实变函数复习题

1. 若 E 有界, 则 $m^*(E) < \infty$.

Rem. *有界, 于是存在有限开覆盖, 于是测度小于 ∞.*

2. 可数点集的外测度为零.

Rem. *单点集的外测度为 0, 可数并的外测度为可数个单点集的外测度之和, 于是可数点集的外测度为 0.*

3. 设 E 为可测集, $f(x)$ 为定义在 E 上的实函数, 则以下几条等价:

   1. $E[f > a]$ 可测，$\forall a \in \mathbb{R}$;
   2. $E[f \leqslant a]$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$;
   3. $E[f \geqslant a]$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$;
   4. $E[f < a]$ 可测, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Rem. *(1), (3) 和 (2), (4) 为余集, 可测性自然. (3) 可表示为可列个 (1) 的并.*

4. 设 A, B 均为可测集, 则 $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

Rem. *若 A, B 任一集合测度为 ∞, 自然成立.*
否则, 由可测集可加性可得.

5. 设 E_n 为可测集列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$, 则 $m(\limsup E_n) = 0$.

Rem. *由 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ 和 $\limsup E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k$.*

6. 设 E_n 为可测集列, 则 $m\left(\liminf E_n\right) \leqslant \liminf(m(E_n))$.

Rem. *$\bigcap_{i=1}^{\infty}(E_i)$ 关于 n 单增, 由单调性和测度的下连续性可得.*

7. 设 E_n 为可测集列, $\exists k_0$, 使 $m\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} E_n\right) < \infty$ 则 $m\left(\limsup E_n\right) \leqslant \limsup(m(E_n))$.

Rem. *$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)$ 关于 n 单减, 由单调性和测度的上连续性可得.*

8. 零测集的闭包不一定是零测集.

Rem. *例如 $\mathbb{Q}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 的测度为 ∞.*

9. 闭的零测集 E 必是疏朗集.

Rem. *反证，若不疏朗, 则存在小邻域, 此时测度大于 0.*

10. Lebesgue 可测集族的势为 $2^{\aleph_0}$.

Rem. $\mathbb{R}$ 的势为 $2^{\aleph_0}$, 而 *Lebesgue* 可测集族包含所有开集, 所以势至少为 $2^{\aleph_0}$. 另一方面, *Lebesgue* 可测集族是 σ-代数, 所以势不超过 $2^{\aleph_0}$.

11. E 可测的充要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$ 和闭集 $F \subset E$, 使得 $m(G \backslash F) < \varepsilon$.

Rem. 必要性显然, 充分性考虑取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则存在开集 $G_n \supset E$ 和闭集 $F_n \subset E$, 使得 $m(G_n \backslash F_n) < \frac{1}{n}$. 由可测集的定义, E 可测.

12. 以下命题等价:

(i) E 可测;

(ii) 存在 G_δ 集 $H \supset E$, 使得 $m^*(H \backslash E) = 0$;

(iii) 存在 F_σ 集 $K \subset E$, 使得 $m^*(E \backslash K) = 0$;

(iv) 存在 G_δ 集 H 和 F_σ 集 K, 使得 $K \subset E \subset H$ 且 $m(H \backslash K) = 0$.

Rem. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii):* 由可测集的定义, 存在开集 $G \supset E$, 使得 $m(G \backslash E) = 0$. 由于开集是 G_δ 集, 所以存在 G_δ 集 $H \supset E$, 使得 $m^*(H \backslash E) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii):* 由 G_δ 集的性质, H 可以表示为可数个开集的交, 所以存在闭集 $F \subset H$, 使得 $m^*(H \backslash F) = 0$. 因此, F 是一个 F_σ 集, 且满足 $m^*(E \backslash F) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv):* 显然成立.

(iv) $\Rightarrow$ *(i):* 由可测集的定义, $K \subset E \subset H$, 所以 $m(H \backslash K) = 0$, 因此 E 可测.

13. 在二维平面上作一开集 G, 使其边界的测度大于零.

Rem. 类 *Cantor* 集记为 E, 则 $G = \mathbb{R}^2 \backslash ([0,1] \times E)$ 是一个开集, 且边界的测度大于零.

14. 在平面上造一个不可测集.

