§16 多元函数的极限与连续

§16.1 n维空间

一、平面点集

Def. 平面中两点间距离：$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$，称$\rho=\rho(P_1,P_2)$

或$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$为$P_1$与$P_2$间距离

设E是xOy平面上一个非空点集，有如下概念：

1. 邻域：$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$称为点$P_0$的邻域

$U^\circ(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$称为点$P_0$的去心邻域

2. 点集E的内点：若$\exists P\in E$，$\exists P$的某一邻域全包含在E内，则称P为E的内点。

例：$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$中每个点都为$E_1$的内点，

$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$中每个点都非$E_2$的内点。

3. 开集：若E中每个点均为内点，则E为开集

例：$E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$不是开集

4. 点集E的边界：若$\exists P$（P不一定在E内），P的任意邻域均含有~~属于~~E中的点和非E中的点，则称P为E的一个边界点，E的全体边界点构成集合称为E的边界，记为∂E.

例：E_1、E_2、E_3的边界均为E_2

5. 闭集：若E的边界包含在E内，则称E为闭集

例：E_2、E_3为闭集，E_1不为闭集

注：全平面既开又闭

6. 连通集：若E中任意两点均可以由E中折线相连，这种点集称为连通集

例：E_1、E_3连通，E_2不连通

7. 开区域：若点集E是连通开集，则称其为一个开区域

例：E_1是开区域，E_2，E_3不是开区域

8. 闭区域：开区域与其边界的并集称为闭区域

注：开区域与其部分边界的并集也称为区域，开区域与闭区域也可简称为区域.

9. 点集E的聚点：若$\exists P$（P不一定在E内），P的任意邻域内均含有无限个E中的点，则称P为E的一个聚点.

例：E_1、E_2、E_3中的点，均为各自的聚点

10. 点集E的孤立点：若$\exists P\in E$，P的某一邻域内除P外无E中的点，则称P为E的一个孤立点.

注：孤立点一定是边界点

11. 有界点集：若$\exists K>0$ s.t. $\forall P\in E$，$|OP|\le K$（O为坐标原点）则称E为有界点集，否则为无界点集.

12. 点集E的直径：称$d=d(E)=\sup\{|P_1P_2|\mid P_1,P_2\in E\}$

注：允许广义确界；单点集直径$d=0$

任何非空点集E的直径：$0\le d\le+\infty$，且：

i) $d=0\Leftrightarrow$ E为单点集

ii) $d>0\Leftrightarrow$ E为有界点集

iii) $d=+\infty\Leftrightarrow$ E为无界点集

二、n维空间

一维空间$\mathbb{R}^1$简记$\mathbb{R}$：全体实数所成的集合

二维空间$\mathbb{R}^2$：全体平面上的点(x,y)所成的集合

三维空间$\mathbb{R}^3$：全体空间中的点(x,y,z)所成的集合

n维空间$\mathbb{R}^n$：全体n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所成的集合

注：n维空间中的点$P(x_1,\cdots,x_n)$与数组建立一一对应；

也与向径$\vec{OP}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$建立一一对应

Def. $\mathbb{R}^n$中两点间距离：$P_1(x_1,\cdots,x_n)$；$P_2(y_1,\cdots,y_n)$

$$\rho=\rho(P_1,P_2)=|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

因此$\mathbb{R}^2$中的12个概念可推广至$\mathbb{R}^n$.

Rem. 二维直线方程 $\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\end{cases}$, $t\in I$

$\mathbb{R}^n$中直线方程 $\begin{cases}x_1=x_1^0+m_1t\\ x_2=x_2^0+m_2t\\ \vdots\\ x_n=x_n^0+m_nt\end{cases}$, $t\in I$

三、$\mathbb{R}^n$空间的完备性

Def. 已知$\mathbb{R}^n$中点列$\{P_n\}$及一点P_0，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时$|PP_0|<\varepsilon$，则称点列在$n\to\infty$时收敛于点P_0，记作$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$，$(P_n\to P_0)$

$\mathbb{R}^n$中的五个定理：

I 闭矩形套定理

II 柯西收敛准则 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,n>m>N$时$|P_nP_m|<\varepsilon$

III 致密性定理

IV 有限覆盖定理

V 聚点定理

Rem. 以上五个定理表明$\mathbb{R}^n$空间是(相对)完备的

§16.2 多元函数的极限

一、多元函数定义及图形

Def. 设D是$\mathbb{R}^2$中的一个非空点集，若对D中任意一个点$P(x,y)$都按某一法则f与唯一数z对应，记$z=f(x,y)=f(P)$，则称$f(x,y)$是定义在D上的二元函数，D称为定义域

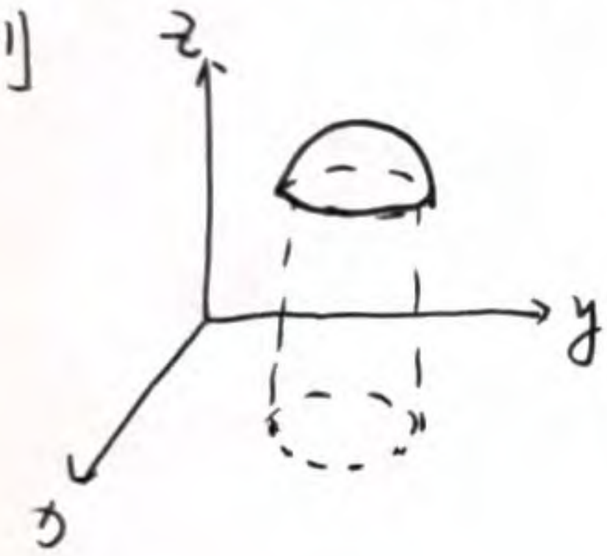
例：$z=x\cdot y$，$z=x^2+y^2$

Def. n元函数：$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(P)$

例：$u=x^2+y^2+z^2$

在空间坐标系中，点集$G=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为$z=f(x,y)$的图形.

例



曲顶柱体的顶

(1) $z=1-x-y$ → 平面

(2) $z=x^2+y^2$，$z=2x^2+3y^2$ → 抛物面

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ → 圆锥面

(4) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ → 半球面

(5) $z=y^2-x^2$，$z=x^2-y^2$，$z=xy$ → 双曲抛物面

二、多元函数的极限

1. 二元函数极限的分析定义

Def. 设$f(P)=f(x,y)$在D上定义，$A\in\mathbb{R}$，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ s.t. $P\in D$且$0<|PP_0|<\delta$（其中$P_0(x_0,y_0)$是D的聚点）时都有$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称$P\to P_0$时$f(P)$收敛于A（以A为极限），记为$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$或$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$

二元函数的极限可推广到n元函数

2. 函数极限的证明

例1 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$

Proof. $\forall\varepsilon>0$, $\left|(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le(x^2+y^2)$

要使 $\left|(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$，只需 $x^2+y^2<\varepsilon$，即 $\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时 $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le(x^2+y^2)<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$

例2 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$

Proof. $\forall\varepsilon>0$, $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}$

要使 $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$，只需 $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$，且 $x\neq 0$，$y\neq 0$

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时 $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$

类似可证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$

3. 求函数极限

Rem. 多元函数求极限与一元函数类似：极限唯一性、局部保号、有界性、四则运算、复合函数求极限法则、夹逼定理、无穷(小)大性质、等价代换、变量代换等均成立

例3 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$ （无穷小性质）

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=2$ （四则运算）

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(1+\sin(xy))}{\tan xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$ （等价代换）

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{1}{3}xy}{xy}=\frac{1}{3}$

4. 证明极限不存在举例

例 4 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

Proof. 取 $y=kx$，对应 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$ 与 k 有关

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

例 5 可以证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在

例 6 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在

Proof. (1) 先取 $y=x$，对应 $\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = 0$

(2) 另取 $y=x^2$，对应 $\lim\limits_{\substack{y=x^2\\ x\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在

例 7 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x+y}$ 不存在

Proof. 取 $x+y=x^3$（或 $x^4, x^6, \cdots$）

对应 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x+y=x^3}} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x^3-x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^3} = \infty$（不存在）

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在

类似地，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x-y}$ 不存在

例 8 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ 不存在

Proof. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{xy}} = e$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

$(1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{x^2+y^2}}$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ 不存在

注：其他形式的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to \infty}} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to y_0}} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} f(x,y)$

（参考分析定义）

例 9 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{2y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{2y}{xy}}=e$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-x-y}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left[\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{1}{e^y}+\frac{y^2}{e^y}\cdot\frac{1}{e^x}\right]=0$

*三、累次极限

上述多元函数极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 经常被称为重极限.

1. 累次极限的定义

Def. 设 $f(x)$ 在区域 $U=\{(x,y)\mid 0<|x-x_0|<\delta_1,\ 0<|y-y_0|<\delta_2\}$ 上有定义，如果 $\forall x\in\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta_1\}$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在，记 $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，$0<|x-x_0|<\delta_1$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 也存在，则称 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 为二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 先 y 后 x 的二次极限，统称累次极限.

类似地，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 称为先 x 后 y 的二次极限.

2. 重极限与累次极限的关系：

例 (1) 重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$

(2) 重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$

(3) 重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0$

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)$ 不存在

(4) 重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y} = 0$

累次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ 不存在

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = 0$$

Thm. 假设重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 也存在，则两者极限值相等.

Proof. 记 $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

由分析定义，$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $0<|y-y_0|<\delta$ 时有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

令 $y\to y_0$，由极限保号性，$|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)-A|\le\varepsilon$

即当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立 $|\varphi(x)-A|\le\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = A$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = A$.

Cor. 若累次极限存在但不等，则重极限不存在.

§16.3 多元函数的连续性

一. 多元函数连续的定义

1. $f(P)$ 在一点连续

Def. 设 $f(P)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中一个点集 D 上的多元函数，P_0 是 D 的一个聚点且 $P_0 \in D$，若 $P \in D$ 且 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，也称 P_0 是 $f(P)$ 的一个连续点，否则 P_0 是间断点.

特别地，二元函数 $f(P) = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续：

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } (x,y) \in D$$

且 $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

2. 连续的等价定义

Def. 记 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = y - y_0$，对应函数增量 $\Delta z = \Delta f$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x_0, y_0)$$

(全)

$f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$

3. 连续函数

Def. 若 $f(P)$ 在区域 D 上处处连续，则称 $f(P)$ 是 D 上的连续函数，其中 D 为定义域.

Rem. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续，且 (x_0, y_0) 为内点，则 $z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续；$z = f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处连续.

二、多元函数连续的有关性质

1. 基本性质：与一元函数连续的性质类似，多元函数的连续性也有以下性质：

局部有界性、局部保号性（保序性）；

连续的四则运算；复合函数的连续性

多元初等函数在各自定义域内部都连续（有限次运算后定义域中可能有孤立点）

2. 有界闭区域上连续函数的性质

Thm.

设 $f(P)$ 在 R^n 中的有界闭区域 D 上连续，则：

(1) $f(P)$ 在 D 上有界

(2) $f(P)$ 在 D 上存在最大与最小值

(3) $f(P)$ 在 D 上能取到介于最大值 M 和最小值 m 间的任何值

(4) $f(P)$ 在 D 上一致连续

$(\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall P_1, P_2 \in D, |P_1P_2|<\delta$ 时 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon)$

Rem. 定理证明完全类似一元函数对应定理的证明

有界性：有限覆盖定理

最值性：致密性定理

介值性：用参数表示，化为一元函数

§17 多元函数微分学

(1) 偏导数的定义及计算

(2) 多元函数的全微分

(3) 复合函数微分法

*(4) 泰勒公式

§17.1 多元函数的偏导数

一、偏导数的定义及几何意义

1. 定义(以二元函数为例)

Def. 设 $z=f(x,y)$ 在平面点 (x_0,y_0) 的某邻域上有定义，

记 $\Delta_x z = f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 或 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$

称为偏增量。若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ 存在，则称极限值为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记 $f_x(x_0,y_0)$

$=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

即 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

类似地，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数：

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Rem. (1) 定义中极限不存在时称偏导数不存在

(2) $f(x,y)$ 在任一点 (x,y) 处偏导数定义：

$f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$，$f_y(x,y)$ 同理

(3) 以上偏导数的定义可推广至多元函数

例如：$u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处关于 x 的偏导数

$$u_x=f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

类似可定义 $f_y(x,y,z)$，$f_z(x,y,z)$

(4) 若 $f(x,y)$ 在平面开区域 D 上处处有偏导数，则可称 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 为 D 上的偏导函数，且可推广至 n 元函数.

(5) 偏导数的偏导数实际上就是一元函数（固定其余自变量，仅看成其中一个自变量的函数的导数）的导数，即 $f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}$

(6) 偏导数记号：$f'_x=f_x$，$f'_y=f_y$

2. 几何意义

$f_x(x_0,y_0)=k$ 表示空间曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切线关于 x 轴的斜率.

类似地，$f_y(x_0,y_0)=k$ 表示空间曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切线关于 y 轴的斜率

二、多元函数偏导数求法举例

Rem. 偏导数本质上是一元函数的导数，关于一元函数的求导公式、求导法则及求导方法依旧成立

例1 已知 $z=x^3+5xy+y^2$，求 $z_x(1,2)$ 与 $z_y(1,2)$

Solve. $z_x=3x^2+5y$；$z_y=5x+2y$

$z_x(1,2)=13$，$z_y(1,2)=9$

例2 已知 $z=x^y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solve. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot \ln x$

例3 已知 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

例4 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$.

Solve. $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

这里 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 显然不连续

$f_x(x_0,y_0)$ 存在 $\Rightarrow z=f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续

$f_y(x_0,y_0)$ 存在 $\Rightarrow z=f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续

三、高阶偏导数

Def. 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有偏导数，若偏导函数 $f_x(x,y)$ 或 $f_y(x,y)$ 也有偏导数，称 f_x 与 f_y 的偏导数为 $f(x,y)$ 的二阶偏导数，记 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}$，

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{xy}$，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{yx}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}$

若函数变量为z，以上记号中f都可换为z

类似地，二阶偏导函数的偏导数叫做$f(x,y)$的三阶偏导函数. n阶偏导函数同理. 二阶及以上的偏导数统称为高阶偏导数，其中关于不同变量的偏导数的高阶偏导数统称为混合偏导数.

Rem. (1) n元函数也类似定义高阶偏导数

(2) 二阶偏导数在一点处的定义，例如：

$$f_{xx}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_x(x_0+\Delta x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2、高阶偏导数计算法举例

例5 $z=3x^3+4x^2y+y^3$，求 z_{xy} 与 z_{yx}

Solu. $z_x=9x^2+8xy$，$z_{xy}=8x$

$z_y=4x^2+3y^2$，$z_{yx}=8x$，这里 $z_{xy}=z_{yx}$

例6 $z=\ln(x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

Proof. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv 0$$

例7 已知 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

Proof. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$u=\frac{1}{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{r^3-x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}=-\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

由对称性，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{r^2-3y^2}{r^5}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{r^2-3z^2}{r^5}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

Rem. 例6与例7中的函数称为调和函数

例8 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求 $f_{xy}(0,0)$ 与 $f_{yx}(0,0)$

Sole. $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=-y$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1$$

同理可求 $f_{yx}(0,0)=1$，这里 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

混合偏导数相等的充分条件

Thm. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的某邻域内存在混合偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$. 若这两个混合偏导函数都在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

Proof. 记 $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$

$\psi(y) = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0, y)$

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

$$\Delta\psi = \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) = [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] - [f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

易知 $\Delta\varphi = \Delta\psi$

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x$$
$$= [f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x$$
$$= f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y$$

$$\Delta\psi = \psi(y_0+\Delta y) - \psi(y_0) = \cdots = f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x, y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$$

令 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 得（f_{xy} 与 f_{yx} 在 (x_0, y_0) 连续）

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Rem. (1) 定理的结论表示求混合偏导数时与顺序无关，且该定理可推广至 n 阶混合偏导数上，例如：

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial x\partial y}$$ 要求 $f_{xyx}, f_{yxx}, f_{xxy}$ 连续

(2) 多元初等函数的偏导函数连续，故求混合偏导数与次序无关.

(3) 例 8 中的函数 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

§17.2 多元函数的全微分

一元函数 $y=f(x)$ 可微：$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$

二元函数 $z=f(x,y)$ 可微：$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

一、多元函数可微定义及必要条件

Def.（以二元函数为例）

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内定义，记 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 称为全增量. 若全增量函数可以表示为 $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

这里 A 与 B 是两个与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，Δz 的主要部分 $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ 称为全微分，记为 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

下面给出两个定理，得出可微的两个必要条件.

Thm. 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点连续.

Proof. 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则存在常数 A 与 B 使

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

显然 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} [A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)] = 0.$

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

Rem. 若 $f(x,y)$ 在区域 D 上处处可微，则 $f(x,y)$ 是 D 上的可微函数.

上述定理表明可微函数也是连续函数.

例 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 不连续，故不可微.

Thm. 若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 与 $f_y(x_0,y_0)$ 均存在.

Proof. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，$\exists A, B$ s.t. $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

取 $\Delta y=0\ (\Delta x\neq 0)$ 得 $\Delta_x z=A\Delta x+o(\Delta x)$ 为偏增量

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A.=f_x(x_0,y_0)$$

同理 $B=f_y(x_0,y_0)$

且全增量 $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$

$$=dz+o(\rho)$$

例1 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续，偏导数存在，但不可微

Proof. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$，偏导数存在

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-[0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$ 不存在

$\Delta z\neq f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+o(\rho)$，不可微

二、可微的充分条件

Thm. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内存在偏导数，若两个偏导函数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

Proof. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$
\begin{aligned}
&= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
&= f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\cdot\Delta y \\
&= (f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1)\Delta x + (f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2)\cdot\Delta y \\
&= f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + (\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) \\
&= dz + o(\rho) \quad \left(\text{显然} \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho} = 0\right)
\end{aligned}
$$

表明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

Rem. (1) 上述定理是可微的充分条件，非必要条件

这一判别法对多元初等函数的判别法较为方便

(2) 以上多元函数可微的定义及三个定理对 n 元函数均成立.

例 $u=f(x,y,z)$ 可微 $\Leftrightarrow \Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$

$$= du + o(\rho)$$

(3) 全微分的记号 $z=f(x,y)$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

例2 求下列全微分：

(1) $z=e^{xy}$，求 $dz|_{(1,1)}$

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 dr

Solu. (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = e$

$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = e$

$dz|_{(1,1)} = e\cdot\Delta x + e\cdot\Delta y$

(2) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz$$

$$= \frac{1}{r}(xdx + ydy + zdz)$$

例 3 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 可微,

但 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在该点不连续

Proof. $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0.$

同理 $f_y(0,0) = 0.$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$= 0.$$

因此 $\Delta z = f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$, 可微

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ 不存在

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 不存在, $f_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

同理 ~~在~~ $f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

偏导连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{偏导存在} \\ \text{函数连续} \end{cases}$

Thm. 设~~若~~ $f(x,y)$ 在区域 D 上有偏导数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 若这两个偏导函数 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 有界，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

Proof. 设 $|f_x(x,y)| \le M$，$|f_y(x,y)| \le M$

~~Δz~~ $\forall (x,y) \in D$，对应函数全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= f_x(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y)\cdot \Delta x + f_y(x, y+\theta_2 \Delta y)\cdot \Delta y$$

$|\Delta z| \le M\cdot|\Delta x| + M\cdot|\Delta y|$，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$

故 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续，进而 $f(x,y)$ 在 D 上是连续函数

§17.3 多元复合函数的可微性及求偏导公式

$f(u,v)$ 与 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 都可微时，复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 是否可微

一、多元复合函数的可微性

Thm 1. 设 $z=f(u,v)$ 在 (u,v) 可微，$u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在 (x,y) 可微，且函数可复合：$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 则复合函数在 (x,y) 也可微

Proof. 由 $f(u,v)$，$\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$ 可微，

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right) \tag{1}$$

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(\rho) \tag{2}$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(\rho) \tag{3}$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

将(2)、(3)代入(1)得到，

$$\begin{aligned}\Delta z&=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(\rho)\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(\rho)\right)\\&\quad+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y\\&\quad+\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot o(\rho)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot o(\rho)+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)\right]\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+o(\rho)\end{aligned}$$

下证：$\frac{\partial f}{\partial u}o(\rho)+\frac{\partial f}{\partial v}o(\rho)+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)=o(\rho)$

其中 $\frac{\partial f}{\partial u}o(\rho)+\frac{\partial f}{\partial v}o(\rho)=o(\rho)$ 显然，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\right)^2}$$

$=0$ (第一项为无穷小量，第二项为有界量)

即 $o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)=o(\rho)$，表示复合函数可微

再根据可微定义，有：

复合函数 $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Thm2. 设 $f(u,v)$ 可微，$u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 有偏导数，

则复合函数(可复合) $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 也有偏导数，

且 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Proof. $\Delta z=\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v+o\left(\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}\right)$

复合 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 后得 (令 $\Delta y=0$)

$$\Delta_x z=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Delta_x u+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\Delta_x v+o\left(\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}\right)$$

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\frac{o\left(\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}\right)}{\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}}{\Delta x}$$

令 $\Delta x\to 0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+0$

同理可证，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$.

Rem. 定理1、2可推广至n元与m元复合函数，例如：

(1) $z=f(u)$ 与 $u=\varphi(x,y)$ 复合得 $z=f(\varphi(x,y))$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

(2) $z=f(u,v)$ 与 $u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$ 复合得 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

(3) $z=f(u,v,w)$ 与 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=w(x,y)$ 复合得

$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y),w(x,y))$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

例1 $f(u)$ 可导，记 $z=f(x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solve. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot 2x=2x\cdot f'(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot 2y=2y\cdot f'(x^2+y^2)$$

例2 已知 $f(u,v,w)$ 可微，记 $z=f(\sin t,\cos t,e^t)$，求 $\frac{dz}{dt}$.

Solve. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\cos t+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot(-\sin t)+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot e^t$$

例3 已知 $f(x,u,v)$ 可微，$u=\varphi(x,y)$ 与 $v=\psi(x,y)$ 可微

记 $z=f(x,\varphi(x,y),\psi(x,y))$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solve. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

二、多元复合函数的高阶偏导举例

若多元函数有二阶连续偏导数，则复合函数也有二阶偏导数.

例4 已知 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，记 $z=f(x^2,xy)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Solve. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y=2x\cdot f_u+y\cdot f_v$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f_u+2x\frac{\partial}{\partial x}(f_u)+y\cdot\frac{\partial}{\partial x}(f_v)$$

$$=2f_u+2x\cdot[2xf_{uu}+y\cdot f_{uv}]+y\cdot[2xf_{vu}+yf_{vv}]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\frac{\partial}{\partial y}(f_u)+f_v+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}(f_v)$$

$$=2x\cdot[0\cdot f_{uu}+xf_{uv}]+y\cdot[0\cdot f_{vu}+xf_{vv}]+f_v$$

多元函数偏导数记号：

$f(u,v)$ 有高阶偏导数

$f_u=\frac{\partial f}{\partial u}\overset{记}{=\!=}f_1'$ $\qquad$ $f_v=\frac{\partial f}{\partial v}\overset{记}{=\!=}f_2'$

$f_{uu}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=f_{11}''$ $\qquad$ $f_{uv}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=f_{12}''$，$f_{vu}=f_{21}''$

$f_{vv}=f_{22}''$

$f_{uuu}=\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}=f_{111}'''$，$f_{uuv}=\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial v}=f_{112}'''$

例5 设 $f(u,v,w)$ 有二阶连续偏导数，记 $w=f(xy,yz,zx)$ 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$

Solve. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot y + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot z$

$= y\cdot f_u + z\cdot f_w = y\cdot f_1' + z\cdot f_3'$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = y\cdot\frac{\partial f_1'}{\partial z} + f_3' + z\cdot\frac{\partial f_3'}{\partial z}$

$= y\cdot[0\cdot f_{11}'' + y\cdot f_{12}'' + x\cdot f_{13}''] + f_3' + z\cdot[f_{31}''\cdot 0 + f_{32}''\cdot y + f_{33}''\cdot x]$

$= y^2 f_{12}'' + xy f_{13}'' + f_3' + yz f_{32}'' + xz f_{33}''$

三、全微分形式不变性

设 $z=f(u,v)$ 及 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 都可微，有全微分：

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$$

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

根据定理1，以下运算合理：

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

以上性质表明：全微分式中 u 和 v 既可看成自变量，也可看成中间变量，这个性质叫做全微分形式不变性.

