Corrections

Exercice 2.1.

(2.1.1) Pour ce premier système, on peut exprimer y et t en fonction de x et z :

$$\begin{cases} y & = 1 - 2x - z \\ 3x - (1 - 2x - z) - 3z + 2t & = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} y & = 1 - 2x - z \\ 5x - 4z + 2t & = 6 \end{cases}$$

On peut choisir x et z comme paramètres libres, dissons $x = s$ et $z = r$ avec $s, r \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$y = 1 - 2s - r, \quad t = 3 - \frac{5s}{2} + 2r.$$

Donc, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \left(s, 1 - 2s - r, r, 3 - \frac{5s}{2} + 2r \right) \middle| \, s, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2.1.2) Pour le second système, en additionnant les deux premières équations, on obtient :

$$(2x + y - z) + (x - y + z) = 0 + 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0.$$

Maintenant, en substituant $x = 0$ dans les deux premières équations :

$$y - z = 0 \implies y = z.$$

En substituant $x = 0$ et $y = z$ dans la troisième équation :

$$3(0) + 3(z) - z = 0 \implies 2z = 0 \implies z = 0.$$

Donc, $y = 0$ également. La seule solution du système est donc :

$$\mathcal{S}_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Rappel 2. Avant de résoudre des systèmes linéaires, rappelons quelques définitions et resultats importantes. On fixe d'abord un système linéaire de la forme $A \cdot x = b$ où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Voici quelques définitions clés :

- La matrice A est appelée la **matrice des coefficients** du système. On dit que A est sous **forme échelonnée en lignes** si :
  - Toutes les lignes composées uniquement de zéros sont en bas de la matrice.
  - Le coefficient principal (c'est-à-dire l'entrée non nulle la plus à gauche) de chaque ligne non nulle, appelé **pivot**, est strictement à droite du coefficient principal de la ligne au-dessus.
- La **matrice augmentée** du système est la matrice $[A \mid b]$, obtenue en ajoutant le vecteur b comme une colonne supplémentaire à la matrice A, c'est-à-dire :

$$[A \mid b] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

- La méthode du **pivot de Gauss** consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la matrice augmentée $[A \mid b]$ en une forme échelonnée en lignes, facilitant ainsi la résolution du système. Voici les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes :

Opération élémentaire	**Notation**
Échanger les lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
Multiplier la ligne i par $k \neq 0$	kL_i
Ajouter k fois la ligne i à la ligne j	$L_j + kL_i$

- Il existe aussi la **forme échelonnée réduite en lignes**, qui est une version plus stricte de la forme échelonnée en lignes. Une matrice est en forme échelonnée réduite en lignes si, en plus des conditions de la forme échelonnée en lignes :
  - Le pivot de chaque ligne est égal à 1.
  - Chaque pivot est la seule entrée non nulle dans sa colonne.

  Les mêmes opérations élémentaires sur les lignes peuvent être utilisées pour transformer une matrice en forme échelonnée réduite en lignes.
- Lorque le système $A \cdot x = b$ est **consistant**, c'est-à-dire qu'il admet au moins une solution, l'ensemble des solutions est le même que celui du système avec sa matrice augmentée échelonnée en lignes, c'est-à-dire, les solutions de $[A \mid b]$ sont les mêmes que celles de $[A' \mid b']$ où $[A' \mid b']$ est la forme échelonnée en lignes de $[A \mid b]$. La même chose vaut pour la forme échelonnée réduite en lignes. C'est pourquoi on peut se concentrer sur l'échelonnement de la matrice augmentée pour résoudre le système. Les systemes associés à $[A \mid b]$ et sa forme échelonnée en lignes $[A' \mid b']$ sont dits alors **équivalents**.
- En général, nous nous concentrerons simplement sur l'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer la matrice augmentée en forme échelonnée réduite en lignes, puis nous résoudrons le système associé à cette dernière en utilisant une méthode appelée **substitution inverse** (ou **remontée**). Des fois, nous pourrons nous arrêter à la forme échelonnée en lignes si cela suffit pour identifier les solutions.