Rem. 利用一维空间上的不可测集.

15. $\mathbb{R}$ 中外测度大于零的点集中均含有不可测的子集.

Rem. 外测度大于 *0* 的集合总可以构造不可测集.

16. 零测集的余集必是稠密集.

Rem. 反证, 若不是, 则存在开集 G 使得 $G \cap E = \emptyset$, 于是 $m(G) = 0$, 这与 G 为开集矛盾.

17. 证明简单函数的和、差、积、商仍为简单函数.

Rem. 设 $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, $g = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$ 为两个简单函数, 则它们的和、差、积、商可以表示为:

- 和: $f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \chi_{E_i \cap F_j}$;
- 差: $f - g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i - b_j) \chi_{E_i \cap F_j}$;

- 积: $fg = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i b_j) \chi_{E_i \cap F_j}$;

- 商: $f/g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i / b_j) \chi_{E_i \cap F_j}$ (当 $b_j \neq 0$).

由于有限个简单函数的线性组合仍是简单函数, 所以和、差、积、商均为简单函数.

18. 函数 $f(x)|_E$ 在孤立点 $x_0 \in E$ 处连续.

Rem. 设 E 为可测集, $f(x)$ 为定义在 E 上的实函数, $x_0 \in E$ 为孤立点. 则存在 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \cap E = \{x_0\}$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in B(x_0, \delta) \cap E$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 所以 $f(x)|_E$ 在 x_0 处连续.

19. 可测集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

Rem. $E\left[f > a\right]$ 总是可测的, 取 E_0 表示 f 的间断点, 则 $m\left(E_0\left[f > a\right]\right) = 0$, 另一方面, $E \backslash E_0\left[f > a\right]$ 连续, 因而可测, 所以 $E\left[f > a\right]$ 可测.

20. 设 f 为可测集 E 上的广义实函数. 若对几乎所有的 $a \in \mathbb{R}$, 集合 $E\left[f > a\right]$ 均可测, 则 f 在 E 上可测.

Rem. 任取 $a \in mathbbR$, 则 $\exists a_n \to a$, $E\left[f > a_n\right]$ 可测. 于是 $E\left[f > a\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f > a_n\right]$.

21. 设 $m(E) < \infty$, f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 证明：对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$，使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$，且 f 在 F 上有界.

Rem. 构造 $E\left[|f| > n\right]$, 则 $\lim_{n \to \infty} m(E_n) = 0$, 于是 $\exists N > 0, m(E\left[|f| > N\right]) < \varepsilon$, 取闭集 $F \subset E \backslash E_N$ 满足 $m\left(\left(E \backslash E_N\right) \backslash F\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $m(E \backslash F) < \varepsilon$, 且 f 在 F 上有界.

22. 设 f 和 f_n 均是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 证明: $E\left[f_n \to f\right]$ 和 $E \backslash E\left[f_n \to f\right]$ 均可测.

Rem. 取 E_n 使 f 和 f_n 均不有限, 则 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$. 只需证 $E \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\left[f_n \to f\right]$ 可测.

23. 设 f, g 均是 E 上的可测函数. 证明: 集合 $E\left[f > g\right]$ 是可测集.

Rem. 取有理数集 r_i, 则 $E\left[f > g\right] = \bigcup_{i=1}^{\infty} E\left[f > r_i\right] \cap E\left[g < r_i\right]$. 由于 $E\left[f > r_i\right]$ 和 $E\left[g < r_i\right]$ 均可测, 所以它们的交集也是可测的.

24. 构造反例说明：由 $|f|$ 可测得不到 f 可测.

Rem. 取 E 的不可测子集 A, 则 $f = \chi_A - \chi E \backslash A$ 在 E 上不是可测函数.

25. 设在 $\mathbb{R}^p$ 中, $f(x)$ 是 E_1 上的可测函数; 在 $\mathbb{R}^q$ 中, $g(y)$ 是 E_2 上的可测函数. 证明: 在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中, $f(x)g(y)$ 是 $E = E_1 \times E_2$ 上的可测函数.

Rem. 取 $E\left[f(x)g(y) > a\right]$, 则 $E\left[f(x) > a/b\right] \cap E\left[g(y) > b\right]$ 可测, 所以 $E\left[f(x)g(y) > a\right]$ 可测.

