第四章习题答案

1. **证明简单函数的和、差、积、商仍为简单函数.**

证明： 只需注意若

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j,$$

且$\{E_i\},\{F_j\}$分别为互不交的集族，则

$$\{E_i \cap F_j : i = 1,\cdots,n;\, j = 1,\cdots m\}$$

也为互不交的集族，同时

$$E = \bigcup_{i=1,j=1}^{n,m} E_i \cap F_j.$$

设$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$, $g(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}(x)$,

则

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}(x);$$

$$f(x)g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_i b_j) \chi_{E_i \cap F_j}(x);$$

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \chi_{E_i}(x).$$

均为简单函数.

2. **函数$f(x)|_E$在孤立点$x_0 \in E$处连续.**

证明： 若$x_0 \in E$是孤立点，则存在$r > 0$，使得

$$O(x_0, r) \cap E = \{x_0\}.$$

对任意的$\varepsilon > 0$，取$\delta = r$，则当$x \in E$且$|x - x_0| < \delta$时，必有$x = x_0$，当然这时有

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

也就证明了函数$f(x)$在孤立点$x_0 \in E$的连续性

3. 更一般的结论. 若E,F为不交的闭集，函数$f(x)$在E,F上分别连续，则$f(x)$在$E\cup F$上连续.

证明：任取$x_0\in E\cup F$. 不妨设$x_0\in E$，由于两集合E,F不交，则$x_0\notin F$. 又由于F是闭集，则$\rho(x_0,F)=d>0$. 这样对任意的$0<r<d$，当$|x-x_0|<r<d$时，必有$x\notin F$；特别地，当$x\in E\cup F$且$|x-x_0|<r<d$时，也必有$x\notin F$，从而$x\in E$.

另一方面，由于$f(x)$在E上连续，故对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$x\in E$且$|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取$\delta=min\{\delta_1,d\}$，则由以上讨论知道，当$x\in E\cup F$且$|x-x_0|<\delta$时，必有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，也就证明了函数$f(x)$在点$x_0$的连续性.

4. 有界闭集E上的连续函数$f(x)$是有界函数

证明：只需证明函数的最大最小值可达即可. 以最大值为例. 令$M=sup\{f(x):x\in E\}$，则存在点列$\{x_n\}\subset E$，使得$f(x_n)\to M$. 因为E是有界闭集，所以有界点列$\{x_n\}\subset E$必有在E中收敛的子列，不妨设$\{x_n\}$自身收敛到$x\in E$.

另一方面，由于函数$f(x)$连续，故$f(x_n)\to f(x)$. 由极限的唯一性知$M=f(x)<+\infty$，也即最大值可取到. 同理，最小值也可达到. 因此函数$f(x)$必是有界的.

实际上，有界闭集E上的连续函数$f(x)$是一致连续函数.

证明：对$\forall\varepsilon>0$. 由于函数连续，任取$x\in E$，则$\exists\delta(x)>0$，使得当$y\in E\cap O(x,\delta(x))$时，必有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (*).$$

这样，也就得到E的一族开覆盖$\{O(x,\delta(x)): x\in E\}$，其中$\delta(x)$使得（*）式成立．由于$E$是有界闭集，故必有从属于$\{O(x,\delta(x)): x\in E\}$的Lebesgue 数$\delta>0$，即对任意的$x_0\in E$，必存在某个$x\in E$，使得$O(x_0,\delta)\subset O(x,\delta(x))$.

任取$x_1,x_2\in E$，$|x_1-x_2|<\delta$．由上述所言，必存在$x\in E$，使$O(x_1,\delta)\subset O(x,\delta(x))$，则也有$x_2\in O(x,\delta(x))$．由（*）式，得到

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

也就证明了一致连续性.

5. 可测集$E\subset R^1$上的单调函数$f(x)$是E上的可测函数.

证明：因为$f(x)$是单调函数，所以$f(x)$的不连续点的全体$E_0\subset E$必是至多可数集，从而$mE_0=0$．零测集上的任意函数都可测，所以对任意$a\in R^1$，集合$E_0[f>a]$必可测.

