LES MATHS DE NOËL

Sujets et corrections types BAC D

2026

Saïd

Avant-propos

Cet ouvrage propose aux élèves de terminal D, cinq sujets types examen, soigneusement sélectionnés pour couvrir les différents aspects que vous êtes susceptible de rencontrer lors de votre épreuve du baccalauréat. Chaque sujet est accompagné d'une correction détaillée, vous permettant de comprendre les étapes nécessaires pour résoudre les problèmes et d'identifier les erreurs éventuelles.

Chacun des sujets proposés comporte trois exercices distincts. Vous y trouverez un exercice portant sur les connaissances et les applications de la théorie des nombres complexes, un exercice de probabilité ou de statistique, ainsi qu'un problème d'étude de fonction. Cette variété vous permettra de vous familiariser avec les différents types de questions que vous pourriez rencontrer le jour de l'examen.

Je vous encourage vivement à aborder ces sujets d'examen avec sérieux et engagement. Utilisez-les comme des outils pour évaluer votre compréhension de l'analyse mathématique et pour identifier les domaines dans lesquels vous pourriez avoir besoin de plus de pratique. Avec du travail acharné et de la persévérance, je suis convaincu que vous pouvez atteindre vos objectifs en mathématiques.

Si certaines notions vous semblent étranges ou complexes, je vous suggère de vous référer au livre "Les Maths de Noël TD", qui étudie en détail ces concepts. Ce livre complémentaire pourra vous fournir des explications supplémentaires et des exemples concrets pour approfondir votre compréhension et vous aider dans votre apprentissage.

N'oubliez pas que la clé de la réussite en mathématiques réside dans la pratique régulière et la volonté de surmonter les obstacles. Continuez à vous investir dans votre apprentissage, et vous progresserez sans aucun doute dans votre maîtrise des mathématiques.

Je souhaite sincèrement que cet ouvrage vous soit utile dans votre préparation pour le baccalauréat et au-delà. Vos retours et remarques sur cet ouvrage sont les bienvenus. N'hésitez pas à me contacter à l'adresse suivante : lesmathsdenoel@gmail.com.

Sujet 1. .

Exercice 1

1. (a) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) : $z^2 - 3z + 4 = 0$.
   (b) *Déterminer le module de chaque racine de cette équation.*
2. *Le plan est rapporté au repère orthonormé* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. z *désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives* 1, z *et* Z^2 *et on note le système de points pondérés* $\{(A, 4), (B, -3), (C, 1)\}$. *Ce système est tel que* O *est son barycentre.*
   (a) *Démontrer que* z *est solution de* (E).
   (b) *En déduire les coordonnées de* B *et* C.
3. (a) k *désignant un nombre réel, on pose* $z = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$. *Préciser suivant les valeurs de* k *l'ensemble* (Γ) *des points* M *du plan tels que*
   $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$.
   (b) *On suppose* $k = 89$. *Donner alors une équation cartésienne de* (Γ), *puis tracer* (Γ).

Exercice 2

On dispose de deux urnes.

- *Une urne* U_1 *dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boule noires.*
- *une urne* U_2 *dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boule noires.*

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux de chaque urne : on obtient quatre boules, les étirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. *Montrer que la probabilité de l'événement* E : $\ll$ *Parmi les quatre boules tirées, il il y exactement deux boules blanches* $\gg$ *est égale à* $0,46$.
2. *On note* X *la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boule blanche obtenues.*
   (a) *Déterminer la loi de probabilité de* X.
   (b) *Calculer l'espérance et la variance de probabilité de* X.
   (c) *Le joueur doit verser* $2,50$ *euros avant d'effectuer le tirage, il reçoit à l'issue du tirage* 1 *euros par boule blanche obtenue.*
   Le jeu est-il équitable ?
3. *Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne* U_1 *sachant qu'on a tiré exactement deux boules blanches.*
4. *On ne considère que l'urne* U_1, *de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules.*
   On nomme succès le tirage de deux boules blanches.
   On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirée dans l'urne).
   Déterminer la probabilité d'avoir au moins deux succès sur les dix tirages.

Problème

Partie A

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) la courbe de f dans le plan muni d 'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 5cm comme unité.

1. (a) *Déterminer la limite de f en $-\infty$.*
   (b) *Vérifier que tout réel , $f(x) = x[1 - 2e^{-2}(\frac{e^{2x}}{2x})]$.*
   (c) *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*
2. *Déterminer f', la fonction dérivée de f. Étudie le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.*
3. (a) *Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C).*
   (b) *Étudier la position relative de (C) et (Δ).*
4. *On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer un équation de la tangente (T) en A à la courbe (C).*
5. (a) *On note I l'intervalle $[0, 0.5]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution qu'on notera par α.*
   (b) *Construire la courbe (C), l'asymptote (Δ) et la tangente (T).*

Partie B

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2x-2} \end{cases}$

1. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$. Démonter que $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$.*
2. *Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.*
3. *Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x) \in I$.*
4. *Utiliser l'inégalité de la moyenne pour démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$.*
5. *Démonter que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^2$.*
6. *En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.*
7. *Déterminer un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$.*
   Données : $\ln 2 \simeq 0.7$; $e^{-1} \simeq 0.14$; $\ln 10 \simeq 2.3$.

Sujet 2.

Exercice 1

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 12z + 152 = 0$.*
2. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$,*
   $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_c = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_p = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1. *Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.*

2. *Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.*
3. *Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Placer les points P, Q, R et S.*
4. (a) *Démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.*
   (b) *Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_p - z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme $PQRS$.*
   (c) *Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté φ. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.*
5. *La droite (AP) est-elle tangente au cercle φ.*

Exercice 2

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. *Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.*
   (a) *On suppose ici $n = 10$, x désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.*
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) *On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3.*
   Calculer la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet de gagnant parmi les deux choisis.
2. *Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.*
   (a) *On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.*
   Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) *On revient au cas général avec n supérieur ou égale à 3.*
   Calculer la probabilité q_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
3. (a) *Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on : $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.*
   (b) *Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billet de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?*

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - e^{-x}$.

1. *Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.*
2. *Démonter que la fonction g est croissant sur $\mathbb{R}$, puis dresse son tableau de variation.*
3. (a) *Démonter que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera α.*
   (b) *Justifie que : $0.3 < \alpha < 0.4$*
4. *Justifie que : $\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$.*

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)(2e^x - 1)$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 2cm.

1. *Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.*
   Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
2. (a) *Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.*
   (b) *Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + 2(x-1)e^x$*
   (c) *Démonter que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.*
   (d) *Étudier la position relative de (C_f) et (D).*
3. *On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.*
   (a) *Démonter que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x g(x)$.*
   (b) *Étudier le sens de variation de f.*
   (c) *Dresser le tableau de variation de f.*
4. (a) *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.*
   (b) *Déduis-en les coordonnées des points d'intersections A et B de C_f est l'axe des abscisses.(On choisira $x_A < x_B$).*
5. *Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au points d'abscisse 0.*
6. *Tracer les droites (D) et (T), puis construis (C_f).*
   On prendra $\alpha = 0.35$ et $f(\alpha) = -1.2$
7. *A l'aide de l'intégration par parties, calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan déterminer par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.*

Sujet 3.

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. ***Question de cours***
   On rappelle que : pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a :
   $|z| = ||\vec{w}||$ et $arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$. Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) *Démontrer que : $arg(\frac{p-m}{n-m}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.*
   (b) *Interpréter géométriquement le nombre $|\frac{p-m}{n-m}|$.*
2. *On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 5i$ et $z_D = -3 - i$. Placer ces points sur une figure.*
3. *Soit f l'application du plan dans lui-même qui, a' tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$.*
   (a) *Préciser les images des points A et B par f.*
   (b) *Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.*

4. (a) *Montrer que pour tout nombre complexe* z*, on a :* $z' - z = -2i(2 - i - z)$*.*
   (b) *En déduire, pour tout point* M *différent du point* Ω *:*
   - *La valeur de* $\frac{MM'}{\Omega M}$
   - *Une mesure en radians le l'angle* $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$*.*

   (c) *Quelle est la nature du triangle* $\Omega MM'$ *?*
5. *Soit* E *le point d'affixe* $z_E = -1 + i\sqrt{3}$*.*
   Écrire z_E *sous forme exponentielle puis placer le point* E *sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point* E' *associé au point* E *en détaillant votre méthode.*

Exercice 2

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cyclique.