- Un système d'équations linéaires est consistant si et seulement si, quelque soit la forme échelonnée en lignes (ou échelonnée réduite en lignes) de sa matrice augmentée $[A \mid b]$, il n'existe pas de ligne de la forme $[0\ 0\ \cdots\ 0 \mid c]$ avec $c \neq 0$. Une telle ligne représenterait une équation impossible (comme $0 = c$ avec $c \neq 0$), rendant le système inconsistant.
- Le **rang** d'une matrice A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée en lignes (ou échelonnée réduite). Le rang donne une mesure de la "dimension" de l'espace engendré par les lignes (ou colonnes) de la matrice. Une façon de le calculer est d'échelonner la matrice en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, puis de compter le nombre de lignes non nulles dans la matrice échelonnée résultante.
- Soit $A \cdot x = b$ un système d'équations linéaires avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Soit $[A \mid b]$ la matrice augmentée du système et soit $[A' \mid b']$ une forme échelonnée (ou échelonnée reduite) en lignes de $[A \mid b]$. On classifie les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en deux catégories :
  — **Variables de base (ou principales)** : Ce sont les variables qui correspondent aux colonnes contenant les pivots dans la matrice échelonnée A'.
  — **Variables libres** : Ce sont les variables qui ne correspondent pas aux colonnes contenant des pivots.
- Une première version du **théorème du rang** (ou théorème de Rouché-Frobenius) stipule que si le système $A \cdot x = b$ est consistant, alors

$$\#(\text{nombre de variables libres}) = n - \mathrm{rg}(A).$$

  Un système linéaire consistant $A \cdot x = b$ admet donc une unique solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variables libres). De plus, si $\mathrm{rg}(A) < n$, le système admet une infinité de solutions paramétrées par les variables libres.
- Dans l'exemple ci-dessus, on a une matrice en forme échelonnée en lignes (pas reduite) avec une ligne nulle. On note qu'il y a deux pivots (dans les colonnes 1 et 2), donc $\mathrm{rg}(A) = 2$. Comme il y a quatre variables x, y, z, w, on a $n = 4$. Donc, le nombre de variables libres est $4 - 2 = 2$. On peut choisir z et w comme variables libres.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{x} & \color{red}{y} & \color{blue}{z} & \color{blue}{w} & \\ \hline 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 2.2.

(SE_1) : On écrit d'abord la matrice augmentée du système et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots (colonnes 1, 2 et 3), donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. De plus il n'y a pas des lignes de la forme $[0\ 0\ 0 \mid c]$ avec $c \neq 0$, donc le système est consistant. Il y a trois variables (x, y, z), donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 3 = 0$. Donc, le système admet une unique solution. On écrit le système associé :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 2 \\ y + z & = 2 \\ 2z & = 2 \end{cases}$$

Ensuite, on peut exprimer z, y et x :

$$z = 1, \quad y = 1, \quad x = -2.$$

Donc, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_1 = \{(-2, 1, 1)\}.$$

(SE_2) : On écrit d'abord la matrice augmentée du système et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Notons que ce dernier matrice est en forme échelonnée en lignes. On peut écrire le système associé :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z & = 2 \\ 7y - 8z & = 1 \\ 0 & = -8 \end{cases}$$

Cette dernière équation est une contradiction, donc le système (SE_1) n'a pas de solution. On écrit donc :

$$\mathcal{S}_2 = \varnothing.$$

(SE_3) : On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 2), donc le rang est égal à 2. De plus il n'y a pas des lignes de la forme $[0\ 0\ 0 \mid c]$ avec $c \neq 0$, donc le système est consistant. Il y a trois variables

(x, y, z), donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 2 = 1$. On choisit z comme variable libre. On écrit le système associé :

$$\begin{cases} x - 2y & = 1 \\ 5y - 4z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Ensuite, on peut exprimer x et y en fonction de z :

$$y = \frac{4z}{5}, \quad x = 1 + \frac{8z}{5}.$$

On choisit $z = t$ comme paramètre libre, avec $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \left(1 + \frac{8t}{5}, \frac{4t}{5}, t\right) \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(SE_4) : Encore une fois, on écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 8 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 8 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 8 & 8 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 19 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 19 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{4} L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant en forme échelonnée (pas réduite) en lignes. Cette fois, on va continuer jusqu'à la forme échelonnée réduite en lignes :

