§1 概论

§1.1 微分方程概述

例1 元素衰变

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \Rightarrow \frac{1}{R(t)}dR(t) = -kdt \Rightarrow \ln R(t) = -kt + C_1$$

$$R(t) = Ce^{-kt}$$

由 $R(0) = R_0$, $R(t) = R_0 e^{-kt}$

例2 物体冷却

Newton 冷却定律

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_0)$$

例3 传染病模型

$$N\frac{di}{dt} = \lambda \cdot N \cdot s \cdot i \Rightarrow \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i)$$

例4 单摆

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

φ 很小时 $\sin\varphi \approx \varphi$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

若考虑阻尼: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

若考虑外力: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{1}{ml}F(t)$

给定初值: $\varphi(0) = \varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$

§1.2 微分方程的基本概念

一、ODE的定义

Def. 联系自变量、因变量及其导数的等式称为微分方程

例 $\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$ (1)

$(\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$ (2)

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ (3)

二、分类

1. 按自变量个数 $\begin{cases}\text{ODE：自变量个数只有一个 (1)(2)}\\ \text{PDE：自变量个数大于或等于两个 (3)}\end{cases}$

2. 按线性 $\begin{cases}\text{线性方程：函数及其各阶导数为一次有理式 (1)(3)}\\ \text{非线性方程：非线性的方程 (2)}\end{cases}$

3. 按方程的阶

Def. 方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数

一阶方程：(2)　　二阶方程：(1)(3)

Rem. (1) 一阶方程的一般形式：$F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$

(2) n阶方程的一般形式：$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 或 $y^{(n)}=f(x,y,\cdots,y^{(n-1)})$

(3) 一阶显式方程有时可化为微分形式：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\rightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

(4) n阶~~显式~~线性微分方程的一般形式：

$$\frac{d^ny}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=f(t)$$

例 $y\cdot y''+1=0$　二阶非线性微分方程

$y'=y(y(x))$　非微分方程

三、方程的解

1. 定义

Def. 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上连续且有直到 n 阶的导数，若将 $y=\varphi(x)$ 及各阶导数代入方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \qquad (*)$$

得到关于 x 的恒等式，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,\ \forall x\in I$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 在 I 上的一个解.

例 $y''+y=0$，$I=(-\infty,+\infty)$

$y=7\sin x$，$y=3\cos x$ 等称为 $y''+y=0$ 的一个特解

$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 称为通解

Rem. (i) 区间 I 经常省略，简称为方程的一个解.

(ii) 若关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 $(*)$ 的解，则称 $\Phi(x,y)$ 为方程 $(*)$ 式的隐式解.

例 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

$\Rightarrow x\,dx+y\,dy=0$，$x^2+y^2=C$. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \text{ 为隐式解} \\ y=\sqrt{1-x^2},\ y=-\sqrt{1-x^2} \text{ 为显式解} \end{cases}$

2. 方程的通解

Def. 含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解

$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$

称为方程 $(*)$ 的通解.

Rem. (i) n 个任意常数相互独立是指 $\exists\,(C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 的某个邻域 s.t. $\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}\neq 0$

或简记为 $\dfrac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,\cdots,c_n)}\neq 0$

其中 $\varphi=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$, $\varphi'=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\cdots$, $\varphi^{(n-1)}=\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}$

例 验证 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是 $y''+y=0$ 的通解.

Proof. (1) $y'=c_1\cos x-c_2\sin x$, $y''=-c_1\sin x-c_2\cos x$

$y''+y=0$, 因此 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是一个解

(2) $\dfrac{\partial(y,y')}{\partial(c_1,c_2)}\triangleq\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq 0$

因此 c_1,c_2 相互独立, $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是通解.

例 验证 $y=c_1\sin x+c_2\sin x$ 不是通解

$\dfrac{\partial(y,y')}{\partial(c_1,c_2)}=\begin{vmatrix}\sin x & \sin x\\ \cos x & \cos x\end{vmatrix}=0$

3. 方程的特解

Def. 满足特定条件的解称为方程的特解(可不包含任意常数的解)

例 $\begin{cases}y''+y=0\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases}$ 有通解 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$

其中 $c_2=0$, $c_1=1$ 时为特解

4. 定解条件及初值问题

定解条件: 特定条件 $\begin{cases}\text{初值条件}\\ \text{边值条件}\end{cases}$

定解问题: 方程 + 定解条件 $\begin{cases}\text{初值问题 (Cauchy 问题)}\\ \text{边值问题}\end{cases}$

例 n 阶方程的初值问题 $\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases}$

例 $\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0 \\ y(0)=2,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=1 \end{cases}$

Solve. 猜想 $y=e^{\lambda x}$ 是一个解，则有 $(\lambda^2+5\lambda+4)\cdot e^{\lambda x}=0$

$\lambda=-1,\ \lambda=-4$

因此有通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$

$y'=-C_1e^{-x}-4C_2e^{-4x}$

同时有特解 $y=3e^{-x}-e^{-4x}$

例 求双参数函数族 $y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$ (*) 所满足的微分方程

Solve. $y'=C_1e^x(\cos x-\sin x)+C_2e^x(\sin x+\cos x)$ (1)

$y''=C_1e^x(-2\sin x)+C_2e^x(2\cos x)$

$\frac{\partial(y,y')}{\partial(C_1,C_2)}=\begin{vmatrix} e^x\cos x & e^x\sin x \\ e^x(\cos x-\sin x) & e^x(\sin x+\cos x) \end{vmatrix}\neq 0$，$C_1, C_2$ 相互独立

联立 (*)、(1) 式有，$\begin{cases} C_1=e^{-x}[y(\sin x+\cos x)-y'\sin x] \\ C_2=e^{-x}[y(\sin x-\cos x)+y'\sin x] \end{cases}$

代入 (2) 有：$y''-2y'+2y=0$

若考虑求解 $y''-2y'+2y=0$：特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$

特征根 $\lambda=1\pm i$

通解 $y=C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{(1-i)x}$

$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$

四. 微分方程及其解的几何解释

考虑 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其中 $f(x,y)$ 是平面区域 D 内的连续函数

Def. 设 $y=\varphi(x)$ 是方程在区间 I 上的解，则 $y=\varphi(x)$ 在 xOy 平面是一条光滑曲线，称它为方程的积分曲线.

Rem. (1) 方程的通解 $\varphi(x,c)$ 对应 xOy 平面上的一族曲线，称为积分曲线族.

满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是平面上过 (x_0,y_0) 的一条积分曲线.

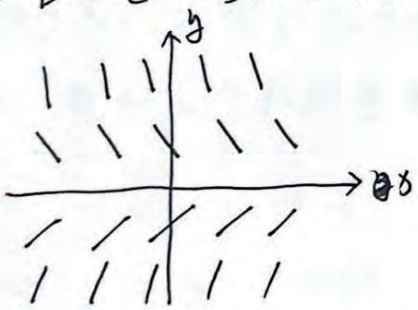
Def. 在区域 D 内每一点 $P(x,y)$ 作一小直线段满足斜率为 $f(x,y)$，称带有直线段的区域 D 为方程的方向场，小直线段为方程在 P 点的线素.

方程的任何一条积分曲线和它的方向场是吻合的.

Def. 方向场中方向相同的点的几何轨迹称为等斜线，

初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的几何说明：给定方程，在平面区域 D 上给定了方向场，求解初值问题即求过 (x_0,y_0) 并与方向场吻合的积分曲线.

例：$D=[-2,2]\times[-2,2]$，求 $\frac{dy}{dx}=-y$ 的方向场



考虑初值问题的近似解，$y(x+\Delta x)\approx y(x)+f(x,y)\Delta x$，$0<\Delta x<\delta$

$$\varphi(x)=\begin{cases} y_0+f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0), & x_0\le x\le x_0+\delta \\ y_1+f(x_1,y_1)\cdot(x-x_1), & x_1\le x\le x_1+\delta \\ \cdots\cdots \\ y_n+f(x_n,y_n)\cdot(x-x_n), & x_n\le x\le x_n+\delta \end{cases}$$ (Euler 折线)

其中 $x_k=x_0+k\delta$，$y_k=\varphi(x_k)$

§2 一阶微分方程的初等解法

$dy = f'(x)\,dx$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ (全微分方程)

$du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$

内容：变量分离方程，齐次微分方程，全微分方程，积分因子，隐式微分方程.

§2.1 变量分离方程与变量替换

一、变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \qquad (1)$$

其中 $f(x)$, $g(y)$ 分别是关于 x, y 的连续函数.

变为：$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)\,dx$，其中 $g(y) \neq 0$

两边同时积分：$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)\,dx$

通解为：$G(y) = F(x) + C$，其中 $G(y)$, $F(x)$ 是 $\frac{1}{g(y)}$, $f(x)$ 原函数.

若 $g(y_0) = 0$，则 $y = y_0$ 也是方程(1)的解.

Rem. 若 $y = y_0$ 不在通解中，补上即可.

例 1 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Sol. $y\,dy = -x\,dx$，$\int y\,dy = \int -x\,dx$，$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C_1$

通解 $x^2 + y^2 = C$

例 2 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

Sol. $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$，$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$，$\ln|y| = \ln|x| + C$

通解 $y = Cx$

例3　求方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)\cdot y$ 的通解，其中 $p(x)$ 为连续函数.

Solu. (1) $y\neq 0$ 时：$\frac{1}{y}dy=p(x)dx$，$\int\frac{1}{y}dy=\int p(x)dx$

$\ln y=\int p(x)dx+C$，$y=C\cdot e^{\int p(x)dx}$

例4　求解 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y^2\cdot\cos x\\ y(0)=1\end{cases}$ 的特解

Solu. $y\neq 0$，$\int\frac{1}{y^2}dy=\int\cos x\,dx$，$-\frac{1}{y}=\sin x+C$

$y=-\frac{1}{\sin x+C}$，另有奇解 $y=0$.

由 $y(0)=1$，$C=-1$，$y=\frac{1}{1-\sin x}$

Rem. 通解并非所有解

二、微分形式的变量分离方程

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0. \qquad (2)$$

其中 $M(x)$，$N(y)$，$P(x)$，$Q(y)$ 均为连续函数

若 $N(y)P(x)\neq 0$，则：$\frac{M(x)}{P(x)}dx+\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0$

通解 $F(x)+Q(y)=C$，其中 $F(x)$，$Q(y)$ 为 $\frac{M(x)}{P(x)}$ 的，$\frac{Q(y)}{N(y)}$ 原函数

若 $P(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 也是方程的解.

若 $N(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是方程的解.

例5　$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$

Solu. 当 $x\neq\pm1$，$y\neq\pm1$ 时：

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=0$$

$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=C$

通解为 $(x^2-1)(y^2-1)=C$ $(C\neq 0)$

显然，$x=\pm1$，$y=\pm1$ 也是解 $(C=0)$

因此通解为 $(x^2-1)(y^2-1)=C$，C 为任意常数

三、齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

其中$f(u)$为u的连续函数

变量替换：令$u=\frac{y}{x}$，则$y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

可$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$

若$f(u)-u\neq 0$，$\frac{1}{f(u)-u}du=\frac{1}{x}dx$，通解为$G(u)=\ln x+C$

原方程的通解：$G\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+C$

若$f(u_0)-u_0=0$，则$u=u_0$也是解.

例 6 $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

Solve. 令$u=\frac{y}{x}$，则$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u$，

$\tan u\neq 0$时 $\int\frac{1}{\tan u}du=\int\frac{1}{x}dx$，$\ln|\sin u|=\ln|x|+C$

通解为$\sin\frac{y}{x}=Cx\ (C\neq 0)$

$\tan u=0$时$\sin u=0$，也是解

原方程的通解为$\sin\frac{y}{x}=Cx$，C为任意常数

Rem. (1) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$是齐次方程时满足$f(x,y)$是x和y的齐次函数，可$\forall t>0$，$f(tx,ty)=f(x,y)$，此时

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=f(tx,ty)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

(2) 对$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$，其中$M(x,y)$和$N(x,y)$都是$x$和$y$的$m$次齐次函数，可$\forall t>0$，$M(tx,ty)=t^m M(x,y)$，$N(tx,ty)=t^m N(x,y)$，则方程可改写为齐次方程，此时

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}=\frac{t^m M(x,y)}{t^m N(x,y)}=\frac{M\left(1,\frac{y}{x}\right)}{N\left(1,\frac{y}{x}\right)}$$

$$=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

例7 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \quad (x<0)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2\sqrt{xy}}{x}=\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $u+x\frac{du}{dx}=u+2\sqrt{u}$，$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}$

$u\neq 0$ 时 $\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{x}dx$，$\sqrt{u}=\ln(-x)+C$

$$u=(\ln(-x)+C)^2,\ \ln(-x)+C>0$$

$u=0$ 时也是解

原方程的通解：$y=x\cdot(\ln(-x)+C)^2$，$\ln(-x)+C>0$

特解 $y=0$.

例8 $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=2xy$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1+u^2}$$

有通解 $\frac{xy}{x^2-y^2}=Cx$，特解 $y=x$，$y=-x$

四. 可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \qquad (4)$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 为常数

若 $c_1=c_2=0$：$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$ 为齐次方程

若 $c_1\neq 0$ 或 $c_2\neq 0$：

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，令 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$，则：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

化简可 $\frac{du}{dx}=a_2+b_2f(u)$

当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 有交点 $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

令 $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$，则 $\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$

例9 $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

Solu. $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow (1,2)$，令 $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-2 \end{cases}$

$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则 $u+X\frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u}$，即 $X\frac{du}{dX} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$

若 $u^2+2u-1\neq 0$，则 $\int \frac{1+u}{1-2u-u^2}du = \int \frac{1}{X}dX$

即 $-\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| = \ln|X| + C$

$X^2\cdot(u^2+2u-1) = C \ (C\neq 0)$

显然 $u^2+2u-1=0$ 对应的 $u=u_0$ 也是解

因此通解为 $X^2(u^2+2u-1)=C$，C为任意常数

代回原变量：$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C$

Rem. 更一般的方程情形：$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 可类似求解

例10 $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y-2}{x+y-1}\right)^2$

Solu. $\begin{cases} y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,2)$，令 $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-2 \end{cases}$

$\frac{dY}{dX} = 2\left(\frac{Y}{X+Y}\right)^2$

令 $u=\frac{Y}{X}$，则 $u+X\frac{du}{dX} = 2\frac{u^2}{(1+u)^2}$，即 $X\frac{du}{dX} = -\frac{u+u^3}{(1+u)^2}$

若 $u\neq 0$，则 $\int \frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du = \int -\frac{1}{X}dX$

$\ln|u| + 2\arctan u = -\ln|X| + C$

通解 $y-2 = C\cdot e^{-2\arctan\frac{y-2}{x+1}}$，C为任意常数

Rem. $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$，令 $u=ax+by+c$

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ （令 $u=xy$）

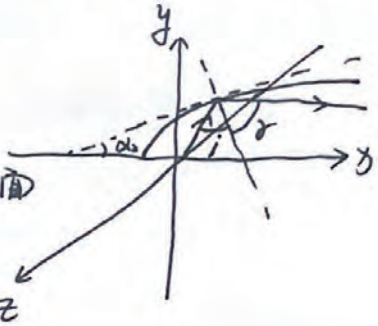
$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$ （令 $u=xy$）

$\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x})$ （令 $u=\frac{y}{x}$）

五、应用举例

例 探照灯反射镜面的形状

要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性



Solu. 如图所示建立坐标系

设曲线 $\begin{cases} y=f(x) \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成曲面

问题归结为求 xOy 平面上曲线 $y=f(x)$ 之的方程：

$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha_2=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ （齐次方程）

亦即 $\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}\cdot sgn(y)$

令 $u=\frac{x}{y}$，则 $x=uy$，则 $u+y\frac{du}{dy}=u+sgn(y)\sqrt{u^2+1}$

$\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=sgn(y)\cdot\frac{1}{y}dy$

不妨设 $y>0$，两边积分有，$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=\int\frac{1}{y}dy$，

$\ln(u+\sqrt{u^2+1})+C=\ln y$，$C\cdot(u+\sqrt{u^2+1})=y$

代入 $u=\frac{x}{y}$ 有，$C\cdot(x+\sqrt{x^2+y^2})=y^2$，$x^2+y^2=\frac{y^4}{C^2}+x^2-2\frac{xy^2}{C}$

即 $1=\frac{y^2}{C^2}-\frac{2x}{C}$，$y^2=C^2+2Cx$，$C$ 为任意常数

反射镜面为旋转抛物面：$y^2+z^2=C^2+2Cx$

Rem. $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$，令 $u=ax+by+c$

$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ （令 $u=xy$）

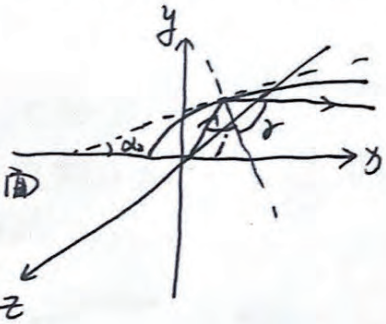
$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$ （令 $u=xy$）

$\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x})$ （令 $u=\frac{y}{x}$）

五、应用举例

例 探照灯反射镜面的形状

要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性



Solve. 如图所示建立坐标系

设曲线 $\begin{cases} y=f(x) \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转形成曲面

问题归结为求 xOy 平面上曲线 $y=f(x)$ 的方程：

$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha_2=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ （齐次方程）

亦即 $\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}\cdot sgn(y)$

令 $u=\frac{x}{y}$，则 $x=uy$，则 $u+y\frac{du}{dy}=u+sgn(y)\sqrt{u^2+1}$

$\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=sgn(y)\cdot\frac{1}{y}dy$

不妨设 $y>0$，两边积分有，$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du=\int\frac{1}{y}dy$，

$\ln(u+\sqrt{u^2+1})+C=\ln y$， $C\cdot(u+\sqrt{u^2+1})=y$

代入 $u=\frac{x}{y}$ 有，$C\cdot(x+\sqrt{x^2+y^2})=y^2$，$x^2+y^2=\frac{y^4}{C^2}+x^2-2\frac{xy^2}{C}$

即 $1=\frac{y^2}{C^2}-\frac{2x}{C}$，$y^2=C^2+2Cx$，$C$ 为任意常数

反射镜面为旋转抛物面：$y^2+z^2=C^2+2Cx$

§2.2 线性方程

一、一阶线性常微分方程

1. 形式：$\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot y+Q(x)$ (1)

其中 $P(x)$、$Q(x)$ 都是连续函数

Rem. (i) 若方程为 $a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$

在 $a(x)\neq 0$ 的区间上有：$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y+\frac{c(x)}{a(x)}=0$.

(ii) $\begin{cases}\text{齐次}: Q(x)\equiv 0,\ \frac{dy}{dx}=P(x)\cdot y & (2)\\ \text{非齐次}: Q(x)\not\equiv 0,\end{cases}$

2. 常数变易法

先求齐次方程(2)的通解：$y=C\cdot e^{\int P(x)dx}$，C为任意常数

考虑 $y=C(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$ 的导数：$y'(x)=C(x)P(x)e^{\int P(x)dx}+C'(x)e^{\int P(x)dx}$

代入非齐次方程(1)，$Q(x)=C'(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

即：$C'(x)=Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$，$C(x)=\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx+C$

因此非齐次方程通解为 $y(x)=\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{\int P(x)dx}$

Rem. 线性非齐次方程通解的结构：

$$y(x)=\underbrace{C\cdot e^{\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程的通解}}+\underbrace{\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\cdot e^{\int P(x)dx}}_{\text{非齐次方程的一个特解}}$$

例1 求解方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$，n为常数

Solve. $\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}\cdot y=e^x\cdot(x+1)^n$

(i) 先求齐次方程的通解：$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}\cdot y$

$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{n}{x+1}dx$，$y=C\cdot(x+1)^n$

(ii) 求非齐次方程的通解：设 $y=C(x)\cdot(x+1)^n$ 是方程的通解

$C'(x)(x+1)^n=e^x\cdot(x+1)^n$，$C(x)=e^x+C$

非齐次方程通解为 $y=(e^x+C)\cdot(x+1)^n$，C为任意常数

例 2 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$

$x=(-\ln y+c)\cdot y^2$，c为任意常数

$y=0$ 也是解

3、积分因子法

$\frac{dy}{dx}-P(x)\cdot y=Q(x)$

考虑 $\frac{d}{dx}(y(x)\cdot z(x))=\frac{d}{dx}y(x)\cdot z(x)+\frac{d}{dx}z(x)\cdot y(x)$

有 $\frac{d}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\cdot y(x)\right)=\frac{dy}{dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}-P(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}\cdot y$

$=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}-P(x)\cdot y\right)$

上式两边同乘 $e^{-\int P(x)dx}$：

$e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}-P(x)\cdot y\right)=e^{-\int P(x)dx}\cdot Q(x)$

可 $e^{-\int P(x)dx}\cdot y=\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx+C$

因此 $y=\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+c\right)\cdot e^{\int P(x)dx}$，C为任意常数

4. 一阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot y+Q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

(1) 先求通解，再代入 $y(x_0)=y_0$，求出 c.

(2) $y=c\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}+\int_{x_0}^{x}Q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}P(\tau)d\tau}ds\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}$

可求得 $c=y_0$：

$y=y_0\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}+\int_{x_0}^{x}Q(s)\cdot e^{-\int_{x_0}^{s}P(\tau)d\tau}ds\cdot e^{\int_{x_0}^{x}P(\tau)d\tau}$

例 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明方程

$$\frac{dx}{dt}+x=f(t) \qquad (*)$$

所有解均在 $[0,+\infty)$ 上有界.

Proof. 设 $y=y(t)$ 是方程(*)上任意给定的特解，令 $y(0)=y_0$，

则 $y(t)$ 一定满足

$$y(t)=y_0\cdot e^{\int_0^t(-1)dt}+\int_0^t f(s)e^{-\int_0^s(-1)d\tau}ds\cdot e^{\int_0^t(-1)dt}$$

$$=y_0\cdot e^{-t}+\int_0^t f(s)e^s ds\cdot e^{-t}$$

显然，$\exists M>0$ s.t. $|f(t)|\le M$, $\forall t\in[0,+\infty)$

从而 $|y(t)|=\left|y_0\cdot e^{-t}+\int_0^t f(s)e^s ds\cdot e^{-t}\right|$

$$\le|y_0\cdot e^{-t}|+\left|\int_0^t f(s)e^s ds\cdot e^{-t}\right|$$

$$\le|y_0|+e^{-t}\cdot\int_0^t|f(s)|e^s ds$$

$$\le|y_0|+e^{-t}\cdot M\cdot\int_0^t e^s ds$$

$$=|y_0|+e^{-t}\cdot(e^t-1)\cdot M\le|y_0|+M$$

因此 $y(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界

5. 线性方程的性质

(1) 齐次线性微分方程的解的线性组合仍是齐次方程的解
齐次线性微分方程的解与非齐次线性微分方程的解之和仍是非齐次线性微分方程的解；非齐次线性微分方程两个任意解的差仍是解.

(2) 齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的特解之和构成非齐次线性微分方程的通解.

(3) 线性微分方程的初值问题的解是存在唯一的.

