习题三 答案

1. 若E有界，则$m^*E < \infty$.

证明： 因E有界，故存在$M > 0$，使得

$$|x| < M, \forall x \in E.$$

因此E包含在开区间

$$I = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : |x_i| < M, i = 1,2,\cdots,n\}$$

中. 取开覆盖为$I, I_1, I_2, \cdots$，其中从第二项开始全是空集.

则有

$$m^*E \le |I| + \sum_{i=1}^{\infty} |I| = |I| = (2M)^n < \infty.$$

2. 可数点集的外测度为零 .

证明： 设可数点集

$$E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

则

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}.$$

由外测度的次可数可加性和单点集的外测度为零得到

$$0\le m^*E=m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*\{a_n\}=0,$$

于是

$$m^*E=0.$$

3. 已知$A \subset R^n$，$m^*A = 0$，证明对任意的集合$B \subset R^n$，成立

$$m^*B = m^*(A \cup B).$$

证明： 证明：由题设$B \subset (A \cup B)$和$m^*A = 0$，

再根据外测度的单调性和次可加性得

$$m^*B \le m^*(A \cup B) \le m^*A + m^*B = m^*B,$$

所以

$$m^*B = m^*(A \cup B).$$

4. 设$E\subset R^1$是有界集. 常数μ满足$0\le\mu\le m^*E$,

证明：存在集合$E_1\subset E$，使得$m^*E_1=\mu$.

证明：不妨设$E\subset[a,b]$.

对任意的$x\in[a,b]$，作$E_x=E\cap[a,x]$，取函数

$$f(x)=m^*E_x=m^*(E\cap[a,x]).$$

显有

$$f(a)=0,f(b)=m^*(E\cap[a,b])=m^*E.$$

不妨$x<y$，由外测度的单调性得

$$|f(y)-f(x)|=\left|m^*E_y-m^*E_x\right|$$

$$\le m^*\left(E_y\backslash E_x\right)=m^*(E\cap(x,y])$$

$$\le m^*((x,y])=|y-x|.$$

所以函数$f(x)$在$[a,b]$上连续.

再由连续函数的介值定理即得结论.

5. 设$m^*E>0$，证明：$\exists x\in E$，使$\forall\delta>0$均有
$$m^*(E\cap O(x,\delta))>0.$$

证明：反证法：若否，则对任意的$x\in E$，存在$\delta=\delta(x)>0$，使得
$$m^*(E\cap O(x,\delta(x)))=0 \qquad (*)$$
得到E的满足（*）式的开覆盖$\{O(x,\delta(x)):x\in E\}$.

而R^n中任意集合的任意开覆盖必有至多可数的子覆盖，

所以有至多可数集$\{x_1,x_2,\cdots,x_M\}$（M可为无穷），使得
$$E\subset\bigcup_{i=1}^{M}O(x_i,\delta(x_i)).$$
这样就有
$$E=\bigcup_{i=1}^{M}(O(x_i,\delta(x_i))\cap E),$$
因而由外测度的次可数可加性和（*）式得
$$m^*E=m^*\left(\bigcup_{i=1}^{M}(O(x_i,\delta(x_i))\cap E)\right)$$
$$\le\sum_{i=1}^{M}m^*(O(x_i,\delta(x_i))\cap E)=0.$$
与题设矛盾. 结论得证.

6. 设E为可测集, $f(x)$为定义在E上的实函数, 则以下几条等价

1. $\forall a \in R^1, E[f > a]$可测
2. $\forall a \in R^1, E[f \leq a]$可测
3. $\forall a \in R^1, E[f \geq a]$可测
4. $\forall a \in R^1, E[f < a]$可测

证明：证明：由于集合的互余关系，所以(1)与(2)等价，(3)与(4)等价.

(1)与(3)的等价性由可测集族关于可数个并或交的封闭性即以下的关系式得到.

$$E[f > a] = \cup_{k=1}^{\infty} E[f \geq a + \frac{1}{k}];$$

$$E[f \geq a] = \cap_{k=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{k}\right].$$

7. 设A,B是可测集，证明：

$$m(A\cup B)+m(A\cap B)=mA+mB.$$

证明： 左右两端四个值中，如有一个为无穷，结论自然成立。因

$$A\cup B=A\cup(B\backslash A),B=(A\cap B)\cup(B\backslash A),$$

且两式的右边都是不交的可测集.

