Real Analysis

Lecture Notes

作者：Stone Sun
时间：2025 年 5 月 29 日
联系方式：hefengzhishui@outlook.com

ElegantLaTeX Program

谨以此篇, 献给热爱分析的你.

目录

前言

这是一份关于实分析 (又名实变函数) 的讲义, 主要涵盖了 $\mathbb{R}^n$ 上的集合论与测度论, 同时讨论了 Lebesgue 可测、Lebesgue 积分的基本概念和定理. 这份讲义是基于中国海洋大学的实变函数课程的讲义和笔记而写成的, 也参考了其他一些教材和讲义.

值得注意的是, 这门课程在不同开课学院的所占学分和所需学时是不同的. 所以这份讲义可能更适合每周 3 学时的同学学习参考.

这份讲义的描述角度是一位数学专业的学生, 因此我可能会采用一些更易于理解, 但不严格符合课程结构的叙述方式和顺序. 这些特性决定了这份讲义不会有太广泛的适用性.

笔者曾经试图撰写过常微分方程、微积分、线性代数等课程的讲义, 但由于时间和精力的限制, 这些讲义都没有完成. 这份讲义是笔者在 2025 年春季学期和暑期复习这门课程时完成的, 从某种程度上来讲这既是对此前未完成的讲义的一种补偿, 也是对自己本科二年级学习生活的一份总结. 我希望在这份讲义里更多地去体现我对 Lebesgue 测度的理解和我对分析学的认知. 尽管这些认知可能都是浅显的, 但我仍希望这些想法能够落到具体实际, 以作纪念和方便回顾.

除了上述这些想法之外, 我还希望基于此回忆一些学习时的一些有趣的理解, 作为一名可能对分析方向不太感兴趣的学生, 我的这份讲义可能不会带来任何有益的帮助, 反倒可能对基础分析概念的理解产生许多误解, 因此我更希望读者将这份讲义看作漫谈, 而非一份严谨的参考讲义, 同时我也很期待任何同学能够帮助我修正其中的任何错误.

Stone Sun
2025 年 5 月 29 日

第一章 集合与映射

1.1 集合的运算

定义 1.1

设 A, B 是集合, 则有如下集合间运算和关系的定义:

- $A\bigcup B=\{x|x\in A或x\in B\}$, 称为 A 和 B 的并集.
- $A\bigcap B=\{x|x\in A且x\in B\}$, 称为 A 和 B 的交集.
- $A\backslash B=\{x|x\in A且x\notin B\}$, 称为 A 和 B 的差集.
- $A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集, 即 $\forall x\in A, x\in B$.
- $A=B$ 表示 A 和 B 相等, 即 $\forall x, x\in A\Leftrightarrow x\in B$.
- 若 $A\subset S, B=S\backslash A$, 则称 A 是 B 的补集, 记作 A^c.

♣

针对抽象的集合, 我们有如下定义:

定义 1.2

设 Λ 是一集合, 则称 $\{A_\lambda\}$ 是一集族, 其中 $\lambda\in\Lambda$.

特别的, 若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$, 则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是一集列.

♣

集合的运算满足下面的定律:

定理 1.1

设 A, B, C 是集合, 则下列命题成立:

- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
- $A\bigcap(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcap B_\lambda)$.
- $A\bigcup(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\bigcup B_\lambda)$.
- $(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$.
- $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$.

♡

证明 证明略.

基于上面给出的集合间运算的性质, 我们作下面的特殊定义, 这些定义将会在未来某些测度论的定理中用到.

定义 1.3

设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则称集合 $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的上限集, 记作 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则称集合 $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的下限集, 记作 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$.

♣

针对上限集和下限集, 我们有如下等价定义:

定理 1.2
设 $\{A_n\}$ 是一集列，则有如下等价定义：
- $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \forall N, \exists n_0 \geqslant N, x \in A_{n_0}$.
- $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow \exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$.

♡

证明 上面的等价定义是利用命题的存在性和任意性得到的，这种证明方法会在后续经常用到。通俗来讲，即：并集表示存在性，交集表示任意性。

现在我们给出下面一些性质，很好的描述了上限集和下限集在给定的集列上的关系：

定理 1.3
给定 $\{A_n\}$ 是一集列，则下列命题成立：
- $(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf\limits_{n\to\infty} (A_n)^c$.
- $(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup\limits_{n\to\infty} (A_n)^c$.
- $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} (A_n) \subset \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

♡

证明 前两个命题是利用上面给出的等价定义得到的。这两个命题实际上解释了上限集和下限集的关系。

对于第三个命题，首先考虑 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} (A_n) \subset$：若 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$，则 $\exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$，这说明 x 在无穷多个 A_n 中出现，因此 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} (A_n)$.