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -23 & -89 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -23 & -89 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 23L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant en forme échelonnée réduite en lignes. On note qu'il y a quatre pivots (colonnes 1, 2, 3 et 4), donc $\mathrm{rg}(A) = 4$. De plus il n'y a pas des lignes de la forme $[0\ 0\ 0\ 0 \mid c]$ avec $c \neq 0$, donc le système est consistant. Il y a quatre variables (x, y, z, t), donc $n = 4$. Le nombre de variables libres est $4 - 4 = 0$. Le système admet donc une unique solution. En écrivant le système associé on obtient justement l'unique solution :

$$\mathcal{S}_4 = \{(-20, 5, 0, 3)\}.$$

(SE_5) : On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots (colonnes 1, 2 et 3), donc $\text{rg}(A) = 3$. Le système est consistant. Il y a quatre variables (x, y, z, t), donc $n = 4$. Le nombre de variables libres est $4 - 3 = 1$. On choisit t comme variable libre. On écrit le système associé :

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 5t & = 4 \\ y - z + t & = -3 \\ z - 3t & = 12 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

On exprime x, y et z en fonction de t :

$$z = 12 + 3t, \quad y = -3 + z - t = -3 + 12 + 3t - t = 9 + 2t,$$

$$\begin{aligned} x &= 4 + 2y - 4z + 5t \\ &= 4 + 2(9 + 2t) - 4(12 + 3t) + 5t \\ &= 4 + 18 + 4t - 48 - 12t + 5t \\ &= -26 - 3t. \end{aligned}$$

On choisit $t = s$ comme paramètre libre, avec $s \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_5 = \{(-26 - 3s, 9 + 2s, 12 + 3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

(SE_6) **:** On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 4L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{2}{3} L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{3}{7} L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{22}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{5} L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{22}{35} \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a quatre pivots, donc $\text{rg}(A) = 4 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$t = \boxed{\frac{22}{35}}, \qquad z = -\frac{2}{7} + t = -\frac{2}{7} + \frac{22}{35} = \frac{-10 + 22}{35} = \boxed{\frac{12}{35}},$$

$$y=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}t=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{35}-\frac{4}{3}\cdot\frac{22}{35}=-\frac{1}{3}+\frac{48-88}{105}=-\frac{1}{3}-\frac{40}{105}=-\frac{35+40}{105}=-\frac{75}{105}=\boxed{-\frac{5}{7}},$$

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y-z=\frac{1}{2}-\frac{5}{14}-\frac{12}{35}=\frac{35-25-24}{70}=-\frac{14}{70}=\boxed{-\frac{1}{5}}.$$

Donc :

$$\mathcal{S}_6=\left\{\left(-\frac{1}{5},-\frac{5}{7},\frac{12}{35},\frac{22}{35}\right)\right\}.$$

(SE$_7$) : On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 3 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -5 & 5 & 7 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 3 & 2 & 0\\ 5 & -5 & 5 & 7 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-5L_1]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ L_4\leftarrow L_4-7L_2}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 4), donc $\mathrm{rg}(A)=2$. Le système est consistant (système homogène). Il y a quatre variables, donc $n=4$. Le nombre de variables libres est $4-2=2$. On choisit y et z comme variables libres. Le système associé est :

$$\begin{cases} x-y+z &=0\\ t &=0\end{cases}$$

On exprime x et t en fonction de y et z :

$$t=0,\quad x=y-z.$$

On pose $y=s$ et $z=r$ avec $s,r\in\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_7=\{(s-r,s,r,0)\mid s,r\in\mathbb{R}\}.$$

(SE$_8$) : On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3\\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7\\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_2\leftarrow L_2-2L_1}}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4\end{array}\right)\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-4L_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 4), donc $\mathrm{rg}(A)=2$. Le système est consistant. Il y a quatre variables, donc $n=4$. Le nombre de variables libres est $4-2=2$. On choisit y et z comme variables libres. Le système associé est :

$$\begin{cases} 3x+4y+z+2t &=3\\ t &=1\\ 0 &=0\end{cases}$$

On exprime x et t en fonction de y et z :

$$t=1,\quad 3x=3-4y-z-2t=3-4y-z-2\implies x=\frac{1-4y-z}{3}.$$

On pose $y=s$ et $z=r$ avec $s,r\in\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_8=\left\{\left(\frac{1-4s-r}{3},s,r,1\right)\,\middle|\,s,r\in\mathbb{R}\right\}.$$

