习题一 答案

证明

1. $A\backslash B = A \cap B^c$.　　2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明1：

$x \in A\backslash B$

$\Leftrightarrow x \in A$,且$x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$,且$x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

证明 2：

$x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$,且$x \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$,同时，$x \in B$或$x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A$且$x \in B$，或$x \in A$且$x \in C$

$\Leftrightarrow x \in\in (A \cap B)$,或$x \in (A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

证明

3. $A \cup (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A \cup B_\lambda)$. 4. $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}((A_\lambda)^c)$

3 证明：

$$x \in A \cup \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in A, \text{或} x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in A, \text{或对} \forall \lambda \in \Lambda, x \in B_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \text{对} \forall \lambda \in \Lambda, x \in (A \cup B_\lambda)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A \cup B_\lambda)$$

4. 证明：

$$x \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \Lambda, \text{使得} x \notin A_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \Lambda, \text{使得} x \in (A_\lambda)^c$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} ((A_\lambda)^c)$$

证明

$$5.\ (A\cup B)\backslash B = A\backslash B. \qquad 6.\ A\cap B = A\backslash B^c = B\backslash A^c$$

5 证明:

$$(A\cup B)\backslash B = (A\cup B)\cap B^c$$

$$= (A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$$

$$= (A\cap B^c)\cup\emptyset = A\cap B^c = A\backslash B$$

6. 证明 由题1

$$A\backslash B^c = A\cap B = B\cap A = B\backslash A^c.$$

证明

7 $(A\backslash B) \cup B = A \cup B$

$(A\backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

8. $(A\backslash B) \cup B = (A \cup B)\backslash B \Leftrightarrow B = \emptyset$

7 证明：

$$(A\backslash B) \cup B = (A \cap B^c) \cup B$$

$$= (A \cup B) \cap (B^c \cup B)$$

$$= (A \cup B) \cap S = A \cup B$$

第二的等式由上式和吸收性得到

8. 证明 由题5和题7，即证

$$A \cup B = A\backslash B \Leftrightarrow B = \emptyset$$

9 $E[f > a] = \cup_{k=1}^{\infty} E[f \ge a + \frac{1}{k}]$; 10 $E[f < a] = \cup_{k=1}^{\infty} E[f \le a - \frac{1}{k}]$;

9 证明：

任取$x \in E[f > a]$

$\Rightarrow f(x) > a$，即$f(x) - a > 0$

$\Rightarrow$ 存在充分大的$k \in N$, 使得

$$f(x) - a \ge \frac{1}{k} > 0$$

$\Rightarrow$ 存在充分大的$k \in N$, 使得

$$x \in E\left[f \ge a + \frac{1}{k}\right]$$

$\Rightarrow x \in \cup_{k=1}^{\infty} E[f \ge a + \frac{1}{k}]$

因此，左端是右端的子集，

而右端每个集合都是左端的子集是明显的。

得证.

9, 10中右边“$\ge$”换成“$>$”也对

证明：任取$x \in E[f < a]$

$\Rightarrow f(x) < a$，即$f(x) - a < 0$

$\Rightarrow$ 存在充分大的$k \in N$, 使得

$$f(x) - a \le -\frac{1}{k} < 0$$

$\Rightarrow$ 存在充分大的$k \in N$, 使得

$$x \in \left[f \le a - \frac{1}{k}\right]$$

$\Rightarrow x \in \cup_{k=1}^{\infty} E[f \ge a + \frac{1}{k}]$

因此，左端是右端的子集，

而右端每个集合都是左端的子集是明显的。

得证.

11 $E[f \le a] = \cap_{k=1}^{\infty} E\left[f < a + \frac{1}{k}\right]$;

证明： 任取左边的元素x，则$f(x) \le a$，

当然对任意的k，有$f(x) < a + \frac{1}{k}$，即，

$$x \in E\left[f < a + \frac{1}{k}\right] (\forall k).$$

11 中右边“<”换成“≤”也对

另法：第9题两边取余，用对偶定理

因此，该x含于右边. 得到左是右的子集.

再任取右边的元素x，则$x \in E\left[f < a + \frac{1}{k}\right] (\forall k)$，即

$$f(x) < a + \frac{1}{k} \ (\forall k).$$

让$k \to \infty$，得到$f(x) \le a$.