例3 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$

Solve. $\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-6\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=-x$，$\frac{d(-\frac{1}{y})}{dx}+\frac{6}{x}\cdot\frac{1}{y}=x$

令 $z=\frac{1}{y}$，有：$z=(\frac{1}{8}x^8+C)\cdot x^{-6}=\frac{1}{8}x^2+C\cdot x^{-6}$

代回 y 有：$y=\frac{1}{\frac{1}{8}x^2+C\cdot x^{-6}}$，实际上 $y=0$ 也是解.

二、Bernalli方程

1.形式：$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)\cdot y^n\ (n\neq 0,1)$ (3)

其中 $P(x)$, $Q(x)$ 为连续函数

2.解法：$y\neq 0$时 $y^{-n}\frac{dy}{dx}=P(x)\cdot y^{1-n}+Q(x)$ (4)

$$\frac{d(y^{1-n})}{dx}=(1-n)\cdot P(x)\cdot y^{1-n}+(1-n)Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$, $\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)\cdot z+(1-n)Q(x)$ (5)

设(5)式通解为 $z=\varphi(x,c)$

则(3)式通解为 $y^{1-n}=\varphi(x,c)$，c为任意常数

Rem. (1)方程(3)中 $n=0,1$ 时为线性方程；

(2)方程(3)中 $n>0$ 时另有特解 $y=0$.

例4 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy+x^3y^3}$

Solve. $\frac{dx}{dy}=yx+y^3x^3$，$x^{-3}\frac{dx}{dy}=yx^{-2}+y^3$

令 $z=x^{-2}$, $\frac{dz}{dy}=-2y\cdot z-2y^3$

齐次方程 $\frac{dz}{dy}=-2yz$，有通解 $z=ce^{-y^2}$

非齐次方程 $z=c(y)e^{-y^2}$, $c'(y)\cdot e^{-y^2}=-2y^3$

$c(y)=\int -2y^3e^{y^2}dy \overset{t=y^2}{=} -\int te^t dt=-(t-1)e^t+c$

$=-(y^2-1)\cdot e^{y^2}+c$

通解 $z=[-(y^2-1)e^{y^2}+c]e^{-y^2}=-(y^2-1)+ce^{-y^2}$

原方程通解为 $x^{-2}=ce^{-y^2}-y^2+1$

例5 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y+3x}{x^2}$

Solve. 令 $u=e^y$ $\frac{du}{dx}=e^y\cdot\frac{dy}{dx}$

$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u+\frac{3}{x}$，即 $\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{x}+\frac{3u}{x}$，$\frac{1}{u}=cx^{-3}-\frac{1}{2}x^{-1}$

通解为 $\frac{1}{e^y}=cx^{-3}-\frac{1}{2}x^{-1}$，$c$为任意常数

三. Riccati 方程

1. 形式: $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ (6)

其中 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 为连续函数

Rem. (1) 1841年, Liouville证明 (6)式一般情况下不能表示为初等函数解

(2) 若已知 (6) 的一个特解, 则可求出通解.

2. 解法: 设(6)有一特解 $\bar{y}(x)$, 设 $y(x) = z + \bar{y}(x)$ 是 (6) 的解,

则代入(6)有, $\frac{dz}{dx} + \frac{d\bar{y}}{dx} = P(x)\cdot(z^2 + 2\bar{y}z + \bar{y}^2) + Q(x)\cdot(z+\bar{y}) + R(x)$

即 $\frac{dz}{dx} + \frac{d\bar{y}}{dx} = P(x)\cdot z^2 + (2P(x)\bar{y} + Q(x))\cdot z + P(x)\bar{y}^2 + Q(x)\bar{y} + R(x)$

由 $\bar{y}$ 是 (6) 的特解,

$\frac{dz}{dx} = P(x)\cdot z^2 + (2P(x)\bar{y} + Q(x))\cdot z$, 为 Bernoulli 方程

因此原方程通解为 $y = \varphi(x, c) + \bar{y}$

例 6 $y' = y^2 - x^2 + 1$

Solve. 显然 $y = x$ 是一个特解

令 $y = x + z(x)$, 则 $\frac{dz}{dx} = z^2 + 2xz$, 通解 $\frac{1}{z}(-\int e^{-x^2}dx + c)e^{-x^2}$

原方程通解 $y = x + e^{x^2}\cdot(-\int e^{-x^2}dx + c)^{-1}$, c 为任意常数

§2.3 全微分方程与积分因子

一、全微分方程

(1) $d(xy) = xdy + ydx = 0$

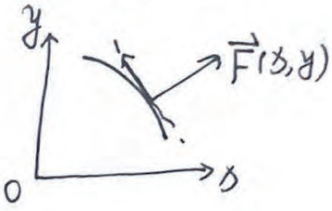
$xdy + ydx = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C$

(2) $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$

$ydx - xdy = 0 \Rightarrow d(\frac{x}{y}) = 0 \ (y \neq 0) \Rightarrow \frac{x}{y} = C$

(3) 设 xOy 平面存在力场，$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$

求曲线 l，使其与力场处处垂直.



Solve. 设曲线 $l: y = y(x)$

则 l 在 Q 点处斜率为 $\frac{dy}{dx}$

向量场 $\vec{F}$ 在 Q 点斜率 $\tan\theta = \frac{N(x,y)}{M(x,y)}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$，即 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. (*)

若 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$，则(1)式为全微分方程，即 $\exists\, u(x,y)$ s.t.

$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$，$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

即方程化为 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$，通解为 $u(x,y) = C$

C为任意常数.

1. 定义

Def. 设一阶线性微分方程的微分形式为 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (*)

其中 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 在区域 G 内连续且有一阶连续偏导数.

若存在可微函数 $u(x,y)$ s.t. $du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$,

即 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$，则称方程(*)为恰当微分方程

或全微分方程，$u(x,y)$ 称为 $Mdx + Ndy$ 的一个原函数

例1 (1) $xdx + ydy = 0$. $\quad d(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2) = 0$

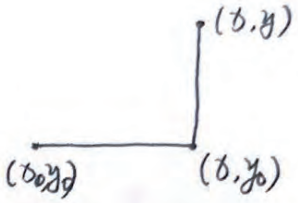
(2) $ydx - xdy = 0$

Thm. 设 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 在某单连通区域 G 内连续可微，则方程 (*) 是全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, $\forall (x,y)\in G$ (**)

且当 (**) 成立时，原函数可取为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$$

$$=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$



其中，$(x_0,y_0)\in G$ 是任意取定一点.

或：$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$

Proof. $\Rightarrow$ (*) 是全微分方程，$\exists\, u(x,y)$ s.t. $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$, $N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$

由 $M,N\in C^1$, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}$

$\Leftarrow$ 若 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，往证 $\exists\, u(x,y)$ s.t. $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$

对 $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ 两边关于 x 从 x_0 到 x 积分，有：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial x}\,dx=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$$

即 $u(x,y)-u(x_0,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx$

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\varphi(y)$，其中 $\varphi(y)=u(x_0,y)$

两边关于 y 求导，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

由 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, $\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,dx+\varphi'(y)=N(x,y)$

$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$

因此 $\varphi'(y)=\varphi(y_0)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$

令 $\varphi(y_0)=0$, $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$

因此 (*) 式为全微分方程

Rem. (i) 若 $u(x,y)$ 是 $M\,dx+N\,dy$ 的一个原函数，则 $u(x,y)=C$ 为通解

(ii) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow M\,dx+N\,dy=0$ 是全微分方程

(iii) 若 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则 $Mdx+Ndy$ 的一个原函数为

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy$$

其中 (x_0,y_0) 是 G 内任一点.

例2 求解方程 $xy\,dx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=0$

Solve. $M=xy$，$N=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=x$，$\frac{\partial N}{\partial x}=x$

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}xy\,dx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=\int_0^x x\,dx+\int_1^y(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2(y-1)+\ln|y|=\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|$$

通解：$\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|=C$，C为任意常数

另法：$xy\,dx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=0.$

$xy\,dx+\frac{x^2}{2}dy=d(\frac{1}{2}x^2y)$，$\frac{1}{y}dy=d(\ln|y|)$

因此有通解 $\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|=C$

例3 求解方程 $(3x^2+6xy^2)dx+(4y^3+6x^2y)dy=0.$

Solve. $M=3x^2+6xy^2$，$N=4y^3+6x^2y$

$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N}{\partial x}$

$$u(x,y)=\int_0^x 3x^2\,dx+\int_0^y(4y^3+6x^2y)dy$$

$$=x^3+y^4+3x^2y^2$$

方程有通解 $x^3+y^4+3x^2y^2=C$，C为任意常数.

2. 初值问题的解

$$\begin{cases}M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

通解 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$

特解：$C=0$

3. 全微分方程的解法

(1) 公式法　(2) 分项组合法　(3) 积分法

例4　$xy\,dx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=0$

积分法：$\frac{\partial u}{\partial x}=xy$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$

关于x积分：$u=\frac{1}{2}x^2y+\varphi(y)$

对上式关于y求导；$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}x^2+\varphi'(y)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$

因此$\varphi(y)=\ln|y|+C$，$u=\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|$

通解：$\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|=C$.

Rem. 分项组合法：依据常见的全微分公式

例5　$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$

Solve. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\cdot(\frac{y}{x^2+y^2})=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$$d(\arctan\frac{x}{y})=(\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y})dx+\left[\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot(-\frac{x}{y^2})\right]dy$$
$$=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$$

通解：$\arctan\frac{x}{y}=C$，C为任意常数

考虑方程$y\,dx-x\,dy=0$：方程两边同乘$\frac{1}{x^2+y^2}$有$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$

方程两边同乘$\frac{1}{y^2}$有$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=0$

积分因子：$\frac{1}{x^2+y^2}$，$\frac{1}{y^2}$不唯一

二、积分因子

1. 定义

Def. 对于微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$　(*)

若方程(*)不是全微分方程，但存在一个连续可微函数$\mu=\mu(x,y)\neq0$

s.t. $\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$　(**)

为全微分方程，则$\exists\, v=v(x,y)$ s.t.

$dv(x,y)=\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程(*)的一个积分因子.

Rem. (i) 可以证明, (*)式与(**)式为同解方程

(ii) $\mu(x,y)$ 为积分因子的充要条件

Thm1. 若 $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\mu(x,y)$ 均连续可微, 则 $\mu(x,y)$ 为(*)的积分因子 $\Longleftrightarrow$ $N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu$

Thm2. 设 $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\varphi=\varphi(x,y)$ 在区域上连续可微, 则方程(*)有形如 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$ 的积分因子 $\Longleftrightarrow$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$ 仅是 φ 的函数, 记为 $f(\varphi)$

则 $\mu=e^{\int f(\varphi)d\varphi}=e^{G(\varphi)}$ 是积分因子.

Proof. $\Rightarrow$ 若(*)有积分因子 μ, 且 $\mu=\mu[\varphi(x,y)]$, 则:

$$\frac{d\mu}{d\varphi}\left(N\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu$$

即 $$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}}d\varphi=f(\varphi)d\varphi$$

从而有 $\mu=e^{\int f(\varphi)d\varphi}=e^{G(\varphi)}$

$\Leftarrow$ 若 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$ 仅关于 φ, 往证 $\mu=e^{G(\varphi)}$ 是方程的解:

$$N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(N\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)e^{G(\varphi)}f(\varphi)$$
$$=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot\mu$$

因此 $\mu=e^{G(\varphi)}$ 是积分因子

类型	条件	积分因子
$\varphi(x,y)=x$ $\mu(x)=x$	$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$	$e^{\int f(x)dx}$
$\varphi(x,y)=y$ $\mu(y)=y$	$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=f(y)$	$e^{\int f(y)dy}$

例6　求解方程 $(y^2-3xy+1)dx+(xy-x^2)dy=0$

Solve. $\frac{\partial M}{\partial y}=2y-3x$　$\frac{\partial N}{\partial x}=y-2x$

$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=y-x$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1}{x}$，仅是 x 的函数

积分因子 $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

方程两边同乘 x：$(xy^2-3x^2y+x)dx+(x^2y-x^3)dy=0.$

$d(\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{2}x^2)=0$，通解 $\frac{1}{2}x^2y^2-x^3y+\frac{1}{2}x^2=C$

例7　求解方程 $(xy+y^2)dx+(xy+y+1)dy=0$

Solve. $\frac{\partial M}{\partial y}=x+2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=y$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{1}{y}=f(y)$，仅是 y 的函数

积分因子为 $\mu=e^{\int-\frac{1}{y}dy}=\frac{1}{y}$

$y\neq0$ 时：$(x+y)dx+(x+1+\frac{1}{y})dy=0$，$d(\frac{1}{2}x^2+xy+y+\ln|y|)=0$

$y=0$ 时也为解

例8　求解方程 $(y^2+2x^2y)dx+(xy+x^3)dy=0$

Solve. $\frac{\partial M}{\partial y}=2y+2x^2$，$\frac{\partial N}{\partial x}=y+3x^2$

$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=y-x^2$

设方程有积分因子 $\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\alpha x^{-1}N-\beta y^{-1}M}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta}=\frac{y-x^2}{\alpha(y+x^2)-\beta(y+2x^2)}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta}$$

$$=\frac{y-x^2}{(\alpha-\beta)y+(\alpha-2\beta)x^2}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta}$$

令 $\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \alpha-2\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$

积分因子 $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx}\Big|_{u=x^3y^2} = x^3y^2$

$(x^3y^4+2x^3y^3)dx+(x^4y^3+x^6y^2)dy=0$

$d(\frac{1}{4}x^4y^4+\frac{1}{3}x^6y^3)=0$，通解 $\frac{1}{4}x^4y^4+\frac{1}{3}x^6y^3=C$.

例9 (1) 求解方程 $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$

$(x^2y+\frac{y^3}{3})e^x=C$，$C$为任意常数

(2) 求解方程 $(x^2+y+x^3\cos y)dx+(x^2y-x-\frac{x^4}{2}\sin y)dy=0$

$x^2\cdot(\frac{y}{3}dx-\frac{1}{3}dy)+x^2(dx+ydy)+x^2(x\cos y\,dx-\frac{x^2}{2}\sin y\,dy)=0$

$\Rightarrow d(-\frac{y}{3}+x+\frac{1}{2}y^2+\frac{x^2}{2}\cos y)=0$

通解为 $-\frac{y}{3}+x+\frac{1}{2}y^2+\frac{x^2}{2}\cos y=C$，$x=0$也是方程的解.

例10 求解方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$

Solve. $[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x)$，$\frac{\partial N}{\partial x}=0$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-1}=-P(x)$$

积分因子 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$，$d(y\cdot e^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx)=0$

通解：$y=(C+\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx)\cdot e^{\int P(x)dx}$，$C$为任意常数

例11 设 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续. 证明：方程 $dy-f(x,y)dx=0$ (1) 是线性方程 $\Longleftrightarrow$ 方程有仅依赖于x的积分因子.

Proof. $\Rightarrow$：由(1)是线性方程，$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=P(x)y+Q(x)$

有积分因子 $\mu=e^{-\int P(x)dx}$，仅依赖于x

$\Leftarrow$：不妨设 $\mu(x)$ 为积分因子，则：

$\mu(x)dy-\mu(x)f(x,y)dx=0$ 是全微分方程

因此 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，即 $\frac{d(\mu(x))}{dx}=-\mu(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{\mu(x)}\cdot\frac{d(\mu(x))}{dx}\ (\mu(x)\neq 0)\triangleq P(x)$

$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int P(x)dy=P(x)y+Q(x)$

§2.4 一阶隐式微分方程

一、一阶隐式方程

$$F(x,y,y')=0 \qquad (*)$$

1. 若可化为 $y'=f(x,y)$，按照显式方程求解即可.

例1 求解方程 $y'^2-(x+y)y'+xy=0$

Solve. $(y'-x)\cdot(y'-y)=0$，通解为 $y=\frac{1}{2}x^2+C$ 或 $y=Ce^x$

2. 可解出 y 的方程：$y=f(x,y')$ (1)

其中 $f\in C^{(1)}$

令 $y'=p$，则 $y=f(x,p)$ (1-1)

两边关于 x 求导，$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$ (1-2)

即 $\frac{dp}{dx}=\dfrac{p-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}=F(x,p)$ (关于 x,p 的一阶显式微分方程)

① $p=\varphi(x,C)$，代入有 $y=f[x,\varphi(x,C)]$

② $x=\psi(p,C)$，代入有 $\begin{cases}x=\psi(p,C)\\ y=f(x,p)\end{cases}$，其中 p 为参数，C 为任意常数

③ $\Phi(x,p,C)=0$，代入有 $\begin{cases}\Phi(x,p,C)=0\\ y=f(x,p)\end{cases}$，其中 p 为参数，C 为任意常数

例2 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$.

Solve. $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}\xlongequal{p=\frac{dy}{dx}}p^3+2xp$

上式左右关于 x 求导，$p=3p^2\cdot\frac{dp}{dx}+2p+2x\frac{dp}{dx}$

即 $3p^2dp+2xdp+pdx=0$. 有积分因子 $\mu(p)=p$

$(3p^3+2xp)dp+p^2dx=0\ (p\neq0)$

$d(\frac{3}{4}p^4+p^2x)=0$，通解 $\frac{3}{4}p^4+p^2x=C$

即 $x=\dfrac{C-\frac{3}{4}p^4}{p^2}=\frac{C}{p^2}-\frac{3}{4}p^2$

代入有 $y=p^3+2xp=p^3+\frac{2C}{p}-\frac{3}{2}p^3=\frac{2C}{p}-\frac{1}{2}p^3$

故原方程参数形式通解为 $\begin{cases} x=\frac{c}{p}-\frac{3}{4}p^2 \\ y=\frac{2c}{p}-\frac{1}{2}p^3 \end{cases}$

其中 p 为参数，c 为任意常数

$p=0$ 时有特解 $y=0$.

例3 求解方程 $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$

Solu. 令 $\frac{dy}{dx}=p$, $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$

$p=2p\cdot\frac{dp}{dx}-x\cdot\frac{dp}{dx}-p+x$, $2p\frac{dp}{dx}-2p-x\frac{dp}{dx}+x=0$.

$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0$.

因此 $\frac{dp}{dx}=1$ 或 $2p=x$

有通解 $y=(x+c)^2-x(x+c)+\frac{x^2}{2}$，特解 $y=\frac{x^2}{4}$

(几何上形 $y=\frac{x^2}{4}$ 为包络，

3. 可解出 x 的方程：$x=f(y,y')$ (2)

令 $\frac{dy}{dx}=p$，则 $x=f(y,p)$ (2-1)

两边关于 y 求导，$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}$ (2-2)

可 $\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{1}{p}-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}=G(y,p)$ (关于 y,p 的一阶显式微分方程)

① $\Phi(y,p,c)=0$，则原方程通解为 $\begin{cases} \Phi(y,p,c)=0 \\ x=f(y,p) \end{cases}$，其中 p 为参数 c 为任意常数

例4 求解方程 $x\cdot\frac{1}{y}=y'^2$

Solu. $x=y\cdot y'^2$

令 $y'=p$，则 $x=yp^2$，$\frac{1}{p}=p^2+2yp\cdot\frac{dp}{dy}$，$\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{1}{p}-p^2}{2py}=\frac{1-p^3}{2yp^2}$

$\frac{p^2}{1-p^3}dp=\frac{1}{2y}dy$

$-\frac{1}{3}\ln|1-p^3|=\frac{1}{2}\ln|y|+c$

原方程通解 $\begin{cases} -\frac{1}{3}\ln|1-p^3|=\frac{1}{2}\ln|y|+c \\ x=yp^2 \end{cases}$，$p$ 为参数，c 为任意常数

$p=1$ 显然也是解，可 $y=0$ 也是解.

例5 求解方程 $y=xy'+\varphi(y')$，其中 $\varphi\in C^{(2)}$ 且 $\varphi''\neq 0$. (Clairaut Equation)

Solu. 令 $y'=p$，则 $y=xp+\varphi(p)$

两边对 x 求导，$p=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}$，$[x+\varphi'(p)]\cdot\frac{dp}{dx}=0$

① 若 $\frac{dp}{dx}=0$，则 $p=C$，此时原方程通解为 $\begin{cases} y=xp+\varphi(p) \\ p=C \end{cases}$

② 若 $x+\varphi'(p)=0$，此时原方程~~通解~~一个特解为 $\begin{cases} y=-p\varphi'(p)+\varphi(p) \\ x=-\varphi'(p) \end{cases}$

Rem. 上述方程称为 Clairaut 方程

例6 求解方程 $y=xy'+y'^2$

Solu. $\varphi(u)=u^2$，$\varphi'(u)=2u$，$\varphi''(u)=2\neq 0$

通解为 $y=Cx^2+C^2$，特解为 $\begin{cases} y=-p\cdot 2p+p^2 \\ x=-2p \end{cases}$，则 $y=-(-\frac{x}{2})^2=-\frac{x^2}{4}$

4. 不显含 y 的方程 $F(x,y')=0$

令 $y'=p$，则 $F(x,p)=0$.

设其参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ p=\psi(t) \end{cases}$，$t$ 为参数

由于 $dy=p\,dx=\psi(t)\,d\varphi(t)$，从而 $dy=\psi(t)\varphi'(t)\,dt$

两边积分得，$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+C$

原方程参数形式通解 $\begin{cases} y=\int\psi(t)\varphi'(t)\,dt+C \\ x=\varphi(t) \end{cases}$，$t$ 为参数，C 为任意常数

例7 求解方程 $x\sqrt{1+(y')^2}=y'$

Solu. 令 $y'=p$，则 $F(x,p)=x\cdot\sqrt{1+p^2}-p=0$.

设 $\begin{cases} x=\sin t \\ p=\tan t \end{cases}$

由于 $dy=p\,dx$，$y=\int\tan t(\sin t)'dt=\int\sin t\,dt=-\cos t+C$

原方程通解 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t+C \end{cases}$

例8 求解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$

Solve. 令 $y'=p$，则 $x^3+p^3-3xp=0$

令 $p=tx$，则 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ p=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

由于 $dy=p\,dx=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\cdot\dfrac{3(1+t^3)-3t\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}dt=\dfrac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt$

$y=\int\dfrac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt+C=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+C$

原方程参数形式通解 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3}{2}\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+C \end{cases}$

3. 不显含 x 的方程：$F(y,y')=0$

令 $y'=p$，则 $F(y,p)=0$，设其参数方程 $\begin{cases} y=\varphi(t) \\ p=\psi(t) \end{cases}$，$t$ 为参数

由于 $dy=p\,dx$，$dx=\dfrac{1}{p}dy=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$

两边积分有，$x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C$

原方程通解 $\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C \\ y=\varphi(t) \end{cases}$

$p=0$ 时 $F(y,0)=0$ 有常数解 $y=k$

例9 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

Solve. 令 $y'=p$，则 $y^2(1-p)=(2-p)^2$

令 $2-p=ty$，则 $ty-1=t^2$，$y=t+\frac{1}{t}$，$p=1-t^2$ $(p\neq 0)$

由于 $dx=\frac{1}{p}dy=\dfrac{1-\frac{1}{t^2}}{1-t^2}dt=-\frac{1}{t^2}dt$，$x=\int-\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+C$

原方程通解 $\begin{cases} x=\frac{1}{t}+C \\ y=t+\frac{1}{t} \end{cases}$ 或 $y=x-C+\frac{1}{x-C}$，C 为任意常数

$p=0$ 时有 $y^2=4$，$y=\pm 2$ 也为特解

6. 一般的一阶隐式方程

$F(x,y,y')=0$

令 $y'=p$，则 $F(x,y,p)=0$.

