习题二 答案

1. 若$x_m \to x$且 $y_m \to y$，则$\rho(x_m, y_m) \to \rho(x, y)$.

特别的，若$x_m \to x$，则$\rho(x_m, y) \to \rho(x, y)$.

证明： 即证明：$\rho(x, y)$是$R^n \times R^n$上的连续函数.

利用三角不等式, 得到

$$
\begin{aligned}
&|\rho(x_m, y_m) - \rho(x, y)| \\
&\le |\rho(x_m, y_m) - \rho(x, y_m)| + |\rho(x, y_m) - \rho(x, y)| \\
&\le \rho(x, x_m) + \rho(y, y_m) \\
&\to 0, (m \to \infty).
\end{aligned}
$$

2. 证明：若$x_1 \in O(x_0,\delta)$，则$\exists\delta_1 < \delta$，使得

$$O(x_1,\delta_1) \subset O(x_0,\delta).$$

证明：因$x_1 \in O(x_0,\delta)$，所以

$$\delta - \rho(x_0,x_1) > 0.$$

任取

$$0 < \delta_1 < \delta - \rho(x_0,x_1).$$

则对任意的$x \in O(x_1,\delta_1)$，用三角不等式，有

$$\rho(x,x_0) \le \rho(x,x_1) + \rho(x_1,x_0)$$

$$\le \delta_1 + \rho(x_1,x_0) < \delta,$$

即$x \in O(x_0,\delta)$. 再由$x \in O(x_1,\delta_1)$的任意性，即得到

$$O(x_1,\delta_1) \subset O(x_0,\delta).$$

3. 证明以下三条等价：

(1). $x_0 \in \overline{E}$;

(2). x_0的任意邻域中都有E中的点；

(3). 存在E中的点列$\{x_n\}$收敛到x_0.

进而，若$x_0 \notin \overline{E}$，则存在$\delta > 0$，使得$O(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$.

证明： 注意到$\overline{E} = E \cup E'$.

（i）若（1）成立，则$x_0 \in E$或$x_0 \in E'$.

若$x_0 \in E$，显然（2）成立；

若$x_0 \in E'$，由极限点的定义也有（2）成立.

(ii). 若（2）成立，则对任意的n，有

$$O(x_0, \frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset,$$

在其中任选一点x_n. 这样就得到点列$\{x_n\} \subset E$，且

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n},$$

即$\{x_n\}$收敛到x_0，即（3）成立.

(iii). 设（3）成立.

若存在某个n使得$x_n = x_0$，当然有

$$x_0 = x_n \in E \subset \overline{E};$$

若对任意的n，都有$x_0 \neq x_n$，则根据极限点的性质知

$$x_0 \in E' \subset \overline{E}.$$

总之，（1）成立.

由等价性，自然的，若$x_0 \notin \overline{E}$，则存在$\delta > 0$，使得$O(x_0, \delta) \cap E = \emptyset$。

实际上表明，$\left(\overline{E}\right)^c$是$E$的外点全体。

4. 证明：$\overline{O}(x_0,\delta)=\overline{O(x_0,\delta)}$.

5. 证明：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

证明：因为

$$(A \cup B)' = A' \cup B',$$

所以有

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= (A \cup B) \cup (A \cup B)' \\ &= (A \cup B) \cup (A' \cup B') \\ &= (A \cup A') \cup (B \cup B') \\ &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

6 在R^1中，设$E = Q \cap [0,1]$，求E'，$\overline{E}$.

7. 在R^2中，设$E = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$，求$E', \overline{E}$.

8. 在R^2中，设E是函数

$$y = \begin{cases} sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

的图形上的点的全体所成之集，求E';

6 解： $E' = \overline{E} = [0,1]$ 7 解： $E' = \overline{E} = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

8 解： $E' = E \cup (\{0\} \times [0,1])$.

因对任意的$-1 \leq a \leq 1$，有E上的点列

$$\left\{\frac{1}{2n\pi + arcsin\ a}, y\left(\frac{1}{2n\pi + arcsin\ a}\right)\right\} \rightarrow (0, a).$$

9. 证明：当E是不可数集时，E'也必是不可数集.

