Aspectos Formais da Computacao – 1ª Lista de Exercícios

1. Seja o alfabeto $\Delta = \{□\}$ e considere a cadeia z = □□ sobre o alfabeto Δ.
   Escreva as cadeias zz, z^3, z^0 e determine seus comprimentos.
   Escreva o fecho de Δ.

2. Seja o alfabeto $\Gamma = \{ 0, 1\}$ e considere as cadeias x = 01 e y = 110 sobre o alfabeto Γ. Escreva as cadeias xy, xyx, $(xy)^2$ e $(yxx)^0$. Escreva os conjuntos Γ^2, Γ^* e Γ^+.

3. Construir uma gramática que gere a linguagem
   $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid$ w contém o mesmo número de a's, b's e c's$\}$
   Qual é o tipo da gramática que você construiu ?

4. Construir uma gramática que gere a linguagem regular
   $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ w contém um número par de 0's e um número par de 1's $\}$

5. Classificar as gramáticas abaixo em Estrutura de Frase, Sensível ao Contexto, Livre de Contexto ou Regular e forneça a linguagem gerada por cada uma delas.

$G_1 = < N_1, \Sigma_1, P_1, S >$
$N_1 = \{S, A, B\}$
$\Sigma_1 = \{ 0, 1\}$
$P_1 = \{ S \rightarrow 0A,$
$S \rightarrow 1B,$
$A \rightarrow 0A,$
$A \rightarrow 0,$
$B \rightarrow 1B,$
$B \rightarrow 1 \}$

$G_2 = < N_2, \Sigma_2, P_2, S >$
$N_2 = \{S, A, X, Y\}$
$\Sigma_2 = \{ a, b, c\}$
$P_2 = \{ S \rightarrow aA,$
$A \rightarrow aS,$
$S \rightarrow X,$
$aX \rightarrow Y,$
$Y \rightarrow Yb,$
$Y \rightarrow b,$
$aab \rightarrow c\}$

$G_3 = < N_3, \Sigma_3, P_3, S >$
$N_3 = \{S, X\}$
$\Sigma_3 = \{ a, b, c\}$
$P_3 = \{ S \rightarrow aXa,$
$X \rightarrow bX,$
$aX \rightarrow ac,$
$Xa \rightarrow ca,$
$X \rightarrow Xb \}$

$G_4 = < N_4, \Sigma_4, P_4, S >$
$N_4 = \{S, A \}$
$\Sigma_4 = \{ a, b \}$
$P_4 = \{ S \rightarrow AA,$
$S \rightarrow a,$
$A \rightarrow SS,$
$A \rightarrow b \}$

6. Construir uma gramática que gere a linguagem livre de contexto
   $$L = \{ a^n b^m c^n \mid n,m \geq 0\}$$
7. Construir gramáticas regulares para as linguagens regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ dadas a seguir.
   a) $L_1 = 0^+1^+ = \{ 0^n 1^m \mid n,m > 0 \}$
   b) $L_2 = 0^*1^* = \{ 0^n 1^m \mid n,m \geq 0 \}$
   c) $L_3 = (01)^+ = \{ (01)^n \mid n > 0 \}$
8. Construir uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ w \mid w \in \{ (\, ,\,) \}^* \text{ e } w \text{ está balanceada } \}$$

Uma cadeia está balanceada se satisfazer todas as condições abaixo:

a) $w = \varepsilon$ está balanceada.
b) se w está balanceada, então (w) está balanceada.
c) se x e y são cadeias balanceadas, então xy também está balanceada.
d) nenhuma outra cadeia está balanceada.

9. Seja $G = < N, \Sigma, P, S >$ uma gramática onde todas as regras de produção são da forma $A \rightarrow u\, B$ ou $A \rightarrow u$, onde $A,B \in N$ e $u \in \Sigma^*$. Mostre que L(G) é uma linguagem regular.

<u>Sugestão:</u>

Construa, de maneira genérica, uma gramática regular que seja equivalente a G.

10. Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ a^i b^j a^i b^j \mid i,j \geq 0 \text{ e } i+j > 0 \}$$

11. Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ w\, w \mid w \in \{ 0, 1 \}^* \}$$

12. Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ a^{n^2} \mid n \geq 0 \}$$

13. (<u>*solução*</u>) Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ a^{2^n} \mid n \geq 0 \}$$

14. Construa uma gramática livre de contexto que gere a linguagem

$$L = \{ w \in \{ a, b \}^* \mid \text{nro-a's}(w) = \text{nro-b's}(w) \}$$

15. Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ w \in \{ 0, 1\}^* \mid w \text{ não contém dois 1's consecutivos} \}$$

16. Construa uma gramática que gere a linguagem

$$L = \{ a^n\, b^{2n} \mid n > 0 \}$$

Exercícios Resolvidos

13. Desejamos descrever uma gramática G = < N, Σ, P, S > que gere a linguagem que contém sentenças formadas por símbolos 'a' e que o número de a's seja a potência de 2 de um número natural n. Vejamos,

valor de n	teremos a sentença
0	a
1	aa
2	aaaa
3	aaaaaaaa
4	aaaaaaaaaaaaaaaa
...	

Notando a formação das sentenças da linguagem, podemos falar que a linguagem L pode ser definida recursivamente por:

1- a sentença a ∈ L.
2- se x é uma sentença de L, então xx também é uma sentença de L
3- nenhuma outra sentença pertencerá à linguagem L.

Com estas idéias em mente, posso pensar na gramática G tendo produções que gere uma forma sentencial válida, e a partir daí dobra-se o número de a's ou gera uma sentença terminal.

Então, seja G = < N, Σ, P, S > onde
N = {♣, +, ∗, &, A, S }
Σ = { a }
P = { 1. S → ♣ A ♣ /* gera a forma sentencial inicial */ ,

2. ♣ A → a /* */ ,
3. a A → a a /* obtém a cadeia terminal a partir da forma */ ,
4. a ♣ → a /* sentencial */ ,

5. ♣ A → + * a /* indica que deve dobrar o símbolo a sua direita */ ,
6. * A → A A * /* até atingir o símbolo de fim ♣ */ ,
7. A * ♣ → & A ♣ /* */ ,

8. A & → & A /* retorna à configuração inicial */ ,
9. + & → ♣ /* */ }

Para provar que G gera a linguagem L, temos que:
S ⇒ ♣ A ♣ (pela regra 1)

nesta forma sentencial, posso aplicar a regra 2 (para finalizar a sentença) ou aplicar a regra 5 (para dobrar o número de a's).

Utilizando a regra 2, temos ♣ A ♣ $\Rightarrow$ a ♣ e pela regra 4 temos que a ♣ $\Rightarrow$ a, que é uma sentença da linguagem , ou seja,

S $\Rightarrow$ ♣ A ♣ $\Rightarrow$ a ♣ $\Rightarrow$ a

Utilizando a regra 5, temos que ♣ A ♣ $\Rightarrow$ + * A ♣, e então a única regra que se aplica é a regra 6, e então

+ * A ♣ $\Rightarrow$ + A A * ♣ pela regra 6
+ A A * ♣ $\Rightarrow$ + A & A ♣ pela regra 7
+ A & A ♣ $\Rightarrow$ + & A A ♣ pela regra 8
+ & A A ♣ $\Rightarrow$ ♣ A A ♣ pela regra 9

e temos novamente terminado a duplicação de a's da forma sentencial, podendo usar novamente a regra 2 (para gerar a sentença) ou a regra 5 (para dobrar o número de a's).

Podemos por meio destes passos dizer que a gramática G gera sentenças da linguagem L e apenas sentenças da linguagem L.