<table>
<tr><td>EAIiIB</td><td colspan="2">Marcin Nalepa
Przemysław Trybała</td><td>Rok II</td><td>Grupa 5</td><td>Zespół 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temat:
Wahadło fizyczne</td><td colspan="3">Numer ćwiczenia:
1</td></tr>
<tr><td>Data wykonania
09.12.2015 r.</td><td>Data oddania
13.01.2016 r.</td><td>Zwrot do
poprawki</td><td>Data oddania</td><td>Data zaliczenia</td><td>Ocena</td></tr>
</table>

1 Cel ćwiczenia

Wyznaczenie momentów bezwładności brył sztywnych przez pomiar okresu drgań wahadła oraz na podstawie wymiarów geometrycznych.

2 Wstęp teoretyczny

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną mogącą obracać się swobodnie wokół osi obrotu O nie przechodzącej jednak przez środek masy S tej bryły.

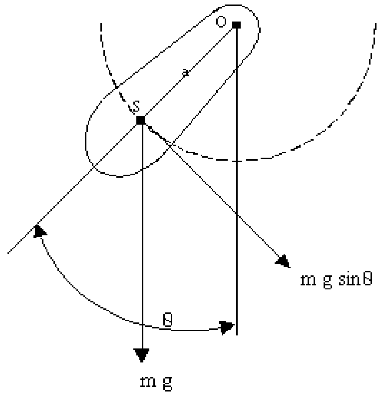
Wahadło wychylone z punktu równowagi, a następnie puszczone swobodnie, będzie wykonywać drgania zwane ruchem wahadłowym. Ponieważ ciało będzie poruszać się wokół osi obrotu O, ruch ten będzie opisywać druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego $I\varepsilon = \mathbf{M}$ gdzie I - moment bezwładności, ε - przyspieszenie kątowe, $\mathbf{M}$ - moment siły.

W rozpatrywanym doświadczeniu moment siły powstaje pod wpływem siły ciężkości i dla wychylenia θ jest równy $\mathbf{M} = mga\sin\theta$, gdzie a - odległość osi obrotu O od środka masy S. Stąd równanie ruchu wahadła można zapisać jako

$$I_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\sin\theta \tag{1}$$

gdzie I_0 - moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O. Jeśli ograniczymy amplitudę drgań wahadła do kilku stopni, możemy, zgodzie z twierdzeniem Taylora, przyliżyć sinusa jego argumentem $\sin\theta \approx \theta$. Wtedy rozwiązanie wzoru (1) przyjmuje postać

$$\theta = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{2}$$



Rysunek 1: Rysunek poglądowy doświadczenia

i przedstawia ruch harmoniczny. Amplituda A oraz faza drgań α zależą od warunków początkowych, natomiast okres drgań T jest związany tylko z częstością $\omega_0 = 2\pi/T$ i wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}} \tag{3}$$

co po przekształceniu daje wzór roboczy na moment bezwładności I_0

$$I_0 = \frac{T^2 mga}{4\pi^2} \tag{4}$$

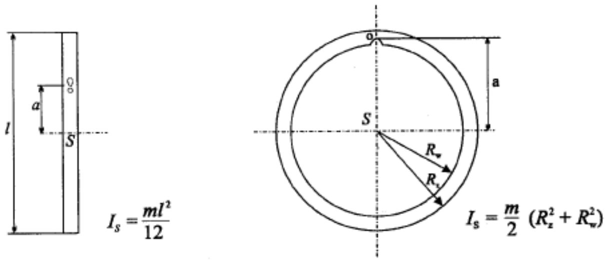
Wzór (4) jest pierwszą metodą na obliczenie momentu bezwładności wahadła fizycznego. Drugi sposób to zastosowanie twierdzenia Steinera

$$I_0 = I_s + ma^2 \tag{5}$$

do znanej wartości I_s odczytanej z tablic.

3 Opis doświadczenia

Do doświadczenia zostały dostarczone 2 obiekty, pierścień i pręt. Na początku zostały przeprowadzone pomiary potrzebnych wymiarów zaznaczonych na rysunku (3) oraz masy. Wyniki wraz z niepewnościami zapisano w dołączonych tablekach.



Następnie jeden z obiektów zamontowano na statywie i zmierzono czas trwania określonej ilości okresów. Stąd wyznaczono okres 1 drgania. Pomiary zostały wykonane także dla drugiego obiektu. Wyniki zapisano w dołączonych tabelach.

4 Opracowanie wyników

Wzory wykorzystane w obliczeniach poniżej:

- Moment bezwładności: $I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2}$
- Niepewność I_0: $\frac{u(I_o)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(2\frac{u(T_0)}{T_0}\right)^2}$
- Moment bezwładności z twierdzenia Steinera (5): $I_s = I_0 - ma^2$
- Niepewność I_S: $u(I_s) = \sqrt{(u(I_0))^2 + (a^2u(m))^2 + (-2amu(m))^2}$

4.1 Pręt

4.1.1 Pomiar długości drgań i twierdzenie Steinera

$$I_0 = \frac{0,66 * 9,81 * 0,27 * 1,33^2}{4\pi^2} = 0,07838\ [kg * m^2]$$

Niepewność $u(I_0)$:

$$\begin{aligned}\frac{u(I_o)}{I_0} &= \sqrt{\left(\frac{0,00058}{0,657}\right)^2 + \left(\frac{0,00058}{0,271}\right)^2 + \left(2\frac{0,0018}{1,325}\right)^2} \\ &= \sqrt{7,8 * 10^{-7} + 4,58 * 10^{-6} + 7,4 * 10 - 6} = \sqrt{12,76 * 10^{-6}} = 0,00357\end{aligned}$$