令 $x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$p=h(u,v)$

代入 $dy=p\,dx$，$\frac{\partial g}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial g}{\partial v}dv=h(u,v)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right)$

可 $M(u,v)du+N(u,v)dv=0$.

求出其通解或特解，从而可求出原方程的通解.

例10 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y-x=0$.

Solve. 令 $p=\frac{dy}{dx}$，则 $p^2+y-x=0$.

令 $x=u$，$p=v$，$y=u-v^2$

由 $dy=p\,dx$，$d(u-v^2)=v\,du$，即 $(1-v)du=2v\,dv$

$u=-2v-\ln(v-1)^2+C$，~~通~~特解 $v=1$

原方程通解 $\begin{cases} x=-2v-\ln(v-1)^2+C \\ y=-2v-\ln(v-1)^2-v^2+C \end{cases}$，C为任意常数

~~$v=1$~~ 特解 $y=x-1$

思考. 1. Riicati 方程：$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$

除特殊类型外一般没有初等解法.

2. $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=2\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的解不唯一，例如 $y=0$，$y=x^2$ 都是解

考虑：$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 的解的存在性、唯一性、连续性

§3 一阶微分方程的解的存在性定理

内容：解的存在唯一性定理

解的延拓性定理

解对初值的连续性、可微性

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

一、存在唯一性定理

1. 显式一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & (*) \\ y(x_0) = y_0 & (**) \end{cases}$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形域 $D: |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b$ 上连续

微分：$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$

考虑：$\varphi_0(x) = y_0,\ \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx,\ \cdots,\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x,\varphi_{n-1}(x)]\,dx$

若 $\{\varphi_n(x)\}$ ~~收敛~~ 收敛至 $\varphi(x)$，

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f[x,\varphi_{n-1}(x)]\,dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f[x,\varphi_{n-1}(x)]\,dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_n(x))\,dx \end{aligned}$$

$\varphi(x)$ 一致收敛

$f(x)$ 连续

$\Rightarrow y = \varphi(x)$ 是积分方程的解，从而是微分方程的解.

Thm. (Picard)

若函数 $f(x,y)$ 满足条件：

(1) 在矩形域 D 上连续

(2) 在矩形域 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件

($\exists L>0$ s.t. $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D,\ |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L\cdot|y_1-y_2|$)

则初值问题 $(*)$ & $(**)$ 存在唯一的解 $y=\varphi(x)$，$|x-x_0|\le h$

其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$

下面分五个命题来证明：(只考虑 $x\in[x_0, x_0+h]$，$[x_0-h, x_0]$ 可类似得到)

Prop 1. $y=\varphi(x)$是初值问题(*)&(**)的定义于区间$[x_0, x_0+h]$上的解

$\Leftrightarrow$ $y=\varphi(x)$是积分方程$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$, $x_0\le x\le x_0+h$的连续解.

Proof. $\Rightarrow$: 设$y=\varphi(x)$是初值问题的解，则：

$$\frac{d(\varphi(x))}{dx}=f[x,\varphi(x)],\ \varphi(x_0)=y_0$$

两边关于x从x_0到x积分，$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f[x,\varphi(x)]dx$, $[x_0,x_0+h]$

即$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[x,\varphi(x)]dx$，$y=\varphi(x)$是积分方程$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$

在$x_0\le x\le x_0+h$的连续解.

$\Leftarrow$: 设$y=\varphi(x)$是积分方程$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$在$x_0\le x\le x_0+h$的连续解，

则$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[x,\varphi(x)]dx$, $x_0\le x\le x_0+h$

由$f(x,y)$在D上连续，$\varphi(x)$连续，$f[x,\varphi(x)]$也连续

对上式两边关于x求导，得：

$$\frac{d(\varphi(x))}{dx}=f[x,\varphi(x)]$$，同时有$\varphi(x_0)=y_0$.

即$y=\varphi(x)$是初值问题(*)&(**)的定义于区间$[x_0,x_0+h]$上的解. □

Prop 2. 令$\varphi_0(x)=y_0$，构造Picard序列$\{\varphi_n(x)\}$，

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[\xi,\varphi_{n-1}(\xi)]d\xi,\ x_0\le\xi\le x_0+h,\ n=1,2,\cdots\end{cases}$$

则对所有的n，上式中函数$\varphi_n(x)$在$[x_0,x_0+h]$上有定义、连续，且满足$|\varphi_n(x)-y_0|\le b$

Proof. $n=1$时$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)d\xi$，显然$\varphi_1(x)$在$x_0\le x\le x_0+h$上有定义、连续，且$|\varphi_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)d\xi\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(\xi,y_0)|d\xi$

$$\le M\cdot(x-x_0)\le M\cdot h\le b$$

$n=k$时Prop 2.成立，则$\varphi_k(x)$在$[x_0,x_0+h]$上有定义、连续，且$|\varphi_k(x)-y_0|\le b$，下证$n=k+1$时成立：

$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_k(\xi))d\xi$, $x_0\le x\le x_0+h$

由于$f(x,y)$在D上连续，从而$f(x,\varphi_k(x))$在$x_0\le x\le x_0+h$上连续，

于是 $\varphi_{k+1}(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义、连续，且

$$|\varphi_{k+1}(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_k(\xi))| d\xi \le M\cdot(x-x_0) \le M\cdot h \le b \qquad \square$$

Prop 3. 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上是一致收敛的，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$，$x_0 \le x \le x_0+h$

Proof. 构造函数项级数 $\varphi_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$，$x_0 \le x \le x_0+h$ (H)

部分和 $S_n(x) = \varphi_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] = \varphi_n(x)$

于是 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛性与级数(H)的一致收敛性等价.

首先对 H 估计：

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi)) d\xi\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \le M\cdot(x-x_0)$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\{f(\xi, \varphi_1(\xi))\} d\xi - \int_{x_0}^{x}\{f(\xi, \varphi_0(\xi))\} d\xi\right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \\ &\le L\cdot\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)| d\xi \\ &\le L\cdot\int_{x_0}^{x} M\cdot(\xi - x_0) d\xi = \frac{ML}{2}(x-x_0)^2\end{aligned}$$

$$|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \le L\cdot\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)| d\xi \le \frac{ML^2}{3!}(x-x_0)^3$$

归纳：对于所有的 n，有：

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$$

由正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{M\cdot L^{n-1}}{k!}n^k$ 收敛性和 Weierstress 判别法，

级数(H)在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上一致收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义 连续且

$|\varphi(x) - y_0| \le b$. $\square$

Prop 4. $y = \varphi(x)$ 是积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y) d\xi$ 定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续解.

Proof. $\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi_{n-1}(\xi)] d\xi$

由 Lipschitz 条件，$|f[x, \varphi_n(x)] - f[x, \varphi(x)]| \le L\cdot|\varphi_n(x) - \varphi(x)|$

且 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 一致收敛至 $\varphi(x)$，有：

函数列 $\{f[x,\varphi_n(x)]\}$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 一致收敛至 $f[x,\varphi(x)]$.

因此 $\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi_n(\xi)]\, d\xi$

两边取 $n\to\infty$ 极限有, $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi(\xi)]\, d\xi$

即 $\varphi(x)$ 是积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, y]\, d\xi$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续解. □

Prop 5. 设 $\varphi(x)$ 是积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi(\xi)]\, d\xi$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上的一个连续解, 则 $\varphi(x) = \psi(x)$, $x_0 \le x \le x_0+h$.

Proof. 设 $g(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$, $g(x)$ 是在 $[x_0, x_0+h]$ 上有定义、连续、非负的函数

往证 $g(x) \equiv 0$, $\forall x \in [x_0, x_0+h]$.

由 $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \varphi(\xi)]\, d\xi$, $\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\xi, \psi(\xi)]\, d\xi$

$$g(x) = \left| \int_{x_0}^{x} [f[\xi, \varphi(\xi)] - f[\xi, \psi(\xi)]]\, d\xi \right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))|\, d\xi$$

由于 $f(x,y)$ 对 y 满足 Lipschitz 条件,

因此 $g(x) \le L \cdot \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi$, $x_0 \le x \le x_0+h$

令 $u(x) = L \cdot \int_{x_0}^{x} g(\xi)\, d\xi$, 则 $u(x)$ 是定义在 $[x_0, x_0+h]$ 上的连续可微函数, 且 $u(x_0) = 0$, $0 \le g(x) \le u(x)$, $u'(x) = L g(x) \le L u(x)$

即 $u'(x) \le L u(x)$, $u'(x) - L u(x) \le 0$, $(u(x) e^{-Lx})' \le 0$, $x_0 \le x \le x_0+h$

于是 $0 \le g(x) \le u(x) \le 0$, $g(x) \equiv 0$, $x_0 \le x \le x_0+h$. □

Rem. 对定理的几点说明:

(i) 存在唯一性定理只能保证局部存在 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

矩形域 D $|x-x_0| \le a$, $|y-y_0| \le b$, $M = \max_D |f(x,y)|$

即 $|f(x,y)| \le M$, $\left|\frac{dy}{dx}\right| \le M$

① 若 $a \le \frac{b}{M}$, 则 $y = \varphi(x)$ 在 $x_0 - a \le x \le x_0 + a$ 上有定义

② 若 $a > \frac{b}{M}$, 此时不能保证解在 $x_0 - a \le x \le x_0 + a$ 上有定义

只有当 $x_0 - \frac{b}{M} \le x \le x_0 + \frac{b}{M}$ 时才能保证解在 D 内

因此要求解的存在范围是 $x_0 - h \le x \le x_0 + h$

(ii) 关于y满足Lipschitz条件检验较为麻烦，常用以下条件验证：

若$f(x,y)$在矩形域D上关于y的偏导数$f_y(x,y)$存在且有界，即$|f_y(x,y)|\le L$，则Lipschitz条件成立.

Proof. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1+\theta(y_2-y_1))\cdot(y_1-y_2)\right|$

$\le L|y_1-y_2|$, $\forall (x,y_1),(x,y_2)\in D$.

但反之不成立，可若$f(x,y)$关于y满足Lipschitz条件，但$f(x,y)$不一定存在偏导数

例 $f(x,y)=|y|$在任一矩形域上满足Lipschitz条件

但在$y=0$处无偏导数

(iii) 对于线性方程，$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)\triangleq f(x,y)$

当$P(x),Q(x)\in C[\alpha,\beta]$时，对任一初值$(x_0,y_0)$，$x_0\in[\alpha,\beta]$

所确定的解在整个区间$[\alpha,\beta]$上有定义，连续

$(|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|P(x)||y_1-y_2|\le L|y_1-y_2|)$

(iv) 关于y满足Lipschitz条件是解唯一的充分条件，但并非必要条件.

例 证明方程$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0, & y=0\\ y\ln|y|, & y\neq 0\end{cases}$经过xOy平面上任一点，的解都是唯一的.

Proof. $y\neq 0$时$f(x,y)=y\ln|y|$连续

$f'_y(x,y)=1+\ln|y|$在$y\neq 0$连续

因此对x轴外任一点(x_0,y_0)，方程满足$y(x_0)=y_0$的解是存在唯一的.

此时通解为$y=\pm e^{c\cdot e^x}$，其中$y=e^{ce^x}$为上半平面通解

$y=-e^{ce^x}$为下半平面通解

注意到$y=0$是方程特解

因此对于x轴上任一点$(x_0,0)$只有$y=0$通过

从而，保证在xOy平面上任一点，的解都是存在唯一的.

但$|f(x,y)-f(x,0)|=|\ln|y||\cdot|y-0|$，$\lim_{y\to 0}|\ln|y||=\infty$，不满足L条件

例 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=3y^{\frac{2}{3}}$ 的初值问题解的唯一性.

solve. $f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}\in C(\mathbb{R}^2)$ $\quad f_y=2y^{-\frac{1}{3}}$

因此 $y\neq 0$ 时方程过 (x_0,y_0) $(y_0\neq 0)$ 的解是唯一的

对于过 x 轴上一点 $(x_0,0)$, $y=0$ 也是解

2. 隐式一阶微分方程的初值问题

Thm 2. 若在点 (x_0,y_0,y_0') 的某一邻域内:

(i) $F(x,y,y')$ 关于所有变量连续且存在连续偏导数

(ii) $F(x_0,y_0,y_0')=0$

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0,y_0,y_0')\neq 0$

则方程 $F(x,y,y')=0$ 存在唯一的解 $y=y(x)$, $|x-x_0|\leq h$

满足初始条件 $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$

Proof. 由 $F(x,y,y')=0$ 和隐函数存在定理,

可把 y' 唯一表示成 x,y 的函数 $y'=f(x,y)$ 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0)

某一邻域内连续, 且 $y_0'=f(x_0,y_0)$

由 F 关于所有变量连续且存在连续偏导数, 则 $f(x,y)$ 也对 x,y

有连续偏导数, 且 $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$ 有界

因此由 Thm 1, 方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在唯一.

二、近似计算与误差估计

1. 近似计算

求方程近似解方法: Picard 逐次逼近法

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi\end{cases},\quad x_0\leq x\leq x_0+h$$

2. 误差估计

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq\frac{M\cdot L^n}{(n+1)!}\cdot h^{n+1},\quad |x-x_0|<h$$

Proof. $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$

$$|\varphi_0(x)-\varphi(x)|\leq\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))|d\xi\leq M(x-x_0)=M\cdot h$$

假设 $|\varphi_{n-1}(x)-\varphi(x)| \le \frac{M\cdot L^{n-1}}{n!}\cdot h^n$ 成立，

下证：$|\varphi_n(x)-\varphi(x)| \le \int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\varphi(\xi))|d\xi$

$$\le L\cdot\int_{x_0}^{x}|\varphi_{n-1}(\xi)-\varphi(\xi)|d\xi \le L\cdot\frac{M\cdot L^{n-1}}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi$$

$$=\frac{M\cdot L^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{M\cdot L^n}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}$$

例 求 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$ 解的存在唯一区间，并求在此区间上与真正解误差不超过0.05的近似解.

$D: -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$

$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\frac{1}{2}$，$a=1, b=1, M=2$

解的存在区间：$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

由误差估计式，$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\le\frac{M\cdot L^n}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}=\frac{2\cdot 2^n}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}<0.05$

$\varphi_0=0$，$\varphi_1(x)=\frac{1}{3}x^3$，$\varphi_2(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7$

$\varphi_3(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{1}{2079}x^4+\frac{1}{59535}x^{15}$，$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$

Rem. (1) $D=\begin{cases}-2\le x\le 2\\ -2\le y\le 2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$

$M=\max\limits_{D}|x^2+y^2|=8$，$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\min\{2,\frac{2}{8}\}=\frac{1}{4}$

解的存在区间：$-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$

(2) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y^2\\ y(0)=1\end{cases}$

① 由初等法有 $y=\frac{1}{1-x}$，存在区间 $(-\infty,1)$

② 由存在唯一性定理，$y^2\in\mathbb{R}^2$，$D=[-a,a]\times[1-b,1+b]$

$M=\max\limits_{D}|y^2|=(1+b)^2$

$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\min\{a,\frac{1}{4}\}\le\frac{1}{4}$，存在区间 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

§3.2 解的延拓

一、饱和解与饱和区间

Def. 对定义在区域 $G\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (*)$$

设 $y=\varphi(x)$ 是定义在 $I_1\subset\mathbb{R}$ 上的一个解，若方程还有一个定义在 $I_2\subset\mathbb{R}$ 上的解 $y=\psi(x)$，且满足：

(1) $I_1\subset I_2$，$I_1\neq I_2$

(2) $x\in I_1$ 时有 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$

则称 $y=\varphi(x)$，$x\in I_1$ 是可延拓的，称 $y=\psi(x)$ 是 $y=\varphi(x)$ 在 I_2 上的延拓.

若不存在满足条件的解 $y=\psi(x)$，则称 $y=\varphi(x)$，$x\in I_1$ 是方程的饱和解（或称不可延拓解）. 此时的不可延拓区间 I_1 称为一个饱和区间.

二、局部 Lipschitz 条件.

Def. 若函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且对 G 内每一点 P 都存在以 P 为中心，完全含在 G 内的矩形域 R_P s.t. $f(x,y)$ 在 R_P 上关于 y 满足 Lipschitz 条件，则称 $f(x,y)$ 在 G 上关于 y 满足局部 Lipschitz 条件.

Rem. 对于不同的点，闭矩形域 R_P 的大小和 Lipschitz 常数可能不同. 局部 Lipschitz 条件是 Lipschitz 条件的必要条件.

三、延拓定理

Thm. 若方程 $(*)$ 的右端 $f(x,y)$ 在有界区域 G 连续，且在 G 内关于 y 满足局部 Lipschitz 条件，则方程 $(*)$ 通过 G 内任一点 (x_0,y_0) 的解在 G 上可以延拓，直到 $(x,\varphi(x))$ 任意接近 G 的边界.

Proof. $\forall(x_0,y_0)\in G$，由解的存在唯一性定理，

初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ 存在唯一性 $y=\varphi(x)$，存在区间 $[x_0-h,x_0+h]$

取 $x_1=x_0+h$, $y_1=\varphi(x_1)$，以 (x_1,y_1) 为中心作小矩形 $R_1\subset G$

则初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_1)=y_1\end{cases}$ 存在唯一解 $y=\psi(x)$，存在区间 $[x_1-h_1,x_1+h_1]$

因为 $\varphi(x_1)=\psi(x_1)$，由唯一性，当 $x_1-h_1\le x\le x_1$ 时 $\varphi(x)=\psi(x)$

定义函数 $\varphi^*(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x_0-h_0\le x\le x_0+h_0\\ \psi(x) & x_0+h_0<x\le x_0+h_0+h_1\end{cases}$

则 $\varphi^*(x)$ 是方程 $(*)$ 满足初值问题 $y(x_0)=y_0$ 在 $[x_0-h_0,x_0+h_0+h_1]$ 上的有定义的唯一解.

因此，解 $y=\varphi^*(x)$ 可看作方程 $(*)$ 的解在 $y=\varphi(x)$ 在定义区间 $|x-x_0|\le h$ 延拓到区间 $[x_0-h_0,x_0+h_0+h_1]$

同样可将 $y=\varphi^*(x)$ 向左延拓，最终得到饱和解 $y=\tilde{\varphi}(x)$

Cor. 任一解均可延拓至饱和解；饱和区间一定为开区间；无界区域中的解可以延拓至无穷

Rem. 两种延拓至无穷的情形：

(1) $y=\varphi(x)$ 可延拓至 $[x_0,+\infty)$ $((-\infty,x_0])$

(2) $y=\varphi(x)$ 只能延拓至 $[x_0,d)$ $((d,x_0])$

其中 $x\to d^-$ $(x\to d^+)$ 时 $y=\varphi(x)$ 无界或 $(x,\varphi(x))\to\partial G$.

例1 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$ 分别通过 $(0,0)$ 和 $(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间

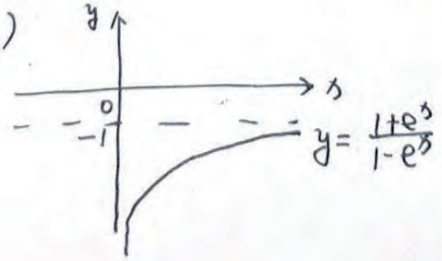
Solu. $f(x,y)=\frac{y^2-1}{2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上满足存在唯一性定理及延拓定理的条件

方程有通解 $y=\frac{1+ce^x}{1-ce^x}$

过 $(0,0)$ 和 $(\ln 2,-3)$ 分别有特解 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$, $(-\infty,+\infty)$

$y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$, $(0,+\infty)$

($x\to 0^+$ 时 $y\to-\infty$)



§4 高阶微分方程

目标：1. 理解线性微分方程的一般理论

2. 能够求解高阶常系数线性微分方程

3. n阶非齐次线性微分方程的常数变易法

4. n阶常系数非齐次线性微分方程的待定系数法和Laplace变换

5. 高阶方程降阶法和幂级数解法

§4.1 线性微分方程的一般理论

一、n阶线性微分方程的存在唯一性定理

1. n阶线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1(t)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\cdot\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=f(t) \qquad (4.1)$$

式(4.1)中，$f(t)\equiv 0$ 则为齐次微分方程，此时记为 (4.2)

$f(t)\neq 0$ 则为非齐次微分方程

其中 $a_i(t), i=1,2,\cdots,n$ 和 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数

2. 存在唯一性定理

Thm1. 若 $a_i(t), i=1,2,\cdots,n$ 及 $f(t)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $\forall t_0\in[a,b]$ 及 $\forall y_0, y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$，方程(4.1)存在唯一解 $y=\varphi(t)$，定义在 $t\in[a,b]$ 上且满足初值条件

$$\varphi(t_0)=y_0,\ \varphi'(t_0)=y_0^{(1)},\ \cdots,\ \frac{d^{(n-1)}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}}=y_0^{(n-1)}$$

例1 (1) $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-n^2)y=0$ （n为常数）

(2) $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+3y=0$

(3) $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=\sin t$

(4) $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1t\frac{dy}{dt}+a_2y=f(t)$ （a_1,a_2为常数）

(1)～(4)均为线性方程，(1)、(2)齐次，(3)、(4)非齐次

(2)、(3)常系数.

二、齐次线性微分方程解的性质与结构

1. 预备知识

(1) 线性相关与线性无关

Def. 设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_k(t)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数，如果存在不全为0的 k 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ s.t.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_k y_k(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

则称 $y_1(t), \cdots, y_k(t)$ 线性相关. 否则 $y_1(t), \cdots, y_k(t)$ 线性无关

Rem. (1) 函数组的线性相关性依赖于区间.

例 $y_1(t) = |t|$, $y_2(t) = t$

y_1 与 y_2 在 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关

在 $(0, +\infty)$ 上线性相关.

(2) 两个函数之比在 $[a,b]$ 上有定义，则它们在 $[a,b]$ 上线性无关 $\Longleftrightarrow$ 比值在 $[a,b]$ 上不恒为常数

判定法则：

~~Thm.~~ 设 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关，则 $\exists$ 不全为0的 n 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ s.t.

$$\begin{aligned}
&c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0 \\
&c_1 y_1'(t) + \cdots + c_n y_n'(t) = 0 \\
&\quad\vdots \\
&c_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t) = 0
\end{aligned}$$

联立上式得到关于 $c_1, \cdots, c_n$ 的齐次线性方程组

由方程组一定有非零解，其系数行列式为0, $\forall t \in [a,b]$.

即
$$\begin{vmatrix}
y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\
y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\
\vdots & & & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t)
\end{vmatrix} = 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

Def. 设函数 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 阶导数，则行列式

$$W[y_1(t), \cdots, y_n(t)] \triangleq W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为函数组 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 的 Wronsky 行列式.

Thm2. 若 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上线性相关，则它们在 $[a,b]$ 上的 Wronsky 行列式为 0.

Rem. 定理的逆命题不成立.

例 $y_1(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \le t < 0 \\ 0, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$ $\quad y_2(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & -1 \le t < 0 \end{cases}$

$[-1,1]$ 上 $W(t) = 0$，但在 $[-1,1]$ 上线性无关

Cor. 若函数组 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 的 Wronsky 行列式在 $[a,b]$ 上某一点 t_0 处不为 0，即 $W(t_0) \ne 0$，则函数组在 $[a,b]$ 上线性无关.