证明：注意到

$$E=(E\cap E')\cup(E\backslash E').$$

而$E\backslash E'$是E中孤立点的全体，是一个孤立集，故是至多可数集.

假设E'不是不可数集，即E'是至多可数集，

其子集$E\cap E'$也必为至多可数集，

就得到$E=(E\cap E')\cup(E\backslash E')$也是至多可数集，与题设矛盾.

所以E'必是不可数集.

10. 设$E \subset R^1, v = inf\ E, \mu = sup\ E$，证明$v \in \overline{E}, \mu \in \overline{E}$.

证明： 由确界的定义知有E中的点列$\{x_n\}$收敛到v，即得结果.

11. 证明以下三个命题等价:

(1) E是疏朗集.

(2) $\overline{E}$不含任何邻域.

(3) $(\overline{E})^c$是稠密集.

证明： (1)→(2)：反证法

假设存在$O(x,r) \subset \overline{E}$, 按闭包的等价定义,

$O(x,r)$中任意点的任意邻域中都含有E中的点,

即$O(x,r)$中找不到子邻域与E不交

与疏朗集的定义矛盾. 故$\overline{E}$不含任何邻域

(2)→ (3)：由假设,

对$\forall x, \forall \delta > 0$, 有$O(x,\delta) \not\subset \overline{E}$,

从而$O(x,\delta) \cap (\overline{E})^c \neq \emptyset$,

即任一点的任一邻域中都有$(\overline{E})^c$中的点

也即$(\overline{E})^c$是稠密集.

(3)→(1)：反证法 若E不是疏朗集,

则$\exists O(x,\delta)$，使$O(x,\delta)$中没有子邻域与E不交.

即对$\forall O(y,r) \subset O(x,\delta)$都有,$O(y,r) \cap E \neq \emptyset$,

由r的任意小性知道$y \in \overline{E}$,

再由y的任意性知道$O(y,r) \subset \overline{E}$,

由此知道$(\overline{E})^c$不是稠密的. 矛盾。

疏朗集的余集是稠密的,

但稠密集的余集不一定是疏朗的,

如Q.

12. 设$E \subset R^n$，证明：

E是疏朗集$\Leftrightarrow$任一闭区间中均有子闭区间与E不相交.

证明：

因为任一闭区间中必含开区间，

而任一开区间中也必含闭区间.

而任意邻域中必含开区间，

反之，任意开区间中也必有邻域。

再由疏朗的定义即得。

中國海洋大學

证明：由第11题知，

若E是疏朗集，则$(\overline{E})^c$是稠密集.

而由于$E \subset \overline{E}$，故$(\overline{E})^c \subset E^c$，

从而由$(\overline{E})^c$是稠密集得到E^c是稠密的.

反例：Q和Q^c都是稠密集.

14 构造反例说明：

非稠密集未必是疏朗集，

非疏朗集未必是稠密集.

反例：$[0,1]$

15. 证明：R^1中的非空闭区间不能表示成可数个疏朗集的并.

证明：反证法. 若否，设

$$[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

其中$\{E_n\}$都是疏朗集.

因E_1疏朗，故存在$[a_1,b_1]\subset[a,b]$，使

$$0<|b_1-a_1|<1，且[a_1,b_1]\cap E_1=\emptyset;$$

同样，因E_2疏朗，存在$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使

$$0<|b_2-a_2|<\frac{1}{2}，且[a_2,b_2]\cap E_2=\emptyset;$$

一直下去，得到一列闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，使得

$$|b_n-a_n|<\frac{1}{n}，[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]，且[a_n,b_n]\cap E_n=\emptyset.$$

由数学分析中的闭区间套定理，闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$有唯一的公共点$x\in[a,b]$

再由闭区间列的选择，知$x\notin E_n(\forall n)$，

这与 $x\in[a,b]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$矛盾. 得到证明。

证明：令$E_k = E \cap O(0,k)$，则$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，且$\{E_k\}$是有界的孤立集列，.

问题转为证明：有界的孤立集E是至多可数集.

任取$x \in E$，由孤立性，存在$\delta(x) > 0$使得

$$O(x,\delta(x)) \cap E = \{x\}. \qquad (*)$$

得到满足（*）式开球族$\{O(x,\delta(x)): x \in E\} = K$.