(SE_9) **:** On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. La dernière ligne représente l'équation $0 = -10$, ce qui est une contradiction. Donc le système est inconsistant :

$$\mathcal{S}_9 = \varnothing.$$

(SE_{10}) **:** On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow -\frac{3}{8}L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{16} \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a quatre pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 4 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$t = \frac{3}{16}, \quad z = -\frac{1}{3}t = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} = -\frac{1}{16},$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{32} - \frac{3}{32} = \frac{16+1-3}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16},$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{32} - \frac{3}{32} = \frac{16-1-3}{32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Donc :

$$\mathcal{S}_{10} = \left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{7}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)\right\}.$$

(SE_{11}) **:** Encore une fois, on écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow -\frac{3}{7}L_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 11\end{array}\right)\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-3L_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a quatre pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 4 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$t = 2, \quad z = 3, \quad y = 2 - \frac{1}{3}z - t = 2 - 1 - 2 = -1,$$

$$x = 5 - y - z - t = 5 + 1 - 3 - 2 = 1.$$

Donc :

$$\mathcal{S}_{11} = \{(1, -1, 3, 2)\}.$$

Exercice 2.3.

(2.3.1) On écrit la matrice augmentée du système (SE_{12}) et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2\\ -2 & 5 & -8 & -10\\ 3 & -6 & m & m\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{3}{2}L_1]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & -4 & -8\\ 0 & -\frac{3}{2} & m-6 & m-3\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow \frac{1}{2}L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & -\frac{3}{2} & m-6 & m-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{3}{2}L_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & m-9 & m-9\end{array}\right)$$

On discute suivant les valeurs de m :

— Si $m \neq 9$, la matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 3 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = \frac{m-9}{m-9} = 1,$$

$$y = -4 + 2z = -4 + 2 = -2,$$

$$x = 1 + \frac{3}{2}y - 2z = 1 + \frac{3}{2}(-2) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4.$$

Donc pour $m \neq 9$:

$$\mathcal{S}_{12} = \{(-4, -2, 1)\}.$$

— Si $m = 9$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 2), donc $\mathrm{rg}(A) = 2$. Le système est consistant. Il y a trois variables, donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 2 = 1$. On choisit z comme variable libre. Le système associé est :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z & = 2\\ y - 2z & = -4\end{cases}$$

On exprime x et y en fonction de z :

$$y = -4 + 2z,$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{3}{2}y - 2z \\ &= 1 + \frac{3}{2}(-4 + 2z) - 2z \\ &= 1 - 6 + 3z - 2z \\ &= -5 + z. \end{aligned}$$

On pose $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_{12} = \{(-5 + t, -4 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(2.3.2) Pour le système (SE_{13}), on utilise les résultats précédents :

— Si $m \neq 9$, la solution unique de (SE_{12}) est $(-4, -2, 1)$. On vérifie si cette solution satisfait la quatrième équation du système (SE_{13}) :

$$x + y + z = -4 - 2 + 1 = -5 \neq 3.$$

Donc pour $m \neq 9$, le système (SE_{13}) est inconsistant :

$$\mathcal{S}_{13} = \varnothing.$$

— Si $m = 9$, l'ensemble des solutions de (SE_{12}) est :

$$\mathcal{S}_{12} = \{(-5 + t, -4 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

On impose la quatrième équation du système (SE_{13}) :

$$x + y + z = (-5 + t) + (-4 + 2t) + t = -9 + 4t = 3.$$

Cela donne :

$$4t = 12 \implies t = 3.$$

On remplace t dans l'expression des solutions :

$$x = -5 + 3 = -2, \quad y = -4 + 2(3) = 2, \quad z = 3.$$

Donc pour $m = 9$:

$$\mathcal{S}_{13} = \{(-2, 2, 3)\}.$$

Exercice 2.4.

