# 习题五 答案

1. 求[0,1]上Dirichlet函数$D(x)$，Riemann函数$R(x)$的积分.

答：$\int_{[0,1]} D(x)dx = \int_{[0,1]} R(x)dx = 0.$

其中Riemann函数$R(x)$的定义为

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x \in Q, x = \frac{q}{p} \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

$R(x)$有理点处间断，在无理点出连续。

2. 设$mE<\infty$，$f(x)$是$E$上几乎处处有限的非负可测函数，$\delta>0$.

在$[0,+\infty)$上作分划：

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_k<y_{k+1}<\cdots,y_k\to+\infty,$$

满足

$$y_{k+1}-y_k<\delta\quad(\forall k).$$

令$E_k=E[y_k\leq f<y_{k+1}]\ \ (\forall k)$.

证明：$f(x)$在$E$上可积的充要条件是

$$\sum_{k=0}^{\infty}y_k mE_k<\infty,$$

且

$$lim_{\delta\to0^+}\sum_{k=0}^{\infty}y_k mE_k=\int_E f(x)dx.$$

**证明**：因为考虑积分，故不妨设$f(x)$在$E$上处处有限. 这时

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k,$$

且$\{E_k\}_{k=0}^{+\infty}$是互不交的可测集列，故而

$$mE = \sum_{k=0}^{\infty} mE_k < \infty. \qquad (1)$$

因$f(x)$在$E$上非负可测，由积分域的性质得

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx. \qquad (2)$$

由于在$E_k$上成立$y_k \le f(x) < y_{k+1}$，由积分的单调性得

$$y_k mE_k \le \int_{E_k} f(x)dx \le y_{k+1} mE_k \le y_k mE_k + \delta mE_k.$$

结合(1)(2)式得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k mE_k \le \int_E f(x)dx \le \sum_{k=0}^{\infty} y_k mE_k + \sum_{k=0}^{\infty} \delta mE_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y_k mE_k + \delta mE.$$

因为$mE < \infty$，所以上由式得到结论。

3. 设$mE < \infty$，$f(x)$在$E$上非负可测，证明：

$$f(x)\text{在}E\text{上可积} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k mF_k < \infty,$$

其中

$$F_k = E[f \geq 2^k], k = 0,1,\cdots.$$

**证明：** 当$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k mF_k < \infty$时，必有$2^k mF_k \to 0$,从而$mF_k \to 0$.

又因$mE < \infty$, 根据测度的右连续性质得

$$mE[f = \infty] = lim_{k\to\infty} m\, F_k = 0,$$

即$f(x)$在$E$上几乎处处有限.

当$f(x)$在$E$上可积时，也有$f(x)$在$E$上几乎处处有限.

综上，设$f(x)$在$E$上几乎处处有限，又因为考虑了积分或测度，故不妨设$f(x)$在$E$上处处有限.

令$E_0 = E[0 \le f < 1]$，$E_n = E[2^{n-1} \le f < 2^n], n = 1,2,\cdots.$，
则$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$，且$\{E_n\}_{n=0}^{+\infty}$是互不交的可测集列，且$mE = \sum_{n=0}^{\infty} mE_n < \infty$.
利用积分域的性质得到

$$\int_E f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx . \qquad (1)$$

由积分的单调性得

$$0 \le \int_{E_0} f(x)dx \le mE_0,$$

$$2^{n-1}mE_n \le \int_{E_n} f(x)dx \le 2^n mE_n \ (\forall n > 0).$$

代入(1)式就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}mE_n \le \int_E f(x)dx$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} 2^n mE_n \le 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}mE_n + mE. \qquad (2)$$

因为$mE < \infty$，所以不等式(2)表明

$$f(x)\text{在}E\text{上可积} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n mE_n < \infty \qquad (3)$$

注意到对$k=0,1,\cdots$，有$F_k=\bigcup_{n=k+1}^{\infty}E_n$，故

$$mF_k=\sum_{n=k+1}^{\infty}mE_n,$$

交换求和顺序得

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k mF_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^k\sum_{n=k+1}^{\infty}mE_n\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)mE_n,$$