再考虑 $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$：若 $x \in \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$，则 $\forall n, x \in A_n$，因此 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

类似地我们也有 $\liminf\limits_{n\to\infty} (A_n) \subset \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$：若 $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} (A_n)$，则 $\exists N, \forall n \geqslant N, x \in A_n$，因此 $x \in \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

定义 1.4
集列 $\{A_n\}$ 是收敛的，当且仅当 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 此时记 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 为集列 $\{A_n\}$ 的极限.

♣

推论 1.1

若递增集列 $\{A_n\}$ 是收敛的，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n$.

若递减集列 $\{A_n\}$ 是收敛的，则 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n$.

♡

证明 递增集列有 $\forall n, A_n \subset A_{n+1}$，因此 $\bigcup\limits_{n}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

递减集列有 $\forall n, A_n \supset A_{n+1}$，因此 $\bigcap\limits_{n}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

第二章 Lebesgue 测度

第三章 可测函数

3.1 广义实函数

3.2 可测函数的定义和性质

3.3 可测函数的收敛性

我们现在对函数的收敛作如下定义:

定义 3.1

设 f_n, f 是定义在 E 上的函数,

- 称 f_n 逐点收敛到 f, 当且仅当 $\forall x \in E, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- 称 f_n 一致收敛到 f, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- 称 f_n 几乎处处收敛到 f, 当且仅当 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \forall x \in E \backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- 称 f_n 近乎一致收敛到 f, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists E_0 \subset E, m(E_0) < \delta, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in E \backslash E_0, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

例题 3.1 若 $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, 则 $f_n(x)$ 近乎一致收敛到 f.

这是由于 $\forall \delta > 0$, 取 $E_0 = \left[1 - \frac{\delta}{2}, 1\right]$, 则 $m(E_0) = \frac{\delta}{2} < \delta$, $\forall x \in E \backslash E_0$, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon$.

此时只需要取 $N = \left|\frac{\varepsilon}{\log\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)}\right|$, 使得 $\forall n \geqslant N$, $|x^n| < \varepsilon$.

注 这里 N 是和 δ 有关的, 但不能和 x 有关, 否则就不再是一致收敛了.

定理 3.1

下列命题等价:

- $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \forall x \in E \backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} m(E[f_n \nrightarrow f]) = 0$.
- $\forall x \in E[f_n \nrightarrow f], f_n(x) \nrightarrow f(x)$

引理 3.1

$$E[f_n \nrightarrow f] = \bigcup_{\varepsilon} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right].$$

证明 考虑 $E[f_n \nrightarrow f]$ 的定义:

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$.

这说明 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geqslant N, x \in E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon_0\right]$.

于是有 $x \in \bigcup\limits_{\varepsilon} \bigcap\limits_{N=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon_0\right]$.

更进一步考虑 ε 的任意性, 我们有 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{N=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{n=N}^{+\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]$.

注 上面的这种方法在后续的 Lebesgue 积分中也会用到, 这种方法实际上是利用了 ε 的任意性来构造一个新的集合, 使得这个集合的测度为 0. 但同时考虑到 ε 是任意的, 因此我们选择 $\frac{1}{k}$ 代替依旧是成立的.

引理 3.2

(Borel-Cantelli) 设 $\{A_n\}$ 是一集列, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty \Rightarrow m(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.

证明 首先考虑 e_k 和 E 均可测, 则有下面的等价关系:

$E\backslash\left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right) = \liminf\limits_{k\to\infty}(E\backslash e_k)$.

事实上我们有 $\left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right)^c = \left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} e_k\right)\right)^c = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} e_k\right)^c = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=N}^{\infty} e_k^c$.

下面再考虑 $m(E_k) < \dfrac{1}{2^k}, \forall k$, 则有 $m\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right) \leqslant \dfrac{1}{2^{N-1}}$. 记 $F_N = \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k$, 则 $m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N\right) \leqslant m(F_N) \to 0$.

下面我们讨论近乎一致收敛, 几乎处处收敛的关系:

定理 3.2

若 f_n, f 在 E 上可测, f_n 近乎一致收敛到 f, 则 f_n 几乎处处收敛到 f.

证明 f_n 近乎一致收敛到 f, 则有 $\forall k > 0, \exists e_k, m(e_k) < \dfrac{1}{k}, f_n \rightrightarrows f on E\backslash e_k$, 其中 e_k 可测.

往证 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]\right) = 0$.

