LES MATHS DE NOËL

TERMINAL C

2026 2^e édition Saïd

Avant-propos

Cet ouvrage propose aux élèves de terminale C des rappels et des compléments de cours assez complets du programme national, ainsi que des exercices non corrigés, contrairement aux exemples de cours soigneusement corrigés. Je vous rappelle qu'il existe également une version Terminal D/C pour la partie commun et Premier S pour ceux qui seront intéressés à effectuer quelques révisions.

L'ouvrage est orienté vers une relation étroite entre le cours et les exercices.

Les parties du cours ne sont pas un substitut au cours du professeur, mais plutôt un résumé exhaustif qui l'éclaire d'une manière différente. Ainsi, votre présence en cours est fortement conseillée. Elle vous permettra de bien comprendre les cours et surtout d'avoir tous les atouts à votre disposition pour résoudre les exercices.

À la fin de chaque chapitre étudié dans la partie cours, on trouve une liste d'exercices avec des difficultés progressives, classiques ou parfois originaux, qui constituent une illustration du cours. J'ai veillé à chaque fois à passer en revue tous les problèmes qui tournent autour du chapitre en question. On trouve également des exercices plus ou moins avancés pour mieux préparer les examens à venir.

Je serais reconnaissant envers ceux de mes lecteurs qui voudront bien m'envoyer leurs remarques sur cet ouvrage à l'adresse suivante : *lesmathsdenoel@gmail.com*.

Table des matières

1 Barycentre

1.1 Barycentre de deux points pondéré

Définition 1.1. Un point pondéré est un couple $(A;\alpha)$ formé d'un point A et d'un coefficient réel α.

Définition 1.2. Soient α et β deux réel tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et A et B deux points du plan.

On appelle ***barycentre*** de deux point pondéré $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

Notation : $G=\mathrm{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

Préposition 1.1.

1. *Soit M un point du plan et $M\neq G$ on a :* $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$
2. *Si on pose $M=A$ on a :* $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Démonstration.

1. Soit M un point du plan et $M\neq G$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ en appliquant la relation de Chasles on a : $\alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$
2. Si on pose $M=A$ on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

□

Définition 1.3 (Isobarycentre)**.** On parle d'un ***isobarycentre*** de deux points pondéré lorsque les coefficients α et β sont égaux $(\alpha=\beta)$. Dans se cas G est le milieu du segment $[AB]$.

Coordonner du barycentre de deux points pondérés. Soient A et B deux points du repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G=\mathrm{bar}\,(A,\alpha),(B,\beta)$, on a :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \text{ et } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

1.2 Barycentre de trois points pondéré

Définition 1.4. Soient α, β et γ trois réel tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et A, B et C trois points du plan. On appelle ***barycentre*** des trois points pondérés $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ l'ensemble des points G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Notation : $G=\mathrm{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

Remarque 1.1. Si $\alpha=\beta=\gamma$ on dit que G est ***l'isobarycentre*** de trois points pondérés $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$. Dans ce cas G est le centre de gravité du triangle ABC.

Préposition 1.2.

1. *Soit M un point du plan et $M \neq G$ on a :* $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$
2. *Si on pose $M = A$ on a :* $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Démonstration. Même méthode qu'avec deux points. □

Coordonner du barycentre de trois points pondérés. Soient A et B deux points du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ et $G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ on a :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

1.3 Fonction vectorielle de Leibniz

Soit $(A_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ un système de n points pondérés. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associé à la famille $(A_k, \alpha_k)_{1\leq k\leq n}$, l'application : $\begin{cases} f: \text{ X } \longrightarrow V \\ M \to f(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA_k} \end{cases}$

Théorème 1.1.

1. *Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ f est bijective et il existe une et unique point G tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$,* $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),....,(A_n,\alpha_n)\}$.
2. *Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$ f constant.*

Homogénéité du barycentre. Soit $S = \{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),....,(A_n,\alpha_n)\}$ avec $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Si $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),....,(A_n,\alpha_n)\}$ alors
$G = \text{bar}\{(A_1,\lambda\alpha_1),(A_2,\lambda\alpha_2),....,(A_n,\lambda\alpha_n)\}$.

Cas particulier n = 3 : Si $G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, on a : $G = \text{bar}\{(A,\lambda\alpha),(B,\lambda\beta),(C,\lambda\gamma)\}$.

Théorème du barycentre partielle.
Soit $S = \{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2,.....,(A_i,\alpha_i),(A_{i+1},\alpha_{i+1}),.....,(A_n,\alpha_n)\}$ Si $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe G tel que $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2,.....,(A_i,\alpha_i),(A_{i+1},\alpha_{i+1}),.....,(A_n,\alpha_n)\}$ Si $\sum\limits_{k=1}^{1} \alpha_k \neq 0$, il existe G_1 tel que $G_1 = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2,.....,(A_i,\alpha_i)\}$ Si $\sum\limits_{k=i+1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe G_2 tel que $G_2 = \{(A_{i+1},\alpha_{i+1}),.....,(A_n,\alpha_n)\}$ Donc $G = \text{bar}\{(G_1, \sum\limits_{k=1}^{1} \alpha_k),(G_2, \sum\limits_{k=i+1}^{n} \alpha_k)\}$

Cas particulier $\mathbf{n = 3}$: Si $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ on a : $G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$. si $\alpha+\beta \neq 0$ on a : $G_1 = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ donc $G = \text{bar}\{(G_1,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$.

1.4 Lignes de niveaux

Soit f une application tel que : $\begin{cases} f : P \longrightarrow \mathbb{R} \\ m \longrightarrow f(m) \end{cases}$

On appel ***lignes de niveaux*** $k \in \mathbb{R}$ l'ensemble des M du plan qui vérifie :

$$f(m) = k$$

Ensemble des point M tels que $MA = K$.
$f(m) = MA \Leftrightarrow MA = k$

1. Si $k < 0$ l'ensemble des points M cherchés est vide.
2. Si $k = 0$ l'ensemble des points M cherchés est réduit en A ; $\{A\}$.
3. Si $k > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre A et de rayon k.

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = K$, $U \neq 0$.

1. Si $k = 0$, on a :$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{U}$ donc l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par A perpendiculaire à $\overrightarrow{U}$.
2. Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = K \neq 0$. Soit H le projeté orthogonale de M sur $D(A,\overrightarrow{U})$,on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}).\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{U} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k$, comme $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{U} = \vec{0}$. On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k$. Donc, M décrie la droite passant par H est perpendiculaire à $\overrightarrow{U}$.

   Déterminons H : $H \in D(A,\overrightarrow{U})$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{U}$ sont colinéaire. Donc, $\overrightarrow{HA} = \alpha\overrightarrow{U}$ avec ($\alpha \in \mathbb{R}$). Alors, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha\overrightarrow{U}.\overrightarrow{U} = k \Rightarrow \alpha\overrightarrow{U}^2 = k \Rightarrow \alpha = \frac{k}{||\overrightarrow{U}||^2}$.

Ensemble des point M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = K$.

1. Si $k = 0$ on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[AB]$.
2. Si $k \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = K \neq 0$. Soit I milieu du $[AB]$, on a : $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k \Rightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = k \Rightarrow MI^2 - IA^2 = k \Rightarrow MI^2 = k + IA^2$.
   (a) Si $k + IA^2 < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
   (b) si $k + IA^2 = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{I\}$.
   (c) Si $k + IA^2 > 0$ l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$.

1.5 Fonction scalaire de Leibniz

Soit $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$ un système de n points pondérés. On appelle *fonction scalaire de Leibniz* associé à la famille $(A_k,\alpha_k)_{1\le k\le n}$, l'application :

$$\begin{cases}\varphi: \text{ X } \longrightarrow \overrightarrow{R} \\ M \to \varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{MA}_k^2.\end{cases}$$

Théorème 1.2.

1. *Si* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$, *alors* $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MG^2 + \varphi(G)$ *avec* $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2,....,(A_n,\alpha_n)\}$
2. *Si* $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 0$, *alors* , $\varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}.g(I) + \varphi(I)$.

Démonstration. Soit I un point du plan. $MA_k^2 = \overrightarrow{MA_k}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA_k})^2 = MI^2 + IA_k^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_k$ $\varphi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2 = \alpha_1(MI^2 + IA_1^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_1) + \alpha_2(MI^2 + IA_2^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_2) + ... + \alpha_n(MI^2 + IA_n^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\sum\limits_{k=1}^{n} IA_k) + \varphi(I)$. Posons $\sum\limits_{k=1}^{n} IA_k = g(I)$ on a : $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MI^2 + 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$.

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0$, $G = \text{bar}\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2,....,(A_n,\alpha_n)\}$. Posons, $I = G$
on a :$\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MG^2 + 2\overrightarrow{MG}g(G) + \varphi(G)$ comme $g(G) = 0$, Donc $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MG^2 + \varphi(G)$.

- Si $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$. □

Ensemble des points M tels que $\varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \overrightarrow{MA}_k^2 = k$.

1. Si $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \neq 0 \Rightarrow \varphi(M) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MG^2 + \varphi(G) \Rightarrow \varphi(M) = k \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k MG^2 + \varphi(G) = k \Rightarrow MG^2 = \frac{k-\varphi(G)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k} = \lambda$.
   (a) Si $\lambda < 0$ l'ensemble des points M cherchés est l'ensemble vide.
   (b) Si $\lambda = 0$ l'ensemble des points M cherchés est le singleton $\{G\}$.
   (c) Si $\lambda > 0$ l'ensemble des points M cherchés est un cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$.
2. Si $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = 0 \Rightarrow \varphi(M) = 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I)$ $\varphi(M) = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) + \varphi(I) = k \Rightarrow 2\overrightarrow{MI}g(I) = k - \varphi(I)$. Posons $2g(I) = \overrightarrow{v}$ et $k - \varphi(I) = \beta$,on a donc : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{v} = \beta$,
   (a) Si $\beta = 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par I est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$.
   (b) Si $\beta \neq 0$ l'ensemble des points M cherchés est une droite passant par son projeté orthogonale sur $D(I,\overrightarrow{v})$ perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$.

Ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$. Soit A et B deux points distincts du plan, K un réel strictement positif. $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2 \Leftrightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0$

1. Si $k = 1$ alors $MA = MB$, l'ensemble des points M cherchés est la médiatrice du segment $[AB]$
2. Si $k \neq 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$, il existe un point unique G barycentre des points pondérés : $(A, 1); (B, -k^2)$. $MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$ $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{G_1B} = \overrightarrow{0}$ $G_2 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{G_2B} = \overrightarrow{0}$ $(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} + k\overrightarrow{MG_1} + k\overrightarrow{G_1B}).(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A} - k\overrightarrow{MG_2} - k\overrightarrow{G_2B}) = 0 \Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{MG_1}.(1-k)\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow (1+k)(1-k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0$. Donc l'ensemble des points M cherchés est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

1.6 Exercice

Exercice 1.6.1. *Voir les maths de noël premier s 6.4 (Barycentre).*

Exercice 1.6.2. *Soit A, B, C un triangle, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'\gamma'$ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha' + \beta' + \gamma' = \neq 0$. On considère M le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et (C, γ), puis M' le barycentre de $(A, \alpha'), (B, \beta')$ et (C, γ').*

Démontrer que $M = M'$ si et seulement si les vecteurs (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont colinéaires. Ce résultat subsiste-t-il si on considère le barycentre de 4 points ?

Exercice 1.6.3. *Étant donnés deux points A et B du plan et k un réel strictement positif, on désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan distincts de B et tels que $\frac{MA}{MB} = k$.*

1. *Rappeler la nature de Γ.*
2. *On suppose désormais que $k \neq 1$. Démontrer que M appartient à Γ_k si et seulement si le produit scalaire $(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})$ est nul.*
3. *En déduire que Γ_k est un cercle dont on précisera le diamètre.*
4. *Application : soit ABC un triangle non isocèle en C et, sur la parallèle en B à (AC), les points C_1 et C_2 tels que $BC_1 = BC_2 = BC$. Démontrer que (CC_1) et (CC_2) sont sécantes avec (AB) en des points notés I et J. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.*

Exercice 1.6.4.
<u>Partie A</u>

Soit, dans l'espace E, quatre points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. *Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.*
2. *On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que : $||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = BD$.*
3. *On suppose maintenant que $ABCD$ est un rectangle.*

   Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que :
   $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ ainsi que les milieux I, J, K et L de $[AA'], [BB'], [CC']$ et $[DD']$ respectivement.

1. *Montrer que L est barycentre des points I, J et K affectés de coefficients que l'on précisera. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.*
2. *Soit O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes $IJKL, ABCD$ et $A'B'C'D'$. Montrer que O est le milieu de $[PQ]$.*

Exercice 1.6.5. *On considère un triangle ABC du plan.*

1. (a) *Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$*
   (b) *Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A, 1); (B, 5); (C, -2)\}$.*
2. (a) *Soit J le milieu de $[AB]$.*

   Exprimer $\overrightarrow{GG'}$, $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

   (b) *Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).*

   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de $\{(A, a'); (C, c')\}$.

Exercice 1.6.6. *Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1; 1]$. On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (c - k)\}$.*

1. *Représenter les points A, B, C, le milieu de I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.*
2. (a) *Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[-1; 1]$, on a l'égalité : $AG_k = \frac{-k}{k^2+1}BC$.*
   (b) *Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$.*
   (c) *En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1; 1]$.*

   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.
3. *Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :*
   $||2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|| = ||2\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}||$.
4. *Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :*
   $||2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}|| = ||2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}||$.
5. *L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0; 0; 2), (-1; 2; 1)$ et $(-1; 2; 5)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.*

   1) *Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.*

   (a) *Calculer le rayon du cercle C intersection de E et F.*

2 ARITHMÉTIQUE

2.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$ ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$ ensemble des entiers naturel.
$\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, ...$ $\mathbb{Z}^*_- = ..., -4, -3, -2, -1.$
Soit $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{Z} = ..., -2a, -a, a, 2a, 3a, ...$
$a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a.

Notation :

pgcd = plus grand diviseur commun
ppcm = plus petit commun multiple

Diviseur commun positif à 6 et 8 sont 1,2 donc le $pgcd(6, 8) = 2$.
$6\mathbb{Z} = 0, 6, 12, 24, 30, ...$ $8\mathbb{Z} = 0, 8, 16, 24, 32, ...$ $ppcm(6, 8) = 24$

Relation entre ppcm et pgcd de a et b. $ppcm(a, b) \times pgcd(a, b) = a \times b$.

On note : $a \wedge b = pgcd(a, b)$ et $a \vee b = pgcd(a, b)$

Définition 2.1. Un entier $p \geq 2$ pour le quel $D(P) = \pm 1, \pm P$ s'appelle **nombre première**.

Les nombres premières sont : 2,3,5,7,11,13,17,19, $\cdots$.

Définition 2.2. Soit a et b dans $\mathbb{Z}$. On dit que b divise a (ou que b est diviseur de a) s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.

On note : $b \mid a$. On dit aussi que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.

Remarque 2.1. 1 (-1) divise tous les entiers et 0 est divisible par tous les entiers car 0 $\times a = 0$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

Propriété 2.1.

1. *Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$ (la transitivité).*
2. *Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ ou $a = -b$ ($a = \pm b$).*
3. *Si $c \mid a$ et $c \mid b$ alors $c \mid \lambda a + \lambda' b$.*

Démonstration.

1. $a \mid b \Rightarrow b = ka$ ($k \in \mathbb{Z}$). $b \mid c \Rightarrow c = k'b$ ($k' \in \mathbb{Z}$) donc $c = k'ka$. soit $\lambda = k'k \in \mathbb{Z}$. On a $c = \lambda a$ et $a \mid c$.
2. $a \mid b \Rightarrow b = ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $b \mid a \Rightarrow a = k'b$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. Comme $b \neq 0$, en divisant par b on obtient $1 = kk'$ donc, soit $k = k' = -1$ donc $b = a$ ou $b = -a$.
3. $c \mid a \Rightarrow a = kc$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $c \mid b \Rightarrow b = k'c$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. $\lambda a + \lambda b = \lambda kc + \lambda' k' c = c\ (\lambda c + \lambda' c')$. On pose $\alpha = kc + k'c' \in \mathbb{Z}$. On a $\lambda a + \lambda' b = \alpha c$ donc $c \mid \lambda a + \lambda' b$.

$\square$

Démonstration par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p(n)$ une propriété qui dépend de n. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p(n_0)$ est vrai et $\forall n \geq n_0$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ alors $\forall n \geq n_0$ (p_n) est vrai.

Exemples 2.1. *Montrer par récurrence sur n que 3 divise $n^3 - n$ pour tout entier $n \geq 2$.*

Solution 2.1. ***initialisation :*** *Pour $n = 2$ $2^3 - 2 = 6$ or $6 = 3 \times 2$ donc vrai pour $n = 2$.*

Hérédité : *Soit $n \geq 2$, on suppose que la propriété est vrai au rang n et on veut montrer que 3 divise $(n+1)^3 - (n+1)$. On a 3 divise $n^3 - n$ donc $n^3 - n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ A t-on $(n+1)^3 - (n+1) = 3k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ oui car, $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 3k + 3n^2 + 3n = 3(k + n^2 + n)$ soit $k' = k + n^2 + n$ On a : $(n+1)^3 - (n+1) = 3k'$.*

Division euclidien.

Théorème 2.1 (Théorème fondamental)**.** *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe des entier q et r unique tels que $\boldsymbol{a = bq + r}$ avec $a \leq r \leq b$.*

2.2 PPCM et PGCD

2.2.1 PPCM (*plus petit commune multiple*)

Définition 2.3. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, il y a des multiple commun de a et b dans $\mathbb{N}^*$. $\mid a \mid \mid b \mid$ par exemple, il y en alors un plus petit, noté $ppcm(a, b)$ ou $a \vee b$.

Exemple : $10 \vee 12 = 60$ car $10 = 5 \times 2$ et $12 = 2 \times 2 \times 3$

Propriété 2.2. *Les multiples communs à a et b sont les multiple de $a \vee b$. Autrement dit : m multiple de a et $b \Leftrightarrow (a \vee b)|m$ ou $a|m$ et $b|m \Leftrightarrow (a \vee b)|m$.*

Démonstration. $\Leftarrow$ évident car $a|a \vee b$ et $b|a \vee b$. $\Rightarrow$ Supposons que $a|m$ et $b|m$, on a $m = (a \vee b)q + r$ avec $0 \geq r < a \vee b$. Mais alors $a|r$ et $b|r$ donc $r = 0$ par définition du ppcm. □

2.2.2 PGCD (*plus grand commun diviseur*)

Définition 2.4. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. considérons leur commun dans $\mathbb{N}*$. Il y a des diviseurs commun et ils sont en nombre fini, donc il y en a un plus grand noté $pgcd(a, b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple : $12 \wedge 30 = 6$ car $D(12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$ et $D(30) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

Remarque 2.2. $(-a) \wedge b = a \wedge (-b) = a \wedge b$. On peut toujours se ramener au cas $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.5. a et b sont ***premier entre eux*** ou (a est premier avec b) si $a \wedge b = 1$.

Corollaire 2.1. *Les diviseurs communs entre a et b sont des diviseurs de $a \wedge b$. Autrement dit $d|a$ et $a|b \Rightarrow d|a \wedge b$.*

Lien entre PGCD et PPCM

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, $D = a \wedge b$, $m = a \vee b$. On pose $a = Da'$ et $b = Db'$. avec $a' \wedge b' = 1$ alors

$$\begin{cases} M = Da'b' = ab' = a'b \\ MD = ab \end{cases}.$$

Démonstration. $Da'b' = ab' = a'b$ est un multiple commun de a et de b donc $M|Da'b'$.
Inversement, $M = k_1 a = ka'D$ donc a' divise $\frac{M}{D}$ (qui est un entier). De même, b' divise $\frac{M}{D}$. Comme $a' \wedge b' = 1$, alors $a'b'|\frac{M}{D}$ d'où $Da'b'$ divise M. □

2.2.3 Algorithme d'Euclide (A.E)

L'algorithme d'Euclide est une méthode pratique pour calculer le pgcd de deux entiers. Le pgcd est ***le dernier reste non nul*** de l'algorithme d'Euclide.

Exemple : $2010 = 871 \times 2 + 268$; $817 = 268 \times 3 + 67$; $268 = 67 \times 4 + 0$, donc le $pgcd(2010, 871) = 67$.

Explication de l'algorithme d'Euclide : Si $a = bq + r$ alors les diviseurs de a et b sont les même que ceux de b et r. En effet, si $d|a$ et $d|b$ alors $d = a - bq$ autrement dit r.

Inversement, si $d|b$ et $d|r$ alors $d|bq + r$. l'algorithme d'Euclide : $a = bq_1 + r_1$; $b = r_1 q_2 + r_2$; $\cdots$; $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ et $r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0$. On a $b > r_1 > r_2 > \cdots \geq 0$ la suite des non nul est strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ donc elle est obligatoirement fini. La fin de l'algorithme est nécessairement caractérisée par un reste nul, d'où, $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$, car $r_n | r_{n-1}$.