因此，该x含于左边. 得到右是左的子集.

综上，左等于右.

12 设实函数列$\{f_n(x)\}$在E上定义，又设$h(x) = inf_{n\geq 1}\{f_n(x)\}$. 证明对$\forall a \in R$，成立

$$E[h < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a].$$

证明：因$h(x) \leq f_n(x)(\forall n)$，

故当$f_n(x) < a$时，必有$h(x) < a$，这表明

$$E[f_n < a] \subset E[h < a](\forall n),$$

因此

$$E[h < a] \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a].$$

另一方面，任取$x \in E[h < a]$，即$h(x) < a$

由下极限的定义，知存在n，使$f_n(x) < a$

（若否，则对任意的n，有$f_n(x) \geq a$，

这表明$inf\{f_n(x)\} = h(x) \geq a$，矛盾）.

当然有$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a]$，故

$$E[h < a] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a].$$

综上，左等于右.

13 实函数列$\{f_n(x)\}$在E上收敛到$f(x)$，证明:对任意的$\forall a \in R$，成立

$$E[f \le a] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E\left[f_n < a + \frac{1}{k}\right].$$

证明：任取左边的元素x，则$f(x) \le a$.

由于$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，

所以对任意的k，存在N，使得任意的$n \ge N$时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},$$

即有

$$f_n(x) < f(x) + \frac{1}{k} < a + \frac{1}{k}.$$

也即，对任意的$n \ge N$，恒有

$$x \in E\left[f_n < a + \frac{1}{k}\right],$$

所以，对任意的k，存在N，使得

$$x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} E\left[f_n < a + \frac{1}{k}\right].$$

这表明x是右边的元素，所以左是右的子集.

另一方面，

任取右边的元素x，

则对任意的k，存在N，使得当$n \ge N$时，有

$$f_n(x) < a + \frac{1}{k}.$$

让$n \to \infty$，得到

$$f(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) \le a + \frac{1}{k}, (\forall k).$$

再由k的任意性，让$k \to \infty$，得到

$$f(x) \le a.$$

这表明x是左边的元素，所以右是左的子集.

综上，左右相等.

注意 过程中，取极限时，一定是先n后k

14 若集列$\{A_n\}$单减，则

$$\underline{lim}A_n=\overline{lim}A_n=\cap_{n=1}^{\infty}A_n..$$

证明：

因为$\{A_n\}$单减，所以，对任意的n

$$\cup_{m=n}^{\infty}A_m=A_n.$$

得到

$$\overline{lim}_{n\to\infty}A_n=\cap_{n=1}^{\infty}\cup_{m=n}^{\infty}A_m=$$

$$\cap_{n=1}^{\infty}A_n,$$

也因为$\{A_n\}$单减，所以，对任意的n

$$\cap_{m=n}^{\infty}A_m=\cap_{m=1}^{\infty}A_m.$$

得到

$$\underline{lim}_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$$

$$=\cap_{m=1}^{\infty}A_m=\cap_{n=1}^{\infty}A_n$$

因此，

$$\underline{lim}A_n=\overline{lim}A_n=\cap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

$$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)$$

证明 (a) 若$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=0$，显有

$$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)\le\underline{\lim}\chi_{A_n}(x);$$

(b) 若$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=1$，

由特征函数的定义知$x\in\underline{\lim}A_n$.

再由下限集的性质知存在N，使

$$x\in A_n,\ (\forall n>N),$$

从而对$\forall n>N$, 有

$$\chi_{A_n}(x)=1,$$

故

$$\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)=1.$$

此时

$$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=\underline{\lim}\chi_{A_n}(x).$$

综合(a)(b)，有

$$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)\le\underline{\lim}\chi_{A_n}(x).$$

另一方面：

(1) 若$\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)=0$，显有

$$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)\ge\underline{\lim}\chi_{A_n}(x);$$

(2) 若$\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)=1$，又因为

$$\chi_{A_n}(x)\le 1\ (\forall n),$$

故 $\lim\chi_{A_n}(x)=1$.

因此存在N，使得

$$\chi_{A_n}(x)=1\ (\forall n>N).$$

由特征函数的定义知$x\in A_n(\forall n>N)$，

再由下限集的性质知$x\in\underline{\lim}A_n$.