令 $E_0 = \limsup\limits_{k\to\infty} e_k$, 则 $E[f_n \nrightarrow f] \subset E_0$.

由 Borel-Cantelli 引理, 我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]\right) < \infty$.

因此 $m\left(\limsup\limits_{n\to\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]\right) = 0$.

定理 3.3

(Egoroff) 设 $m(E) < \infty$, 若 f_n 在 E 上几乎处处收敛到 f, 则 f_n 近乎一致收敛到 f.

证明 由 $f_n \to f$ a.e.$on E$ 知, $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]\right) = 0$.

记 $F_k = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \dfrac{1}{k}\right]$, 则 $m(F_k) = 0, \forall k > 0$. 由 $m(E) < \infty$ 有 $\lim\limits_{k\to\infty} m(F_k) = m(\lim\limits_{k\to\infty} F_k) = 0$.

即 $\forall k > 0, \forall \delta > 0, \exists k_\delta > 0, \forall k > k_\delta, m(F_{k_\delta}) < \dfrac{\delta}{2^{k_\delta}}$, 于是 $m\left(\bigcup\limits_{k\geqslant k_\delta} F_k\right) < \sum\limits_{N=1}^{\infty}\dfrac{\delta}{2^{k_\delta}} = \delta$.

令 $e = \bigcup\limits_{n\geqslant k_\delta} F_k$, 则 $m(e) < \delta, \forall x \in E\backslash e, |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{k}$, 这说明 f_n 近乎一致收敛到 f.

根据上面的讨论, 我们知道近乎一致收敛有下面的表述方法:

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists E_0 \subset E, m(E_0) < \delta, \exists N > 0, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E\backslash E_0.$$

事实上, 我们知道这表示 $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ 的集合的测度应当很小, 而又考虑到 δ 是任意取的, N 只与 δ 有关, 于是我们可以作下面的定义:

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geqslant N, m(E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) < \delta.$$

更进一步, 这可以写成 $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

这就有了下面依测度收敛的定义:

定义 3.2

设 f_n, f 是定义在 E 可测且几乎处处有限的函数, 则 f_n 依测度收敛到 f, 当且仅当 $\forall\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0$. 记作 $f_n \Rightarrow f$. ♣

对于这种收敛, 我们继续讨论和其他收敛的关系, 于是有下面的定理:

定理 3.4

(Lebesgue) 设 $m(E) < \infty$, 若 f_n 几乎处处收敛到 f, 则 f_n 依测度收敛到 f. ♡

证明 由 f_n 几乎处处收敛到 f, 则 $\exists E_0 \subset E, m(E_0) = 0, \forall x \in E \backslash E_0, \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

于是有 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geqslant N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in E\backslash E_0$.

因此 $m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant m(E_0) = 0$, 这说明 f_n 依测度收敛到 f.

定理 3.5

(Riesz) 设 $m(E) < \infty$, 若 f_n 依测度收敛到 f, 则 $\exists f_{n_k}$, f_{n_k} 几乎处处收敛到 f. ♡

证明 对于依测度收敛的函数列 f_n, 总可以取 $k > 0$ 使得 $e_k = E\left[|f_{n_k} - f| \geqslant \varepsilon\right]$ 满足 $m(e_k) < \dfrac{1}{2^k}$. 于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(e_k) = 1 < \infty$.

由 Borel-Cantelli 引理, 我们有 $m\left(\limsup\limits_{k\to\infty} e_k\right) = 0$, 令 $E_0 = \limsup\limits_{k\to\infty} e_k$, 则 $\forall x \in E\backslash E_0, \exists k_0, \forall k \geqslant k_0, |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon$.

这说明 f_{n_k} 几乎处处收敛到 f.

注 几乎处处收敛和依测度收敛不是等价的条件, 例如下面两个例子:

令 $f_n(x) = \chi_{(0,n]}$, 则 $f_n(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x) = \chi_{(0,+\infty)}$, 但 f_n 不依测度收敛到 f, 这是因为我们可以验证 $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E\left[|f_n - f| \geqslant 1\right]\right) = +\infty$.

令 $f_n(x)$ 按下面的方法排列: $f_1(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2(x) = \chi_{(\frac{1}{2},1]}$, $f_3(x) = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_4(x) = \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \cdots$, 则 $f_n(x)$ 依测度收敛到 $f(x) = \chi_{[0,1]}$, 但 f_n 处处不收敛到 f.

基于上面的结果, 我们下面讨论依测度收敛的性质:

例题 3.2 若 $f_n \Rightarrow f$, $f_n \Rightarrow g$, 则 $f = g$ 几乎处处成立.