的势.

Sol 9. 正确, 取 $B = 2^A$, 则 A 的势严格大于 B 的势, 因为根据康托尔定理, 集合的势总是小于其幂集的势.

5. 设 $f_n(x)$ 为可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E[f_n \rightarrow 0] = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} E[|f_n(x)| \geq \frac{1}{k}]$.

Sol 10. 正确, $E[f_n \rightarrow 0]$ 表示存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意的 N , 存在 $n \geq N$, 使得 $|f_n(x)| \geq \varepsilon$.

6. 有限个闭集的并是闭集, 可数多个闭集的并不一定是闭集.

Sol 11. 正确, 有限个闭集的并是闭集, 但可数多个闭集的并不一定是闭集, 例如 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, 1/n]$ 是开集.

三、简答题

1. 设 e_n 是一列可测集, 分析 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} e_n$ 是否可测.

Sol 12. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} e_n = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} e_n$.

由于可测集的可数并和交仍然是可测集, 因此 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} e_n$ 是可测集.

2. 叙述几乎处处收敛和依测度收敛的定义, 并分析两者的关系.

Sol 13. 几乎处处收敛: $\exists A \subset E, m(A) = 0, f_n(x) \rightarrow f(x)$ 在 $E \setminus A$ 上成立.

依测度收敛: 对于任意 $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} m(E[|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon]) = 0$.

两者的关系: 在全空间测度有限的情况下, 几乎处处收敛一定有依测度收敛, 而依测度收敛一定有子列几乎处处收敛.

3. 设 C 为 Cantor 集, 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & x \in C \\ e^x + 1, & x \notin C \end{cases}$.

(1) f 是否在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积? 简单说明理由.

(2) f 是否在 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 可积? 简单说明理由.

Sol 14. (1) f 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的. 因为 Cantor 集是不可数的, 且 $f(x)$ 在 Cantor 集上不连续, 不满足 Riemann 可积的条件.

(2) f 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的. 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处有限, 其不连续点构成零测集.

积分计算如下:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_C \frac{\ln x}{x} dx + \int_{[0,1] \setminus C} (e^x + 1) dx = \int_0^1 (e^x + 1) dx = e.$$

四、证明题

1. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k = E[|f| < \frac{1}{k^2}]$, 证明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0$.

Sol 15. 考虑 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E[|f| < \frac{1}{k^2}]} |f(x)| dx = \int_{E[|f|=0]} |f(x)| dx = 0$.

2. 设 $f_k(x)$ 为可测集 E 上的可测函数列, 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0$, 证明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0.

Sol 16. 由于 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} |f(x)| dx = 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $k > N$ 时 $m(E_k) < \frac{\varepsilon}{\int_E |f(x)| dx}$.

由依测度收敛的定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $k > N$ 时 $m(E[|f_k(x)| \geq \varepsilon]) \rightarrow 0$. 因此 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0.

五、解答题

1. 设 e_k 是一列集合, 若 $m^*(e_k) < \frac{1}{2^k}$, 计算 $\limsup_{k \rightarrow +\infty} e_k$ 的外测度.

Sol 17. 由 $\sum_{k=1}^{+\infty} m(e_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$, 因此 $m(\limsup_{k \rightarrow +\infty} e_k) = 0$.

2. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx$.

Sol 18. 考虑 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx$.

由于 $\frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3}$ 在 $[0, 1]$ 上几乎处处有限, 且 $\int_0^1 \frac{kx}{2+k^2x^3} dx$ 是有界的, 因此根据有界收敛定理, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{kx \sin kx}{2+k^2x^3} dx = 0$.