由测度的可加性

$$m(A\cup B)=mA+m(B\backslash A),$$

$$mB=m(A\cap B)+m(B\backslash A).$$

代入即得证.

8. 设$\{E_n\}$是可测集列，且$\sum_{n=1}^{\infty} mE_n < +\infty$，证明$m\left(\overline{\lim}E_n\right) = 0.$

证明： 由题知

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{N}^{\infty} mE_n = 0.$$

而

$$m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=N}^{\infty} mE_n,$$

故

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

而

$$\overline{\lim}E_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n,$$

故

$$\overline{\lim}E_n \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n \ (\forall N),$$

再由测度的单调性即得结论.

9. 设$\{E_n\}$是可测集列，证明：

$$m\left(\underline{\lim} E_n\right) \le \underline{\lim}\,(mE_n).$$

证明：因$\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$关于$n$单增，所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m,$$

由测度的下连续性得

$$m\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) = m(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) = \lim_{n\to\infty} m\,(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m).$$

又由单调性得

$$m(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) \le mE_n,$$

所以

$$m\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n\right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} m(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} mE_n.$$

10. 设$\{E_n\}$是可测集列，存在k_0，使得$m\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} E_n\right) < +\infty$，证明：

$$m\left(\overline{lim}E_n\right) \geq \overline{lim}\,(mE_n).$$

证明： 因$\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$关于$n$单减，所以

$$\overline{lim}_{n\to\infty}E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m = lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right).$$

由题设$m\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} E_n\right) < +\infty$和测度的上连续性，得到

$$m\left(\overline{lim}_{n\to\infty}E_n\right) = m\left(lim_{n\to\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) = lim_{n\to\infty}\, m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right).$$

又由单调性得

$$m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq mE_n,$$

所以

$$m\left(\overline{lim}_{n\to\infty}E_n\right) = \overline{lim}_{n\to\infty} m\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \geq \overline{lim}_{n\to\infty} mE_n.$$

11. 问：零测集的闭包仍是零测集吗？

答：不一定．如有理数集

证明： 反证法. 如E不疏朗，则存在

$$O(x,\delta)\subset\overline{E}.$$

又E是闭集，所以

$$O(x,\delta)\subset\overline{E}=E.$$

再由测度的单调性得

$$mE\geq m(O(x,\delta))>0,$$

这与题设$mE=0$矛盾.

所以E是疏朗的.

13. 设E_1可测且$mE_1 < \infty$. 若$E_1 \subset E_2$，$m^*E_2 = mE_1$，则E_2可测.

证明： 因E_1可测，在可测性的Caratheodory条件中取$T = E_2$得

$$m^*E_2 = m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2 \backslash E_1).$$

因$E_2 \supset E_1$，所以$E_2 \cap E_1 = E_1$，又$m^*E_2 = mE_1 < \infty$，

代入上等式得到

$$m^*(E_2 \backslash E_1) = 0.$$

这表明$E_2 \backslash E_1$是零测集，故是可测集. 而

$$E_2 = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1),$$

右边是两个可测集的并，故E_2可测.

14. 设$f(x):R^n\to R^n$是双射且保持外测度不变性.
证明: 若E可测，则$f(E)$可测.

证明　因为E可测，所以

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E),\ \forall T\subset R^n \qquad （1）$$

由于$f(x):R^n\to R^n$是双射，故对任意的集合A,B，有

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B),$$

$$f^{-1}(A\backslash B)=f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B). \qquad （2）$$

又由于映射保持外测度不变性，所以对任意的集合A，有

$$m^*(f^{-1}(A))=m^*f(A)=m^*A. \qquad （3）$$

因此对$\forall A\subset R^n$，由（1），（2），（3）式得

$$\begin{aligned}&m^*(A\cap f(E))+m^*(A\backslash f(E))\\&=m^*\left(f^{-1}(A\cap f(E))\right)+m^*\left(f^{-1}(A\backslash f(E))\right)\\&=m^*\left(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(f(E))\right)+m^*\left(f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(f(E))\right)\\&=m^*(f^{-1}(A)\cap E)+m^*(f^{-1}(A)\backslash E)\\&=m^*\left(f^{-1}(A)\right)=m^*A.\end{aligned}$$

所以，对$\forall A\subset R^n$，有

$$m^*(A\cap f(E))+m^*(A\backslash f(E))=m^*A.$$

因此$f(E)$可测.