另一方面，$f(x)$在$E\backslash E_0$上连续，当然是$E\backslash E_0$上的可测函数．所以对任意$a\in R^1$，集合$(E\backslash E_0)[f>a]$必可测．而$E=E_0\cup(E\backslash E_0)$，故对任意的$a\in R^1$，

$$E[f>a]=(E_0[f>a])\cup\big((E\backslash E_0)[f>a]\big),$$

故集合$E[f>a]$可测，从而函数$f(x)$是E上的可测函数.

6. 设f为可测集E上的广义实函数．若对几乎所有的$a\in R^1$，集合$E[f>a]$均可测，则f在E上可测.

证明：任取$a\in R^1$．由题设知，在区间$(a,a+\frac{1}{n})$中必有点a_n，使得$E[f>a_n]$可测．这样就得到一列点$\{a_n\}$，使得$a_n>a, a_n\to a$且

$E[f > a_n]$可测. 而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f > a_n] = E[f > a],$$

左端是一列可测集的并， 故$E[f > a]$可测. 由$a \in R^1$的任意性知f在E上可测.

7. **设$mE < \infty$，f是E上几乎处处有限的可测函数. 证明：对$\forall \varepsilon > 0$，存在闭集$F \subset E$，使得$m(E \backslash F) < \varepsilon$，且$f$在$F$上有界.**

证明：设$E_\infty = E[|f| = \infty], E_n = E[|f| > n]$，则$\{E_n\} \subset E$是单减的可测集列，且$lim_{n\to\infty} E_n = E_\infty$. 因为$mE < \infty$，所以$lim_{n\to\infty} m\, E_n = mE_\infty$. 又因为$f$是$E$上几乎处处有限的可测函数，故$lim_{n\to\infty} m\, E_n = mE_\infty = 0$. 因此对$\forall \varepsilon > 0$，存在$N$，使得当$n \geq N$时$mE_n < \frac{\varepsilon}{2}$，特别的，$mE_N < \frac{\varepsilon}{2}$. 在$E \backslash E_N$上，恒有$|f(x)| \leq N$. 根据可测集的构造，存在闭集$F \subset E \backslash E_N$，使得$m((E \backslash E_N) \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$. 这样，

$$E \backslash F = \left(E_N \cup (E \backslash E_N)\right) \backslash F = E_N \cup \left((E \backslash E_N) \backslash F\right),$$

因而$m(E \backslash F) \leq mE_N + m\left((E \backslash E_N) \backslash F\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，且在闭集$F$上，有$|f(x)| \leq N$.

8. **设$\{f_n\}$是可测集E上的可测函数列. 证明：若对任意的$\varepsilon > 0$，均有**

$$\sum_{n=1}^{\infty} mE[|f_n| \geq \varepsilon] < +\infty.$$

则必有$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛到零. 并以反例说明该命题的逆命题不成立.

证明： 由题设知，对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} mE[|f_n| \geq \varepsilon] = 0. \qquad (*)$$

而

$$E[f_n \xrightarrow{\times} 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n| \geq \frac{1}{k}\right],$$

所以由测度的次可加性得到

$$mE[f_n \xrightarrow{\times} 0] \leq \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n| \geq \frac{1}{k}\right]\right).$$

任取自然数k，由测度的单调性和次可加性得

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n| \geq \frac{1}{k}\right]\right) \leq m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n| \geq \frac{1}{k}\right]\right)$$

$$\leq \sum_{n=N}^{\infty} mE[|f_n| \geq \frac{1}{k}], \forall N$$

再由（*）式知

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n| \geq \frac{1}{k}\right]\right) = 0, \forall k.$$

因此，$mE[f_n \xrightarrow{\times} 0] = 0$. 因而，有$f_n(x)$在$E$上几乎处处收敛到零.

反例：设$E = (0,\infty), f_n(x) = \chi_{(n,\infty)}(x), f(x) \equiv 0$

9. 设$mE < \infty$，f是E上的可测函数．令$A_y = E[f = y], \forall y \in R^1$.

证明：集合$\{y : m\, A_y > 0\}$为至多可数集.