§17.4 二元函数泰勒公式

一、复习公式

1. 一元函数中值定理 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

2. 一元函数泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

3. 二项展开式

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^kb^{n-k}+\cdots+C_n^na^0b^n$$

二、二元函数中值定理

Thm1. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内可微，则对邻域内任一点 (x,y) 都有

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

Proof. 构造 $\Phi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ 在 $[0,1]$ 上可微

$\Phi'(t)=f_x\Delta x+f_y\cdot\Delta y$

对 $\Phi(t)$ 由中值定理，$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)\cdot 1$

即 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y$

可得证.

三、二元函数泰勒公式

~~Lem.~~ Thm. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有 $n+1$ 阶连续偏导数，点 (x_0+h,y_0+k) 在该邻域内，则有泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right)\right.$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n\right]f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1}\cdot f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

Proof. 构造 $\Phi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$ 在 $[0,1]$ 有 $n+1$ 阶导数

根据复合函数求导公式

$$\Phi'(t)=f_x\cdot h+f_y\cdot k=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k$$

$$\begin{aligned}\Phi''(t)&=(f_{xx}\cdot h+f_{xy}\cdot k)\cdot h+(f_{yx}\cdot h+f_{yy}\cdot k)\cdot k\\&=f_{xx}\cdot h^2+2f_{xy}\cdot hk+f_{yy}\cdot k^2\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot k^2\end{aligned}$$

$$\Phi^{(m)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}\cdot k\right)^m f(x_0+th,y_0+tk)$$

将 $\Phi(t)$ 展成泰勒公式：

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\Phi'(0)t+\frac{\Phi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{\Phi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}$$

取 $t=1$ 得，

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2\cdot f(x_0,y_0)\\&+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1}\cdot f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\end{aligned}$$

Rem. (1) 以上称为二元函数的泰勒公式，当 $n=0$ 时退化为定理1的中值定理

(2) 以上可推广至 n 元函数（略）

三. 常见函数的泰勒公式

1. $f(x,y)=e^{x+y}$ 的麦克劳林公式

$f(0,0)=1$，$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}$，$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i}\partial y^i}=e^{x+y}$，$\left.\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\right|_{(0,0)}=1$

泰勒公式：$e^{x+y}=1+(x+y)^1+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)}\cdot(x+y)^{n+1}$

2. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 的麦克劳林公式

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i}\partial y^i}=(-1)^{m-1}(m-1)!\,\frac{1}{(1+x+y)^m}$$

$$\left.\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-i}\partial y^i}\right|_{(0,0)}=(-1)^{m-1}(m-1)!$$

$$f(0,0)=0$$

$$f(x,y)=0+(x+y)-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x+y)^n$$
$$+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\cdot\frac{(x+y)^{n+1}}{(1+\theta x+\theta y)^{n+1}}$$

§18 隐函数存在定理及应用

内容：隐函数存在定理

可微的几何应用

方向导数及梯度

极值与最值

§18.1 隐函数存在定理

一、问题

函数方程(组)在什么条件下确定(隐)函数.

1. $F(x,y)=0 \xrightarrow{\text{条件}} y=f(x)$ 及可导性

2. $F(x,y,z)=0 \Longrightarrow z=z(x,y)$ 及偏导数求法

3. $F(x_1,\cdots,x_n,u)=0 \Longrightarrow u=f(x_1,\cdots,x_n)$

4. $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ 及可导性

5. $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 及偏导数

一般地，m个方程 n个变量的方程(组)在什么条件下确定隐函数.($n>m\geq 1$)

二、一个方程确定隐函数

Thm 1. 设$F(x,y)$在含点(x_0,y_0)的一个区域内有连续偏导数，且满足

(i) $F(x_0,y_0)=0$ (ii) $F_y(x_0,y_0)\neq 0$

则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)某个邻域内确定一个有连续导数的单值函数$y=y(x)$，满足

(i) $y_0 = y(x_0)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{F_x}{F_y}$

Proof. (1) 隐函数存在性的证明（略）

(2) 若 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，下面给出求导方法及公式：

由于 $F(x,y(x)) \equiv 0$，方程两边对 x 求导：

$$F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} \equiv 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Rem. (1) 定理1中条件加强到 $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数，则所确定的隐函数 $y=y(x)$ 有二阶导数连续，且有下面公式：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{\frac{dF_x}{dx}F_y - F_x\frac{dF_y}{dx}}{F_y^2}$$

$$= -\frac{\left[F_{xx} + F_{xy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]F_y - F_x\left[F_{yx} + F_{yy}\cdot\frac{dy}{dx}\right]}{F_y^2}$$

$$= -\frac{F_{xx}\cdot F_y^2 - 2F_{xy}\cdot F_x F_y + F_{yy}\cdot F_x^2}{F_y^3}$$

(2) 若定理1中条件 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 换为 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $F(x,y)=0 \Rightarrow x=x(y)$.

(3) 定理1中确定隐函数的条件是充分非必要的.

例如：方程 $x^3-y^3=0 \Rightarrow y=x$ 在 $(0,0)$ 邻域内

F_x, F_y 均连续但 $F_y(0,0)=0$

(4) 定理1可推广为一个方程n个变量的情形，例如：

Thm 1' 设 $F(x,y,z)$ 在各点 (x_0,y_0,z_0) 的区域上有连续偏导数，且满足

(i) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ (ii) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则 $F(x,y,z)=0 \Rightarrow z=z(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

(5) 若定理1'中条件加强为 $F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则 $F(x,y,z)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=x(y,z) \\ y=y(x,z) \\ z=z(x,y) \end{cases}$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)\cdot\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)=-1$$ 表明

偏导记号 $\frac{\partial z}{\partial x}\neq \partial z/\partial x$

例1 证明方程 $x^2+y^2=1$ 在点 $(0,1)$ 邻域内存在隐函数 $y=y(x)$ 并求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Proof. 记 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，$F(0,1)=0$，$F_x=2x$，$F_y=2y$ 连续

$F_y(0,1)=2\neq 0$，由隐函数存在定理，方程确定有连续导数的函数 $y=y(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

例2 已知方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Solve. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

$F_x=2x$，$F_y=2y$，$F_z=2z-4$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-x}{z-2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-y}{z-2}$$

三、方程组确定隐函数

Thm 2. 设 $F(x,y,z)$ 与 $G(x,y,z)$ 在含点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的区域上有连续偏导数，满足：

(i) $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$

(ii) $J=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}\neq 0$（记作 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$）

则方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内确定两个隐函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，满足：

(i) $y(x_0)=y_0$，$z(x_0)=z_0$

(ii) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{J}$，$\frac{dz}{dx}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{J}$

$$=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} \qquad =-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}$$

Proof. (1)隐函数的存在性证明（略）

(2)下面推导出导数公式：

设 $y=y(x)$ 与 $z=z(x)$ 是方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，则 $\begin{cases} F(x,y(x),z(x))\equiv 0 \\ G(x,y(x),z(x))\equiv 0 \end{cases}$

方程组两边分别对 x 求导：

$$\begin{cases} F_x+F_y\cdot\frac{dy}{dx}+F_z\cdot\frac{dz}{dx}=0 \\ G_x+G_y\cdot\frac{dy}{dx}+G_z\cdot\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

由 Cramer 法则：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=-\frac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}.$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}$$

Rem. 定理2可推广为m个方程n个变量的方程组确定隐函数的情形

Thm 2' 设 $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 在含点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的区域上有连续偏导数，满足：

(i) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

(ii) $J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_{P_0} \neq 0$

则方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 在点 P_0 的某邻域内确定隐函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 这两个隐函数有连续偏导数，

且：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

例3 (1) 方程组 $\begin{cases} xu+yv=1 \\ yu-xv=0 \end{cases}$ 在什么条件下确定隐函数

$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$

(2) 求隐函数的偏导数：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$

Solve. 记 $F=xu+yv-1$，$G=yu-xv$，F、G所有偏导数显然连续

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = -(x^2+y^2)$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，方程组可确定隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

根据求导公式，$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} u & y \\ -v & -x \end{vmatrix}$

$$=\frac{-(ux-vy)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{vmatrix} x & u \\ y & -v \end{vmatrix}$$

$$=\frac{-(xv+yu)}{x^2+y^2}$$

另解：方程组两边分别对 x 求偏导：

$$\begin{cases} u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial x}=0 \\ -v+y\frac{\partial u}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-(ux-vy)}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(xv+yu)}{x^2+y^2} \end{cases}$

四. 反函数存在定理

Thm 3. 设 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 在定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的区域上有连续偏导数，且 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x_0,y_0)}\neq 0$，记 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，则函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 确定(唯一)在 (u_0,v_0) 邻域内有连续偏导数的反函数组：

$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$.

且 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

Proof. 记 $F=u(x,y)-u$，$G=v(x,y)-v$

F、G 对 x,y,u,v 的偏导数均连续

$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

$$J=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}\neq 0$$

则方程组 $\begin{cases} F=0 \\ G=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 有连续偏导数，称其为原函数组的反函数. 且

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -1 & u_y \\ 0 & v_y \end{vmatrix}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_v & F_y \\ G_v & G_y \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & u_y \\ -1 & v_y \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

同理，$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

Cor. 在定理3的条件下，原函数组 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 的雅可比行列式 $J_1=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$ 与反函数组 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 的雅可比行列式 $J_2=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ 的关系：$J_1=\frac{1}{J_2}$

Proof. 根据定理3，

$$J_2=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{J_1}\frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{1}{J_1}\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{1}{J_1}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{J_1}\frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{J_1^2}\begin{vmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{vmatrix}=\frac{1}{J_1^2}(u_x v_y-v_x u_y)=\frac{1}{J_1^2}\cdot J_1=\frac{1}{J_1}$$

即 $J_1\cdot J_2=1$

例4 求 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 的反函数 $(0<r<+\infty, -\pi<\theta<\pi)$

Sole. $x_r, x_\theta, y_r, y_\theta$ 显然连续，$J=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=r\neq 0$

根据定理3的推论，原函数组存在反函数. 解出

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0 \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0 \end{cases}$$

Rem. 若改为 $r>0$, $0<\theta<2\pi$:

反函数: $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\theta=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0, y>0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & x<0,\\ \frac{3\pi}{2}, & x=0, y<0\\ 2\pi-\arctan\frac{y}{x}, & x>0, y<0\end{cases}$$

§18.2 可微的几何应用

$\begin{cases} \text{空间曲线的切线及法平面} \text{ —— 切向量 } \vec{T} \\ \text{空间曲面的切平面及法线} \text{ —— 法向量 } \vec{n} \end{cases}$

一、空间曲线的切线及法平面

1. 切线

Def. 设 Γ 是一条空间连续曲线，M_0 是 Γ 上的一定点，M 是 Γ 上的一动点，直线 $\overline{MM_0}$ 称为割线. 若 M 沿 Γ 无限靠近 M_0 时割线的极限位置存在，则该位置对应的直线称为在 M_0 处切线，否则称 Γ 在点 M_0 处无切线.

2. 参数方程表示曲线

已知空间曲线 Γ：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，$t\in I$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 Γ 上对应参数 $t_0\in I$，$x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$，$z_0=\omega(t_0)$，设 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 都存在且不全为 0.

动点 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ 在 Γ 上. $\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$，$\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$，$\Delta z=\omega(t_0+\Delta t)-\omega(t_0)$.

割线 $\overline{MM_0}$ 方程：$\dfrac{x-x_0}{\Delta x}=\dfrac{y-y_0}{\Delta y}=\dfrac{z-z_0}{\Delta z}$，即：

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

令 $t\to 0$，有：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

称其为 Γ 在点 M_0 处的切线方程，这里 $\vec{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$ 称为一个切向量.

法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$

3. 一般方程表示曲线

设空间曲线 Γ 的方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，F与G满足隐函数存在定理，即在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的邻域内有连续偏导数，且至少有一个Jacobi行列式不为0，不妨设 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$.

根据隐函数存在定理，

$$\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}, \quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}$$

切向量 $\vec{T}=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}\Big|_{x_0}=\left\{1,-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)},-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}\right\}\Big|_{M_0}$

或 $\vec{T}=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}\Big|_{M_0}$

例1 求曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处切线方程

Solve. 切向量 $\vec{T}=\{x'_t,y'_t,z'_t\}\big|_{t=1}=\{1,2,3\}$

$t=1$ 对应点 $(1,1,1)$，切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

例2 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y+z=0 \end{cases}$ 在 $(1,-2,1)$ 处切线方程

Solve. $\vec{T}=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}$

方程组两边对 x 求导：

$$\begin{cases} 2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0 \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z} \\ \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z} \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}\Big|_{(1,-2,1)}=\{1,0,-1\}$.

切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$

二、空间曲面的切平面及法线

1. 一般方程表示曲面　　$S: F(x,y,z)=0$

设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处 F 可微，且 $F_x(x_0,y_0,z_0)$ 及 $F_y(x_0,y_0,z_0)$，$F_z(x_0,y_0,z_0)$ 不全为 0，则在 M_0 处有 F 的切平面.

Def. 曲面 S 上过定点 M_0 的任意一条可微曲线的切线共面，这个共面对应的平面称为面 S 在 M_0 处的切平面.

下面证明共面：设 Γ 是 S 上过 M_0 的一条可微曲线，其方程：

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，$t\in I$，$t_0\in I$ 且 t_0 对应 (x_0,y_0,z_0)，Γ 的切向量：

$\vec{\tau}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$

由于 Γ 在 S 上，$F(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))\equiv 0$

求导得，$F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\omega'(t_0)=0$

显然 $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0$，$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)$，$\vec{n}\perp\vec{\tau}$

以上表明，曲面 S 上过点 M_0 的所有可微曲线的切线共面.

Def. $\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}$ 是曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量

*2. 参数方程表示曲面

设曲面参数方程 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，$(u,v)\in D$. 这里要求三个函数都有一阶连续偏导数，且其中至少有一对函数对应的 Jacobi 行列式不为 0. 不妨设 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

由隐函数存在定理，$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，且：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}$$

曲面 S：$z=z(u(x,y),v(x,y))=0$

对应法向量 $\vec{n}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right\}$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$

$$=\frac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix} z_v & z_u \\ x_v & x_u \end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

法向量 $\vec{n}=\left\{\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)},-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},-1\right\}$

或 $\vec{n}=\left\{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}$

三、~~§18~~ 全微分的几何意义

1. 曲面 $z=f(x,y)$ 的切平面方程

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

2. 全微分的几何意义

$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=dz+o(\rho)$$

根据切平面方程，切平面上 z 坐标增量 $\Delta z\approx dz$，表明切平面可以(局部)近似可微曲面

例3 曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切平面方程

Solu. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$

$F_x(x,y,z)=2x$, $F_y(x,y,z)=2y$, $F_z(x,y,z)=2z$

法向量 $\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}\big|_{(1,2,1)}=\{2,4,2\}$.

切平面方程：$2(x-1)+4(y-2)+2(z-1)=0$

例4 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面方程：

$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$

§18.3 方向导数与梯度

多元函数在某点处沿一个射线方向上的变化率：方向导数

一、多元函数方向导数定义及计算公式

1. 方向导数

Def. 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，$\vec{e}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 是自 P_0 出发一条射线的方向，动点 P 在该线上，记 $\rho=|PP_0|$.

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cdot\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$ 存在，

则称极限值为 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿 $\vec{e}$ 方向的方向导数，记作 $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$，否则称方向导数不存在.

2. 方向导数与偏导数的关系

(1) $f_x(x_0,y_0)$ 存在 $\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=f_x(x_0,y_0),\ \vec{e}=\{1,0\}\\ \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=-f_x(x_0,y_0),\ \vec{e}=\{-1,0\}\end{cases}$

(2) $f_y(x_0,y_0)$ 存在 $\Longrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=f_y(x_0,y_0),\ \vec{e}=\{0,1\}\\ \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=-f_y(x_0,y_0),\ \vec{e}=\{0,-1\}\end{cases}$.

3. 方向导数计算公式

Thm. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任意方向 $\vec{e}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\alpha$$

Proof. 根据 $f(x,y)$ 可微，全增量 Δz 可表示为

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y+o(\rho)$$

当动点 (x,y) 在 $\vec{e}$ 方向对应射线时，

$\Delta x = \rho\cos\alpha,\ \Delta y = \rho\sin\alpha$

对应的增量

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\rho\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\rho\sin\alpha + o(\rho)$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$

Rem. (1) 可微是方向导数存在的充分~~必~~非必要条件

反例：$f(x,y) = \cancel{(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处的方向导数，

$\vec{l} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$，$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) - f(0,0)}{\rho} = 1$

但 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 均不存在，故不可微

(2) 以上方向导数的定义及计算公式可推广到 n 元函数，

例如 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处沿 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma) - f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$

若 f 在该点可微，则 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

例1 求 $z = xy^2$ 在点 $P(1,1)$ 沿 P 到 $Q(2,3)$ 方向的方向导数.

Solve. $\overrightarrow{PQ} = (1,2)$，记 $\vec{l} = \{\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$

$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha = 1\cdot\frac{1}{\sqrt5} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \sqrt5$

例2 求 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿 $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

方向的方向导数

Solve. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial r}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial r}{\partial z}\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$

$= \{\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\}\cdot\vec{l}$

例2 说明，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $(1,1,1)$ 处沿 $\vec{r}=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ 时方向导数最大.

二、梯度

1、梯度

Def. 设 $f(x,y)$ 有偏导数，称向量 $\{f_x, f_y\}$ 为 f 在 (x,y) 的梯度，记作 $\operatorname{grad} f=\{f_x, f_y\}$.

一般地，n 元有偏导数的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的梯度 $\operatorname{grad} f=\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\}$.

例如，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} f=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

2. 梯度与方向导数的关系

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，则 $f(x,y)$ 在该点处沿任意方向 $\vec{l}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 的方向导数可表示为 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$

$=\operatorname{grad} f\cdot\vec{l}=|\operatorname{grad} f|\cdot\cos\langle\operatorname{grad} f,\vec{l}\rangle$

结论：(1) $-|\operatorname{grad} f|\leq\frac{\partial f}{\partial l}\leq|\operatorname{grad} f|$

(2) 当 $\vec{l}$ 取梯度方向时，方向导数最大，且 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{max}=|\operatorname{grad} f|$.

当 $\vec{l}$ 取梯度反方向时，方向导数最小，且 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{min}=-|\operatorname{grad} f|$.

(3) 可微函数在该点处沿梯度方向增长最快.

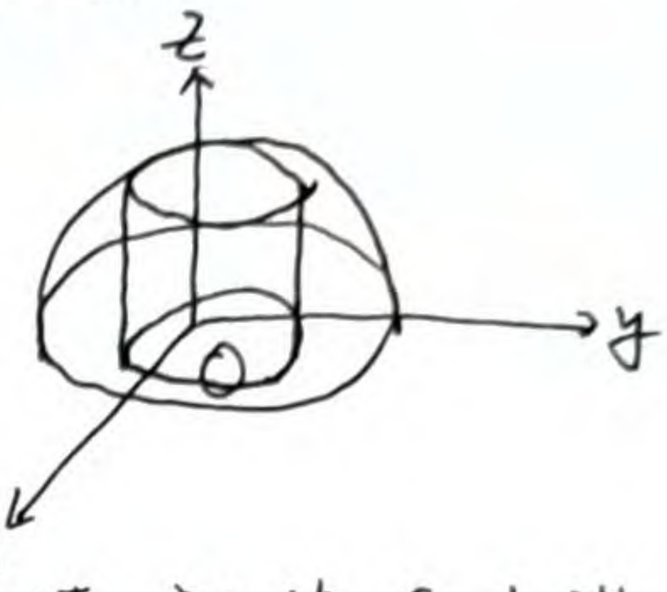
3. 梯度与等高线(或等位面)

(1) 定义

Def. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上连续，则称 D 中曲线 L:

$\{(x,y)\mid f(x,y)=c\}$ 为 $f(x,y)$ 的等高线.

例 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的等高线是一族同心圆

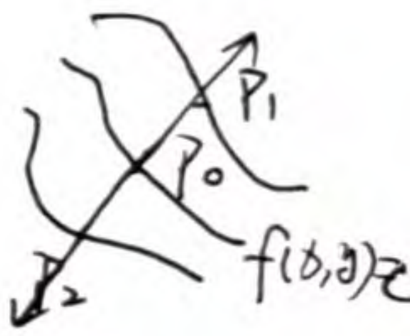


对于 $f(x,y,z)$ 在空间区域 G 上连续，则称 G 中曲面

$S:\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=c\}$ 为 $f(x,y,z)$ 的等位面.

(2) 结论：可微函数在一点的梯度是函数过该点的等高线(或等位面)的一个法向量，是从数值低的等高线指向数值高的等高线.

Proof. 过 P_0 等高线 $f(x,y)=c$ $(c=f(P_0)=f(x_0,y_0))$



过 P_0 的切向量 $\vec{T}=\{1,-\frac{f_x}{f_y}\}\parallel\{f_y,-f_x\}$

取 $\vec{n}=\{f_x,f_y\}=\text{grad}\,f$，是法向量

故梯度是函数过该点的一个法向量

又当 P 与 $\text{grad}\,f$ 一致时，$\left.\frac{\partial f}{\partial P}\right|_{max}=|\text{grad}\,f|=\lim\limits_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}>0$

根据极限的保号性，当 P 在梯度方向的射线上且充当靠近 P_0 时，$f(P)>f(P_0)$.

故从数值低指向数值高的等高线对应方向为梯度方向.

一般地，可微三元函数在一点的梯度是函数过该点等位面在该点的一个法向量，从数值低指向数值高的等位面的方向.

例3 求函数 $z=1-x^2-y^2$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 处沿曲线 $x^2+y^2=1$ 在该点内法向量方向的方向导数.

Solu. I. 可用公式求：$\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\alpha$

II. 曲线 $x^2+y^2=1$ 是函数 $z=1-x^2-y^2$ 的一条过定点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 的等高线 $1-x^2-y^2=0$

当 c 增加时 $(1-x^2-y^2=c)$，对应内法向量，即梯度就是其中一个内法向量

$$\frac{\partial z}{\partial n}=|\mathrm{grad}\,z|=\sqrt{(-2x)^2+(-2y)^2}\Big|_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}=2.$$

§18.4 多元函数的极值与最值

一、预备知识

矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对应非零向量 (x,y)，恒有 $(x\ y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$

$\Leftrightarrow$ $A>0$ 且 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$（顺序主子式均为正）

$\Leftrightarrow$ 所有特征值大于0

矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 负定同理.

$\Leftrightarrow$ $A<0$，$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$（顺序主子式中偶数阶为正，奇数阶为负）

$\Leftrightarrow$ 所有特征值小于0

二、极值的定义及必要条件

1. 定义

Def. 设 $f(x,y)$ 在含 (x_0,y_0) 区域上定义，若对该点某邻域内的点 (x,y) 都有

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值（极小值同理），极大值与极小值统称为极值.

例如，$f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $(0,0)$ 取极小值

$f(x,y)=xy$ 在 $(0,0)$ 不取极值

2. 极值的必要条件

Thm1 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有偏导数且取极值，则

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0.$$

Proof. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极值，则 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 也取极值，由 Fermat 定理，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)=0$.

同理可证 $f_y(x_0,y_0)=0$.

Rem. (1) 逆命题不成立，如 $f(x,y)=xy$ 在 $(0,0)$ 处不取极值

(2) 偏导数不存在的点，也可能是极值点，如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处取极值.

Def. 方程 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 的根对应的点称为函数的稳定点（驻点）

总结得出，可能的极值点：稳定点，偏导数其中之一至少不存在

三、极值的充分条件

Thm2 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内有二阶连续偏导数，且

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则 (1) $AC-B^2>0$，$f(x_0,y_0)$ 一定是极值，进一步，

(i) $A>0$（或 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 正定）时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(ii) $A<0$（或 $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 负定）时 $f(x_0,y_0)$ 为极大值

(2) $AC-B^2<0$（$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 不定）时 $f(x_0,y_0)$ 一定非极值.