2.3 Théorème de Bezout et ses conséquences

Théorème de Bachet. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = a \wedge b$.

Théorème de Bezout. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, a et b sont premier entre eux implique qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Démonstration. $\Rightarrow$ c'est le théorème de *Bachet* avec $a \wedge b = 1$.
$\Leftarrow$ Si $d|a$ et $d|b$ alors $d|au + bv (= 1)$ on a $d = \pm 1$ donc a et b sont premiers entre eux. □

Corollaire 2.2. *Soit $D = a \wedge b$. On a $a = Da'$ et $b = Db'$ avec a' et b' premiers entre eux.*

Démonstration. On a d'après Bachet, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = D$ alors $Da'u + Db'v = D$. On simplifie par D, on obtient $a'u + b'v = 1$ donc d'après Bezout, a' et b' sont premiers entre eux. □

Théorème de Gauss. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a|c$.

Démonstration. On a $bc = ka$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, $au + bv = 1$ $acu + bcv = c$ par conséquent $c = a(cu + kv)$ donc $a|c$. □

Théorème 2.2. *Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$. Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$.*

Démonstration. D'après Bezout, ou bachet, il existe $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ et $au' + bv' = 1$. En multipliant ces deux égalités, on obtient $(au + bv)(au' + bv') = 1$, soit $(auv' + cuv' + u'bv) + bc(vv') = 1$ d'après Bezout, on conclut que $a \wedge (bc) = 1$. □

Théorème 2.3. *Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ si $a|b$, $b|c$ et $au + bv = 1$ alors $ab|c$.*

Démonstration. On a $b|c$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $c = ka$, on a $b|c$ donc $b = ka$ comme $a \wedge b = 1$ donc d'après Gauss $b|k$. Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $k = bk'$ on a $c = ka = bk'a$ donc $ab|c$. □

2.4 Équation diophantienne (résolution dans $\mathbb{Z}$ de $ax + by = c$)

On se donne rois entiers $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $c \in \mathbb{Z}$, on cherche les solutions $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = c$.

1. On calcule $a \wedge b$.
   (a) Si $a \wedge b$ ne divise pas c, alors il y'a pas de solution car $A \wedge b$ doit diviser $ax + by$.
   (b) Si $a \wedge b$ divise c, alors en divisant $ax + by = c$ par $a \wedge b$, on se ramène à résoudre $a'x + b'y = c'$ avec $a' \wedge b' = 1$. Car si on note $D = a \wedge b$ on a $a = Da'$, $b = Db'$ et $c = Dc'$ avec $a' \wedge b' = 1$.
2. On résoudre $a'x + b'y = c'$ où $a' \wedge b' = 1$ de solution générale s'écrit

$$\begin{cases} x = x_0 + kb' \\ y = y_0 - ka' \end{cases},$$

   avec $k \in \mathbb{Z}$ et (x_0, y_0) une solution particulière.

Démonstration. Par l'algorithme d'Euclide, on sait trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$. En multipliant par c cette équation, on obtient, $acu + bcv = c$ donc (cu, cv) est une solution particulière de $ax + by = c$.
• On note (x_0, y_0) une solution particulière de $ax + by = c$. On a : $ax_0 + by_0 = c$. En comparant les deux equations, on a : $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ donc d'après Gauss $b|x - x_0$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tels que $x - x_0 = kb$ en remplaçant, on obtient $akb = b(y_0 - y)$, c'est à dire $y = y_0 - ka$
• Réciproquement, si $\begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases}$
Avec $k \in \mathbb{Z}$ et (x_0, y_0) une solution particulière alors $ax + by = (a(x_0 + kb) + b(y_0 - ka)) \Leftrightarrow ax_0 + akb + by_0 - bka = ax_0 + by_0 = c$. □

Exemples 2.2. *L'objectif est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\wp$ ayant pour équation cartésienne : $39x + 27y + 7z = 53$. Soit $M(x; y; z)$ un point appartient un plan $\wp$ et au plan d'équation $z = 5$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.*

1. *Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation. $(E) : 13x + 9y = 6$.*
2. *justifier que l'équation $(S) : 13x + 9y = 1$ admet au moins un couple solution.*
3. *Donner un couple, solution particulière de l'équation (S), en déduire une solution particulier de l'équation E.*
4. *Résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.*

e. *Vérifier s'il existe des points appartenant au plan $\wp$ et au plan d'équation $z = 5$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.Si oui, déterminer les coordonnées de ces points.*

Solution 2.2.

1. *Si* $z = 5$ *alors* $39x + 27y + 35 = 53 \Leftrightarrow 39x + 27y = 18$. *En divisant à gauche et à droite de l'égalité par* 3 *on obtient* $(E) : 13x + 9y = 6$.
2. *Les nombres* 13 *et* 9 *sont premier entre eux (pgcd*$(13, 9) = 1$*) donc d'après le théorème de Bézout l'équation* $13x + 9y = 1$ *admet au moins un couple de solution.*
3. $13 = 9 \times 1 + 4$ $(\Rightarrow 4 = 13 - 9)$ *;* $9 = 2 \times 4 + 1 \Rightarrow 1 = 9 - 2(13 - 9) \Rightarrow 1 = 9 \times 3 + 13 \times (-2)$, *en multipliant par* 6 *à gauche et à droite de l'équation, on a* $6 = 9 \times 18 + 13 \times (-12)$. *Donc le couple* $(-2; 3)$ *est un couple solution particulier de* (S), *et le couple* $(-12; 18)$ *est un couple solution particulier de* (E).
4. *Si* $(x; y)$ *est un couple de solution , alors* $13x + 9y = 6$. *Comme* $(-12; 18)$ *est solution, donc* $13(-12) + 9(18) = 6$. *En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :* $13x + 9y - 13(-12) - 9(18) = 0 \Rightarrow 13(x + 12) = 9(18 - y)$, *on conclut de cette égalité que* 13 *divise* $9(18 - y)$ *et que* 9 *divise* $13(x - 12)$, *comme* 9 *et* 13 *sont premier entre eux, d'après le théorème de Gauss* 13 *divise* $18 - y$ *et* 9 *divise* $x + 12$ *donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $y = 18 - 13k$ *et* $x = -12 + 9k$.

   Reprenons l'équation (E) *:* $13(-12+9k)+9(18-13k) = 6$. *L'égalité est vérifiée. Le couple* $(x; y)$ *est solution de* (E).
5. *Il faut chercher* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $-12 + 9k \in \mathbb{N}$ *et* $18 - 13k \in \mathbb{N}$. *Donc* $k \geq \frac{12}{9} \simeq 1.33$ *et* $k \leq \frac{18}{13} \simeq 1.38$, *donc il n'existe pas des points appartenant au plan* $\wp$ *et au plan d'équation* $z = 5$ *et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels.*

Exemples 2.3. *On suppose que le chiffrement de Hill agit sur des couples de nombres de l'ensemble* $\{0, 1, \cdots, 25\}$ *(Dans un tableur on assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier. A →0, B → 1,* $\cdots$ *,Y → 24 et Z → 25). La fonction de codage*$f : (x_1; x_2) \mapsto (y_1; y_2)$ *est telle que* (S)

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \equiv y_1 (mod\ 26) \\ 5x_1 + 7x_2 \equiv y_2 (mod\ 26) \end{cases}$$

1. *Utiliser le tableur pour coder "SAID".*
2. *On doit trouver la fonction de décodage* $g : (y_1; y_2) \mapsto (x_1; x_2)$.

   (a) *Démontrer que :* $\begin{cases} 43x_1 \equiv 7y_1 - 4y_2 (mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5y_1 + 9y_2 (mod\ 26) \end{cases}$
   ainsi, en posant $7y_1 - 4y_2 = z_1$ *et* $-5y_1 + 9y_2 = z_2$, *on est amené à chercher les entiers* x_1 *et* x_2 *tels que :* $43x_1 \equiv z_1 (mod\ 26)$ *et* $43 \equiv z_2 (mod\ 26)$.

   (b) *Monter qu'il existe des entier relatifs* p *et* q *tels que* $43p + 26q = 1$.

   (c) *Trouver un entier relatif* p *tel que* $43p \equiv 1 (mod\ 26)$. *R Déduisez-en que :* $x_1 \equiv 5y_1 + 12y_2 (mod\ 26)$ *et* $x_2 \equiv 15y_1 + 25y_2 (mod\ 26)$.

   e) *Utiliser le tableur pour décoder le mot "LJAIANK". Ce mot étant de sept lettres, ajoutez la lettre 'U' à la fin du pour avoir des paquets de deux lettres. Le décodage terminé, on supprime la lettre dont le code est 'U'.*

Solution 2.3. *1.*

S	*A*	*I*	*D*
18	*0*	*8*	*3*
6	*12*	*6*	*9*
G	*M*	*G*	*J*

2. (a) $\begin{cases} 43x_1 \equiv 7y_1 - 4y_2 (mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5y_1 + 9y_2 (mod\ 26) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 43x_1 \equiv 7(9x_1 + 4x_2) - 4(5x_1 + 7x_2)(mod\ 26) \\ 43x_2 \equiv -5(9x_1 + 4x_2) + 9(5x_1 + 7x_2)(mod\ 26) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 63x_1 + 28x_2 - 20x_1 - 28x_2 \equiv 43x_1 (mod\ 26) \\ -45x_1 - 20x_2 + 45x_1 + 63x_2 \equiv 43x_2 (mod\ 26) \end{cases}$

(b) *Les nombres* 43 *et* 26 *sont premier entre eux* $(pgcd(13, 9) = 1)$ *donc d'après le théorème de Bézout il existe des entier relatifs* p *et* q *tels que* $43p + 26q = 1$.

(c) *Trouvons un entier relatif* $p/\ 34p \equiv 1(mod 26)$ *l'aide de l'algorithme d'Euclide.*
$43 = 26 + 17 \qquad 26 = 17 + 9 \qquad 9 = 8 + 1$
$17 = 43 - 26 \qquad 9 = 26 - (43 - 26) = -43 + 2 \times 26 \qquad 8 = 2 \times 43 - 3 \times 26$ *donc* $1 = -3 \times 43 + 5 \times 26$ *donc* $-3 \times 43 \equiv 1(26)$

(d) *Déduisons que :* $x_1 \equiv 5y_1 + 12y_2 (mod\ 26)$ *et* $x_2 \equiv 15y_1 + 25y_2 (mod\ 26)$.