Thm3.(叠加原理)

若 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_k(t)$ 是齐次线性微分方程 (4.2) 的 k 个解，则 $C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_k y_k(t)$ 也是 (4.2) 的解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 为任意常数.

Rem. (1) 当 $k = n$ 时方程 (4.2) 有解：$y = C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t)$

但不一定为通解

2. 齐次线性微分方程解的性质

Thm4. 若方程 (4.2) 的解 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关，则 $W[y_1(t), \cdots, y_n(t)]$ 在 $[a,b]$ 上任何点都不等于 0，即

$W(t) \ne 0, \forall t \in [a,b]$

Proof. 若 $\exists t_0 \in [a,b]$ s.t. $W(t_0)=0$，考虑 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的齐次线性

方程组：

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_0) + \cdots + C_n y_n(t_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

且 $W(t_0)=0$，故方程组有非零解 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

现以这组常数构造函数

$y(t) \triangleq C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_n y_n(t)$，$t \in [a,b]$

下证 $y(t) \equiv 0$：

由叠加原理知，$y(t)$ 是方程 (4.2) 的解. 注意到

$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$

注意到零解也满足上式，则由解的存在唯一性定理，

$y(t)=0$，$\forall t \in [a,b]$

即 $\exists$ 不全为 0 的 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ s.t.

$C_1 y_1(t) + \cdots + C_n y_n(t) \equiv 0$，$\forall t \in [a,b]$，与线性无关矛盾.

Cor. 设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程 (4.2) 在 $[a,b]$ 上的 n 个解，

若 $\exists t_0 \in [a,b]$ s.t. $W(t_0)=0$，则 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 线性相关.

Cor. 方程 (4.2) 的 n 个解 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关

$\Leftrightarrow \exists t_0 \in [a,b]$ s.t. $W(t_0) \neq 0$

3. 齐次线性微分方程通解的结构

Thm5.n 阶齐次线性微分方程 (4.2) 一定存在 n 个线性无关的解.

Proof. 由存在唯一性定理知，方程 (4.2) 分别满足以下初始条件：

$$\begin{array}{l} y_1(t_0)=1,\ y_1'(t_0)=0,\ \cdots,\ y_1^{(n-1)}(t_0)=0 \\ y_2(t_0)=0,\ y_2'(t_0)=1,\ \cdots,\ y_2^{(n-1)}(t_0)=0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n(t_0)=0,\ y_n'(t_0)=0,\ \cdots,\ y_n^{(n-1)}(t_0)=1 \end{array}$$

的解 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 一定存在且不相等

又因为 $W[y_1(t_0), y_2(t_0), \cdots, y_n(t_0)] = W(t_0) = 1 \neq 0$

$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关.

Thm6.(齐次线性微分方程通解的结构定理)

若 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程(4.2)的n个线性无关的解,

则方程通解可表示为

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_n y_n(t) \qquad (*)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数,且(*)包含了(4.2)所有解.

Proof. (1) 由叠加原理,(*)是方程(4.2)的解,包含n个任意常数

(2) 又 $\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial C_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial (y^{(n-1)})}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial (y^{(n-1)})}{\partial C_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W(t) \neq 0$

故 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 相互独立,因此(*)式为通解,下证(*)包含所有解:

由解的存在唯一性定理,唯一解取决于初始条件:

只需证给定 $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_0^{(1)}$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$

能够确定(*)中常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

令(*)式满足给定初值,

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_0) + \cdots + C_n y_n(t_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(t_0) + \cdots + C_n y_n'(t_0) = y_0^{(1)} \\ \cdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = W(t_0) \neq 0$

因此方程组有唯一解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$

因此 $\tilde{c}_1 y_1(t) + \cdots + \tilde{c}_n y_n(t)$ 为满足方程和初值的解.

例1 $y'' + y = 0$

显然 $y_1 = \cos y$, $y_2 = \sin y$ 是方程两个线性无关的解

通解 $y = C_1 \cos y + C_2 \sin y$, C_1, C_2 为任意常数.

解：$y=e^{\lambda x}$，$e^{\lambda x}(\lambda^2+1)=0$，特征方程 $\lambda^2+1=0$

$\lambda=\pm i$，$y=e^{ix}$，$y=e^{-ix}$ 是方程的解.

由欧拉公式知，$y=\cos x$，$y=\sin x$ 都是解

Cor. 方程(4.2)线性无关解的最大个数为 n

Cor. n阶齐次线性微分方程的所有解构成一个 n 维线性空间

Rem. 方程(4.2)的一组 n 个线性无关解称为方程的一个基本解组

当 $W(t_0)=1$ 时称为标准基本解组

Thm7. 设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程(4.2)的解，则TFAE：

(1) 方程(4.2)的通解是 $y(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)$

(2) $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程(4.2)的一个基本解组

(3) $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 线性无关

(4) 在 (a,b) 上有一点 t_0 有 Wronsky 行列式不为0(任一点也不为0)

例(Liouville 公式)

设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 为方程(4.2)的任意 n 个解，这 n 个解构成的 Wronsky 行列式为 $W(t)$. 证明：$W(t)$ 满足一阶方程

$$W'(t)+a_1(t)W(t)=0$$

且对定义区间 $[a,b]$ 上任一点 t_0 有

$$W(t)=W(t_0)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds}, \quad t_0, t\in[a,b]$$

三、非齐次线性微分方程解的性质与结构

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=f(t) \qquad (4.1)$$

1. 解的性质

(1) 若 $\bar{y}(t)$ 是非齐次方程(4.1)的解，$y(t)$ 是相应方程(4.2)的解，则 $\bar{y}(t)+y(t)$ 也是非齐次方程(4.1)的解.

(2) 方程(4.1)的任意两个解之差一定是相应方程(4.2)的解.

(3) (叠加原理) 若 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 分别是非齐次方程的解：

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=f_i(t), \quad i=1,2$$

则 $y_1(t)+y_2(t)$ 是下列非齐次方程的解：

$$y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)y(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

2. 解的结构

Thm 8. 设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 为相应齐次方程(4.2)的基本解组，$\bar{y}(t)$ 是非齐次方程(4.1)的某一个解，则非齐次方程(4.1)的通解可表示为

$$y(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)+\bar{y}(t) \qquad (**)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数，且通解包含方程(4.1)的所有解

Proof. (1) 由性质(1)，$y(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)+\bar{y}(t)$ 是方程(4.1)的解，包含 n 个任意常数

由 Thm 6. 知，n 个任意常数相互独立，可为通解.

(2) 设 $\tilde{y}(t)$ 是方程(4.1)任一解，由性质(2)，

$\tilde{y}(t)-\bar{y}(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t)$ 是齐次方程(4.2)的解

由 Thm 6. 知，$\exists$ 一组常数 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \cdots, \tilde{C}_n$ 使得

$\tilde{y}(t)-\bar{y}(t)=\tilde{C}_1y_1(t)+\cdots+\tilde{C}_ny_n(t)$

即方程(4.1)的任一解可由(**)表示

由 $\tilde{y}(t)$ 任意性，(**)包含了方程(4.1)的所有解.

3. 常数变易法

设 $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程(4.2)的基本解组，因而

$$y(t)=C_1y_1(t)+\cdots+C_ny_n(t) \qquad (*)$$

是齐次方程(4.2)的通解.

令

$$y(t)=C_1(t)y_1(t)+\cdots+C_n(t)y_n(t)$$

是非齐次方程(4.1)的解，其中 $C_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是待定函数

求导有，$y'(t)=C_1(t)y_1'(t)+C_2(t)y_2'(t)+\cdots+C_n(t)y_n'(t)$

$\qquad +C_1'(t)y_1(t)+C_2'(t)y_2(t)+\cdots+C_n'(t)y_n(t)$

令 $\sum_{i=1}^{n}C_i'(t)y_i(t)=0$，有

$$y'(t) = c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) + \cdots + c_n(t)y_n'(t) \qquad (*1)$$

对t求导有，令 $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)y_i'(t) = 0$，有：

$$y''(t) = c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + \cdots + c_n(t)y_n''(t) \qquad (*2)$$

$\cdots$

$$y^{(n-1)}(t) = c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t) \qquad (*(n-1))$$

对上式关于t求导有，

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) = {} & c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) \\ & + c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) \end{aligned} \qquad (*n)$$

将(*1)、(*2)、$\cdots$、(*(n-1))、(*n)代入方程(4.1)，并注意到 $y_1(t), \cdots, y_n(t)$ 是方程(4.2)的解，因此有：

$$y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t)$$

最后有含n个未知函数 $c_i'(t)\ (i=1,\cdots,n)$ 的n个方程：

$$\begin{cases} y_1(t)c_1'(t) + \cdots + y_n(t)c_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 \\ y_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + \cdots + y_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t) \end{cases}$$

其系数行列式 $w(t) \neq 0$，方程组有唯一解 $c_i'(t) = \varphi_i(t),\ i=1,\cdots,n$

因此 $c_i(t) = \int \varphi_i(t)\,dt + \gamma_i,\ i=1,\cdots,n$

代入有，$y(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(t)\,dt + \gamma_i\right)\cdot y_i(t) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\cdot\int \varphi_i(t)\,dt$

例 求方程 $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ 的通解

Solu. (1)齐次方程 $y'' + y = 0$

$$y = c_1\cos t + c_2\sin t$$

(2)非齐次方程 $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$

设 $y = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$，则可得

$$\begin{cases} \cos t\, c_1'(t) + \sin t\, c_2'(t) = 0 \\ -\sin t\, c_1'(t) + \cos t\, c_2'(t) = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$c_1'(t) = -\tan t,\ c_2'(t) = 1$

$c_1(t) = \ln|\cos t| + \gamma_1$

$c_2(t) = t + \gamma_2$

原方程通解为 $y=(\ln|\cos t|+\gamma_1)\cos t+(t+\gamma_2)\sin t$

$$=\gamma_1\cos t+\gamma_2\sin t+\ln|\cos t|\cdot\cos t+t\sin t$$

其中 γ_1,γ_2 为任意常数

例 求方程 $ty''-y'=t^2$ 在 $t\neq0$ 上的所有解.

Solu. (1) 齐次方程 $y''-\frac{1}{t}y'=0$，$y'=C_1t$，$y=\frac{1}{2}C_1t^2+C_2$

基本解组为 $1,t^2$，通解为 $y=C_1+C_2t^2$

(2) 非齐次方程 $y''-\frac{1}{t}y'=t$

设 $y(t)=C_1(t)+C_2(t)t^2$，则有

$$\begin{cases}C_1'(t)+t^2C_2'(t)=0\\ 0\cdot C_1'(t)+2t\cdot C_2'(t)=t\end{cases}$$

即 $\begin{cases}C_1(t)=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1\\ C_2(t)=\frac{1}{2}t+\gamma_2\end{cases}$

原方程通解为 $y=-\frac{1}{6}t^3+\gamma_1+(\frac{1}{2}t+\gamma_2)t^2$

$=\gamma_1+\gamma_2t^2+\frac{1}{3}t^3$，$\gamma_1,\gamma_2$ 为任意常数

§4.2 常系数线性微分方程的解法

一. 复值函数与复值解

1. 复值函数

Def. 若 $\forall t \in [a,b]$，按某种关系 $\exists!$ 复数 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$
其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实函数，则称 $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$
是定义在 $[a,b]$ 上的复值函数

Def. 若 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $t \to t_0$ 时有极限，则称复值函数在 $t \to t_0$ 时
有极限，且定义 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) + i \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \psi(t)$

Def. 若 $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z(t_0)$，则称 $z(t)$ 在 t_0 连续

Rem. 区间连续类似于实值函数的区间连续

Def. 若 $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$ 存在，则称 $z(t)$ 在 t_0 可微，记为 $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=t_0}$ 或 $z'(t_0)$

Rem. (1) 类似可定义区间可微与高阶导数
(2) $z_1(t)$，$z_2(t)$ 在 $[a,b]$ 可微，$\mathbb{C}$ 为复值常数，则
① $\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t)) = \frac{d}{dt}z_1(t) + \frac{d}{dt}z_2(t)$
② $\frac{d}{dt}(z_1(t)z_2(t)) = \frac{d}{dt}z_1(t)\cdot z_2(t) + \frac{d}{dt}z_2(t)\cdot z_1(t)$
③ $\frac{d}{dt}(\mathbb{C}\cdot z(t)) = \mathbb{C}\cdot \frac{d}{dt}z(t)$.

2. 复指数函数 (e^{kt}，k 是复值~~函数~~)

Def. 设 $k = \alpha + i\beta$ 是任一复数 $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$，$t \in [a,b]$，$(a,b \in \mathbb{R})$，则称
$$e^{kt} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$
为定义在区间 $[a,b]$ 上的复指数函数.

Rem. (1) 由定义有，
$$\cos\beta t = \frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}),\quad \sin\beta t = \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$$
(2) 复指数函数具有实指数函数的类似性质.

① $\overline{e^{kt}} = e^{\overline{kt}}$

② $e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$

③ $\frac{d}{dt}(e^{kt}) = k e^{kt}$, $\frac{d^n}{dt^n}(e^{kt}) = k^n e^{kt}$

3. 复值解

Def. 对 $[a,b]$ 上的复值函数 $y=z(t)$ 称为方程(4.1)的复值解.

如果 $\frac{d^n z(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}z(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)z(t) = f(t)$

对 $\forall t \in [a,b]$ 恒成立.

Thm 1. 若齐次方程(4.2)中所有系数 $a_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是实值函数,

而 $y=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 是方程(4.2)的复值解, 则函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$

和复值共轭函数 $\bar{z}(t)$ 都是齐次方程的解.

Thm 2. 若方程

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = u(t)+iv(t)$$

有复值解 $U(t)+iV(t)$, 其中 $a_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$, $u(t)$, $v(t)$, $U(t)$, $V(t)$ 都是实函数, 则 $U(t)$ 和 $V(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = u(t)$$

和方程

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = v(t)$$

的解.

二、n阶常系数齐次线性微分方程

1. 形式

$$L[y] = \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_n y(t) = 0 \qquad (*)$$

其中 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 为常数

Rem. (i) L：线性微分算子

$$L \triangleq \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n$$

2. 解法（Euler待定指数函数法）

分析：① $\frac{dy}{dt} + ay = 0$

猜：$y = e^{\lambda t}$，$\lambda = -a$，通解 $y = Ce^{-at}$

② 对(*)，$L[y] = 0$，猜：$y = e^{\lambda t}$

$$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \triangleq F(\lambda)$（特征方程）

$y = e^{\lambda t}$是(*)式的解 $\Leftrightarrow$ λ是代数方程$F(\lambda)=0$的根

Rem. $F(\lambda)=0$的根λ称为方程(*)的特征根

(1) 特征根λ是单根

① 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$n$个不等根，则方程(*)有如下几个解：

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$

其中
$$W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & & \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$
$$= e^{\lambda_1 t}\cdots e^{\lambda_n t} \cdot \prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

故解组线性无关

(a) 若$\lambda_i (i=1,\cdots,n)$都是实数，则方程(*)通解可表示为：

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数

(b) 若λ_i有复数，则复数一定共轭出现，

设$\lambda_1 = \alpha + i\beta$是特征根，则$\lambda_2 = \alpha - i\beta$也是特征根

相应有两个复值解 $e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$

$e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$

由Thm1., $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $e^{\alpha t}\cos\beta t$ 也是方程(*)的解.

因此最终有基本解组，可写出通解.

例1 $\frac{d^4}{dt^4}y - y = 0$

solu. 线性常系数齐次，特征方程 $\lambda^4 - \lambda^0 = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0$

特征根 $\lambda = \pm 1, \pm i$

基本解组 $\cos t, \sin t, e^t, e^{-t}$

通解 $y = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3 e^t + C_4 e^{-t}$

例2 $y'' = 0$

solu. 特征方程 $\lambda^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

基本解组 $1, t$, 通解 $y = C_1 + C_2 t$

例3 $y'' - 2y' + y = 0$

solu. 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

令 $y = ye^t$, 则 $y'' = y''e^t + 2y'e^t + ye^t$

有 $y'' = 0$, 因此 y 的基本解组 e^t, te^t, 通解 $y = C_1 e^t + C_2 te^t$

(2) 特征根有重根的情形

设特征方程有 k_1 重根 $\lambda = \lambda_1$, 则有

$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \cdots = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0$, $F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0$

① 若 $\lambda_1 = 0$, 即特征方程有因子 λ_1^k, 于是

$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0$, $a_{n-k} \neq 0$

特征方程为 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k}\lambda^{k_1} = 0$

对应微分方程：

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \cdots + a_{n-k}\frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}}y = 0$$

上式方程有 k_1 个解: $1, t, \cdots, t^{k-1}$

故特征方程的 k_1 重根对应方程 k_1 个线性无关的解

② 若 $\lambda_1 \neq 0$，作变换 $x = y e^{\lambda_1 t}$

则 $x^{(m)} = y^{(m)} e^{\lambda_1 t} + m \lambda_1 y^{(m-1)} e^{\lambda_1 t} + \cdots + \lambda_1^m y e^{\lambda_1 t}$

$= e^{\lambda_1 t}[y^{(m)} + m\lambda_1 y^{(m-1)} + \cdots + \lambda_1^m y]$

可得 $L[x] = \left(\frac{d^n}{dt^n} y + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \cdots + b_n y\right) \cdot e^{\lambda_1 t} \triangleq L_1[y] \cdot e^{\lambda_1 t}$

于是方程化为

$$L_1[y] = \frac{d^n}{dt^n} y + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \cdots + b_n y = 0$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为常数，对应特征方程为：

$$\mu^n + b_1 \mu^{n-1} + \cdots + b_n = 0 = G(\mu)$$

由 $\begin{cases} ① L[e^{\lambda t}] = F(\lambda) e^{\lambda t} \\ ② L[e^{\mu t} \cdot e^{\lambda_1 t}] = L_1[e^{\mu t}] e^{\lambda_1 t} \\ ③ L_1[e^{\mu t}] = G(\mu) e^{\mu t} \end{cases}$

有，$F(\mu + \lambda_1) e^{(\mu+\lambda_1)t} = G(\mu) e^{(\mu+\lambda_1)t}$

即 $\lambda = \lambda_1$ 对应于新方程中的零根 且根的重数相同

因此对应于原特征方程的 k 重根：

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k-1} e^{\lambda_1 t}$$

同理，假设特征方程其他根 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$，重数依次为 $k_2, k_3, \cdots, k_m$，且 $k_1 + \cdots + k_m = n$，则方程 (*) 对应的解为

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{cases}$$

上述解线性无关，从而构成基本解组.

若有 k 重根 $\lambda = \alpha + i\beta$，则 $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ 也是 k 重根，

对应实值解为：

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{k-1} e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Thm3. 若方程(*)的特征多项式可分解为

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$是互异的特征根，重数分别为$n_1,\cdots,n_r$ $(n_i\geq 1)$，且$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则对应的n个线性无关的解为

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t},\cdots,t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ e^{\lambda_r t},\cdots,t^{n_r-1}e^{\lambda_r t} \end{array}$$

上述n个解构成方程的一个基本解组.

3.求解齐次常系数线性微分方程的步骤

(1) 特征方程的根$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

(2) 方程n个根对应的解

(3) 写出方程的通解

例4 $\frac{d^3}{dt^3}y-y=0$

Solu. 特征方程 $\lambda^3-1=0$

特征根 $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

通解 $y=C_1e^t+C_2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$=C_1e^t+e^{-\frac{1}{2}t}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$, C_1,C_2,C_3为任意常数

例5 $\frac{d^3}{dt^3}y-3\frac{d^2}{dt^2}y+3\frac{d}{dt}y-y=0$

Solu. 特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$

特征根 $\lambda_{1,2,3}=1$

通解 $y=C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t=e^t(C_1+C_2t+C_3t^2)$

C_1,C_2,C_3为任意常数

例6 (1) $\frac{d^4}{dt^4}y+2\frac{d^2}{dt^2}y+y=0$ $\quad y=C_1\cos t+C_2\sin t+t(C_3\cos t+C_4\sin t)$

(2) $\frac{d^5}{dt^5}y+4\frac{d^3}{dt^3}y+4\frac{d}{dt}y=0$. $y=C_1+C_2\cos\sqrt{2}t+C_3\sin\sqrt{2}t$

$+C_4t\cos\sqrt{2}t+C_5t\sin\sqrt{2}t$

C_i均为任意常数

考虑方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$

Solu. 令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

代入有 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$

原方程通解 $y=(C_1+C_2\ln|x|)x$

Cor. 一般情形的欧拉方程：

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_nx\cancel{x}y=0$$

方法：$x=e^t$ $(t=\ln x)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$

最终化为：$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0$

三、n阶常系数非齐次线性微分方程

例7 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=\cos t$

Solu. 先求 $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$ 的解：$\lambda^2-1=0$，通解 $x=C_1e^t+C_2e^{-t}$

利用常数变易法，有

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^{-t}=0\\ C_1'(t)e^t-C_2'(t)e^{-t}=\cos t\end{cases}\qquad\begin{cases}C_1'(t)=\frac{e^{-t}}{2}\cos t\\ C_2'(t)=-\frac{e^t}{2}\cos t\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1(t)=-\frac{1}{4}(\cos t-\sin t)e^{-t}+C_1\\ C_2(t)=-\frac{1}{4}(\cos t+\sin t)e^t+C_2\end{cases}$$

代入有，$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$

另解. 猜特解 $x^*=A\cos t$，代入 $x''-x=\cos t$ 有：

$-A\cos t-A\cos t=\cos t$，$A=-\frac{1}{2}$

因此有特解 $x^*=-\frac{1}{2}\cos t$，通解 $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$

例 8 $\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=e^{at}$ (p, q, a 为常数)

Solve. 特解为 $y^*=Ae^{at}$，代入方程有，

$(Aa^2+pAa+qA)e^{at}=e^{at}$

① $a^2+pa+q\neq 0$ (a不为特征根)

$A=\frac{1}{a^2+pa+q}$，特解 $y^*=\frac{1}{a^2+pa+q}e^{at}$

② $a^2+pa+q=0$ (a为特征根)

此时无形如 Ae^{at} 的特解，猜 $y^*=Ate^{at}$，代入方程

$(2Aa+Aa^2t+pA+pAat+qAt)e^{at}=e^{at}$

此时有 $\begin{cases} A(2a+p)=1 \\ Aa^2+pAa+qA=0 \end{cases}$

若 $2a+p\neq 0$ (a为特征单根)，$A=\frac{1}{2a+p}$，特解 $y^*=\frac{1}{2a+p}te^{at}$

若 $2a+p=0$ (a为特征重根)，此时无形如 Ate^{at} 的特解

考虑 At^2e^{at} 等

Rem. 特解 $y^*=At^ke^{at}$，$k=0,1,2$ 由齐次方程 0，1，2重根决定

例 9 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=e^{-t}$

Solve. 齐次方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=0$

通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$

设非齐次方程特解 $y^*=Ate^{-t}$，代入可得 $A=-\frac{1}{4}$

$y^*=-\frac{1}{4}te^{-t}$

非齐次方程通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}$

1. 形式：$L[y]\equiv\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_ny=f(t)$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为常数，$f(t)$ 为连续函数

2. 解法：待定系数法，Laplace 变换法

类型 I $L[y]=f(t)=P_m(t)e^{rt}=(b_0t^m+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{rt}$

其中 r, b_i 为实常数

设方程有形如 $\tilde{y}=t^k(B_0t^m+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{rt}$ 的特解，

其中k的取值取决于齐次方程特征根的重数

(i) 若 $r=0$，则 $f(t)=b_0t^m+\cdots+b_m$

① 若 $r=0$ 不是特征根，取 $\tilde{y}=B_0t^m+\cdots+B_m$

有 $\begin{cases} B_0a_n=b_n \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$

② 若 $r=0$ 是k重特征根，相应 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0$，$a_{n-k}\neq 0$

则 $\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^ky}{dt^k}=f(t)$

令 $z=\frac{d^ky}{dt^k}$，方程化为 $\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)$

有 $\frac{d^t\tilde{y}}{dt^k}=\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\cdots+\tilde{B}_m$

则 $\tilde{y}$ 是t的m+k次多项式，其中t的幂次小于k的项带有任意常数. 取任意常数为0，有特解

$\tilde{y}=t^k(\gamma_0t^m+\cdots+\gamma_m)$，其中 $\gamma_0,\cdots,\gamma_m$ 为待定系数

例10 (1) $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=3t+1$

Solu. 齐次方程有通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$

设非齐次方程有特解 $y^*=t^0(At+B)e^{0t}=At+B$

代入方程：$-2A-3At-3B=3t+1$，$A=-1$，$B=\frac{1}{3}$

有特解 $y^*=-t+\frac{1}{3}$

因此非齐次方程的通解 $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}-t+\frac{1}{3}$

(2) $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=3t+1$

齐次方程有通解 $y=C_1+C_2e^t$

设非齐次方程有特解 $y^*=t^1(At+B)$

代入方程：$2A-2At-B=3t+1$，$A=-\frac{3}{2}$，$B=-4$

有特解 $y^*=-\frac{3}{2}t^2-4t$

因此非齐次方程的通解 $y=C_1+C_2e^t-\frac{3}{2}t^2-4t$.