(3) $AC-B^2=0$，$f(x_0,y_0)$ 不一定是极值.

Proof. 记 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$

由泰勒公式，
$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y \\ &+\frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+ \\ &\quad 2f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta x\Delta y \\ &\quad +f_{yy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}\left[(A+\alpha)\Delta x^2+2(B+\beta)\Delta x\Delta y+(C+\gamma)\Delta y^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2\right] \end{aligned}$$

记 $\Delta x=\rho\cos t$，$\Delta y=\rho\sin t$，$t\in[0,2\pi]$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{2}\left\{[\cos t, \sin t]\cdot\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\rho^2}{2}[\Phi(t)+\delta]$$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 都是 $\rho\to 0$ 的无穷小量)

$\Phi(t)$: (1) $AC-B^2>0$ 且 $A>0$, $\Phi(t)>0$

记 $\min\limits_{t\in[0,2\pi]}\Phi(t)=m>0$

当 ρ 很小时, $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\rho^2}{2}(\Phi(t)+\delta)>\frac{\rho^2}{2}\cdot\frac{m}{2}$

(2) $AC-B^2>0$ 且 $A<0$, 同理

(3) $AC-B^2<0$, 无论 ρ 如何取, $\Phi(t)$ 可正可负, $f(x_0,y_0)$ 非极值.

(4) $f(x,y)=x^4y^2$, $AC-B^2=0$, 在 $(0,0)$ 取极小值

$f(x,y)=x^3y^3$, $AC-B^2=0$, 在 $(0,0)$ 不取极值

Rem. 以上多元函数极值的定义、定理可推广到 n 元函数上,

例如:

Thm 1' 设 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 有偏导数且取极值, 则

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Thm 2' 设 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 某邻域内有二阶连续偏导数, 且 $f_x(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0)=f_z(x_0,y_0,z_0)=0$

记 $H(P_0)=\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{bmatrix}_{P_0}$ (Hessian 矩阵)

则 (i) Hessian 矩阵正定, $f(P_0)$ 为极小值

Hessian 矩阵负定, $f(P_0)$ 为极大值

(ii) Hessian 矩阵不定 (特征值有正有负, 但不为0), $f(P_0)$ 非极值

(iii) Hessian 矩阵特征值有0时, $f(P_0)$ 不一定为极值

例1 $f(x,y)=x^3-\frac{5}{2}x^2+2xy-y^2$ 的极值

Solu. 解方程组 $\begin{cases} f_x=3x^2-5x+2y=0 \\ f_y=2x-2y=0 \end{cases}$

解得 $x=y=0$ 或 $x=y=1$，稳定点 $(0,0)$ $(1,1)$

$A=f_{xx}=6x-5$，$B=f_{xy}=2$，$C=f_{yy}=-2$

在 $(0,0)$ 处 $AC-B^2=6>0$，$A=-5<0$，$f(0,0)=0$ 为极大值

在 $(1,1)$ 处 $AC-B^2=-6<0$，$f(1,1)$ 非极值.

四. 最值的求法

1. $f(x,y)$ 在有界闭区域上的最值；设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内至多有个别点无偏导数，$f(x,y)$ 的稳定点至多有限，记这两种点(可能的极值点)为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$

(1) 计算 $f(P_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的值；

(2) 求出 $f(x,y)$ 在 D 边界上的最值 M_1 与 m_1

则 $M=\max\{M_1, m_1, f(P_1), \cdots, f(P_n)\}$

$m=\min\{M_1, m_1, f(P_1), \cdots, f(P_n)\}$.

例2 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 在区域 D：$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 2\pi \end{cases}$ 上的最值.

Solu. 解方程组 $\begin{cases} f_x=\cos x-\cos(x+y)=0 \\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0 \end{cases}$

解得 $x=y=\frac{2\pi}{3}$，D 内稳定点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$

$f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

在边界上：$f(x,y)\equiv 0$，$y=0$，$0\leq x\leq 2\pi$

$f(x,y)\equiv 0$，$x=0$，$0\leq y\leq 2\pi$

$f(x,y)\equiv 0$，$x+y=2\pi$，$x\geq 0$，$y\geq 0$

综上，在D边界上 $f(x)\equiv 0$. $f(x,y)$ 在D上最值：

$M=\max\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right\}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$m=\min\left\{\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right\}=0$.

2. 实际问题求最值举例

方法：首先根据题意确定出一个函数，将实际问题求最转化为该函数求最(或极值)

例3 将一个正数分成三个正数之和，求这三个正数之积的最大值.

Solu. 设三个正数分别为 $x,y,a-x-y$，即求函数 $f(x,y)=xy(a-x-y)$ 在区域 $D=\begin{cases}x>0\\y>0\\x+y<a\end{cases}$ 上的最大值

解方程组 $\begin{cases}f_x=y(a-x-y)-xy=0.\\f_y=x(a-x-y)-xy=0\end{cases}$

解得 $x=y=\frac{a}{3}$，稳定点 $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$

根据题意，该函数在D内存在最大值，且函数只有一个可能的极值点，故该点对应最大值.

即三个正数均为 $\frac{a}{3}$ 时其积最大 $(\frac{a}{3})^3$.

五、条件极值.

1. 引例 例1 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x+y+z=a$，$(x>0,y>0,z>0)$ 下的极值.

例2 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 第一卦限上求一点，使该点的三个坐标之积最大

(求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值点)

2. 条件极值问题

问题I 求 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值.

问题Ⅱ 求 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值.

问题Ⅲ 求 $f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极值.

以上条件极值问题可推广为求一个函数在m个条件(方程)下的极值.

3. 条件极值的必要条件

以问题Ⅰ为例讨论,设 (x_0,y_0) 是问题Ⅰ的极值点,则

$$\varphi(x_0,y_0)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

假设 $\varphi(x,y)$ 满足隐函数存在定理,则 $\varphi(x,y)=0$ 存在隐函数 $y=y(x)$

由于 (x_0,y_0) 是问题Ⅰ的极值点,则 $x=x_0$ 也是一元函数 $z=f(x,y(x))$ 的极值. 由Fermat定理,

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x,y)+f_y(x,y)\cdot\left(-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)}=0$$

即 $f_x(x_0,y_0)-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\cdot\varphi_x(x_0,y_0)=0. \quad \cdots\cdots ②$

综上,条件极值点 (x_0,y_0) 满足条件

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases} \qquad (*)$$

令 $-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=\lambda$,则条件 $*$ 等价为

$$\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases} \qquad (**)$$

4. 用Lagrange法求可能的条件极值点方法

(1) 构造函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases}F_x=0\\ F_y=0\\ F_\lambda=0\end{cases}$ 得稳定点,判断是否为极值点.

以上方法称为 Lagrange 乘数法，可推广：

问题 II. $F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$

问题 III. $F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

总结求条件极值的方法：

求 $f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值

方法 I 将 $\varphi(x,y,z)=0$ 解出隐函数（例如 $z=z(x,y)$），代入 $f(x,y,z)$ 求二元函数无条件极值

方法 II Lagrange 乘数法：构造 $F(x,y,z,\lambda)=f+\lambda\cdot\varphi$

求 $F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ 得稳定点

判别该稳定点是否为极值点

例 4 在椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的第一卦限部分上求一点，使该点的三个坐标之积最大.

Sol. 设椭球第一卦限上点 (x,y,z)，问题变为求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值.

令 $F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

$$\begin{cases} F_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ F_y=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ F_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ F_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

得 $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{3}} \\ z=\frac{c}{\sqrt{3}} \\ \lambda=-\frac{3}{2}\sqrt{3}yz \end{cases}$ 对应稳定点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$

根据题意，f 存在最大值且只有一个可能的极值点，该点对应最大值. $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 即为所求.

例5 证明：$a>0, b>0, c>0$ 时 $ab^2c^3 \leq 108\cdot\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$

Proof. 记 $a+b+c=k$，问题变为求 $f(a,b,c)=ab^2c^3$ 在条件 $a+b+c=k$ 下的极值

令 $F=ab^2c^3+\lambda(a+b+c-k)$

$$\begin{cases} F_a=b^2c^3+\lambda=0 \\ F_b=2abc^3+\lambda=0 \\ F_c=3ab^2c^2+\lambda=0 \\ F_\lambda=a+b+c-k=0 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} b=2a=\frac{k}{3} \\ c=3a=\frac{k}{2} \\ a=\frac{k}{6} \end{cases}$$

稳定点 $\left(\frac{k}{6},\frac{k}{3},\frac{k}{2}\right)$

根据题意，$f(a,b,c)$ 在该条件下存在最大值且只有一个可能的极值点，故该点对应函数最大值，

$$f(a,b,c)\leq f\left(\frac{k}{6},\frac{k}{3},\frac{k}{2}\right) \Rightarrow ab^2c^3 \leq \frac{a+b+c}{6}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3$$

$$=108\cdot\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$$

类似地，$a>0, b>0, c>0$ 时 $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

多元函数微分学习题课

一、填空题

1. 下列函数在 $(0,0)$ 处可微的是 (2)、(4)、(6)、(8)

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $f(x,y)=|xy|$

(3) $f(x,y)=\sqrt[3]{|x|}\,y^2$

(4) $f(x,y)=\sqrt[3]{|x|}\,y^3$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

(6) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

(7) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

(8) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

(1) 偏导数不存在，不可微

(2)～(8)：偏导数存在且均为 0

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\begin{cases}0, & (2),(4),(6),(8)\\ \text{不存在} & (3),(5),(7)\end{cases},\quad \Delta f=f_x\Delta x+f_y\Delta y$$

2. 函数 $z=1+3x^2+2y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿曲线 $3x^2+2y^2=5$ 内法向量的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial n}=$

Solu. $3x^2+2y^2=5$ 为等高线，内法向量与梯度反方向一致

$$\frac{\partial z}{\partial n}=-|\operatorname{grad} z|=-\sqrt{52}$$

3. 曲线 $\begin{cases}y=2x\\ z=3x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,2,7)$ 处的切线方程：

Solve. $\begin{cases} y=2x \\ z=3x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=2x \\ z=7x^2 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\{1,2,14\}$

切线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{14}$

4. 已知 $F(u,v)$ 有连续偏导数，方程 $F(x+z,y+2z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $dz=$

Solve. 记 $\varphi(x,y,z)=F(x+z,y+2z)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}=\frac{F_u\cdot 1+F_v\cdot 0}{F_u\cdot 1+F_v\cdot 2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}=-\frac{F_v}{F_u+2F_v}$$

$$dz=-\frac{F_u}{F_u+2F_v}dx+\left(-\frac{F_v}{F_u+2F_v}\right)dy$$

5. 已知 $f(x,y)$ 可微，且 $f(1,2)=2$，$f_x(1,2)=2$，$f_y(1,2)=3$

记 $\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，求 $\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=1}=$

Solve. $f(x,2x)\big|_{x=1}=2$

$$\varphi'(x)=f_x\cdot 1+f_y(x,f(x,2x))\cdot[f_x(x,2x)+2f_y(x,2x)]$$

$$\varphi'(1)=\underset{f_x(1,2)}{2}+f_y(1,2)\cdot[f_x(1,2)+2f_y(1,2)]$$

$$=2+3\cdot(2+2\cdot 3)=26$$

6. 平面曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=13 \\ z=0 \end{cases}$ 绕坐标轴 x 轴旋转一周所得旋转曲面在点 $(1,1,2)$ 处切面方程

Solve. 旋转面方程：$3x^2+2y^2+2z^2=13$.

法向量 $\vec{n}=\{6,4,8\}\parallel\{3,2,4\}$

切平面方程：$3(x-1)+2(y-1)+4(z-2)=0$.

二、计算题

1. 已知 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，记 $z=f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

Solu. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_u+y\cdot[xf_{uu}+\frac{1}{x}f_{uv}]-\frac{1}{x^2}f_v-\frac{y}{x^2}\cdot[f_{vu}\cdot x+\frac{1}{x}f_{vv}]$$

2. 设 $f(x,y)$ 在全平面上可微，且 $f(1,1)=2$，$df=2xdx-2ydy$，求 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ 上的最值.

Solu. $f(x,y)=x^2+\varphi(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=\varphi'(y)=-2y$，$\varphi(y)=-y^2+C$

$f(x,y)=x^2-y^2+C$

由 $f(1,1)=2$，$C=2$，即 $f(x,y)=x^2-y^2+2$

$\begin{cases} f_x=2x=0 \\ f_y=-2y=0 \end{cases}\Rightarrow$ 稳定点 $(0,0)$

$f(0,0)=2$

求 $f(x,y)$ 在 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的最值：

即求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在条件 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的极值.

令 $F=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$

解 $\begin{cases} 2x+2\lambda x=0 \\ -2y+\frac{\lambda y}{2}=0 \\ x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$ 得稳定点 $(1,0)$，$(-1,0)$，$(0,-2)$，$(0,2)$

$f(1,0)=f(-1,0)=3$，$f(0,2)=f(0,-2)=-2$

比较大小得到最大值3，最小值 -2

3. 求由方程 $x^2+6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值

Solve. 方程两边分别对 x, y 求导

$$\begin{cases} 2x+6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ 6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $x=-3y,\ y=z$

将 $x=-3y,\ y=z$ 代入原方程得稳定点

$(-9,3)$, $z=3$ $(9,-3)$, $z=-3$

继续对 x, y 求导有：

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2z\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

在 $(-9,3)$ 处 $\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{6} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{5}{3} \end{cases}$ $AC-B^2=\frac{1}{36}>0,\ A>0$ 在 $(-9,3)$ 处有极小值

在 $(9,-3)$ 处 $\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{6} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{5}{3} \end{cases}$ $AC-B^2=\frac{1}{36}>0,\ A<0$ 在 $(9,-3)$ 处有极大值

三. 证明题

1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续导数，记 $D:(a,b)\times(a,b)$

$F(x,y)$ 在 D 上定义如下：

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y \\ f'(x), & x=y \end{cases}$$

证明：$\lim\limits_{\substack{x\to c\\ y\to c}} F(x,y)=f'(c)$

Proof. 1) 当 $x\neq y$ 时 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$

$$\lim_{\substack{x\to c\\ y\to c}}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\lim_{\substack{x\to c\\ y\to c}}\frac{f'(\xi)(x-y)}{x-y}=f'(c)$$

2) 当 $x=y$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to c\\ y\to c}} F(x,y) = \lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c)$

思考：设 $f(x)$ 在 a 的邻域定义，在 a 点可导，证明极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to a\\ x<a<y}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(a)$$

2. 设 $z=f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，证明在变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 下，

$z=f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 满足：

1) $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=r\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$

Proof. 1) $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$

$$=\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

即 $r\cdot\frac{\partial z}{\partial r}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \overset{或}{=\!=} x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(r\cos\theta)\right](-r\sin\theta)-\frac{\partial z}{\partial x}(r\cos\theta)$$

$$+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(r\cos\theta)\right](r\cos\theta)-\frac{\partial z}{\partial y}(r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{或}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3. 设 $f(x,y)$ 在全平面可微，且满足

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0$$

证明 $f(x,y)\equiv c$.

Proof. 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\quad z=f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{r}(xf_x+yf_y)\equiv 0$$

即 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=F(\theta)$

$$f(0,0)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\lim_{r\to 0} F(\theta)=F(\theta)$$

即 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)\equiv f(0,0)$，$f(x,y)=f(0,0)$

4.（作业）设 $F(x,y,z)$ 可微且为 k 次齐次函数：

$$\forall t,\ F(tx,ty,tz)=t^k F(x,y,z)$$

又 $F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$，证明：曲面 $F(x,y,z)=0$ 上任一点切平面过一定点

§19 重积分

内容：二、三重积分的定义及计算法

重积分的应用

一、预备知识

关于平面图形的面积的说明：

(1) 平面区域的面积：用平行于坐标轴的直线分割区域，将区域分成若干小矩形及若干含边界的小矩形，记这两类矩形面积之和（不含边界）分别为 $S(\lambda)$ 与 $S_1(\lambda)$，λ 是分法对应小矩形的最大直径. 当 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_1(\lambda)=0$ 时 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S(\lambda)=A$ 称为该区域的面积；当 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_1(\lambda)\neq 0$ 或 $\lim S_1(\lambda)$ 不存在时该区域无面积.

(2) 一个区域是否有面积与边界曲线特征有关：

(i) 若其边界由有限条 $y=f(x)$ 型连续曲线时一定有面积；

(ii) 若其边界是光滑曲线，区域也有面积；

(3) 一个有面积的区域去掉有限个点或去掉有限条光滑曲线后其面积仍存在且值不变.

(4) 一个平面点集D有面积 $\Longleftrightarrow$ 其边界 ∂D 面积为0

二、二重积分的定义

1. 定义

Def. 设D是一个（有面积）有界区域，$f(x,y)$ 在D上有定义，将D任意分成n个（有面积）小区域：$\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$，$\Delta\sigma_i$ 也表示其面积，任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 并作和 $\sum f(\xi_i,\eta_i)\cdot\sigma_i$，记 λ 是 n 个 $\Delta\sigma_i$ 的最大直径，若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i = J \text{（存在且与分法无关）}$$

则称 $f(x,y)$ 在积分区域 D 上可积，其极限值称为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i$

分析定义：$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ s.t. $\forall \lambda<\delta$，对应和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,y_i)\cdot\Delta\sigma_i$

与一个数 J 满足 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i - J\right|<\varepsilon$

则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i = J = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

Rem. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，$\bar{D}=D\cup\partial D$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)\,d\sigma$$

2. 可积条件

二重积分也是 Riemann 积分

Thm1. 可积函数一定有界

Thm2. 在有界闭区域上连续的函数一定可积

Rem. Riemann 可积与被积函数连续点的多少有关

Thm* $f(x,y)$ 在区域 D 上可积的充要条件为 $f(x,y)$ 在 D 上有界且间断点的集合测度为 0.

三、二重积分的性质

以下出现的二重积分均存在：

性质1. $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$

性质2. $\iint\limits_D k f(x,y)\,d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

性质3. $\iint\limits_D d\sigma = A$，$A$ 为 D 的面积

性质4. 若 $D=D_1\cup D_2$，$D_1\cap D_2$ 面积为 0，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma$$

性质5. 若 $f(x,y) \geq g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \geq \iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$

Cor. $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,d\sigma$

性质6. 若 $m \leq f(x,y) \leq M$，则 $m \cdot A \leq \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \leq M \cdot A$

其中 A 为 D 的面积.

性质7.（积分中值定理）

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $\exists\,(\xi,\eta) \in D$

s.t. $\iint\limits_D f(\xi,\eta)\,d\sigma = f(\xi,\eta) \cdot A$

其中 A 为 D 的面积.

Def. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，称 $T = \frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

为 D 上连续函数 $f(x,y)$ 的平均值.

例1 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上可积，若 D 关于 y 轴对称，记 D_1 与 D_2

是 y 轴两侧的部分子区域.

(1) 若 $f(x,y)$ 关于 x 为奇函数：$f(-x,y) = -f(x,y)$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 0$

(2) 若 $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数：$f(-x,y) = f(x,y)$

则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$

Proof. 由 $f(x,y)$ 可积，积分值与分法无关，取特殊分法：将 D_1

分成 n 个小区域：$\Delta\sigma_1, \cdots, \Delta\sigma_n$，$D_2$ 分成 n 个小区域：

$\Delta\sigma_1', \cdots, \Delta\sigma_n'$，要求 $\Delta\sigma_i$ 与 $\Delta\sigma_i'$ 关于 y 轴对称

$\Delta\sigma_i$ 中任取一点 (ξ_i,η_i)，其对称点 $(-\xi_i,\eta_i) \in \Delta\sigma_i'$

$\sum\limits_{D_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \sum\limits_{D_2} f(-\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i' = \sum\limits_{D_1}[f(\xi_i,\eta_i) + f(-\xi_i,\eta_i)]\Delta\sigma_i$

若 $f(-x,y) = -f(x,y)$，则 $\sum\limits_D = 0$，$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 0$

若 $f(-x,y) = f(x,y)$，则 $\sum\limits_D = 2\sum\limits_{D_1}$，$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$

例2 (同理) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，D 关于直线 $y=x$ 对称，若 $f(x,y)=-f(y,x)$，则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma=0$.

§19.2 二重积分计算法

说明：在 xOy 直角坐标系中，$f(x,y)$ 在区域 D 中可积，积分值（极限）的求法与分法无关．取特殊分法：用平行于坐标轴直线分割 D 得小矩形（不计不标准的矩形），这时小矩形面积 $\Delta\sigma=\Delta x\cdot\Delta y$．面积元素 $d\sigma=dx\,dy$，对应二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

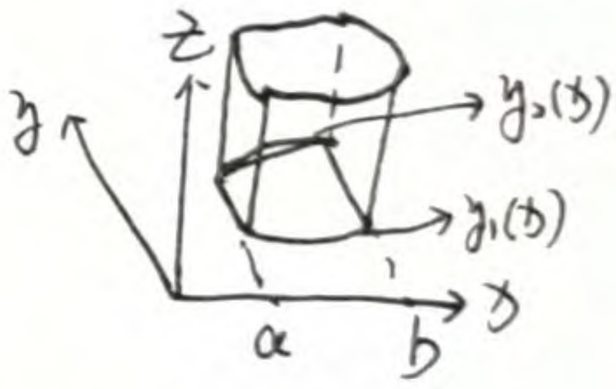
一、利用直角坐标系计算

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面有界区域 D 上连续，且 $f(x,y)$ 非负，$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 表示 $f(x,y)$ 对应于曲顶柱体的体积．

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$$

下面用定积分计算体积的方法来计算二重积分（平行截面面积已知）：

(1) 若 D 是 X 型区域：$D=\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b\end{cases}$



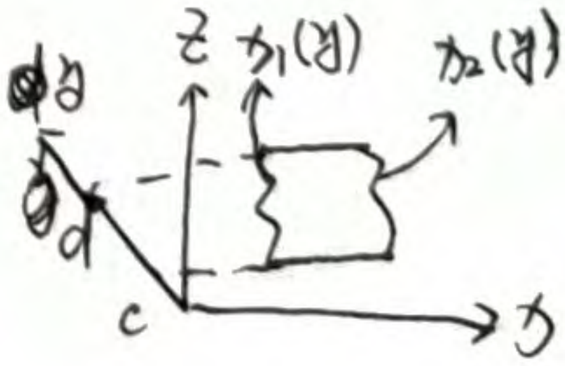
过点 $(x,0,0)$ 垂直 x 轴平面去截曲顶柱体得截面为曲边梯形，其面积 $A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

体积 $V=\int_a^b A(x)\,dx$

即 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \xlongequal{\text{记作}} \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$

右边称为先 y 后 x 的二次积分

(2) 若 D 是 Y 型区域：$D=\begin{cases} x_1(y)\le x\le x_2(y) \\ c\le y\le d\end{cases}$



类似地，$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$

(3) 若D是一般区域，可将D适当分成若干x型区域和y型区域，根据积分可加性，分别化为二次积分来计算.

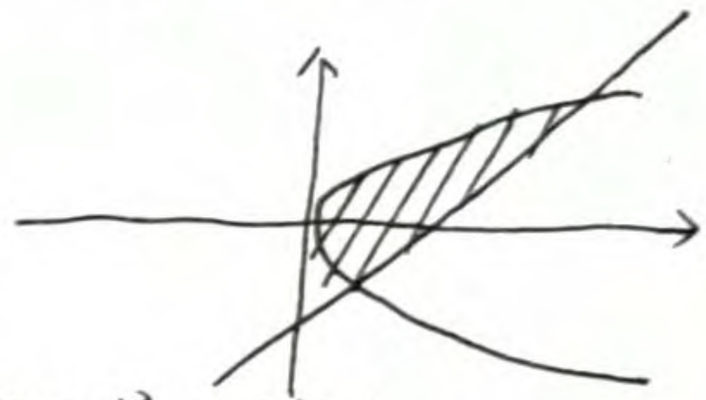
Rem. (1) 若D为既x型又y型，则

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

右边等号称为二次积分可交换次序

(2) 以上 $f(x,y)$ 连续可放宽为可数点不连续；$f(x,y)$ 非负不是必需的

例1 计算 $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$，D是由曲线 $x=y^2$ 与 $y=x-2$ 所围区域.