$\begin{cases} 43x_1 \equiv z_1 (mod 26) \\ 43x_2 \equiv z_2 (mod\ 26) \end{cases}$ *on multiplie par* -3.

$\begin{cases} -3 \times 43 \equiv -3 \times z_1 \equiv -3(7y_1 - 4y_2) \equiv -21y_1 + 12y_2 \equiv 5y_1 + 12y_2 (mod 26) \\ -3 \times 43x_2 \equiv -3 \times z_2 \equiv -3(-5y_1 + 9y_2) \equiv 15y_1 - 27y_2 \equiv 15y_1 + 25y_2 (mod\ 26) \end{cases}$

e. *Décodage du mot "LJAIANK"*

L	*J*	*A*	*I*	*A*	*N*	*K*
11	*9*	*0*	*8*	*0*	*13*	*10*
7	*0*	*18*	*18*	*0*	*13*	*4*
H	*A*	*S*	*S*	*A*	*N*	*E*

2.5 Congruence

Définition 2.6. m est un entier naturel non nul. Dire que deux entier relatifs a et b sont ***congrus modulo m*** signifie qu'il sont le ***même reste*** dans la division euclidienne par m.

***Notation* :** On écrit $a \equiv b(mod\ b)$. On lit a **congru à** b **modulo** m.
Exemple : $11 \equiv 5(mod\ 4)$ et $-4 \equiv 2(mod\ 3)$.

Théorème 2.4. *1.* m *est un entier naturel non nul, pour tous entiers relatifs* a *et* b*. On a* $a \equiv b(mod\ m)$ *si est seulement si* m *divise* $a - b$.

2. m *est un entier naturel non nul, pour tous entiers relatifs* a*,* b *et* c*.*
Si $a \equiv b(mod\ m)$ *et* $b \equiv c(mod\ m)$*, alors* $a \equiv c(mod\ m)$.
3. m *est un entier naturel non nul et* a*,* b*,* a' *et* b' *sont des entiers relatifs.*
Si $a \equiv b(mod\ m)$ *et* $a' \equiv b'(mod\ m)$*, alors :*

- $a + a' \equiv b + b'(mod\ m)$
- $a - a' \equiv b - b'(mod\ m)$
- $aa' \equiv bb'(mod\ m)$.

Exemples 2.4. *Montrer que* 5 *divise* $9^k - 4^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Solution 2.4. $9 \equiv 4(mod\ 5) \Rightarrow 9^4 \equiv 4^k(mod\ 5)$ *donc* $9^4 - 4^k \equiv 4^k - 4^k(mod\ 5) \equiv 0(mod\ 5)$ *donc* 5 *divise* $9^k - 4^k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

théorème des restes chinois.

Théorème 2.5. *Soient m, n des entiers supérieur ou égal à 2 premier entre eux, $a, b \in \mathbb{Z}$ alors la solution générale du système* $\begin{cases} x \equiv a(mod\ m) \\ x \equiv b(mod\ n) \end{cases}$ *est donnée par $x = x_0 + kmn$ où $k \in \mathbb{Z}$ et x_0 est une solution particulier.*

Démonstration. On cherche $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} x = a + mu \\ x = b + nv \end{cases} \Rightarrow a+mu = b+nv \Rightarrow mu-nv = b-a$ comme $m \wedge n = 1$ alors l'équation a des solutions : elle sont données par $u = u_0 + kn$ $k \in \mathbb{Z}$ d'où $x = a + mu_0 + kmn = x_0 + kmn$ où x_0 est une solution particulière . □

Exemples 2.5. Objectif, *trouver les entiers naturels n qui divisés par 7 donnent 5 pour reste, et divisés par 11 donnent 4 pour reste.*

1. *Justifier l'affirmation suivant : « n appartient à ε » équivaut à « il existe trois entiers naturels n,p,q tels que* (S) $\begin{cases} n = 7p + 5 \\ n = 11q + 4 \end{cases}$ *»*
2. *Prouver que (S) équivaut à (S')* $\begin{cases} n = 7p + 5 & (1) \\ 11q - 7p = 1 & (2) \end{cases}$.
3. *Montrer qu'il existe des entiers relatifs p et q tels que $11q - 7p = 1$.*
4. *Démonter que l'équation $11q + 7p = 1$ équivaut à $11(q - 2) = 7(p - 3)$.*

e. *Déduisez-en l'ensemble des couples $(p; q)$ solutions de (2).*

f. *Déduisez-en les valeurs de n et concluez.*

Solution 2.5.

1. $\begin{cases} n \equiv 5(7) \\ n \equiv 4(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{il existe } p \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } n = 7p + 5 \\ \textit{il existe } q \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } n = 11q + 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} n = 7p + 5 \\ n = 11q + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q + 4 = 7p + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q - 7p = 5 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7p + 5 \\ 11q - 7p = 1 \end{cases}$
3. *Comme 11 et -7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe p et q tels que $11q - 7p = 1$.*
4. $11(q-2) = 7(p-3) \Leftrightarrow 11q - 11 \times 2 = 7p - 7 \times 3 \Leftrightarrow 11q - 7p = 11 \times 2 - 7 \times 3 \Leftrightarrow 11q - 7p = 1$

e. *D'après d. 11 divise $7(p-3)$ et comme 11 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $p - 3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $p - 3 = 11k$ donc $p = 3 + 11k$. En remplaçant dans $11(q - 2) = 7(p - 3)$ on an $11(q - 2) = 7 \times 11k \Leftrightarrow q = 2 + 7k$.*

f. $n = 7p + 5$ $n = 7(3 + 11k) + 5$ *donc* $n = 26 + 7 \times k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.
Remarque : $n \equiv 26(7 \times 11k)$

2.6 Exercice

Exercice 2.6.1. *Montrer que les confirmations suivantes sont vrai ou faux.*

1. *Le quotient de (-23) par (-5) est par 4.*

2. *Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entier b et 64 sont premiers entre eux.*
3. $147^{146} \equiv 2(mod\ 12)$.
4. $x^2 \equiv 0(mod\ 8)$ *équivaut à* $x \equiv 0(mod\ 8)$
5. *Si* $\begin{cases} x \equiv 3(mod\ 4) \\ x \equiv 4(mod\ 5) \end{cases}$ *alors* $x \equiv 19(mod\ 20)$
6. *Soit n un entier. Alors les nombres $2n + 3$ et $5n + 7$ sont premiers entre eux.*

Exercice 2.6.2.

1. *Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.*
2. *Soit $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n \in \mathbb{N}$. Déterminer suivant les valeurs de n les restes de A_n modulo 5.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $A_n \equiv 3(mod\ 5)$.*
4. *Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de l'entier $N = 1253^{2014} \times 13^{2015}$.*

Exercice 2.6.3.

1. *Vérifier que $7^2 \equiv -1(mod\ 10)$.*
2. *Quel est le chiffre des unités de l'entier naturel $1 + 7 + 7^2 + \cdots 7^{400}$?*

Exercice 2.6.4.

1. *On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.*
   (a) *Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).*
   (b) *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).*
2. *Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système* $\begin{cases} n \equiv 6(mod\ 7) \\ n \equiv 15(mod\ 18) \end{cases}$

Exercice 2.6.5. *Soit n un entier nature, on considère les entiers $p = n + 5$ et $q = 2n + 3$ et on note $d = PGCD(p, q)$.*

1. (a) *Calculer $2p - q$. En déduire les valeurs possibles de d.*
   (b) *Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.*
   (c) *Montrer que p est une multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$*
2. *Montrer que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.*
3. *Déterminer d dans les cas suivants,*
   (a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.
   (b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$

Exercice 2.6.6.

1. *On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x + 53y = 1$.*

(a) *Vérifier que* $(-9, 8)$ *est une solution de* (E).

(b) *Résoudre l'équation* (E).

(c) *Déterminer l'ensemble des inverses de* 47 *modulo* 54. *R En déduire que* 44 *est le plus petit inverse positif de* 47 *modulo* 53.

2. (a) *Justifier que* $45^{52} \equiv 1[53]$.

   (b) *Déterminer alors le reste de* 45^{106} *modulo* 53.

3. *Soit* $N = 1 + 45 + 45^2 + \cdots + 45^{105} = \sum\limits_{k=0}^{k-105} 45^k$.

   (a) *Montrer que* $44N = 10[53]$.

   (b) *En déduire le reste de* N *modulo* 53.

Exercice 2.6.7. *Soit dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* $(E) : 3x - y = 4$.
Trouver une solution particulier évident et résoudre l'équation (E) *dans* $\mathbb{Z}^2$.

Soit (u_n) *la suite réelle définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$

1. (a) *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $u_n = 2 + 3^{n+1}$.

   (b) *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $3^n \equiv 1[2]$.

   (c) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est un nombre impair.*

2. *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le couple* (u_n, u_{n+1}) *est une solution de l'équation* (E).

3. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *les termes* u_n *et* u_{n+1} *sont premiers entre eux.*

4. *Déterminer alors le* $PGCD(6 + 3^{1002}, 6 + 3^{1003})$.

3 CONIQUES

3.1 Étude analytique

Définition 3.1. On appelle conique les courbes du second degré c'est à dire les courbes dont les points $M(x, y)$ dans un repère orthonormé, vérifient l'équation implicite suivante :

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e \textbf{ avec } |a| + |b| \neq 0$$

. Les coefficients $a, b, c, dete$ étant réels.

3.1.1 Coniques dépourvues de centre

Théorème 3.1. *Lorsque le produit $ab = 0$ avec $|a| + |b| \neq 0$, on a si :*

1. *Si $a = 0$ et $c = 0$ suivant le signe de $\Delta_1' = d^2 - be$.*
   (a) *$\Delta_1' > 0$* ***deux droites horizontales*** *d'équation $y = y_1 ety = y_2$.*
   (b) *$\Delta_1' = 0$* ***une droite horizontale*** *d'équation $y = y_0$*
   (c) *$\Delta_1' < 0$ aucun point.*
2. *Si $a = 0$ et $c \neq 0$* ***une parabole*** *d'axe parallèle à (Ox) du type $Y^2 = 2pX$.*
3. *Si $b = 0$ et $d = 0$suivant le signe de $\Delta_2' = c^2 - ae$*
   (a) *$\Delta_2' > 0$* ***deux droites verticales*** *d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$*
   (b) *$\Delta_2' = 0$* ***une droite verticale*** *d'équation $x = x_0$*
   (c) *$\Delta_2' < 0$ aucun point.*
4. *$b = 0$ et $d \neq 0$ une parabole d'axe parallèle à (Oy) du type $Y = aX^2$*

3.1.2 Coniques à centre

Par définition, une conique à pour équation $ax - 2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + \frac{2c}{a}) + b(y^2 + \frac{2d}{b}) + e = 0 \Leftrightarrow a[(x + \frac{c}{a})^2 + (\frac{c^2}{a^2})] + b[(y + \frac{d}{b})^2 + \frac{d^2}{b^2}] + e = 0 \Leftrightarrow a(x + \frac{c}{a})^2 + b(y + \frac{d}{b})^2 = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$
On pose alors $k = \frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{b} - e$ e et l'on fait le changement de variable suivant :
$\begin{cases} X = x + \frac{c}{a} \\ Y = y + \frac{d}{b} \end{cases}$ de nouvelle origine $\Omega(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b})$,
on obtient alors l'équation : $aX^2 + bY^2 = k$.