(ii) 若 $r\neq 0$，作变量替换 $y=ye^{rt}$

方程化为

$$\frac{d^ny}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_ny=b_0t^m+\cdots+b_m$$

其中 $A_1,\cdots,A_{n-1},A_n$ 为常数，特征根 r 对应零特征根，且重数相同.

① 若 r 不是原方程特征根，可设特解 $\tilde{y}=B_0t^m+\cdots+B_{m-1}t+B_m$

其中 $B_0,\cdots,B_m$ 为待定系数

从而 $\tilde{y}=(B_0t^m+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{rt}$

② 若 r 是原方程 k 重特征根，可设特解 $\tilde{y}=t^k(B_0t^m+\cdots+B_m)$

从而 $\tilde{y}=t^k(B_0t^m+\cdots+B_m)e^{rt}$

例11 $\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=e^{-t}(t-5)$

Solve. 齐次方程 $\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=0$

有通解 $y=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}+C_3t^2e^{-t}$

设特解 $y^*=t^3(At+B)e^{-t}$

代入方程，$(24At+6B)e^{-t}=e^{-t}(t-5)$

$A=\frac{1}{24}$，$B=-\frac{5}{6}$

非齐次方程有特解 $y=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{-t}+(\frac{1}{24}t^4-\frac{5}{6}t^3)e^{-t}$ C_1,C_2,C_3 为任意常数

类型 II $L[y]=f(t)=(A_m(t)\cos\beta t+B_p(t)\sin\beta t)\cdot e^{\alpha t}$

其中 α,β 为实常数，$A_m(t)$，$B_p(t)$ 分别为 m 次和 p 次实系数多项式

记 $L=\max\{m,p\}$

特解形式可设为 $\tilde{y}=t^k(P_L(t)\cos\beta t+Q_L(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$

其中 k 为特征方程的根 $\alpha+i\beta$ 的重数，$P_L(t)$，$Q_L(t)$ 为待定系数的 L 次多项式

由类型 I，当 r 为复数时也成立

$$f(t)=(A_m(t)\cos\beta t+B_p(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

$$=\left(A_m(t)\cdot\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}+B_p(t)\cdot\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}\right)\cdot e^{\alpha t}=\frac{A_m(t)-iB_p(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}+\frac{A_m(t)+iB_p(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

令 $f_1(t)=\frac{A_m(t)-iB_p(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}$，$f_2(t)=\frac{A_m(t)+iB_p(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$

由叠加原理，$L[y]=f_1(t)$ 与 $L[y]=f_2(t)$ 的解之和必为 $L[y]=f_1(t)+f_2(t)$ 的解.

又 $f_1(t)=\overline{f_2(t)}$，若 y_1 为 $L[y]=f_1(t)$ 的解，$\overline{y_1}$ 一定为 $L[y]=f_2(t)$ 的解.

$L[y]=f_1(t)$ 的特解形式可设为 $\tilde{y}_1=t^k D_L(t)\cdot e^{(\alpha+i\beta)t}$

综上，$L[y]=f(t)$ 的特解形式可设为 $\tilde{y}=t^k[D_L(t)\cdot e^{(\alpha+i\beta)t}+\overline{D_L(t)}e^{(\alpha-i\beta)t}]$

则 $\tilde{y}=t^k[D_L(t)(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\overline{D_L(t)}(\cos\beta t-i\sin\beta t)]e^{\alpha t}$

$=t^k[2Re(D_L(t))\cos\beta t+2Im(D_L(t))\sin\beta t]e^{\alpha t}$

$=t^k[P_L(t)\cos\beta t+Q_L(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

其中 $P_L(t)=2Re(D_L(t))$，$Q_L(t)=2Im(D_L(t))$

$L=\max\{m,p\}$，k 的取值由 $\alpha+i\beta$ 特征根重数决定

例12 (1) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\cos 2t$

Solu. 齐次方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$，有通解 $y=(C_1+C_2t)e^{-2t}$

设非齐次方程特解 $y^*=t^0[A\cdot\cos 2t+B\sin 2t]\cdot e^{0t}=A\cos 2t+B\sin 2t$

代入方程化简有，

$8B\cos 2t-8A\sin 2t=\cos 2t$，$A=0$，$B=\frac{1}{8}$

特解 $y^*=\frac{1}{8}\sin 2t$，通解 $y=(C_1+C_2t)e^{-2t}+\frac{1}{8}\sin 2t$

(2) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\cos 2t+\sin t$

Rem. 也可采用复数法

$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ 或 $f(t)=A(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

可先求 $L[y]=A(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ 的解，然后分别取实部、虚部

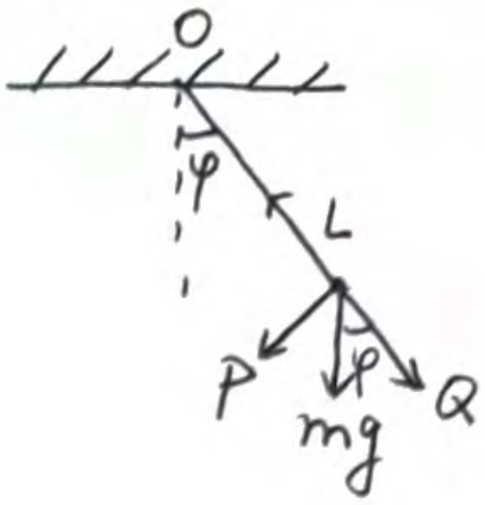
例：$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=e^{2it}=\cos 2t$，可由类型I求解.

有特解 $y^*=-\frac{i}{8}e^{2it}=-\frac{i}{8}\cos 2t-\frac{i}{8}i\sin 2t$

$=\frac{1}{8}\sin 2t-\frac{1}{8}\cos 2t\cdot i$，原方程特解 $\frac{1}{8}\sin 2t$

四、质点振动

1. 无阻尼自由振动



切向速度 $v = l\cdot\frac{d\varphi}{dt}$

由 $F=ma$，$-mg\sin\varphi = m\frac{dv}{dt} = ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

当 φ 很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$，$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$，特征方程 $\lambda^2+\omega^2=0$，$\omega^2=\frac{g}{l}>0$

微分方程通解为 $\varphi = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$，$C_1, C_2$ 为任常

Rem. (i) $\varphi = A\sin(\omega t+\theta)$，$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$，$\sin\theta=\frac{C_1}{A}$，$\cos\theta=\frac{C_2}{A}$

$\theta = \arctan\frac{C_1}{C_2}$

(ii) 初始条件：$\varphi(t_0)=\varphi_0$，$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t_0}=0$

特解 $\varphi=\varphi_0\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$

2. 有阻尼自由振动

阻力与 v 成正比，设阻力系数为 μ，φ 很小时有：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0,\text{其中 } 2n=\frac{\mu}{m},\ \omega^2=\frac{g}{l}$$

特征方程 $\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0$　特征根 $\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-\omega^2}$

① $n<\omega$，λ_1,λ_2 为共轭复根，记 $\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$，$\lambda_{1,2}=-n\pm\omega_1 i$

通解 $\varphi = e^{-nt}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)$

② $n>\omega$，$\lambda_2<\lambda_1<0$ 为两不同实根

通解 $\varphi = C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}$

③ $n=\omega$，$\lambda_1=\lambda_2=-n$ 为两相等实根

通解 $\varphi = e^{-nt}(C_1+C_2t)$

3. 无阻尼强迫振动

受外力 $F(t)$，有：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t)$$

令 $\mu=0$，$\omega^2=\frac{g}{l}$，$\frac{1}{ml}F(t)=H\sin pt$，则：$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt$

齐次方程通解 $\varphi=A\sin(\omega t+\theta)$

非齐次方程：若 $\omega\neq p$，设 $\tilde{\varphi}=M\cos pt+N\sin pt$

代入得，$M=0$，$N=\frac{H}{\omega^2-p^2}$

通解 $\varphi = A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt$

若 $\omega=p$，设 $\tilde{\varphi}=t(M\cos pt+N\sin pt)$

代入得 $M=-\frac{H}{2\omega}$，$N=0$

通解 $\varphi = A\sin(\omega t+\theta)-\frac{H}{2\omega}t\cos pt$

4. 有阻尼强迫振动

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2n\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt$$

$n<\omega$ 时：齐次方程通解 $\varphi=Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t+\theta)$，$\omega_1=\sqrt{\omega^2-n^2}$

非齐次方程特解 $\tilde{\varphi}=\frac{-2npH}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\cos pt+\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sin pt$

§4.3 高阶方程的降阶和幂级数解法

一、可降阶微分方程的类型

n阶微分方程：$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) \equiv 0$

例1 $\frac{d^5y}{dt^5} - \frac{1}{t}\frac{d^4y}{dt^4} = 0$

Solu. 令 $\frac{d^4y}{dt^4} = y$，则 $\frac{d^5y}{dt^5} = \frac{dy}{dt}$，因此 $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t}y = 0$

求解可得 $y = c_1 t$，即 $\frac{d^4y}{dt^4} = c_1 t$，积分有：

$y = C_1 t^5 + C_2 t^3 + C_3 t^2 + C_4 t + C_5$

Rem. 第一类：不显含未知函数及其k-1阶导数的微分方程 $(1 \le k \le n)$

$F(t, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$，令 $y = y^{(k)}$，则 $F(t, y, \cdots, y^{(n-k)}) = 0$

有 $y = y(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$，即 $y^{(k)} = y(t, c_1, c_2, \cdots, c_{n-k})$

k次积分有 $y = \psi(t, c_1, \cdots, c_n)$

例2 $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$

Solu. 令 $y' = y$，则 $y'' = y \cdot \frac{dy}{dy}$，因此 $y(y\frac{dy}{dy}) + y^2 = 0$

求解可得 $y = 0$ 或 $y\frac{dy}{dy} + y = 0$

即 $y' = 0$ 或 $yy' = c$，$y = c$ 或 $y^2 = c_1 t + c_2$

Rem. 第二类：不显含自变量的自治方程

$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$，令 $y' = y$，则 $y'' = y \cdot \frac{dy}{dy}$，$y''' = y \cdot (\frac{dy}{dy})^2 + y^2 \frac{d^2y}{dy^2}$

方程可化为 $G(y, y, \frac{dy}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dy^{n-1}}) = 0$

求解后代回 $y' = y$ 求得对应通解

例3 $tyy'' + ty'^2 - yy' = 0$

Solu. 令 $y = e^u$，则 $y' = u' \cdot e^u$，$y'' = e^u \cdot u'^2 + e^u \cdot u''$

即 $t(u'^2 + u'') - u' = 0$

令 $u' = z$，则：$tz' + 2tz^2 - z = 0$ (Bernoulli)

解得 $z = \frac{t}{c_1 + t^2}$，$y = e^u = e^{\int z dt} = e^{\frac{1}{2}\ln(c_1+t^2) + c}$

$= c_2 \cdot \sqrt{c_1 + t^2}$

Rem. 第三类：齐次微分方程

$F(t, y, \cdots, y^{(n)}) = 0$，$F$是关于$y, \cdots, y^{(n)}$的$k$次齐次函数

即 $F(t, \alpha y, \alpha y', \cdots, \alpha y^{(n)}) = \alpha^k F(t, y, \cdots, y^{(n)})$

令$y = e^u$，则方程化为$G(t, 1, u', \cdots, u^{(n)}) = 0$，不显含未知函数

令$u' = z$，则方程化为$G(t, z, \cdots, z^{(n-1)}) = 0$

例4 $y^2 y'' + (2y+1) y' = 0$

Sole. 令$y' = z$，则$y'' = z'$，$y^2 \cdot z' + (2y+1) \cdot z = 0$

另法：$(y^2 y'' + 2y y') + y' = 0$. $(y^2 y' + y)' = 0$. 通解为$y = C_1 + C_2 e^y$

Rem. 第四类：恰当微分方程

$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 满足 $F = \frac{d}{dt} \phi(t, y, \cdots, y^{(n-1)})$

显然可得 $\phi(t, y, \cdots, y^{(n-1)}) = C$

Rem. 第五类：已知非零特解的齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) y = 0$$

例5 $\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t) y = 0$ 已知 $y_1 \neq 0$，则通解为

$y = y_1 \left(C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt + C_2 \right)$

Proof. 由$y_1 \neq 0$，令$y = y_1 \cdot y$，则 $y' = y_1' y + y_1 y'$，$y'' = y_1'' y + 2y_1' y' + y_1 y''$

$y_1 y'' + (2y_1' + p(t) y_1) y' + (y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1) y = 0$

$\Rightarrow y_1 y'' + (2y_1' + p(t) y_1) y' = 0$

$\Rightarrow y' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt}$，即 $y = y_1 y = y_1 \left(C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt + C_2 \right)$

$= C_1 \cdot y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt} + C_2 y_1$

此为原方程通解

例6 $y'' - 2(1 + \frac{1}{t}) y' + (1 + \frac{2}{t}) y = 0$.

Sole. $y_1 = e^t$是原方程的一个解，$P(t) = -2(1 + \frac{1}{t})$，

$y = e^t \left(C_1 \int \frac{1}{e^{2t}} e^{-\int -2(1+\frac{1}{t}) dt} dt + C_2 \right) = C_1 e^t t^3 + C_2 e^t$

§5 线性微分方程组

§5.1 存在唯一性定理

一、预备知识

1. 矩阵

$$\vec{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

n维列向量 $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=(y_1,\cdots,y_n)^T$

2. 矩阵的运算

矩阵的加法、乘法、数乘仍然成立

3. 矩阵的连续

Def. 若一个矩阵 $\vec{A}(t)$ 或向量 $\vec{y}$ 在区间 $a\le t\le b$ 上的每一个元都是区间 $[a,b]$ 上的连续，则称 $\vec{A}(t)$ 或 $\vec{y}$ 在区间 $[a,b]$ 上连续

4. 矩阵的可微

Def. 若一个矩阵 $\vec{A}(t)$ 或向量 $\vec{y}$ 的每一个元都是 $[a,b]$ 上的可微函数，则称 $\vec{A}(t)$ 或 $\vec{y}$ 在 $[a,b]$ 上可微，此时导数为

$$\vec{A}'(t)=\begin{pmatrix} a_{11}'(t) & \cdots & a_{1n}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}'(t) & \cdots & a_{nn}'(t) \end{pmatrix},\quad \vec{f}'(t)=\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix}$$

有下列求导公式：

(i) $(\vec{A}(t)+\vec{B}(t))'=\vec{A}'(t)+\vec{B}'(t)$，$(\vec{u}(t)+\vec{v}(t))'=\vec{u}'(t)+\vec{v}'(t)$

(ii) $(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t))'=\vec{A}'(t)\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\vec{B}'(t)$

(iii) $(\vec{A}(t)\cdot\vec{u}(t))'=\vec{A}'(t)\vec{u}(t)+\vec{A}(t)\vec{u}'(t)$

5. 矩阵的可积

Def. 若一个矩阵 $\vec{A}(t)$ 或向量 $\vec{f}(t)$ 的每个元在 $[a,b]$ 上都可积，则称 $\vec{A}(t)$ 或 $\vec{f}(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积，此时积分为

$$\int_a^b \vec{A}(t)\,dt=\begin{pmatrix} \int_a^b a_{11}(t)\,dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)\,dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_a^b a_{n1}(t)\,dt & \cdots & \int_a^b a_{nn}(t)\,dt \end{pmatrix},\quad \int_a^b \vec{f}(t)\,dt=\begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)\,dt \end{pmatrix}$$

二、一阶线性微分方程组

1. 方程组及其解

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \qquad (LDS)$$

其中 $a_{ij}(t)$, $f_j(t)$, $(i=1,\cdots,n)(j=1,\cdots,n) \in C'[a,b]$

方程组关于 $y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n'$ 是线性的.

矩阵形式：$\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$ (DSM)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Def. 设 $\vec{A}(t)_{n\times n}$ 是 $[a,b]$ 上的连续矩阵，$\vec{f}(t)_{n\times 1}$ 是 $[a,b]$ 上的连续向量，若 $\exists\, \vec{u}(t)_{n\times 1}$，其导数 $\vec{u}'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\beta] \subset [a,b]$) 上连续，且满足 $\vec{u}'(t) = \vec{A}(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t)$，$\alpha \le t \le \beta$

则称 $\vec{u}(t)$ 为方程组 (DSM) 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个解.

2. 初值问题及其解

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{\eta} \end{cases}, \quad a \le t_0 \le b, \ \vec{\eta} \text{ 为已知向量} \qquad (DSI)$$

解：方程组 DSM 在包含 t_0 的区间 $[\alpha,\beta]$ 上的解 $\vec{u}(t)$ 若满足 $\vec{u}(t_0) = \vec{\eta}$，则称 $\vec{u}(t)$ 为初值问题的解.

例1 $\begin{cases} \vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{y} \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ $\quad I: (-\infty,+\infty)$

Solu. $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$, $\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

$\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}(t)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解.

3. n阶线性微分方程

(1) $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t)$

$y(t_0) = \eta_1$, $y'(t_0) = \eta_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = \eta_n$ $\qquad$ (nLDE)

其中 $a_i(t)$, $i=1,\cdots,n$ 是 $[a,b]$ 上连续函数，η_i, $i=1,\cdots,n$ 为常数

(2) $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix} \cdot \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$

$\vec{y}(t_0) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \triangleq \vec{\eta}$

其中 $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$

显然，(1)和(2)等价

Rem. (1) 等价是指给定一个问题的解，可以构造另一个问题的解

(2) 但给出(1)可以转化成(2)，反之则未必

例 $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 不能化为(2)的形式

§5.2 线性微分方程组的一般理论

$$\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$$

Rem.(1) 若 $\vec{f}(t) \neq \vec{0}$，则方程组称为非齐次线性微分方程组

若 $\vec{f}(t) = \vec{0}$，则方程组称为齐次线性微分方程组

(2) $\vec{A}(t)$, $\vec{f}(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 连续

一、齐次线性微分方程组

1. 叠加原理

Thm 1. 若 $\vec{u}(t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 是齐次线性微分方程组的解，则 $\alpha\vec{u}(t) + \beta\vec{v}(t)$ 也是齐次线性微分方程组的解，其中 α, β 为任意常数

2. 向量函数线性相关与线性无关

(1) Def. 设 $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \cdots, \vec{y}_m(t)$ 是定义在 $t \in [a,b]$ 的向量函数，若存在不全为0的 m 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ s.t.

$$c_1\vec{y}_1(t) + \cdots + c_m\vec{y}_m(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

则称 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关，否则称为线性无关.

例. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} t^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 在任何区间上线性无关

$\begin{pmatrix} \cos^2 t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sin^2 t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 在任何区间上线性相关

(2) 向量函数的 Wronsky 行列式

Def. 设有 n 个定义在 $[a,b]$ 上的向量函数，

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ \vdots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix}, \cdots, \vec{y}_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n}(t) \\ \vdots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

由这 n 个向量函数构成的行列式

$$W(t) \equiv [\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)] = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

称为向量函数组的 Wronsky 行列式.

(3) 判别法

Thm 2. 若向量函数 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 上线性相关，则它们的 Wronsky 行列式 $W(t) \equiv 0$, $a \le t \le b$

Proof. 由线性相关，$\exists$ 不全为 0 的 n 个数 $c_1, \cdots, c_n$ s.t.

$c_1 \vec{y}_1(t) + \cdots + c_n \vec{y}_n(t) \equiv 0$, $\forall a \le t \le b$

把上式看成以 $c_1, \cdots, c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组，其系数行列式为 $W(t)$。若代数方程组有非零解，则其系数行列式 $W(t) \equiv 0$, $a \le t \le b$

Thm 3. 若方程组 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y}$ 的解 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 线性无关，则它们的 Wronsky 行列式 $W(t) \ne 0$, $\forall a \le t \le b$

Proof. 假设 $\exists t_0 \in [a,b]$ s.t. $W(t_0) = 0$

考虑齐次线性方程组 $c_1 \vec{y}_1(t_0) + c_2 \vec{y}_2(t_0) + \cdots + c_n \vec{y}_n(t_0) = 0$

有系数行列式 $W(t_0) = 0$，因此一定有非零解 $\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n$

构造向量函数

$\vec{y}(t) \triangleq \tilde{c}_1 \vec{y}_1(t) + \cdots + \tilde{c}_n \vec{y}_n(t)$

由 Thm 1. 知，$\vec{y}(t)$ 是方程组 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y}$ 的解 且满足初值 $\vec{y}(t_0) = \vec{0}$

又 $\vec{0}$ 也是满足初值 $\vec{y}(t_0) = 0$ 的解，由存在唯一性定理，$\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$，即

$$\tilde{c}_1 \vec{y}_1(t) + \cdots + \tilde{c}_n \vec{y}_n(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

由此说明 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 上线性相关，矛盾.

(4) 解的结构

Thm 4. 方程组 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y}$ 一定存在 n 个线性无关的解 $\vec{y}_1(t), \cdots \vec{y}_n(t)$.

Proof. $\forall t_0 \in [a,b]$, 由解的存在唯一性定理, 方程组满足初值

$\vec{y}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{y}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的解 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 一定存在

又 $W(t_0) = 1 \neq 0$, 由 Thm 2., $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 线性无关

Thm 5. 若 $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 是方程组 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y}$ 的 n 个线性无关的解, 则方程组任一解 $\vec{y}(t)$ 可表示为

$\vec{y}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + \cdots + C_n\vec{y}_n(t)$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是常数

Proof. $\forall t_0 \in [a,b]$, 令 $\vec{y}(t_0) = C_1\vec{y}_1(t_0) + \cdots + C_n\vec{y}_n(t_0)$

其行数行列式为 $W(t_0)$

由 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 线性无关, $W(t_0) \neq 0$, 方程组有唯一解 $C_1, \cdots, C_n$.

