Билет 11, Интерполяция сплайнами

3 июля 2020 г.

Команда

Устинов А.П.	M3336
Акифьев Д.А.	M3337
Акназаров А.Р.	M3336
Мещеряков Н.Д.	M3335
Осипов А.А.	M3336

Аннотация

Задача интерполяции - по заданному набору значений функции $f(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^N$ построить функцию $U(x)$, совпадающую с $f(x_i)$ в узлах x_i

1 Интерполяция сплайнами

Интерполяция сплайнами - это метод интерполяции, при котором исходная функция приближается не единым полиномом на всем отрезке $[a, b]$, а семейством различных полиномов $P_{n,i}(x)$ на отрезках между узлами $[x_{i-1}, x_i]$ со сращиванием этих функций в узлах с использованием двух условий.

$$S_n(x) = P_{n,i}(x), \text{ на } [x_{i-1}, x_i] \tag{1}$$

$$S_n(x),\ S'_n(x),\ \ldots,\ S_n^{(p)}(x) \text{ непрерывны на } [a, b] \tag{2}$$

Здесь в уравнении (1) задается $S_n(x)$ - так называемая сплайн-функция или же просто сплайн. *Степенью* сплайна называется максимальная степень многочленов $P_{n,i}(x)$, *Степень гладкости* сплайна - количество непрерывных производных p , а величина $n - p$ называется *дефектом* сплайна.

Важным замечанием является то, что данный метод позволяет избежать феномена Рунге, при котором при увеличении степени интерполяционного полинома, увеличивается его ошибка в междуузлиях. Это достигается тем, что для уменьшения интерполяционной ошибки, мы увеличиваем не степень полинома, а количество отрезков.

1.1 Линейный сплайн с дефектом 1

Типовым примером сплайна является кусочно-линейная интерполяция или сплайн степени 1 с дефектом 1. Он задается уравнениями

$$S_1(x) = P_{1,i}(x) = a_i + b_i(x - x_i) \text{ на } [x_{i-1}, x_i] \tag{3}$$

$$P_{1,i}(x_{i-1}) = y_{i-1}, P_{1,i}(x_i) = y_i,\ i = 1 \dots n$$

Решая которые, получим

$$P_{1,i}(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) \tag{4}$$

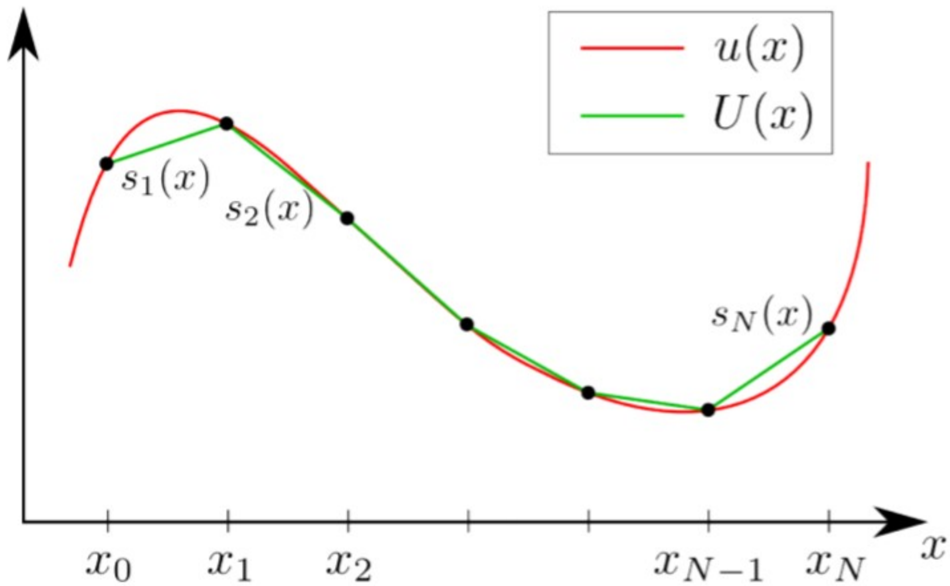

Рис. 1: $u(x)$ - исходная функция, $U(x)$ - кусочно-линейная интерполяция

2 Сплайны третьего порядка

Самыми распространенными являются кубические сплайны, имеющие имеют вид:

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \text{ на } [x_{i-1}, x_i] \tag{5}$$

$$P_{3,i}(x_{i-1}) = y_{i-1},\ P_{3,i}(x_i) = y_i,\ i = 1 \dots n$$

Форма записи (5) соответствует ряду Тейлора для $P_{3,i}$ в окрестности точки x_i, и она позволяет заключить, что

$$a_i = P_{3,i}(x_i),\ b_i = P'_{3,i}(x_i),\ c_i = P''_{3,i}(x_i),\ d_i = P'''_{3,i}(x_i)$$

Однако, система (5) задана двумя уравнениями относительно четырех неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, И чтобы решить ее, необходимо получить еще два уравнения для каждого промежутка $[x_{i-1}, x_i]$. Сделать это можно двумя способами.

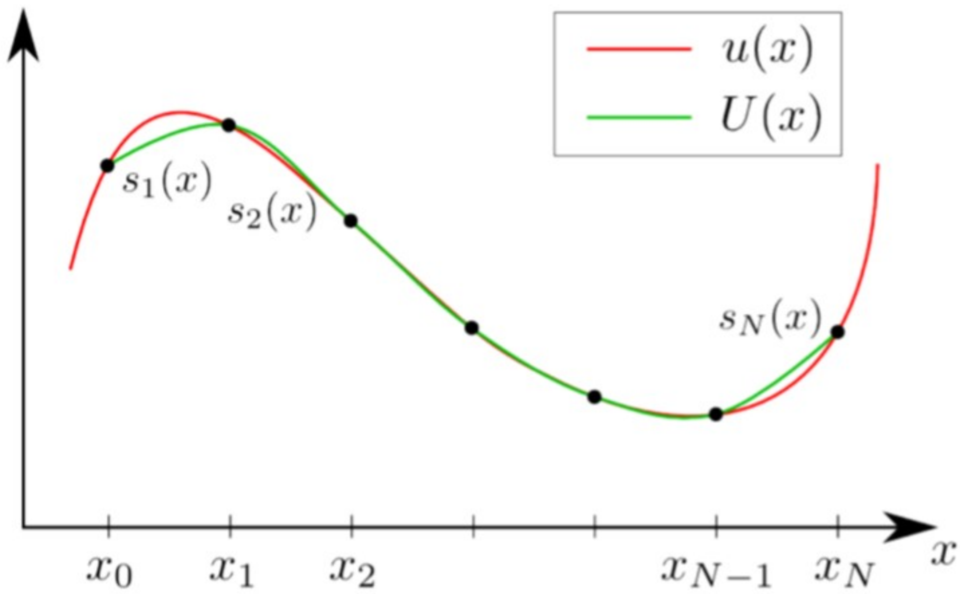

Рис. 2: Гладкая кусочно-кубическая интерполяция. $u(x)$ - исходная функция $U(x)$ - сплайн третьей степени

2.1 Локальная интерполяция

Первым способом будет явно задать для каждого x_i значения первой производной s_i (которые, как замечено ранее, равны b_i) интерполяционных полиномов $P_{3,i}$, которые достигаются на концах интервалов $[x_{i-1}, x_i]$.

$$P'_{3,i}(x_{i-1}) = s_{i-1} = b_{i-1},\ P'_{3,i}(x_i) = s_i = b_i,\ i = 1 \dots n \tag{6}$$

Из (6) выводится условие непрерывности первой производной функции S_3:

$$P'_{3,i}(x_{i-1}) = P'_{3,i+1}(x_i) = s_i = b_i,\ i = 1 \dots n-1$$

Решая систему уравнений (5) и (6), мы находим полиномы $P_{3,i}$

$$\begin{aligned} P_{3,i}(x) = & \frac{(x - x_i)^2[2(x - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3} \cdot y_{i-1} \\ & + \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3} \cdot y_i \\ & + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} \cdot s_{i-1} \\ & + \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2} \cdot s_i \end{aligned} \tag{7}$$

Построенный сплайн имеет степень гладкости $p = 1$ и дефект $n - p = 2$.