1. $ab > 0$
   (a) Si $k = 0$ la seul solution de l'équation est $X = 0$ et $Y = 0$, donc la conique se réduit à Ω.
   (b) Si $k < 0$ l'équation n'a pas de solution donc la conique ne possède aucun point.
   (c) $k > 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$.
   On pose alors comme $a > 0$, $b > 0$ et $k > 0$: $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$. On obtient alors : $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ équation d'une ellipse.

   Remarque 3.1. α : longueur de demi-axe horizontal de l'ellipse.
   β : longueur de demi-axe vertical de l'ellipse.
   Si $\alpha = \beta$ l'ellipse est alors un cercle de rayon α.

2. $ab < 0$
   (a) Si $k = 0$ l'équation devient $Y^2 = -\frac{a}{b}X^2 \Leftrightarrow Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$. la conique est alors la réunion de deux droites.
   (b) $k \neq 0$, on divise par k : $\frac{a}{k}X^2 + \frac{b}{k}Y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{k}{a}} + \frac{Y^2}{\frac{k}{b}} = 1$
   Comme a et b sont de signes contraires deux cas sont envisageables :
      i. $\frac{k}{a} >$ et $\frac{k}{b} < 0$, on pose alors $\alpha^2 = \frac{k}{a}$ et $\beta^2 = -\frac{k}{b}$,
      on obtient alors : $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$
      ii. $\frac{k}{a} <$ et $\frac{k}{b} > 0$, on pose alors $\alpha^2 = -\frac{k}{a}$ et $\beta^2 = \frac{k}{b}$,
      on obtient alors : $-\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = -1$
   On obtient alors dans ces deux cas l'équation d'une hyperbole.

Théorème 3.2. *Lorsque le produit $ab \neq 0$, la conique possède un centre et son équation peut s'écrire sous la forme :*

$$aX^2 + bY^2 = k \textbf{ \textit{de centre} } \Omega(-\frac{c}{a}; -\frac{d}{b})$$

1. $ab > 0$
   (a) $k = 0$ La conique se réduit à un seul point Ω.
   *(b) $k < 0$ La conique ne possède **aucun point**.*
   (c) $k > 0$ La conique est une ellipse d'équation du type $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$

2. $ab < 0$
   *(a) $k = 0$ La conique est l'union de **deux droites** d'équation*
   $Y = \pm X\sqrt{-\frac{a}{b}}$ symétriques par rapport à (ΩX) et (ΩY)
   *(b) $k \neq 0$ La conique est **une hyperbole** d'équation du type*
   $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ d'asymptotes $Y = \pm\frac{\beta}{\alpha}X$

Remarque 3.2. Toutes les coniques à centre possèdent deux axes de symétrie (ΩX) et (ΩY).

3.2 Excentricité et foyers

Définition 3.2. Soit F un point fixe, D une droite fixe et e un réel strictement positif (F $\neq D$). Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur D. Une conique de **foyer F** est alors l'ensemble des points M vérifiant $\frac{MF}{MH} = e$. e est appelé **l'excentricité et *D* la directrice** de la conique. La perpendiculaire Δ à D passant par le foyer F est appelé **axe focal** de la conique.

Remarque 3.3.
1. On ne retrouve pas toutes les coniques définies analytiquement mais seulement les **coniques propres** c'est à dire la parabole, l'ellipse et l'hyperbole. Quand e tend vers 0, la conique se rapproche d'un cercle et quand e tend vers $+\infty$, la conique se rapproche de sa directrice.
2. Toutes les coniques ainsi définies sont symétriques par rapport à leur axe focal.

Théorème 3.3. *On appelle p la distance de F à la directrice D. Suivant les valeurs de l'excentricité e, on obtient les coniques suivantes :*

1. Si $e = 1$ la conique est une parabole d'équation $Y^2 = 2pX$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$. S étant le sommet de la parabole.

2. *Si* $e \neq 0$ *La conique possède un centre* Ω*, un deuxième foyer* F'*, symétrique de* F *par rapport à* Ω*. Son expression dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *est de la forme :*
   (a) $e < 1$, $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. *La conique est alors une ellipse.*
   (b) $e > 1$, $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. *La conique est alors une hyperbole. On a* $a^2 = \frac{e^2 p}{(1-e^2)^2}$ *et* $b^2 = \frac{e^2 p}{|1-e^2|}$

3.3 Éléments caractéristiques et Équation paramétrique d'une conique

3.3.1 Parabole

Théorème 3.4.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $y^2 = 2px$ *alors la canonique est un parabole. Dans le repère précédent, le foyer à pour coordonnées* $F(\frac{p}{2}, 0)$*.La directrice à pour équation* $x = -\frac{p}{2}$ *et le sommet de la parabole est le centre du repère.*
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0)*de la parabole est* $yy_0 - p(x + x_0)$*.*
3. *Une parabole d'équation* $y^2 = 2px$ *dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *a pour représentation paramétrique :* $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$.

Exemples 3.1. *Donner les éléments caractéristiques de la conique d'équation* $y^2-6y+2x+10 = 0$*. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse* -1*.*

Solution 3.1. $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = y^2 - 6y + 10 \Leftrightarrow -2x = (y-3)^2 + 1 \Leftrightarrow -2(x + \frac{1}{2}) = (y-3)^2$*. Dans le repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *avec* $\Omega(-\frac{1}{2}, 3)$ *on reconnaît la parabole* (P) *d'équation* $Y^2 = -2X$*. (excentricité :* $e = 1$*) de foyer* $F(-1, 0)$ *et de directrice d'équation* $Y = 1$*. Dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *cette parabole a pour foyer* $F(-\frac{3}{2}, 3)$ *et pour directrice la droite* $x = \frac{1}{2}$*. La sommet de cette parabole est le point* $S(\frac{1}{2}, 3)$*.* **Si x = -1** *alors* $y^2 - 6y + 8 = 0$ *ce qui donne* $y = 2$ *ou* $y = 4$*.*
• *La tangente à* (P) *en* $A(-1, 2)$ *a pour équation cartésienne*
$y \times 2 - 3(y + 2) + 1(x - 1) + 10 = 0$ *soit* $x - y + 3 = 0$
• *La tangente à* (P) *en* $B(-1, 4)$ *a pour équation cartésienne*
$y \times 4 - 3(y + 4) + 1(x - 1) + 10 = 0$ *soit* $x + y - 3 = 0$

3.3.2 Ellipse

Théorème 3.5.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ***avec*** $a^2 > b^2$*, alors la canonique est une ellipse.*
   Si on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :* $e = \frac{c}{a}$*,* $p = \frac{b^2}{c}$*, et* $\Omega F = c$
   Les foyers ont pour coordonnées $F(c, 0)$ *et* $F'(-c, 0)$*, les directrices ont pour équation* $x = \frac{a^2}{c}$ *et* $x = \frac{-a^2}{c}$*. Les sommets sont les points* $(a, 0)$*,* $(-a, 0)$*,*$(b, 0)$ *et* $(-b, 0)$*.*
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0) *de l'ellipse est* $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$*.*

3. *Une ellipse d'équation* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ *dans un repère* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ *a pour représentation paramétrique :* $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, *avec* $t\in[0;2\pi[$

Démonstration. Nous avons vu que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ était une ellipse. De plus si le foyer F se trouve sur l'axe des abscisses, le grand axe de l'ellipse se trouve sur les abscisses et donc $a^2>b^2$.
Comme $a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ donc $\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$, on a alors,

1. $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ en posant $c^2=a^2-b^2$ on obtient $e^2=\frac{c^2}{a^2}$ soit $e=\frac{c}{a}$
2. $b^2=\frac{e^2b^2}{1-e^2}\Leftrightarrow p^2=\frac{b^2(1-e^2)}{e^2}=\frac{b^2\times\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^4}{c^2}\Leftrightarrow p=\frac{b^2}{c}$.
3. $\Omega F=\frac{e^2p}{1-e^2}=\frac{b^2}{p}=b^2\times\frac{c}{b^2}=c$.

□

Définition 3.3. Soit D une droite, on appelle **affinité orthogonale** d'axe D et de rapport $k\in\mathbb{R}^*$, l'application affine f qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ où O est la projection orthogonale de M sur D.

Théorème 3.6. *Dans le repère orthonormé* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$*, soit*

1. *Le cercle* ε *de rayon* a.
2. *L'ellipse* ε *d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *avec* $a>b$. *On passe du cercle* ε *par une affinité orthogonale d'axe* (Ωx) *et de rapport* $\frac{b}{a}$.

Théorème 3.7. *Les tangentes d'un point du cercle* ε *et du point* M *correspondant à l'ellipse* ξ *sont sécantes à l'axe* (Ωx) *au même point* T.

Exemples 3.2. *Donner la nature de la conique d'équation* $3x^2+4y^2+x-39=0$ *en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse 3.*

Solution 3.2. $3x^2+4y^2+x-39=0\Leftrightarrow 3(x^2+2\frac{1}{6}x+\frac{1}{36})+4y^2-\frac{1}{12}-39=0\Leftrightarrow 3(x+\frac{1}{6})^2+4y^2=\frac{469}{48}$ $\Leftrightarrow \frac{(x+\frac{1}{6})^2}{\frac{469}{36}}+\frac{y^2}{\frac{469}{48}}=1$. *Dans le repère* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ *avec* $\Omega(-\frac{1}{6},0)$ *on reconnaît l'ellipse* (E) *d'équation* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, *avec* $a^2=\frac{169}{36}$ *et* $b^2=\frac{469}{48}$. *Comme* $a^2>b^2$ *son axe focal est* $(\Omega,\vec{i})$. *Par ailleurs,*$c^2=\frac{469}{12}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=\frac{469}{12^2}$ *donc* $c=\frac{\sqrt{469}}{12}$ *Cette ellipse a pour excentricité* $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. *Dans* $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, $F(\frac{\sqrt{469}}{12},0)$ $D: x=\frac{a^2}{c}=\frac{\sqrt{469}}{3}$ *et* $D':=-\frac{\sqrt{469}}{3}$. *Dans* $(O,\vec{i},\vec{j})$, $F(\frac{\sqrt{469}-2}{12},0)$ $D: x=\frac{2\sqrt{469}-1}{3}$ *et* $D':=\frac{-2\sqrt{469}-1}{3}$, **si x = 3** *alors* $27+4y^2+3-39=0$ *ce qui donne*$y^2=\frac{9}{4}$ *d'où* $y=\pm\frac{3}{2}$.
• *La tangente à* (E) *en* $A(3,\frac{3}{2})$ *a pour équation cartésienne* $3x(3)+4y(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}(x+3)-39=0$ *donc* $19x+12y-75=0$.
• *La tangente à* (E) *en* $B(3,-\frac{3}{2})$ *a pour équation cartésienne* $3x(3)+4y(-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}(x+3)-39=0$ *donc* $19x-12y-75=0$.