因此，$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=1$，

得到$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)$.

综合(1)(2), 得 $\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)\ge\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)$.

综合有$\chi_{\underline{\lim}A_n}(x)=\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)$.

15 证明

$$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = \underline{lim}\chi_{A_n}(x)$$

另法 元素x只能有两种情况：(a) $x \in \underline{lim}A_n$, (b)$x \notin \underline{lim}A_n$

(a) 若$x \in \underline{lim}A_n$，

此时，$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = 1$。

因$x \in \underline{lim}A_n$，由下限集的定义，知存在N，使

$$x \in A_n,\ (\forall n > N),$$

从而对$\forall n > N$, 有

$$\chi_{A_n}(x) = 1,$$

故

$$\underline{lim}\chi_{A_n}(x) = 1.$$

所以

$$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = \underline{lim}\chi_{A_n}(x) = 1;$$

(b) 若$x \notin \underline{lim}A_n$

此时，$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = 0$。

因$x \notin \underline{lim}A_n$，由下限集的性质，必存在无穷多个$A_n$不含$x$.

再由特征函数的定义，必存在无穷多个n，使得

$$\chi_{A_n}(x) = 0$$

这样，只能

$$\underline{lim}\chi_{A_n}(x) = 0.$$

所以

$$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = \underline{lim}\chi_{A_n}(x) = 0;$$

综合(a)(b)，有

$$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = \underline{lim}\chi_{A_n}(x).$$

证明

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$$

证明 (a) 若$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = 0$，显有

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) \le \overline{lim}\chi_{A_n}(x);$$

(b) 若$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = 1$，

由特征函数的定义，知$x \in \overline{lim}A_n$.

再由上限集的性质知，存在无穷多个A_n含x，

从而存在无穷多个n，使得$\chi_{A_n}(x) = 1$，

故

$$\overline{lim}\chi_{A_n} \ge 1.$$

此时

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) \le \overline{lim}\chi_{A_n}(x);$$

综合(a)(b)，有

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) \le \overline{lim}\chi_{A_n}(x)。$$

另一方面：

(1) 若$\overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 0$,显有

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) \ge \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$$

(2) 若$\overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 1$，

由上极限的定义知，存在无穷多个n，使得

$$\chi_{A_n}(x) = 1$$

由特征函数的定义，必存在无穷多个A_n含x，

所以，x是上限集$\overline{lim}A_n$中的元，故

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = 1$$

这时，$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$

综合(1)(2), 得$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) \ge \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$.

综合有，$\chi_{\underline{lim}A_n}(x) = \underline{lim}\chi_{A_n}(x)$.

证明

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$$

另法 **元素x只能有两种情况：(a)** $x \in \overline{lim}A_n$, **(b)** $x \notin \overline{lim}A_n$.

(a) 若$x \in \overline{lim}A_n$，

此时，$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = 1$。

因$x \in \overline{lim}\chi_{A_n}$，由上限集的定义，必存在无穷多个$A_n$含$x$.

再由特征函数的定义，故必存在无穷多个n，使得

$$\chi_{A_n}(x) = 1$$

这样，就有

$$\overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 1.$$

从而

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 1$$

(b) 若$x \notin \overline{lim}A_n$

此时，$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = 0$ 。

因$x \notin \overline{lim}A_n$，由上限集的性质，只能有有限个$A_n$含$x$.

故存在N，使

$$x \notin A_n，(\forall n > N)，$$

从而对$\forall n > N$, 有

$$\chi_{A_n}(x) = 0，$$

这样，只能

$$\overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 0$$

所以

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x) = 0$$

综合(a)(b)，有

$$\chi_{\overline{lim}A_n}(x) = \overline{lim}\chi_{A_n}(x)$$

16. 证明 夹挤定理和Bernstein定理等价

证明： **必要性：** 由假设，知

存在A到$B_1 \subset B$上的双射f，B到$A_1 \subset A$上的双射g.

令$g(f(A)) = A_2$，则A_2与A对等（因为f,g是单射）.

实际上，$A_2 = g(B_1)$， $A_1 = g(B)$.

又因为$B_1 \subset B$,，因此

$$A_2 \subset A_1 \subset A.$$

由夹挤定理，知A_2, A_1, A三者对等.