1. *Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes il a choisies.*
   On appelle X *la variable aléatoire correspondant au nombre de bille rouges choisies.*
   (a) *Déterminer la loi de probabilité de* X*.*
   (b) *Calculer l'espérance et la variance mathématique de* X*.*
2. *Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans a boîte choisie.*
   On considère les événements suivants :
   C_1 *: ≪ L'enfant choisit la boite cubique≫*
   C_2 *: ≪ L'enfant choisit la boite cyclique≫*
   R *: ≪L'enfant prend une bille rouge≫*
   V *: ≪L'enfant prend une bille verte≫*
   (a) *Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.*
   (b) *Calculer la probabilité de l'événement* R*.*
   (c) *Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provient de la boîte cubique ?*
3. *L'enfant produit* n *fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.*
   (a) *Exprimer, en fonction de* n*, la probabilité* p_n *que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de des* n *chois.*
   (b) *Calculer la plus petite valeur de* n *laquelle* $p_n \geq 0.99$*.*

Problème

Pour tout réel k *strictement positif, on considère la fonction* f_k *définie sur* $[0; +\infty[$ *par :*

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x.$$

Soit $\mathcal{C}$ *la courbe représentative de la fonction* f_k *dans le plan muni d'un repère* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$*, (unités graphiques : 5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).*

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. *Étudier le sens de variation de g.*
2. *En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1+a) \leq a$.*

Partie A

Étude de la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x.$$

1. *calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.*
2. *Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.*
3. *Dresser le tableau de variation de f_1.*

Partie B

1. *Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.*
2. *Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_x(x) = \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.*
3. (a) *Dresser le tableau de variation de f_x.*
   (b) *Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f_x(x) \leq \frac{k}{e}$.*
4. *Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point O.*
5. *Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.*
   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.
6. *Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.*

Partie C

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. *Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que $\mathcal{A}(\lambda) \leq k\int_0^\lambda xe^{-x}dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).*
2. *Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$.*
3. *On admet que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leq k$. Interpréter graphiquement ce résultat.*

Sujet 4.

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par φ le cercle de diamètre $[AB]$.

1. *Déterminer l'affixe z_Ω du centre Ω du cercle φ, puis calculer son rayon.*
2. *Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.*

   Écrire z_D sous forme algébrique, puis démontrer que D est un point du cercle φ.
3. *Sur le cercle φ, on considère le point E, d'affixe z_E, tel que $(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$.*
   (a) *Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.*
   (b) *En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.*
4. *Soit t la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z + \frac{1}{2})$.*
   (a) *Déterminer la nature de la transformation t et ses éléments caractéristiques.*
   (b) *Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.*
   Calculer la forme algébrique de l'affixe z'_K du point K', image du point K par t.
   Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 2

Une association organise une loterie une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.
Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.
Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.
Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :
- *Sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 euros.*
- *Sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 euros.*
- *sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.*

On appelle V l'évènement ll le joueur a obtenu 2 boules vertes $\gg$.
On appelle J l'évènement $\ll$ le joueur a obtenu 2 boules jaunes $\gg$. On appelle R l'évènement $\ll$ le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien $\gg$.

1. *Faire un arbre que l'on complétera au cours de l'exercice.*
2. *Quelques calculs.*
   (a) *Calculer les probabilités $P(V)$ et $P(J)$ des évènements respectifs V et J.*
   (b) *$V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_V(R)$ puis $P(R \cap V)$*
   (c) *Calculer $P(R)$.*
   (d) *Calculer la probabilité de gagner les 100 euros, puis la probabilité de gagner les 20 euros de la roue.*

3. *On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.*
   (a) *Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.*
   (b) *Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m = 0,6$.*
   (c) *Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{140-51m}{80}$.*
   (d) *L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro.*
   Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

Problème

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \text{ (E)}.$$

1. *Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).*
2. *Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E_0).*
3. *Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).*
4. *En déduire toutes les solutions de l'équation (E).*
5. *Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.*

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. *Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.*
2. *Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.*

   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. *Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathcal{D}$ limité par $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.*
   (a) *À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{D}(\alpha)$ du domaine $\mathcal{D}$.*
   (b) *Déterminer la limite de $\mathcal{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.*
4. (a) *Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0.2; 0.3]$.*
   (b) *Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right)$.*

Partie C

1. *Soit hla fonction définie sur* $I = [0.2; 0.3]$ *par :*

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x+1}\right).$$

   (a) *Démontrer que pour tout* x *de I,* $h(x)$ *appartient à I.*
   (b) *Démontrer que pour tout* x *de I,* $|h'(x)| \leq 0.42$.

2. *Soit* (u_n) *la suite définie par :* $u_0 = 0.2$ *et, pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) *En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel* n, *on a :* $|u_{n_1} - x_0| \leq 0.42|u_n - x_0|$.

   À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n *on a :* $|u_n - x_0| \leq 0.1 \times (0.42)^n$.
   (b) *Déterminer la limite de (* u_n*).*
   (c) *Déterminer un entier* p *tel que* $|u_p - x_0| \leq 10^{-5}$.
   (d) *On note* b *la valeur de* u_p *affichée sur la calculatrice. Déterminer* β *valeur décimale approchée par défaut de* b *à* 10^{-5} *près.*
   Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ *et 2.*
   En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 *à* 10^{-5} *près.*

Sujet 5.

Exercice 1

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. *On considère l'application* f *qui, à tout point* M' *d'affixe* z *associe le point* M' *d'affixe* z' *telle que :* $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.
   (a) *Exprimer* $(f \circ f)(z)$ *en fonction de* z.
   (b) *Montrer que* $f = R \circ S$, *où* R *est une rotation et* S *une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications* R *et* S*).*
   (c) *Décomposer* R *à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que* f *est une réflexion, dont on donnera l'axe* (D_1).
   Réaliser une figure, en y représentant l'axe (d_1) *(unité graphique 2 cm).*

2. *On considère l'application* g *qui, à tout point* M *d'affixe* z *associe le point* M" *d'affixe* z *telle que :* $z" = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) *Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de* g.
   (b) *Montrer que* $T \circ f$ *où* T *est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation* T*).*
   (c) *Décomposer la translation* T *à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que* g *est une réflexion, d'axe noté* (D_2).
   (d) *Quelle est l'image par* g *du point* A *d'affixe* $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *En déduire une construction de la droite* (D_2), *qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.*

Exercice 2.

On considère la série double suivante.

x_k	2	5	6	10	12
y_k	84	70	70	54	49

1. *Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.*
2. *Déterminer l'équation de la droite D_1 par la méthode de Mayer. (On prendra G_1 le point moyen des trois premiers nuage de points et G_2 le point moyen des deux dernier.) Montrer que $G \in (D_1)$.*
3. *Déterminer l'équation de la droite D_2 d'ajustement par la méthode de moindres carrés.*
4. *Calcule la valeur de x pour $y = 35$ et les valeurs de x tel que $y < 0$.*
5. *Calculer le coefficient de corrélation et interpréter le résultat.*

Problème.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A.

On définit une fonction f sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

1. *Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.*
2. *Étudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.*
3. *Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3.*

   Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de C d'abscisse $\frac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O, \vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O, \vec{v})$. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et représenter la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. (a) *Donner z' en fonction de z.*
   On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels). Exprimer x' et y' fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

   (b) *Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation r.*
2. *On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

(a) *Montrer que lorsqu'un point M appartient à $(\mathcal{C})$, son image M' par r appartient à (Γ).*
On admet que lorsque le point M décrit $(\mathcal{C})$, le point M' décrit (Γ).

(b) *Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).*

Partie C.

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. *Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.*
2. (a) *Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan $\mathcal{D}$ limité par les segments $[AO], [OH]$ et $[HB]$ et l'arc de courbe $(\mathcal{C})$ d'extrémités B et A.*

   (b) *On pose $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x}-1\right) dx$.*
   Trouver une relation entre $\mathcal{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Solution Sujet 1.

Exercice 1

1. (a) $\Delta = 9 - 16 = i\sqrt{7}$. *Les solutions sont* $\frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ *et* $\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$.

   (b) $\left|\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right| = \left|\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{7}{4}} = 2$

2. (a) *Comme* $O = bar\{(A,4),(B,-3),(C,1)\}$, *on a* $\frac{4\times 1 - 3\times z + 1\times z^2}{4-3+1} = 0$ *donc* $4 - 3z + z^2 = 0$, *par conséquent,* z *est solution de l'équation* (E).