证明：任取$\varepsilon > 0$，令$B_\varepsilon = \{y \in R^1 : m\, A_y > \varepsilon\}$. 下证明$B_\varepsilon$是有限集.

反证法：若B_ε是无限集，则存在互不相同的数列$\{y_k\} \subset B_\varepsilon$. 由于$x \neq y$时，$A_x \cap A_y = \emptyset$；又$f$是$E$上的可测函数，因此集列$\{A_{y_k}\}$是$E$中互不相交的可测集列，且$mA_{y_k} \geq \varepsilon(\forall k)$. 当然，$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{y_k} \subset E$. 由测度的单调性和可数可加性得到

$$mE \geq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{y_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} mA_{y_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon = +\infty,$$

这与题设$mE < \infty$矛盾．故对任意的$\varepsilon > 0$来说，$B_\varepsilon \subset R^1$均是有限集.

令B_n为$B_n=\left\{y:m\,A_y>\frac{1}{n}\right\}$，则$\left\{y:m\,A_y>0\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. 由前知道$B_n(\forall n)$均是有限集. 而可列个有限集的并是至多可数集，因此集合$\left\{y:m\,A_y>0\right\}$为至多可数集.

10. **设f和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$均是可测集E上几乎处处有限的可测函数. 证明：集合$E[f_n \xrightarrow{\times} f]$与$E[f_n \to f]$均为可测集.**

证明： 由题设f和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的几乎处处有限性知，存在E的一列零测子集$\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得f_n在$E\backslash E_n(n=0,1,2,\cdots)$（认为$f=f_0$）上处处有限.

令$e=\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n$, $F=E\backslash e$. 则e是零测集，F和e都是可测集，并且f和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$均是F上处处有限的可测函数. 又

$E[f_n\to f]=(F[f_n\to f])\cup(e[f_n\to f])$，

$e[f_n\to f]$是零测集，所以只需证明集合$F[f_n\to f]$可测即可.

由第一章的结论知，

$$F[f_n\to f]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}F\left[|f_n-f|<\frac{1}{k}\right].$$

由函数f和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在F上的可测性知$F\left[|f_n-f|<\frac{1}{k}\right](\forall n,k)$均是可测集，再由可测集关于可列个并、交的封闭性得到$F[f_n\to f]$是可测集. 所以得到了$E[f_n\to f]$的可测性.

再由$E[f_n \xrightarrow{\times} f]=E\backslash E[f_n\to f]$得$E[f_n \xrightarrow{\times} f]$是可测集.

11. **设f,g均是E上的可测函数. 证明：集合$E[f>g]$是可测集.**

证明： 令$Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$. 由于$f,g$均是$E$上的可测函数，所以对任意的$n\in N$，集合$E[f>r_n]$和$E[g<r_n]$均是可测集，$E[f>r_n]\cap E[g<r_n]$也都是可测集，这样集合$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E[f>r_n]\cap E[g<r_n])$是可

测集. 实际上

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E[f>r_n]\cap E[g<r_n])=E[f>g],$$

所以$E[f>g]$是可测集.

12. **构造反例说明：由$|f|$可测得不到f可测.**

反例： 设$E=[0,1]$，A是$E=[0,1]$的不可测子集，

$$f(x)=\chi_A(x)-\chi_{E\setminus A}(x).$$

则$|f|\equiv 1$是E上的可测函数，而$E[f>0]=A$不是可测集，因而f不是E上的可测函数.

13. **设在R^p中，$f(x)$是E_1上的可测函数；在R^q中，$g(y)$是E_2上的可测函数. 证明：在R^{p+q}中，$f(x)g(y)$是$E=E_1\times E_2$上的可测函数.**

证明： 由定义知，$E_1\subset R^p, E_2\subset R^q$都分别是各自空间中的可测集合，根据可测集的乘积性质知

$$E=E_1\times E_2=\{(x,y):x\in E_1,y\in E_2\}$$

是R^{p+q}中的可测集. 在$E=E_1\times E_2$上定义函数

$$f_1(x,y)=f(x),\forall(x,y)\in E=E_1\times E_2,$$

$$g_1(x,y)=g(y),\forall(x,y)\in E=E_1\times E_2.$$

对$\forall a\in R^1$，易知$E[f_1>a]=E_1[f>a]\times E_2$. 等式的右边是两个可测集的乘积，由可测集的乘积性质知它可测. 因此$f_1(x,y)$是E上的可测函数. 同理，$g_1(x,y)$也是E上的可测函数. 由可测函数的乘积性质得到$f_1(x,y)g_1(x,y)=f(x)g(y)$是$E$上的可测函数.