又A_1与B对等，根据对等的传递性，

得到A与B对等，故Bernstein定理成立.

充分性： 设$A \subset B \subset C$，且$A \sim C$.

一方面，当然，$B \sim B \subset C$，即B和C的某子集对等；

另一方面，$C \sim A \subset B$，即C和B的某子集对等.

由Bernstein定理，知

$$B \sim C.$$

又$A \sim C$，根据对等的传递性，得到

$$A \sim B \sim C.$$

即，夹挤定理成立。

用Bernstein定理时，实际只需说明：

存在从A和B的单射，

也存在从B和A的单射。

17.若$A\overset{\phi}{\sim}B, A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1\overset{\phi}{\sim}B_1$, 则

$$A\backslash A_1 \overset{\phi}{\sim} B\backslash B_1.$$

并以反例说明，下述命题一般不成立：

$$A \sim B, A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B_1, \text{则} A\backslash A_1 \sim B\backslash B_1$$

证明：由题设，知

$$\phi(A) = B，\phi(A_1) = B_1.$$

而$\mathrm{A} = A_1 \cup (A\backslash A_1), \mathrm{B} = B_1 \cup (B\backslash B_1)$, 且右边都是不交的并。

因为 ϕ是从A 到B的单射，必有$\left(\phi(A_1)\right) \cap \left(\phi(A\backslash A_1)\right) = \emptyset$, 又$\phi(A_1) = B_1$.

所以$\left(\phi(A\backslash A_1)\right) \subset (B\backslash B_1)$, 故 ϕ是从$A\backslash A_1$到$B\backslash B_1$的单射。

再由于ϕ是从A到B的双射性，所以$B\backslash B_1$中任意的b在A中有且仅有一个原像a,

由于 $\phi(A_1) = B_1$, 所以$a \notin A_1$, 故$a \in A\backslash A_1$，

即$B\backslash B_1$中任意的元素在$A\backslash A_1$中都有原像.

因此， ϕ是从$A\backslash A_1$到$B\backslash B_1$的双射。

反例：$\mathrm{A} = N, A_1 = 2N;$
$\mathrm{B} = B_1 = N$

18. 设A为无限集，B为有限集，证明

$$A\backslash B \sim A.$$

证明： 因为A为无限集，B为有限集，

所以$A\backslash B$是无限集.

由$A \cap B \subset B$知，$A \cap B$是有限集. 而

$$A = (A\backslash B) \cup (A \cap B),$$

右边是一个无限集并上有限集，

不改变对等关系，所以

$$A\backslash B \sim A.$$

18. 设A为无限集，B为有限集，证明

$$A\backslash B \sim A.$$

直接证明：因为

$$A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$$

因为A为无限集，B为有限集，

所以 $A\backslash B$ 是无限集， $A\cap B$ 是有限集，且这两个集合不交。

转为证明：设P为无限集，K为有限集， $P\cap K=\emptyset$, 则

$$P\cup K\sim P.$$

证明：K为有限集，设

$$K=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$$

因 P 为无限集，所以在它里面必可取一列互不相同的元素，记它们为$a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+n},\ldots$, 令集合

$$P_1=\{a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+n},\ldots\}$$

当然， $P_1\cap K=\emptyset.$

$$P_1\cup K=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_{k+n},\ldots\}$$

易知，映射

$$f(a_m)=a_{m+k}, m=1,2,3,\ldots$$

实现从集合 $P_1\cup K$ 到 P_1 的双射，即该二集对等。

又

$$P=(P\backslash P_1)\cup P_1$$

$$P\cup K=(P\backslash P_1)\cup(P_1\cup K)$$

上两式右边两两不交。又

$$(P\backslash P_1)\sim(P\backslash P_1), P_1\sim(P_1\cup K),$$

因此

$$P\sim(P\cup K),$$

19. 设A为无限集，B为可数集，若$A\backslash B$为无限集，证明

$$A\backslash B \sim A.$$

并举反例说明“$A\backslash B$为无限集”这一条件不可去.

证明：类似18题

由B是可数集，及$A \cap B \subset B$，知$A \cap B$是至多可数集.

反例：$A = B = N$

因为

$$A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$$

因$A\backslash B$是无限集，所以右边是无限集并上至多可数集，

不改变对等关系，所以

$$A\backslash B \sim A.$$

20. 空间中坐标为有理数的点的全体K成一可数集.