再结合$\infty>mE=\sum_{n=0}^{\infty}mE_n\geq\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n mE_n-mE\leq\sum_{k=0}^{\infty}2^k mF_k\leq\sum_{n=1}^{\infty}2^n mE_n.$$

这个不等式也就表明

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n mE_n<\infty\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}2^k mF_k<\infty. \qquad (4)$$

结合(3) (4)式即得到结论：

$$f(x)\text{在}E\text{上可积}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}2^k mF_k<\infty.$$

4. 设$mE<\infty$，$E_1,E_2,\cdots,E_n$是$E$的$n$个可测子集，正整数$k\le n$.
证明：若$E$中每一点至少属于$k$个$E_i$，则存在某个$i$，使得$mE_i\ge \frac{k}{n}mE$.

**证明** 作$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_k}(x)$，则$f(x)$在$E$上非负可测.

由题设$E$中每一点至少属于$k$个$E_i$得到

$$f(x)\ge k(\forall x\in E).$$

由积分的单调性得

$$k\ mE=\int_E kdx\le\int_E f(x)dx=\int_E\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}mE_i\,.$$

即

$$\frac{k}{n}mE\le\frac{\sum_{i=1}^{n}mE_i}{n}.$$

再利用平均值的性质即得到结论.

5. $f(x)$是$E$上的可测函数. 则对任意的$a>0$,

$$m(E[|f|\geq a])\leq \frac{1}{a}\int_E |f(x)|dx$$

$$m(E[f\geq a])\leq e^{-a}\int_E e^{f(x)}dx$$

**证明：** 由题设，$|f(x)|$，$e^{f(x)}$都是非负可测函数，利用积分的单调性

$$\int_E |f(x)|dx \geq \int_{E[|f|\geq a]} |f(x)|dx \geq \int_{E[|f|\geq a]} a\,dx = a\,m(E[|f|\geq a])$$

即得结论，另一个类似.

## 6. $f \in \boldsymbol{L(E)} \Rightarrow |f| \in \boldsymbol{L(E)}$

反之，不对。

反例： 取$E = [0,1]$,$A$是$[0,1]$中的不可测子集。

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \in E \backslash A \end{cases}$$

则$|f|$可积，而$f$不可测,当然就不可积。

**7.积分域的左连续性** 设$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, $\{E_n\}$是单增的可测列.

若$f$在$E$上的积分存在, 则

$$\int_E f\,dx=\lim\int_{E_i} f\,dx.$$

**证明：** 证明：利用积分的几何意义

$$\int_E f\,dx=m\,G(E,f^{+})-m\,G(E,f^{-}).$$

再利用非负可测函数下方图形测度的下连续性，即得。

8. **积分域的右连续性** 设$E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$, $\{E_n\}$是单减的可测列.

若$f$在$E_1$上的可积, 则$f$在$E$上可积, 且

$$\int_E f dx = lim \int_{E_i} f dx.$$

证明：利用积分的几何意义

$$\int_E f dx = m\, G(E,f^+) - m\, G(E,f^-).$$

再利用非负可测函数下方图形测度的上连续性，即得。

9. 证明：$\chi_E(x + x_0) = \chi_{E-\{x_0\}}(x)$

证明略

10. 设$mE < \infty$，$f(x)$是$E$上几乎处处有限的可测函数. 令

$$E_n = E[n-1 \leq f < n] \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

证明：$f(x)$在$E$上可积的充要条件是$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| mE_n < +\infty$.

**证明：** 类似于第2题. 不妨设$f(x)$在$E$上处处有限. 这时

$$E = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} E_n,$$

且$\{E_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$是互不交的可测集列，故而

$$mE = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} mE_n < \infty. \qquad (1)$$

因$f(x)$在$E$上可测，所以$f(x)$在$E$上可积的充要条件是$|f(x)|$在$E$上可积.