   (b) *Comme* z *est solution de* (E) *et* $Im > 0$, $z = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$ *et* $z^2 = \frac{1+3i\sqrt{7}}{2}$. *Donc le point* B *a pour coordonné* $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$ *et* C *a pour coordonné* $(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$

3. (a) *Soit* M *un point du plan.* $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + 4OA^2 - 3OB^2 + OC^2 = k$. $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 4$ *et* $4OA^2 - 3OB^2 + OC^2 = 8$. *Donc* $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow OM^2 = \frac{k-8}{2}$
   - $k < 0$ *alors* $(\Gamma) = \emptyset$
   - $k = 8$ *alors* $(\Gamma) = \{0\}$
   - $k > 8$ *alors* (Γ) *est un cercle de centre* O *et de rayon* $\sqrt{\frac{k-8}{2}}$.

   (b) *Comme* $89 > 8$, (Γ) *est un cercle de centre* O *et de rayon* $\frac{9}{\sqrt{2}}$.
   Une équation cartésienne de (Γ) *est donc* $x^2 + y^2 = \frac{81}{2}$.

Exercice 2.

1. *On a 5 boule dans l'urne* U_1 *donc* $\Omega_1 = \binom{5}{2} = 10$

   Tirée 0 boule blanche sur l'urine U_1 *veut dire qu'on a tirée deux boule noir donc :*

$$p_0 = \frac{\binom{2}{2}}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$$

   Tirée une boule blanche sur l'urine U_1 *veut dire qu'on a tirée une boule blanche et une boule noir donc :*

$$p_1 = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

   Tirée 2 boule blanche sur l'urine U_1 *veut dire qu'on a tirée 0 boule noire donc :*

$$p_2 = \frac{\binom{3}{2}}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

   De même, on a 5 boule dans l'urne U_2 *donc* $\Omega_2 = \binom{5}{2} = 10$

   $p'_0 = \frac{\binom{3}{2}}{10} = 0.3$, $p'_1 = \frac{\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}}{10} = 0.6$ *et* $p'_2 = \frac{\binom{2}{2}}{10} = 0.1$

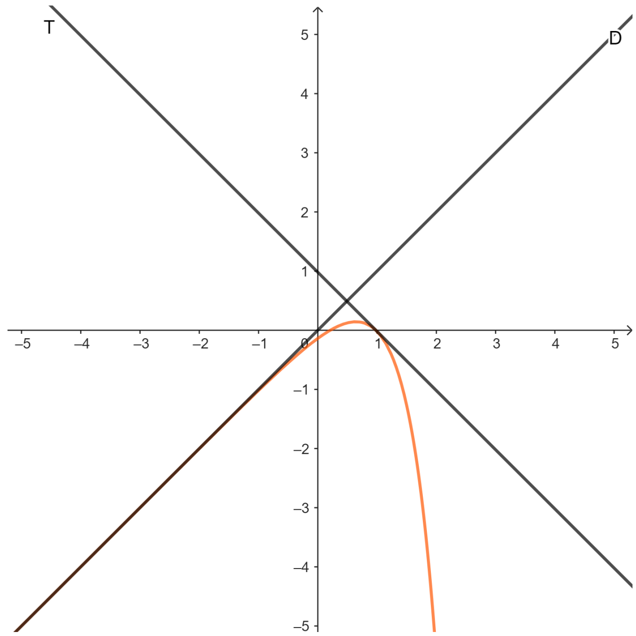
Donc $P(E) = p_0 \times p'_2 + p_1 \times p'_1 + p_2 \times p'_0 = 0.1 \times 0.1 + 06 \times 0.6 + 0.3 \times 0.3 = 0.46$
(vous pouvez vous aider avec l'arbre de probabilité)

2. (a) $X(\Omega) = 0, 1, 2, 3, 4$
   $p(X = 0) = 0.1 \times 0.3 = 0.03$, $p(X = 1) = 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 = 0.24$, $p(X = 2) = 0.46$, $p(X = 3) = 0.6 \times 0.1 + 0.3 \times 0.6 = 0.24$ *et* $p(X = 4) = 0.3 \times 0.1 = 0.03$.
   (b) $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) + 3 \times p(X = 3) + 4 \times p(X = 4) = 2$
   Comme le joueur gagne 1€ par boule blanche, il gagne en moyenne 2€ par partie. Le jeu n'est pas équitable car la mise est de 2.5€ et l'espérance de gain est de 2€.
3. *Soit* B_1 *l'événement « tirer une et une seule boule blanche de l'urne* U_1 *».*
   On a $p_{X=2}(B1) = \frac{p(B_1 \cap (X=2))}{p(X=2)} = \frac{0.6 \times 0.6}{0.46} \approx 0.78$.
4. *Soit* N *le nombre de succès obtenus.*
   $p(N \geq 2)1 - p(N < 2)$
   Or $p(N = 0) = \binom{10}{0} (0.3)^0 (0.7)^9 = (0.7)^9$ *et* $p(N = 1) = \binom{10}{1} (0.3)^1 (0.7)^9 = 3(0.7)^9$ *donc* $p(N \geq 2) = 1 - ((0.7)^9 + 3(0.7^9)) \approx 0.84$

Problème.

Partie A

1. (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   (b) $f(x) = x - e^{2x-2} = x \left[1 - \frac{e^{2x} \times e^{-2}}{x}\right] = x \left[1 - 2e^{-2} \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$
   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left[1 - 2e^{-2} (\frac{e^{2x}}{2x})\right] = -\infty$
2. $f'(x) = 1 - 2e^{2x-2}$
   $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{2x-2} \Rightarrow e^{2x-2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq \frac{2-\ln(2)}{2}$
   donc $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \left]-\infty; \frac{2-\ln(2)}{2}\right]$ *et* $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \left[\frac{2-\ln(2)}{2}; +\infty\right[$
   Maximum $f_{max} = f(\frac{2-\ln(2)}{2}) = \frac{2-\ln(2)}{2} - e^{2\frac{2-\ln(2)}{2}-2} = \frac{1-\ln(2)}{2}$
3. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-e^{2x-2}) = 0$ *donc* $y = x$ *est un asymptote oblique de* $f(x)$ *en* $-\infty$.
   (b) $f(x) - x = -e^{2x-2}$ *comme* $e^{2x-2} \geq 0 \ \forall x \ \mathbb{R}$ *donc* $-e^{2x-2} \leq 0$ *et* Δ *est au dessus de* C *sur* $\mathbb{R}$.
4. $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -1(x - 1) + 0 = -x + 1$ *donc* $T : y = -x + 1$
5. (a) $f(0) \simeq -0.14$ *et* $f(0.5) \simeq 0.13$, *comme* $f(x)$ *est strictement croissant sur* I *et* $f(0)f(0.5) < 0$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* α *sur* I.
   (b) *Représentation graphique :*



.

Partie B

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{2x-2} = 0 \Rightarrow e^{2x-2} = x \Rightarrow g(x) = x$
   D'après la question 5.a du partie A $f(\alpha) = 0$ *donc* $g(\alpha) = \alpha$.
2. $g'(x) = 2e^{2x-2}$ *et* $g"(x) = 4e^{2x-2} > 0$
3. $g(x)$ *est croisant sur* I *et* $g(0) = 0.14$ *et* $g(0.5) = 0.37$ *donc pour tout* $x \in I$ $g(x) \in I$.
4. *Soit* $\alpha \in I$, $u_n \in I$. *Comme* $g(x) \in I$ *et* $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$, *d'après le théorème des accroissement fini,* $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$
   Comme $g(u_n) = u_{n+1}$ *et* $g(\alpha) = \alpha$, *on a :* $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_n - \alpha|$
5. *Pour* $n = 0$, $|u_1 - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_0 - \alpha|$
   Pour $n = 1$, $|u_2 - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_1 - \alpha|$
   $\vdots$
   Pour $n = n - 1$ $|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{e}|u_{n-1} - \alpha|$
   Donc $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n|u_0 - \alpha| \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n|0 - \alpha|$
   Donc par majoration de α, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{e})^n = 0$ $(2 < e)$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{e})^n = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$. u_n *converge vers* α.
7. $(\frac{2}{e})^n \leq 10^{-5} \Rightarrow n(\ln(2) - 1) \leq -5\ln(10) \Rightarrow n \geq \frac{5\ln(10}{1-\ln(2)} \approx 37,519$. *Donc* $n = 38$.

Solution Sujet 2.

Exercice 1.

