2023 春-实变函数

一、选择题

1. 设 $E=[a,b]\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 为有理数集, 则 E 的讨论为真的是:

   A. $m(E)=+\infty$.　　　　B. $m(E)=0$.

   C. $m(E)=b-a$.　　　　D. E 是不可测集.

2. 设 f 为可测集 E 上的可测函数, 则关于 f 的命题成立的是:

   A. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 f^+ 和 f^- 在 E 上 Lebesgue 可积.

   B. f 在 E 上 Lebesgue 可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上 Lebesgue 可积.

   C. f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上 Riemann 可积.

   D. f 可测当且仅当 $|f|$ 可测.

3. 设 $A_n=\left[-\frac{1}{n}\,,1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2n}\right)$, 则下列关于 A_n 的运算正确的是:

   A. $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1)$　　　　B. $\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1]$

   C. $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1)$　　　　D. $\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n=[0,1]$

4. 设 C 为 Cantor 集, 则下列关于 C 的命题不成立的是:

   A. $m(C)=0$.　　　　B. $\overline{C}=C$.

   C. C 中有至多可数个点.　　　　D. C 是疏朗集.

5. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则下列关于 E 的命题成立的是:

   A. $\forall\varepsilon>0$, 存在紧集 $K\subset E$, $m(E\backslash K)<\varepsilon$.

   B. $\forall\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, $m(E\backslash F)<\varepsilon$.

   C. $\forall\varepsilon>0$, 存在紧集 $K\subset E$, $m(E)<m(K)+\varepsilon$.

   D. $\forall\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, $m(E)<m(F)+\varepsilon$.

二、判断题

1. 若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是零测集, 则 E 的闭包也是零测集.
2. 若 $\{f_n\},\{g_n\}$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 若 $f_n\Rightarrow f$, $g_n\Rightarrow g$, 则 $f_ng_n\Rightarrow fg$.
3. 设 E_k 为一列可测集, 若 $E=\bigcap_{k=1}^{+\infty}E_k$, 则 $m(E)=\lim\limits_{k\to+\infty}m(E_k)$.
4. 设 A 为集合, 则总存在集合 B, A 的势严格大于 B 的势.

5. 设 $f_n(x)$ 为可测集 E 上几乎处处有限的实函数, 则 $E\left[f_n \nrightarrow 0\right]=\bigcup_{k \geqslant 1} \bigcap_{N \geqslant 1} \bigcup_{n \geqslant N} E\left[\left|f_n(x)\right| \geqslant \frac{1}{k}\right]$.

6. 有限个闭集的并是闭集, 可数多个闭集的并不一定是闭集.

三、简答题

1. 设 e_n 是一列可测集, 分析 $\limsup\limits_{n \quad to+\infty} e_n$ 是否可测.

2. 叙述几乎处处收敛和依测度收敛的定义, 并分析两者的关系.

3. 设 C 为 Cantor 集, 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x \in C \\ \mathrm{e}^x+1, & x \notin C\end{cases}$.

(1) f 是否在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积? 简单说明理由.

(2) f 是否在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积? 简单说明理由.

四、证明题

1. 设 f 为可测集 E 上的可积函数, 记 $E_k=E\left[|f|<\frac{1}{k^2}\right]$, 证明 $\lim_{k \rightarrow+\infty} \int_{E_k}|f(x)| \mathrm{d} x=0$.

2. 设 $f_k(x)$ 为可测集 E 上的可测函数列, 若 $\lim_{k \rightarrow+\infty} \int_{E_k}|f(x)| \mathrm{d} x=0$, 证明 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到 0.

五、解答题

1. 设 e_k 是一列集合, 若 $m^*\left(e_k\right)<\frac{1}{2^k}$, 计算 $\limsup\limits_{k \rightarrow+\infty} e_k$ 的外测度.

2. 计算 $\lim\limits_{n \rightarrow+\infty} \int_0^1 \frac{k x \sin k x}{2+k^2 x^3} \mathrm{~d} x$.