2.2 Глобальная интерполяция

В этом случае мы не задаем явно производные в узлах, но ставим условия непрерывности для первой и второй производной.

$$P'_{3,i}(x_i) = P'_{3,i+1}(x_i) = b_i,\ P''_{3,i}(x_i) = P''_{3,i+1}(x_i) = c_i,\ i = 1 \dots n-1 \tag{8}$$

Объединив (5) и (8). и подставив h_i вместо $x_i - x_{i-1}$, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3 & i = 2, \dots, n \\ b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 & i = 2, \dots, n \\ c_{i-1} = c_i - d_i h_i & i = 2, \dots, n \\ a_i = y_i & i = 1, \dots, n \\ a_1 - b_1 h_1 = \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = y_0 & \end{array} \tag{9}$$

Всего в этой системе $4n - 2$ уравнения, однако количество неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i равняется $4n$.

Для получения двух недостающих уравнений обычно задают дополнительные условия на концах отрезка $[a, b]$. Такие условия называются краевыми.

В качестве краевых условий обычно используются:

- $S'_3(a) = s_0,\ S'_3(b) = s_n$, где $s_0,\ s_n$ задаются явно
  Фундаментальный сплайн
- $S''_3(a) = S''_3(b) = 0$
  Естественный сплайн
- $S'''_3(a) = S'''_3(b),\ S''_3(a) = S''_3(b)$
  Периодический сплайн

Наиболее используемый - второй вариант с приведением вторых производных к нулю на границах отрезка.

Таким образом, с помощью наложения дополнительных условий, получаем систему из $4n$ линейных уравнений для $4n$ неизвестных.

Сведение матрицы к трехдиагональной

Систему (9) при наложении краевых условий можно значительно упростить.

Положим, что $S''_3(x_0) = S''_3(x_n) = c_0 = c_n = 0$, а также избавимся от a_i, введя так называемые разделенные разности Ньютона:

$$f(x_{i-1}, x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

$$
\begin{array}{ll}
b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = f(x_{i-1}, x_i) & i = 2, \dots, n \\
b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2 & i = 2, \dots, n \\
c_{i-1} = c_i - d_i h_i & i = 2, \dots, n \\
b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = f(x_0, x_1) & \\
c_n = 0 & \\
c_1 - d_1 h_1 = 0 &
\end{array}
\tag{10}
$$

Выразим из (10) $d_1 h_1 = c_1$, и $d_i h_i = c_i - c_{i-1}$

$$
\begin{array}{ll}
b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = f(x_{i-1}, x_i) & i = 2, \dots, n \\
b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}) & i = 2, \dots, n \\
b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = f(x_0, x_1) & \\
c_n = 0 &
\end{array}
\tag{11}
$$

Приведем подобные коэффициенты при c_i и выразим b_i:

$$
b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + f(x_0, x_1)
$$

и

$$
b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6}h_i + f(x_{i-1}, x_i)
$$

и подставим их в систему (11), формально доопределив $c_0 = 0$ из условий естественного сплайна

$$
\begin{array}{ll}
\frac{h_{i-1}}{6}c_{i-2} + (\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3})c_{i-1} + \frac{h_i}{6}c_i = f(x_{i-1}, x_i) - f(x_{i-2}, x_{i-1}), & i = 2, \dots, n \\
c_0 = c_n = 0 &
\end{array}
\tag{12}
$$

В результате серии упрощений мы получили систему относительно только c_i, причем матрица такой системы имеет трехдиагональный вид, т.е. ненулевыми являются элементы только главной диагонали и двух соседних. Такие системы решаются легко решаются методом прогонки.

$$
\begin{array}{ccccccc}
2c_1 & + & \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 & & & = & 6f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) \\
 & \ddots & & & & & \\
\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}} & + & 2c_i & + & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} & = & 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_n}c_{n-2} & + & 2c_{n-1} & = & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)
\end{array}
$$