1. *L'équation* $4z^2-12x+153$ *a pour discriminant* $\Delta = 144-2448 = -2304 = (i48)^2$. *Elle admet donc deux solutions complexes conjuguées.* $z_1 = \frac{12+48i}{8} = \frac{3}{2}+6i$ *et* $z_2 = \overline{z_1} = \frac{3}{2}-6i$.
2. *Dans le plan du rapporté à un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *d'unité graphique 1cm, on considère les points* A, B, C *et* P *d'affixes respectives :* $z_A = \frac{3}{2}+6i$, $z_B = \frac{3}{2}-6i$, $z_c = -3-\frac{1}{4}i$, $z_p = 3+2i$ *et le vecteur* $\overrightarrow{w}$ *d'affixe* $z_{\overrightarrow{w}} = -1+\frac{5}{2}i$.
   (a) *Le point* Q *est l'image du point* B *dans la translation de vecteur* $\overrightarrow{w}$ *donc* $z_Q = z_B + z_{\overrightarrow{w}} = \left(\frac{3}{2}-6i\right) + \left(-1+\frac{5}{2}i\right) = \frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$.
   (b) *Le point* R *est l'image du points* P *par l'homothétie de centre* C *et de rapport* $-\frac{1}{3}$ *donc* $z_R = z_C - \frac{1}{3}(z_P - z_C) = \left(-3-\frac{1}{4}i\right) - \frac{1}{3}\left((3+2i) - \left(-3-\frac{1}{4}i\right)\right) = -5-i$.
   (c) *Le point* S *est l'image du point* P *par la rotation de centre* A *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *donc* $z_S = z_A + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A) = z_A + e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A) = \left(\frac{3}{2}+6i\right) - i\left((3+2i) - \left(\frac{3}{2}+6i\right)\right) = -\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$. *Voir la représentation sur la Figure 1 .*
3. (a) *Pour démontrer que le quadrilatère* $PQRS$ *est un parallélogramme, nous démontrons que les vecteurs* $\overrightarrow{SP}$ *et* $\overrightarrow{RQ}$ *sont égaux. Calculons donc leurs affixes respectives :* $z_{\overrightarrow{SP}} = z_P - z_S = (3-2i) - \left(-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i\right) = \frac{11}{2}-\frac{5}{2}i$, *et* $z_{\overrightarrow{RQ}} = z_Q - z_R = \left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i\right) - (5-i) = \frac{11}{2}-\frac{5}{2}i$. *Les vecteurs sont égaux donc* $PQRS$ *est un parallélogramme.*
   (b) $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{\frac{11}{2}-\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i} = \frac{-11+5i}{5+11i} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$.

   On en déduit donc de cette forme exponentielle :

   $$\begin{cases} \frac{|z_R - z_Q|}{|z_P - z_Q|} = \frac{QR}{QP} = 1 \text{ donc } QR = QP \\ arg\left(\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}\right) = \left(\overrightarrow{QP}; \overrightarrow{QR}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

   Le parallélogramme $PQRS$ *a donc un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur,c'est donc un carré.*
   (c) *Tous les sommets d'un carré se trouvent sur le cercle dont le centre,* Ω, *est le milieu des diagonales et de rayon* α *la moitié de la longueur de la diagonale. Ainsi le centre du cercle* $\mathcal{C}$ *a pour affixe* $z_\Omega = \frac{z_P + z_R}{2} = -1+\frac{1}{2}i$ *et le rayon de ce cercle est :* $\alpha = \frac{PR}{2} = \frac{|z_P + z_R|}{2} = \frac{|-8-3i|}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$.
4. *Pour prouver que la droite* (AP) *est tangente au cercle* $\mathcal{C}$ *il faut prouver que les droites* (ΩP) *et* (AP) *sont perpendiculaires.*

   $\left(\overrightarrow{PA}; \overrightarrow{P\Omega}\right) = arg\left(\frac{-4-\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}+4i}\right) = (-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$, *donc les droites* (ΩP) *et* (AP) *sont perpendiculaires.*

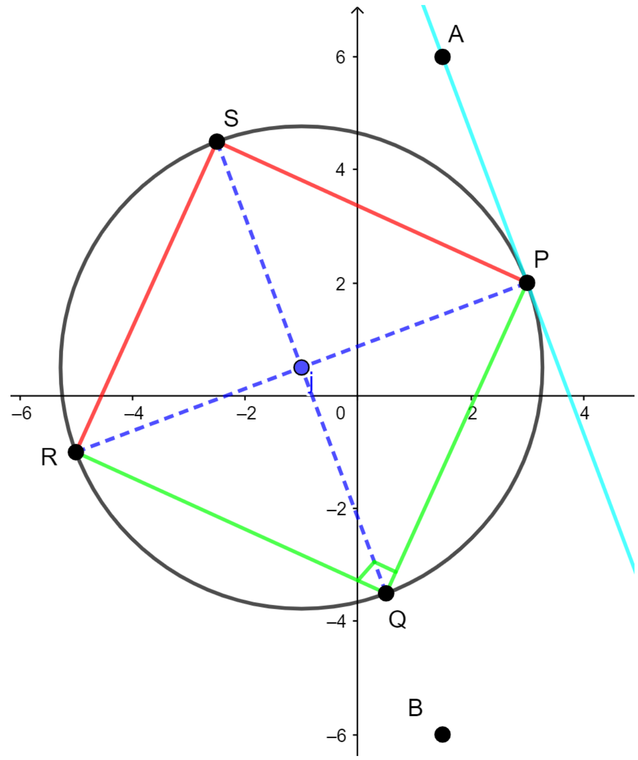


FIGURE 1 – Représentation graphique.

Exercice 2 .

1. (a) *L'urne contient 10 billets parmi lesquels il y a exactement deux billets gagnants. L'ensemble des éventualité Ω est l'ensemble des choix simultanés des 2 billets parmi 10. Donc card* $\Omega = \binom{8}{2} = 45$.

   X étant la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants, on a $X = \{0; 1; 2\}$.

   $p(X=0) = \frac{\binom{8}{2}}{45} = \frac{28}{45}$ *;* $p(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{8}{1}}{45} = \frac{16}{45}$ *;* $p(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{45} = \frac{1}{45}$.

   (b) *Dans le cas général de n billet, on a card* $\Omega = \binom{n}{2}\frac{n(n-1)}{2}$. *Pour obtenir exactement 1 billet gagnant, il faut choisir 1 billet parmi les 2 gagnants et 1 billet parmi les* $(n-1)$ *perdants. En supposant toujours les éventualités équiprobables, on a lors* $p_n = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{n-2}{1}}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-1)}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$.

2. (a) *L'urne contient 10 billet parmi lesquels il y a exactement 2 billets gagnants. L'ensemble des éventualité* Ω *est l'ensemble des choix successifs et avec remise de 2 billets parmi*

10. Donc card $\Omega = 10 \times 10 = 100$. Y *étant la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants, on a* $Y(\Omega)\{0; 1; 2\}$.

$p(Y=0) = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$; $p(Y=1) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$; $p(Y=2) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

(b) *Dans le cas général de* n *billets, on a card* $\Omega = n \times n = n^2$. *Pour obtenir exactement 1 billet gagnant, il faut choisir 1 billet gagnant parmi 2 puis 1 billet perdant parmi* $n-2$ *ou 1 billet perdant puis 1 billet gagnant. En supposant les éventualités équiprobables, on a* $q_n = \frac{2(n-2)+(n-2)\times 2}{n^2} = \frac{4(n-2)}{n^2}$.

3. (a) *Pour tout* $n \leq 3$, *on a :* $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2} = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

   (b) *On peut remarquer que pour* $n \geq 3$, *on a* $p_n - q_n \geq 0$, *c'est-à-dire* $p_n \geq q_n$. *Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billet de cette loterie, il est préférable de faire un tirage simultané.*

Problème .

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x(2 - \frac{e^{-x}}{x}) = -\infty$
   car $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^{-x}}{x} = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x - e^{-x} = +\infty$
2. $g'(x) = 2 + e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Donc* $g(x)$ *est croissant sur* $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) $g(x)$ *est croissant sur* $\mathbb{R}$ *a valeur de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, l'équation* $g(x) = 0$ *admet une unique solution* α *dans* $\mathbb{R}$.

   (b) $g(0.3) = -0.14$ *et* $g(0.4) = 0.13$ *donc* $\alpha \in [0.3, 0.4]$
4. $g'(x) = 2 + e^{-x} \geq 0$ *car* $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *et* $g(\alpha) = 0$, *donc* ,$\forall x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$ *et* $\forall x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)(2e^x - 1) = +\infty$

   (b) $f(x) = (x-1)(2e^x - 1) = 2xe^x - x - 2e^x + 1 = 1 - x + 2(x-1)e^x$.