Solu. $\begin{cases} x=y^2 \\ y=x-2 \end{cases}$ 有交点 $(1,-1)$ 和 $(4,2)$

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx = \int_{-1}^{2} y\cdot\frac{1}{2}\left[(y+2)^2-y^4\right]dy$$

$$=\frac{45}{8}$$

另解:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,dy + \int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,dy = \cdots = \frac{45}{8}$$

例2 计算 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$，D是由曲线 $y=x$ 与 $x=y^2$ 所围区域

Solu. $\begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases}$ 有交点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$

$$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}\,dy$$，无法写成初等函数

$$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx = \int_0^1 (y-y^2)\frac{\sin y}{y}\,dy = 1-\sin 1$$

设D是: $[a,b]\times[c,d]$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，则 $\iint\limits_D f(x)\cdot g(y)\,d\sigma = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy$

Proof. $\iint_D f(x)\cdot g(y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_c^d f(x)g(y)\,dy = \int_a^b f(x)\,dx\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$

$$= \int_c^d g(y)\,dy\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

例 设 $D:\begin{cases}0\le x\le R\\0\le y\le R\end{cases}$ $\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy$

$$= \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

令 $R\to+\infty$, $\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty}} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ (广义二重积分)

(正态分布的概率密度函数)

$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \cdots = \pi(1-e^{-R^2})$, 但在 xOy 直角坐标系中化为二次积分无法写出初等函数形式.

二、用换元法计算

Thm. 设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面有界闭区域 D 上可积, 函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 在 uOv 平面有界闭区域 D' 上有连续偏导数, 且满足:

(1) 变换 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$ 恰好将 D' 一一映射到 D, 同时 D' 的边界对应 D 的边界

(2) $J=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,du\,dv$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,\frac{1}{|J'|}\,dv\,dv$$

其中 $J'=\frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$

Proof. 略.

Rem. 定理中公式可推广至三重积分换元公式，实际上是定积分换元公式的推广：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

例3 计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，D是曲线 $xy=1$，$xy=2$ 与直线 $y=x$，$y=4x$ 所围区域

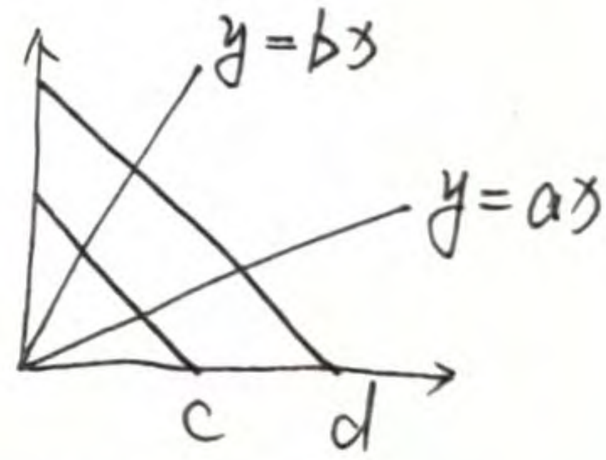
Solu. 令 $u=xy$，$v=\frac{y}{x}$

变换 $\begin{cases} u=xy \\ v=\frac{y}{x} \end{cases}$ 将D变为D'：$\begin{cases} 1\le u\le 2 \\ 1\le v\le 4 \end{cases}$

$$J'=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v,\quad J=\frac{1}{J'}=\frac{1}{2v}$$

$$原式 = \iint\limits_{D'} u\cdot\frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_1^2 u\,du\cdot\int_1^4\frac{1}{2v}\,dv = \frac{3}{4}\ln 4$$

例4 设D是由直线 $x+y=c$，$x+y=d$ 与 $y=ax$，$y=bx$ 所围图形，求D的面积（$0<c<d$，$0<a<b$）



Solu. 令 $u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$

变换 $\begin{cases} u=x+y \\ v=\frac{y}{x} \end{cases}$ 将D变为D'：$\begin{cases} c\le u\le d \\ a\le v\le b \end{cases}$

$$J'=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(1+\frac{y}{x})^2}{x+y} = \frac{(1+v)^2}{u}$$

$$J=\frac{1}{J'}=\frac{u}{(1+v)^2}$$

$$所求面积\ A=\iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_{D'}\frac{u}{(1+v)^2}\,du\,dv = \int_c^d u\,du\cdot\int_a^b\frac{dv}{(1+v)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(d^2-c^2)\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)$$

三、利用极坐标计算

变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 称为极坐标变换 这里 $0 \le r \le +\infty$，$0 \le \theta \le 2\pi$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

在直角坐标系下 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

或 $\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

Rem. (1) 一般极坐标变换 $\begin{cases} x = x_0 + r\cos(\theta+\theta_0) \\ y = y_0 + r\sin(\theta+\theta_0) \end{cases}$

(2) 变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 将 xOy 平面中圆域 $D: x^2+y^2 \le R^2$

变为 $rO\theta$ 直角坐标系中 D' 为矩形：$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

但 xOy 平面中的很多正常图形在极坐标变换下的原像 D' 很难看出图形，这是经常在原坐标系下认识 D'：仅考虑关系.

(3) 化为极坐标系下二重积分后根据 r 与 θ 关系再化为适当二次积分（经常考虑先 r 后 θ）

例5 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$ $D: x^2+y^2 \le R^2$

Solu. D 在极坐标系下表示 D'：$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le R \end{cases}$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,d\sigma = \iint\limits_D e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2}\, d\tfrac{1}{2}r^2$$

$$= \pi\cdot(1-e^{-R^2})$$

例6 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$ $\quad D: x^2+y^2 \le 2x$

Solu. D在变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 下的像 $D': \begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \iint\limits_D r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\,dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^3}{3}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta = \frac{32}{9}$$

例7 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Proof. $\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim\limits_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,d\sigma$

$D: \begin{cases} 0 \le x \le R \\ 0 \le y \le R \end{cases}$

记 $D_1: \begin{cases} x^2+y^2 \le R^2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} x^2+y^2 \le 2R^2 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

显然 $D_1 \subset D \subset D_2$, $\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}d\sigma \le \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma \le \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}d\sigma$

由例5, $\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}d\sigma = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$

$\iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}d\sigma = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$

$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \le \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$

令 $R\to+\infty$, $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

例8 计算 $\iint\limits_D |x|\,d\sigma$，这里 $D: 2x^2-2xy+y^2\le 1$

Solu. 令 $u=x,\ v=x-y$，则 $D': u^2+v^2\le 1$

$$J'=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\quad J=\frac{1}{J'}=-1$$

$$\iint\limits_D |x|\,d\sigma=\iint\limits_{D'}|u|\cdot|-1|\,d\sigma=\iint\limits_{D'}|u|\,d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,dr$$

$$=\frac{4}{3}$$

例9 计算 $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{2024}d\sigma$，这里 $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

Solu. $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}\quad J=abr$

$$原式=\iint\limits_D r^{4048}\,\cancel{d\sigma}\,abr\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^{4049}\,dr=2\pi\cdot\frac{1}{4050}$$

§19.3 三重积分

一、三重积分的定义

说明：空间几何体的体积：设Ω是空间直角坐标系中一个有界区域，其边界为分片光滑封闭曲面. 用平行于坐标平面的平面去截Ω得小正方体，其中含Ω内的小立方体体积之和记为$V(\lambda)$，含Ω边界的小立方体体积之和为$V_1(\lambda)$，则 $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_1(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} V(\lambda)$ $\underline{\underline{存在}}$ V是Ω的体积.

1、引例　求空间立体的质量M

已知Ω在空间直角坐标系中，对应密度

$\rho=\rho(x,y,z)$，$(x,y,z)\in\Omega$

求质量方法：(1)分割Ω，将Ω分成n个~~小~~部分小立方体：

$\Delta V_1,\cdots,\Delta V_n$，$\Delta V_i$也表示第$i$块体积、

(2) 取近似$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta V_i$，则$\Delta V_i$对应质量

$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta V_i$

(3) 求和并取极限

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ $\underline{\underline{\rho连续}}$ M

2、三重积分定义

Def. 设$f(x,y,z)$在空间有界区域Ω（有体积）上定义，将Ω任分成n个小部分立方体$\Delta V_1,\cdots,\Delta V_n$，$\Delta V_i$也表示体积，任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta V_i$，作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta V_i$并作和$\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，记$\lambda$是~~第~~$n$个小立方体$\Delta V_i$的最大直径，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 存在且与分法无关.

则称f在Ω上 Riemann 可积，极限值称为f在Ω上的

三重积分，记

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

3. 可积条件

(1) 可积函数必有界

(2) 若 f 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上连续，则 f 可积

(3) 若 f 在有界闭区域 $\bar{D}$ 上有限点或有限条光滑曲线段或有限片光滑曲面体积为零，连续且有界时也可积.

4. 三重~~极~~积分性质

三重积分性质完全类似二重积分

还要注意到下列性质：

(1) $\iiint_{\bar{D}} f(x,y,z)\,dV = \iiint_{D} f(x,y,z)\,dV$

(2) $\left|\iiint_{D} f(x,y,z)\,dV\right| \le \iiint_{D} |f(x,y,z)|\,dV$

(3) 若 f 在 D 上可积，则 $|f|$ 在 D 上可积

(4) 若 Ω 关于坐标平面 yOz 对称，f 在 Ω 上可积且关于 x 为奇函数，则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = 0$

(5) 若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续有界且 $f\geq 0$，$f\not\equiv 0$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV > 0$$

(6) 设 $f(x,y,z)$ 在点 $(0,0,0)$ 的某邻域内连续，则

$$\lim_{\rho\to 0}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)\,dV\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = f(0,0,0)$$

Rem. 以上(5)和(6)对二重积分也有类似结论

Proof. (6) 当 ρ 很小时，$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)\,dV = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{4}{3}\pi\rho^3$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\cdot\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)\,dV = \lim_{\rho\to 0} f(\xi,\eta,\zeta) = f(0,0,0)$$

二、利用直角坐标计算三重积分

首先，在 $Oxyz$ 直角坐标系下，f 在 Ω 上可积，积分可记

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

类似二重积分计算法：化为二次积分，这里也可以根据 Ω 的型化为适当三次积分

(1) 若 Ω 是 xy 型区域 I

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ D_{xy}:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases}\end{cases}$$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

若 Ω 是 xy 型区域 II

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ D_{xy}:\begin{cases} x_1(y)\le x\le x_2(y) \\ c\le y\le d \end{cases}\end{cases}$$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f\,dV = \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

(2) 若 Ω 是 yz 或 xz 型区域，类似可将三重积分化为三次积分

(3) 一般区域可分割后再按上面某型化为三次积分

Rem. 若 Ω 是 xy 型区域，三重积分可化为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

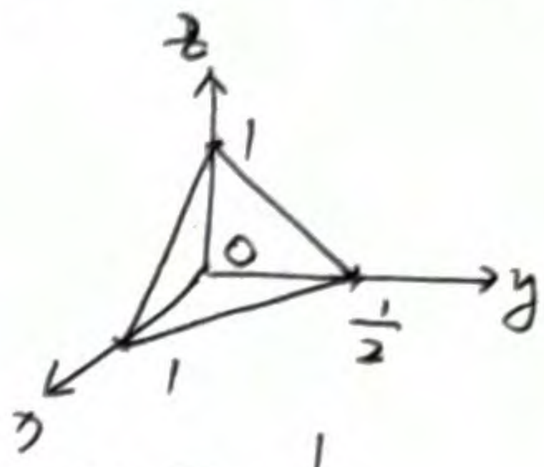
其中 D_{xy} 是 $z_2=z_1(x,y)$，$z=z_2(x,y)$ 在 xOy 平面投影

(2) 三重积分也可化为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \int_{q}^{p} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

其中 D_z 是 $z=z$ 去截 Ω 所得截面.

例1 计算 $\iiint_{\Omega} x\,dV$，这里 Ω 是平面 $x+2y+z=1$ 与三个坐标平面所围四面体体积



Solu. 原式化为三次积分

$$\int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-y)\,dy = \cdots = \frac{1}{48}$$

例2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dV$，其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$

Solu. $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dV = \iiint_{\Omega} x^2\,dV + \iiint_{\Omega} y^2\,dV + \iiint_{\Omega} z^2\,dV$

$$\iiint_{\Omega} x^2\,dV = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \iint_{D_x} dy\,dz \quad , D_x: \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$= \int_{-a}^{a} x^2 \cdot \pi bc\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) dx = \cdots = \frac{4}{15}\pi a^3 bc$$

同理 $\iiint_{\Omega} y^2\,dV = \frac{4}{15}\pi ab^3c$，$\iiint_{\Omega} z^2\,dV = \frac{4}{15}\pi abc^3$

因此 $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,dV = \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2)$

三、利用坐标变换计算三重积分

1. 换元公式

设 $f(x,y,z)$ 在 xyz 空间坐标系中一个有界闭区域 Ω 上可积，函数 $x=x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$，$z=z(u,v,w)$ 在 uvw 坐标系中有界闭区域 Ω' 上有连续偏导数，且满足

(1) 变换 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 将 Ω' 一一变为 Ω 且边界对应

边界

(2) $J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J|\,du\,dv\,dw$

Rem. (1) 上面中公式称为三重积分换元公式，换元后再根据 Ω' 的型及被积函数化为适当三次积分计算

(2) 一般换元法不要求，仅考虑以下两种坐标变换：柱坐标变换和球坐标变换.

2、利用柱坐标变换计算三重积分

称 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ 为柱坐标变换，这里 $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

换元公式 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot r\,dr\,d\theta\,dz$

根据 Ω' 将右边化为适当的三次积分：经常先 z 再 r 后 θ

Rem. 柱坐标变换将 xyz 空间坐标系中柱体 Ω: $\begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$

变为 $r\theta z$ 空间坐标系中立方体 Ω': $\begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq H \end{cases}$

例13 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)^n\,dV$, Ω: $\begin{cases} x^2+y^2 \leq a^2 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$

Solu. Ω 在柱坐标系下表示：$\begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2)^n dV = \iiint_{\Omega'} r^{2n} \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^{2n+1} dr \int_0^1 dz$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^{2n+2}}{2n+2} = \frac{\pi}{n+1} \cdot a^{2n+2}$$

例4 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) z \, dV$，$\Omega$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Solu. Ω 在柱坐标系下表示：$\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{R^2-r^2} \\ 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2) z \, dV = \iiint_{\Omega'} r^2 \cdot z \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^3 dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z \, dz$$

$$= 2\pi \int_0^R r^3 \cdot \frac{1}{2}(R^2-r^2) \, dr = \frac{\pi}{12} \cdot R^6$$

3. 利用球坐标变换计算三重积分

称 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ 为球坐标变换，这里 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ge 0$，$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi$$

换元公式 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$

~~例~~

Rem. 球坐标变换将 xyz 空间坐标系中球体 Ω：$x^2+y^2+z^2 \le R^2$

变为 $r\varphi\theta$ 坐标系下立方体 Ω'：$\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$.

例5 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^n dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$

Solu. $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^n dV = \iiint\limits_{\Omega'} r^{2n}\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^R r^{2n+2}dr$$

$$=4\pi\cdot\frac{R^{2n+3}}{2n+3}$$

例6 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 2z$

Solu. Ω 在球坐标系下：$\begin{cases}0\le r\le 2\cos\varphi\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=\iiint\limits_{\Omega'} r^2\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4 dr=\frac{32\pi}{15}$$

4. 广义柱坐标与广义球坐标

(1) 变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ 称为广义柱坐标变换

$J=abr$

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\Omega}f(ar\cos\theta,\ br\sin\theta,\ z)\,abr\,dr\,d\theta\,dz$$

例7 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n dV$，$\Omega:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0\le z\le 1\end{cases}$

Solu. 利用广义柱坐标变换，

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n dV=\iiint\limits_{\Omega}r^{2n}\cdot abr\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=ab\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 r^{2n+1}dr\cdot\int_0^1 dz=\frac{ab\pi}{n+1}$$

(2) 变换 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$ 称为广义球坐标变换

$$J = abc\, r^2 \sin\varphi$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(ar\sin\varphi\cos\theta,\ br\sin\varphi\sin\theta,\ cr\cos\varphi)\,abc\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

例 8 $\iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^n dV$, $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$

Solu. 利用广义球坐标变换,

$$\iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^n dV = \iiint_\Omega r^{2n} r^2 \sin\varphi \cdot abc\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^{2n+2}\, dr$$

$$= \frac{4\pi \cdot abc}{2n+3}$$

§19.4 重积分的应用

内容：几何应用：曲面面积计算

物理应用：质心、转动惯量

一、曲面面积

1. 二元函数表示曲面的面积计算公式

Thm 1. 设光滑曲面 $S: z=z(x,y)$，$(x,y)\in\bar{D}$，且 $z(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有连续偏导数，$\bar{D}$ 是有界闭区域，则 S 的面积

$$A=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

Proof. 对 D 内任一点 (x,y)，取一个含该点的微元 $d\sigma$，对应小部分曲面面积用 (x,y,z) 处切平面小部分近似，可

$\Delta A\approx\frac{d\sigma}{\cos\gamma}$，其中 $\vec{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right\}$ 为向上方向的单位法向量

$$\Delta A\approx\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma\overset{\text{记作}}{=\!=}dA$$

则 $A=\iint_D dA=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$

Rem. (1) 定理1中计算曲面面积公式要求曲面是二元函数的图形. 类似地，曲面 $S: x=x(y,z)$，$(y,z)\in D_{yz}$，则面积：$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,d\sigma$

(2) 若曲面是参数方程表示 $S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$，$(u,v)\in D$

2. 参数方程表示曲面的面积计算公式

Thm 2. 设光滑曲面 $S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$，$(u,v)\in\bar{D}$，三个函数

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 在 $\overline{D}$ 上有连续偏导数，且至少有一对函数的 Jacobi 行列式不为0，则曲面S的面积

$$A=\iint_D \sqrt{E\cdot G-F^2}\,du\,dv.$$

其中 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$

Proof. 不妨设 $J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

由~~隐~~反函数存在定理，$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

且D对 xOy 平面像 D'

曲面S可表示为 $z=z(u(x,y),v(x,y))$，$(x,y)\in\overline{D}$，

任一点法向量 $\vec{n}=\{-z_x,-z_y,1\}\,//\,\left\{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}$

$\vec{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是单位法向量

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}=\sqrt{E\cdot G-F^2}$$

其中 $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$，$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v$

$$\cos\gamma=\frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

由 Thm 1.，$A=\iint_{D_1}\dfrac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma=\iint_{\overline{D}}\dfrac{\cancel{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}}{\cancel{\sqrt{EG-F^2}}}|J|\,du\,dv$

$$\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}$$

$$=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

例1 求半径为R的球面面积

Solve. 设球面方程：$x^2+y^2+z^2=R^2$

设上半球面：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D=\{x^2+y^2\le R\}$.

球面面积 $A=2A_1=2\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$

$$=2\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$=2\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr$$

$$=R\cdot4\pi\cdot\left(-\sqrt{R^2-r^2}\right)\Big|_0^R=4\pi R^2$$

另解：球面参数方程 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\varphi\end{cases}$，$D:\begin{cases}0\le\varphi\le\pi\\ 0\le\theta\le2\pi\end{cases}$

$E=R^2$，$G=R^2\sin^2\varphi$

$F=0$

由Thm2.，$A=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi\,d\theta=\iint\limits_D R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=4\pi R^2$$

例2 计算曲面 $z=xy$ 含在柱面 $x^2+y^2=1$ 内部分曲面的面积.

Solu. 记 $D:x^2+y^2\le1$

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+y^2+x^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,r\,dr=\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

二、物理应用举例

1. 物体的质心

(1) 平面中 n 个质点的质点

$m_1(x_1,y_1)$，$m_2(x_2,y_2)$，…，$m_n(x_n,y_n)$

$$\bar{x}=\frac{\sum x_im_i}{\sum m_i}\ ,\quad \bar{y}=\frac{\sum y_im_i}{\sum m_i}$$

(2) 平面物体 D 已知其面密度 $\rho=\rho(x,y)$

将 D 分成 n 个小部分 $\Delta\sigma_i$（近似看成质点）

任取$(\xi_i,y_i)\in\sigma_i$，

$$\bar{x}\approx\frac{\sum\xi_i\cdot\rho(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i}{\sum\rho(\xi_i,y_i)\Delta\sigma_i}\longrightarrow\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)d\sigma$$

$$\bar{y}=\cdots=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)d\sigma$$

(3) 空间立体Ω　密度函数$\rho=\rho(x,y,z)$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dV,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dV$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dV.$$

其中$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)dV$是$\Omega$的质量

特别地，当密度ρ为常数（均匀物体）时，质心也是形心

均匀平面物体D的质心（形心）

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,d\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma,$$ 其中A表示D的面积.

2. 物体关于坐标轴的转动惯量

(1) 平面n个质点关于坐标轴转动惯量

已知$m_1(x_1,y_1),\cdots,m_n(x_n,y_n)$

$$I_x=\sum y_i^2m_i,\quad I_y=\sum x_i^2m_i$$

(2) 平面物体D已知其面密度$\rho=\rho(x,y)$

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

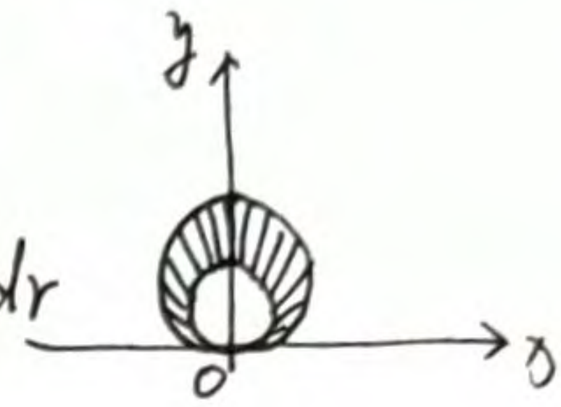
(3) 空间立体Ω　密度函数$\rho=\rho(x,y,z)$

$$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV,\quad I_y=\iiint_\Omega(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV$$

$$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV$$

特别地，称 $I_0=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$ 称为到原点的转动惯量.

例3 求平面均匀物体 $D: 2y\le x^2+y^2\le 4y$ 的质心



Solve. D的面积 $A=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2=3\pi$

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x\,d\sigma=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r\cos\theta\,dr$$

$$=0$$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y\,d\sigma=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\sin\theta\,dr=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\frac{4^3-2^3}{3}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{112}{9\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{112}{9\pi}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}$$

质心 $(0,\frac{7}{3})$

例4 求上半球体(均匀) $\Omega:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ z\ge 0\end{cases}$ 的质心

Solve. $\bar{x}=\bar{y}=0$ (奇函数)

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3,\quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\,dV=\frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R r^3\,dr$$

$$=\frac{3}{2\pi R^3}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}R^4=\frac{3}{8}R$$

质心 $(0,0,\frac{3}{8}R)$

例5 求一个均匀球体关于一条直径的转动惯量(密度 ρ)

Solve. 设球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$

$$I=I_x=I_y=I_z=\frac{1}{3}(I_x+I_y+I_z)=\frac{2}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho\,dV$$

$$=\frac{2\rho}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,dr\int_0^R r^4\,dr=\frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

第十九章综合练习

内容：二重与三重积分计算法

重积分的应用：曲面面积及物体的质心、转动惯量

一、填空题

1. $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\rho^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2}\cos(x^2+y^2+z^2)\,dV=\dfrac{4\pi}{3}$

2. 设 $I_\rho=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2}\sin(x^2+y^2+z^2)^2\,dV$，已知当 $\rho\to 0$ 时 I_ρ 与 ρ^n 是同阶无穷小，则 $n=7$

$$I_\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\rho}r^2\sin r^4\,dr=4\pi\int_0^{\rho}r^2\sin r^4\,dr$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{I_\rho}{\rho^n}=4\pi\lim_{\rho\to 0}\frac{\int_0^{\rho}r^2\sin r^4\,dr}{\rho^n}=4\pi\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\sin\rho^4}{n\rho^{n-1}}\ (\text{L'Hospital})$$

$n=7$ 时有极限 $\frac{4\pi}{7}$

3. 设 $D: x^2+y^2\le a^2$，$I=\iint\limits_D\dfrac{\cos y^n}{\cos x^n+\cos y^n}\,d\sigma=\dfrac{1}{2}\pi a^2$

$$I=\iint\limits_D\frac{\cos x^n}{\cos x^n+\cos y^n}\,d\sigma=\iint\limits_D\frac{\cos x^n}{\cos y^n+\cos x^n}\,d\sigma=I_1$$

$$I=\frac{1}{2}(I+I_1)=\frac{1}{2}\iint\limits_D 1\,d\sigma=\frac{1}{2}\pi a^2$$

4. 设 $D: x^2+y^2\le a^2$，$I=\iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)\,d\sigma=\pi a^2$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续不为 0，$D:\begin{cases}0\le x\le a\\0\le y\le a\end{cases}$，则 $I=\iint\limits_D\dfrac{f(x)}{f(x)+f(y)}\,d\sigma$

$=\frac{1}{2}a^2$

一般地，若 D 关于直线 $y=x$ 对称，且 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 满足 $f(x,y)=g(y,x)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$

二、计算题

1. 设 $D:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le R^2 \\ z\ge \sqrt{a^2(x^2+y^2)} \end{cases}$，计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dV$

Solu. 方程 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ 表示半顶角为 α 的锥面，其中 $\cot\alpha=a$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dV=\iiint\limits_{\Omega}z\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R r^3\,dr$$

$$=\frac{\pi R^4}{16}$$

~~三、证明题~~

2. 记 $F(t)=\int_0^t dx\int_x^t \sin y^3\,dy$，求 $F'(t)$.