14. **设$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$R^n$上的可微函数.**

证明：所有的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_n), i = 1,2, \cdots, n$$

均是R^n上的可测函数.

证明：以$f'(x)$为例：$f'(x) = lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$，右边表现为可测函数的极限，所以可测.

15.构造反例说明：Egoroff 定理中的条件“$mE < \infty$”不可去掉.

反例：$E = (0, \infty), f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x), f(x) \equiv 1$. 则$f_n \to 1$，由于

$$mE[|f_n - 1| > \frac{1}{2}] = m([n, \infty)) = \infty, \forall n$$

所以并不能得到定理成立. 因若成立，可以得到依测度收敛，但实际上不是依测度收敛的

16.设$mE < \infty$，$\{f_n\}$是E上的几乎处处有限的可测函数列，且在E上$\{f_n\}$几乎处处收敛到0. 证明：存在单调增加的可测集列$\{E_k\} \subset E$，使得在E_k上$\{f_n\}$一致收敛到0，并且 $lim_{k\to\infty} m\,E_k = mE$.

证明：由 Egoroff 定理知，对$\forall i \in N$，存在可测子集$F_i \subset E$，使得$m(E \backslash F_i) < \frac{1}{i}$，且在$F_i$上$\{f_n\}$一致收敛到0. 令$E_k = \cup_{i=1}^{k} F_i$. 则$\{E_k\} \subset E$是单增可测集列，且在$E_k$上$\{f_n\}$一致收敛到0. 由测度的单调性得$m(E \backslash E_k) \leq m(E \backslash F_k) \leq \frac{1}{k}$，即$lim_{k\to\infty} m\,(E \backslash E_k) = 0$. 而

$$mE = m\big(E_k \cup (E \backslash E_k)\big) = mE_k + m(E \backslash E_k),$$

取极限也就得到$lim_{k\to\infty} m\,E_k = mE$.

17.设$mE < \infty$，$\{f_n\}$是E上的几乎处处有限的可测函数列，且在E上$\{f_n\}$几乎处处收敛到0. 证明：存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$，使得级数

$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$在$E$上几乎处处绝对收敛.

证明：利用上一题的结论：得到单调增加的可测集列$\{E_k\} \subset E$，使得在E_k上$\{f_n\}$一致收敛到0，并且 $\lim_{k\to\infty} m\,E_k = mE$. 由于$\{f_n\}$在$E_k$上一致收敛到0，所以存在$n_k \in N$，使得当$n \geq n_k$时，恒有

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2^k}, \forall x \in E_k.$$

特别地，成立

$$\left|f_{n_k}(x)\right| < \frac{1}{2^k}, \forall x \in E_k. \qquad (*)$$

在取n_k的过程中，可以取得使$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$，这样就得到子函数列$\{f_{n_k}\}$.

令$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，由于$\{E_k\}$是单调增加的，所以

$$F = \lim_{k\to\infty} E_k,\quad mF = \lim_{k\to\infty} m\,E_k = mE.$$

又$F \subset E, mE < \infty$，因此$mE = mF + m(E\backslash F)$，故而$m(E\backslash F) = 0$.

可以证明：级数$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$在$F$上处处绝对收敛，从而在$E$上几乎处处绝对收敛.

事实上，任取$x_0 \in F$. 则存在某个$i \in N$，使得$x_0 \in E_i$. 由(*)式和$\{E_k\}$的单调增加性得$\left|f_{n_k}(x_0)\right| < \frac{1}{2^k}, \forall k > i$. 因此

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x_0)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_k}(x_0)\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{i} \left|f_{n_k}(x_0)\right| + \sum_{k=i+1}^{\infty} \left|f_{n_k}(x_0)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{i} \left|f_{n_k}(x_0)\right| + \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{i} |f_{n_k}(x_0)| + \frac{1}{2^i}.$$

即$\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x)$在$x_0$处绝对收敛.