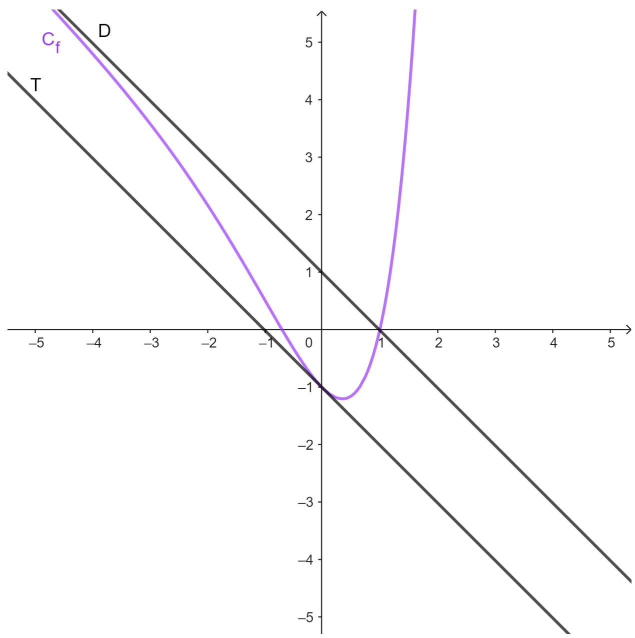
   (c) $f(x) - y = 2(x-1)e^x$ *donc* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2(x-1)e^x = 0$ *donc l'équation* $y = 1 - x$ *est une asymptote à* (C_f) *en* $-\infty$.

   (d) $f(x) - y = 2(x-1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. *Donc* C_f *est au dessus de* D *pour tout* $x \in]-\infty, 1]$ *et* C_f *est au dessous de* D *pour tout* $x \in [1, +\infty[$.

3. (a) $f'(x) = -1 + 2xe^x = e^x(2x - e^{-x}) = e^x g(x)$
   (b) $e^x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ *donc le signe de* $f'(x)$ *dépend de* $g(x)$. *D'après la question 4 partie B* $\forall x \in]-\infty, \alpha[f'(x) < 0$ *et* $f(x)$ *est décroissant et* $\forall x \in]\alpha, +\infty[f'(x) > 0$ *et* $f(x)$ *est croissant.*
   (c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) $f(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ *ou* $x = \ln(2)$.
   (b) $(\mathcal{C}_f)$ *et* (OI) *se coupent en* $A\begin{pmatrix}-\ln(2)\\0\end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
5. $f'(0) = -1$ *et* $f(0) = -1$ *donc* $(T) : y = -x - 1$.
6. *Représentation graphique :*



7. $\mathcal{A} = \int_0^1 [(1-x) - f(x)]\, dx.ua = -2\int_0^1 (x-1)e^x dx.ua = [-2(x-1)e^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x dx.ua = 2(e-2) \times 4cm^2$.

Solution Sujet 3. .

Exercice 1.

1. ***Question de cours***
   (a) *Soient* M, N *et* P *trois points distincts du plan, d'affixes respectives* m, n *et* p, $arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = arg(p-m) - arg(n-m) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MP}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

(b) $\left|\frac{p-m}{n-m}\right| = \frac{|p-m|}{|n-m|}$ *car* $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *donc* $\left|\frac{p-m}{n-m}\right| = \frac{MP}{MN}$.

2. *Figure 2*
3. (a) *Calculons les affixes* $z_{A'}$ *et* $z_{B'}$ *des images respectives de* A *et* B *:*

   $z_{A'} = (1+2i)(4+i) - 2 - 4i = 5iz_C$. *L'image de* A *et donc* C.

   $z_{B'} = (1+2i)(1+i) - 2 - 4i = -3 - i = z_D$. *L'image de* B *est donc* D.

   (b) *L'affixe* ω *du point fixe vérifie :* $\omega = (1+2i)\omega - 2 - 4i \to -2i\omega = -1 - 4i \to \omega 2 - i$. *Donc* f *admet un unique point invariant* $\Omega(2-i)$
4. (a) *Pour tout nombre complexe* z*, on :* $z' - z = (1+2i)z - 2 - 4i - z = 2iz - 2 - 4i = -2i(2 - i - z)$.

   (b) *Pour tout point* M *différent du point* Ω*, on a* $z \neq \omega$ *donc* $2 - i - z \neq 0$ *donc* $\frac{z'-z}{2-i-z} = 2i$ *c'est à dire* $\frac{z_{M'}-z_M}{z_\omega - z_M} = 2i$.

   D'après la question ***1.b)*** *on en déduit que* $\frac{MM'}{\Omega M} = |-2i| = 2$.

   D'après la question ***1.a)*** *on en déduit que* $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$.

   (c) *Le triangle* $\Omega MM'$ *est donc rectangle en* M *avec* $MM' = 2M\Omega$.
5. *On a :* $z_E = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   Pour construire le point E'*, on construit le point* E_1 *image de* ω *dans la rotation de centre* E *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *puis on construit le point* E' *image de* E_1 *dans l'homothétie de centre* E *et de rapport 2.*

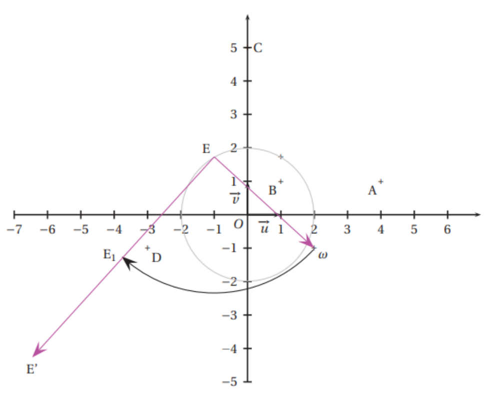


FIGURE 2 – Représentation graphique.

Exercice 2.

1. (a) *On peut avoir* $0, 1, 2$ *ou* 3 *boules rouges,* X *peut donc prendre ces quatre valeurs. L'univers est formé de tous les tirages de 3 boules choisies parmi les 13. Il y a donc* $\binom{13}{3} = 286$ *tirages possibles.*

- $X = 0$, *il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boules vertes parmi les 3, donc* $p(X=0) = \frac{\binom{3}{3}}{286} = \frac{1}{286}$.
- $X = 1$, *il faut et il suffit que l'enfant choisisse 1 boule rouge parmi 10 et 2 boules vertes parmi les 3, donc* $p(X=1) = \frac{\binom{10}{1} \times \binom{3}{2}}{286} = \frac{30}{286} = \frac{15}{143}$.
- $X = 2$, *il faut et il suffit que l'enfant choisisse 2 boule rouge parmi 10 et 1 boules vertes parmi les 3, donc* $p(X=1) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{3}{1}}{286} = \frac{135}{286}$.
- $X = 3$, *il faut et il suffit que que l'enfant choisisse 3 boules rouge parmi 10, donc* $p(X=3) = \frac{\binom{10}{3}}{286} = \frac{120}{286} = \frac{60}{146}$.

(b) *L'espérance mathématique de* X *est :* $E(X) = 0 \times \frac{1}{286} + 1 \times \frac{15}{143} + 2 \times \frac{135}{186} + 3 \times \frac{60}{143} = \frac{30}{13}$.

2. (a) *Arbre.*

(b) *D'après les formules des probabilités totales, on a :* $p(R) = p(R \cap C1) + p(R \cap C2) = p(C1) \times p_{C1}(R) + p(C2) \times p_{C2}(R) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{109}{182}$.

(c) *Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, a probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique est :* $p_R(C1) = \frac{p(C1 \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{70}{109}$.

3. *Comme l'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place, le jeu est répète de manière indépendante.*

(a) *L'événement contraire de "tirer au moins une boule rouge" est "tirer aucune boule rouge". Les tirages étant indépendants, la probabilité* p_n *que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix est :* $p_n = 1 - \left(p(\overline{R})\right)^n = 1 - (1 - p(R))^n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$.

(b) *Pour calculer la plus petite valeur de n pour laquelle* $p_n \leq 0.99$, *résolvons :* $p_n \leq 0.99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0.01 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{73}{182}\right)^n \geq \ln(0.01) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{73}{182}\right) \geq \ln(0.01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \Leftrightarrow n \geq 5.04$. *Donc à partir de* $n = 6$ *au aura* $p_n \geq 0.99$.

Problème.

$$f_k(x) = \ln(e^s + kx) - x;\ x \geq 0.$$

Étude préliminaire : $g(x) = \ln(1 + x) - x,\ x \geq 0$.

1. *La fonction g est dérivable sur* $[0; +\infty[$ *et* $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$. *La fonction g est donc décroissante sur* $0; +\infty[$.

2.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Pour tout $\alpha \geq 0$, $g(\alpha) \leq 0$ *ou* $\ln(1+\alpha) \leq \alpha$.