(SE_{14}) **:** On va commencer sous l'hypothèse que $a \neq 0$ (car on veut faire des operations de type $L_i \leftarrow L_i - aL_j$. Nous traiterons le cas $a = 0$ à la fin). On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a-1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 3(a+1) \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & 1-a & -2a^2+a+1 & 1-a \\ 0 & a-1 & -2a+2 & 3a+2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & 1-a & -2a^2+a+1 & 1-a \\ 0 & 0 & -2a^2-a+3 & 2a+3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow (-1)L_3]{L_2 \leftarrow (-1)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2a^2-a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2a^2+a-3 & -2a-3 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & (2a+1)(a-1) & a-1 \\ 0 & 0 & (2a+3)(a-1) & -(2a+3) \end{array}\right)$$

On discute suivant les valeurs de a :

— Si $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{3}{2}$, la matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 3 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = \frac{-(2a+3)}{(2a+3)(a-1)} = \frac{-1}{a-1},$$

$$y = \frac{a-1-(2a+1)(a-1)z}{a-1} = \frac{a-1-(2a+1)(a-1)\left(\frac{-1}{a-1}\right)}{a-1} = \frac{a-1+2a+1}{a-1} = \frac{3a}{a-1},$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - y - (2a-1)z \\ &= 1 - \frac{3a}{a-1} - (2a-1)\left(\frac{-1}{a-1}\right) \\ &= \frac{(a-1) - 3a + 2a - 1}{a-1} \\ &= \frac{-2}{a-1}. \end{aligned}$$

Donc pour $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{3}{2}$:

$$\mathcal{S}_{14} = \left\{\left(\frac{-2}{a-1}, \frac{3a}{a-1}, \frac{-1}{a-1}\right)\right\}.$$

— Si $a = 1$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

La dernière ligne représente l'équation $0 = -5$, ce qui est une contradiction. Donc le système est inconsistant :

$$\mathcal{S}_{14} = \varnothing.$$

— Si $a = -\frac{3}{2}$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 5 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 2), donc $\mathrm{rg}(A) = 2$. Le système est consistant. Il y a trois variables, donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 2 = 1$. On choisit z comme variable libre. Le système associé est :

$$\begin{cases} x + y - 4z & = 1 \\ -\frac{5}{2}y + 5z & = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

On exprime x et y en fonction de z :

$$y = 1 + 2z,$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - y + 4z \\ &= 1 - (1 + 2z) + 4z \\ &= 2z. \end{aligned}$$

On pose $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_{14} = \{\,(2t, 1 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Enfin, on traite le cas $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\text{rg}(A) = 3 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = 1, \quad y = 1 - z = 0, \quad x = 1 - y + z = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Donc pour $a = 0$:

$$\mathcal{S}_{14} = \{(2, 0, 1)\}.$$

(SE_{15}) : On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

On discute suivant les valeurs de a :

- Si $a = 1$ alors la matrice devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\text{rg}(A) = 3 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = 0, \quad y = 1 - 3z = 1, \quad x = 1 - y + z = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Donc pour $a = 1$:

$$\mathcal{S}_{15} = \{(0, 1, 0)\}.$$

- Si $a \neq 1$, on continue l'échelonnement :

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & -a+2 \end{array}\right)$$

On discute encore suivant les valeurs de a :

— Si $a = 2$ alors la matrice devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a deux pivots (colonnes 1 et 2), donc $\text{rg}(A) = 2$. Le système est consistant. Il y a trois variables, donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 2 = 1$. On choisit z comme variable libre. Le système associé est :

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ y + 4z & = 1 \end{cases}$$

On exprime x et y en fonction de z :

$$y = 1 - 4z,$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - y + z \\ &= 1 - (1 - 4z) + z \\ &= 5z. \end{aligned}$$

On pose $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_{15} = \{ (5t, 1 - 4t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

— Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, on peut alors diviser la troisième ligne par $(a-2)$ pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3) & -1 \end{array}\right)$$