18.设f和$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$均是可测集E上几乎处处有限的可测函数. 对$\forall\delta > 0$, 存在可测子集$E_\delta \subset E$, 使得$m(E\backslash E_\delta) < \delta$, 且在$E_\delta$上$\{f_n\}$一致收敛到$f$. 证明: 在$E$上$\{f_n\}$几乎处处收敛到$f$.

证明: 由题设知，对任意的$i \in N$，存在可测子集$F_i \subset E$，使得$m(E\backslash F_i) < \frac{1}{i}$, 且在$F_i$上$\{f_n\}$一致收敛到$f$. 令$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. 则$\{f_n\}$在$F$上收敛到$f$. 由测度的单调性得

$$m(E\backslash F) \leq m(E\backslash F_i) \leq \frac{1}{i}, \forall i,$$

故而$m(E\backslash F) = 0$. 因此，在E上$\{f_n\}$几乎处处收敛到f.

19.设在可测集E上，有$f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$. 证明:

(i) $af_n \Rightarrow af \quad (a \in R^1)$.

(ii) $f_n + g_n \Rightarrow f + g$.

(iii) 当$mE < \infty$时，$f_n g_n \Rightarrow fg$.

(iv) $|f_n| \Rightarrow |f|$.

并以反例说明：当$mE = \infty$时，结论(iii)不成立.

证明: (i) $a = 0$时显然成立. $a \neq 0$时，注意到

$$E[|af - af_n| \geq \varepsilon] = E[|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{|a|}]$$

即可.

(ii) 注意到若$|a + b| \geq \varepsilon$，则或$|a| \geq \frac{\varepsilon}{2}$或$|b| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$E[|(f + g) - (f_n + g_n)| \geq \varepsilon] \subset E[|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \cup E[|g - g_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}].$$

故由次可加性和依测度收敛性即得到结论.

(iv) 由$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$知当$\varepsilon < \big||f_n(x)|-|f(x)|\big|$时，必有$\varepsilon < |f_n(x)-f(x)|$，因而成立

$$E\big[\big||f_n|-|f|\big| \ge \varepsilon\big] \subset E[|f_n-f| \ge \varepsilon].$$

由$f_n \Rightarrow f$得$mE[|f_n-f| \ge \varepsilon] \to 0$, 因此

$$mE\big[\big||f_n|-|f|\big| \ge \varepsilon\big] \to 0,$$

即得$|f_n| \Rightarrow |f|$.

(iii) **法一.** 先证明命题：**设$mE<\infty$. 则$f_n \Rightarrow f$的充要条件是对$\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_k}\}$可从中找子列$\{f_{n_{k_i}}\}$使得当$i\to\infty$时有$f_{n_{k_i}}(x) \to f(x)$在E几乎处处成立.**

必要性：因依测度收敛列的子列也依测度收敛，所以直接用 Riesz 定理即得结论.

充分性：反证法，若不依测度收敛，则存在$\varepsilon_0, \delta_0 > 0$，以及子列$\{f_{n_k}\}$，使得

$$mE[|f-f_{n_k}| \ge \varepsilon_0] \ge \delta_0, \forall k. \qquad (*)$$

由题设，$\{f_{n_k}\}$有子列$\{f_{n_{k_i}}\}$几乎处处收敛到f. 又$mE<\infty$，故由 Lebesgue 定理知$\{f_{n_{k_i}}\}$依测度收敛到f，这与（*）式矛盾. 所以，$f_n \Rightarrow f$.