明显的，E和开球族K对等.

令K_n是K中半径大于$\frac{1}{n}$的球的全体. 则$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$，

若能证明每个K_n都是有限集，就得到K是至多可数集，从而E是至多可数集.

下证明：K_n都是有限集.

注意到K_n中每个球的半径大于$\frac{1}{n}$，且每个球的球心不在其他的球中（由（*）式），

这表明各个球心之间的距离大于$\frac{1}{n}$，所以其球心构成的序列没有收敛子列.

另一方面，这些球心是一致有界的.

再结合有界的无限集必有收敛的子列这一命题，知K_n中只能有有限个球. 命题得证

证明： **法二** 任取$x\in E$，由孤立性，存在$\delta(x)>0$，使得

$$O(x,\delta(x))\cap E=\{x\}. \qquad (*)$$

取开球族

$$K=\left\{O\left(x,\frac{\delta(x)}{3}\right):x\in E\right\}$$

其中$\delta(x)$满足（*）式. 明显的，E和K对等.

来说明K中的球互不交。若K中的球$O\left(x,\frac{\delta(x)}{3}\right)$和 $O\left(y,\frac{\delta(y)}{3}\right)$有共有元$z$,

注意到$\delta(x)$和$\delta(y)$的取法，及$x,y\in E$, 知

$$\delta(x)\le\rho(x,y),\quad \delta(y)\le\rho(x,y)$$

所以由三角不等式

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z)\le\frac{\delta(x)}{3}+\frac{\delta(y)}{3}\le\frac{2}{3}\rho(x,y)$$

所以$\rho(x,y)=0$, 即得 $x=y$。

因此，K中的球互不交，因而K中有至多可数个球，E就是至多可数集。

17. 设$E \subset R^n$，证明$\overline{E}$是R^n中包含E的最小闭集.

证明： 当然，$\overline{E}$是包含E的闭集.

任取闭集F，且$E \subset F$.

来证：

$$\overline{E} \subset F.$$

任取$x_0 \in \overline{E}$，则存在E中的点列$\{x_n\}$收敛到x_0.

而$E \subset F$，所以点列$\{x_n\}$含于F中且收敛到x_0，

这表明$x_0 \in \overline{F}$.

又F是闭集，所以$\overline{F} = F$，即有$x_0 \in F$.

再由$x_0 \in \overline{E}$的任意性知$\overline{E} \subset F$，

即$\overline{E}$是包含E的最小闭集.

18. 设$f(x)$是R^n上的实值连续函数. 证明：对任意的实数a，集合$\{x:f(x)>a\}$是开集，集合$\{x:f(x)\geq a\}$是闭集.

证明：（1）任取$\{x:f(x)>a\}$中的点x_0，则

$$f(x_0)>a.$$

由连续函数的性质（保号性）知：

$\exists\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$f(x)>a,$$

即

$$O(x_0,\delta)\subset\{x:f(x)>a\},$$

也就证明了x_0是$\{x:f(x)>a\}$的内点.

由x_0的任意性知$\{x:f(x)>a\}$是开集.

（2）证明$E=\{x:f(x)\geq a\}$是闭集.

法一. 类似于（1），知$\{x:f(x)<a\}$是开集.

由于开集的余集是闭集，所以

$$\{x:f(x)\geq a\}=\{x:f(x)<a\}^c$$

是闭集.

法二. 直接证. 任取$x_0\in E'$，则存在点列$\{x_n\}\subset E$，使得

$$lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

由函数的连续性知

$$lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

又$f(x_n)\geq a(\forall n)$，结合连续函数的保号性，必有

$$f(x_0)\geq a,$$

即$x_0\in E$.

由$x_0\in E'$的任意性得到$E'\subset E$，也即E是闭集.

证明：设$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，其中$\{E_n\}$是一列稠密的开集.

反证法. 若E不是稠密集，

则存在某个邻域$O(x_0,\delta)$与E不相交，这时必有闭区间

$$I=[x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2}]\subset E^c. \qquad (1)$$

而

$$E^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}{E_n}^c, \qquad (2)$$

这里$\{{E_n}^c\}$是一列疏朗集(因为稠密开集的余集是疏朗的).