证明： 显然

$$K=\{(a,b,c):a\,,b,c\in Q\}$$

$$=Q\times Q\times Q$$

是三个可数集的乘积，

由乘积定理，知K是可数集.

21. R^1中以互不相交的的开区间为元素的集合为至多可数集.

证明： 设该集合为K.

任取K中的开区间(a,b)，该开区间中必存在某个有理数$r_{ab} \in (a,b)$.

这样，可作映射

$$f: K \to Q,$$

使得

$$f((a,b)) = r_{ab}$$

由于K中的开区间是互不相交的，所以这一映射是单射. 因此

$$K \sim f(K) \subset Q,$$

即K和可数集Q的子集$f(K)$对等，

因此， K是一至多可数集.

22. R^1上单调函数$f(x)$的不连续点的全体为至多可数集.

证明： 不妨设函数$f(x)$单增，其断点全体记为$\boldsymbol{A}$.

任取断点$a \in A$.

由于函数单调，所以在a点的左极限$f^-(a)$和右极限$f^+(a)$都存在，且

$$f^-(a) < f^+(a).$$

让断点a对应于开区间$(f^-(a), f^+(a))$.

由于函数单增，所以不同断点所对应的开区间是不相交的,

因此，这个对应是单射。

而，互不交相交的开区间是至多可数个(第21题)

所以，断点是至多可数个.

23. 设A为无限集，证明必存在$A^* \subset A$，使$A^* \sim A$且$A \backslash A^*$为一可数集.

证明：因A为无限集，故A有可数的子集

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\}.$$

令

$$A_{11} = \{a_1, a_3, a_5, \cdots\},$$
$$A_{12} = \{a_2, a_4, a_6, \cdots\}.$$

取

$$A^* = A \backslash A_{11}$$

即可。

这是因为

$$A_{11}\text{为可数集，}$$

$$A^* \subset A\text{为无限集（因}A_{12} \subset A^*\text{）}$$

$$A = A^* \cup A_{11},$$

即A表示成无限集A^*和可数集A_{11}的并，因此

$$A^* \sim A.$$

24. 设A为可数集，证明A的所有有限子集的全体是可数集.

证明 (编号定理) 设$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. A的所有有限子集的全体为$\boldsymbol{K}$.

对$\forall B \in K$，元素按原顺序排列，设

$$B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}\},$$

令B与数组$(i_1, i_2, \ldots, i_m)$对应.

因为不同的集合的元素不完全相同，所以它们对应的数组也不同.

这样由编号定理知K为至多可数集.

又因所有的单元素集在K中，所以K是无限集，

因此K是可数集.

24. 设A为可数集，证明A的所有有限子集的全体是可数集.

证明 (乘积定理) A的所有有限子集的全体记为$\boldsymbol{K}$.

记 $\boldsymbol{K_n}$ 为A的只含$\boldsymbol{n}$个元素的集合的全体，则

$$\boldsymbol{K=\bigcup_{n=0}^{\infty}K_n}$$

因A为可数集，所以由乘积定理，$\boldsymbol{A^n(n\geq 1)}$均是可数集

明显的，$\boldsymbol{K_0}$中只含空集，是单元素集，

而$\boldsymbol{K_n\subset A^n}$，因此$\boldsymbol{K_n(n\geq 1)}$均是至多可数集。

因此，由至多可数集的性质，知 $\boldsymbol{K}$是至多可数集。

当然，由于单元素集全体$\boldsymbol{K_1}$是无限集，且在$\boldsymbol{K}$中，

因而， K是无限集，且是至多可数集，

因此K是可数集.

24. 设A为可数集，证明A的所有有限子集的全体是可数集.

证明（用二进小数） 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. A的所有有限子集的全体为$\boldsymbol{K}$.

对$\forall B\in K$，作从$\boldsymbol{K}$到二进位小数全体M的映射f为：

$$f(B)=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

其中, 当$a_n\in B$时，令$b_n=1$；当$a_n\notin B$时，令$b_n=0$.

因为不同的集合的元素不完全相同，所以该映射是单射.