15. 若$\{S_i\}$是两两不交的可测集,$E_i \subset S_i$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} m^*(E_i).$$

证明：由题设，利用S_1的可测性，及

$$E_1 \subset S_1, \qquad \left(\bigcup_{2=1}^{m} E_i\right) \cap S_1 = \emptyset$$

得，

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = m^*(E_1) + m^*\left(\bigcup_{i=2}^{m} E_i\right)$$

再用各个集的可测性及互不交性，用有限次归纳，得到结论。.

16. 可测集可表为单增有界的可测集之并.

17. 可测集可表为一列有界且两两不交的可测集之并

16. 证明：

设E是可测集. 令

$$E_n = E \cap O(0,n),$$

则$\{E_n\}$即为所求.

17 证明：

由开集的构造，全空间可表成一列两两不交的左开右闭的区间之并，类似上题即得.

18. 在R^1中构造只含无理数的正测度的闭集.

解： 设

$$Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\},$$

作开区间列

$$\{I_n\}=\left\{O\left(r_n,\frac{1}{2^n}\right)\right\}.$$

则$R^1\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$为所求.

19. 问：是否存在$[a,b]$的真闭子集F，满足$mF=b-a$.

证明：不存在.

法一：实际上，若存在满足条件的真闭集$F\subset[a,b]$使得$mF=b-a$. 由F是闭集知$(a,b)\backslash F$是开集. 由于

$$m\big((a,b)\backslash F\big)=m([a,b]\backslash F)$$

$$=m([a,b])-mF=(b-a)-mF=0,$$

因此$(a,b)\backslash F$是空集（因为非空开集的测度大于零），即$(a,b)\subset F$.

再结合$F\subset[a,b]$是真子集知$F=(a,b)$或$F=(a,b]$或$F=[a,b)$，这与F是闭集矛盾.

法二：若存在. 任取$x_0\in[a,b]\backslash F$，则$x_0\notin F$.

又F是闭集，故$\rho(x_0,F)=r>0$. 这表明$O(x_0,\frac{r}{2})\cap F=\emptyset$，

因此开区间$(x_0,x_0+\frac{r}{2}),(x_0-\frac{r}{2},x_0)$中至少有一个含于$[a,b]\backslash F$中.

不妨设前一个含于其中，由测度的可减性和单调性得，

$$0=m([a,b])-m(F)=m([a,b]\backslash F)\geq m\left((x_0,x_0+\frac{r}{2})\right)=\frac{r}{2}>0.$$

矛盾.

20. Cantor集的测度为零

证明：因为Cantor开集的测度为1，

由测度的可减性即得结论.

21. 构造测度大于零的疏朗的完备集，由此说明确实有开集使得其闭包的测度大于其自身的测度.

证明： 构造：类似于Cantor三分集的构造.

第1步：去掉中心在[0,1]的中点、长为$\frac{1}{p}(p>3)$的开区间，留下两个闭区间；

第2步：在留下两个闭区间中，再分别去掉中心在所留闭区间中点,长为$\frac{1}{p^2}$的开区间，得到2^2个闭区间；

第k步：在上一步留下的2^{k-1}个闭区间中，都分别去掉中心在闭区间中点长为$\frac{1}{p^k}$的开区间，得到2^k个闭区间.

一直下去就得到一个类似于Cantor三分集的集合（类Cantor集）.

这个类Cantor集也是完备的疏朗集，由于去掉的开区间长度之和为

$$\frac{1}{p}+2\frac{1}{p^2}+2^2\frac{1}{p^3}+2^3\frac{1}{p^4}+\cdots=\frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{2}{p}}=\frac{1}{p-2}<1$$

所以这个类Cantor集的测度为$\frac{p-3}{p-2}>0$， 满足要求.

这个类Cantor集的余集是开集，其边界（实际上是去掉的那些开区间）的测度大于零

22. 证明Lebesgue可测集族的势为2^c.

证明：设Lebesgue可测集族为M，则$M \subset 2^{R^n}$，

所以M的势不超过2^{R^n}的势2^c.