$\{{E_n}^c\cap I\}$也是一列疏朗集（疏朗集的子集当然是疏朗的）

再由（1），（2）两式得到

$$I=I\cap E^c=I\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}{E_n}^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}(I\cap{E_n}^c),$$

这表明非空闭区间I可以表示成一列疏朗集$\{{E_n}^c\cap I\}$的并，

与第15题矛盾. 所以E是稠密集

证明： 反证法. 若E^c不是疏朗集，

由疏朗集的等价条件（第11题）

知存在邻域$O(x_0,\delta)\subset\overline{E^c}$.

又E是开集，所以E^c是闭集，故

$$\overline{E^c}=E^c.$$

结合起来有

$$O(x_0,\delta)\subset E^c,$$

这表明

$$O(x_0,\delta)\cap E=\emptyset,$$

与E是稠密集矛盾.

证明： 设$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，其中$\{E_n\}$是$R^n$中一列稠密的开集.

只须证明任意邻域J中有E中的点.

因E_1是稠密开集，故存在$x_1\in J\cap E_1$，及$0<r_1<\frac{1}{2}$, 使

$$O(x_1,r_1)\subset\bar{O}(x_1,r_1)\subset J\cap E_1;$$

同样，因E_2是稠密开集，故存在$x_2\in(O(x_1,r_1))\cap E_2$，及$0<r_2<\frac{1}{2^2}$, 使

$$O(x_2,r_2)\subset\bar{O}(x_2,r_2)\subset(O(x_1,r_1))\cap E_2;$$

一直下去，得到一列单减的闭球套$\{\bar{O}(x_n,r_n)]\}$，使得

$$0<r_n<\frac{1}{2^n},\quad O(x_{n+1},r_{n+1})\subset\bar{O}(x_{n+1},r_{n+1})\subset(O(x_n,r_n))\cap E_n.$$

由闭球套定理，闭球套$\{\bar{O}(x_n,r_n)]\}$有唯一的公共点x，且x也是$\{E_n\}$的公共点，故$x\in E$

当然，有$x\in J$，因此任意的邻域任意邻域J中都有E中的点，E是稠密集。

20.设$f(x)$是R^1上的实函数. 令

$$\omega(x)=lim_{\delta\to0}\left[sup_{|y-x|<\delta}f(y)-inf_{|y-x|<\delta}f(y)\right].$$

证明：（1）对任意的$\varepsilon>0$，集合$\{x:\omega(x)\ge\varepsilon\}$是闭集.

（2）$f(x)$的不连续点的全体成一F_σ集.

证明：$\omega(x)$是$f(x)$在x处的振幅，且

$$\omega(x)=lim_{\delta\to0}sup_{y',y''\in O(x,\delta)}(f(y')-f(y'')),$$

（1）等价于证明$E=\{x:\omega(x)<\varepsilon\}$是开集.

任取$x_0\in E$，即$\omega(x_0)<\varepsilon$，来证x_0是E的内点。

由极限的性质，存在$\delta>0$，使得

$$sup_{y',y''\in O(x_0,\delta)}(f(y')-f(y''))<\varepsilon.$$

任取$x\in O(x_0,\delta)$，则存在$\delta_1>0$，使得

$$O(x,\delta_1)\subset O(x_0,\delta).$$

显然有

$$sup_{y',y''\in O(x,\delta_1)}(f(y')-f(y''))$$
$$\le sup_{y',y''\in O(x_0,\delta)}(f(y')-f(y''))<\varepsilon.$$

这表明$\omega(x)<\varepsilon$，即$x\in E$， 故$O(x_0,\delta)\subset E$，

即x_0是E的内点，得证.

（2）. 注意到连续点的振幅是零，

不连续点的振幅大于零.

设不连续点的全体是K. 令

$$K_n=\left\{x\in R^1:\omega(x)\ge\frac{1}{n}\right\}.$$

则$\{K_n\}$是闭集列，且

$$K=\cup_{n=1}^{\infty}K_n,$$

即K是F_σ集.