26. 设在可测集 E 上, 有 $f_n \Rightarrow f$; 在 E 上对任意的 n 都几乎处处成立 $|f_n(x)| \leqslant K$. 证明: 在 E 上几乎处处成立 $|f(x)| \leqslant K$.

Rem. 由 *Riesz* 定理存在子列 f_{n_k} 几乎处处收敛到 f, 由极限保序性, 可得 $|f(x)| \leqslant K$.

27. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集, $f(x)$ 在 E 上连续, 证明对任意的 $a \in \mathbb{R}$,$E[f \geqslant a]$ 是闭集.

Rem. 由连续性, 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, $E[f \geqslant a]$ 可以表示为 $E \cap f^{-1}([a,\infty))$, 其中 $f^{-1}([a,\infty))$ 是闭集, 所以 $E[f \geqslant a]$ 是闭集.

28. Lusin 定理中的 ε 不能换成 0.

Rem. 取 $(0,1)$ 上的 *Dirichlet* 函数, 若存在 F 是 $(0,1)$ 上的闭集, 使得 $m((0,1)\backslash F) = 0$, 则 $(0,1)\backslash F$ 是零测集, $F = (0,1)$, 但 *Dirichlet* 函数在 $(0,1)$ 上处处不连续, 所以不存在这样的闭集 F.

29. 求 [0,1] 上 Dirichlet 函数 $D(x)$, Riemann 函数 $R(x)$ 的积分.

Rem. 均为 *0*.

30. 设 $m(E) < \infty$, $f(x)$ 在 E 上非负可测, 证明: $f(x)$ 在 E 上可积 $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k m(F_k)$, 其中 $F_k = E\left[f \geqslant 2^k\right]$.

Rem.

31. 设 $m(E) < \infty$, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是 E 的 n 个可测子集, 正整数 $k \leqslant n$. 证明：若 E 中每一点至少属于 k 个 E_i, 则存在某个 i, 使得 $m(E_i) \geqslant \frac{k}{n} m(E)$.

Rem. 设 E_i 的测度为 $m(E_i)$, 则每个点至少属于 k 个 E_i, 所以 $\sum_{i=1}^n m(E_i) \geqslant km(E)$. 由于 $\sum_{i=1}^n m(E_i) = m(E)$, 所以存在某个 i, 使得 $m(E_i) \geqslant \frac{k}{n} m(E)$.

32. f 是 Lebesgue 可积的 $\Rightarrow |f|$ 也是 Lebesgue 可积的. 反之, 不对.

Rem. 取 E 的一不可测集 A, 做 $f = \chi_A - \chi_{E\backslash A}$. 则 $|f|$ 是 *Lebesgue* 可积的, 但 f 不是 *Lebesgue* 可积的.

33. 证明: 1. $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\infty)$ 上不是勒贝格可积的.
2. $\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不是勒贝格可积的.

Rem. *1.* 绝对值不是黎曼可积的. *2.* 反证可得

34. 设 $m(E) < \infty$, $f_n(x) \subset L(E)$, 且在 E 上 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. 证明: $f(x) \in L(E)$, 且 $\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$.

Rem. 由一致收敛性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对所有 $x \in E$ 成立. 由于 $f_n(x)$ 在 E 上可积, 所以 $\int_E |f_n(x)|dx < \infty$. 于是 $\int_E |f(x)|dx \leqslant \int_E |f_n(x)|dx + \varepsilon m(E) < \infty$, 所以 $f(x) \in L(E)$. 由一致收敛性, $\int_E f_n(x)dx \to \int_E f(x)dx$.

35. 设 $m(E) < \infty$, 证明: 在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow 0$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} dx = 0$.

Rem.

36. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可积函数, 令 $e_n = E[f \geqslant n]$. 证明: $\lim_{n\to infty} n \cdot m(e_n) = 0$.

Rem. 由 $f(x)$ 的可积性, $\int_E |f(x)|dx < \infty$, 所以 $\lim_{n\to\infty} n \cdot m(E[f \geqslant n]) = 0$. 由于 $E[f \geqslant n]$ 是可测集, 所以 $m(E[f \geqslant n])$ 是有限的, 因此结论成立.