证(iii)：任取$\{f_n g_n\}$的子列$\{f_{n_k} g_{n_k}\}$. 当然有$f_{n_k} \Rightarrow f, g_{n_k} \Rightarrow g$. 由 Riesz 定理，通过两次选子列，知存在子列$\{f_{n_{k_i}}\}, \{g_{n_{k_i}}\}$, 使得当$i\to\infty$时有$f_{n_{k_i}} \to f, g_{n_{k_i}} \to g$都几乎处处成立. 当然当$i\to\infty$时，$f_{n_{k_i}} g_{n_{k_i}} \to fg$几乎处处成立. 结合命题就得$f_n g_n \Rightarrow fg$.

法二： 因为

$fg-f_ng_n=(f_n-f)(g-g_n)+f(g-g_n)+g(f-f_n)$，

所以问题归结为证明命题：设$mE<\infty$，$f_n\Rightarrow 0, g_n\Rightarrow 0, h(x)$是$E$上几乎处处有限的可测函数，则

（a）$f_ng_n\Rightarrow 0$； (b) $\mathrm{h(x)}f_n\Rightarrow 0$.

证明：（a）因为

$$E\left[|\varphi|\geq\sqrt{\varepsilon}\right]=E[|\varphi^2|\geq\varepsilon],$$

所以若$\varphi_n\Rightarrow 0$,则$(\varphi_n)^2\Rightarrow 0$. 由等式

$$4f_ng_n=(f_n+g_n)^2-(f_n-g_n)^2,$$

和（i）（ii）即得$f_ng_n\Rightarrow 0$.

（b）因为$h(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，又$mE<\infty$，所以

$$lim_{k\to\infty}\, m\, E[|h|\geq k]=0. \tag{1}$$

令$E_k=E[|h|\geq k], F_k=E\backslash E_k$. 在$F_k$上，恒有$|h(x)|\leq k$. 对任意的$\varepsilon>0$,有

$$\boldsymbol{E[|hf_n|\geq\varepsilon]=E_k[|hf_n|\geq\varepsilon]\cup F_k[|hf_n|\geq\varepsilon].} \tag{2}$$

在F_k上，恒有$k|f_n(x)|\geq|h(x)f_n(x)|$，故

$$F_k[|hf_n|\geq\varepsilon]\subset F_k\left[|f_n|\geq\frac{\varepsilon}{k}\right]\subset E\left[|f_n|\geq\frac{\varepsilon}{k}\right],$$

当然$E_k\left[|\hbar f_n|\geq\varepsilon\right]\subset E_k$. 结合（2）式有

$$\boldsymbol{E[|hf_n|\geq\varepsilon]\subset E_k\cup E\left[|f_n|\geq\frac{\varepsilon}{k}\right],\forall k,}$$

$$\boldsymbol{mE[|hf_n|\geq\varepsilon]\leq mE_k+mE\left[|f_n|\geq\frac{\varepsilon}{k}\right],\forall k.} \tag{3}$$

由（1）式，对任意的$\delta>0$，存在$k>0$，使得$mE_k<\frac{\delta}{2}$.对该取定的k，

由于$f_n \Rightarrow 0$，所以存在N，使当$n > N$时，有$mE\left[|f_n| \geq \frac{\varepsilon}{k}\right] < \frac{\delta}{2}$. 因此，当$n > N$时，结合（3）式得

$$\boldsymbol{mE[|hf_n| \geq \varepsilon] \leq mE_k + mE\left[|f_n| \geq \frac{\varepsilon}{k}\right] < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.}$$

即得到 $hf_n \Rightarrow 0$.

反例：取$E = [1, \infty)$，$g_n(x) = g(x) = x$，$f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,n]}(x), f(x) = \frac{1}{x}$.

20. **设在E上，有$f_n \Rightarrow f$且$f_n \Rightarrow g$，证明**

在E上$f(x)$和$g(x)$几乎处处相等.

证明：不妨假定函数$f(x), g(x)$是处处有限的. 这样有

$$E[|f-g| \neq 0] = \cup_{k=1}^{\infty} E\left[|f-g| \geq \frac{1}{k}\right].$$

所以只需证明右边的每个集合是零测集就行了.