21. 证明：[0,1]中无理数的全体不是F_σ集

证明： 反证法. 若$[0,1]\backslash Q$是F_σ集，则

$$[0,1]\backslash Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中$\{E_n\}$是[0,1]中的闭集列.

因为每个E_n都是闭集且都不含有理数，所以它必是疏朗集

（因若不疏朗，则E_n中必有邻域，而任意邻域中都有有理数）.

而[0,1]中有理数的全体$Q\cap[0,1]$是可数集，设

$$Q\cap[0,1]=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\dots\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}.$$

单点集列$\{r_n\}$当然是疏朗集列. 结合起来，有

$$[0,1]=([0,1]\backslash Q)\cup([0,1]\cap Q)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\right),$$

等式的右边都是疏朗集，

故上式表明闭区间[0,1]可表示成一列疏朗集的并，与第15题矛盾.

22.证明：定义在[0,1]上具有性质："在有理点处连续，在无理点处不连续"的函数不存在.

证明：由20题，断点的全体是F_σ集.

由21题，无理数的全体不是F_σ集。

所以，不存在在有理点连续，无理点不连续的函数。

23.（Lindelof定理）

设$E \subset R^n$，证明E的任意开覆盖必有至多可数的子覆盖.

证明：设$\{E_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$是$E$的任一开覆盖.

任取E中的点x，必有某个开集E_α，$\alpha \in \Lambda$，使得$x \in E_\alpha$.

则存在有理开区间I_x，使得

$$x \in I_x \subset E_\alpha \qquad (*)$$

就得到E的有理开区间族覆盖$\{I_x : x \in E\}$（称为$\{E_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$的加细开覆盖），

其中I_x对某个E_α满足（*）式.

因为有理开区间的全体是可数集，

所以$\{I_x : x \in E\}$作为集合来看是至多可数集，记为$\{I_n\}$，则$E \subset \bigcup_n I_n$。

对I_n，取满足（*）式的相应E_α记为E_n，

这时$\{E_n\}$是至多可数个，且覆盖E.

证明： 反证法. 设E是有界的无限集.

若E没有极限点，所以它是有界闭集，还是孤立集.

由孤立性，对任意的$x \in E$，存在$\delta(x) > 0$使得

$$O(x,\delta(x)) \cap E = \{x\} \quad (*)$$

这样，得到满足（*）式的开球族$\{O(x,\delta(x)) : x \in E\}$，且覆盖$E$.

因E是有界闭集，由Borel有限覆盖定理，存在有限的子覆盖，记为

$$\{O(x_i) : i = 1, \cdots, k\}.$$

即有

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} O(x_i),$$

又E是无限集，所以至少存在一个$O(x_i)$含有E中的多个点，

这与（*）式矛盾. 所以，必有极限点。

25. 设$E \subset R^n$是G_δ集，且E含于开集I之中，则E可表为一列含于I的递减开集

证明： 设存在$\{E_n\}$是开集列，使得

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n,$$

取$F_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$，

则$\{F_n\}$是递减的开集列（因有限个开集的交是开集），且

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

又I是开集，故$\{F_n \cap I\}$是含于I中的递减开集列.

结合$E \subset I$，得

$$E = E \cap I = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cap I = \bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n \cap I).$$

$\{F_n \cap I\}$为所求.

26. 设$\{f_n(x)\}$为R^n上的连续函数列. 证明：点集

$$E=\{x:\underline{lim}\, f_n(x)>0\}$$

是F_σ集.

证明：注意到对任意的a，

$$\{x:f_n(x)\geq a\}=[f_n\geq a]$$

都是闭集（第18题）.

而

$$E=\{x:\underline{lim}\, f_n(x)>0\}=\cup_{k=1}^{\infty}\cup_{N=1}^{\infty}\cap_{n=N}^{\infty}\left[f_n\geq\frac{1}{k}\right].$$

又$\cap_{n=N}^{\infty}\left[f_n\geq\frac{1}{k}\right]$是闭集（任意多个闭集的交还是闭集），

结合上式表明E为一F_σ集.

27. 设G为Cantor开集，求G'.

解：由Cantor集是疏朗的，可得$G' = [0,1]$

证明：设A是非空的既开又闭集.