Solu. 交换积分次序：$\int_0^t dx\int_x^t \sin y^3\,dy=\int_0^t dy\int_0^y \sin y^3\,dx$

$$=\int_0^t y\sin y^3\,dy$$

$$F'(t)=y\sin y^3\Big|_{y=t}=t\sin t^3$$

三、证明题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，记 $D:\begin{cases} 0\le x+y\le a \\ \cancel{0\le y\le a} \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$，证明：$\iint\limits_D f(x+y)\,d\sigma=\int_0^a xf(x)\,dx$

Proof. $\iint\limits_D f(x+y)\,d\sigma=\int_0^a dx\int_0^{a-x}f(x+y)\,dy\xlongequal{x+y=u}\int_0^a dx\int_x^a f(u)\,du$

$$=\int_0^a du\int_0^u f(u)\,dx=\int_0^a uf(u)\,du$$

2. 设 D 是由曲线 $xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=4x$ 所围区域，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，证明 $\iint\limits_D f(xy)\,d\sigma=\ln 2\int_1^2 f(x)\,dx$

Proof. 令 $u=xy,\ v=\frac{y}{x}$，将 D 变为 $D':\begin{cases} 1\le u\le 2 \\ 1\le v\le 4 \end{cases}$

$$J'=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=2\frac{y}{x}=2v$$

$$\iint\limits_D f(xy)\,d\sigma=\iint\limits_{D'}f(u)\cdot\left|\frac{1}{J'}\right|du\,dv=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2v}f(u)\,du\,dv=\ln 2\int_1^2 f(u)\,du$$

§20 含参变量积分

§20.1 含参变量正常积分

一、含参变量积分定义与性质

1. 定义

Def. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ x\in I\end{cases}$ 上有定义. 若 $\forall x\in I$, $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在, 则称积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 为含参变量 x 的积分, 它对应一个函数 $\varphi(x)$, $x\in I$.

2. 性质

Thm1. 设 $f(x,y)$ 在 $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ x\in I\end{cases}$ 上连续, 则含参变量积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 在 I 上也连续.

Proof. $\forall x_0\in I$, 下证 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\Delta\varphi=0$

取 $[a,b]\subset I$ s.t. $x_0\in[a,b]$, $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 也一致连续

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 D 中任两点 P_1, P_2 满足 $|P_1P_2|<\delta$ 时 $|f(P_1)-f(P_2)|<\frac{\varepsilon}{d-c}$

当 $|\Delta x|<\delta$ 时有 $|f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{d-c}$

$$|\Delta\varphi|=|\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)|\le\int_c^d|f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)|dy$$
$$\le\int_c^d\frac{\varepsilon}{d-c}dy=\varepsilon$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi=0$, $\varphi(x)$ 在 x_0 连续, 因此 $\varphi(x)$ 在 I 上连续.

Thm2. 设 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 都在 $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ x\in I\end{cases}$ 上连续, 则含参变量积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 在 I 上处处可导. 且

$$\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)dy$$

Proof. $\forall x_0 \in I$，下证 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \int_c^d f_x(x,y)\,dy$

取 $[a,b] \subset I$ s.t. $x_0 \in [a,b]$，$f_x(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，也一致连续.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 D 中任两点 P_1, P_2 满足 $|P_1P_2| < \delta$ 时

$|f_x(P_1) - f_x(P_2)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$

当 $|\Delta x| < \delta$ 时，且 $0 < \theta < 1$，有 $|f_x(x_0+\theta\Delta x, y) - f_x(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x_0,y)\,dy\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_c^d [f(x_0+\Delta x,y) - f(x_0,y)]\,dy - \int_c^d f_x(x_0,y)\,dy\right|$$

$$= \left|\int_c^d [f_x(x_0+\theta\Delta x,y) - f_x(x_0,y)]\,dy\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c) = \varepsilon$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \int_c^d f_x(x_0,y)\,dy = \varphi'(x_0)$$

Cor. 在 Thm1.，条件下，对 I 中任意子区间 $[a,b]$，都有 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$

Proof. 由二重积分化为二次积分显然成立

Rem. (1) 由 Thm1.，$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \int_c^d \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)\,dy$

(2) 由 Thm2.，$\varphi'(x) = \int_c^d f_x(x,y)\,dy$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

二、含参变量积分的推广

1. 定义

Def. 设 $f(x,y)$ 在 D：$\begin{cases} \alpha(x) \le y \le \beta(x) \\ x \in I \end{cases}$ 上定义，若 $\forall x \in I$，积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$ 都存在，称 $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$ 为含参变量 x 的积分，它对应一个函数 $\varphi(x)$，$x \in I$.

2. 性质

Thm1' 设 $f(x,y)$ 在 $D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\ x\in I\end{cases}$ 上连续，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 在 I 上也连续，则含参变量积分

(1) $\varphi(x)$ 在 I 上连续

(2) $\varphi(x)$ 在 I 的任一子区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^b dx\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,dy=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

其中 $D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$

Thm2' 设 $f(x,y)$ 与 $f_x(x,y)$ 在 $D:\begin{cases}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\ x\in I\end{cases}$ 上连续，$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 在 I 上也~~连续~~可导，则含参变量积分

$\varphi(x)$ 在 I 上可导，且

$$\varphi'(x)=\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)\,dy\right)'_x=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f_x(x,y)\,dy+f(x,\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

Rem. Thm2' 的求导公式是 Thm2 的推广，也是定积分中变限积分求导公式的推广：

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(y)\,dy\right)'_x=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

例1 求下列导数

(1) $\varphi(x)=\int_1^2 e^{(xy)^2}dy$，$\varphi'(x)=\int_1^2 e^{(xy)^2}\cdot 2xy^2\,dy$

(2) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\cos(xy)^2dy$，$\varphi'(x)=\int_{x^2}^{x^3}-\sin(xy)^2\cdot 2xy^2\,dy+3x^2\cos x^8-2x\cos x^6$

(3) $\varphi(x)=\int_1^2\frac{\sin(x^2y)}{y}dy$，$\varphi'(x)=\int_1^2 2x\cos(x^2y)\,dy$

$$=\begin{cases}\frac{2}{x}(\sin 2x^2-\sin x^2), & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

例2 计算 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (b>a>0)$

Solve. $I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b \frac{1}{y+1}dy$

$=\ln\frac{b+1}{a+1}$

例3 计算 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)dx \quad (a>0)$

Solve. $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx$

记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx$

$I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}dx=\frac{1}{a}\arctan(a\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2a}$

$a^2I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$

当 $a=1$ 时 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=0$

当 $a\neq 1$ 时，由上式有，$I_1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a(a+1)}$

$I'(a)=\frac{\pi}{a+1}\Rightarrow I(a)=\pi\ln(a+1)+C$

由 $I(1)=0$，$C=-\pi\ln 2$

因此 $I(a)=\pi\ln(a+1)-\pi\ln 2$

§20.2 含参变量广义积分

一. 含参变量广义积分

1、定义

Def. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D:\begin{cases} c\le y\le +\infty \\ x\in I\end{cases}$ 上有定义. 若

$\forall x\in I$, $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 收敛, 则称积分 $\varphi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 为含参变量 x 的积分, 它对应一个函数 $\varphi(x)$, $x\in I$.

Def. 设 $f(x,y)$ 在平面区域 $D:\begin{cases} c\le y\le +\infty \\ x\in I\end{cases}$ 上的含参变量积分 $\varphi(x)$ 收敛. 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists M>0$ s.t. 当 $A>M$ 时, $\forall x\in I$, 都有 $\left|\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy-\int_c^{A} f(x,y)\,dy\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$, 则称含参变量 x 的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 关于 $x\in I$ 一致收敛.

例1 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)^5}{1+y^2}\,dy$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛

Proof. $\forall \varepsilon>0$, 由广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy$ 收敛至 $\frac{\pi}{2}$

$\exists M>0$ 当 $A>M$ 时 $\left|\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy\right|<\varepsilon$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 当 $A>M$ 时有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)^5}{1+y^2}\,dy\right|\le\int_A^{+\infty}\frac{|\sin(xy)^5|}{1+y^2}\,dy\le\int_A^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\,dy<\varepsilon$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)^5}{1+y^2}\,dy$ 关于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛

例2 证明: 含参变量广义积分 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ 关于 $x\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛 $(\delta>0)$

Proof. $\forall \varepsilon>0$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}$

$\exists M'>0$ s.t. $A>M'$ 时 $\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy\right|<\varepsilon$

取 $M=\frac{M'}{\delta}$, 当 $A>M$ $(Ax>M')$ 时有 $\forall x\in(\delta,+\infty)$,

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\delta y}{y}dy\right| = \left|\int_{A\delta}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right| < \varepsilon$$

因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\delta y}{y}dy$ 关于 $(\delta,+\infty)$ 一致收敛

2. 性质

Thm1. 设 $f(x,y)$ 在 $D:\begin{cases} c\le y<+\infty \\ x\in I\end{cases}$ 上连续，含参变量积分

$\varphi(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $x\in I$ 上一致收敛，则：

(1) $\varphi(x)$ 在 I 上连续

(2) 在 I 的任意闭子区间上可积，且

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b dx\int_c^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Proof. (1) $\forall x_0\in I$，要证 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(\varphi(x)-\varphi(x_0))=0$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$ s.t. $A>M$ 时，$\forall x\in I$，

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0) &= \int_c^{+\infty}f(x_0+\Delta x,y)dy-\int_c^{+\infty}f(x_0,y)dy\\ &=\int_c^{+\infty}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]dy\\ &\le\int_c^{M+1}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]dy+\left|\int_{M+1}^{+\infty}f(x_0+\Delta x,y)dy\right|\\ &\quad+\left|\int_{M+1}^{+\infty}f(x_0,y)dy\right|\end{aligned}$$

由含参变量正常积分的结论，

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\int_c^{M+1}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]dy &= \int_c^{M+1}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]dy\\ &=\int_c^{M+1}0\cdot dy=0.\end{aligned}$$

则 $\exists\delta>0$ s.t. $|\Delta x|<\delta$ 时 $\left|\int_c^{M+1}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]dy\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi=0$，$\varphi(x)$ 在 x_0 连续，则 $\varphi(x)$ 在 I 上连续.

(2) 可利用函数项级数一致收敛时逐项微分得到，此处略

Thm2. 设 $f(x,y)$, $f_x(x,y)$ 在 $D:\begin{cases} c\le y<+\infty \\ x\in I\end{cases}$ 上连续，且

(1) $\varphi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ 在 $x\in I$ 处处收敛

(2) $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$ 在 $x\in I$ 一致收敛

则 $\varphi(x)$ 在 I 上可导，且 $\varphi'(x)=\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\right)'_x=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$

Proof. $\forall x_0\in I$，下证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\int_c^{+\infty} f_x(x_0,y)\,dy$

$\forall\varepsilon>0$，由 $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$ 一致收敛，$\exists M>0$，当 $A>M$ 时

$\forall x\in I$ 有 $\left|\int_A^{+\infty} f_x(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\int_c^{+\infty} f_x(x_0,y)\,dy\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_c^{+\infty}[f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)]\,dy\right.$$

$$\left.-\int_c^{+\infty} f_x(x_0,y)\,dy\right|=\left|\int_c^{+\infty}[f_x(x_0+\theta\Delta x,y)-f_x(x_0,y)]\,dy\right|$$

后类似 Thm.1

则 $\exists\delta>0$ s.t. $|\Delta x|<\delta$ 时 $\left|\int_c^{+\infty}[f_x(x_0+\theta\Delta x,y)-f_x(x_0,y)]\,dy\right|<\varepsilon$

则 $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}-\int_c^{+\infty} f_x(x_0,y)\,dy\right|<3\varepsilon$

因此 $\varphi'(x_0)=\int_c^{+\infty} f_x(x_0,y)\,dy$，$\varphi'(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$.

Rem. (1) Thm1: $\lim\limits_{x\to x_0}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\xlongequal{\text{一致收敛}}\int_c^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\,dy=\int_c^{+\infty} f(x_0,y)\,dy$

Thm2. $\frac{d}{dx}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\xlongequal{\text{一致收敛}}\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\,dy$

(2) 条件"关于 $x\in I$ 一致收敛"可以放宽为"关于 $x\in I$ 内闭一致收敛".

(3) 其他形式的含参变量广义积分：

$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{b} f(x,y)\,dy$，$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$，$x\in I$

及无界函数的含参变量广义积分其性质类似Thm 1.2.

例3 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (a>0,\ b>0)$

Solu. 当 $a=b$ 时 $I=0$

当 $a\neq b$ 时，不妨设 $a<b$

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$$

由于含参变量积分 $\varphi(y)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在 $y\in[a,b]$ 显然一致收敛，

$$I=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx=\int_a^b\frac{1}{y}dy=\ln\frac{b}{a}$$

另解：

记 $I=I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$

由于含参变量积分 $\varphi(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}-e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}$$

$$I(a)=-\ln a+C$$

$a=b$ 时 $I(b)=-\ln b+C$，$C=\ln b$，$I=\ln\frac{b}{a}$

例4 计算 $I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx\ (a\geq 0)$

Solu. 由于 $\varphi(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $a>0$ 上内闭一致收敛

当 $a>0$ 时，$I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\,dx=\frac{e^{-ax}(a\sin x+\cos x)}{1+a^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{-1}{1+a^2}$

$$I(a)=\int-\frac{1}{1+a^2}da=-\arctan a+C$$

由于 $|I(a)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leq\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$

$\lim\limits_{a\to+\infty}I(a)=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$，$I(a)=-\arctan a+\frac{\pi}{2}$

§20.3 Γ函数、B函数简介

讨论两个含参变量积分：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt \quad , \quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

预备知识：

(1) $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$ 仅在 $q<1$ 时收敛 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln^n x}{x^q}dx$ 仅在 $q<1$ 时收敛

(2) $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ 在 $\forall\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上收敛 $\Rightarrow \int_1^{+\infty} x^\alpha \ln^n x\, e^{-x}dx$ 在 $\forall\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上收敛

一、Γ函数的定义与性质

1. 定义

Def. 含参变量广义积分 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$ 称为Γ函数.

2. 性质

(1) 定义域：$s>0$

说明：$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$

当 $s>0$ 时 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ 收敛

当 $s\in(-\infty,+\infty)$ 时 $\int_1^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$ 收敛

综上，仅当 $s>0$ 时 $\Gamma(s)$ 都收敛

(2) 连续可导性

$\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有任意阶导数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt \quad , \quad \Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\ln^n t\, e^{-t}dt$$

Rem. 对任意自然数n，广义积分

$\int_0^{+\infty}t^{s-1}\ln^n t\, e^{-t}dt$ 在 $\forall s\in(0,+\infty)$ 内闭一致收敛

Γ函数可以在广义积分号下求任意阶导数

特别地，$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$

$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}\ln t\, e^{-t}dt=-\gamma$

这里 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$ 称为 Euler 常数.

(3) 递推公式

① $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

② $\Gamma'(s+1)=\Gamma(s)+s\Gamma'(s)$

$\Gamma^{(n)}(s+1)=n\Gamma^{(n-1)}(s)+s\Gamma^{(n)}(s)$

Proof. $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}t^s e^{-t}dt=-\int_0^{+\infty}t^s de^{-t}=-\frac{t^s}{e^t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{s-1}dt$

$=s\Gamma(s)$

特别地，(1) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!$，n为正整数

(2) n为奇数时，$\Gamma(\frac{n}{2})=\frac{n-2}{2}\Gamma(\frac{n-2}{2})=\cdots=\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$

(3) $\Gamma'(1)<0$，$\Gamma'(2)=\Gamma(1)+\Gamma'(1)=1-\gamma>0$

~~(4)~~ 一般地，$\Gamma^{(k)}(n)$ 都可以递推，用 γ 表示.

(4) 余元公式

当 $0<s<1$ 时，$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$

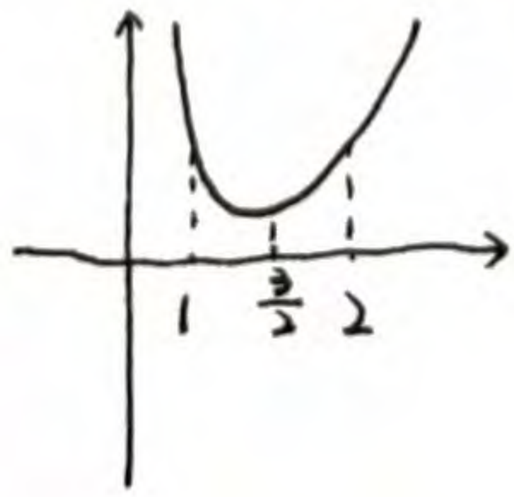
特别地，$\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})=\sqrt{2}\pi$

$\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$

$\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})=2\pi$

(5) Γ 函数图像

由 Γ 函数的性质，(1) $\Gamma(s)>0$，$\Gamma''(s)>0$



(2) $\Gamma'(s)$ 单调增，由 $\Gamma'(1)<0$，$\Gamma'(2)>0$

$\exists s_0\in(1,\frac{3}{2})$ s.t. $\Gamma'(s_0)=0\Rightarrow\Gamma(s_0)$ 是最小值

(3) 渐近线性

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma(n)=+\infty$，$\lim\limits_{s\to0^+}\Gamma(s)=\lim\limits_{s\to0^+}\frac{\Gamma(s+1)}{s}=+\infty$

二、B函数的定义与性质

1.定义

Def. $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 是含参变量 p,q 的积分的二元函数，称为B函数

2.性质

(1) 定义域：$p>0,\ q>0$

即当 $p>0,q>0$ 时 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 收敛

(2) 连续可导性

B函数也是内闭一致收敛的，故B函数在 $D:\begin{cases}p>0\\q>0\end{cases}$ 上连续，

Rem. B函数的偏导数在 $p>1$ 上 ~~内闭~~ 也存在，故一般不考虑B函数的偏导数.

(3) 对称性

$$B(p,q)=B(q,p)$$

Proof. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \xlongequal{x=1-t} \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$

(4) 递推公式

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$$

Proof. $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{1}{p}\int_0^1(1-x)^{q-1}dx^p$

$$=\frac{1}{p}\cdot(1-x)^{q-1}\cdot x^p\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(x-1+1)(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1\left[x^{p-1}(1-x)^{q-2}-x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right]dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\left(B(p,q-1)-B(p,q)\right)$$

解得 $B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$

根据对称性，$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$

因此有 $B(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)$.

(5) Γ函数、B函数的其它表示形式

① $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s}e^{-t}dt \xrightarrow{t=u^2} 2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}du$

② $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \xrightarrow{x=\sin^2 t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\,dt$

③ $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \xrightarrow{x=\frac{t}{1+t}} \int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$

(6) Γ函数与B函数的关系

Thm. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Proof. $\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}u^{2p-1}e^{-u^2}du=2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R u^{2p-1}e^{-u^2}du$

$\Gamma(q)=2\lim_{R\to+\infty}\int_0^R v^{2q-1}e^{-v^2}dv$

$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{0\le v\le R\\0\le u\le R}}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}d\sigma$

$2\Gamma(p)\Gamma(q)=4\iint\limits_{D}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}d\sigma$

$=4\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{u^2+v^2\le R^2\\u>0,v>0}}u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}d\sigma$

$=\lim_{R\to+\infty}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\int_0^R r^{2p+2q-1}e^{-r^2}dr$

$=B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$

因此 $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

例 1　计算下列 B 函数的值

(1) $B(3,5) = \dfrac{\Gamma(3)\ \Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \dfrac{2!\ 4!}{7!} = \dfrac{1}{105}$

(2) $B(3,\frac{5}{2}) = \dfrac{\Gamma(3)\ \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \dfrac{2!\ \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \dfrac{16}{315}$

(3) $B(\frac{3}{2},\frac{5}{2}) = \dfrac{\Gamma(\frac{3}{2})\ \Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)} = \dfrac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{3!} = \dfrac{\pi}{16}$

例2　计算下列广义积分：

$$I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx\ ,\ I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx\ ,\ I_3 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^6}dx$$

Solve.

$$I_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}dx \xlongequal{x^3=t} \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{1+t}dt \xlongequal{p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3}} \frac{1}{3}B(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

同理 $I_2 = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi$

$$I_3 = \frac{1}{6}\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6}) = \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\frac{1}{6}\pi} = \frac{1}{3}\pi$$

§21 曲线积分

内容：第一类曲线积分：完全类似定积分

第二类曲线积分：

格林公式

§21.1 第一类曲线积分

一、第一类曲线积分定义与性质

1. 引例 计算线状物体的质量

已知平面线状物体 L 的密度 $\rho=\rho(x,y)$，$(x,y)\in L$

求质量：(1)将曲线 L 分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$（$M_i$ 为分点），$i=1,\cdots,n$.

对应弧长 Δs_i，对应质量 Δm_i

(2)取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 作乘积 $\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\approx\Delta m_i$

(3)求和并取极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \xlongequal{\text{\underline{\textit{l}\textit{ 连续时}}}} M$

2. 定义

Def. 设 L 是 xOy 平面上光滑或分段光滑曲线段，$f(x,y)$ 在 L 上定义，将 L 任意分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，对应弧长 Δs_i $(i=1,2,\cdots,n)$，任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 并作和. 记 λ 为最大直径，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

存在且与分法无关，则称 f 在 L 上可积，其积分值称为 $f(x,y)$ 在 L 上关于弧长的曲线积分（第一类）

记 $\int_L f(x,y)\,ds$.