Stąd $u(I_0) = 0,00028\ [kg * m^2]$

Z twierdzenia Steinera (5) mamy dla środka ciała:

$$I_s = 0,07838 - 0,657 * 0,27^2 = 0,0305\ [kg * m^2]$$

a niepewność I_s liczymy ze wzoru:

$$u(I_s) = \sqrt{(0,00028)^2 + (0,27^2 * 0,00058)^2 + (-2 * 0,27 * 0,66 * 0,00058)^2} = 0,00035\ [kg * m^2]$$

4.1.2 Wzory tablicowe

$$I_s^{geom} = \frac{ml^2}{12} = \frac{0,657 * 0,74^2}{12} = 0,0298\ [kg * m^2]$$

Niepewność $u(I_s^{geom})$:

$$\begin{aligned}u(I_s^{geom}) &= \sqrt{\left(\frac{l^2}{12} * u(m)\right)^2 + \left(\frac{2lm}{12} * u(l)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,74^2}{12} * 0,00058\right)^2 + \left(\frac{2 * 0,74 * 0,657}{12} * 0,00058\right)^2} = 0,000054\ [kg * m^2]\end{aligned}$$

4.2 Pierścień

4.2.1 Pomiar długości drgań i twierdzenie Steinera

$$I_0 = \frac{1,36 * 9.81 * 0,13 * 1,033^2}{4\pi^2} = 0,04693 \ [kg * m^2]$$

Niepewność $u(I_0)$:

$$\frac{u(I_o)}{I_0} = \sqrt{\left(\frac{0.00058}{1,36}\right)^2 + \left(\frac{0.00058}{0,13}\right)^2 + \left(2\frac{0.0016}{1,033}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1,819 * 10^{-7} + 1,99 * 10^{-5} + 9,6 * 10^{-6}} = \sqrt{2,97 * 10^{-5}} = 0,00545$$

Stąd $u(I_0) = 0,00026 \ [kg * m^2]$

Z twierdzenia Steinera (5) mamy dla środka ciała:

$$I_s = 0,04693 - 1,36 * 0,13^2 = 0,0239 \ [kg * m^2]$$

a niepewność I_s liczymy ze wzoru:

$$u(I_s) = \sqrt{(0,00026)^2 + (0,13^2 * 0,00058)^2 + (-2 * 0,13 * 1,36 * 0,00058)^2} = 0,00033 \ [kg * m^2]$$

4.2.2 Wzory tablicowe

$$I_s^{geom} = \frac{m(R_z^2 + R_w^2)}{2} = \frac{1,36(0,14^2 + 0,125^2)}{2} = 0,024 \ [kg * m^2]$$

Niepewność $u(I_s^{geom})$:

$$u(I_s^{geom}) = \sqrt{\left(\frac{R_z^2 + R_w^2}{2} * u(m)\right)^2 + (mR_z * u(R_z))^2 + (mR_w * u(R_w))^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{0,14^2 + 0,125^2}{2} * 0,00058\right)^2 + (1,36 * 0,14 * 0,00058)^2 + (1,36 * 0,125 * 0,00058)^2}$$
$$= \sqrt{10^{-10} + 1,2 * 10^{-8} + 9,7 * 10^{-9}} = 0,000148 \ [kg * m^2]$$

4.3 Sprawdzenie wyników

- $k = 2$
- $U(I_s - I_{geom}) = k * \sqrt{u(I_s)^2 + u(I_{geom})^2)}$
- sprawdzenie: $|I_s - I_{geom}| < U(I_s - I_{geom})$

4.3.1 Pręt

	I_s z pomiarów	I_s^{geom} tablicowe
wartość $[kg * m^2]$	0,0305	0,02980
niepewność $[kg * m^2]$	0,0004	0,00005

$$U(I_s - I_s^{geom}) = 0,0008\ [kg * m^2]$$
$$|I_s - I_s^{geom}| = 0,0305 - 0,0298 = 0,0007\ [kg * m^2]$$

zgodne ponieważ $0,0007 < 0,0008$

4.3.2 Pierścień

	I_s z pomiarów	I_s^{geom} tablicowe
wartość $[kg * m^2]$	0,0239	0,0240
niepewność $[kg * m^2]$	0,0003	0,0001

$$U(I_s - I_s^{geom}) = 0,0006\ [kg * m^2]$$
$$|I_s - I_s^{geom}| = 0,024 - 0,0239 = 0,0001\ [kg * m^2]$$

zgodne ponieważ $0,0001 < 0,0006$

5 Podsumowanie

Momenty bezwładności obliczone z pomiaru czasu drgań wahadła wynoszą odpowiednio $0,0305 \pm 0,0004\ [kg * m^2]$ dla pręta i $0,0239 \pm 0,0003\ [kg * m^2]$ dla pierścienia. Wartości momentu bezwładności mieszczą się w niepewności rozszerzonej. Oznacza to, że pomiary były wykonane na tyle dokładnie, że wyniki zgadzają się z wartościami oczekiwanymi. W obu przypadkach niepewności liczone ze wzorów matematycznych charakteryzują się większą dokładnością, a więc są pewniejsze niż wartości doświadczalne. Taki stan rzeczy może być spowodowany tym, że w przypadku pomiaru okresu drgań pojawia się błąd systematyczny związany z tłumieniem drgań przez powietrze.