Tutoriel HPP : solutions

Florent Lamiraux et Steve Tonneau
CNRS-LAAS, Toulouse, France

1 Calcul des coefficients de la trajectoire polynomiale de la sortie plate

On note $P(t) = \sum_{i=0}^{d} t^i P_i$ le polynôme P où

— l'entier d est le degré du polynôme,

— les coefficients P_i sont à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

Etant données deux configurations définies par les vecteurs $(x_0, y_0, c\theta_0, s\theta_0, \zeta_0)$ et $(x_1, y_1, c\theta_1, s\theta_1, \zeta_1)$, pour que la courbe P définisse une trajectoire de la voiture entre ces deux configurations, il suffit que :

$$P(0) = (x_0, y_0) \tag{1}$$
$$\dot{P}(0) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) \tag{2}$$
$$\ddot{P}(0) = \kappa_0(-\sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \tag{3}$$
$$P(1) = (x_1, y_1) \tag{4}$$
$$\dot{P}(1) = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \tag{5}$$
$$\ddot{P}(1) = \kappa_1(-\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \tag{6}$$

Cela correspond à 12 équations (6 pour chaque coordonnée x, y) linéaires sur les coefficients de P. Rappelons que

$$\kappa_0 = \frac{\tan \zeta_0}{l} \qquad \kappa_1 = \frac{\tan \zeta_1}{l}$$

Le degré $d = 5$ devrait permettre de trouver une solution.

Exprimons les dérivées de P :

$$P(t) = P_0 + tP_1 + t^2P_2 + t^3P_3 + t^4P_4 + t^5P_5$$
$$\dot{P}(t) = P_1 + 2tP_2 + 3t^2P_3 + 4t^3P_4 + 5t^4P_5$$
$$\ddot{P}(t) = 2P_2 + 6tP_3 + 12t^2P_4 + 20t^3P_5$$

Ces expressions, combinées avec les contraintes (1-6), donnent les équations suivantes sur les coefficients de P :

$$\begin{aligned} P_0 &= (x_0, y_0) \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 &= (x_1, y_1) \\ P_1 &= (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0)) \\ P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 &= (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \\ 2P_2 &= \kappa_0(-\sin(\theta_0), \cos(\theta_0)) \\ 2P_2 + 6P_3 + 12P_4 + 20P_5 &= \kappa_1(-\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \end{aligned}$$

Ce système linéaire admet une solution unique :

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \frac{\kappa_0}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix}$$

$$P_3 = 10 \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\kappa_0 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\kappa_1 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

$$P_4 = -15 \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\kappa_0 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix} - \kappa_1 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

$$P_5 = 6 \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\kappa_0 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_0) \\ \cos(\theta_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\kappa_1 \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$