Partie A.

1. *La fonction* f_1' *est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et :* $f_1'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{1-x}{e^x+x}$ *du signe de* $1-x$ *sur* $[0;+\infty[$. *Donc la fonction est croissante sur* $[0;1[$ *et décroissante sur* $]1;+\infty[$.
2. *Pour tout* $x \geq 0$. $f_1(x) = \ln\left[e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right] - x = \ln(e^x) + \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) - x = x + \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) - x$. *Donc* $f_1(x) = \ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$. *Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ *:* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+1)-1$	$\searrow$	0

1. *La fonction* f_k *est dérivable sur* $[0;+\infty[$ *et :* $f_k'(x) = \frac{e^x+k}{e^x+kx} - 1 = k\frac{1-x}{e^x+kx}$ *du signe de* $1-x$ *sur* $[0;+\infty[$ *car* $k>0$. *Donc la fonction* f_k *est donc croissante sur* $[0;1]$ *et décroissante sur* $[0;+\infty[$.
2. *Même calcul que pour* f_1, $f_k(x) = \ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$ *et donc* $\lim\limits_{+\to+\infty} f_k(x) = 0$.
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+k)-1$	$\searrow$	0

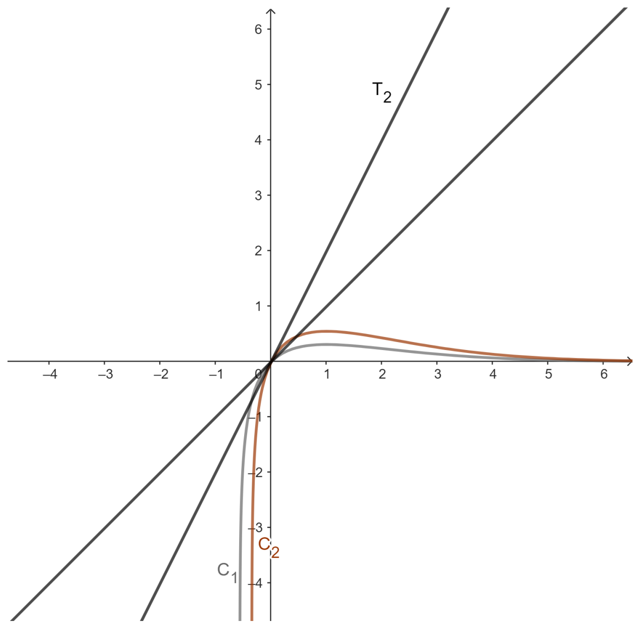
Pour $x \geq 0$, *soit* $d_k(x) = f_k(x) - \frac{k}{e}$. $d_k'(x) = f_x'(x) : d_k$. *varie comme* f_k.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$d_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$d_k(x)$	$-\frac{k}{e}$	$\nearrow$	$d_k(1)$	$\searrow$	$-\frac{k}{e}$

On a $d_k(1) = \ln(e+k) - k - \frac{k}{e} = \ln e + \ln\left(1+\frac{k}{e}\right) - 1 - \frac{k}{e} = \ln\left(1+\frac{k}{e}\right) - \frac{k}{e}$. *Comme,* $\ln(1+a) \leq a$ *pour tout* $a \geq 0$, *on aura* $\ln\left(1+\frac{k}{e}\right) - \frac{k}{e} \leq 0$. *Donc, pour tout* $x \geq 0, d_k(x) \leq 0 : f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.

4. T_k *pour équation :* $y - f_k(0) = f_k'(0)(x-0)$ *ou* $y = kx$.

5. $p < m$, $f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px) = \ln \frac{e^x+mx}{e^x+px}$. *On a,* $f_m(x) - f_p(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x+mx}{e^x+px} \geq 1 \Leftrightarrow e^x + mx \geq e^x + px \Leftrightarrow (m-p)x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. *Donc, pour* $m > p$, C_m *est au-dessus de* C_p.
6. *Représentation graphique :*



0.0.1 Partie C

1. *Comme la fonction* f_k *est intégrable et positive sur* $[0;\lambda], (0 < \lambda) : \mathcal{A}(\lambda) = \int_0^1 f_k(x)dx$.
   Pour $x \in [0;\lambda], k > 0, k\frac{x}{e^x}$, *donc* $f_k(x) \leq kxe^{-x}$. *Les fonction* f_k *et* $(x \to kxe^{-x})$ *sont intégrables* $[0;\lambda]$ *avec* $0 < \lambda$, *donc* $\int_0^\lambda f_k(x)dx \leq \int_0^\lambda kxe^{-x}dx$ *soit* $A(\lambda) \leq k\int_0^\lambda xe^{-x}dx$.
2. *Posons* $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & u(x) = -e^{-x} \end{cases}$.
   Les fonctions u, u', v, v' *sont dérivables sur* $[0;\lambda]$ *: on peut intégrer* $\int_0^\lambda xe^{-x}dx$ *par parties.*
   $\int_0^\lambda xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x}dx = -\lambda e^{-\lambda} - [e^{-x}]_0^\lambda = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.
3. *Comme on a* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda}\lambda = 0$, *et que* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_0^\lambda xe^{-x}dx = 1$.
   Donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} k\int_0^\lambda xe^{-x}dx = k$ *et par suite* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leq k$.

Solution Sujet 4.

Exercice 1.

1. *Le centre* Ω *du cercle* $(\mathcal{C})$ *est le milieu du diamètre [AB].* $z_\Omega = \frac{1-2i-2+2i}{2} = -\frac{1}{2}$. *Le centre* Ω *du cercle* $\mathcal{C}$ *a pour affixe* $-\frac{1}{2}$. *De plus* $AB^2 = (-3)^2 + 4^2 = 5^2$. *Le rayon de* $(\mathcal{C})$ *est donc* $R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$.
2. *On a :* $z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$. *Calcul de la distance* $\Omega D = |z_D - z_\Omega| =$

$\left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}\right| = \left|2+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} = R$. *Donc* D *est bien un point du cercle* $(\mathcal{C})$.

3. (a) *Par hypothèse* $\arg\left(z_E+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ *et comme* $E \in (\mathcal{C})$ $\left|z_E+\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$.

   (b) *On connaît le module et un argument du complexe* $z_E+\frac{1}{2}$, *on peut donc l'écrire sous forme exponentielle :* $z_E+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. *On déduit que :* $z_E = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}-2}{4}+i\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

4. (a) *On a* $z'+\frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+\frac{1}{2}\right)$ *qui peut s'écrire* $z'-z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_\Omega)$. *On reconnaît l'écriture complexe de la rotation* t *de centre* Ω *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$.

   (b) *Avec* $z=2$, *on a :* $z_{k'} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{5\sqrt{2}}{4} = z_E$. *Géométriquement :* K *est un point de* $(\mathcal{C})$ *car* $\Omega K = \frac{5}{2}$. *Son image est donc un point de* $(\mathcal{C})$ *telle que* $\left(\overrightarrow{\Omega K},\overrightarrow{\Omega K'}\right) = \frac{\pi}{4}$ *: c'est donc le point* E.

Exercice 2 .

1. *Figure.*

2. (a) $p(V) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$. $\qquad p(V) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

   (b) *En tournant la roue, la probabilité de gagner* 20€ *est* $\frac{1}{4}$, *celle de gagner* 100€ *est donc* $\frac{1}{8}$ *; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est* $\frac{5}{8}$. *On a donc* $p_V(R) = \frac{5}{8}$, *Or* $p(V\cap R) = p(V)\times p_V(R) = \frac{1}{10}\times\frac{5}{8} = \frac{1}{16}$.

   (c) *On a* $p(R) = p(J)+p(V\cap R) = \frac{3}{10}+\frac{1}{10} = \frac{29}{80}$.

   (d) $p(G_1) = p(V)\times p_V(G_1) = \frac{1}{10}\times p_V(G_1) = \frac{1}{10}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{80}$, $p(G_2) = p(V)\times p_V(G_2) = \frac{1}{10}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

3. (a) X *peut prendre les valeurs :* $-m; 100-m; 20-m; 0$.

   (b) $p(X=-m) = p(P) = 1-p(V)-p(J) = 1-\frac{1}{10}-\frac{3}{10} = \frac{6}{10}$, $p(X=20-m) = p(G_1) = \frac{1}{80}$, $p(20-m) = p(G_2) = \frac{1}{40}$, $p(X=0) = p(R) = \frac{29}{80}$.