构造向量函数 $C_1\vec{y}_1(t) + \cdots + C_n\vec{y}_n(t)$

由叠加原理, 上述向量函数是解, 又 $\vec{y}(t)$ 也是解,

且 $\vec{y}(t)$ 与 $C_1\vec{y}_1(t) + \cdots + C_n\vec{y}_n(t)$ 有相同初值

由解的存在唯一性定理, $\vec{y}(t) = C_1\vec{y}_1(t) + \cdots + C_n\vec{y}_n(t)$

Rem. (1) 此时称 n 个线性无关的解 $\vec{y}_1(t), \cdots, \vec{y}_n(t)$ 为一个基本解组

(5) 基解矩阵

Def. 若一个 $n \times n$ 矩阵的每一列都是方程组的解, 称这个矩阵为解矩阵.

Def. 若方程组的解矩阵各列向量在 $t \in [a,b]$ 上线性无关, 则称该矩阵为 $[a,b]$ 上方程组的基解矩阵.

Rem. 若方程组的 n 个线性无关的解 $\vec{\varphi}_1(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)$, 则基解矩阵为 $\Phi(t) = [\vec{\varphi}_1(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)]$

若 $\Phi(t_0) = E$, 则称其为标准基解矩阵

Thm 4* 方程组 $\vec{y}'=\vec{A}(t)\vec{y}$ 一定存在一个基解矩阵 $\vec{\Phi}(t)$

若 $\vec{\varphi}(t)$ 是方程组 $\vec{y}'=\vec{A}(t)\vec{y}$ 的任一解，则 $\vec{\varphi}(t)=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{C}$，其中 $\vec{C}$ 是确定的 n 维常数列向量

Thm 5* 方程组 $\vec{y}'=\vec{A}(t)\vec{y}$ 的一个解矩阵是基解矩阵 $\Leftrightarrow$

$\det\vec{\Phi}(t)\neq 0,\ a\le t\le b$

Rem. 行列式恒等于0的矩阵未必列向量线性相关，例如：

$\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 满足 $\det\vec{\Phi}(t)=0$

例1 验证 $\vec{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$ 是方程组 $\vec{y}'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{y}$ 的基解矩阵.

Proof. (1) $\vec{\Phi}(t)$ 是解矩阵，令 $\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}$，$\varphi_2(t)=\begin{pmatrix}te^t\\ e^t\end{pmatrix}$

$$\vec{\varphi}_1'(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\vec{\varphi}_1(t)$$

$$\vec{\varphi}_2'(t)=\begin{pmatrix}te^t+e^t\\ e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}te^t\\ e^t\end{pmatrix}$$

(2) $\vec{\Phi}(t)$ 是基解矩阵

$\det\vec{\Phi}(t)=e^{2t}\neq 0$

Cor 1. 若 $\vec{\Phi}(t)$ 是方程组 $\vec{y}'=\vec{A}(t)\vec{y}$ 在 $t\in[a,b]$ 上的基解矩阵，$\vec{C}$ 是 n 阶非奇异常数方阵，则 $\vec{\Phi}(t)\vec{C}$ 也是方程组在 $t\in[a,b]$ 上的基解矩阵

Proof. 由题，任一解矩阵 $\vec{X}(t)$ 满足 $\vec{X}'(t)=\vec{A}(t)\vec{X}(t)$

令 $\vec{\Psi}(t)=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{C}$，两边对 t 求导有，

$$\vec{\Psi}'(t)=\vec{\Phi}'(t)\cdot\vec{C}+\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{0}=\vec{\Phi}'(t)\cdot\vec{C}=\vec{A}(t)\vec{\Phi}(t)\vec{C}$$

$$=\vec{A}(t)\cdot\vec{\Psi}(t)$$

即 $\vec{\Psi}(t)$ 是方程组的解矩阵，又有 $\det(\vec{\Psi}(t))=\det(\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{C})\neq 0$

综上，$\vec{\Psi}(t)$ 是基解矩阵.

Cor 2. 若 $\vec{\Phi}(t)$, $\vec{\Psi}(t)$ 是 $[a,b]$ 上方程组 $\vec{x}'(t)=\vec{A}(t)\vec{x}(t)$ 的两个基解矩阵，则存在非奇异常数阵 $\vec{C}_{n\times n}$ s.t. $\vec{\Psi}(t)=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{C}$

Proof. 令 $\vec{x}(t)=\vec{\Phi}^{-1}(t)\vec{\Psi}(t)$, $a\le t\le b$ ($\vec{\Phi}^{-1}(t)$ 显然存在)

$$\vec{\Psi}'(t)=\vec{\Phi}'(t)\vec{x}(t)+\vec{\Phi}(t)\vec{x}'(t)=\vec{A}(t)\vec{\Phi}(t)\vec{x}(t)+\vec{\Phi}(t)\vec{x}'(t)$$

$$=\vec{A}(t)\vec{\Psi}(t)+\vec{\Phi}(t)\vec{x}'(t)$$

因此 $\vec{x}'(t)=0$, $\vec{x}(t)=\vec{C}_{n\times n}$, $\vec{\Phi}(t)=\vec{\Psi}(t)\cdot\vec{C}$

二. 非齐次线性微分方程组

$$\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$$

1. 方程组解的性质

(1) 若 $\vec{\varphi}(t)$ 是方程组的解，$\vec{\psi}(t)$ 是相应的齐次线性微分方程组的解，则 $\vec{\varphi}(t)+\vec{\psi}(t)$ 一定是非齐次线性微分方程组的解

(2) 若 $\vec{\varphi}_1(t)$ 和 $\vec{\varphi}_2(t)$ 是方程组的两个解，则 $\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_2(t)$ 是相应的齐次线性微分方程组的解.

2. 方程组解的结构

Thm 7. 设 $\Phi(t)$ 是齐次方程组的基解矩阵，$\vec{\psi}(t)$ 是非齐次方程组 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$ 的某一个解，则方程组的任一解 $\vec{\varphi}(t)$ 都可表示为 $\vec{\varphi}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \vec{\psi}(t)$

Proof. 由 $\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)$ 是齐次方程组的解，$\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t) = \Phi(t)\cdot\vec{C}$

因此 $\vec{\varphi}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \vec{\psi}(t)$

3. 常数变易法求解非齐次线性微分方程组

Thm 8. 若 $\Phi(t)$ 是齐次方程组的基解矩阵，则向量函数 $\vec{\varphi}(t)$ 是非齐次方程组的解，且满足初值条件 $\vec{\varphi}(t_0)=0$，~~且 $\vec{\varphi}(t)=$~~ 其中 $\vec{\varphi}(t)$ 有

$$\vec{\varphi}(t) = \Phi(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\,ds$$

Proof. 令 $\vec{\varphi}(t) = \Phi(t)\vec{C}(t)$，则 $\vec{\varphi}'(t) = \Phi'(t)\vec{C}(t) + \Phi(t)\vec{C}'(t)$

$$= \vec{A}(t)\Phi(t)\vec{C}(t) + \vec{f}(t)$$

因此 $\Phi(t)\vec{C}'(t) = \vec{f}(t)$，$\vec{C}'(t) = \Phi^{-1}(t)\vec{f}(t)$

$\vec{C}(t) = \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)\cdot\vec{f}(t)\,dt$，$\vec{C}(t_0)=\vec{0}$

因此 $\vec{\varphi}(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$，$t_0, t\in[a,b]$ 且 $\vec{\varphi}(t_0)=0$.

对方程有 $\vec{y}' = \vec{A}(t)\vec{y} + \vec{f}(t)$，则 $\vec{\varphi}(t)$ 一定由上式决定

反之，满足上式形式一定为方程组的解.

事实上，$\vec{\varphi}'(t) = \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)\vec{f}(t)$

$$\vec{A}(t)\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds + \vec{f}(t) = \vec{A}(t)\vec{\varphi}(t) + \vec{f}(t)$$

Rem. (1) 方程组满足 $\vec{\varphi}(t_0)=\vec{\eta}$ 的解为

$$\vec{\varphi}(t)=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{\Phi}^{-1}(t_0)\cdot\vec{\eta}+\vec{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\vec{\Phi}^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$$

例 $\vec{y}'=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\vec{y}+\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$, $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Solve. $\vec{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}$ 对应齐次方程组的基解矩阵

$$\vec{\Phi}^{-1}(s)=\frac{1}{e^{2s}}\begin{pmatrix}e^s&-se^s\\0&e^s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-s\\0&1\end{pmatrix}e^{-s}$$

$$\vec{\Phi}^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

因此满足 $\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 的解为

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(t)&=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{\Phi}^{-1}(t_0)\cdot\vec{y}(0)+\vec{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\vec{\Phi}^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds\\&=\begin{pmatrix}(t-1)e^t\\e^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{pmatrix}\cdot\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-2s}\\0\end{pmatrix}ds\\&=\begin{pmatrix}te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\e^t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

§3.3 常系数线性微分方程组

$$\vec{y}' = \vec{A}\cdot\vec{y}$$

(1) $y' = ay$ $\quad \lambda = a$, $\quad y = Ce^{\lambda t}$, $y = Ce^{at}$

(2) $\vec{y}' = \vec{A}\vec{y}$ $\qquad \vec{y} = e^{\lambda t}\vec{C}$, $\vec{y} = e^{\vec{A}t}\vec{C}$

考虑 $\vec{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\vec{C}$，则 $(\lambda\vec{I} - \vec{A})\cdot\vec{C} = \vec{0}$，方程组有零解 $\Leftrightarrow |\lambda\vec{I} - \vec{A}| = 0$

一、预备知识

1. 矩阵指数 $\exp\vec{A}$

(1) 定义

Def. 设 $\vec{A}_{n\times n}$ 是一个常数矩阵，定义 $\exp\vec{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^k}{k!}$

Rem. (1) 对于任意常数矩阵 $\vec{A}$，$\exp\vec{A}$ 均收敛，且绝对收敛

$$\left\|\frac{\vec{A}^k}{k!}\right\| \le \frac{\|\vec{A}\|^k}{k!}$$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\vec{A}\|^k}{k!}$ 收敛，其和为 $e^{\|\vec{A}\|} - 1 + n$，因此 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^k}{k!}$ 绝对收敛

(2) $\exp\vec{A}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^k t^k}{k!}$ 在 t 的任何有限区间上一致收敛

$$\left\|\frac{\vec{A}^k t^k}{k!}\right\| \le \frac{\|\vec{A}\|^k |t|^k}{k!} \le \frac{\|\vec{A}\|^k\cdot C^k}{k!}$$

(2) 性质

(i) 若 $\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A}$，则 $\exp(\vec{A}+\vec{B}) = \exp\vec{A}\cdot\exp\vec{B}$

(ii) 对任何矩阵 $\vec{A}$，$(\exp\vec{A})^{-1}$ 存在，且 $(\exp\vec{A})^{-1} = \exp(-\vec{A})$

Proof. 由 $\vec{A}$ 和 $-\vec{A}$ 可交换，$\vec{I} = \exp\vec{A}\cdot\exp(-\vec{A})$

因此 $(\exp\vec{A})^{-1} = \exp(-\vec{A})$

(iii) 若 $\vec{T}$ 是非奇异阵，则 $\exp(\vec{T}^{-1}\vec{A}\vec{T}) = \vec{T}^{-1}\exp(\vec{A})\cdot\vec{T}$

Proof. $\exp(\vec{T}^{-1}\vec{A}\vec{T}) = \vec{E} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\vec{T}^{-1}\vec{A}\vec{T})^k}{k!} = \vec{T}^{-1}\cdot\left(\vec{E} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\vec{A}^k}{k!}\right)\vec{T}$

2. 矩阵的特征值和特征向量

Def. 设 $\vec{A}_{n\times n}$ 为常数阵，若关于 $\vec{u}$ 的线性代数方程组

$$(\lambda\vec{E} - \vec{A})\cdot\vec{u} = 0$$

有非零解，则称λ是$\vec{A}$的一个特征值，对应于λ的特征向量为$\vec{u}$

Def. n次多项式$P(\lambda)=\det(\lambda\vec{I}-\vec{A})$称为$\vec{A}$的特征多项式

n次代数方程$P(\lambda)=0$称为$\vec{A}$的特征方程.

例1 $\vec{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

Solu. $\det|\lambda\vec{I}-\vec{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -5\\ 5 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$, $\lambda_1=3+5i$, $\lambda_2=3-5i$

$\lambda_1=3+5i$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

$\lambda_2=3-5i$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$

例2 $\vec{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

Solu. $\det|\lambda\vec{I}-\vec{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2=0$, $\lambda_1=\lambda_2=3$

对应于$\lambda=3$的特征向量$(1,1)$

二、常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

1. 基解矩阵

Thm. 矩阵$\vec{\Phi}(t)=\exp\vec{A}t$是方程$\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$的基解矩阵，且$\vec{\Phi}(0)=\vec{E}$

Proof. 由定义，$\vec{\Phi}(0)=\vec{E}$

$$\vec{\Phi}'(t)=(\exp\vec{A}t)'=\left(\vec{E}+\vec{A}t+\frac{\vec{A}^2}{2!}t^2+\cdots\right)'$$

$$=\vec{A}+\vec{A}^2t+\frac{\vec{A}^3}{2!}t^2+\cdots$$

$$=\vec{A}\left(\vec{E}+\vec{A}t+\frac{\vec{A}^2}{2!}t^2+\cdots\right)$$

$$=\vec{A}\cdot\exp\vec{A}t=\vec{A}\,\vec{\Phi}(t)$$

又$\det\vec{\Phi}(0)=\det\vec{E}=1$

因此$\vec{\Phi}(t)$是基解矩阵

Rem. (1) 方程$\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$的任一解都有形式$\vec{\varphi}(t)=\exp\vec{A}t\cdot\vec{C}$

(2) 对角阵容易求基解矩阵$\exp\vec{A}t$

例3 若 $\vec{A}=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$，求 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$ 的基解矩阵

Solve. $\exp\vec{A}t=\vec{E}+\vec{A}t+\frac{\vec{A}^2}{2!}t^2+\cdots$

$$=\vec{E}+\mathrm{diag}(a_1t,\cdots,a_nt)+\mathrm{diag}(\frac{a_1^2}{2!}t^2,\cdots,\frac{a_n^2}{2!}t^2)+\cdots$$

$$=\mathrm{diag}(e^{a_1t},\cdots,e^{a_nt})$$

由 Thm. 知，$\mathrm{diag}(e^{a_1t},\cdots,e^{a_nt})$ 是基解矩阵

例4 $\vec{y}'=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\vec{y}$ 的基解矩阵

Solve. $\vec{A}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$$\exp\vec{A}t=\exp\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}t\cdot\exp\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}e^{2t}&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{pmatrix}$$

2. 基解矩阵的计算公式

(1) $\vec{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

Thm. 若 $\vec{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$，对应特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$（不必不同），则矩阵

$$\vec{\Phi}(t)=(e^{\lambda_1t}\vec{v}_1,\cdots,e^{\lambda_nt}\vec{v}_n)$$

是基解矩阵

Proof. 由讨论知，每一个向量函数 $e^{\lambda_jt}\vec{v}_j$ 都是方程 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$ 的解

矩阵 $\vec{\Phi}(t)$ 为解矩阵，又 $\det(\vec{\Phi}(0))=\det(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)\neq0$

因此 $\vec{\Phi}(t)$ 为基解矩阵.

例5 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$，$\vec{A}=\begin{pmatrix}3&5\\-5&3\end{pmatrix}$

Solve. 由例1，$\lambda_1=3+5i$，$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

$\lambda_2=3-5i$，$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

因此 $\vec{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}e^{(3+5i)t}&ie^{(3-5i)t}\\ie^{(3+5i)t}&e^{(3-5i)t}\end{pmatrix}$ 为 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$ 的基解矩阵.

Rem. (1) $\vec{\Phi}(t)$ 未必为 $\exp \vec{A}t$，但 $\exists$ 非奇异阵 $\vec{C}$ s.t. $\exp \vec{A}t = \vec{\Phi}(t)\vec{C}$

令 $t=0$，$\vec{C} = \vec{\Phi}^{-1}(0)$，因此 $\exp \vec{A}t = \vec{\Phi}(t)\cdot\vec{\Phi}^{-1}(0)$

(2) 若 $\vec{A}$ 是实矩阵，则 $\exp \vec{A}t$ 也是实矩阵

例 6 求例 5 的实基解矩阵

$$\vec{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Phi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp \vec{A}t = \vec{\Phi}(t)\cdot\vec{\Phi}^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} & -i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) \\ i(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) & e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{3t}\cos 5t & 2e^{3t}\sin 5t \\ -2e^{3t}\sin 5t & 2e^{3t}\cos 5t \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{pmatrix}$$

(2) $\vec{A}$ 为任意矩阵

① 空间分解法

Lem 1. 若 $\vec{A}$ 为 n 阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是 $\vec{A}$ 的 k 个不同特征值，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，$n_1+\cdots+n_k = n$，则对应于每一个 n_j 重特征值 λ_j，线性代数方程组

$$(\vec{A} - \lambda_j \vec{E})^{n_j}\vec{u} = \vec{0}$$

解的全体构成 n 维欧氏空间的一个 n_j 维的子空间 U_j $(j=1,\cdots,k)$

且 U 可分解为 $U_1, \cdots, U_k$ 的直和，即

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

Rem. 即 对 n 维欧氏空间的每一个向量 $\vec{u}$，$\exists$ 唯一的 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_k$ s.t. $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_k$，其中 $\vec{u}_j \in U_j$，$j=1,\cdots,k$

Thm. 对于常系数线性微分方程组 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$，满足初值 $\vec{y}(0)=\vec{\eta}$，设矩阵 $\vec{A}$ 具有 k 个不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$，对应重数 $n_1,\cdots,n_k$ 且 $n_1+\cdots+n_k=n$. 若 $\vec{\eta}=\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_k$，$\vec{v}_j\in U_j$，$j=1,\cdots,k$，$U_j$ 是 n 维欧氏空间的直和分解. 则方程组的初值问题的解为 $\vec{y}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left(\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})^i\right)\vec{v}_j$

Proof. 满足 $\vec{\varphi}(0)=\vec{\eta}$ 的解：

$$\vec{\varphi}(t)=(\exp\vec{A}t)\vec{\eta}$$

由 $\vec{\eta}=\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_k$，其中 $\vec{v}_j\in U_j$，$j=1,\cdots,k$

因此 $\vec{v}_j$ 一定是 $(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})^p\vec{v}=\vec{0}$ 的解，$p\geq n_j$，$j=1,2,\cdots,k$

由 $e^{\lambda_j t}\cdot\exp(-\lambda_j\vec{E}t)=e^{\lambda_j t}\cdot\mathrm{diag}(e^{-\lambda_j t},\cdots,e^{-\lambda_j t})=\vec{E}$

因此 $(\exp\vec{A}t)\vec{v}_j=e^{\lambda_j t}\cdot[\exp(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})t]\vec{v}_j$

$$=e^{\lambda_j t}\cdot\left[\vec{E}+(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})t+\cdots+\frac{(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})^{n_j-1}}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}\right]\vec{v}_j$$

因此初值问题的解为：

$$\vec{\varphi}(t)=(\exp\vec{A}t)\vec{\eta}=(\exp\vec{A}t)\left(\sum_{j=1}^{k}\vec{v}_j\right)=\sum_{j=1}^{k}(\exp\vec{A}t\cdot\vec{v}_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\vec{E}+(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})t+\cdots+\frac{(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})^{n_j-1}}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}\right]\vec{v}_j$$

$$=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left(\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{(\vec{A}-\lambda_j\vec{E})^i}{i!}t^i\right)\vec{v}_j$$

Rem. (1) $\vec{A}$ 只有一个特征值时，$\vec{\varphi}(t)=e^{\lambda t}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\vec{A}-\lambda\vec{E})^i}{i!}t^i\right)\cdot\vec{\eta}$

此时基解矩阵 $\exp\vec{A}t=e^{\lambda t}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\vec{A}-\lambda\vec{E})^i}{i!}t^i\right)$

(2) 矩阵指数 $\exp\vec{A}t$

$$\exp\vec{A}t=\exp\vec{A}t\cdot\vec{E}=(\exp\vec{A}t\cdot\vec{e}_1,\cdots,\exp\vec{A}t\cdot\vec{e}_n)$$

依次令 $\vec{\eta}=\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$，可求出 n 个解

以 n 个解为列向量即得到 $\exp\vec{A}t$

例7 $\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$，$\vec{y}(0)=\vec{\eta}$，$\vec{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$

Solu. 由例2，$\lambda=3$ 是 A 的二重特征值，$n_1=2$，只有一个子空间 U_1

$$\vec{\varphi}(t)=e^{3t}(\vec{E}+t(\vec{A}-3\vec{E}))\cdot\vec{\eta}$$

$$\vec{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

矩阵指数 $\exp \vec{A}t = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$

或：$\vec{\varphi}(t)\vec{e}_1 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t \\ -t \end{pmatrix}$，$\vec{\varphi}(t)\vec{e}_2 = e^{3t}\begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$

$$\exp \vec{A}t = (\vec{\varphi}(t)\vec{e}_1, \vec{\varphi}(t)\vec{e}_2) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

例8 $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = 2y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$ $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

满足初值 $\vec{\varphi}(0) = \vec{\eta}$ 的解 $\vec{\varphi}(t)$，并求 $\exp \vec{A}t$

solve. $\det(\lambda\vec{E} - \vec{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1, n_1 = 1$ $\lambda_2 = 2, n_2 = 2$

考虑 $(\vec{A} - \lambda_1\vec{E})^{n_1}\cdot\vec{u} = 0$，$(\vec{A} - \lambda_2\vec{E})^{n_2}\cdot\vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{u} = \vec{0}$

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \eta_2 - \eta_1 \\ \beta = \eta_1 \\ \gamma = \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{cases}$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

满足初值条件 $\vec{\varphi}(0) = \vec{\eta}$ 的解：

$$\vec{\varphi}(t) = e^t\cdot\vec{E}\cdot\vec{v}_1 + e^{2t}\cdot(\vec{E} + (\vec{A} - 2\vec{E})t)\vec{v}_2$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ 2t & 1-2t & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{pmatrix}$$

令 $\vec{\eta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 有：

$$\exp\vec{A}t=\begin{pmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ -e^{t}+(1+t)e^{2t} & e^{t}-te^{2t} & te^{2t}\\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$$

3. 应用（$t\to\infty$ 时微分方程组解的性态）

Thm.' 给定常系数齐次线性微分方程组

$$\vec{y}'=\vec{A}\vec{y}$$

(1) $\vec{A}$ 的特征值实部均为负，$t\to+\infty$ 时任一解均趋于 0

(2) $\vec{A}$ 的特征值实部非正，且实部为 0 的特征值都是简单特征值，$t\to+\infty$ 时任一解有界.