一方面，因A是开集，所以必有构成区间，

不妨设(a,b)是A的一个构成区间.

若a有限, 由构成区间的定义，则

$$a \notin A.$$

另一方面，由A是闭集得

$$a \in [a,b] = (a,b)' \subset A' \subset A,$$

得到矛盾.

所以$a = -\infty$，同理得$b = +\infty$，因此$A = R^1$.

所以R^1中既开又闭的集或是空集或是R^1.

实际上：R^n中既开又闭的集或是空集或是R^n.

证明: 反证法.

设$A \subset R^n$是既开又闭的非空又非R^n的集合.

则必存在$x \in R^n$，但$x \notin A$.

一方面因为A是非空闭集, 点到闭集的距离可达。所以存在$y \in A$, 使得

$$\rho(x, A) = \rho(x, y) > 0.$$

另一方面, 因为A又是开集, 所以y是内点,

而取得非零距离的点绝不能是内点（只能在边界上达到非零的距离），

就导出了矛盾, 所以R^n中既开又闭的集或是空集或是R^n.

29. R^1中开集（闭集）全体所成之集的势为c.

证明： 因为开集的余集是闭集、闭集的余集是开集,

且不同集合的余集是不同的,

所以开集全体的势和闭集全体的势是一样的.

设开集的全体是F. 由于全体开区间$F_1=\{(a,b):a<b\}$的势是c,

所以F的势不小于c.

任取开集$A\in F$, 由开集的构造知道

$$A=\bigcup(a_i,b_i)\ (\text{是至多可数个并}).$$

作对应

$$\phi(A)=\{a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;\cdots\}$$

（如果是有限并，后面的点全用0代替），

则该对应是从F到R^∞一个单射（因不同开集的构造不同），

就有F的势不大于R^∞的势c.

综上所述，直线上开集的全体的势是c. 得证。

实际上：R^n中开集（闭集）全体所成之集的势为c.

证明： 设R^n中开集的全体是F，易知F的势不小于c.

由R^n中开集的构造，

每个开集$A \in F$都可表示成可数多个互不交的左闭右开的有理方区间的并，

且若开集不同，它们的有理表示也不相同.

又知道，有理方区间的全体K是可数集，

所以K的子集的全体所成之集2^K的势是$2^a = c$.

让开集A和它的有理表示$\{I_n(A): n \in N\}$对应，则该对应是从F到2^K的单射，

这表明F的势不超过c.

30. 证明：R^n中的每个开集或闭集均为F_σ集和G_δ集.

证明：设E是闭集，它当然是F_σ集（取闭集列全是E自身即可）.

令$E_n=\left\{x:\rho(x,E)<\frac{1}{n}\right\}$,

则$\{E_n\}$是包含E的开集列（第32题）. 实际上，有

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n. \qquad (*)$$

显然，左是右的子集.

任取右边的元x，则$x\in E_n(\forall n)$，即$\rho(x,E)<\frac{1}{n}(\forall n)$，

这表明$\rho(x,E)=0$，因此$x\in\overline{E}=E$，说明右边是左边的子集.

因此（*）式成立，也表明闭集E是G_δ集.

由对偶性，得到开集既是F_σ集也是G_δ集.

31. 非空集合$F \subset R^n$具有性质：

$$\forall x \in R^n, \exists y^* \in F \text{使} \rho(x, y^*) = \rho(x, F),$$

证明F是闭集.

证明： 任取$x \in F'$，则存在$\{x_n\} \subset F$，使$|x - x_n| \to 0$，故

$$0 \le \rho(x, F) \le |x - x_n| \to 0.$$

因此

$$\rho(x, F) = 0.$$

由题设，存在$y^* \in F$使得

$$\rho(x, y^*) = \rho(x, F) = 0,$$

故$x = y^* \in F$.

由$x \in F'$的任意性得$F' \subset F$，即F是闭集.

由于点到闭集的距离可达, 该性质是F成为闭集的充要条件.

32. 设集合$E \subset R^n, d > 0$，点集U为

$$U = \{x : \rho(x, E) < d\}.$$

证明$E \subset U$且U是开集.

证明：$E \subset U$是显然的.