而Cantor集C的任意子集都是零测集，故可测. 所以

$$2^C \subset M.$$

而2^C的势为2^c， 故M的势不小于2^c.

因此，M的势为2^c.

23. 对任意的闭集F，均存在完备的子集$F_1 \subset F$，使得

$$mF_1 = mF.$$

证明： 若x的任意邻域中都含有F中的不可数多个点，称x是F的凝聚点.

凝聚点必是聚点，反之不对.

设F的凝聚点全体为$K(F)$，

则$K(F)$即为所求.

补. F的凝聚点全体$K(F)$是完备集，且$F\backslash K(F)$是至多可数集

证明： （1）先证明$E = F\backslash K(F)$是至多可数集

任取$x \in E$，则存在含x的有理开区间I_x，使得$I_x \cap F$是至多可数集，

自然$I_x \cap E$是至多可数集，而

$$E = \bigcup_{x \in E} (I_x \cap E)$$

又有理方区间的全体是可数集，

所以得到$E = F\backslash K(F)$是至多可数集.

表明：

不可数集E的凝聚点是存在的，

且凝聚点的全体$K(E)$是不可数集，

同时$K(E) \cap E$是不可数集.

证明：（2）证明$K(F)$是完备集

任取$x \in (K(F))'$，对任意的$\delta > 0$，存在$y \in O(x,\delta) \cap K(F)$. 取$\delta_1 > 0$，使得

$$O(y,\delta_1) \subset O(x，\delta).$$

因为$y \in K(F)$，所以$O(y,\delta_1)$中含有F中的不可数多个点，

自然$O(x,\delta)$中就含有F中的不可数多个点，这表明$x \in K(F)$，因此$K(F)$是闭集.

再任取$x \in K(F)$，对任意的$\delta > 0$，集合$F_\delta = O(x,\delta) \cap F$是不可数集.

由(1)，集合$F_\delta \cap K(F_\delta)$也是不可数集.

因$F_\delta \subset F$，所以F_δ的凝聚点必是F的凝聚点.

这说明$O(x,\delta) \cap K(F)$是不可数集，故$x \in (K(F))'$.

即，$K(F)$是自密集.

综上，$K(F)$是完备集.

24. $\{G_n\},\{E_n\}$是集列, 则有

(i) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash E_n)$.

(ii) 若集列满足$E_n \subset G_n, \forall n$, 且$\{G_n\}$是两两不交的集列, 则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash E_n).$$

证明: (i) 是简单的

对$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash E_n)$, 存在k, 使得 $x \in G_k\backslash E_k$,

由题设知两个集列都是两两不交的集列, 从而可以得到

$$x \in G_k\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

所以该元含于左.

25. E可测的充要条件是：对$\forall\varepsilon > 0$，存在开集$G \supset E$和闭集$F \subset E$，使得$m(G\backslash F) < \varepsilon$.

证明：必要性：因为E可测，所以对任意的$\varepsilon > 0$, 存在开集$G \supset E$, 使得$m(G\backslash E) < \frac{\varepsilon}{2}$,

同时存在闭集$F \subset E$, 使得$m(E\backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$，此时

$$m(G\backslash F) = m(G\backslash E) + m(E\backslash F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性：取$\varepsilon = \frac{1}{n}$, 则得到一列开集$\{G_n\}$和一列闭集$\{F_n\}$, 使得

$$G_n \supset E \supset F_n \text{且} m(G_n\backslash F_n) < \frac{1}{n}.$$

令$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

则$H \supset E \supset K$，且H, K可测，

同时$H\backslash K \subset G_n\backslash F_n(\forall n)$，这表明$H\backslash K$是零测集.

因为$E\backslash K \subset H\backslash K$，故$E\backslash K$也是零测集.

而$E = (E\backslash K) \cup K$，故$E$可测.

26. 以下命题等价

(i) E可测

(ii) 存在G_δ集$H \supset E$, 使得$m^*(H\backslash E) = 0$

(iii) 存在F_σ集$K \subset E$, 使得$m^*(E\backslash K) = 0$

(iv) 存在G_δ集H和F_σ集K, 使得$K \subset E \subset H$且$m(H\backslash K) = 0$.

证明： (i)→(ii) 因E可测, 所以对任意的自然数n, 存在开集$G_n \supset E$, 使得$m(G_n\backslash E) < {}^1/_n$.