注意到若$|a-b| > \frac{1}{k}$，则由于$|a| + |b| \geq |a-b|$，故必有$|a| \geq \frac{1}{2k}$或$|b| \geq \frac{1}{2k}$. 因而当$|f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}$时，必有

$$|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\text{或}|g(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}.$$

因此对任意的n有

$$E\left[|f-g| \geq \frac{1}{k}\right] \subset E\left[|f-f_n| \geq \frac{1}{2k}\right] \cup E\left[|g-f_n| \geq \frac{1}{2k}\right]$$

由依测度收敛性知上式右边两个集合的测度当$n \to \infty$时趋于零，故对任意的k都成立 $mE\left[|f-g| \geq \frac{1}{k}\right] = 0$. 完成证明.

21. **设$\{f_n\}, f$均是可测集E上几乎处处有限的可测函数. 证明：在E上，$f_n \Rightarrow f$ 的充要条件是对 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N$ 使 $\forall m, n \geq N$，均有 $mE[|f_n - f_m| \geq \varepsilon] < \delta$.**

证明：**必要性**：类似于 19 题，知对$\forall \varepsilon > 0$和$\forall m, n$，有

$$E[|f_n-f_m|\geq\varepsilon]\subset E\left[|f-f_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\cup E\left[|f-f_m|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right],$$

故而由测度的次可加性得

$$mE[|f_n-f_m|\geq\varepsilon]\leq mE\left[|f-f_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]+mE\left[|f-f_m|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

由于$f_n\Rightarrow f$，所以对$\forall\delta>0,\exists N$使$\forall m,n\geq N$，均有

$$mE[|f_n-f|\geq\varepsilon]<\frac{\delta}{2},\ mE[|f_m-f|\geq\varepsilon]<\frac{\delta}{2}.$$

这样，利用上式知对$\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists N$使对$\forall m,n\geq N$，均有

$$\begin{aligned}&mE[|f_n-f_m|\geq\varepsilon]\\ \leq\ &mE\left[|f-f_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]+mE\left[|f-f_m|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right]\\ <\ &\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.\end{aligned}$$

充分性：不妨假定函数列是处处有限的．由题设知存在n_k，使得当$m,n\geq n_k$时，

$$mE[|f_n-f_m|\geq\tfrac{1}{2^k}]<\tfrac{1}{2^k}.$$

在逐个取n_k时把n_k取得充分大，使得$n_1<n_2<n_3<\cdots$．令

$$E_k=E[|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|\geq\tfrac{1}{2^k}],$$

则$mE_k<\frac{1}{2^k},k=1,2,\ldots.$

作$F_m=\bigcup_{k=m}^{\infty}E_k$，$S=\bigcap_{m=1}^{\infty}F_m$，则$\{E_k\}$的上限集为$S$．由于

$$mF_m=m(\textstyle\bigcup_{k=m}^{\infty}E_k)\leq\sum_{k=m}^{\infty}mE_k\leq\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{m-1}},$$

又由于$mS\leq mF_m(\forall m)$，所以$mS=0$.

若$x\notin S$，则$x\in E\backslash S=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\backslash F_k)$，从而存在$m$，使得

$$x\in E\backslash F_m=\textstyle\bigcap_{k=m}^{\infty}(E\backslash E_k)=\bigcap_{k=m}^{\infty}E\left[|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|\leq\frac{1}{2^k}\right].$$

因此当$n\geq m$时，有

$\sum_{k=n}^{\infty}\left|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}}$. （*）

这说明级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)\right)$$

在$E\setminus S$上是绝对收敛的，因此$\{f_{n_k}(x)\}$在E上几乎处处绝对收敛，设其极限函数为$f(x)$，则$f(x)$为E上几乎处处有限的可测函数.

此外，由（*）式知$\{f_{n_k}(x)\}$在$E\setminus F_m$上一致收敛到$f(x)$，而$mF_m \le \frac{1}{2^{m-1}}$，所以$\{f_{n_k}(x)\}$在$E$上几乎一致收敛到$f(x)$，故$\{f_{n_k}(x)\}$在$E$上依测度收敛到$f(x)$.