(3) $\vec{A}$ 的特征值至少有一个具有正实部，$t\to+\infty$ 时任一解均趋于 $+\infty$

三、常系数非齐次线性微分方程组

$$\begin{cases}\vec{y}'=\vec{A}\cdot\vec{y}+\vec{f}(t)\\ \vec{y}(t_0)=\vec{\eta}\end{cases}$$

其中 $\vec{A}$ 为 n 阶常数阵，$\vec{f}(t)$ 为连续向量值函数

则方程组的解为

$$\vec{\varphi}(t)=\vec{\Phi}(t)\vec{\Phi}^{-1}(t_0)\vec{\eta}+\vec{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\vec{\Phi}^{-1}(s)\vec{f}(s)\,ds$$

由 $\vec{\Phi}(t)=\exp\vec{A}t$，$\vec{\Phi}^{-1}(s)=\exp(-s\vec{A})$

原式可化简为 $\vec{\varphi}(t)=\exp((t-t_0)\vec{A})\cdot\vec{\eta}+\int_{t_0}^{t}\exp((t-s)\vec{A})\vec{f}(s)\,ds$

例9 $\vec{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$ 初值 $\vec{\eta}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Solve. $\exp\vec{A}t=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{pmatrix}$

$$\vec{\varphi}(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{pmatrix}+\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{pmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-s}\\0\end{pmatrix}ds$$

§6 非线性微分方程

1. 线性与非线性
2. Lyapunov、Poincare 稳定性、定性理论
3. 分支、孤立子、混沌

§6.1 稳定性

一、有关准备

一阶方程组 $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = g_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$

其中 $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，$\vec{g}(t;\vec{y}) = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$，有向量形式 $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{g}(t;\vec{y}), y \in \mathbb{R}^n$

Rem. (1) $\vec{g}(t;\vec{y})$ 不显含 t 的微分方程称为驻定（自治）微分方程

否则称为非驻定（或非自治）微分方程.

驻定方程右端为0的解称为微分方程的常数解（或驻定解）

例 $\frac{dy}{dt} = Ay - By^2$，$Ay - By^2 = 0$，$y = 0$ 和 $y = \frac{A}{B}$：驻定解

(2) 一般的高阶方程 $z^{(n)} = g(t, z, \cdots, z^{(n-1)})$

作变换有 $y_1 = z, y_2 = z', \cdots, y_n = z^{(n-1)}$，对应一阶方程组

(3) 若 $\vec{\varphi}'(t) = \vec{g}(t, \vec{\varphi}(t))$，则向量函数 $\vec{\varphi}(t)$ 是方程的解

(4) 初值条件 $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

(5) $\|\vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

(6) 包含点 $(t_0, \vec{y}_0) = (t_0, y_{10}, \cdots, y_{n0})$ 的某闭区域 R

$|t - t_0| \le a$，$\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b$

2. 向量函数 $\vec{g}(t, \vec{y})$ 在 G 上关于 $\vec{y}$ 满足局部 Lipschitz 条件

Def. $\forall (t_0, \vec{y}_0) \in G$，存在闭邻域 $R \subset G$ s.t. $\vec{g}(t, \vec{y})$ 在 R 上关于 $\vec{y}$ 满足局部 Lipschitz 条件，即：

$\exists\ L>0$ s.t. $\|\vec{g}(t,\vec{y}_1)-\vec{g}(t,\vec{y}_2)\| \le L\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|$, $\forall (t,\vec{y}_1),(t,\vec{y}_2)\in R$

3. 常微分方程的存在唯一性定理

Thm. 若向量函数 $\vec{g}(t,\vec{y})$ 在 R 上连续且关于 y 满足Lipschitz条件，则方程组存在唯一解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{y}_0)$，定义在 $|t-t_0|\le h$ 上，且 $\vec{\varphi}(t_0,t_0,\vec{y}_0)=\vec{y}_0$

其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$，$M=\max\limits_{(t,\vec{y})\in R}\|\vec{g}(t,\vec{y})\|$

4. 解的延拓、关于初值的连续性、可微性定理

二、Lyapunov 稳定性

1. 例子

(1) 考虑 $\frac{dy}{dt}=Ay-By^2$，$y(0)=y_0$

其中 A,B 为常数，且 $A\cdot B>0$

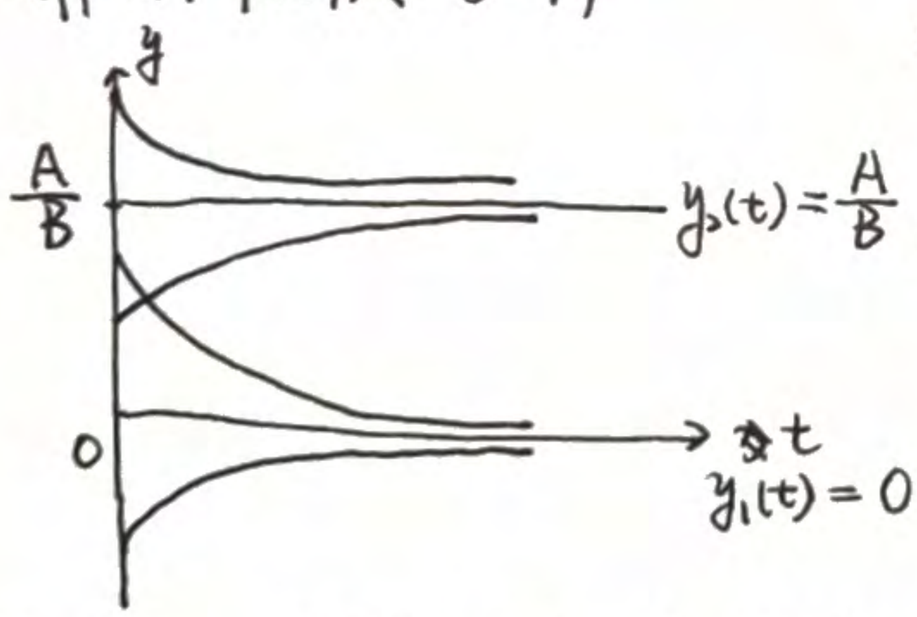
(2) 当 $y\neq 0$，$y\neq\frac{B}{A}$ 时，

$$\frac{1}{A}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{B}{A-By}\right)dy=\int dt$$

$$y=\frac{Ace^{At}}{1+Bce^{At}} \Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{c}e^{-At}+B}$$，c 为任常

特解为 $y=\dfrac{A}{B+\left(\frac{A}{y_0}-B\right)e^{-At}}$

(3) 解的性质分析：



① $A>0$，$B>0$，满足初值 $y_0>0$

所有解均渐近趋于 $y_2(t)$

② $A<0$，$B<0$，满足初值 $y_0<\frac{A}{B}$

所有解均渐近趋于 $y_1(t)$

2. 稳定性问题研究的简化

$\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{g}(t,\vec{y})$ 的特解 $\vec{y}=\vec{\varphi}(t)$ 邻近的性态

令 $\vec{z}=\vec{y}-\vec{\varphi}(t)$，则

$$\frac{d\vec{z}}{dt}=\vec{g}(t,\vec{y})-\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt}=\vec{g}(t,\vec{z}+\vec{\varphi}(t))-\vec{g}(t,\vec{\varphi}(t))$$

例 $\frac{dy}{dt}=Ay-By^2 \quad y_0=\frac{A}{B}$

令 $z=y-\frac{A}{B}$。

$$\frac{dz}{dt}=Ay-By^2-\frac{A}{B}=-Az-Bz^2$$

3. Lyapunov意义下稳定性的定义

引例 $\begin{cases}\frac{dz}{dt}=az\\ z(t_0)=z_0\end{cases}$

$z=z_0e^{a(t-t_0)}$

(1) $a<0,\ z_0\neq 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}z(t,t_0,z_0)=\lim\limits_{t\to+\infty}z_0e^{a(t-t_0)}=0$

(2) $a=0,\ z_0\neq 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}z(t,t_0,z_0)=z_0\neq 0$

(3) $a>0,\ z_0\neq 0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}z(t,t_0,z_0)=+\infty$

假设方程组 $\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{y})$，$\vec{f}(t,\vec{y})$在包含原点的域G内有连续偏导数，从而满足存在唯一性、延拓、连续性、可微性定理的条件.

Def. $\forall\varepsilon>0,t_0>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ s.t. $\forall\|\vec{z}_0\|<\delta$时满足$\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$的解$\vec{z}(t)$，$\forall t\geq t_0$有$\|\vec{z}(t)\|<\varepsilon$，则称$\vec{z}=\vec{0}$是稳定的，否则是不稳定的.

Def. 若$\vec{z}=\vec{0}$是稳定的，且$\exists\delta_0>0$ s.t. $\forall\|\vec{z}_0\|<\delta$时满足$\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$的解$\vec{z}(t)$均有$\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{z}(t)=\vec{0}$，则称$\vec{z}=\vec{0}$是渐近稳定的.

Def. 若$\vec{z}=\vec{0}$渐近稳定，且$\exists$域D_0 s.t. $\forall\vec{z}_0\in D_0$当且仅当满足$\vec{z}(t_0)=\vec{z}_0$时的解$\vec{z}(t)$均有$\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{z}(t)=\vec{0}$，则称$D_0$为稳定域.

例 $\frac{dy}{dt}=Ay-By^2$

$A<0,B<0$，$y=0$是渐近稳定的，$y<\frac{A}{B}$：稳定域

例1 考察 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的零解稳定性

Solu. 通解 $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}$

取 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$

满足初值的解：$\begin{cases} x = x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$

$\left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

因此零解是稳定的

但 $\lim\limits_{t \to +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$，因此不是渐近稳定的.

例2 考察方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases}$ 的零解稳定性

Solu. 取 $t_0 = 0$，解为 $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$ s.t. $0 < \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ 时

$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\, e^{-t} < \varepsilon$

又 $\lim\limits_{t \to +\infty} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = 0$，因此方程组零解是渐近稳定的

例3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$

Solu. $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{t} \\ y(t) = y_0 e^{t} \end{cases}$ 零解不稳定

三、按线性近似决定稳定性

1. 常系数线性微分方程组

$$\vec{y}' = \vec{A}\cdot\vec{y}$$

Thm 1.(1)若系数矩阵 $\vec{A}$ 的所有特征根都具有严格负实部，则方程组零解渐近稳定；

(2)若系数矩阵 $\vec{A}$ 的某一特征根具有正实部，则方程组零解不稳定；

(3)若系数矩阵 $\vec{A}$ 都不具有正实部，但出现了零实部的特征根，则方程组零解稳定性不定

Proof. (1) 不妨设初始 $t_0=0$，设 $\vec{\Phi}(t)$ 是方程组的标准基解矩阵，则满足初值条件 $\vec{y}(t_0)=\vec{y}_0$ 的解 $\vec{y}(t)=\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{y}(t_0)$

由 $\vec{A}$ 的特征根均有负实部，$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\vec{\Phi}(t)\|=0$

$\exists t_1>0$, s.t. $t>t_1$ 时 $\|\vec{\Phi}(t)\|<1$

$\forall \varepsilon>0$, 当 $\|\vec{y}_0\|<\underset{=\varepsilon}{\delta}$ 时, $\forall t\geq t_1$, $\|\vec{y}(t)\|=\|\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{y}(t_0)\|\leq\|\vec{y}(t_0)\|<\varepsilon$

当 $t\in[0,t_1]$ 时, $\exists\,\delta_1>0$ s.t. $\|\vec{y}(t_0)\|<\delta$ 时 $\|\vec{y}(t)-0\|<\varepsilon$

因此取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当 $\|\vec{y}(t_0)\|<\delta$ 时，$\|\vec{y}(t)\|<\varepsilon$, $t\in[0,+\infty)$

即零解稳定

又由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\vec{\Phi}(t)\cdot\vec{y}(t_0)=\vec{0}$，零解渐近稳定

(2)、(3) 同理可证

例1
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=6x-6y\end{cases}$$

Solu. $\begin{cases}9x-6y=0\\6x-6y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 为驻定解

$\begin{cases}\lambda_1=6\\\lambda_2=-3\end{cases}\Rightarrow$ 零解不稳定

例2
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2\end{cases}$$

~~Solve~~.

2. 常系数非线性微分方程组

$$\vec{y}' = \vec{A}\vec{y} + \vec{R}(\vec{y})$$

其中 $\vec{R}(\vec{0}) = \vec{0}$ 且满足 $\lim\limits_{\|\vec{y}\|\to 0} \frac{\|\vec{R}(\vec{y})\|}{\|\vec{y}\|} = 0$

显然 $\vec{y} = \vec{0}$ 是驻定解

Thm 2. 若方程组 $\vec{y}' = \vec{A}\vec{y}$ 的系数矩阵 $\vec{A}$ 的特征根不含零实部，则非线性方程组 $\vec{y}' = \vec{A}\vec{y} + \vec{R}(\vec{y})$ 的稳定性与其线性近似方程组 $\vec{y}' = \vec{A}\vec{y}$ 的稳定性一致，即：

(1) 若 $\vec{A}$ 的所有特征根均具有严格负实部，则方程组零解渐近稳定；

(2) 若 $\vec{A}$ 的某特征根为正实部，则方程组零解不稳定

考虑例2：有驻定解 $(0,0), (1,2), (2,1)$

(1) $(0,0)$ $\vec{R}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 4xy - 5x^2 \\ -5xy + 4y^2 \end{pmatrix}$，$\vec{R}(\vec{0}) = \vec{0}$

线性近似：$\begin{cases} x' = 9x - 6y \\ y' = 6x - 6y \end{cases}$ $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3$ 零解不稳定

(2) $(1,2)$ 令 $\begin{cases} \xi = x - 1 \\ \eta = y - 2 \end{cases}$，$\vec{R}((\xi,\eta)) = \begin{pmatrix} 4\xi\eta - 5\xi^2 \\ -5\xi\eta + 4\eta^2 \end{pmatrix}$

线性近似：$\begin{cases} \xi' = 7\xi - 2\eta \\ \eta' = -4\xi + 5\eta \end{cases}$ $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$ 零解不稳定

(3) $(2,1)$ 同理可得渐近稳定

例3 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8\sin y \\ \frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - \cos y \end{cases}$

Solve. 零解 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 线性近似 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y + g_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + g_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$，零解渐近稳定

Rem. n 很大，$\vec{A}$ 的特征根不易求，但可判断特征根实部是否均为负从而判断零解的渐近稳定性.（Hurwitz 定理）

Thm. 给定常系数n次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

$a_0 > 0$，作行列式

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \cdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1}$$

其中 $a_i = 0\ (\forall i > n)$

则方程 $a_0\lambda^n + \cdots + a_n = 0$ 均有负实部根 $\Leftrightarrow \Delta_j > 0,\ j = 1, \cdots, n$

例4 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - z + x^2e^x \\ \frac{dy}{dt} = x - y + x^3y + z^2 \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z - e^x(y^2 + z^2) \end{cases}$

Solu. 线性近似 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = x - y \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$ $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

特征方程 $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$

由Hurwitz定理，$\Delta_1 = a_1 = 4 > 0$，$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17 > 0$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$$

因此方程组具有负实部根，即解渐近稳定

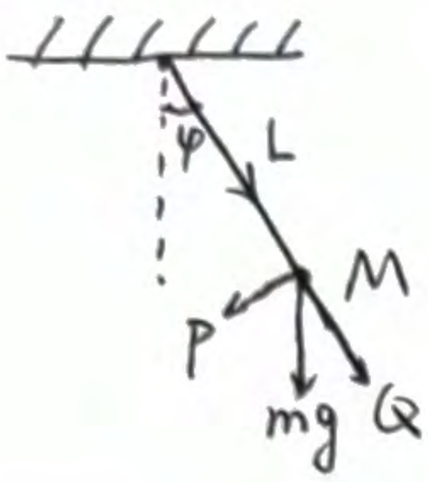
§6.2 V函数方法

一、Lyapunov定理

1. 处理方法

$$\begin{cases}\text{第一方法：微分方程的级数解}\\ \text{第二方法：借助Lyapunov函数}V(\vec{x})\text{和}\frac{dV}{dt}\text{符号推断稳定性}\end{cases}$$

2. 引例



有阻力的数学摆：

(1) $m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$, $v=l\frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

(2) $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$（系数为$\mu>0$）

(3) 化为一阶方程组：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x-\frac{\mu}{m}y\end{cases}\qquad \text{线性近似：}\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}x-\frac{\mu}{m}y\end{cases}$$

特征方程 $\lambda^2+\frac{\mu}{m}\lambda+\frac{g}{l}=0$

特征根 $\lambda_{1,2}=-\frac{\mu}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{\mu}{m})^2-\frac{4g}{l}}$，零解稳定

(4) 若无阻力：$\mu=0$时方程组变为 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin x\end{cases}$

不能由线性近似方程组的稳定性判断

实际上，$y\,dy=-\frac{g}{l}\sin x\,dx$

取 $V=\frac{1}{2}y^2+\frac{g}{l}(1-\cos x)$，$V(0,0)=0$，$V(x,y)>0$ $|x|<\pi$

又 $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0$

3. Lyapunov函数

Def 1. 设$V(\vec{x})$为在域$\|\vec{x}\|\le H$内定义的连续函数，$V(\vec{0})=\vec{0}$，

若在域内恒有$V(\vec{x})\geq 0$，则V为常正.

若$\forall\vec{x}\neq\vec{0}$恒有$V(\vec{x})>0$，则V为定正.

若 $-V$ 是定正的，则 V 是定负的.（常负可类似定义）

Rem. 既不是常正也不是常负的函数称为变号函数

例1 $V(x,y)=(x+y)^2$ 常正，$V(x,y)=(x+y)^2+y^4$ 定正

$V(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在 $0<x^2+y^2<\pi$ 上定正

例2 $V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$

$a>0$，$4ac-b^2>0$ 时 $V(x,y)$ 定正

$a<0$，$4ac-b^2>0$ 时 $V(x,y)$ 定负

4. 非线性驻定微分方程组零解的稳定性

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$$

其中 $\vec{f}(\vec{0})=\vec{0}$，$\vec{f}(\vec{x})$ 在定义在 $G:\|\vec{x}\|\le A\ (A>0)$ 上有连续偏导数

Def 2.（Lyapunov 函数的全导数）

假设 $V(\vec{x})$ 关于全部变量的偏导数均连续，则有：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i$$

称 $\frac{dV}{dt}$ 为 V 函数通过方程的全导数

Thm. 对于方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})$，

(1) 若有定正函数 $V(\vec{x})$ 通过方程的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 常负或恒等于 0，则方程组的零解稳定

(2) 若有定正函数 $V(\vec{x})$ 通过方程的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 定负，则方程组的零解渐近稳定

(3) 若 $V(\vec{x})$ 不常负，$\frac{dV}{dt}$ 定正，则方程组的零解不稳定

(4) 若 $\exists\, V(\vec{x})$ 和非负常数 μ，$\frac{dV}{dt}$ 可表示为 $\frac{dV}{dt}=\mu V+W(\vec{x})$

且 $\mu=0$ 时 W 定正，$\mu\neq0$ 时 W 常正或恒等于 0

又在 $\vec{x}=\vec{0}$ 的任意小邻域内 $\exists\, \vec{x}^*$ s.t. $V(\vec{x}^*)>0$，则方程组零解不稳定.

Rem. 相空间：不含自变量，仅由未知函数构成的空间

相平面：二维相空间

轨线：微分方程的解在相空间中的轨迹

（t增加的方向为轨线正向）

例3 考虑微分方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+ax^3\\ \frac{dy}{dt}=x+ay^3\end{cases}$ 的零解的稳定性

Solu. 线性近似 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$ $\vec{A}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\lambda=\pm i$

取 $V(x,y)=x^2+y^2$

此时 $\frac{dV}{dt}=2a(x^4+y^4)$

若 $a<0$，则 $\frac{dV}{dt}$ 定负，方程组零解渐近稳定

若 $a>0$，则 $\frac{dV}{dt}$ 定正，方程组零解不稳定

若 $a=0$，则 $\frac{dV}{dt}\equiv 0$，方程组零解稳定

Thm. 若存在定正函数 $V(\vec{x})$，其全导数 $\frac{dV}{dt}$ 常负，且使 $\frac{dV}{dt}=0$ 的集合中除 $\vec{x}=\vec{0}$ 不含方程组的整条正半轨线，则方程组零解渐近稳定.

例4 讨论方程组 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y-y^3\end{cases}$ 零解稳定性

Solu. 取 $V(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2$

则 $\frac{dV}{dt}=V_x\cdot y+V_y\cdot(-2x-3y-y^3)=-3y^2-y^4\leq 0$ 常负

零解稳定

$\frac{dV}{dt}=0$ 的集合 $\{(x,y)\mid y=0\}$ 除 $\vec{x}=\vec{0}$ 外不是轨线

因此渐近稳定

例5 构造二次型V函数证明 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-xy^2\\ \frac{dy}{dt}=-y-yx^2\end{cases}$ 零解渐近稳定

Solu. 取 $V(x,y)=x^2+y^2$，$\frac{dV}{dt}$ 定负，零解渐近稳定

例6 讨论下列方程组的稳定性：

(1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -y - \sin x \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha y^3 \\ \frac{dy}{dt} = -\beta x^3 \end{cases}$, $\alpha\beta > 0$

Solve. (1) $V = 1 - \cos x + \frac{1}{2}y^2$

$\frac{dV}{dt} = \sin x \cdot y + y \cdot (-y - \sin x) = -y^2 \leq 0$ 常负，零解稳定

另取 $V(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4(1 - \cos x)$

$\frac{dV}{dt} = -2y^2 - 2x\sin x \leq 0$ 定负，零解渐近稳定

(2) $V(x,y) = \beta x^4 + \alpha y^4$，假设 $\alpha, \beta > 0$

$\frac{dV}{dt} = 0$，常负，零解稳定，但不是渐近稳定的

§6.3 奇点

一、平面一阶驻定微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=X(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}$$

其中 $X(x,y),Y(x,y)\in C^{(1)}$，且 $X^2+Y^2\neq 0$

1、奇点

相图：轨线族在相平面上的图像

奇点：微分方程组有 $\begin{cases}X(x,y)=0\\ Y(x,y)=0\end{cases}$ 的解 $\begin{cases}x=x^*\\ y=y^*\end{cases}$ 表示为相空间中的点，

(x^*,y^*) 一定满足 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=X(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=Y(x,y)\end{cases}$，故称为平衡解（驻定解）或

称为奇点（平衡点）

例 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$ 对应奇点 $(0,0)$ 特解过 $(0,1,0)$：$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$

(1) 在 (t,x,y) 三维空间中，积分曲线为螺旋线

上述解在 xOy 平面的轨线是圆，恰为上述积分曲线在 xOy 平面的投影，方向取逆时针

(2) $\forall\alpha$，$\begin{cases}x=\cos(t+\alpha)\\ y=\sin(t+\alpha)\end{cases}$ 也是方程组的解，轨线也为 $x^2+y^2=1$

(3) 方程组有通解 $\begin{cases}x=A\cos(t+\alpha)\\ y=A\sin(t+\alpha)\end{cases}$，对应轨线族 $x^2+y^2=A^2$

特别地，$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 也是解，轨线对应原点

2. 积分曲线与轨线

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)} \text{ 或 } \frac{dx}{dy}=\frac{X(x,y)}{Y(x,y)}$$

驻定方程的积分曲线可看成方程组的轨线

Rem. (i) 相平面上方程组的轨线不能相交

(ii) 作变换 $\begin{cases}\bar{x}=x-x^*\\ \bar{y}=y-y^*\end{cases}$，则 $\begin{cases}\frac{d\bar{x}}{dt}=F(\bar{x},\bar{y})\\ \frac{d\bar{y}}{dt}=G(\bar{x},\bar{y})\end{cases}$ 奇点为 $(0,0)$.