3.3.3 Hyperbole

Théorème 3.8.

1. *Si on peut mettre l'équation d'une conique, dans un repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *sous la forme :* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *alors la conique est une hyperbole. Si on pose* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ *on obtient alors les éléments caractéristiques suivants :* $e = \frac{c}{a}$, $p = \frac{b^2}{c}$ *et* $\Omega F = c$. *Les foyers ont pour coordonnées* $F(c, 0)$ *et* $F'(-c, 0)$, *les directrices ont pour équation* $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$ *et* $x = \frac{-a^2}{c} = \frac{-a}{e}$. *Les sommets sont les points* $(a, 0)$, $(-a, 0)$, *les asymptotes ont pour équations :* $Y = \frac{b}{a}X$ *et* $Y = -\frac{b}{a}X$
2. *L'équation de la tangente en un point* (x_0, y_0) *de l'hyperbole est* $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.
3. *Soit l'hyperbole* Γ *d'équation dans le repère orthonormé* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ *:* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *L'hyperbole* Γ *dans le repère normé centré en* Ω *et dirigé vers ses deux asymptotes* $(\Omega; \vec{u}; \vec{v})$ *a pour équation :* $XY = \frac{c^2}{4}$.

Démonstration. Nous avons vu que toute équation du second degré se mettant sous la forme : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ était une hyperbole. Comme $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ et $b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}$ donc $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$, on a alors,

1. $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}$ en posant $c^2 = a^2 + b^2$ on obtient $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ soit $e = \frac{c}{a}$
2. $b^2 = \frac{e^2b^2}{e^2-1} \Leftrightarrow p^2 = \frac{b^2(e^2-1)}{e^2} = \frac{b^2 \times \frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^4}{c^2} \Leftrightarrow p = \frac{b^2}{c}$.
3. $\Omega F = \frac{e^2p}{e^2-1} = \frac{b^2}{p} = b^2 \times \frac{c}{b^2} = c$.

□

Exemples 3.3. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *soit* M *un plan d'affixe* $z = x+iz$, M_1 *d'affixe* z^2 *et* M_2 *d'affixe* z^5. *On considère l'ensemble* $\mathbb{H} = \{M$ ***du plan tels que*** M, M_1 *et* M_2 ***sont alignés***$\}$. *Déterminer* $\mathbb{H}$.

Solution 3.3. $M(z), M_1(z^2)$ $M_2(z^5)$ *sont alignés* $\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{MM_2}}{\overrightarrow{MM_1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^5-z}{z^2-z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z^4-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ *et* $z \neq 0$ $\Leftrightarrow (z+1)(z^2+1) = 0 \in \mathbb{R}$ *et* $z \neq 0, z \neq 1 \Leftrightarrow im(x+iy+1)(x^2+2ixy-y^2+1) = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$. $\Leftrightarrow im(x^3 + 3ix^2y + x^2 - 3xy^2 + 2ixy + x - iy^3 - y^2 + iy + 1) = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$. $\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$. $\Leftrightarrow 3(x + \frac{1}{3})^2 - y^2 + 1$ *où* $x \neq 0, y \neq 0$ *et* $x \neq 1$. $\Leftrightarrow -\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1$ *c'est un équation réduite d'une l'hyperbole* $\mathbb{H}$ *privé de* O *et privé des points d'intersection de* $\mathbb{H}$ *avec la droite d'équation* $x = 1$, *les points* $K(0, \sqrt{6})$ *et* $K'(1, -\sqrt{6})$. *Alors* $\mathbb{H}$ *est de centre le point* $\Omega(\frac{-1}{3}, 0)$, *d'axe focale suivant* (Oy). *Soit* $M(x, y)$ *dans le repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *et* $M(X, Y)$ *dans le repère* $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. *Donc* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ *on aura* $\begin{cases} x = X - \frac{1}{3} \\ y = Y \end{cases}$ *(*)* *donc l'équation sera* $-\frac{X^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2}$, *alors* $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *et* $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. *Dans le repère* $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, $\mathbb{H}$ *est une hyperbole de foyer* $F(0, \frac{2}{3}\sqrt{2})$ *et* $F'(0, -\frac{2}{3}\sqrt{2})$ *d'axe transverse* (Oy) *de sommet* $A(0, \sqrt{\frac{2}{3}})$ *et* $A'(0, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, *d'excentricité* $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, *et de directrices* $D : Y = \frac{b^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *associé à* F. *Et* D *associée à* F', $D : Y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Dans le* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *et vu les relations (*)* $F(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{2})$, $F'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{2})$, $A(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}})$ *et* $A'(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$. *Donc* $\mathbb{H}$ *est un hyperbole privée de* k *et* k'.

3.4 Exercice

Exercice 3.4.1. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé.*

1. *Écrire l'équation de la parabole P de foyer $F(-1,2)$ et de directrice D d'équation $3x-2y+2=0$.*
2. *Écrire l'équation de l'ellipse E de foyer $F(2,1)$, de directrice D d'équation $x-2y-2=0$ et d'excentricité $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.*
3. *Écrire l'équation de l'ellipse E de foyer $F(1,0)$ et $F'(-1,2)$ et de demi-grande axe de longueur 3.*
4. *Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par un point fixe F et tangents à un cercle fixe C (on discutera selon la position de F par rapport à C).*
5. *Montrer que deux coniques sont semblables si et seulement si elles ont la même excentricité.*
6. *Montrer que deux paraboles sont isométriques si et seulement si elles ont le même paramètre.*
7. *Démontrer que $F=\{M(z)/\frac{z-i}{\bar{z}+4+i}\in i\mathbb{R}\}$ est inclus dans une conique que l'on tracera et dont on donnera tous les éléments caractéristiques.*

Exercice 3.4.2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Vérifier si les courbes d'équations suivantes sont des conique. Si oui, on donnera la nature (hyperbole, parabole, ellipse) et les éléments caractéristique.*

- $5x^2+8y^2+4xy+16x-8y=16$
- $x^2+2y^2-2x+4y=-5$
- $x^2+y^2+4xy-2x+4y=0$
- $x^2+2y^2-2xy+2x+6y=0$
- $4x^2-4y^2-2xy=1$
- $x^2+2xy+y^2+2x+2y=5$
- $xy+3x-y=5$
- $xy+3x+2y=-6$
- $3x^2-y^2-2xy+x+3y=3$
- $3x^2-4xy+2y^2-5x+y=8$
- $2x^2-5xy-3y^2+5x-y=-2$
- $x^2-2xy+y^2+2x-3y+3$
- $9x^2-12xy+4y^2-3x+2y=2$
- $x^2+2xy+y^2-4x+8y=-10$
- $x^2+4xy+4y^2-4x+2y=1$
- $9x^2-42xy+49y^2+12x-28y=-4$
- $x^2-6xy+y^2-3x+2y=4.$

Exercice 3.4.3. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit la courbe (Γ) dont une équation est : $y^2+2y-4x+3=0$.*

1) (a) *Montrer que (Γ) est une parabole dont on précisera les éléments caractéristiques.*
   (b) *Tracer Γ.*
2) *Soit le point $A(-1,1)$. Déterminer par leurs équations les tangentes (T) et (T') à la parabole (Γ) menées du point A, dont on précisera leurs points de contact avec (Γ).*

Exercice 3.4.4. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$. Soit f la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.*

1. *Déterminer la forme complexe de f.*
2. *Une courbe (C) a pour équation : $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0$.*
   (a) *Déterminer une équation cartésienne de (C') image de (C) par f.*
   (b) *En déduire que (C') est une ellipse que l'on caractérisera. Tracer (C').*
3. *Déterminer alors la nature de la courbe (C) et préciser ses caractéristiques.*

Exercice 3.4.5. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

1. *Écrire l'équation de l'hyperbole H de foyer $F(3, 2)$, de directrice D d'équation $x - y + 1 = 0$ et d'excentricité $\sqrt{2}$.*
2. *Écrire l'équation de H sous la forme $(x - a)(y - b) = c$ pour des réels a, b, c. En déduire les coordonnées du centre Ω de H.*
3. *Déterminer les axes, puis le second couple foyer-directrice (F', D') de H(on donnera les coordonnées de F' et une équation de D').*
4. *Montrer que la courbe E d'équation $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 14x - 26y + 27 = 0$ est une ellipse.*
5. *Montrer que Ω est le centre de E.*
6. *Déterminer les axes et l'équation réduite de E.*
7. *En déduire les longueurs des axes, la distance focale et l'excentricité de E.*
8. *Montrer que les coniques E et H ont les mêmes foyers.*

Exercice 3.4.6. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (E) la canonique dont le point $F(\sqrt{3}, 3)$ est l'un de ses foyers, le point $S(2, 0)$ est l'un de ses sommets et la droite $D := \frac{4}{\sqrt{3}}$ est l'une de ses directrices.*

1. *Montrer que (E) est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne.*
2. *Montrer que la droite (T) : $x\sqrt{3} + 2y = 4$ est une tangente à (E) en un point A que l'on précisera.*

Exercice 3.4.7. *Soit le plan complexe P muni du repère orthonormal $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$. (unité graphique 3 cm).*

1. *Soit (H) l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $3x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0$.*
   Montrer que (H) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et une asymptote.
2. *Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que les points A, M et M' d'affixe $1, z$ et z^4 soient alignés. (On pourra poser $Z = 1 + z + z^2 + z^3$ et exprimer le complexe Z en fonction de x et y)*

3 *Construire l'ensemble Γ.*

Exercice 3.4.8. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique ξ d'équation : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.*

1. *Déterminer la nature de ξ et préciser ses foyers, ses sommets. Trace ξ.*
2. *Déterminer les équations des hyperboles de centre O, dont les sommets sont des sommets de ξ et les asymptotes sont perpendiculaires. Tracer ces hyperboles.*
3. *Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^{6sinx} \sqrt{36 - t^2}dt$.*
   (a) *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.*
   (b) *Montrer que l'aire de ξ es unité d'aires est $A = 2f(\frac{\pi}{2})$.*
   (c) *En déduire la valeur de A.*

Exercice 3.4.9. *Dans le plan P muni du repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm on considère l'ensemble ξ des points M d'affixe z tels que*
$|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\overline{z} - 8(1 + i)|$.