Следует отметить, что перед приведением к матрице мы домножили (12) на $\frac{6}{h_i+h_{i-1}}$, и использовали разделенные разности следующего третьего порядка

$$f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i) = \frac{f(x_{i-1}, x_i) - f(x_{i-2}, x_{i-1})}{x_i - x_{i-2}} = \frac{f(x_{i-1}, x_i) - f(x_{i-2}, x_{i-1})}{h_i + h_{i-1}}$$

Решив такую систему уравнений мы получим сплайн со степенью 3, степень. гладкости 2, и дефектом 1

3 Физическая интерпретация

Линейный сплайн может быть проинтерпретирован, как уравнение нитки, туго натянутой на гвоздики на стене. Сплайн степени 3 с дефектом 2 может быть представлен, как уравнение упругой линейки, которая продета через желобки, у которых задана ориентация. Сплайн степени 3 с дефектом 1 может также соответствовать упругой линейке, которая проходит между гвоздиками, направление которых невозможно определить.

Причем интересным фактом является то, что общему решению дифференциального уравнения свободного равновесия гибкого упругого бруска $\phi^{IV}(x) = 0$ соответствует (5).

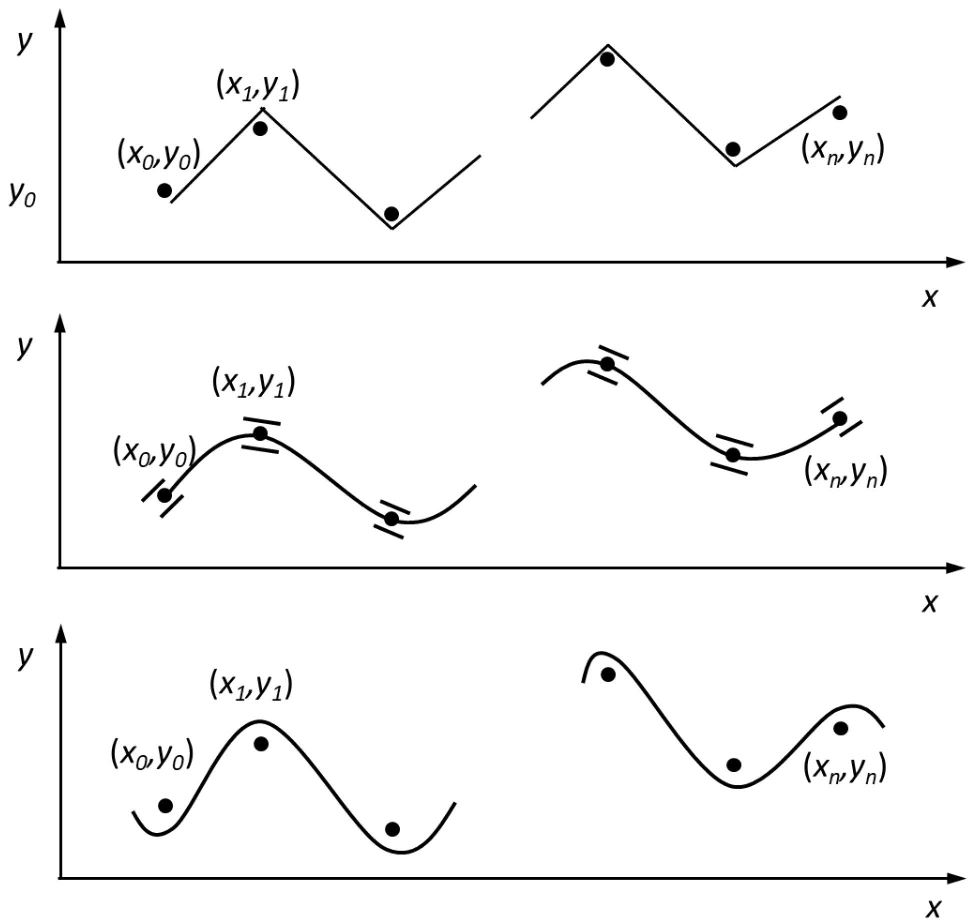

Рис. 3: сверху-вниз: линейный сплайн с дефектом 1; сплайн степени 3 с дефектом 2; сплайн степени 3 с дефектом 1