因而问题转为证明：

$$|f(x)|\text{在}E\text{上可积的充要条件是}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| mE_n < +\infty.$$

由积分域的性质得

$\int_E |f(x)|dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{E_n} |f(x)|dx = \sum_{n=-\infty}^{0} \int_{E_n} |f(x)|dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} |f(x)|dx$ （2）

由于在$E_n(n \geq 1)$上有$n-1 \leq |f(x)| < n$，在$E_n(n < 1)$上有$|n| < |f(x)| \leq |n| + 1$，根据积分的单调性得

$$(n-1)\, mE_n \leq \int_{E_n} |f(x)|dx \leq n\, mE_n, (\forall n \geq 1)\ ,$$

$$|n|mE_n \leq \int_{E_n} |f(x)|dx \leq |n|mE_n + mE_n, (\forall n < 1)\ ,$$

代入(2)式就得到

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |n|mE_n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)mE_n$$

$$\leq \int_E |f(x)|dx \leq \sum_{n=-\infty}^{0} (|n| + 1)mE_n + \sum_{n=1}^{+\infty} nmE_n.$$

结合(1)式得到

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|mE_n - mE \leq \int_E |f(x)|dx \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|mE_n + mE.$$

也就得到：$|f(x)|$在$E$上可积的充要条件是$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|mE_n < +\infty.$

11. 证明 1. $\frac{sinx}{x}$在 $(0,\infty)$上不是勒贝格可积的。

*2.* $\frac{1}{x}$在$(0,1)$上不是勒贝格可积的

1. 函数不是黎曼绝对可积的。

2 反证：如果可积，则有积分的绝对连续性.

取$\mathrm{e_n}=\left(0,\frac{1}{n}\right)$, 则$\mathrm{m(e_n)}=\frac{1}{n}\rightarrow 0$, 但

$$\int_{\mathrm{e_n}} f dx \geq n * \mathrm{m(e_n)} = 1$$

12．设$mE < \infty$，$\{f_n(x)\} \subset L(E)$，且在$E$上$\{f_n(x)\}$一致收敛到$f(x)$.
证明：$f(x) \in L(E)$，且$\int_E f(x)dx = lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$.

**证明：** 由假设得到$f(x)$在$E$上可测. 由一致收敛性知：
对$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，使得

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{1+mE}, \forall x \in E, \forall n \ge N. \qquad (1)$$

当然$|f_n(x) - f(x)|(\forall n)$都非负可测，利用(1)式和积分的单调性得到

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx \le \int_E \frac{\varepsilon}{1+mE} dx = \frac{\varepsilon}{1+mE} mE < \varepsilon, \forall n \ge N.$$

因此$|f_n(x) - f(x)|(\forall n \ge N)$是可积的，且

$$lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0. \qquad (2)$$

又由于

$$|f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|,\ (\forall n \ge N, \forall x \in E).$$

根据$|f_n(x) - f(x)|$ 及$|f_n(x)|$的可积性即知$|f(x)|$在$E$上可积；
又$f(x)$在$E$上可测, 也就得到$f(x)$在$E$上可积. 而

$$\left|\int_E f_n(x)\, dx - \int_E f(x)\, dx\right| = \left|\int_E (f_n(x) - f(x))\, dx\right| \le \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx,$$

再结合(2)式得到

$$\int_E f(x)dx = lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

13. 设$mE < \infty$，证明：

在$E$上$f_n(x) \Rightarrow 0$的充要条件是$lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0.$

**证明** 充分性：任取$\varepsilon > 0$，令$E_n = E[|f_n| \geq \varepsilon]$.

由于$g(t) = \frac{t}{1+t}$当$t > 0$时单调增加，所以在$E_n$上恒有

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \forall x \in E_n.$$

利用非负函数关于积分域和积分函数的单调性得到

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \geq \int_{E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \geq \int_{E_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}dx = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}mE_n,$$

故由

$$lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0,$$

得

$$0 = lim_{n\to\infty} m\,E_n = lim_{n\to\infty} m\,E[|f_n| \geq \varepsilon],$$

即$f_n \Rightarrow 0.$

**证明** 必要性：因在$E$上$f_n(x) \Rightarrow 0$，故对$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，使得当$n \geq N$时恒有

$$mE\left[|f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}\right] \leq \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}.$$

令$E_n = E\left[|f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}\right]$，则$mE_n \leq \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}$，同时，在$E\backslash E_n$上，恒有

$$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \leq |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(1+mE)};$$