3. 可积条件

(1) 可积函数一定有界

(2) 在分端点的曲线L上处处连续的函数一定可积
(也可以个别点除外)

4. 第一类曲线积分的性质

(1) $\int_L [f(x,y) \pm g(x,y)]\,ds = \int_L f(x,y)\,ds \pm \int_L g(x,y)\,ds$

(2) $\int_L k f(x,y)\,ds = k\int_L f(x,y)\,ds$

(3) $\int_L 1\,ds = \int_L ds = l$, 表示曲线弧长

(4) $L = L_1 + L_2 \Rightarrow \int_L f(x,y)\,ds = \int_{L_1} f(x,y)\,ds + \int_{L_2} f(x,y)\,ds$ (可到可加性)

(5) $f(x,y) \geq g(x,y) \Rightarrow \int_L f(x,y)\,ds \geq \int_L g(x,y)\,ds$ (保号、保序性)

(6) $m \leq f(x,y) \leq M \Rightarrow m\cdot l \leq \int_L f(x,y)\,ds \leq M\cdot l$ (估计积分)

(7) $f(x,y)$ 在分端点的曲线L上连续, $\exists(\xi,\eta)\in L$ s.t.

$$\int_L f(x,y)\,ds = f(\xi,\eta)\cdot l, \quad l\text{是}L\text{的弧长}$$

Rem. (1) 当L是闭合曲线时, $\oint_L f(x,y)\,ds = \int_L f(x,y)\,ds$

(2) 以上关于平面曲线的第一类曲线积分的定义与性质可推广至空间曲线Γ上:

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

(3) 若平面曲线L关于y轴对称, 且 $f(-x,y) = -f(x,y)$,
则 $\int_L f(x,y)\,ds = 0$

例如: $L: x^2+y^2=a^2$, $\int_L y^2\sin x^3\,ds = 0$, $\int_L xy\,ds = 0$

$$\int_L (x+y)\,ds = 0$$

二、第一类曲线积分计算法

Thm. 设L是xOy平面上的光滑曲线, L的参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta], \varphi'(t)\text{与}\psi'(t)\text{连续且}\varphi'(t)\text{与}\psi'(t)\text{不同为}0$$

$f(x,y)$ 在 L 上连续，则 $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

Proof. (比较两边对应和式)

将 L 分成 n 个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$，对应小弧长 Δs_i，分点 M_i 对应参数 t_i：

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

任取 $(\xi_i,\eta_i) \in \widehat{M_{i-1}M_i}$，该点对应参数 τ_i

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\cdot\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\cdot\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,\Delta t_i$$

$$\approx \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\cdot\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,\Delta t$$

令 $\lambda\to 0$，$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

Rem. (1) 若 $L: y=y(x)\quad x\in[a,b]$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

(2) 以上关于弧长的第一类曲线积分可推广到空间曲线 Γ 上：

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt$$

例1 计算 $\int_L \sqrt{y}\,ds$ 这里 $L: y=x^2$ 在 $0\le x\le 1$ 之间部分曲线

Solu $\int_L \sqrt{y}\,ds = \int_0^1 x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$$= \frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1)$$

例2 计算 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds \qquad \Gamma: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases},\ t\in[0,2\pi]$

Solu. $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2t^2$，$\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 2\pi + \frac{8b^2}{3}\pi^3\right)$$

例3 计算 $\oint_\Gamma x^2 ds$，这里 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(a>0)$

Solu. Γ 的参数方程可推导出：

将 $z=-(x+y)$ 代入有，$2x^2+2y^2+2xy=a^2$

即 $\frac{3}{4}x^2+(y+\frac{x}{2})^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2a^2}{3}}+\frac{(y+\frac{x}{2})^2}{\frac{a^2}{2}}=1$

令 $x=\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos t$，$y+\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}a\sin t$，有 Γ 的参数方程：

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{6}}a\cos t \\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t \\ z=-\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}, t\in[0,2\pi]$$

$\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}=\sqrt{a^2}=a$

$\oint_\Gamma x^2 ds=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}a^2\cos^2 t\, a\, dt=\frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt=\frac{2}{3}a^3\pi$

另解：$\oint_\Gamma x^2 ds=\oint_\Gamma y^2 ds=\oint_\Gamma z^2 ds=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds$

$=\frac{a^2}{3}\oint_\Gamma ds=\frac{a^3}{3}\cdot 2\pi$

§21.2 第二类曲线积分

一、第二类曲线积分的定义和性质

1. 引例　求变力沿有向曲线做功

已知 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$，P、Q连续，

沿有向曲线L做功（L从起点到终点）

常力F沿直线~~做功~~ $L=\overrightarrow{AB}$ 做功：$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

变力F沿有向曲线L做功：

(1) 将L分成n个小有向曲线弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，$M_i(x_i,y_i)$ 是分点，

记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$

$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 对应有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\{\Delta x_i,\Delta y_i\}$

(2) 任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，对应做功 $\Delta W_i\approx\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$

$=\{P(\xi_i,\eta_i),Q(\xi_i,\eta_i)\}\cdot\{\Delta x_i,\Delta y_i\}$

$=P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$

(3) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right)=W$

2. 定义

Def. 设 $P(x,y)$ 在 xOy 平面上有向光滑或分段光滑曲线段L上有定义，

将L任意分成n个小有向弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，$M_i(x_i,y_i)$ 为分点，

$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，作乘积 $P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$ 并作和

$\sum P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$，记 λ 是最大直径，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在且

与分法无关，则称极限值为 $P(x,y)$ 在有向曲线上关于坐标

x 的曲线积分，也称为第二类曲线积分，记 $\int_L P(x,y)\,dx$

Rem. (1) 类似可定义 $\int_L Q(x,y)\,dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$

(2) 以上定义可推广到空间有向曲线 Γ 上：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$$

$\int_\Gamma Q(x,y,z)\,dy$、$\int_\Gamma R(x,y,z)\,dz$ 同理

(3) 若L或Γ是封闭有向曲线：顺时针或逆时针确定方向(先)

(4) 若P(x,y)与Q(x,y)均在L上定义，将两个积分求和：

$$\int_L P(x,y)\,dx + \int_L Q(x,y)\,dy \text{ 简记为 } \int_L P\,dx + Q\,dy$$

有物理意义：变力$\vec{F}$沿有向曲线L做功，其中$\vec{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$

类似地，当P、Q、R在空间曲线Γ上有定义时，

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

表示变力$\vec{F}=\{P,Q,R\}$沿Γ做功

3. 可积条件：类似定积分

4. 性质

以$\int_L P(x,y)\,dx$为例：

(1) $\int_L P_1(x,y)\,dx \pm \int_L P_2(x,y)\,dx = \int_L (P_1(x,y) \pm P_2(x,y))\,dx$

(2) $\int_L kP(x,y)\,dx = k\int_L P(x,y)\,dx$

(3) $\int_L 1\,dx = \int_L dx$：区间端点x坐标之差

(4) $L=L_1+L_2$，则$\int_L P(x,y)\,dx = \int_{L_1} P(x,y)\,dx + \int_{L_2} P(x,y)\,dx$

(5) 若L与$-L$反方向，则$\int_{-L} P(x,y)\,dx = -\int_L P(x,y)\,dx$

Rem. 当P(x,y)保号时，Δx_i可能不保号，故积分的保号保序性可能不成立，当Δx_i保号时成立；同理，积分估值性及中值定理不成立(但有时成立)

二、第二类曲线积分计算法

常用方法：化为定积分

Thm. 设L是平面有向光滑曲线，方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，t从α到β

$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$在α,β构成区间上连续，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，

P(x,y)与Q(x,y)在L上连续，则$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$

$$\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt$$

Rem. (1) 以上要求 α 对应 L 起点，β 对应 L 终点，(与大小无关)

(2) $L: y=y(x)$，x 从 a 到 b

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_a^b P(x,y(x))\,dx+Q(x,y(x))\,y'(x)\,dx$$

(3) 推广到空间曲线 Γ：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，$t$ 从 α 到 β

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\varphi'(t)+Q\cdot\psi'(t)+R\cdot\omega'(t)]\,dt$$

Proof. 完全类似第一类曲线积分化定积分的证明

例1 计算 $\int_L y^2\,dx$，L：(1) 从 $A(a,0)$ 沿 x 轴到 $B(-a,0)$

(2) 从 $A(a,0)$ 沿 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 到 $B(-a,0)$ $(a>0)$

Solu. (1) $L: y\equiv 0$，x 从 a 到 $-a$

$$\int_L y^2\,dx=\int_a^{-a} 0\,dx=0$$

(2) $L: y=\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$，$t$ 从 0 到 π

$$\int_L y^2\,dx=\int_0^\pi -a^3\sin^3 t\,dt=-2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=-\frac{4}{3}a^3$$

例2 计算 $\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy$，L：(1) 沿 $y=x$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$

(2) 沿 $x=y^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$

Solu. (1) $\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1[2x^3+x^2\cdot 2x]\,dx=1$

(2) $\int_L 2xy\,dx+x^2\,dy=\int_0^1[2y^3\cdot 2y+y^4]\,dy=1$

例3 $\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ $L: x^2+y^2=a^2$ 取逆时针

Solu. $L: \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$，$t$ 从 0 到 2π

$$\oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{a^2}\,dt = 2\pi$$

例4 $\int_\Gamma x^3dx + y^3dy + xz^2dz$. Γ：从$A(1,2,3)$到$O(0,0,0)$的直线段

Solu. Γ参数方程 $\begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=-3t \end{cases}$，$t$从$-1$到$0$

$$\int_\Gamma x^3dx + y^3dy + xz^2dz = \int_{-1}^{0}\left[(-t)^3(-1)+(-2t)^3(-2)+(-t)(-3t)^2(-3)\right]dt$$

$$= \int_{-1}^{0} 44t^3\,dt = -11$$

三、两类曲线积分的关系

Thm. 设L是平面有向光滑曲线段，$P(x,y)$与$Q(x,y)$在L上连续，则$\int_L Pdx+Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$.

这里$\vec{\tau}=\{\cos\alpha(x,y),\sin\alpha(x,y)\}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$是$L$上在点$(x,y)$处对应$L$方向的单位切向量.

Proof. 设L有参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t$从$\alpha$到$\beta$

不妨设$\alpha<\beta$. L上点(x,y)处对应L方向的单位切向量为$\vec{\tau}=\left\{\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right\}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$

$$\int_L Pdx+Qdy = \int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt$$

$$\int_L (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,ds = \int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}\right]$$

$$\cdot\left(\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\right)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)\right]dt$$

例5 设Γ是空间光滑或分段光滑有向曲线段，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Γ上连续，记$M=\max\limits_{(x,y,z)\in\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$，$\Gamma$的弧长为$\rho$，则$\left|\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz\right|\le M\cdot\rho$

Proof. 记 $\vec{T}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是 Γ 上点 (x,y,z) 处与 Γ 方向对应的单位切向量

$$\left|\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz\right|=\left|\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds\right|$$
$$\le\int_\Gamma|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma|\,ds$$
$$\le\int_\Gamma|\{P,Q,R\}\cdot\vec{T}|\,ds=\int_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,ds$$
$$\le M\cdot l$$

这里用到了基本不等式：

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

推广：(1) $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_\Gamma[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\,ds$

其中 $\vec{T}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是 Γ 上点 (x,y,z) 处与 Γ 方向对应的单位切向量

(2) Cauchy - Schitwarz 不等式推广：

$\vec{a}=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$\vec{b}=\{y_1,\cdots,y_n\}$，则 $|\sum x_iy_i|^2\le\sum x_i^2\cdot\sum y_i^2$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

§21.3 格林公式及应用

内容：格林公式 $\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$，L是D的边界正向

一、格林公式

1. 有关定义

Def. 平面单连通区域

若区域内任一封闭曲线的内部还在该区域内，则称该区域为单连通区域，简称单连域.

例如，$D_1: x^2+y^2<1$　　$D_2: \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$　　$D_3: 0<x^2+y^2<1$

D_1，D_2为单连域，D_3非单连域

Def. 平面复连通区域

不是单连域的区域统称为复连域

Def. 区域的正向边界

设区域D的边界L是有限条不相交的封闭曲线合成.

当一个人沿L走时区域在左侧，这个方向的L称为D的正向边界.

Rem. D的正向边界：外侧的封闭曲线取逆时针；内部的所有封闭曲线取顺时针

2. 格林公式

Thm 1. 设平面闭区域D的边界L是有限条互不相交的封闭曲线且无重点所围成，$P(x,y)$、$Q(x,y)$在D上有连续偏导数，则

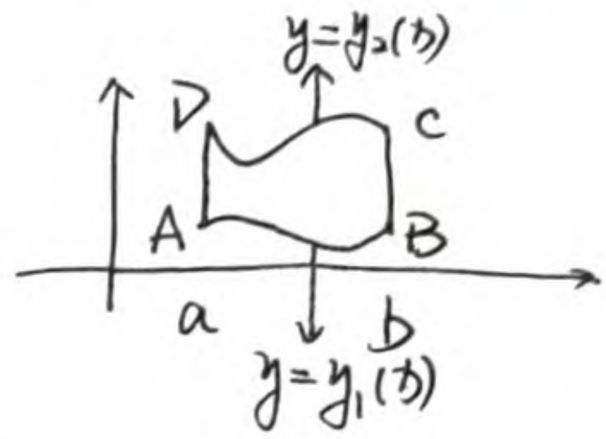
$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

这里L是D的正向边界.

Proof. (i) 先设D是由一条封闭曲线L围成的单连域，L取逆时针

(i) 若D是x型区域：

$$D: \begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$



$$L = \widehat{AB} + \overline{BC} + \widehat{CD} + \overline{DA}$$

$$\oint_L P\,dx = \int_{\widehat{AB}} P\,dx + \int_{\overline{BC}} P\,dx + \int_{\widehat{CD}} P\,dx + \int_{\overline{DA}} P\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, y_2(x))\,dx$$

$$= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))]\,dx$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma = -\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]\,dx$$

因此 $\oint_L P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,d\sigma$

(ii) 若D是y型区域：同理可证 $\oint_L Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,d\sigma$

(iii) 若D是既为x型又为y型域：则有Green公式

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

(iv) 对于一般单连域，可以将D适当分割成有限个既为x型又为y型域，不妨设 $D = D_1 + \cdots + D_n$，D_i为既为x又为y型域，对应正向边界为L_i

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \sum \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \sum \oint_{L_i} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

(2) 再设D是复连域，D的正向边界 $L=L_0-L_1-\cdots-L_n$ ($n+1$条)

这里 L_i $(i=1,\cdots,n)$ 均含在 L_0 内，L_i 取逆时针

作辅助线将D分成两个单连域 D_1 和 D_2，其正向边界分别为 L_1' 和 L_2'

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\left(\iint_{D_1}+\iint_{D_2}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\left(\oint_{L_1'}+\oint_{L_2'}\right)(Pdx+Qdy)$$

$$=\oint_{L_0-L_1-\cdots-L_n}Pdx+Qdy=\left(\oint_{L_0}-\sum_i\oint_{L_i}\right)(Pdx+Qdy)$$

Rem. (1) 格林公式对单连域及复连域均成立，要求两种区域有正常边界.

(2) 偏导连续是格林公式成立的充分条件.

(3) 若D是单连域，L是其正向边界，取 $P=-y$，$Q=x$

得 $\oint_L xdy-ydx=\iint_D 2d\sigma$

$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

例如：$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围面积

$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2t+ab\sin^2t)dt=ab\pi$

例1 证明 $\oint_L 2xydx+x^2dy=0$，这里L是 xOy 平面上任一封闭有向曲线.

Proof. 记L所围单连域D

$$\oint_L 2xydx+x^2dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_D 0\,d\sigma=0$$

例2 证明 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, & L\text{内不含原点的封闭有向曲线不经过原点}\\ 2\pi, & L\text{内含原点的封闭有向曲线不经过原点，L取逆时针}\end{cases}$

Proof. (1) 若L不含原点，记L所围单连域D

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_D 0\,d\sigma=0.$$

(2) 若L含原点，

以原点为圆心作 $L_1: x^2+y^2=\rho^2$，ρ 很小使 L_1 含在L内

L_1 取逆时针，记L与 L_1 所围复连域D

$$\oint_{L-L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D 0\,d\sigma=0$$

则 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho^2}\oint_{L_1}xdy-ydx=\frac{1}{\rho^2}\cdot 2\pi\rho^2=2\pi$

二、曲线积分与路径无关的条件

1. 定义

Def. 设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在平面区域G上连续，若对G内任意两点A与B及连接A到B任意两条有向曲线 L_1 和 L_2，都有 $\int_{L_2}Pdx+Qdy=\int_{L_1}Pdx+Qdy$，则称曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G上与路径无关

等价定义：曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G上与路径无关 $\Leftrightarrow$ 对G内任意一条封闭曲线L都有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$

2.

Thm2. 设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在单连域G上有连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G上与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Proof. $\Leftarrow$：若 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\forall(x,y)\in G$

对G内任意一条封闭曲线L取逆时针，L所围单连域为D. 由Green公式，

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_D 0\,d\sigma=0$$

$\Rightarrow$：反证：若积分任意圈 $\oint_L Pdx+Qdy=0$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\exists M_0\in G$ s.t. $\left.\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_0}\neq 0$，不妨记为 $\eta>0$

由连续性，$\exists M_0$ 的 δ 邻域 D_δ，该邻域内的点满足 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>\frac{\eta}{2}$

记D_δ的边界Γ_δ取逆时针，由Green公式，

$$\oint_{\Gamma_\delta} Pdx+Qdy=\iint_{D_\delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma \geq \frac{\pi}{2}\times\delta^2>0$$

与任意圈积分$\oint_L Pdx+Qdy=0$矛盾

Rem. Thm 2. 中条件都是充分的：(1) G是单连域

(2) 连续偏导数

反例：$P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$ 在全平面去掉原点，的区域上有连续偏导数，由例2知，$\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 与路径有关

三、$Pdx+Qdy$是某函数全微分的条件

Thm 3. 设$P(x,y)$与$Q(x,y)$在单连域G上有连续偏导数，则

$Pdx+Qdy$是某函数全微分 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Proof. $\Rightarrow$：若$\exists u(x,y)$使$du=Pdx+Qdy$，则$P=\frac{\partial u}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

由P, Q在G上偏导数连续，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

因此$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Leftarrow$：由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\oint_L Pdx+Qdy$在G上与路径无关

构造$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$，$(x_0,y_0)$是G中一定点，

显然$u(x,y)$是G上的一个正常函数

下证$\frac{\partial u}{\partial x}=P$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$

$\forall(x,y)\in G$，

$$\frac{\Delta u_x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\right)\cdot Pdx+Qdy$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx$$

$=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} P(x,y)dx=P(x+\theta\Delta x,y)$，因此$\frac{\partial u}{\partial x}=P$且连续

同理可证 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ 连续

可 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 均连续，因此 u 可微，且

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Pdx+Qdy.$$

四、总结

设 P, Q 在平面单连域 G 上有连续偏导数，则下列四个命题等价：(TFAE)

(1) 曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在 G 上与路径无关

(2) 在 G 上对任意封闭曲线 L：$\oint_L Pdx+Qdy=0$

(3) $Pdx+Qdy$ 是某函数的全微分

(4) $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $(x,y)\in G$

Rem. $Pdx+Qdy \xrightarrow{\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}}$ 存在 $u(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$，其中所有这种函数：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy+C$$

称为 $Pdx+Qdy$ 的一个原函数

例3 证明：$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在 $x>0$ 上是某函数的全微分，并求出所有这种函数.

Proof. 记 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

由 Thm 3., $\exists\, u(x,y)$ s.t. $du=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

这里 $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{(1,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}=\int_0^y\frac{x}{x^2+y^2}dy$

$$=\arctan\frac{y}{x}$$

所有这种函数 $u(x,y)=\arctan\frac{y}{x}+C$

例4 验证 $2xy^2dx+2x^2ydy$ 在全平面上是某函数的全微分，并求出所有这种函数.

Proof. 记 $P=2xy^2$，$Q=2x^2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=4xy$

由 Thm3.，$\exists\, u(x,y)$ s.t. $du=2xy^2dx+2x^2ydy$

这里 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xy^2dx+2x^2ydy+C$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,0)}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}+C=\int_0^y 2x^2ydy+C$$

$$=x^2y^2+C$$

例5 计算 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{3x^2+2y^2}$ $L: x^2+y^2=1$ 取逆时针

Solu. 记 $P=\frac{-y}{3x^2+2y^2}$，$Q=\frac{x}{3x^2+2y^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y^2-3x^2}{(3x^2+2y^2)^2}\ (x^2+y^2\neq 0)$$

取 $L_1: 3x^2+2y^2=\rho^2$（ρ 很小时 L_1 含在 L 内），L_1 取逆时针

记 L_1 与 L 所围复连域为 D，L_1 所围为 D_1

由格林公式

$$\oint_{L-L_1}=\iint_D 0\Rightarrow\oint_L=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{3x^2+2y^2}=\frac{1}{\rho^2}\oint_{L_1}xdy-ydx$$

$$=\frac{2}{\rho^2}\iint_{D_1}d\sigma=\frac{2}{\rho^2}\pi\cdot\frac{\rho}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$$

§21 综合练习

一. 曲线积分知识概要

1. 第一类曲线积分：$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\ (\alpha<\beta)$

$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt\ (\alpha<\beta)$

2. 第二类曲线积分：$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt$

(t从α到β)

3. 两类积分的关系

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,ds$$

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

这里 $T=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 是L上(x,y)处与L方向对应的单位切向量.

4. 格林公式

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

这里D是单连域或复连域

5. 曲线积分与路径无关的条件

P, Q 在单连域G上有连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\,dx + Q\,dy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow$

I. 任意封闭曲线积分为0 $\left(\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0\right)$

II. 存在 $u(x,y)$ 使 $du = P\,dx + Q\,dy$，这里 $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C$

III. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

二. 综合练习

1. 计算 $I = \oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，这里 $L: x^2+y^2 = ax\ (a>0)$

Sol. L的参数方程 $\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\theta \\ y = \frac{a}{2}\sin\theta \end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)}$

$ds = \sqrt{x'^2+y'^2}d\theta = \sqrt{\frac{a^2}{4}}d\theta = \frac{a}{2}d\theta$

$I = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)}\,\frac{a}{2}d\theta = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

$= a^2\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\frac{\theta}{2} = 2a^2$

另解：记L_1：$y=\sqrt{ax-x^2}$，$x\in[0,a]$

$I = \oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\oint_{L_1}\sqrt{x^2+y^2}\,ds = 2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$= 2\int_0^a\sqrt{ax}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx = a^{\frac{3}{2}}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{a-x})\Big|_0^a = 2a^2$

2. 求变力$\vec{F}=\{-x^2y, xy^2\}$沿圆弧L：$x^2+y^2=a^2$顺时针一周做的功.

Solu. 变力$\vec{F}$沿L做功，$W = \oint_L -x^2y\,dx + xy^2\,dy = -\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(y^2+x^2)\,d\sigma$

$= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3\,dr = -2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = -\frac{\pi}{2}a^4$

3. 设L：$|x|+|y|=1$取逆时针，则$I = \oint_L\frac{x\,dy - y\,dx}{3x^2+y^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

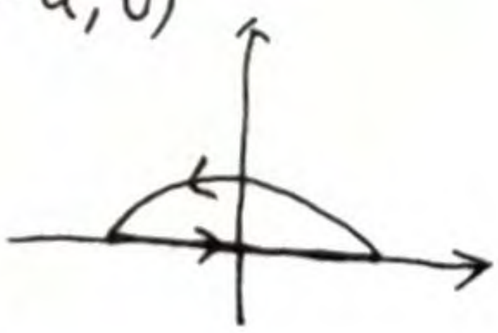
Solu. $P = \frac{-y}{3x^2+y^2}$，$Q = \frac{x}{3x^2+y^2}$，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $(x^2+y^2\neq 0)$

记L_1：$3x^2+y^2=\rho^2$（ρ很小使L_1含在L内），由格林公式，

$\oint_{L-L_1} = \iint_D 0\,d\sigma = 0$，$\oint_L = \oint_{L_1} = \frac{1}{\rho^2}\oint_{L_1}x\,dy - y\,dx$

$= \frac{1}{\rho^2}\iint_{D_1}2\,d\sigma = \frac{2}{\rho^2}\cdot\pi\cdot\frac{\rho}{\sqrt{3}}\cdot\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

4. 计算$I = \int_L(e^x\sin y - 3y + x^5)dx + (e^x\cos y - x)dy$，这里$L$是上半椭圆弧：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(y\geq 0)$ 从$A(a,0)$到$B(-a,0)$



Solu. 记$P = e^x\sin y - 3y + x^5$，$Q = e^x\cos y - x$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x\cos y - 1$，$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x\cos y - 3$

记L_1：$y=0$，x从$-a$到a

L与L_1所围区域D，由格林公式，$\oint_{L+L_1} = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma = 2\iint_D d\sigma$

$=\pi ab$

$$\oint_L = \pi ab - \oint_{L_1} = \pi ab - \int_{-a}^{a} y^5 dy = \pi ab$$

5. 设L是光滑封闭曲线，$\vec{n}$是L上点(x,y)处的外法向量，$\vec{r}$是固定向量，则 $\oint_L \cos(\vec{n},\vec{r})\,ds = 0$

Proof. 记 $\vec{r}=\{a,b\}$，$\vec{\tau}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$是L上点$(x,y)$处与L逆时针对应单位切向量，外法向量 $\vec{n}=\{\cos(\alpha-\frac{\pi}{2}),\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})\}=\{\sin\alpha,-\cos\alpha\}$

$$I=\oint_L \cos(\vec{n},\vec{r})\,ds=\oint_L \frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{|\vec{n}||\vec{r}|}\,ds=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L (a\sin\alpha-b\cos\alpha)\,ds$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\oint_L -b\,dx+a\,dy=\iint_D 0\,d\sigma=0$$

§22 曲面积分

内容：第一、二类曲面积分

Gauss公式和stokes公式

场论简介

§22.1 第一类曲面积分

一、第一类曲面积分的定义与性质

1、引例：求曲面状物体的质量M

已知曲面S的面密度 $\rho=\rho(x,y,z)$（在S上连续）

求质量的思想方法：(1)分割S：S分割成 S_i $(i=1,\cdots,n)$

ΔS_i 也表示其面积

(2)取近似：任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$

对应质量：$\Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$

(3)求和并取极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=M$$

2、定义

Def. 设S是光滑或分段光滑的曲面，$f(x,y,z)$ 在S上定义，将S任意分成n个小部分 ΔS_i（ΔS_i 也表示其面积），任取一点，$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，并作和 $\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，记λ是n个 ΔS_i 的最大直径，若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \text{ 存在且与分法无关，}$$

则称 $f(x,y,z)$ 在S上可积，其极限值称为f在S上关于面积的曲面积分，也称为第一类曲面积分，记作

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

3、可积条件

(1)可积函数一定有界

(2)在S上处处连续（有边界的连续到边界）时一定可积

4. 第一类曲面积分的性质

完全对应第一类曲线积分或定积分

Rem. (1) 当S是xOy平面上的平面区域时，第一类曲面积分就退化为二重积分

(2) 若S是封闭曲面，经常记为 $\oiint_S$

(3) 曲面也可用Σ表示：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$

(4) 第一类曲面积分的物理意义：被积函数为密度时

$\iint_S f(x,y,z)\,dS = M$

第一类曲线积分的几何意义：以L为准线，母线平行于z轴高度为 $f(x,y)$ 的柱面面积.