且又因为B都是有限子集，所以$f(B)$都是有限位的二进小数。

也就是说，映射f实现了从$\boldsymbol{K}$到二进有限位小数全体(是可数集) 的单射。

所以， $\boldsymbol{K}$是至多可数集，它还是无限集，因而是可数集。

25. 设A为其长度不等于零的开区间所组成的不可数集.

证明：存在$\delta > 0$，使得A中有无限多个开区间的长度均大于δ.

证明　令A_n为A中长度不小于$\frac{1}{n}$的开区间的全体，则

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n .$$

如果右边的这可列个集中的每个集合都是有限集的话，

则它们的并集A会是至多可数集

而因为A为不可数集，所以右端至少有一个集合是无限集，

取相应的的长度为δ得到证明.

26. [0,1]中无理数的全体成一不可数集.

证明 反证法.

假设[0,1]中无理数的全体K是至多可数集，

而[0,1]中有理数的全体Q_0是可数集，

这样$K \cup Q_0 = [0,1]$是可数集（可数集和至多可数集的并是可数集）.

这与[0,1]是不可数集矛盾.

27. 整系数多项式的实根称为代数数，称非代数数的实数为超越数.

证明：代数数的全体成一可数集，进而证明超越数的存在.

证明 设代数数的全体是K.

再设Z_n是所有的n阶整系数多项式的全体，由乘积定理，知Z_n是可数集，

由于每个n阶整系数多项式至多有n个实根（是代数数），

所以，Z_n中的所有多项式对应的实根全体K_n是一个至多可数集。

明显的，

$$\boldsymbol{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{K}_n$$

即，$\boldsymbol{K}$表示为可数个至多可数集的并集，所以是至多可数集。

又因为所有的自然数都是代数数，因而代数的全体$\boldsymbol{K}$是无限集，进而是可数集。

仿照无理数全体是不可数集的方式，知超越数的全体是不可数集。

实际上，超越数的全体的势是$\boldsymbol{c}$.

（这是因为实数全体是超越数全体并代数数全体（可数集），

所以实数全体与超越数全体对等）

28. 证明$2^a = c$，其中a为可数基数，c为连续基数.

证明 即是证明可数集A的子集全体2^A的势是c.

设$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

对$\forall B \in 2^A$，作从2^A到二进位小数全体M的映射f为：

$$f(B) = 0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots,$$

其中, 当$a_n \in B$时，令$b_n = 1$；当$a_n \notin B$时，令$b_n = 0$.

因为不同的集合的元素不完全相同，所以该映射是单射.

上述映射还是满射，实际上，对任意的二进小数$0.d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$,

令$D = \{a_i: 若 d_i = 1, i = 1,2, \cdots\}$，则$D \in 2^A$，且

$$f(D) = 0.d_1 d_2 \cdots d_n \cdots.$$

因此，2^A和M对等，又M的势是c。因此，2^A的势是c.

29. [0,1]上连续函数的全体$C[0,1]$的基数是c.

证明 因常函数都是连续函数，故

$$\overline{\overline{C[0,1]}} \geq \overline{\overline{R}} = c.$$

设$Q_0 = Q \cap [0,1]$，则它是可数集. 不妨设

$$Q_0 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}.$$

对任意的$f \in C[0,1]$，让其对应于R^∞中的元

$$\{f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n), \ldots\},$$

则这个对应是从$C[0,1]$到R^∞的一个单射.

因此，$C[0,1]$和R^∞的某子集对等，故有

$$\overline{\overline{C[0,1]}} \leq \overline{\overline{R^\infty}} = c.$$

综上，$\overline{\overline{C[0,1]}} = c$.

命题：**连续函数由它在有理数上的值唯一决定**。

事实上，设f, g是两个连续函数，

且在有理点上的取值完全相同。

对任意的实数a，必存在有理数序列$\{r_i\}$, 使得

$$r_i \to a, (i \to \infty).$$

这样，利用连续性，得

$$f(a) = lim_{i\to\infty} f(r_i) = lim_{i\to\infty} g(r_i) = g(a),$$

也即

$$f \equiv g$$

30. $[0,1]$上单调函数的全体K的基数是c.

证明 因为对任意的实数a，$f(x)=ax$是单调函数，因此K的基数$\geq c$.

对任一单调函数$f(x)$，其断点的全体A是至多可数集（第22题的结论）.