1. *Soit p l'application du plan dans lui-même , qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{1}{2}|z - i\overline{z} + 8(1 + i)|$*
   On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

(a) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $p(M) = M$*

(b) *) Montrer que, pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation : $x' + y' - 8 = 0$. On appellera (D) la droite d'écrite par les points M'*

(c) *Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D). caractériser géométriquement l'application p.*

2. *On se propose de déterminer l'ensemble défini au début de l'exercice..*

   (a) *Montrer que $z - z' = \frac{1}{2}|z + i\overline{z} - 8(1+i)|$*

   (b) *En déduire que l'ensemble ξ est une ellipse de foyer F d'affixe $1+i$, de directrice (D) et d'excentricité $\frac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.*

   (c) *Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2+2i$ et $-2-2i$ sont deux sommets de ξ.*

3. *Allure de l'ensemble ξ*

   (a) *Construire dans le repère $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$ la droite (D), l'axe focal, les points A, A' et F.*

   (b) *Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.*

   (c) *Donner l'allure de ξ.*

Exercice 3.4.10. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 1cm, on considère les points $A(-1, 0)$ et $I(4, 0)$. On note (E) l'ellipse de centre I dont un sommet A et un foyer est le point O.*

1. (a) *Déterminer les coordonnées des autres sommets de (E) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

   (b) *Justifier que l'excentricité de (E) est égale à $\frac{4}{5}$.*

   (c) *Donner une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associée au foyer O dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

2. (a) *Démontrer qu'une équation de (E) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est : $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$*

   (b) *Déterminer par leurs équation les tangentes T et T' à (E) passant par le point $H(-2, 0)$.*

Exercice 3.4.11. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le points $(\frac{1}{2\cos(\theta)}, 2\tan(\theta))$*

1. (a) *Montrer que lorsque θ décrit l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ le point M varie sur une hyperbole (H) dont on donnera une équation cartésienne.*

   (b) *Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (H).*

2. *Soit T la tangente à (H) en M. Montrer qu'une cartésienne de T dans le repère $O, \vec{u}, \vec{v}$ est $2x - y.\sin(\theta) - 2\cos(\theta) = 0$.*

3. *On désigne par P_1 et P_2 les points d'intersection de T avec les asymptotes Δ_1 et $\Delta - 2$ à l'hyperbole (H).*

   (a) *Déterminer les coordonnées des points P_1 et P_2.*

   (b) *Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.*

Exercice 3.4.12. *Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

1. (a) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques les coniques suivants : $(E) : x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ et $(E) : y^2 - 2x - 4 = 0$.*

   (b) *Tracer E et P.*

2. *Soit Γ la courbe d'équation $y^2 + 2|x| = 4$*

(a) *Vérifier que* $(O, \vec{v})$ *est un axe de symétrie de* (Γ).

(b) *Tracer* (Γ) *dans le repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$

3. (a) *Soit* (C) *le cercle d'équation :* $x^2 + y^2 = 4$.
   Vérifier que pour tout réel t *de* $[0, 2]$, *le point* $M(t, \sqrt{4-t})$ *appartient à (C).*

   (b) *On pose* $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t}dt$. *Montrer que* $I_1 = \pi$.

4. *Calculer* $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}dt$

5. *Soit* A *l'aire de la partie du plan limitée par la courbe* Γ *et* E.
   Exprimer A *en fonction de* I_1 *et* I_2 *puis calculer* A.

4 Géométrie dans l'espace

4.1 Vecteur dans l'espace

La notion vue dans le plan se généralise dans l'espace.

Définition 4.1. Un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc définie par :

1. Une *direction* celle de la droite (AB) ;
2. Un *sens* celui de A vers B ;
3. Une *norme* ou *longueur* la distance AB. On note $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Théorème 4.1. *1. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ non nuls sont égaux ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) si, et seulement si, $ABCD$ est un parallélogramme.*

2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 4.1. Le vecteur nul $(\vec{0})$ est colinéaire à tout vecteur.
• les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
• les droite (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
• une droite (AB) est l'ensemble des points M tels que :$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}$.

4.2 Géométrie vectorielle

4.2.1 Vecteurs coplanaires

Définition 4.2.

1. Quatre points de l'espace sont *coplanaires* s'il appartiennent à la même plan.
2. Trois vecteur de l'espace sont *coplanaire* s'il existe quatre points A, B, C et D coplanaires tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Théorème 4.2.

1. *Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaire si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.*
2. *A, B et C sont trois points non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ $x, y \in \mathbb{R}$.*

4.2.2 Repérage dans l'espace

Définition 4.3. On appelle *repère* dans l'espace tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O constitué un point origine et les trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ une base.

Théorème 4.3. *$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.*

1. *Pour tout point M il existe un unique triplet de nombre $(x, y, z)$$\in \mathbb{R}$tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels uniques (x, y, z) sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. x correspond à l'abscisse, y à l'ordonnée et z à la cote.*

2. *Le repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthonormal si, et seulement si,* $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$ *et* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *2 à 2 orthogonaux.*

Propriété 4.1. *Dans un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. *Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ont pour coordonnées* (x,y,z) *et* (x',y',z')*, alors*
   - *Pour tout* $k \in \mathbb{R}$ $k\vec{u}$ *a pour coordonnées* (kx,ky,kz)*.*
   - *Le vecteur* $\vec{u}+\vec{v}$ *a pour coordonnées* $(x+x', y+y', z+z')$*.*
2. *Si* A *et* B *ont pour coordonnées* (x_A,y_A,z_A) *et* (x_B,y_B,z_B)*, alors,*
   - *Le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$
   - *Le milieu du segment* $[AB]$ *a pour coordonnées* $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$ *.*

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *et*
$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$

4.2.3 Représentation paramétrique

Paramétrage d'un droite. Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$. La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'un plan. Soit un plan $\wp$ définie par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs non colinéaire $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(\alpha,\beta,\gamma)$. La plan $\wp$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$\wp : \begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases} \qquad (t,s) \in \mathbb{R}.$$

4.3 Produit Scalaire

Définition 4.4. On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace on a alors :
   - $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{v}+\vec{u}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$ (*identité remarquable*)
   - $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ (*expression trigonométrique*)
2. Si dans un plan $\wp$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :
   $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ (*Expression à l'aide de projections*)
3. Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (*expression analytique*)

Théorème 4.4. $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace et* a *et* b *deux nombres.*
• $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ • $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ • $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab).(\vec{u}.\vec{v})$.

4.3.1 Orthogonalité dans l'espace

Vecteur orthogonaux.

Définition 4.5. Dans l'espace , dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nul sont *orthogonaux* signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Théorème 4.5.

1. *Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*
2. *Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$.*

Vecteur à un plan. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non nul, est normal à un plan $\wp$ signifie que la droite (AB) est perpendiculaire à ce plan $\wp$.

Remarque 4.2. Tout vecteur $\vec{n}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal à ce plan $\wp$.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan. Le plan $\wp$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est un ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Remarque 4.3. Pour qu'une droite Δ et un plan $\wp$ soient perpendiculaires, il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de $\wp$.

Plans perpendiculaires. Deux plans $\wp_1$ et $\wp_2$ de vecteur normal respective n_1 et n_2 sont perpendiculaire si, et seulement si, $\vec{n_1}.\vec{n_2} = 0$.

4.3.2 Équation cartésienne du plan

Théorème 4.6. *Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

• *Tout plan $\wp$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme : $ax+by+cz+d = 0$ $d \in \mathbb{R}$.*

• *Réciproquement si a, b et c sont trois nombres donnés non tous nuls, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.*

Remarque 4.4. Pour trouver, dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un plan dont on connait un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ à l'aide des coordonnées de A et de $\vec{n}$.

Distance d'un point à un plan. Soit A un point de l'espace et (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$. La distance de A à (P) est $d(A, P) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$ (M étant un point quelconque de P). Si le point A a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) et le plan (P) à pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors $d(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Positions relatives d'une droite et d'un plan . Si D est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\wp$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$:
• Si $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ alors $\wp$ et D sont sécants en un point.
• Si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors la droite D est strictement parallèle à $\wp$ ou incluse dans $\wp$: A étant un point quelconque de D :
- Si $A \in \wp$ alors la droite D est incluse dans le plan.
- Si $A \notin \wp$ alors la droite D est strictement parallèle au plan $\wp$.

Positions relatives de deux plans $\wp$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\wp'$ est un plan de vecteur normal $\vec{n'}$:
• Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires les plans $\wp$ et $\wp'$ sont strictement parallèles ou confondus A étant un point quelconque de $\wp$ alors :
- Si $A \in \wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont confondus.
- Si $A \notin \wp'$ alors les plans $\wp$ et $\wp'$ sont strictement parallèles.
• Si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires les plans $\wp$ et $\wp'$ sont sécants leur intersection est une droite D.

Application 1. *L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(-1, 2, 0), B(1, 2, 4)$ et $C(-1, 1, 1,)$.*

1. (a) *Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
   (b) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.*
   (c) *Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré*
2. *Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$*
   (a) *Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).*
   (b) *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
3. *Soient P_1 le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$ et p_2 le plan passant par O et parallèle au plans d'équation $x - 2z + 6 = 0$.*
   (a) *Démontrer que le plan P_2 a pour équation $x = 2z$.*
   (b) *Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.*
   (c) *Soit la droite D passant passe par $A(2, -4, 1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(0, -3, 0)$.*
   Déterminer l'équation paramétrique de la droite D et Démontrer que D est la droite d'intersection des plans P_1 et P_2.
4. *Démontrer que la droite D coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.*

Solution Application 1.

1. (a) *A, B et C sont aligné si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.*
   Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, 0, 4)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, -1, 1)$. On a en particulier $-1 = 0k$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C ne sont pas alignés.

(b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times 0 + 0\times(-1) + 4\times 1 = 4$.