二. 第一类曲面积分计算法

Thm. 设 $f(x,y,z)$ 在有界光滑曲面S上连续，S的方程 $z=z(x,y)$ $z(x,y)$ 在D上有连续偏导数，则 $\iint_S f(x,y,z)\,dS =$

$$\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

Proof. 将S分成n个小 ΔS_i（其面积也是 ΔS_i），ΔS_i 在xOy平面投影 $\Delta\sigma_i$（其面积也是 $\Delta\sigma_i$）

任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$

作乘积并作和 $\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\cdot\iint_{\Delta\sigma_i}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$

$$= \sum f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\cdot\sqrt{1+z_x^2(\xi_i',\eta_i')+z_y^2(\xi_i',\eta_i')}\,\Delta\sigma_i$$

$$\approx \sum f(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\sqrt{1+z_x^2(\xi_i,\eta_i)+z_y^2(\xi_i,\eta_i)}\,\Delta\sigma_i$$

令 $\lambda\to 0$ 得，

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$$

Cor. 设 $f(x,y)$ 在 S 上连续，S 的参数方程 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，$(u,v)\in D$

且 $x(u,v)$，$y(u,v)$，$z(u,v)$ 有连续偏导数，至少有一对函数的 Jacobi 行列式不为 0，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS =$

$\iint\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,d\sigma$，其中 $d\sigma = du\,dv$

例1 计算 $I=\iint\limits_S \frac{1}{z}\,dS$，这里 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被 $z=\frac{R}{2}$ 所截的小部分曲面

Solu. $S: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$，$D: x^2+y^2\le \frac{3}{4}R^2$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$I=\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,d\sigma = R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{1}{R^2-r^2}\,r\,dr$$

$$=2\pi R\cdot\frac{-1}{2}\ln(R^2-r^2)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}=2\ln 2\cdot\pi R$$

例2 $\oiint\limits_S x^2\,dS$，这里 $S: x^2+y^2+z^2=R^2$

Solu. (法一：$S=S_1+S_2$ 解出 S_1 和 S_2 的函数方程用定理)

根据对称性，原式 $=\oiint\limits_S x^2\,dS=\oiint\limits_S y^2\,dS=\oiint\limits_S z^2\,dS$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS=\frac{R^2}{3}\oiint\limits_S dS=\frac{R^2}{3}\cdot 4\pi R^2$$

$$=\frac{4\pi}{3}R^4$$

例3 计算 $I=\oiint\limits_S x^2\,dS$，这里 $S: x^2+y^2=a^2\ (0\le z\le 2)$

Solu. $S=S_1+S_2$，$S_1: x=\sqrt{a^2-y^2}$，$S_2: x=-\sqrt{a^2-y^2}$

$$I=\iint\limits_S x^2\,dx=\iint\limits_S y^2\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS=\frac{a^2}{2}\iint\limits_S dS$$

$$=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a\cdot 2=2\pi a^3$$

当S关于坐标平面对称时，被积函数为奇(偶)函数时，

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS \xlongequal[\text{关于yOz对称}]{f(-x,y,z)=-f(x,y,z)} 0$$

例如 $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ 0\le z\le 2}} \sin x y^2 z^2\, dS = 0$, $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=R^2} x e^{x^4y^2z^2}\, dS = 0$

§22.2 第二类曲面积分

一、预备知识

1. 有向曲面

下列曲面可以分出两个侧：

(1) 若 $S: z=z(x,y)$，则 S 可分出上、下两个侧

(2) 若 $S: x=x(y,z)$，则 S 可分出前、后两个侧

(3) 若 $S: y=y(x,z)$，则 S 可分出左、右两个侧

(4) 若 S 是封闭曲面，则 S 可分出内、外两个侧

Def. 指定了侧的曲面称为有向曲面. 有向曲面的侧对应法向量如下：

(1) 上侧对应法向量向上，下侧对应法向量向下

(2) 前侧对应法向量向前，后侧对应法向量向后

(3) 左侧对应法向量向左，右侧对应法向量向右

(4) 内侧对应法向量向内，外侧对应法向量向外

Rem. (1) 有些曲面分不出两个侧

(2) 第二类曲面积分中的曲面是有向曲面.

2. 有向曲面在坐标平面上的投影

设 ΔS 是光滑曲面且有向，假设 ΔS 对应法向量的方向余弦 $\cos\gamma$ 保号，ΔS 在 xOy 平面的投影区域 $\Delta\sigma$，$\Delta\sigma$ 的面积也记 $\Delta\sigma$，则 ΔS 在 xOy 坐标平面上投影 $(\Delta S)_{xy}$ 定义为：

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}\Delta\sigma, & \cos\gamma\geq 0\\ -\Delta\sigma, & \cos\gamma\leq 0\\ 0, & \cos\gamma\equiv 0\end{cases}$$

类似地，$(\Delta S)_{yz}\xlongequal{\cos\alpha\text{保号}}\begin{cases}\Delta\sigma, & \cos\alpha\geq 0\\ -\Delta\sigma, & \cos\alpha\leq 0\\ 0, & \cos\alpha\equiv 0\end{cases}$，$(\Delta S)_{xz}\xlongequal{\cos\beta\text{保号}}\begin{cases}\Delta\sigma, & \cos\beta\geq 0\\ -\Delta\sigma, & \cos\beta\leq 0\\ 0, & \cos\beta\equiv 0\end{cases}$

例 (1) $S: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取上侧

$(\Delta S)_{xy}=\pi R^2$，$(\Delta S)_{yz}$，$(\Delta S)_{xz}$ 无意义（$\cos\alpha$，$\cos\beta$ 不保号）

(2) ΔS：$x^2+y^2=a^2\ (0\le z\le 1)$ 取内侧

$(\Delta S)_{yz}$，$(\Delta S)_{zx}$ 无意义，$(\Delta S)_{xy}=0$

二、第二类曲面积分定义与性质

1. 引例　求稳定流体单位时间内流出有向曲面 S 的流量 Φ

（设流体密度 $\rho=1$）

已知流体流速 $\vec{v}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

P,Q,R 在 S 上连续

S 为有向平面，$\vec{v}$ 为常速度，则单位时间内流过 S 的流量为底面为 S，斜高为 $|\vec{v}|$ 的斜柱体的体积：

$$\Phi=S|\vec{v}|\cos(\vec{v},\vec{n_0})=S\cdot\vec{v}\cdot\vec{n_0}$$

一般地，S 为有向曲面，$\vec{v}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$ 时，将 S 分成 n 个小部分 ΔS_i（要求 ΔS_i 在三个坐标平面上投影均有意义），任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 对应 $\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，$\Delta S_i$ 在 (ξ_i,η_i,ζ_i) 对应法向量 $\vec{n_0}=\{\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i\}$，则流体单位时间内流出 ΔS_i 的流量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_i&\approx\Delta S_i\cdot\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\vec{n_0}\\&=P\cdot\cos\alpha_i+Q\cdot\cos\beta_i+R\cdot\cos\gamma_i\\&\approx P\cdot(\Delta S_i)_{yz}+Q\cdot(\Delta S_i)_{zx}+R\cdot(\Delta S_i)_{xy}\end{aligned}$$

求和并取极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sum P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum P(\Delta S)_{yz}+\lim_{\lambda\to0}\sum Q\cdot(\Delta S_i)_{zx}+\lim_{\lambda\to0}\sum R\cdot(\Delta S_i)_{xy}$$

$$=\Phi$$

下面抽象出第二类曲面积分：

2. 第二类曲面积分的定义

设 $R(x,y,z)$ 在光滑或分片光滑有向曲面 S 上定义，将 S 分成 n 个小部分 $\Delta S_i\ (i=1,\cdots,n)$，要求 ΔS_i 的法向量的方向余弦 $\cos\gamma$ 保号。任取一点 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，作乘积 $R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$，记 λ 为 ΔS_i 的最大直径，若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在且与分法无关，则称 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上可积，极限值称为 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 S 上关于坐标 xy 的曲面积分，也称为第二类曲面积分，记为

$$\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy \text{ 或 } \iint_S R(x,y,z)\,dx\wedge dy$$

否则称 $R(x,y,z)$ 不可积。

类似地定义，$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

3. 可积条件

(1) 可积函数一定有界

(2) 连续到 S 的边界的函数一定可积

Rem. (1) 当 S 是封闭有向曲面时，经常记为 $\oiint_S$

(2) 当 P、Q、R 同时在有向曲面 S 上连续，对应三个积分相加：$\iint_S P\,dy\,dz+\iint_S Q\,dz\,dx+\iint_S R\,dx\,dy=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$

有对应的物理意义，表示单位时间内以 $\vec{v}=\{P,Q,R\}$ 为流速的均匀流体 $(\rho=1)$ 流出有向曲面 S 的流量 Φ

若 $\Phi>0$，表示流出，若 $\Phi<0$，表示流入

4. 性质

(1) $\iint\limits_S [R_1(x,y,z) \pm R_2(x,y,z)]\,dx\,dy = \iint\limits_S R_1(x,y,z)\,dx\,dy \pm \iint\limits_S R_2(x,y,z)\,dx\,dy$

(2) $\iint\limits_S k\,R(x,y,z)\,dx\,dy = k\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$

(3) $\iint\limits_S 1\,dx\,dy = \iint\limits_S dx\,dy$ 表示 S 的微元在 xOy 平面上投影代数和

(4) 若 $S = S_1 + S_2$, 则 $\iint\limits_S = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2}$

(5) 记 $-S$ 与 S 的侧相反, 则 $\iint\limits_{-S} = -\iint\limits_S$

Rem. (1) 性质(3)的推论：若 S 为封闭曲面取内(或外)侧,
$\oiint\limits_S dx\,dy = 0$

(2) 当 S 在某坐标平面上投影保号, 则积分保号

三、第二类曲面积分计算法

Thm. 设 S 是有向光滑曲面, S 的方程：$z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$,
取上(或下)侧, z_x, z_y 在 D 上连续, $R(x,y,z)$ 在 S 上连续,
则 $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,d\sigma$

Proof. 不妨设 S 取上侧,

$\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,(\Delta S_i)_{xy} = \sum R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\,\Delta\sigma_i$

令 $\lambda \to 0$, $\iint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,d\sigma$

Rem. (1) 第二类曲面积分化为二重积分要求有向曲面是二元函数的图形, 否则先分割再分别表示为二元函数的图形

类似地, $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz \xlongequal{S:x=x(y,z)} \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,d\sigma$

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx \xrightarrow{S:\,y=y(x,z)} \iint_{D_{zx}} Q(x,y(x,z),z)\,d\sigma$$

例1 计算 $I=\iint_S z\,dx\,dy$，$S: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取内侧

Solu. $S=S_1+S_2$ $\quad S_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取下侧

$S_2: z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 取上侧

$D_{xy}: x^2+y^2\le R^2$

$$I=\iint_S z\,dx\,dy=\iint_{S_1} z\,dx\,dy+\iint_{S_2} z\,dx\,dy=-\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma+\iint_{D_{xy}}-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$$

$$=2\iint_{D_{xy}}-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R-\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=\frac{-4}{3}\pi R^3$$

Rem. $\iint_S z^2\,dx\,dy=0$

例2 计算 $I=\iint_S x\,dy\,dz+\sin(xyz)^2\,dx\,dy$，$S: x^2+y^2=a^2,\ 0\le z\le 1$

取外侧

Solu. $\iint_S \sin(xyz)^2\,dx\,dy=0\ (\cos\gamma=0)$

$S=S_1+S_2$ $\quad S_1: x=\sqrt{a^2-y^2}$ 取前侧 $\quad S_2: x=-\sqrt{a^2-y^2}$ 取后侧

$D_{yz}: 0\le z\le 1,\ -a\le y\le a$

$$I=\iint_S x\,dy\,dz=\iint_{S_1} x\,dy\,dz+\iint_{S_2} x\,dy\,dz$$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2}\,d\sigma+\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2}\,d\sigma=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{a^2-y^2}\,d\sigma$$

$$=2\int_0^1 dz\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$=2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=2\cdot\frac{1}{2}\pi a^2=\pi a^2$$

例3 计算 $I=\iint\limits_S (z^2+x)\,dy\,dz$. $S: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ (0\le z\le 2)$ 取下侧

Solu. $S=S_1+S_2$ $\quad S_1: x=\sqrt{2z-y^2}$ 取前侧

$S_2: x=-\sqrt{2z-y^2}$ 取后侧

$$D_{yz}: \begin{cases} -\sqrt{2z}\le y\le \sqrt{2z} \\ 0\le z\le 2 \end{cases}$$

$$I=\iint\limits_S (z^2+x)\,dy\,dz=\iint\limits_{S_1}(z^2+x)\,dy\,dz+\iint\limits_{S_2}(z^2+x)\,dy\,dz$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}(z^2+\sqrt{2z-y^2})\,d\sigma+\iint\limits_{D_{yz}}-(z^2-\sqrt{2z-y^2})\,d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{2z-y^2}\,d\sigma=2\int_0^2 dz\int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}}\sqrt{2z-y^2}\,dy$$

$$=2\int_0^2\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2z})^2\,dz=4\pi$$

四、两类曲面积分的关系

Thm. 设S是光滑有向曲面，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在S上连续，则 $\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$

$$=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

$\vec{n_0}=\{\cos\alpha(x,y,z),\cos\beta(x,y,z),\cos\gamma(x,y,z)\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是S上点(x,y,z)与S的侧对应的单位法向量.

Proof. 先证 $\iint\limits_S P\,dy\,dz=\iint\limits_S P\cos\alpha\,dS$:

不妨设 $S: x=x(y,z)$（否则可切割成若干曲面）取前侧

$(y,z)\in D_{yz}$

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz=\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,d\sigma$$

曲面 $x=x(y,z)$ 处在 (x,y,z) 处与S的侧对应的单位法向量

$$\vec{n_0}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}},\frac{-z_z}{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}}\right\}$$

$$=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\iint_S P\cos\alpha\,dS=\iint_S P\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}}\,dS=\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\frac{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}}{\sqrt{1+z_y^2+z_z^2}}\,d\sigma$$

$$=\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,d\sigma$$

同理可证 $\iint_S Q\,dz\,dx=\iint_S Q\cos\beta\,dS$

$$\iint_S R\,dx\,dy=\iint_S R\cos\gamma\,dS$$

综上有，$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$

例4 设S是光滑有向曲面，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在S连续，S的面积为A，记 $M=\max\limits_S\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$，则

$$\left|\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\right|\le M\cdot A$$

Proof. $\left|\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\right|=\left|\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS\right|$

$$\le\iint_S\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,dS\le M\cdot A$$

例5 计算 $I=\iint_S(z^2+x)\,dy\,dz$，$S:z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$(0\le z\le 2)$ 取下侧

Solve. $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在 (x,y,z) 处下侧对应单位法向量

$$\vec{n_0}=\left\{\frac{z_x}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}},\frac{z_y}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}},\frac{-1}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}\right\}=\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\}$$

$$I=\iint_S(z^2+x)\,dy\,dz=\iint_S(z^2+x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dS$$

$$=\iint_S(z^2+x)\cdot x\,(-dx\,dy)=-\iint_{D_{xy}}\left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right)(-x)\,d\sigma=4\pi$$

五、参数方程有向曲面的第二类曲面积分

设 $S:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D$

$\vec{n}=\left\{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}$ 对应的 S 的侧称为 S 的正侧

(反侧同理)

则 $\iint\limits_S P\,dy\,dz=\pm\iint\limits_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,d\sigma$

$\iint\limits_S Q\,dz\,dx=\pm\iint\limits_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,d\sigma$

$\iint\limits_S R\,dx\,dy=\pm\iint\limits_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,d\sigma$

当 S 为正侧时取"+"，为反侧时取"−".

例 6 计算 $I=\iint\limits_S x\,dz\,dy$，$S:\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases}$ 取外侧

$\vec{n}=\left\{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)},\ \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right\}$ 对应球面外侧

$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin\varphi\cos\varphi$，$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

$I=\iint\limits_S x\,dx\,dy=\iint\limits_D R\sin\varphi\cos\theta\cdot R^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\sigma$

$=R^3\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0$

§22.3 高斯公式及应用

一、高斯公式

1. 定义

Def. 若该区域内任一封闭曲面都可以收缩成一个点，且该点也在该区域内，这种区域称为单连通区域，否则称为复连通区域。

例如，下列区域为单连通区域：

Ω_1：全空间　Ω_2：$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$　Ω_3：$x^2+y^2+z^2\le 1$

下列区域为复连通区域：

Ω_4：$0<x^2+y^2+z^2<1$　Ω_5：$\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1$

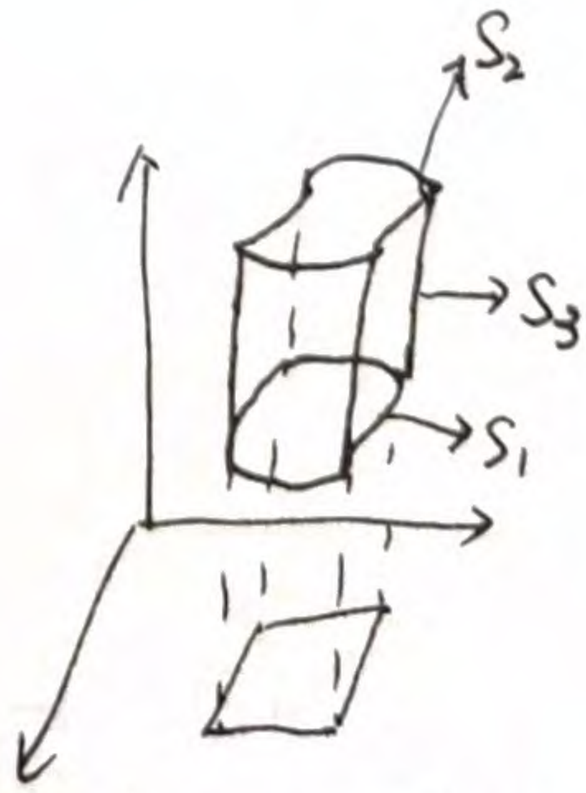
2. 高斯公式

Thm. 设空间有界区域Ω由封闭曲面S所围成（Ω的边界为S），S取外侧，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在$\overline{\Omega}=\Omega+S$上有连续偏导数，则有下列高斯公式：

$$\oiint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint_{\overline{\Omega}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Proof. 先设Ω是单连域

(1) 若Ω是xy型域



$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases}$$

下证 $\oiint_S R\,dx\,dy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dV$

记Ω边界$S=S_1+S_2+S_3$，S_1取下侧，S_2取上侧，S_3取外侧

$$\oiint_S=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}=-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))\,d\sigma+\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_2(x,y))\,d\sigma$$

$$\iiint_\Omega = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_{D_{xy}} \left[R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\right] d\sigma$$

(2) 对一般单连域 Ω，可以分割成有限个 xy 型域，例如 $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$，这里 Ω_1，Ω_2 均为 xy 型域，其边界分别记为 S_1 和 S_2

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iiint_{\Omega_1} + \iiint_{\Omega_2} = \oiint_{S_1} R\,dx\,dy + \oiint_{S_2} R\,dx\,dy$$

$$= \oiint_S R\,dx\,dy$$

同理可证 $\oiint_S P\,dy\,dz = \iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,dV$

$$\oiint_S Q\,dz\,dx = \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV$$

综上，对单连域 Ω 有：

$$\oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

再设 Ω 是复连通区域，例如：封闭曲面 S_0 围成单连域，S_1 也围成单连域，且 S_1 含在 S_0 内，记 S_0 与 S_1 所围复连域为 Ω，S_1 取外侧，S_0 取外侧.

将 Ω 用曲面切开分成单连域 Ω_1，(边界外侧记为 S') 在 Ω_1 上用高斯公式

$$\iiint_\Omega = \iiint_{\Omega_1} = \oiint_{S'} = \oiint_{S_0-S_1} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Rem. 若单连通区域 Ω 的边界外侧 S，当 $P=x$，$Q=y$，$R=z$ 时

$$\oiint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iiint_\Omega 3\,dV = 3V$$

因此 Ω 的体积 $V = \frac{1}{3}\oiint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$

例1 计算 $I = \oiint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$

$S: x^2+y^2+z^2 = R^2$ 取外侧

Solve. $I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} 3(x^2+y^2+z^2)\,dV = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\,dr = 6\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5}$

例2 设Ω是锥体$z=\sqrt{(x^2+y^2)}$与球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$所围立体，

S是Ω的边界外侧，计算$I=\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

Solve. $I=\oiint\limits_S = \iiint\limits_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dV = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^a r^4dr$

$=6\pi\cdot(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\frac{a^5}{5}$

另计算：$I=\oiint\limits_S x^3dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

$I=\oiint\limits_S = \iiint\limits_\Omega 2(x+y+z)\,dV = 2\iiint\limits_\Omega z\,dV = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^a r^3dr$

$=4\pi\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{a^4}{8}\pi$

例3 设S是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$取上侧，计算

$I=\iint\limits_S x^3dydz+y^2dzdx+z^2dxdy.$

Solve. 记S_1：$z\equiv 1$ $(x^2+y^2\le 1)$取下侧

记S与S_1所围立体为Ω，

$I=\iint\limits_S = \oiint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1} = -\iiint\limits_\Omega 2(x+y+z)\,dV - \iint\limits_{S_1} x^3dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

$=-2\iiint\limits_\Omega z\,dV+\iint\limits_{D_{xy}} 1\,d\sigma = -2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\,dz+\pi\cdot 1^2$

$=-4\pi\int_0^1\frac{r^2}{2}(1-r^2)\,dr+\pi=\frac{\pi}{2}$

例4 证明 $\oiint\limits_S \frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\begin{cases}0, & S\text{内不含原点}\\ 4\pi, & S\text{内含原点,取外侧}\end{cases}$

其中S为封闭曲面

Solu. $P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{r^3}$, $Q=\frac{y}{r^3}$, $R=\frac{z}{r^3}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^3-x\cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}\quad\left(\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0\quad(x^2+y^2+z^2\neq 0)$$

(1) 当S内不含原点,记S所围立体为Ω,由高斯公式,

$$\oiint\limits_S=\iiint\limits_\Omega 0\,dV=0$$

(2) 当S内含原点,以原点为球心作小球面$S_1: x^2+y^2+z^2=\rho^2$ (ρ很小使S_1含在S内),取外侧,记S与S_1所围复连域为Ω,由复连域上的高斯公式,

$$\oiint\limits_{S-S_1}=\iiint\limits_\Omega 0\,dV=0\Rightarrow\oiint\limits_S=\oiint\limits_{S_1}\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\oiint\limits_{S_1}x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\cdot 4\pi\rho^3=4\pi$$

§22.4 斯托克斯公式及应用

一、说明

1. Stokes 公式建立(不封闭)曲面积分与曲面的边界曲线(封闭)积分的联系，是 Green 公式的推广

2. 两类积分的转化关系：

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$dy\,dz = \cos\alpha\,dS,\ dz\,dx = \cos\beta\,dS,\ dx\,dy = \cos\gamma\,dS$$

3. 规定下列记号：

$$\nabla = \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

4. Stokes 公式：

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

二、Stokes 公式

Lem. 设曲面 $S: z = z(x,y)$，$z(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，记 S 的边界 Γ，D 的边界 L（L 是 Γ 的投影），L 与 Γ 均取逆时针，则 $P(x,y,z)$ 在 Γ 上连续，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \int_L P(x,y,z(x,y))\,dx$$

Proof.. (比较两边分别对应和式)

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))\,\Delta x_i$$

令 $\lambda \to 0$ 得 $\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \int_L P(x,y,z(x,y))\,dx$

Thm 1. 设空间有向光滑(或分片光滑)曲面 S 以空间封闭曲线 Γ 为边界，$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 S(含 Γ)上有连续偏导数，则有 Stokes 公式：

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

这里 Γ 的方向与 S 的侧成右手系.