在$E_n$上，恒有$\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \leq 1.$

利用非负函数关于积分域和积分函数的单调性得到, 当$n \geq N$时

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = \int_{E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx + \int_{E\backslash E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx$$

$$\leq \int_{E_n} 1dx + \int_{E\backslash E_n} \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}dx \leq mE_n + \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}mE$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(1+mE)} + \frac{\varepsilon}{2(1+mE)}mE < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此得到

$$lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0.$$

14. 设$f(x)$是可测集$E$上的可积函数，令$e_n=E[|f|\geq n]$. 证明：

$$lim_{n\to\infty} n\,(me_n)=0.$$

**证明**：法一 令$E_\infty=E[|f|=\infty]$. 由题设$f(x)$在$E$上可积，知$f(x)$在$E$上几乎处处有限，故

$$mE_\infty=0. \qquad (*)$$

又$f(x)$在$E$上可积，所以$|f(x)|$在$E$上可积，再由(*)式得

$$\int_{E_\infty}|f(x)|dx=0, \text{ 且} \int_E|f(x)|dx<+\infty.$$

集列$\{e_n\}$关于$n$单调减少，且$lim_{n\to\infty} e_n=E_\infty$. 而

$$\int_{e_n}|f(x)|dx\leq\int_E|f(x)|dx<+\infty, (\forall n),$$

利用非负函数关于积分域的连续性质得到，

$$lim_{n\to\infty}\int_{e_n}|f(x)|dx=\int_{lim_{n\to\infty} e_n}|f(x)|dx=\int_{E_\infty}|f(x)|dx=0,$$

又

$$\int_{e_n}|f(x)|dx\geq\int_{e_n} ndx=n(me_n)\geq 0,$$

结合起来即有

$$lim_{n\to\infty} n\,(me_n)=0.$$

14. 设$f(x)$是可测集$E$上的可积函数，令$e_n = E[|f| \geq n]$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\,(me_n) = 0.$$

**证明**：法二 因为

$$\infty > \int_E |f(x)|dx \geq \int_{e_n} |f(x)|dx \geq \int_{e_n} ndx = n(me_n) \qquad (1)$$

故$\lim_{n\to\infty} m(e_n) = 0$，

再利用可积函数的绝对连续性，得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e_n} |f(x)|dx = 0$$

代入（1），就有

$$\lim_{n\to\infty} n\,(me_n) = 0$$

15.设$F$是可测集$E$上的可积函数族，满足

$$sup_{f\in F}\int_E |f(x)|dx = M < \infty.$$

证明：可积族$F$具有积分等度绝对连续性的充要条件是：$\forall\varepsilon > 0, \exists N$，使得

$$sup_{f\in F}\int_{E[|f|\geq N]} |f(x)|dx \leq \varepsilon.$$

证明：令$E_n = E[|f| \geq n]$，则

$$n(mE_n) = \int_{E_n} ndx \leq \int_{E_n} |f(x)|dx \leq \int_E |f(x)|dx \leq M.$$

这表明对任意的$f \in F$有

$$mE_n \leq \frac{M}{n}. \qquad (1)$$

必要性：因为$F$具有积分等度绝对连续性，故对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当$e\subset E$，且$me<\delta$时，成立

$$\int_e |f(x)|dx \le \varepsilon, (\forall f\in F). \qquad (2)$$

在(1)式中取$n=N=\left[\frac{M}{\delta}\right]+1$，则

$$mE_N \le \frac{M}{N}=\frac{M}{\left[\frac{M}{\delta}\right]+1}<\frac{M}{\frac{M}{\delta}}=\delta, (\forall f\in F). \qquad (3)$$

(2)(3)式结合即有

$$\int_{E_N} |f(x)|dx \le \varepsilon, (\forall f\in F).$$

充分性：由假设知，对$\forall\varepsilon>0,\exists N$，使得

$$\int_{E_N} |f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{2}, (\forall f\in F). \qquad (4)$$

对该$N$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{2N}$. 对任意的$e\subset E$，且$me<\delta$时，来估计$\forall f\in F$的积分值$\int_e |f(x)|dx$.