最后，由不等式

$$mE[|f_n-f|\ge\varepsilon]\le mE\left[\left|f-f_{n_k}\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right]+mE\left[\left|f_{n_k}-f_n\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

得$lim_{n\to\infty} m\,E[|f_n-f|\ge\varepsilon]=0$, 即在$E$上成立$f_n\Rightarrow f$.

22.设在可测集在E上，有$f_n\Rightarrow f$；在E上，对任意的n都几乎处处成立$|f_n(x)|\le K$. 证明：在E上几乎处处成立$|f(x)|\le K$.

证明：由 Riesz 定理知存在子列$\{f_{n_k}\}$，使$f_{n_k}(x)\to f(x)$在E上几乎处处成立. 由题设知在E上几乎处处成立$\left|f_{n_k}(x)\right|\le K$，再由极限的保号性知$|f(x)|\le K$在$E$上几乎处处成立.

23.设在可测集E上，有$f_n\Rightarrow f$. 证明：存在子列$\{f_{n_k}\}$，满足：对任意的$\delta>0$，存在E的可测子集e，使得$me<\delta$且在$E\setminus e$上$\{f_{n_k}\}$一致收敛到f.

证明： 任取$\delta>0$. 由依测度收敛的等价定义知道, 对任意的必存在n_k，使得当$n\ge n_k$时

$$mE[|f_n - f| \geq \frac{1}{2^k}] < \frac{\delta}{2^{k+1}}.$$

令$E_k = E[\left|f_{n_k} - f\right| \geq \frac{1}{2^k}]$，则

$$mE_k < \frac{\delta}{2^{k+1}}, k = 1,2,\ldots$$

且可使$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

作$e = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，则

$$me \leq \sum_{k=1}^{\infty} mE_k < \delta,$$

同时在$E \backslash e$上，序列$\{f_{n_k}\}$一致收敛于f.

24. 设在E上，有$f_n \Rightarrow f$，且$f_n \leq f_{n+1}$ $(\forall n)$. 证明：在E上$\{f_n\}$几乎处处收敛到f

证明： 由依测度收敛得到有子列几乎处处收敛，而函数列又是单调的，所以原函数列实际上就是几乎处处收敛列.

25. 设$E \subset R^n$是闭集，$f(x)$在E上连续，证明对任意的$a \in R^1$，$E[f \geq a]$是闭集

证明： 任取$x \in (E[f \geq a])'$，由极限点的等价定义知存在点列$\{x_n\} \subset E[f \geq a]$使得$lim x_n = x \in E$（因$E$是闭集）. 再由函数的连续性和极限的保号性及$f(x_n) \geq a (\forall n)$得到$f(x) = lim\, f\,(x_n) \geq a$，即$x \in E[f \geq a]$，故$(E[f \geq a])' \subset E[f \geq a]$，$E[f \geq a]$是闭集.

26. Lusin 定理的逆定理：设f是可测集$E \subset R^n$上的广义实函数，若对$\forall \varepsilon > 0$，存在闭集$F \subset E$，使得$m(E \backslash F) < \varepsilon$且$f$在$E \backslash F$上连续，则$f$是$E$上几乎处处有限的可测函数.

证明： 由题设得，对任意的n，存在闭集$F_n \subset E$使得$m(E \backslash F_n) < \frac{1}{n}$且

f在$F_n \subset E$上连续．当然这时f在F_n上可测且处处有限．令$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则由可测函数的性质知$f$在$F$上可测同时还是处处有限的．而$m(E \backslash F) = m(E \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \le m(E \backslash F_n) < \frac{1}{n} (\forall n)$，这表明$m(E \backslash F) = 0$．因此$f$在$E$上可测且几乎处处有限．

27\. Lusin 定理中的ε可否换为0？为什么？

答：不可换为0．反例：取$(0,1)$上的 Dirichlet 函数$D(x)$．若存在闭集$F \subset (0,1)$使得$m\big((0,1) \backslash F\big) = 0$且$D(x)$在$F$上连续．则$(0,1) \backslash F$是开集，又$m\big((0,1) \backslash F\big) = 0$，所以$(0,1) \backslash F$是空集（非空开集的测度必大于零），故$(0,1) \subset F$．即有$(0,1) = F$，与$F$闭矛盾．