二、平面线性驻定微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax+by \\ \frac{dy}{dt} = cx+dy \end{cases}$$

讨论其奇点 $(0,0)$ 及周围轨线的性态.

1. 奇点

显然 $(0,0)$ 是奇点

若 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$，则 $(0,0)$ 为系统的唯一奇点，记为初等奇点

若 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$，则系统无孤立奇点，记为高阶奇点(奇线)

下面仅考虑初等奇点

2. 化为标准型平面线性系统

利用线性变换将方程组化为标准型，利用标准型的解确定轨线分布，之后再考虑其在奇点附近的轨线分布.

由Jordan标准型，$\exists\, T$ 非奇异 s.t. $T^{-1}AT$ 化为下列四种之一：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ 均为实数

Rem. (i) A 的特征方程 $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$.

记 $p=-(a+d)$，$q=ad-bc$，$\Delta=p^2-4q$

特征根 $\lambda=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ (记为 λ 和 μ)

① 相异实根 λ,μ： $J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

② 相等实根 λ,μ： $J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

③ 复根 λ,μ： $J=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

(ii) 作变换 $\vec{x}=T\vec{y}$，则 $\vec{y}=T^{-1}\vec{x}$，则方程变为：$\frac{d\vec{y}}{dt}=T^{-1}AT\vec{y}$

因此根据Jordan标准型判断奇点类型即可.

3. 标准型平面线性系统奇点的类型

(1) λ,μ 为不同的同号实根 ($\Delta>0$, $q>0$)

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\lambda x\\ \frac{dy}{dt}=\mu y\end{cases}$$ 通解为 $$\begin{cases}x=C_1e^{\lambda t}\\ y=C_2e^{\mu t}\end{cases}$$

$C_1=C_2=0$, 对应 $(0,0)$

$C_1=0, C_2\neq 0$, 对应 y 轴正负半轴

$C_1\neq 0, C_2=0$, 对应 x 轴正负半轴

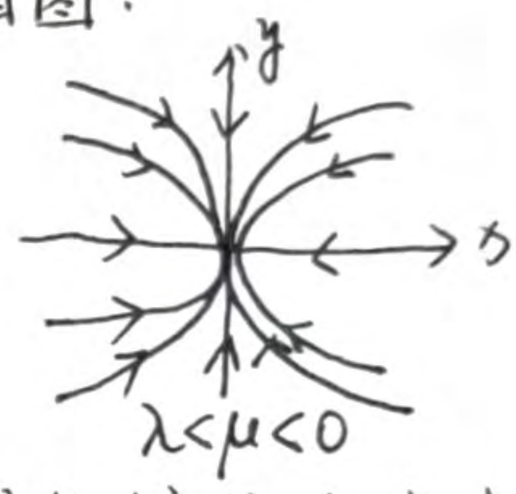
$C_1\neq 0, C_2\neq 0$, 若 $\lambda<0, \mu<0$, 消去 t 得 $y=C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}$ $(p>0)$

$\mu<\lambda$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}=0$, 轨线切 x 轴趋于奇点 $(0,0)$

$\mu>\lambda$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}=\infty$, 轨线切 y 轴趋于奇点 $(0,0)$

又由 $(0,0)$ 渐近稳定, 相图:

$\mu<\lambda<0$

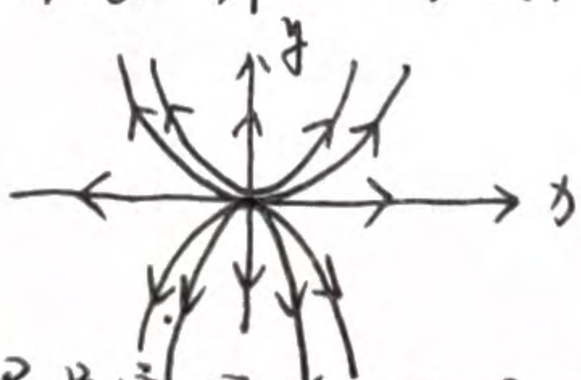


$\lambda<\mu<0$

结点: 所有轨线趋于奇点, 且除有部分轨线外在奇点处有公共切线, 其邻域内轨线具有这种性态的奇点为结点.

若方程组零解渐近稳定, 则称为稳定结点, 反之不稳定结点.

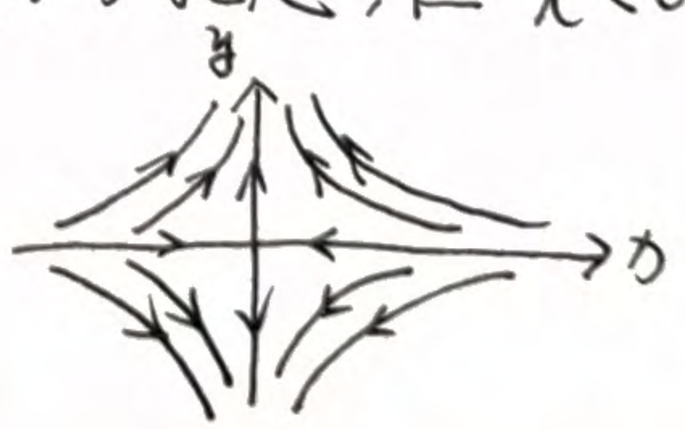
若 $\lambda>0, \mu>0$, 类似有相应结果 $(p<0)$



(2) λ,μ 为不同的异号实根 ($\Delta>0$, $q<0$)

若 λ,μ 不同号: 坐标轴仍为轨线, 但 $\frac{\mu}{\lambda}<0$

$\mu<0<\lambda$



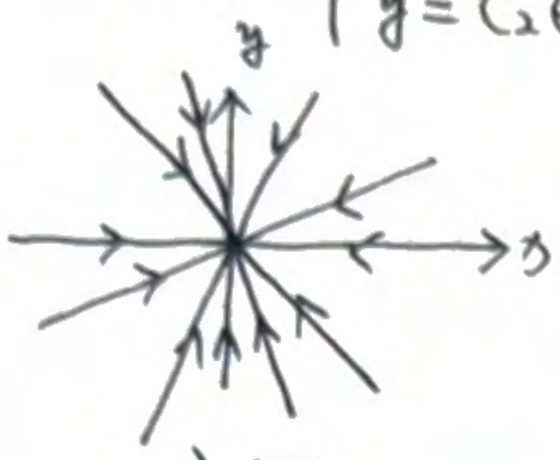
$\lambda<0<\mu$

鞍点：在奇点的邻域内方程的轨线图貌如鞍形，则奇点为鞍点。（鞍点均不稳定）

(3) $\lambda=\mu$ 为重根 ($\Delta=0$, $q>0$)

① $J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

通解为 $\begin{cases}x=c_1e^{\lambda t}\\ y=c_2e^{\lambda t}\end{cases}$，$y=cx$，轨线为过(0,0)的射线



$\lambda<0$

$\lambda>0$

奇结点：轨线均沿确定方向趋近(远离)奇奇点，且不同轨线切向不同（$\lambda<0$ 稳定，$\lambda>0$ 不稳定）

② $J=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

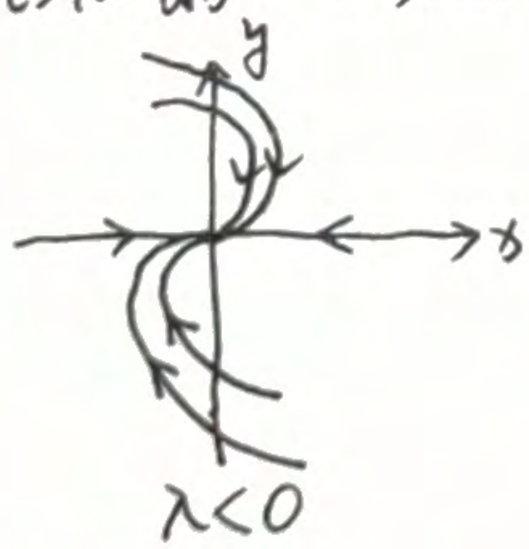
通解为 $\begin{cases}x=(c_1t+c_2)e^{\lambda t}\\ y=c_1e^{\lambda t}\end{cases}$

$\lambda<0$ 时 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$，零解渐近稳定

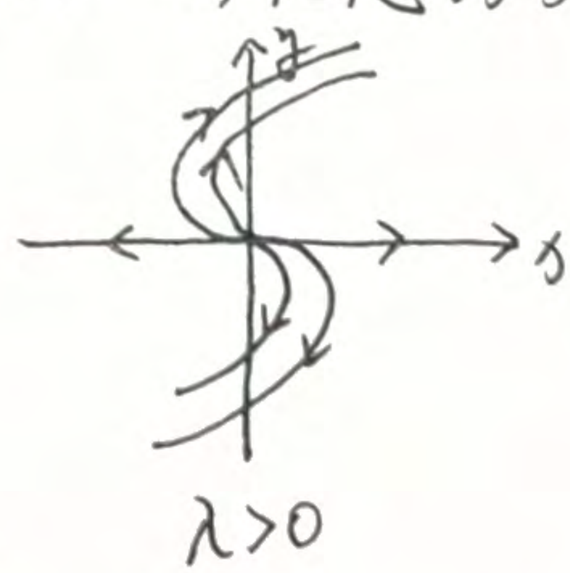
$c_1=c_2=0$：对应奇点(0,0)

$c_1=0, c_2\neq0$：对应 x 轴正负半轴，但 y 轴不再是轨线

$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}=0$，且 $t=-\frac{c_2}{c_1}$ 时 $x(t)=0$，轨线切 x 轴于原点



$\lambda<0$



$\lambda>0$

$\lambda>0$ 时令 $t\to-\infty$ 结论类似

退化结点：所有轨线都沿一个方向趋于奇点，其附近轨线均具有这种性态的奇点称为退化结点。（$\lambda<0$ 时稳定，$\lambda>0$ 时不稳定）

(4) λ,μ 为共轭复根 $\lambda=\alpha+i\beta$, $\mu=\alpha-i\beta$, $\beta\neq0$ ($\Delta<0$, $q>0$)

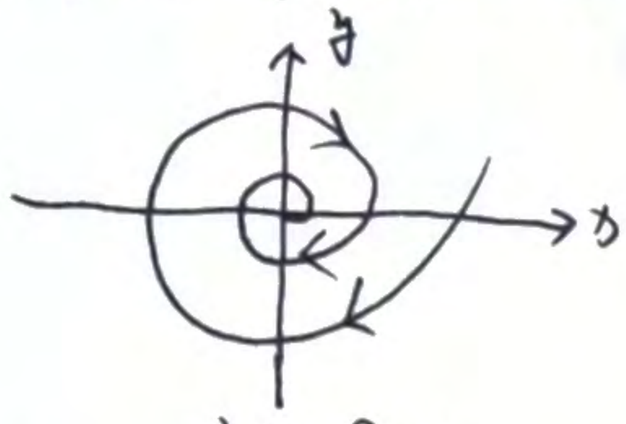
标准型为 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y\\ \frac{dy}{dt}=-\beta x+\alpha y\end{cases}$

取极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}\frac{dr}{dt}=\alpha r\\ \frac{d\theta}{dt}=-\beta\end{cases}$

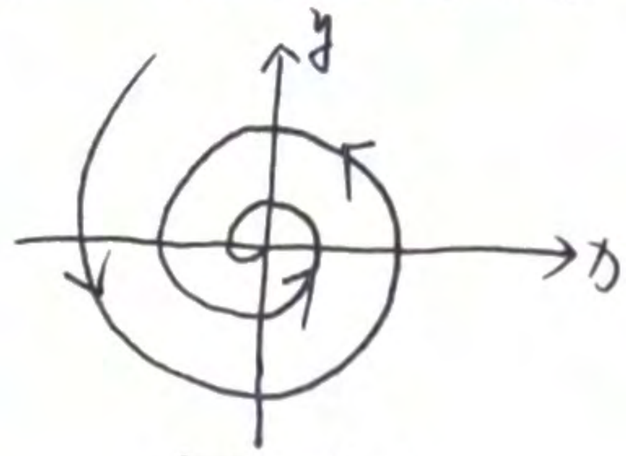
① $\alpha\neq0$

解得 $\begin{cases}r(t)=r_0e^{\alpha t}\\ \theta(t)=-\beta t+\theta_0\end{cases}$，其中 r_0,θ_0 任常且 $r_0>0$

消去 t 有 $r(\theta)=Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\theta}$，一族对数螺线

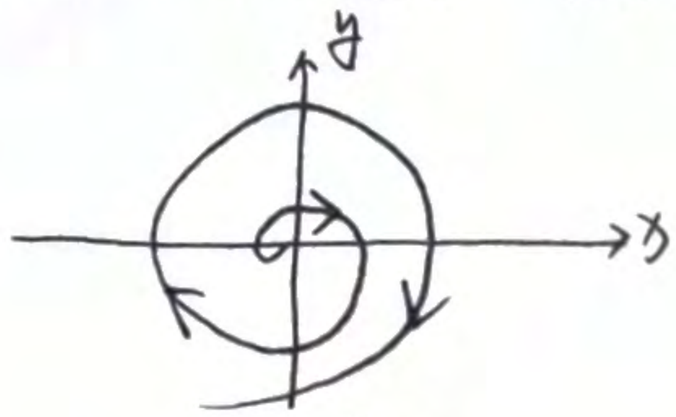


$\alpha<0,\beta>0$

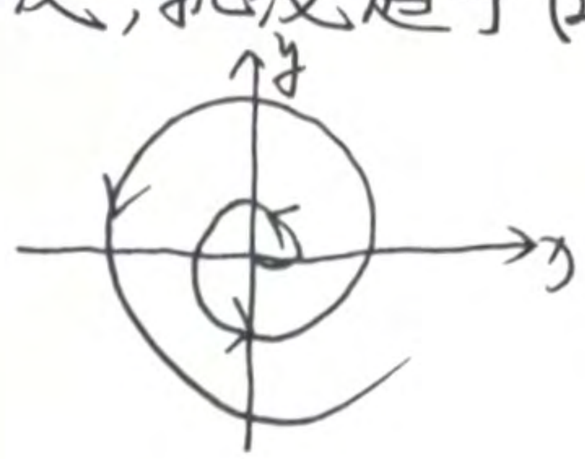


$\alpha<0,\beta<0$

焦点：轨线为一族对数螺线，轨线趋于（远离）奇点，



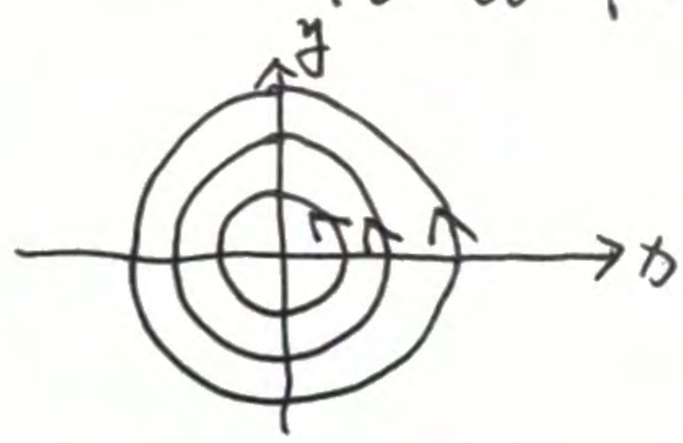
$\alpha>0,\beta>0$



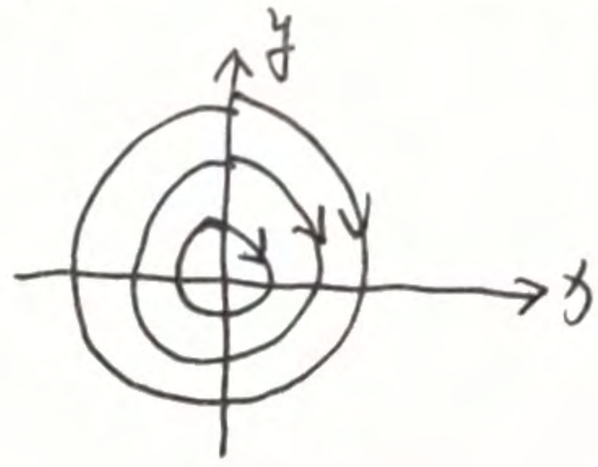
$\alpha>0,\beta<0$

② $\alpha=0$

通解为 $\begin{cases}r=r_0\\ \theta=\theta_0-\beta t\end{cases}$，一族以原点为中心的同心圆



$\beta<0$



$\beta>0$

中心：轨线为以奇点为中心的同心圆，此时奇点称为中心。

中心是稳定奇点，但不渐近稳定

总结：对于线性系统 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=ax+by\\ \frac{dy}{dt}=cx+dy\end{cases}$，$\det\vec{A}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$

记 $p=-(a+d)$，$q=ad-bc$，$\Delta=p^2-4q$

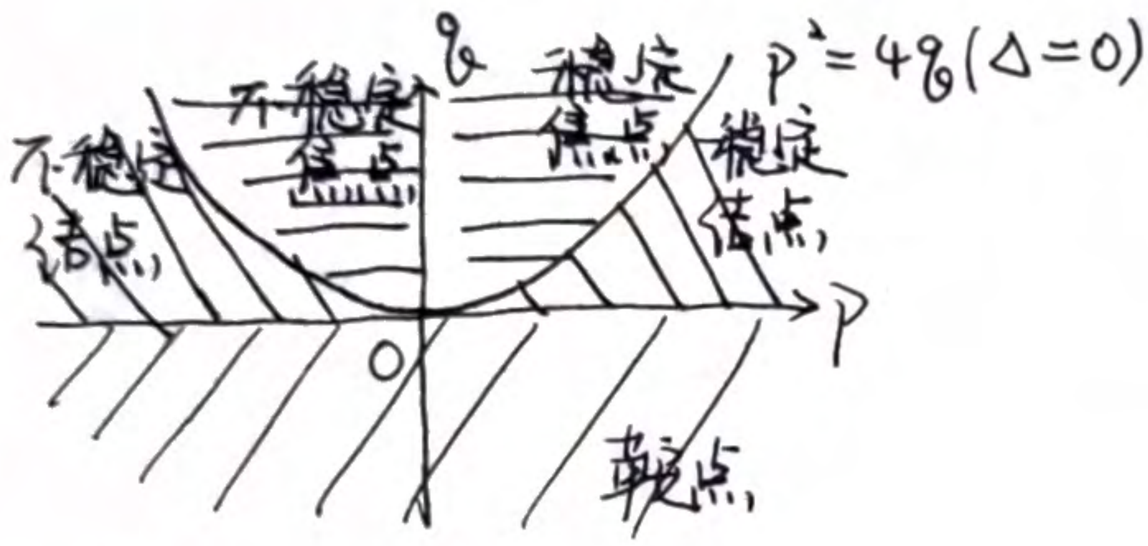
(1) 当 $q<0$ 时　$O(0,0)$ 为鞍点

(2) 当 $q>0$ 时　$\Delta>0$，则 $O(0,0)$ 为结点，$p>0$ 时为稳定结点，
$p<0$ 时为不稳定结点，

$\Delta=0$，则 $O(0,0)$ 为奇结点，或退化结点，
$p>0$ 时为稳定的奇结点，或退化结点，
$p<0$ 时为不稳定的奇结点，或退化结点，

$\Delta<0$，$p\neq 0$ 时 $O(0,0)$ 为焦点，$p>0$ 时为稳定焦点，
$p<0$ 时为不稳定焦点，

$p=0$ 时 $O(0,0)$ 为中心（稳定但不渐近稳定）



例1　$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$

Solve. 作变换 $\frac{dx}{dt}=y$，化为 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y\end{cases}$

$\det\vec{A}=2>0$

$q=2>0$，$p=-(a+d)=3>0$，$\Delta=p^2-4q=1>0$

因此奇点 $(0,0)$ 是稳定的结点

相图：

令 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=kx}$ 为轨线的切线斜率，则 $k=\frac{-2-3k}{k}$，$k=-1$，$k=-2$

不变直线 $y=-x$，$y=-2x$

例2 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=6x+y\\ \frac{dy}{dt}=-5x\end{cases}$

Solve. $(0,0)$奇点,

$q=ad-bc=5>0,\ p=-(a+d)=-6<0,\ \Delta=p^2-4q=16>0$

因此 $O(0,0)$ 为不稳定结点,

齐次方程不变直线 $y=-x,\ y=-5x$, 通解 $c(x+5)^5=5x+y$

$\begin{cases}x(t)=c_1e^t+c_2e^{5t}\\ y(t)=-5c_1e^t-c_2e^{5t}\end{cases}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-5c_1e^t-5c_2e^{5t}}{c_1e^t+5c_2e^{5t}}\ (t\to\pm\infty,\ \frac{dy}{dx}\to-5)$

例3 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-4x-y-2\\ \frac{dy}{dt}=2x-y+4\end{cases}$

Solve. $\begin{cases}-4x-y-2=0\\ 2x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^*=-1\\ y^*=2\end{cases}\xrightarrow{\begin{cases}\xi=x+1\\ \eta=y-2\end{cases}}$ 方程组 $\begin{cases}\frac{d\xi}{dt}=-4\xi-\eta\\ \frac{d\eta}{dt}=2\xi-\eta\end{cases}$

$q=ad-bc=6>0,\ p=-(a+d)=5>0,\ \Delta=p^2-4q=1>0$

为稳定结点, 因此 $(-1,2)$ 为稳定结点,

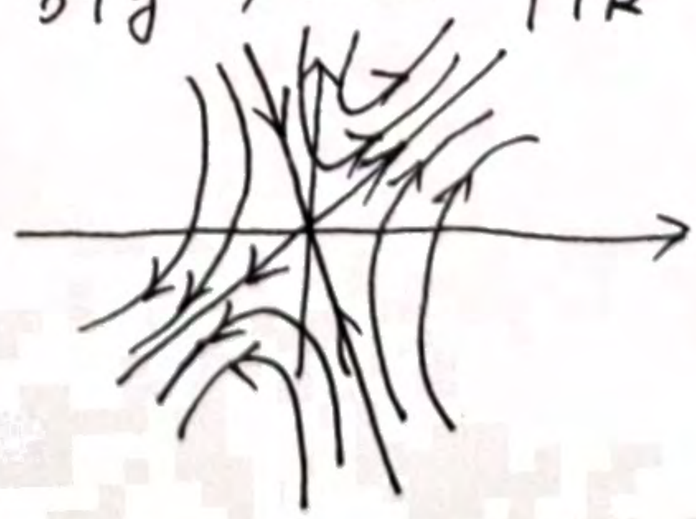
例4 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y\\ \frac{dy}{dt}=4x-2y\end{cases}$

$q=ad-bc=-6<0,\ p=-(a+d)=1>0,\ \Delta=p^2-4q=25>0$

$O(0,0)$ 为鞍点,

有不变直线 $\frac{dy}{dx}=\frac{4x-2y}{x+y}$, $k=\frac{4-2k}{1+k}$, $k_1=-4,\ k_2=1$

$\Rightarrow\begin{cases}y=-4x\\ y=x\end{cases}$



例5 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

Solve. $q = ad - bc = 3 > 0$, $p = -(a+d) = -2 < 0$, $\Delta = p^2 - 4q = -8 < 0$

$O(0,0)$ 为不稳定焦点