注意到在$e\backslash E_N$上，恒有$|f(x)|\le N$，所以由积分域和积分函数的单调性及(4)式得

$$\int_e |f(x)|dx=\int_{e\cap E_N}|f(x)|dx+\int_{e\backslash E_N}|f(x)|dx\le\int_{E_N}|f(x)|dx+\int_{e\backslash E_N}Ndx$$

$$\le\int_{E_N}|f(x)|dx+\int_e Ndx\le\frac{\varepsilon}{2}+N(me)\le\frac{\varepsilon}{2}+N\delta\le\varepsilon.$$

即$F$具有积分等度绝对连续性.

16. 设$E=(0,+\infty)$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}t^{-\frac{1}{n}}dt=1.$$

证明：令$f_n(t)=\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}t^{-\frac{1}{n}}$,

则当$t>0$时，有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\lim_{n\to\infty}t^{-\frac{1}{n}}=e^{-t}.\qquad(1)$$

又注意到当$n>1$时，成立：

若$0<t\le 1$，则

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}t^{\frac{1}{n}}\ge t^{\frac{1}{n}}\ge t^{\frac{1}{2}};$$

若$t>1$，则因$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}$在$t>0$时关于$n$单增.

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}t^{\frac{1}{n}}\ge\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\ge\left(1+\frac{t}{2}\right)^{2}.$$

取

$$f(t)=\begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}, & 0<t\le 1, \\ \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2}, & 1<t. \end{cases}$$

所以当$n>1$时，成立

$$f_n(t)\le f(t),(\forall n>1,\forall t>0). \qquad (2)$$

利用Riemann积分和Lebesgue积分间的关系得

$$\int_E f(t)dt=\int_{(0,1]} f(t)dt+\int_{[1,\infty)} f(t)dt=\int_{(0,1]} t^{-\frac{1}{2}}dt+\int_{[1,\infty)} \frac{4}{(2+t)^2}dt=\frac{10}{3},$$

即$f(t)$在$E$上可积.

这样利用(1)(2)式和Lebesgue控制收敛性定理，得到

$$lim_{n\to\infty}\int_E \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{-\frac{1}{n}}dt$$

$$=\int_E lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{-\frac{1}{n}}dt$$

$$=\int_E e^{-t}dt=1.$$

17.设$\{f_n(x)\}$是$E$上的一列可测函数，且

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_E |f_n(x)|dx < \infty$$

证明：

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$E$上几乎处处绝对收敛且其和函数在$E$上可积；
2. $\int_E \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E f_n(x) dx$.

**证明**：只需注意到$= \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$实际上是非负可积的，

再利用可积函数是几乎处处有限的

及Lebesgue控制收敛性定理即得结论.

18. 设$f(x,t)$当$|t-t_0|<\delta$时是$x$在$[a,b]$上的可积函数，
并且存在常数$k>0$，使得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\le k,\ |t-t_0|<\delta, x\in[a,b]$$

证明:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t)dx\right)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right)dx$$

**证明**：直接用勒贝格控制收敛定理，控制函数是常函数$k$.

## 19. 证明5.4节中截口的性质1-5

**证明：** 略.

20. 设$f(x)$在$R^p$上可积， $g(y)$在$R^q$上可积，证明$f(x)g(y)$在$R^{p+q}$上可积

**证明：** 考虑$f(x)g(y)$.

21. 设$f(x,y)$在$R^{p+q}$上非负可测，且$\forall x\in \mathrm{R}^{\mathrm{p}}, f(x,y)$在$R^{q}$上几乎处处有限，
证明：对几乎所有的$y\in \mathrm{R}^{\mathrm{q}}, f(x,y)$在$R^{p}$上几乎处处有限.

**证明：** 令

$$E^{\infty}=\{(x,y): f(x,y)=\infty\}$$

$$E_{x}^{\infty}=\{y: f(x,y)=\infty\}$$

由题设，对$\forall x\in \mathrm{R}^{\mathrm{p}}$，

$$\mathrm{m}(E_{x}^{\infty})=0.$$

所以, 用Fubini定理

$$\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{p+q}}}\chi_{E^{\infty}}(u)du=\mathrm{m}(E^{\infty})=\int_{\mathrm{R}^{\mathrm{p}}}\mathrm{m}(E_{x}^{\infty})\mathrm{dx}=0$$

再用Fubini定理就得到下截口的测度几乎处处为零，结论得证。