且单调函数在每点处的左右极限都存在，因而所有的断点全是第一类断点。

对$f(x)\in K$，在点$a\in[0,1]$引入左、右跳跃度$f^*(a_-), f^*(a_+)$

$$f^*(a_-)=f(a)-f(a_-),$$

$$f^*(a_+)=f(a_+)-f(a)$$

其中$f(a_-), f(a_+)$分别是$f(x)$在a处的左右极限, 若a 是端点，只考虑单侧跳跃度。

再令，$f^*{}_a(x)=f^*(a_-)\chi_{[a,1]}(x)+f^*(a_+)\chi_{(a,1]}(x)$，

可以证明$f^*{}_a(x)$ 在$[0,1]$上只可能以a为断点，且它和f在a处的左右跳跃度是一样的，

这样，$f(x)-f^*{}_a(x)$ 必在a处连续。

对绝对收敛的级数$\sum_{i=1}^{\infty} c_i$，$\sum_{i=1}^{\infty} d_i$，及[0,1]中的可数集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\}$，作函数项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(c_i\chi_{[a_i,1]}(x)+d_i\chi_{(a_i,1]}(x)\right) \qquad (*)$$

则该函数项级数一致收敛，所以在[0,1]\A上连续，在a_i的左右跳跃度分别是c_i, d_i.

注意：如果A是至多可数集，仍然可以如上定义，不过这时把级数看作有限项即可。

由于级数的全体的基数是c,所以（*）形式的函数项级数全体的基数是c。

对$f(x)\in K$，它的断点集为$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\}$，A可以是有限集。

由于函数单调，所以左右跳跃度组成的级数$\sum_{i=1}^{\infty} f^*(a_{i-})$，$\sum_{i=1}^{\infty} f^*(a_{i+})$是绝对收敛的不变号级数，

这时函数

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(f^*(a_{i-})\chi_{[a_i,1]}(x)+f^*(a_{i+})\chi_{(a_i,1]}(x)\right)$$

必在在[0,1] 上单调，断点集也是A，且左右跳跃度和f一样。因此$f(x)-g(x)\in C[0,1]$

这说明单调函数必表成连续函数与形如（*）形式函数和的形式。后两者集合的基数都是c。

所以，K的基数不超过c。综合，K的基数是c。

31. [0,1]上实函数全体$R[0,1]$的基数是c.

证明　对任意的集合$A \subset [0,1]$，则其特征函数$\chi_A(x) \in R[0,1]$，并且不同集合的特征函数是不同的.

所以[0,1]的子集的全体$2^{[0,1]}$对等于$R[0,1]$的一个子集，从而

$$\overline{\overline{R[0,1]}} \geq \overline{\overline{2^{[0,1]}}} = 2^c.$$

另一方面，对任意实函数$f \in R[0,1]$，让其和集合

$$\{(x, f(x)) : x \in [0,1])\} \subset R^2$$

对应（该集合是函数的图像），当然这一对应是单射，

从而$R[0,1]$和R^2的某些子集构成的集合对等，也即

$$\overline{\overline{R[0,1]}} \leq \overline{\overline{2^{R^2}}} = 2^c.$$

综上，

$$\overline{\overline{R[0,1]}} = 2^c.$$

32. 设$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = c$，证明$\bar{\bar{A}}$和$\bar{\bar{B}}$中至少有一为$c$.

证明： 不妨设$A \cup B = R^2, A, B$不相交.

显然A, B的势都不超过c.

对任意的$x \in R$，作直线

$$L_x = \{(x, y) : y \in R\},$$

则集合L_x的势均为c.

(1) 若存在$x \in R$，使得$L_x \subset A$，则A的势不小于L_x的势c；

(2) 若不存在$x \in R$，使得$L_x \subset A$，即任取$x \in R$，必有$y(x) \in R$，使得

$$(x, y(x)) \notin A,$$

这时必有$(x, y(x)) \in B$. 这表明集合

$$\{(x, y(x)) : x \in R\} \subset B,$$

而集合$\{(x, y(x)) : x \in R\}$的势为c，故B的势不小于c.

综上$\bar{\bar{A}}$和$\bar{\bar{B}}$中至少有一不小于c.

又A, B的势都不超过c，因此$\bar{\bar{A}}$和$\bar{\bar{B}}$中至少有一为c.