   (c) *On a* $E(x) = \sum_{i=1}^{4} p_i\times x_i = -\frac{6m}{10}+\frac{100-m}{80}+\frac{20-m}{41}+0 = \frac{140-51m}{80}$.

   (d) *L'organisateur ne perdra pas d'argent si* $E(X)<0$, *c'est à dire* $\frac{140-51m}{80}<0$ *donc lorsque* $m>\frac{140}{51}\approx 2.75$. *Donc il faut que* m *soit au moins fixé à 3 euros.*

Problème.

Partie A

On considère l'équation différentielle : $y'-2y = e^{2x}$, *(E).*

1. $u(x) = xe^{2x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $u'(x) = e^{2x}+2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x)$. *Donc* $u'(x)-2u(x) = e^{2x}(1+2x)-2xe^{2x} = e^{2x}$. *La fonction* u *est une solution particulière de l'équation différentielle (E).*
2. $y'-2y=0 \Leftrightarrow t'=2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=2 \Leftrightarrow \ln|y| = 2x+k \Leftrightarrow y = k'e^{2x}$. *(avec* $k\in\mathbb{R}$*)*
3. v *solution de (E) si et seulement si* v $v'-2v = e^{2x}$. *Or on a vu que* $u'-2u = e^{2x}$ *donc par différence* $v'-u-2(v-u) = 0$ *c'est-à-dire que la fonction* $v-u$ *est solution de l'équation*

homogène (E_0).
Inversement si $v-u$ *est solution de* (E_0), *alors* $v'-u'-2(v-u)=0$, *soit* $v'-e^{2x}(1+2x)-2v+2xe^{2x}=0 \Leftrightarrow v'-2v=e^{2x}$ *ce qui signifie que* v *est solution de* (E).

4. *On a donc* $v-u$ *est solution de* (E_0) *signifie que* $v-xe^{2x}=k'e^{2x}$,
soit $v(x)=(k'+x)e^{2x}$ *avec*, $k'\in\mathbb{R}$.
5. *On a* $v(0)=(k'+0)e^{2\times 0}=k'=1$. *Par conséquent*, $v(x)=(x+1)e^{2x}$.

Partie B

1. *On a :*
$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$, *donc par produit de limites :* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
$f(x)=xe^{2x}+e^{2x}$ *or* $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{2x}=0$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ *(l'axe des abscisses est asymptote horizontale à* $\mathcal{C}$ *au voisinage de moins l'infini).*
2. *fonction* f *est un produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc sur cet intervalle :* $f'(x)e^{2x}+2(x+1)e^{2x}=e^{2x}(1+2x+2)=(2x+3)e^{2x}$. *On sait que quel que soit le réel* x, $e^{2x}>0$, *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $2x+3$.
$2x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}$. *la fonction* f *est croissante sur* $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ *et décoroissant sur* $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$. *Le signe* $f(x)$ *est celui de* $x+1$, *donc* f *est positive sur* $]-1;+\infty[$ *et négative sur* $]-\infty;-1[$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\frac{3}{2})=-\frac{1}{2e^3}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) *D'après le tableau de variations précédent la fonction* f *est négative sur l'intervalle* $]-\infty,-1[$. *Donc l'aire de la surface* $\mathcal{D}$ *est égale (en unités d'aire) à l'opposée de l'intégrale :* $\int_\alpha^{-1}f(x)dx$. *En posant* $u(x)=x+1$ *et* $v'(x)=e^{2x}$, *on obtient :* $u'(x)=1$ *et* $v'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. *Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur* $\mathbb{R}$, *on peut donc intégrer par parties :* $\int_\alpha^{-1}f(x)dx=\left[(x+1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^{-1}-1-\int_\alpha^{-1}e^{2x}dx=\left[(x+1)\times\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^{-1}=\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_\alpha^{-1}=-\frac{1}{2}e^{2\times(-1)}-\frac{\alpha}{2}e^{2\alpha}$. *Donc* $\mathcal{D}(\alpha)=\frac{\alpha}{2}e^{2\alpha}+\frac{1}{2}e^{-2}$.
(b) *On sait que* $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha}{2}e^{2\alpha}=0$, *donc* $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathcal{D}(\alpha)=\frac{e^{-2}}{2}\approx 0.068$.
4. (a) *Sur l'intervalle* $[-1,+\infty[$, *la fonction* f *est continue car dérivable et croît de zéro à plus l'infini ; d'après le théorème de la bijection il existe donc un réel unique* $x_0\in]-1,+\infty[$ *tel que* $f(x_0)=2$. *La calculatrice donne* $f(0.2)\approx 1.79$ *et* $f(0.3)\approx 2.37$, *donc* $x_0\in]0.2;0.3[$.
(b) *On a* $f(x_0)=2\Leftrightarrow(x_0+1)e^{2x_0}=2\Leftrightarrow\ln(x_0+1)+2x_0=\ln(2)\Leftrightarrow 2x_0=\ln(2)-\ln(x_0+1)\Leftrightarrow 2x_0=\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right)\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie C

1. (a) $0.2\leq x\leq 0.3\Rightarrow 1.2\leq x+1\leq 1.3\Rightarrow\frac{1}{1.3}\leq\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{1.2}\Rightarrow\ln\frac{2}{1.3}\leq\ln\frac{2}{x+1}\leq\ln\frac{2}{1.2}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.3}\leq\frac{1}{2}\ln\frac{2}{x+1}\leq\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.2}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.3}\leq h(x)\leq\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.2}$. *Or* $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.3}>0.21$ *et* $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1.2}<0.255$ *donc* $h(x)\in[0.2;0.3]$.

(b) *Pour* $x \in [0.2; 0.3], h'(x) = \frac{1}{2}\frac{-\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x+1}} = -\frac{1}{2(x+1)}$. *D'où* $0.2 \leq x \leq 0.3 \Rightarrow 1.2 \leq x \leq 1.3 \Rightarrow 2.4 \leq 2(x+1) \leq 2.6 \Rightarrow \frac{1}{2.6} \leq \frac{1}{2(x+1)} \leq \frac{1}{2.4}$. *Or* $\frac{1}{1.6} > 0.38$ *et* $\frac{1}{2.4} < 0.406$. *On en déduit que sur I,* $|h'(x)| \leq 0.42$.

2. (a) *On a* $|u_{n+1} - x_0| = |h(u_n) - h(x_0)|$ *; en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle* $[un; x0]$, *on obtient avec la majoration du nombre dérivé* $|h(u_n) - h(x_0)| \leq 0.42|u_n - x_0|$, *soit* $|u_{n+1} - u_0| \leq 0.42|u_n - x_0|$.

   Démonstration par récurrence :
   • *Initialisation :* $u_0 = 0.2$, *et* $0.2 \leq x_0 \leq 0.3$, *donc* $|u_n - x_0| < 0.1$. *Donc d'après la relation démontrée dans la question précédente :* $|u_1 - x_0| \leq 0.42 \times 0.1$.
   • *Hérédité : Supposons que pour tout* $p \in \mathbb{N}, |u_p - x_0| \leq 0.1 \times (0.42)^p$. *D'après la relation démontré dans la question précédente :* $|u_{p+1} - x_0| \leq 0.42|u_p - x_0| \leq 0.42 \times 0.1 \times (0.42)^p$, *soit* $|u_{p+1} - x_0| \leq 0.1 \times 0.42^{p+1}$ *: l'hérédité est démontrée. Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang quelconque elle l'est au rang suivant : on a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n on a :* $|u_n - x_0| \leq 0.1 \times (0.42)^n$.

   (b) *Comme* $0.42 < 1$, *on sait que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.42^n = 0$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_0| = 0$ *ce qui signifie que la limite de la suite* (u_n) *est* x_0.

   (c) *D'après la question précédente il faut trouver un entier p tel que :* $0.1 \times (0.42)^p < 10^{-5} \Leftrightarrow 0.42^p < 10^{-4} \Leftrightarrow p\ln(0.42) - 4\ln 10 \Leftrightarrow p > \frac{-4\ln 10}{\ln 0.42} \approx 10.6$. *Il faut prendre* $p \geq 11$.

   (d) *On obtient* $u_{11} \approx 0.239296$, *donc* $\beta = 0.23930$. *On obtient :* $f(\beta) \approx 1.99999904$, $f(\beta + 10^{-5}) \approx 2.000055$. *On a donc* $f(\beta) < 2 < f(\beta + 10^{-5})$, *donc la valeur décimale approchée par défaut de* x_0 *à* 10^{-5} *près est 0.23930.*

Solution Sujet 5.

Exercice 1

1.