Si $a=-3$ alors la matrice devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La dernière ligne représente l'équation $0=-1$, ce qui est une contradiction. Donc le système est inconsistant :

$$\mathcal{S}_{15} = \varnothing.$$

Si $a \neq -3$, la matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 3 = n$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = \frac{-1}{-(a+3)} = \frac{1}{a+3},$$

$$y = 1-(a+2)z = 1-(a+2)\left(\frac{1}{a+3}\right) = \frac{(a+3)-(a+2)}{a+3} = \frac{1}{a+3},$$

$$\begin{aligned} x &= 1-y+z \\ &= 1-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc pour $a \neq 1$, $a \neq 2$ et $a \neq -3$:

$$\mathcal{S}_{15} = \left\{\left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)\right\}.$$

En résumé, on a :

$$\mathcal{S}_{15} = \begin{cases} \{(0,1,0)\} & \text{si } a=1, \\ \{(5t, 1-4t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} & \text{si } a=2, \\ \varnothing & \text{si } a=-3, \\ \left\{\left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)\right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2.5.

(1) (SE_{16}) **:** On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2b-a \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b-2a \end{array}\right)$$

On discute suivant les valeurs de a et b :

— Si $a \neq b$ alors $2b - 2a = 2(b-a) \neq 0$ et la dernière ligne représente l'équation $0 = 2(b-a)$, ce qui est une contradiction. Donc le système est inconsistant :

$$\mathcal{S}_{16} = \varnothing.$$

— Si $a = b$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots (colonnes 1, 2 et 3), donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. Le système est consistant. Il y a quatre variables, donc $n = 4$. Le nombre de variables libres est $4 - 3 = 1$. On choisit t comme variable libre. Le système associé est :

$$\begin{cases} x + y &= a \\ y + z &= a \\ z + t &= a \end{cases}$$

On exprime x, y et z en fonction de t :

$$z = a - t,$$
$$y = a - z = a - (a - t) = t,$$
$$x = a - y = a - t.$$

On pose $t = s$ avec $s \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}_{16} = \{(a - s, s, a - s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

(2) (SE_{17}) **:** On écrit la matrice augmentée et on échelonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a-3 \\ 0 & 1 & 3 & b \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 4 & b-1 \end{array}\right)$$

On discute suivant les valeurs de a et b :

— Si $a \neq 4$, la troisième ligne représente l'équation $0 = a - 4$, ce qui est une contradiction. Donc le système est inconsistant :

$$\mathcal{S}_{17} = \varnothing.$$

— Si $a = 4$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On discute encore suivant les valeurs de b :

— Si $b \neq 1$, la matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. Le système est consistant. Il y a trois variables, donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 3 = 0$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$4z = b - 1 \implies z = \boxed{\frac{b-1}{4}},$$

$$y = 1 + z = 1 + \frac{b-1}{4} = \frac{4+b-1}{4} = \boxed{\frac{b+3}{4}},$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - \frac{b+3}{4} - 2 \cdot \frac{b-1}{4} = \frac{4-(b+3)-2(b-1)}{4} = \frac{4-b-3-2b+2}{4} = \boxed{\frac{3-3b}{4}}.$$

Donc pour $a = 4$ et $b \neq 1$:

$$\mathcal{S}_{17} = \left\{\left(\frac{3-3b}{4}, \frac{b+3}{4}, \frac{b-1}{4}\right)\right\}.$$

— Si $b = 1$, la matrice échelonnée devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice est en forme échelonnée en lignes. On note qu'il y a trois pivots, donc $\mathrm{rg}(A) = 3$. Le système est consistant. Il y a trois variables, donc $n = 3$. Le nombre de variables libres est $3 - 3 = 0$. Le système admet une unique solution. Par substitution inverse :

$$z = 0,$$

$$y = 1 + z = 1 + 0 = 1,$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - 1 - 0 = 0.$$

Donc pour $a = 4$ et $b = 1$:

$$\mathcal{S}_{17} = \{(0, 1, 0)\}.$$

En resumé, on a :

$$\mathcal{S}_{17} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } a \neq 4, \\ \{(0,1,0)\} & \text{si } a = 4 \text{ et } b = 1, \\ \left\{\left(\frac{3-3b}{4}, \frac{b+3}{4}, \frac{b-1}{4}\right)\right\} & \text{si } a = 4 \text{ et } b \neq 1. \end{cases}$$