法一. 由第34题，

$$f(x) = \rho(x, E)$$

是R^n上的连续函数，而

$$U = \{x : f(x) < d\},$$

再由第18题知U是开集.

法二. 直接证U中的点全是内点.

任取$x \in U$，则

$$\rho(x, E) = r < d.$$

取正数$\delta < d - r$.

当$y \in R^n$满足$\rho(x, y) < \delta$时，

根据集合距离的不等式得

$$\rho(y, E) \le \rho(x, E) + \rho(x, y) < r + \delta < d,$$

即表明$O(x, \delta) \subset U$，故x是U的内点. 得证。

33. 设$E,F\subset R^n$是不相交的闭集，证明：存在互不相交的开集U,V，使得$E\subset U,F\subset V$.

证明：法一. 由第35题，存在R^n上的连续函数$f(x)$使得

$$E=\{x:f(x)=0\}且F=\{x:f(x)=1\}.$$

则

$$U=\left\{x:f(x)<\frac{1}{4}\right\},V=\left\{x:f(x)>\frac{1}{2}\right\}$$

都是开集（由第18题）且不相交，同时还满足

$$E\subset U,F\subset V.$$

33. 设$E,F\subset R^n$是不相交的闭集，证明：存在互不相交的开集U,V，使得$E\subset U, F\subset V$.

法二. 因为E,F是互不相交的闭集，所以E^c,F^c是开集，且

$$E\subset F^c, F\subset E^c.$$

任取$x\in E\subset F^c$，因F^c是开集，故存在邻域$O(x)=O(x,\delta(x))$，使得

$$x\in O(x)\subset\overline{O(x)}\subset F^c，即\ \overline{O(x)}\cap F=\emptyset \qquad (1)$$

这样就得到E开覆盖$\{O(x): x\in E\}$，且满足（1）.

又集合E的任一开覆盖一定有至多可数的子覆盖（第23题），

所以E可以用至多可数个开球$O(x)$来覆盖，仍记为$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$. 即有

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n\text{且}\overline{O_n}\cap F=\emptyset\ (\forall n). \qquad (2)$$

同理，存在可数个开球$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$使得

$$F\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\text{且}\overline{B_n}\cap E=\emptyset\ (\forall n) \qquad (3)$$

E，F可以分别用至多可数个开球$\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$来覆盖，且

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n，且\overline{O_n} \cap F = \emptyset \ (\forall n). \tag{2}$$

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n，且\overline{B_n} \cap E = \emptyset \ (\forall n) \tag{3}$$

令

$$U_n = O_n \backslash \overline{\bigcup_{k=1}^{n} B_k} = O_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_k},$$
$$V_n = B_n \backslash \overline{\bigcup_{k=1}^{n} O_k} = B_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n} \overline{O_k}.$$

则$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}, \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$均是开集列（都是开集减闭集），且

$$U_n \cap V_m = \emptyset, \quad (\forall n, m).$$

还由（2）（3）式知$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}, \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$还分别是$E, F$的开覆盖

（因由构造，O_n中去掉的都不是E中的点）.

取$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$，则它们即为所求.

34. 设$E \subset R^n, E \neq \emptyset$，证明$\rho(x,E)$作为$x$的函数在$R^n$上是一致连续的.

证明： 命题直接由不等式

$$|\rho(x,E)-\rho(y,E)| \leq |x-y|$$

得到.

35. 设E,F为R^n中互不相交的非空闭集，证明存在R^n上的连续函数$f(x)$使得

(1). $0 \le f(x) \le 1, \forall x \in R^n$;

(2). $E=\{x: f(x)=0\}$且$F=\{x: f(x)=1\}$.

证明： 实际上

$$f(x)=\frac{\rho(x,E)}{\rho(x,E)+\rho(x,F)}$$

满足要求.

因为，E是闭集，所以

$$\rho(x,E)=0 \Leftrightarrow x \in E.$$

36. 设$E \subset R^n, x_0 \in R^n$. 令$E+\{x_0\}=\{x+x_0 : x \in E\}$,

即$E+\{x_0\}$是集合E的平移，证明：

若E是开集，则$E+\{x_0\}$也是开集.

证明：注意到距离是具有平移不变性的，

所以因为开球平移后还是开球.