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

   (a) $(f \circ f)(z) = f\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \overline{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times z = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) z = z.$

   (b) *On voit que :* $z \to s(z) = \overline{z} \to R[S(z)] = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = f(z)$.
   R est la symétrie autour de l'axe des abscisses.
   Ensuite on a vu à la question 1. que $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2 = 1$. $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *est donc un complexe de module 1 ; on peut l'écrire :* $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   On reconnaît dans R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. *On a donc* $f = R \circ S$.

   (c) *R est la composée de la symétrie S autour de l'axe des abscisses et de la symétrie d'axe* D_1, *cet axe contenant O et faisant un angle de* $\frac{\pi}{6}$ *avec l'axe des abscisses. On a donc*

$f = R \circ S = S \circ S = S_{D_1} \circ S \circ S = S_{D_1}$.

$$z" = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. (a) *z est invariant par g si et seulement si :* $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x + iy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x - iy) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y - 1 \\ 3y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y - 1 \\ \sqrt{3}y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = x + 1 - 1$. *On a donc* $x - y\sqrt{3} + 1 = 0$ *: c'est l'équation d'une droite.*

   (b) *On voit que g est la composée de f et de la translation T définie par* $z \to z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $g = T \circ f$ *où T est la translation de vecteur $\vec{t}$ d'affixe* $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (c) *On a* $\left(\vec{u}, \vec{t}\right) = arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. *$\vec{t}$ est donc normal à un vecteur directeur de (D_1) : T est la composée de la symétrie axiale S_{D_1} et de la symétrie axiale S_{D_2} où (D_2) est la parallèle à (D_1) contenant le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$. Donc :* $g = T \circ f = (S_{D_2} \circ S_{D_1}) \circ S_{D_1} = S_{D_2} \circ (S_{D_1}) \circ S_{D_1} = S_{D_2}$. *$g$ est donc la réflexion d'axe (D_2).*

   (d) *Si $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est le point de D_2 précédent son image par g est le point d'affixe* $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \overline{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Le point A est donc invariant par g. La droite (D_2) est la droite contenant A parallèle à (D_1), donc normale à $\vec{t}$.*

Exercice 2.

1. *Les coordonnées (x_G, y_G) du point moyen G sont :*

$$x_G = \frac{2 + 5 + 6 + 10 + 12}{5} = \frac{35}{5} = 7 \text{ et } y_G = \frac{84 + 70 + 70 + 54 + 49}{5} = \frac{327}{5} = 65.4.$$

2. *Calculons d'abord les coordonnées de G_1 et G_2.*
   $G_1\left(\frac{2+5+6}{3}; \frac{84+70+70}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}; \frac{224}{3}\right) \approx (4.33; 74.67)$, *et* $G_2\left(\frac{10+12}{2}; \frac{54+49}{2}\right) = \left(\frac{22}{2}; \frac{103}{2}\right) \approx (11; 51.5)$.
   La droite D_1 a pour équation $y = a_1x + b_1$, avec $a_1 = \frac{51.5-74.67}{11-4.33} = \frac{-23.47}{6.67} = -3.47$. $G_2 \in (D_1) \Leftrightarrow 51.5 = -3.47 \times 11 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = 89.92$. *Donc* $(D_1) : y = -3.47x + 89.67$.

   $G \in (D_1) \Leftrightarrow 65.4 = -3.47 \times 7 + 89.67 \Rightarrow 65.4 \approx 65.4$ *Donc $G \in (D_1)$.*

3. *Par la méthode de moindres carrés,* $D_2 : y = \frac{cov(X,Y)}{var(X)}x + b$.
   $cov(X, Y) = \left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} x_k y_k\right) - x_G \times y_G = \frac{1}{5} \times 2066 - 457.8 = -44.6$
   $var(X) = \left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} x_k^2\right) - x_G^2 = \frac{1}{5} \times 309 - 49 = 12.8$, *donc* $(D_2) : y = \frac{-44.6}{12.8}x + b = -3.48x + b$.
   $G \in (D_2) \Leftrightarrow y_G = -3.48x_G + b \Rightarrow b = y_G + 3.48x_G = 65.4 + 3.48 \times 7 = 89,76$. *Donc* $(D_2) : y = -3.48x + 89.76$.

4. *Pour* $y=35$, *on a :* $35=-3.48x+98.76 \Rightarrow x=\frac{35-98.76}{-3.48}=18.32$.
   Pour avoir des $y<0$ *lorsque* $-3.48x+98.76<0 \Rightarrow x>\frac{-98.76}{-3.48}\approx 28.37$. *Donc* $y<0$ *lorsque* $x\in]28.37,+\infty[$.
5. *Le coefficient de corrélation* $R=\frac{cov(X,Y)}{\sigma X,\sigma Y}$.
   $var(Y)=\left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}y_k^2\right)-y_G^2=\frac{1}{5}\times 22173-4277.16=17895.84$. *Donc* $R=\frac{-44.6}{\sqrt{12.8}\times\sqrt{17895.84}}=-0.09$. *R est proche de 0, donc il y a pas de corrélation linéaire entre X et Y.*

Problème.

Partie A.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1$, *donc* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-1\right)=0$ *et en fin,* $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)=-\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}-1=+\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt{1+x}-1=+\infty$.
2. f *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et sur cet intervalle :*

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+x}-1}=\frac{1}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$$

   Or $x>0\Rightarrow x+1>1\Rightarrow\sqrt{x+1}>1\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-1>0$ *: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro, donc sur* $]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ *: la fonction est croissante de 0 à plus l'infini.*
3. *On a* $f(3)=\ln\left(\sqrt{1+3}-1\right)=\ln\left(\sqrt{4}-1\right)=\ln 1=0$. *Donc* $A(3;0)$. *D'autre par* $f(\frac{5}{4})=\ln\left(\sqrt{1+\frac{5}{4}}-1\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{9}{4}}-1\right)=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$. *Alors* $B(\frac{5}{4};-\ln 2)$. *Donc* $P(\frac{5}{4},0)$ *et* $H(0;-\ln 2)$.

Partie B.

1. (a) *On sait que la rotation de centre O et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *associe au point M d'affixe z, le point* M' *d'affixe* z' *tel que :* $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z=iz$. *On a donc* $z'=x'+iy'=i(x+iy)=ix-y$, *soit en identifiant les parties réelle et imaginaires :* $\begin{cases}x'=-y\\ y'=x\end{cases}$. *On obtient de façon immédiate :* $\begin{cases}x=y'\\ y=-x'\end{cases}$.
   (b) *D'après la question précédente* $A'(0;3), B(\ln 3;\frac{5}{4}), P(0;\frac{5}{4})$.
2. (a) $M(x,y)$ *appartient à* $\mathcal{C}$ *si et seulement* $y=\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ *soit en remplaçant s et y avec les formules trouvées :* $-x'=\ln\left(\sqrt{1+y'}-1\right)\Leftrightarrow e^{-x}=\sqrt{1+y'}-1\Leftrightarrow e^{-x}+1=\sqrt{1+y'}\Leftrightarrow(e^{-x}+1)^2=1+y'\Leftrightarrow e^{-2x'}+2e^{-x'}=y'$ *ce qui signifie que le points appartient à* (Γ).
   (b)

Partie C.

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. *On a* $\int_0^{\ln 2} g(x)dx = \int_0^{\ln 2}(e^{-2x} + 2e^{-x})dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} - \left(-\frac{1}{2}e^0 - 2e^0\right) = -\frac{1}{2e^{\ln 2}} - \frac{2}{e^{\ln 4}} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{8}$. *La fonction* g *est bien entendu positive sur* $[0; \ln 2]$, *donc l'intégrale précédente est égale en unités d'aire à l'aire de la surface limitée par la courbe* (Γ), *l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x = 0$ *et* $x = \ln 2$.
2. (a) *La droite* $x = \ln 2$ *est la droite* $(H'B')$, *donc l'image de la surface* $\mathcal{D}$ *et la surface dont on vient de calculer l'aire. On a donc inversement* $\mathcal{A} = \frac{11}{8}$.

   (b) *On a vu que sur* $\left[\frac{5}{4}; 3\right]$, *la fonction* f *est négative, donc l'intégrale* $I = \int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)dx$ *est l'opposée de l'aire de de la partie du plan limitée par la courbe* $(\mathcal{C})$, *l'axe des abscisses et les segments* $[BP]$ *et* $[PA]$.
   On a donc $\mathcal{A} = aire(OHBP) - I$ *d'où* $I = \frac{5}{4}\ln 2 - \mathcal{A} = \frac{5}{4}\ln 2 - \frac{11}{8} \approx -0.51$.