Proof. 下证 $\oint_\Gamma Pdx=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$

(1) 先设 $S: z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$, S 的边界与 D_{xy} 的边界 L 对应. 不妨设 S 取上侧，Γ 取逆时针

$$\oint_\Gamma P(x,y,z)dx=\oint_L P(x,y,z(x,y))dx=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

记 S 上侧对应单位法向量 $\vec{n_0}=\left\{\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right\}$

$$=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

上式 $=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}dxdy$

$$=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy$$

$$=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, dS$$

$$=-\iint_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx$$

$$=\iint_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

(2) 若 S 为一般有向曲面，可将 S 分成若干二元函数表示的曲面，例如 $S = S_1 + S_2$

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} = \oint_{\Gamma}$$

同理可证，$\oint_\Gamma Q\,dy = \iint_S -\frac{\partial Q}{\partial z}dy\,dz + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy$

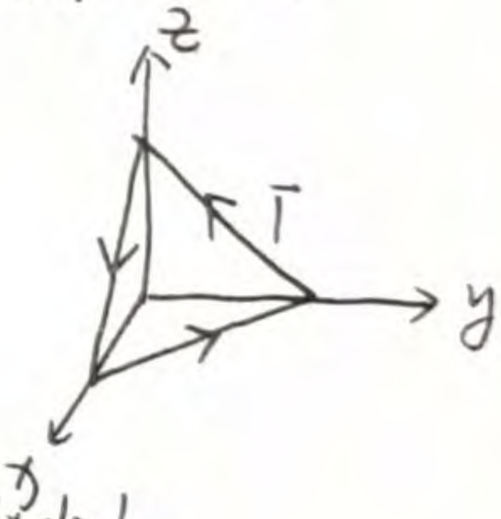
$$\oint_\Gamma R\,dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz\,dx$$

合并得，$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

Rem. 当 S 是 xOy 平面区域 D 取上侧，stokes 公式退化为 Green 公式：$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$

例1 设 S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的三角形曲面，S 的边界取逆时针，计算

$\oint_\Gamma z\,dx + x\,dy + y\,dz$



Solu. Γ 是 S 的边界，S 取上侧

由 Stokes 公式，$I = \oint_\Gamma = \iint_S \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$$= \iint_S 1\,dy\,dz + 1\,dz\,dx + 1\,dx\,dy$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} dx\,dy = \frac{3}{2}$$

三. 空间曲线积分与路径无关的条件

类似 Green 公式的应用；(1) 曲线积分与路径无关定义及等价定义

同平面曲线

(2) Green 公式的四个等价命题也对应成立

Thm 2. 设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在空间单连通区域 Ω 上有连续偏导数，则下面四个命题等价：

(i) 在 Ω 上曲线积分 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关

(ii) 在 Ω 上对任意封闭曲线 Γ 有 $\oint_\Gamma = 0$

(iii) $Pdx+Qdy+Rdz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 在 Ω 上全微分

这里 $u=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz+C$

(iv) 在 Ω 上 $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

Proof. 完全类似格林公式对应命题的证明

例2 验证 $yzdx+xzdy+xydz$ 是某三元函数 $u(x,y,z)$ 的全微分，并求出这种函数

Solu. 记 $P=yz$, $Q=xz$, $R=xy$

$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=x$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=z$ 在全空间(单连域)上成立，由 Thm 2. 知，$yzdx+xzdy+xydz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分形式，这里 $u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz+C$

选择最简路径 $\begin{cases} x=xt \\ y=yt \\ z=zt \end{cases}$ (t 从 0 到 1)：

上式 $=\int_0^1 3xyzt^2dt+C = xyz+C$

§22.5 场论与向量函数积分

一. 场论基本概念

1. 数量场：数量函数在物理上称为数量场

向量场：向量函数在物理上称为向量场

例如，一个区域上的温度函数 $V(x,y,z)$ 称为数量场

$\vec{F}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$ 为向量场

$\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$ 是流速函数，为向量场

2. 数量函数的梯度

已知 $u(x,y,z)$ 有偏导数，~~梯~~向量：$\operatorname{grad} u(x,y,z)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

称为 u 在 (x,y,z) 处的梯度

Rem.(1) 数量函数的梯度函数是一个向量函数（向量场）

例如，$u=xyz$，$\operatorname{grad} u(x,y,z)=\{yz,xz,xy\}$

$\operatorname{grad} u\big|_{(1,1,1)}=\{1,1,1\}$.

(2) 梯度是一个向量，其方向是函数在该点的方向导数取最大值的方向，其模就是最大方向导数.

3. 向量函数的通量、散度、环量、旋度

已知向量函数 $\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，这里 P,Q,R 在空间区域 Ω 上有（连续）偏导数

(1) 向量函数 $\vec{A}(x,y,z)$ 穿过有向曲面 S 的通量

$$\Phi=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

(2) 向量函数 $\vec{A}(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的散度

$$\operatorname{div}\vec{A}(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

(3) 向量函数 $\vec{A}(x,y,z)$ 沿 Ω 中封闭曲线 Γ（的第二类曲线积分）的环量

$$I=\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

(4) 向量函数 $\vec{A}(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处的旋度

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Rem. 向量函数在某点的旋度是一个向量，旋度函数(场)是一个向量函数

二、场论概念的物理意义

1. 通量的物理意义：流量（$\vec{A}$ 表示流速）
2. 散度的物理意义：单位体积的通量（类似于密度）
3. 环量的物理意义：流体沿封闭曲线的流动能力（类似于功）
4. 旋度的物理意义：$\vec{A}(x,y,z)$ 为流速时，其模 $|\mathrm{rot}\,\vec{A}(x,y,z)|$ 表示过点 (x,y,z) 所有平面上以该点为圆心作小圆，其方向与平面方向成右手系，所有平面上的单位面积环量的最大值，其方向为取最大值平面的法向量

下面证明2与4：

Prop 1. 散度是单位体积的通量

Proof. 已知 $\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，P,Q,R 在 Ω 上有连续偏导数

任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，以 M_0 为球心作小球面 S_ρ（ρ 为半径）取外侧，S_ρ 对应小球体 Ω_ρ，$\vec{A}(x,y,z)$ 穿过 S_ρ 的通量：

$$\Phi_\rho=\oiint_{S_\rho}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint_{\Omega_\rho}\mathrm{div}\,\vec{A}(x,y,z)\,dV$$

$$=\mathrm{div}\,\vec{A}(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)\cdot\frac{4}{3}\pi\rho^3,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2\le\rho^2$$

有 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\xi,\eta,\zeta)=\dfrac{\Phi_\rho}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}=\dfrac{\Phi_\rho}{V_\rho}$

令 $\rho\to0$，$(\xi,\eta,\zeta)\to(x_0,y_0,z_0)$ 得

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\rho\to0}\frac{\Phi_\rho}{V_\rho}$$

Prop 2. 旋度的模是过该点所有有向平面上单位面积的环量的最大值，旋度的方向为取到最大值的有向平面法向量.

Proof. 设 $\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$，P,Q,R 在 Ω 上有连续偏导数

任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，过该点任一个有向平面，其法向量与平面的侧成右手系，以 M_0 为圆心作小有向圆 Γ_ρ 以 ρ 为半径 Γ_ρ 对应圆面 S_ρ，则 $\vec{A}(x,y,z)$ 沿封闭曲线 Γ_ρ 的环量：

$$I_\rho=\oint_{\Gamma_\rho}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S_\rho}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_{S_\rho}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

$$\overset{\text{近}}{=}\iint_{S_\rho}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}_0\,dS\overset{\text{近}}{=}\iint_{S_\rho}(\mathrm{rot}\,\vec{A})_n\,dS=(\mathrm{rot}\,\vec{A}(\xi,\eta,\zeta))_n\cdot\pi\rho^2$$

即 $(\mathrm{rot}\,\vec{A}(\xi,\eta,\zeta))_n=\dfrac{I_\rho}{\pi\rho^2}$

令 $\rho\to0$，$(\xi,\eta,\zeta)\to(x_0,y_0,z_0)$ 得，

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A}(x_0,y_0,z_0))_n=\lim_{\rho\to0}\frac{I_\rho}{\pi\rho^2}$$

当平面法向量与 $\mathrm{rot}\,\vec{A}(x_0,y_0,z_0)$ 方向相同时，

$|\mathrm{rot}\,\vec{A}(x_0,y_0,z_0)|=\max\limits_{\vec{n}}(\mathrm{rot}\,\vec{A}(x_0,y_0,z_0))_n$，此时对应旋度的方向

三、向量函数积分记法

已知 $\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

1. 第一类曲线积分

$$I=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

$$=\int_\Gamma\vec{A}_\Gamma(x,y,z)ds$$

$\vec{A}_\Gamma(x,y,z)$ 是 $\vec{A}$ 在 Γ 的切向量 $\vec{\tau}$ 上的投影

2. 第二类曲面积分

$$I=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S \vec{A}_n(x,y,z)\,dS$$

3. 高斯公式

$$\oiint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$\Leftrightarrow \oiint_S \vec{A}_n(x,y,z)\,dS=\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{A}(x,y,z)\,dV$$

4. 斯托克斯公式

$$\oint_T P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds$$

$$\Leftrightarrow \oint_T \vec{A}_T(x,y,z)\,ds=\iint_S(\operatorname{rot}\vec{A}(x,y,z))_n\,ds$$

例1 已知$f(x,y,z)=x^2yz$，求 grad f, div(grad f), rot(grad f)

Solve. $\operatorname{grad}f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}=\{2xyz,x^2z,x^2y\}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}f)=\frac{\partial}{\partial x}(2xyz)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2y)=2yz$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=\{0,0,0\}=\vec{0}$$

第二十二章综合练习

1. 第一类曲面积分 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS \xlongequal[S:z=z(x,y)]{\text{化二重积分}} \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma$

2. 第二类曲面积分 $\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$

(1) S不封闭时化为二重积分: $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz$

(2) S封闭时可用高斯公式化为三重积分

3. 两类积分的关系:

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

这里 $\vec{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是S上点 (x,y,z) 处对应S侧的单位法向量.

注: $\cos\alpha\,dS=dy\,dz$, $\cos\beta\,dS=dz\,dx$, $\cos\gamma\,dS=dx\,dy$

4. 高斯公式

$$\oiint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

5. 斯托克斯公式

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

6. 单连域上空间曲线积分与路径无关的条件

$\Leftrightarrow$(1) $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 是某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分

$\Leftrightarrow$(2) 任意封闭曲线积分 $\oint\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$

$\Leftrightarrow$(3) $\mathrm{rot}\,\vec{A}(x,y,z)\equiv\vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

7. 场论基本概念

(1) 数量函数 $f(x,y,z)$ 的梯度: $\mathrm{grad}\,f=\{f_x,f_y,f_z\}$

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f)=\frac{\partial}{\partial x}f_x+\frac{\partial}{\partial y}f_y+\frac{\partial}{\partial z}f_z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\overset{\text{记作}}{=}\Delta f$

(2) 向量函数 $\vec{A}(x,y,z)=\{P,Q,R\}$

$\vec{A}(x,y,z)$ 穿过有向曲面 S 的通量：$\Phi = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

散度：$\operatorname{div}\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$（数量函数）

环量：$I = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}$

综合练习

1. 已知 $\vec{A} = \{xy, yz, zx\}$，则 $\operatorname{rot}\vec{A}\big|_{(1,1,1)}$，$\operatorname{div}\vec{A}\big|_{(1,1,1)}$：

Solve. $\operatorname{div}\vec{A} = y^2 + z^2 + x^2$，$\operatorname{div}\vec{A}\big|_{(1,1,1)} = 3$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \{-2yz, -2xz, -2xy\}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}\big|_{(1,1,1)} = \{-2, -2, -2\}.$$

2. 已知 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$：

Solve. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}$

$$= \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

3. 计算第一类曲面积分 $I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$，其中 $S: x^2+y^2+z^2 = R^2$，

Solve. $S = S_1 + S_2$　　$S_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$　　$D_1: x^2 + y^2 \le R^2$

$$I = \iint\limits_S = 2\iint\limits_{S_1} (x^2+y^2)\,dS = 2\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\cdot\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,d\sigma$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,d\sigma = 2R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\,dr = 4\pi R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3\sin^3 t\cdot R\cos t}{R\cos t}\,dt$$

$$= 4\pi R^4\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{8\pi}{3}R^4$$

4. 设 S 是锥体 Ω：$\sqrt{3(x^2+y^2)} \le z \le \sqrt{3}$ 的表面外侧，计算

$$I = \oiint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$$

Solve. $I=\oiint_S = \iiint_\Omega 2(x+y+z)\,dV = 2\iiint_\Omega z\,dV = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{3}} z\,dz$

$=4\pi\int_0^1 r\cdot\frac{3}{2}(1-r^2)\,dr = 6\pi\int_0^1(r-r^3)\,dr = \frac{3}{2}\pi$

5. 设 $u(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上有二阶连续偏导数，Ω 的边界 S 取外侧，记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，则：

(1) $\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_\Omega \Delta u\,dV$

(2) $\oiint_S u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dV+\iiint_\Omega u\cdot\Delta u\,dV$，$\vec{n}$ 表示外法向量

Proof. (1) 记 $\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ 是 S 上点 (x,y,z) 处单位法向量，则 $\vec{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS \overset{u\text{可微}}{=\!=} \oiint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\oiint_S \frac{\partial u}{\partial x}dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}dz\,dx+\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy$$

$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dV=\iiint_\Omega \Delta u\,dV$$

(2) $\oiint_S u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint_S u\frac{\partial u}{\partial x}dy\,dz+u\frac{\partial u}{\partial y}dz\,dx+u\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy$

$$=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dV+\iiint_\Omega u\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dV$$

$$=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dV+\iiint_\Omega u\cdot\Delta u\,dV$$

6. 设 $u(x,y)$ 在平面闭区域 D 上有二阶连续偏导数，L 是 D 的正向边界，记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，则：

(1) $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_D \Delta u\,d\sigma$

(2) $\oint_L u\cdot\frac{\partial u}{\partial n}ds = \iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma+\iint_D u\cdot\Delta u\,d\sigma$，$\vec{n}$ 是 L 的外法向量

Proof. (1) 记 $\vec{T_0}=\{\cos\alpha,\sin\alpha\}$ 是有向曲线 L 的单位切向量，

$$\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left\{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\{\sin\alpha,-\cos\alpha\}.$$

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}ds=\oint_L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)ds=\oint_L\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)d\sigma$$

(2) $\oint_L u\frac{\partial u}{\partial n}ds = \oint_L (u\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha)\,ds$

$$= \oint_L u\frac{\partial u}{\partial x}dy - u\frac{\partial u}{\partial y}dx = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma + \iint_D u\Delta u\,d\sigma$$

2024秋数学分析Ⅲ小测试题

席号：_____	
姓名 _____	
学号	
成绩：	

一. 填空题（每小题4分共计20分）

1. 下面函数在$(0,0)$处可微的是_____.

(A) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}$　　(B) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(C) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　　(D) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

2. 曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线方程为_____

3. 函数$z=1-3x^2-2y^2$在点$(1,1)$处沿椭圆$3x^2+2y^2=5$在该点的内法向量方向的方向导数$\dfrac{\partial z}{\partial l}=$_____.

4. 设$u=f(x,y)$有二阶连续偏导数，在变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$下，方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$变为$u$关于$r,\theta$的偏导数方程为_____.

5. 设$F(u,v)$可微，a,b,c不全为零，则曲面$F(cx-az,cy-bz)=0$上任一点处的法向量垂直于某固定向量$\vec{l}$，则$\vec{l}=$_____

二. 计算题（每小题20分共计40分）

1. 求$f(x,y)=2(y-x^2)^2-y^2-\frac{1}{7}x^7$的极值.

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA

2. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$ 所确定隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

三. 证明题（每小题20分共计40分）

1. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处不可微，但沿任意方向均存在方向导数.

2. 用条件极值证明：周长为2a的一切三角形中，等边三角形面积最大.

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA

2024秋数学分析Ⅲ小测参考答案

一、填空题（共20分）

1. (D)　2. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-5}{1}$　3. $\sqrt{52}$　4. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0$

5. $\{a,b,c\}$ 或 $k\{a,b,c\}$ 均可

二、1. 解方程组 $\begin{cases} f_x=-8x(4-x^2)-x^6=0 \\ f_y=4(4-x^2)-2y=0 \end{cases}$ 得稳定点 $(-2,8)$ 与 $(0,0)$

$A=f_{xx}=-8y+24x^2-6x^5$，$B=f_{xy}=-8x$，$C=f_{yy}=2$

1) 在 $(-2,8)$ 处，$A=224$，$B=16$，$C=2$，$AC-B^2>0$ 且 $A>0$，故 $f(-2,8)=-\frac{96}{7}$ 为极小值

2) 在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=0$（判别法失效）。但是，若取 $x=0$ 且 $|y|$ 很小时，$f=2y^2-y^2>0$；若取 $y=x^2$ 且 $|x|$ 很小时，$f=-x^4-\frac{1}{7}x^7<0$，故 $f(0,0)$ 非极值。

2. 方程两边分别对 x 及 y 求导：

$$\begin{cases} 4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+8y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}=0 & \cdots ① \\ 4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+8z+8y\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0 & \cdots ② \end{cases}$$

解得 $x=0$ 及 $y=-2z$，代入原方程得稳定点：$(0,-2)$ 及 $z=1$

$(0,\frac{16}{7})$ 及 $z=-\frac{8}{7}$

再将方程①两边分别对 x 求导：

$$4+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+8y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad \cdots ③$$

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial z}{\partial x}+8y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad \cdots ④$$

将方程②两边对 y 求导

$$4+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+8\frac{\partial z}{\partial y}+8\frac{\partial z}{\partial y}+8y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \cdots ⑤$$

在 $(0,-2)$ 处，$AC-B^2=\frac{16}{225}>0$　$A=\frac{4}{15}>0$，故 $z(0,-2)=1$ 极小值

在 $(0,\frac{16}{7})$ 处，$AC-B^2=\frac{16}{225}>0$　$A=-\frac{4}{15}<0$，故 $z(0,\frac{16}{7})=-\frac{8}{7}$ 极大值。

三、证明题　1. 设三边长为 x,y,z，问题变为求 $f(x,y,z)=\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ 在条件 $x+y+z=2a$ 下极值，令 $F=a(a-x)(a-y)(a-z)+\lambda(x+y+z-2a)$

解方程组 $F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0$ 得稳定点 $(\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}a)$，根据题意，该点对应最大面积 $S=\sqrt{a(a-\frac{2}{3}a)(a-\frac{2}{3}a)(a-\frac{2}{3}a)}=\frac{a^2}{\sqrt{3^3}}$.

2　1) $\frac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-f(0,0)}{\rho}=\begin{cases}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, & \cos\alpha\neq 0 \\ 0, & \cos\alpha=0\end{cases}$　2) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，故不可微。

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA

2024秋《数学分析Ⅲ》小测试题

姓名：_____

席号：_____

学号：_____

专业年级：_____

一 填空题（每小题4分共32分）

1. $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\rho^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} e^{x^4+y^4+z^4}\,dx\,dy\,dz=$ _____.

2. 设 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}\sin(x^2+y^2)^2\,dx\,dy$，则 $F'(t)=$ _____.

3. 记 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$，则 $B(3,4)=$ _____.

4. 记 $D: x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_D (x+y)^2\,d\sigma=$ _____.

5. 记 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，则 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2\,dv=$ _____.

6. 设曲面 $S: z=xy\ (x^2+y^2\le 1)$，计算得 $\iint\limits_S x\,ds=$ _____.

7. 设 $\varphi(x)=\int_x^{x^2}\cos(xy)^2\,dy$，则 $\varphi'(x)=$ _____.

8. 设 $D: x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_D(\cos^2x+\sin^2y)\,d\sigma=$ _____

二 计算题（共68分）

1. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围立体，计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$.
(13分)

2. 设 Ω 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围立体，计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z\,dv$.
(13分)

3. 计算第二类曲面积分 $I=\int_L (e^x\sin y-x-y)dx+(e^x\cos y-x)dy$,
(13分) 这里L是从点A(2,0)沿半圆弧 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 到点O(0,0)的有向曲线弧.

4. 求球面S: $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 内部的
(13分) 那部分曲面的面积.

5. 设D是由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $y=x^2$, $y=3x^2$ 所围区域,试选择
(16分) 适当坐标变换计算二重积分 $I=\iint_D e^{xy}\,dxdy$.

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA

2024年秋《数学分析III》小测参考答案

一 填空题（每小题4分）

1. $\frac{4}{3}\pi$　　2. $2\pi t\sin t^4$　　3. $\frac{1}{60}$　　4. $\frac{\pi}{2}$

5. $\frac{4}{5}\pi$　　6. 0　　7. $-\int_x^{x^2} 2x\sin(xy)^2\,dy+2x\cos x^6-\cos x^4$　　8. π

二

1. $I=0+0+\iiint\limits_{\Omega} z\,dV \xlongequal{\text{柱坐标}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_r^1 z\,dz=2\pi\int_0^1\frac{1}{2}r(1-r^2)\,dr=\frac{\pi}{4}.$

2. $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV \xlongequal{\text{球坐标}} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R r^3\,dr=2\pi\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times\frac{R^4}{4}=\frac{\pi R^4}{8}.$

3. 记 $P=e^x\sin y-x-y$，$Q=e^x\cos y-x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(e^x\cos y-1)-(e^x\cos y-1)=0$$

记 $\overrightarrow{OA}$：$y=0$，x从0到2：

$$I=\int_L=\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\xlongequal{\text{格林公式}}0-\int_{\overline{OA}}\xlongequal{\text{化定积分}}-\int_0^2(-x)\,dx=2.$$

4. 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2+(z-a)^2=a^2\end{cases}$ 得 $z=\frac{a}{2}$

记 D：$x^2+y^2\le\frac{3}{4}a^2$，S：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

所求面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr=2\pi a\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\pi a^2$$

5. 令 $\begin{cases}u=xy\\v=\frac{y}{x^2}\end{cases}$ 则 D 对应 D'：$\begin{cases}1\le u\le 2\\1\le v\le 3\end{cases}$

$$J'=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & x\\-\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=\frac{y}{x^2}+\frac{2y}{x^2}=\frac{3y}{x^2}=3v$$

$$J=\frac{1}{J'}=\frac{1}{3v}$$

原式 $\xlongequal{\text{变换}}\iint\limits_{D'}e^u|J|\,du\,dv=\int_1^2 e^u\,du\int_1^3\frac{1}{3v}\,dv=\frac{\ln 3}{3}(e^2-e).$

HUAWEI Mate 9 Pro
LEICA DUAL CAMERA