(c) $AB = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ *et* $AC = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. *Comme* $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{2}{\sqrt{10}}$, *donc* $\widehat{BAC} = 51°$ *(on utilise la calculatrice).*

2. (a) *Les points* A, B *et* C *ne sont pas alignés et donc les points* A, B *et* C *définissent un unique pan, le plan (ABC).* $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2\times 2 + 0\times(-1) + 4\times(-1) = 0$ *et* $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0\times 2 + (-1)\times(-1) + 1\times(-1) = 0$. *Le vecteur* $\vec{n}$ *est orthogonal aux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc, le vecteur* $\vec{n}$ *est un vecteur normal au plan (ABC).*

   (b) *Le plan (ABC) est le plan passant par* $A(-1,2,0)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(2,-1,-1)$. *Une équation cartésienne du plan (ABC) est*
   $2(x+1) - (y-2) - (z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 4 = 0$

3. (a) *Un vecteur normal au plan* P_2' *d'équation* $x - 2z + 6$ *est le vecteur* $\vec{n}_2$ *de coordonnées* $(1,0,-2)$. *Puisque* P_2 *est parallèle à* $P_2', \vec{n}_2$ *est encore un vecteur normal au plan* P_2. *Ainsi,* P_2 *est le plan passant par* $O(0,0,0,)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}_2(1,0,-2)$. *Une équation cartésienne de* P_2 *est donc* $x - 2z \Leftrightarrow x = 2z$.

   (b) *Un vecteur normal au plan* P_1 *d'équation* $3x+y-2z=0$ *est le vecteur* $\vec{n}_1$ *de coordonnées* $(3,1,-2)$. *Les vecteurs* $\vec{n}_1$ *et* $\vec{n}_2$ *ne sont pas colinéaires et donc les plans* P_1 *et* P_2 *ne sont pas parallèles. Par suite, les plans* P_1 *et* P_2 *sont sécants en une droite.*

   (c) *Équations paramétriques de la droite* D : $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t-3 \\ z = t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

   Comme P_1 *et* P_2 *sont sécants en une droite, il suffit de vérifier que tout point de D est un point de* $P_1\cap P_2$. *Soit* $M(2t,-4t-3,t), t\in\mathbb{R}$ *un point de la droite* D. $3x_M + y_M - 2z_M = 3(3t) + (-4t-3) - 2(t) + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$ *et donc* M *appartient à* P_1. *De même,* $x_M - 2z = (2t) - 2(t) = 0$ *et donc* M *appartient à* P_2. *Ainsi, tout point de* D *appartient à* P_1 *et* P_2 *et donc* $P_1\cap P_2$ *est la droite* D.

4. *Soit* $M(2t,-4t-3,t), t\in\mathbb{R}$, *un point de la droite* D. $M\in(ABC) \Leftrightarrow 2(2t)-(-4t-3)-t+4 = 0 \Leftrightarrow 7t+7=0 \Leftrightarrow t=-1$. *Quand* $t=-1$, *on obtient le point* I *de coordonnées* $(-2,1,-1)$. *Le points* I *est le point d'intersection des plans* $(ABC), P_1$ *et* P_2.

4.4 Exercice

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Exercice 4.4.1.

1. *Dans chacun des cas suivants, précisez su* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*
   (a) $\vec{u}(2,1,-3)$ *et* $\vec{v}(1,2,2)$
   (b) $\vec{u}(14,-24.5,17.5)$ *et* $\vec{v}(-4,7,-5)$
2. *On donne les points* $A(1,-1,2)$, $B(0,5,3)$ *et* $C(4,-19,-1)$. *Ces points sont-il alignés ?*
3. *Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles les points* $A(1,0,-3)$, $B(-3,2,1)$ *et* $C(a,b,5)$ *sont alignés ?*

4. *Déterminer les nombres a et b pour lesquels les vecteur $\vec{u}(-2, a, -5)$ et $\vec{c}(4, -6, b)$ sont colinéaires.*
5. *On donne les points $A(5, 2, 1), B(7, 3, 1), C(-1, 4, 5)$ et $D(-3, 3, 5)$. Le quadrilatère $ABCD$ est-il parallélogramme ?*

Exercice 4.4.2.

1. *Les points $A(2, 0, 1), B(1, 2, 0), C(8, -4, 1)$ et $D(1, 12, -3)$ sont-il coplanaires.*
2. *Quelle relations doivent vérifier x, y, z pour que les points $A(3, 2, 1), B(1, 2, 0), C(3, 1, -2)$ et $D(x, y, z)$ soient dans le même plan.*
3. *On donne les vecteurs $\vec{u}(0, -1, 1), \vec{v}(-2, -1, 3)$ et $\vec{w}(-1, -1, -1)$. Le triplet ($\vec{u}c\vec{v}, \vec{w}$) est-il une base des vecteurs de l'espace ?*

Exercice 4.4.3. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).*
On considère les points $A(1, 0, 2), B(0, 0, 1)$ et $C(0, -1, 1)$.

1. *Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.*
2. (a) *Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.*
   (b) *En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.*
3. (a) *Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, puis AB et BC.*
   (b) *En déduire la nature exacte du parallélogramme $ABCD$.*
4. (a) *Calculer la distance d en unité de longueur du point O au plan P passant par A, B et C.*
   (b) *Calculer le volume V en unité de volume de la pyramide de sommet 0 et de base $ABCD$.*

Exercice 4.4.4. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :*
• *Les points $A(0, 1, -1)$ et $B(-2, 2, -1)$.*
• *La droite de représentation graphique* $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).*
2. *Montrer que les droites (AB) et D ne sont ni parallèles, ni sécantes.*
   Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel. On considère le point M de la droite D de coordonnées $(-2 + u, 1 + u, -1 - u)$.
3. *Vérifier que le plan P d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite D et passe par le point M.*
4. *Montrer que le plan P et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4 + 6u, 3 - 3u, -1)$.*
5. (a) *Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite D.*
   (b) *Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?*
6. (a) *Exprimer MN^2 en fonction de u.*
   (b) *En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

Exercice 4.4.5. *L'espace est muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère deux droites d_1 *et* d_2 *définies par les représentations paramétriques :*

$$d_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } d_2 : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

On admet que les droites d_1 *et* d_2 *sont non coplanaires.*

1. *Vérifier que le point* $A(2,3,0)$ *appartient à la droite* d_1.
2. *Donner un vecteur directeur* $\vec{u}_1$ *de la droite* d_1 *et un vecteur directeur* $\vec{u}_2$ *de la droite* d_2. *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles parallèles ?*
3. *Vérifier que le vecteur* $\vec{v}(1,-2,-3)$ *est orthogonal aux vecteurs* $\vec{u}_1$ *et* $\vec{u}_2$.
4. *Soit* P *le plan passant par le point* A, *et dirigé par les vecteurs* $\vec{u}_1$ *et* $\vec{v}$.
   (a) *Montrer qu'une équation cartésienne du plan* P *est :* $5x+4y-z-22=0$.
   (b) *Déterminer les coordonnées du point* B *intersection de la droite* d_2 *et du plan* P.
5. *On considère maintenant la droite* Δ *dirigée par le vecteur* $\vec{v}(1,-2,-3)$, *et passant par le point* $B(3,3,5)$.
   (a) *Donner une représentation paramétrique de cette droite* Δ.
   (b) *Les droites* d_1 *et* Δ *sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.*
   (c) *Montrer que la droite* Δ *est à la fois sécante avec les deux droites* d_1 *et* d_2 *et orthogonale à ces deux droites.*

Exercice 4.4.6. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soit S *l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *tels que* $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-10=0$ *et soit les points* $A(1,1,1), B(-1,1,3)$ *et* $C(5,4,-6)$.

1. *Montrer que* S *est une sphère dont on précisera le centre* I *et le rayon* R.
2. (a) *Montrer que* A, B *et* C *déterminent un plan* P.
   (b) *Vérifier qu'une équation de* P *est :* $x+y+z-3=0$.
3. (a) *Montrer que l'intersection de* S *et* P *n'est pas vide.*
   (b) S *coupe donc* P *suivant un cercle* C *de centre* J *et de rayon* r.

   On rappelle que J *est le projeté orthogonal de* I *sur le plan* P.
   Déterminer les coordonnées de J *et calculer* r.
4. *Soit le plan* Q *d'équation* $2x-y+2z+13=0$.
   Montrer que le plan Q *est tangent à la sphère* S *au point* $H(\frac{-5}{3},\frac{1}{3},\frac{-14}{3})$.

Exercice 4.4.7. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1. *On considère le plan* P *passant par le points* $B(1,-2,1)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(-2,1,5)$ *et le plan* R *d'équation* $x+2y-7=0$.
   (a) *Démontrer que les plans* P *et* R *sont perpendiculaire.*
   (b) *Démontrer que l'intersection des plans* P *et* R *est la droites* Δ *passant par le point* $C(-1,4,-1)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}(2,-1,1)$.
   (c) *Soit le point* $A(5,-2,-1)$, *calculer la distance du point* A *aux plans* P *et* R. R *Déterminer la distance du point* A *à la droite* Δ.

2. (a) *Soit pour tout nombre réel* t*, le point* M_t*, de coordonnées* $(1+2t, 3-t, t)$*.*
   Déterminer en fonction de t *la longueur* AM_t*. On note* $\phi(t)$ *cette longueur. On définit ainsi une fonction* ϕ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

   (b) *Étudier le sens de variation de* ϕ *sur* $\mathbb{R}$*, préciser son minimum.*

   (c) *Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.*

Exercice 4.4.8. *On considère un cube* $ABCDEFGH$ *d'arête 1.*

1. (a) *Exprimer plus simplement le vecteur* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$*.*

   (b) *En déduire que le produit scalaire* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ *est nul.*

   (c) *Démontrer de même que le produit scalaire* $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$ *est nul. R Démontrer que la droite* (AG) *est orthogonale au plan* (BDE)*.*

2. *Soit* I *le centre de gravité du triangle* BDE*. Déduire de* 1.a) *que le point* I *est le point d'intersection de la droite* (AG) *et du plan* (BDE) *; préciser la position du point* I *sur le segment* $[AG]$*.*

3. *Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct* $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$*.*

   (a) *Écrire une équation du plan* (BDE)*.*

   (b) *Écrire une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par le point* H *et orthogonale au plan* (BDE)*.*

   (c) *Déterminer les coordonnées du point d'intersection* J *de la droite* Δ *avec le plan* (BDE)*. R Calculer* $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$*.*

   e) *En déduire la distance du point* H *au plan* (BDE)*, puis le volume du tétraèdre* $HBDE$*.*

   Volume du tétraèdre : $V = \frac{1}{3}b \times h$ *où* b *est la surface de base et* h *la hauteur.*