令$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$，则$H$即为所求。

(ii)→(iii) 对E^c用(ii), 存在G_δ集$H \supset E^c$，使得$m(H\backslash E^c) = 0$。令$K = H^c$。

则K是F_σ集， 且$H\backslash E^c = E\backslash H^c = E\backslash K$，同样也得到结果。

(iii)→(iv) 由前两步存在G_δ集H和F_σ集K, 使得$K \subset E \subset H$,且

$$m^*(H\backslash E) = 0, m^*(E\backslash K) = 0，$$

得到

$$m(H\backslash K) \leq m^*(H\backslash E) + m^*(E\backslash K) = 0$$

(iv)→(i) 由$(E\backslash K) \subset (H\backslash K)$及$m(H\backslash K) = 0$，导出$(E\backslash K)$是零测集，因此是可测集。

又因为$E = K \cup (E\backslash K)$, K是可测集，所以E是可测集。

27. 设E是有界集，证明：E是可测集的充要条件是

$$\inf\{mG: G\text{是开集，} E \subset G\} = \sup\{mF: F\text{是闭集，} F \subset E\}$$

证明： 由题设知$m^*E < \infty$. 利用25题自然得到结论

28. （单增集列外测度的下连续性）设$\{E_n\}$是R^n中的单增集列，则

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^* E_n.$$

证明：利用等测包的存在性，得到一列G_δ集$\{H_n\}$, 使得

$$E_n \subset H_n 且 mH_n = m^* E_n.$$

也存在G_δ集H，使得，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset H 且 m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = mH.$$

令

$$F_n = H \cap (\bigcap_{k=n}^{\infty} H_k)，\ \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F.$$

则$\{F_n\}$可测单增，且$lim F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

又由于$\{E_n\}$单增, $E_n \subset H_n$，所以$E_n \subset F_n \subset H_n$，进而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F \subset H.$$

再由外测度的单调性，就有

$$m^* E_n = mF_n = mH_n，\ m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = mF = mH.$$

利用测度的下连续性质，有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = mF = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$$

$$= lim_{n\to\infty}\, m\, F_n = lim_{n\to\infty}\, m^*\, E_n.$$

29. 设A,B是R^n中的集合，$A\cup B$是可测集，且

$$m(A\cup B)=m^*A+m^*B<+\infty.$$

证明：A,B是可测集.

证明： 由于$A\cup B$可测，所以存在F_σ集$K\subset(A\cup B)$，且

$$m((A\cup B)\backslash K)=0，m(A\cup B)=mK.$$

利用等测包的存在性，存在G_δ集H, 使得

$$A\subset H\text{且}m^*A=mH.$$

这样

$$K\backslash H\subset(A\cup B)\backslash A\subset B，$$

当然$m(K\backslash H)\le m^*B<\infty$.

另一方面，由题设和测度的性质得

$$m(K\backslash H)\ge mK-mH=m(A\cup B)-m^*A=m^*B.$$

因此可测集$K\backslash H\subset B$且 $m(K\backslash H)=m^*B<\infty$.

利用13题就得到B是可测的，类似得到A的可测性.

30 在二维平面上作一开集G，使其边界的测度大于零.

解 利用21题，设该类Cantor集为E，则$mE > 0$.

令$F = [0,1] \times E$，则$F \subset R^2$是疏朗的闭集且测度大于零，开集$R^2 \backslash F$即为所求.

31 在平面上造一个不可测集。

解. 设A是[0,1]中的不可测集，$[0,1] \times A$即是二维空间中的不可测集.

32 证明：R^1中外测度大于零的点集中均含有不可测的子集。

证明：类似于[0,1]中不可测集的构造.

这时必有一有界子集E的外测度大于零，把E当作[0,1]类似得到不可测集.

33 证明：零测集的余集必是稠密集。

证明：反证法：若否，则该零测集中会含有开球，此与集合是零测集矛盾.

34. 设$E \subset R^1$，令

$$-E = \{-x: x \in E\},$$

证明:

(1). $m^*(E) = m^*(-E)$;

(2). 若E可测，则$-E$也可测.

证明：第1问类似于外测度平移不变性的证明；

第2问直接利用14题得到可测性，测度不变由第一问保证.